

Группа **Р3117**

Работа выполнена _____

Студент **Игнатова Г.Г.**

Отчет принят _____

Преподаватель **Рудель А.Е.**

К работе допущен _____

Рабочий протокол и отчет по лабораторной работе №1.01

Исследование распределения случайной величины

1. Цель работы.

Исследовать распределение случайной величины с помощью эксперимента и сравнить с теоретическим распределением случайной величины.

2. Задачи, решаемые при выполнении работы.

1. Провести многократные измерения определенного интервала времени.
2. Построить гистограмму распределения результатов измерения.
3. Вычислить среднее значение и дисперсию полученной выборки.
4. Сравнить гистограмму с графиком функции Гаусса с такими же как и у экспериментального распределения средним значением и дисперсией.

3. Объект исследования.

Интервал времени между запуском и остановкой секундомера.

4. Метод экспериментального исследования.

Многократные прямые измерения определённой величины человеком.

5. Рабочие формулы и исходные данные.

1. Плотность вероятности:

$$\rho(t) = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta t \rightarrow 0}} \frac{\Delta N}{N \Delta t} = \frac{1}{N} \frac{dN}{dt}$$

N – полное количество измерений;

ΔN – количество результатов, попавших в интервал $[t; t + \Delta t]$;

$\frac{\Delta N}{N}$ – доля результатов, попавших в указанный интервал;

t – время одного замера.

2. Функция Гаусса:

$$\rho(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t - \langle t \rangle)^2}{2\sigma^2}\right)$$

σ – среднеквадратичное отклонение;

$\langle t \rangle$ – среднеарифметическое всех результатов измерений.

3. Среднеарифметическое результатов измерений:

$$\langle t \rangle_N = \frac{1}{N} (t_1 + t_2 + \dots + t_N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_i$$

4. Выборочное среднеквадратичное отклонение:

$$\sigma_N = \sqrt{\frac{1}{(N-1)} \sum_{i=1}^N (t_i - \langle t \rangle)^2}$$

5. Максимальная плотность вероятности:

$$\rho_{max} = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}}$$

6. Соотношение для вероятности попадания результата измерения в интервал $[t_1; t_2]$:

$$P(t_1 < t < t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \rho(t) dt \approx \frac{N_{12}}{N}$$

6. Измерительные приборы.

№ п/п	Наименование	Тип прибора	Используемый диапазон	Погрешность прибора
1	Секундомер	Электронный	[0,01; 60] с	0.005 с
2	Секундомер	Механический	[0,2; 60] с	0,1 с

7. Схема установки.

В работе используются идущие механические часы и цифровой секундомер. Первый прибор задаёт интервал времени, который многократно измеряется вторым.

8. Результаты прямых измерений и их обработки.

Таблица 1. Результаты прямых измерений (Приложение 1)

Примеры расчетов:

$$\langle t \rangle_{50} = \frac{1}{50} (10,99 + 10,90 + \dots + 11,14) = 11,088(c)$$

$$t_1 - \langle t \rangle_{50} = 10,99 - 11,088 = -0,098(c)$$

$$(t_1 - \langle t \rangle_{50})^2 = (-0,098)^2 = 0,010(c^2)$$

$$\sum_{i=1}^N (t_i - \langle t \rangle_N) = (-0,098) + (-0,188) + \dots + 0,052 = -0,171 \cdot 10^{-12} (c)$$

$$\sigma_N = \sqrt{\frac{1}{49} \sum_{i=1}^{50} (t_i - 11,088)^2} = 0,164 (c)$$

$$\rho_{max} = \frac{1}{0,164 \sqrt{2\pi}} = 2,43 (c^{-1})$$

9. Расчет результатов косвенных измерений.

Таблица 2. Данные для построения гистограммы (Приложение 2)

$$t_{min} = 10,77$$

$$t_{max} = 11,44$$

$$\text{Количество интервалов: } m = \sqrt{N} = 7$$

$$\rho(10,82) = \frac{1}{0,164 \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{(10,82 - 11,09)^2}{2 * 0,164^2} \right)$$

Таблица 3. Стандартные доверительные интервалы (Приложение 3)

Примеры расчетов:

$$\langle t \rangle_N + \sigma_N = 11,088 + 0,164 = 11,252 \text{ (с)}$$

$$\langle t \rangle_N - \sigma_N = 11,088 - 0,164 = 10,924 \text{ (с)}$$

$$\langle t \rangle_N + 2\sigma_N = 11,088 + 2 \cdot 0,164 = 11,416 \text{ (с)}$$

$$\langle t \rangle_N - 2\sigma_N = 11,088 - 2 \cdot 0,164 = 10,76 \text{ (с)}$$

$$\langle t \rangle_N + 3\sigma_N = 11,088 + 3 \cdot 0,164 = 11,58 \text{ (с)}$$

$$\langle t \rangle_N - 3\sigma_N = 11,088 - 3 \cdot 0,164 = 10,596 \text{ (с)}$$

$$\sigma_N: \frac{\Delta N}{N} = \frac{37}{50} = 0,74$$

$$2\sigma_N: \frac{\Delta N}{N} = \frac{48}{50} = 0,96$$

$$3\sigma_N: \frac{\Delta N}{N} = \frac{50}{50} = 1$$

10. Расчет погрешностей измерений (для прямых и косвенных измерений).

Среднеквадратичное отклонение среднего значения:

$$\sigma_{\langle t \rangle} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (t_i - \langle t \rangle)^2} = 0,0232 \text{ (с)}$$

Доверительная вероятность: $\alpha=0,95$, $N=50$

Табличное значение коэффициента Стьюдента: 2,0086

Доверительный интервал: $\Delta t = t_{\alpha, N} \cdot \sigma_{\langle t \rangle} = 2,0086 \cdot 0,023 = 0,047 \text{ (с)}$

11. Графики (Приложение 4).

График 1. Распределение значений случайной величины.

12. Окончательные результаты.

$$t = (11,088 \pm 0,329) \text{ с при } \alpha=0,95$$

13. Выводы и анализ результатов работы.

Во время эксперимента было исследовано распределение случайной величины. Были вычислены среднее значение и дисперсия полученной выборки. С помощью гистограммы распределения результатов нами был наглядно изучен закон распределения случайной величины. Но из-за довольно малого числа опытов гистограмма и график совпадают не до конца.

14. Дополнительные задания.

1. Являются ли, по вашему мнению, случайными следующие физические величины:

- плотность алмаза при 20°C
- напряжение сети
- сопротивление резистора, взятого наугад из партии с одним и тем же номинальным сопротивлением
- число молекул в 1 см^3 при нормальных условиях?

Приведите другие примеры случайных и неслучайных физических величин.

2. Изучая распределение ЭДС партии электрических батареек, студент использовал цифровой вольтметр. После нескольких измерений получились такие результаты (в вольтах): 1,50; 1,49; 1,50; 1,50; 1,49. Имеет ли смысл продолжать измерения? Что бы вы изменили в методике этого эксперимента?

3. При обработке результатов измерений емкости партии конденсаторов получено: $\langle C \rangle = 1,1 \text{ мкФ}$, $\sigma = 0,1 \text{ мкФ}$. Если взять коробку со 100 конденсаторами из этой партии, то сколько среди них можно ожидать конденсаторов с емкостью меньше 1 мкФ? больше 1,3 мкФ?

15. Выполнение дополнительных заданий.

1. Нет, для конкретного алмаза. Да, если это случайные алмазы.
Да, так как напряжение в сети может изменяться.
Да, так как фактическое сопротивление не всегда равно номинальному, а резистор взят случайно.
Да, так как движение молекул хаотично.
2. Смысла продолжать измерения нет. Необходим более точный прибор.
3. $N_{<1\text{мкФ}} = \frac{N-0,68N}{2} = 0,16N = 16$; $N_{>1,3\text{мкФ}} = \frac{N-0,96N}{2} = 0,02N = 2$
 $(1,1 \pm \sigma)$ $(1,1 \pm 2\sigma)$

16. Замечания преподавателя (исправления, вызванные замечаниями преподавателя, также помещают в этот пункт).

Приложение 1

t_i, c	$t_i - \langle t \rangle_N, c$	$(t_i - \langle t \rangle_N)^2, c^2$			
10,99	-0,098	0,010	11,42	0,332	0,110
10,90	-0,188	0,035	11,26	0,172	0,030
10,93	-0,158	0,025	11,10	0,012	0,000
11,27	0,182	0,033	11,07	-0,018	0,000
11,20	0,112	0,013	11,24	0,152	0,023
11,37	0,282	0,080	11,10	0,012	0,000
10,92	-0,168	0,028	10,94	-0,148	0,022
11,44	0,352	0,124	10,94	-0,148	0,022
11,17	0,082	0,007	11,13	0,042	0,002
11,21	0,122	0,015	10,77	-0,318	0,101
10,93	-0,158	0,025	10,91	-0,178	0,032
11,05	-0,038	0,001	10,99	-0,098	0,010
11,41	0,322	0,104	11,17	0,082	0,007
11,19	0,102	0,010	11,10	0,012	0,000
11,04	-0,048	0,002	11,12	0,032	0,001
11,09	0,002	0,000	10,83	-0,258	0,067
10,87	-0,218	0,048	11,00	-0,088	0,008
11,28	0,192	0,037	10,98	-0,108	0,012
11,34	0,252	0,064	11,25	0,162	0,026
11,12	0,032	0,001	10,98	-0,108	0,012
10,99	-0,098	0,010	11,02	-0,068	0,005
11,23	0,142	0,020	10,95	-0,138	0,019
10,93	-0,158	0,025	10,82	-0,268	0,072
11,23	0,142	0,020	11,08	-0,008	0,000
11,01	-0,078	0,006	11,14	0,052	0,003
$\langle t \rangle_N = 11,088$			$\sum_{i=1}^N (t_i - \langle t \rangle_N) = -0,1705 \times 10^{-12}$		$\sigma_N = 0,164 (c)$ $\rho_{\max} = 2,43 (c^{-1})$

Приложение 2

Границы интервалов, с	ΔN	$\frac{\Delta N}{N \Delta t}, c^{-1}$	t, c	ρ, c^{-1}
$\geq 10,77$	3	0,6	10,818	0,626
$< 10,87$				
$\geq 10,87$	10	2	10,914	1,379
$< 10,96$				
$\geq 10,96$	10	2	11,009	2,162
$< 11,06$				
$\geq 11,06$	10	2	11,105	2,415
$< 11,15$				
$\geq 11,15$	8	1,6	11,201	1,922
$< 11,25$				
$\geq 11,25$	5	1	11,296	1,089
$< 11,34$				
$\geq 11,34$	4	0,8	11,392	0,44
$< 11,44$				

	Интервал, с		ΔN	$\frac{\Delta N}{N}$	Р
	от	до			
$\langle t \rangle_N \pm \sigma_N$	10,924	11,252	37	0,74	0,683
$\langle t \rangle_N \pm 2\sigma_N$	10,760	11,416	48	0,96	0,954
$\langle t \rangle_N \pm 3\sigma_N$	10,596	11,580	50	1	0,997