変形の要旨だけだけど…

1　変形の説明

$$\sum_{i=1}^{|E|-1} \sum_{j=i+1}^{|E|} (x'_j - x'_i) \tag{1}$$

式 1 の意味を考えれば，$j > i$ となるようなすべての i, j の組について $x'_j - x'_i$ を足し合わせたものであることが分かる．

ここで，ある x'_n に着目して，式 1 を展開したときの x'_n の係数がどうなるかを考える．x'_n が出てくるような $x'_j - x'_i$ のパターンは次の二通り．

1. $j > n$ なる j について，$x'_j - x'_n$
2. $n > i$ なる i について，$x'_n - x'_i$

このパターンがそれぞれ何通りあるか考えよう．まず，$j > n$ なる j について，$x'_j - x'_n$ となるパターンは，$j = n+1, n+2, \ldots, |E|$ のときで，$|E| - n$ 通り．そして，$n > i$ なる i について，$x'_n - x'_i$ となるパターンは，$j = 1, 2, \ldots, n-1$ のときで，$n - 1$ 通り．

つまり，式 1 で，$-x'_n$ は $|E| - n$ 回，x'_n は $n - 1$ 回出てくることになるので，式 1 を展開したときの x'_n の係数は $(n-1) - (|E| - n) = 2n - 1 - |E|$ となる．

したがって，式 1 は各 x'_i の係数をまとめた形で，次のように表せる．

$$\sum_{i=1}^{|E|} (2i - 1 - |E|) x'_i \tag{2}$$

2　コメント

多分発想としては，「そのまま計算すると $O(n^2)$ になるからなんとかしたい」ってのが一番根本なんじゃないかなぁ．$|E|$ 個の変数がある以上 $O(1)$ は相当ムリそうなのは分かりたいところ．そこで，今回みたいに「展開したときの各変数の係数に着目してやるとうまくいくことがある」ってのが一般則っぽそう．

熟練すればもっと感覚的に「今回はこのやり方でいけるな」とかなりそうだけど，僕がそこまで達してないので知らな〜い．もう一年半くらい AtCoder やってないし…．