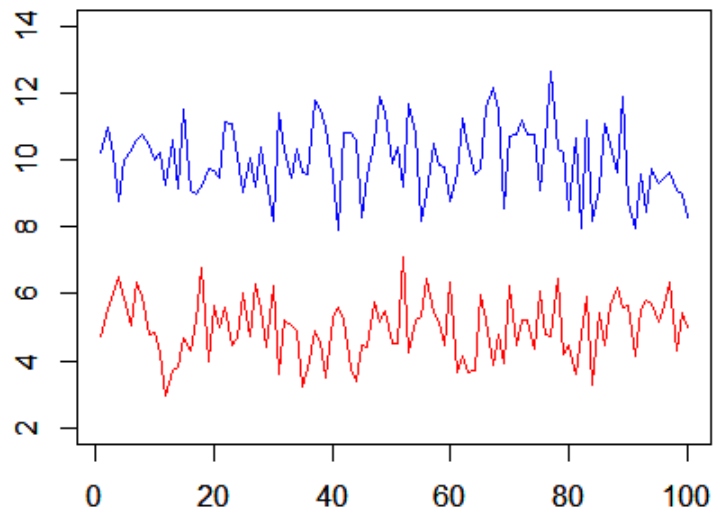


Granger因果とマーケティング



原田悠介

Granger因果

Granger因果：

2つの時系列データ間の因果関係を
特定するためのフレームワーク
(厳密には因果関係を証明しない:後述)
経済学や金融の分野で使われやすい



C. W. J. Granger (1934 - 2009)

「時系列分析手法の確立」で
2003年ノーベル経済学賞

Contents

1. 時系列分析の基礎
2. ARモデル・VARモデルの概略
3. Granger因果
4. Granger因果を議論している諸研究
5. Reference

1.時系列分析の基礎



1-1.時系列分析の目的

- 時系列データ $\{y_t\}_{t=1}^T$
 - 時点で順序付けられたデータの集合

- $\{y_t\}_{t=1}^T$ を確率過程 $\{y_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ からのランダムサンプリングととらえ、何らかの構造を仮定することで仮説検証や予測を行う
 - 構造を把握するとき自己共分散が重要になる

1-2.定常性

- 定常性 (stationarity)...確率過程の不変性
 - 弱定常性 (単に定常性とも)
 - $E[y_t] = \mu \rightarrow$ 平均回帰性
 - $Cov(y_t, y_{t-k}) = E[(y_t - \mu)(y_{t-k} - \mu)] = \gamma_k$
 - 強定常性
 - $(y_t, y_{t+1}, \dots, y_{t+K})'$ の同時分布が不変

1-3.ホワイトノイズ

- ホワイトノイズ

- 時系列モデルの攪乱項として使われる

- $E[\varepsilon_t] = 0$

- $\gamma_k = E[\varepsilon_t \varepsilon_{t-k}] = \begin{cases} \sigma^2 & (k = 0) \\ 0 & (k \neq 0) \end{cases}$

- このとき, $\varepsilon_t \sim W.N.(\sigma^2)$ とあらわす

2.ARモデル・VARモデル

2-1.AR(自己回帰)モデル

- 過程が自身の過去に回帰された形で表現されるモデル
 - AR(1)モデル
 - $y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim W.N.(\sigma^2)$
 - AR(p)モデル
 - $y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim W.N.(\sigma^2)$

2-2.ARモデルの定常条件

– AR特性方程式

$$1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p = 0$$

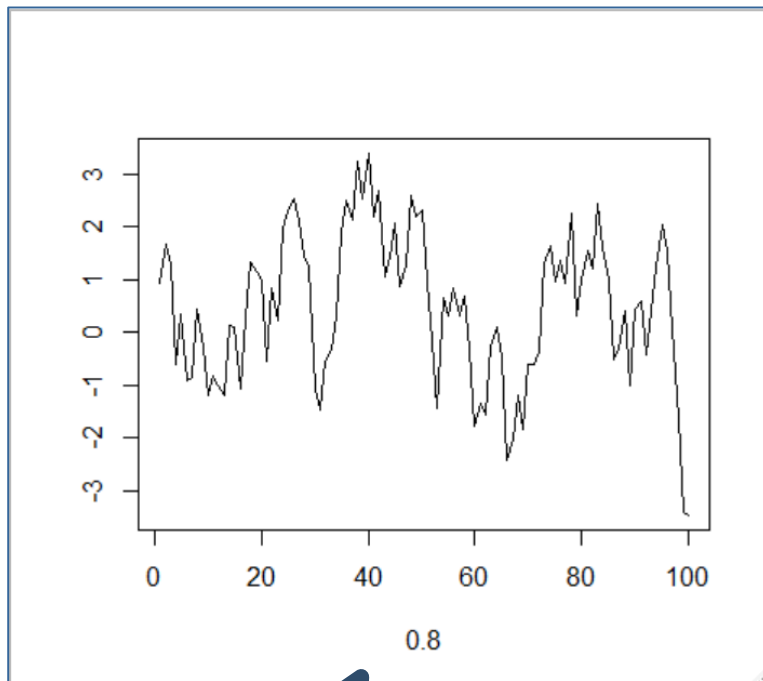
のすべての複素数解の絶対値が1より大きい

Ex.) AR(1)モデル...

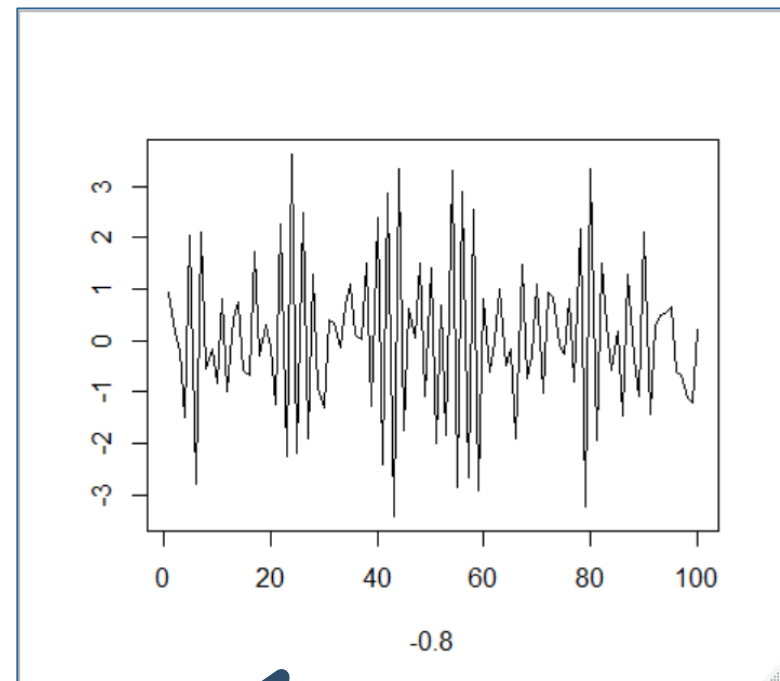
$$z = \phi_1^{-1} > 0 \Rightarrow |\phi_1| < 1$$

2-3.AR(1)モデルの例

- 定常



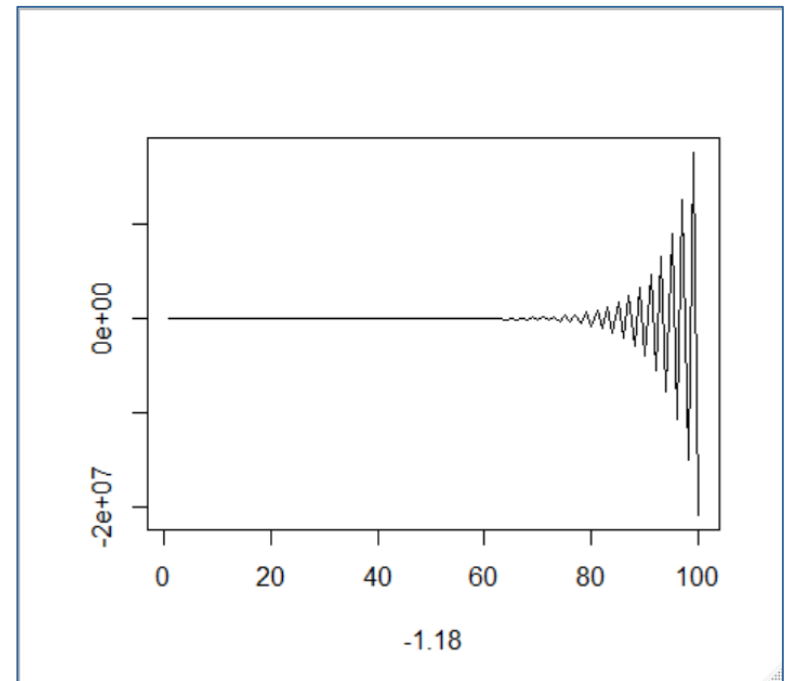
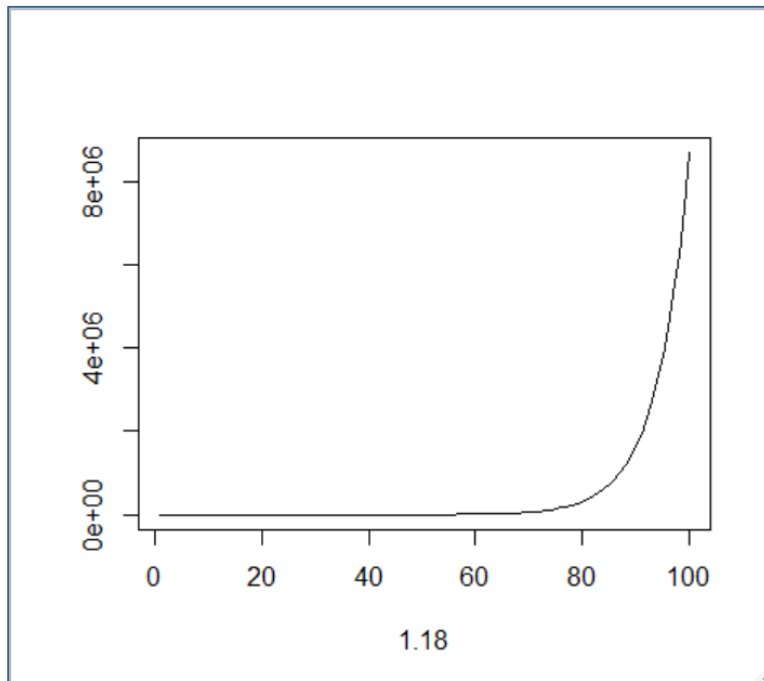
比較的なめらか



ギザギザになる

2-4.AR(1)モデルの例

- 非定常



経済データにありがち

階差をとる・変化率に直す
などの加工で定常過程にしてから分析する

2-5.VAR(ベクトル自己回帰)モデル

- ARモデルを多変量に拡張したもの
 - VAR(p)モデル

$$\mathbf{y}_t = c + \Phi_1 \mathbf{y}_{t-1} + \cdots + \Phi_p \mathbf{y}_{t-p} + \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim W.N.(\Sigma)$$

ただし、

- $\mathbf{y}_t = (y_{1t}, \dots, y_{pt})'$
- Φ_i は $n \times n$ 行列

- AICまたは、経験則によって次数を選択する
- OLSで推定可能

2-6.VARモデルの定常条件

– AR特性方程式

$$|I - \Phi_1 z - \dots - \Phi_p z^p| = 0$$

のすべての複素数解の絶対値が1より大きい

3.Granger因果 \longleftrightarrow

3-1.Granger因果とは

- Granger(1969) によって提案
- 明確な理論・仮説なしに、データのみから因果関係を推論できる
- VARモデルの重要な応用法の一つ

3-2.Grenger因果の定義

- ・ 沖本(2010)から引用

定義 4.1 (グレンジャー因果性) 現在と過去の x の値だけに基づいた将来の x の予測と、現在と過去の x と y の値に基づいた将来の x の予測を比較して、後者の MSE のほうが小さくなる場合、 y_t から x_t へのグレンジャー因果性 (Granger causality) が存在するといわれる。

定義 4.2 (一般的なグレンジャー因果性) \mathbf{x}_t と \mathbf{y}_t をベクトル過程とする。また、 \mathbf{x} と \mathbf{y} の現在と過去の値を含む、時点 t において利用可能な情報の集合を Ω_t とし、 Ω_t から現在と過去の \mathbf{y} を取り除いたものを $\tilde{\Omega}_t$ とする。このとき、 $\tilde{\Omega}_t$ に基づいた将来の \mathbf{x} の予測と、 Ω_t に基づいた将来の \mathbf{x} の予測を比較して、後者の MSE のほうが小さくなる場合、 \mathbf{y}_t から \mathbf{x}_t へのグレンジャー因果性が存在するといわれる。ここで、MSE の大小は行列の意味での大小であることに注意されたい。

3-2.Granger因果の意味

時系列XのVARモデルのOLS残差に比べて、
時系列Yを加えたVARモデルのOLS残差が
小さくなるなら、

「YからXへのGranger因果性が存在する」という

3-3.Granger因果性検定の手順

(1)VARモデルにおける y_{kt} をOLSで推定し、
残差平方和を SSR_1 とする

(2)VARモデルにおける y_{kt} に制約を課したモデルを
OLS推定し残差平方和を SSR_0 とする

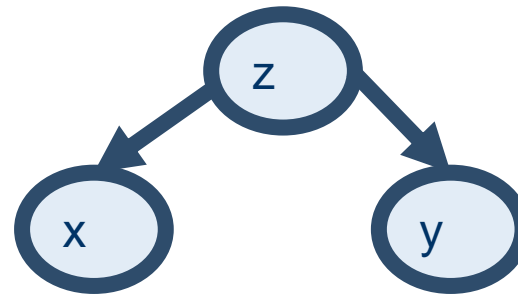
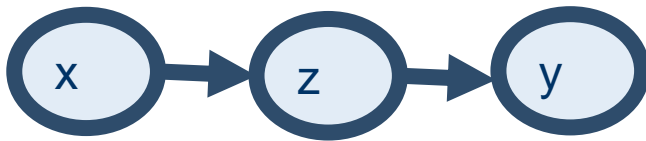
(3)F統計量を計算
$$F \equiv \frac{SSR_0 - SSR_1 / r}{SSR_1 / (T - np - 1)}$$

(4) rF を $\chi^2(r)$ の95%点と比較して、 rF が大きければ
有意水準5%である変数から y_{kt} へグレンジャー因果
性が存在すると判断する

※wald統計量を使うケースもある

3-5. Granger因果の注意点

- 通常の因果関係を意味しない
 - 雷光と雷鳴の関係(あくまで時系列上の先行性)
- つまり以下のものを区別できない



- 解決法として偏Granger因果分析という手法があるらしい
- Guo et al.(2008)→まだ読んでない

4.研究例

3つ紹介します

1. Leeflang and Wittink (1992)

- 競争的反応の因果関係进行分析

2. Krider, Li, Liu and Weinberg (2005)

- 映画産業における需給間のリード・ラグ効果进行分析

3. 宮崎, 星野 (2013)

- セグメント別の選好の時間的变化进行分析

4-1. Leeflang and Wittink (1992)

“Diagnosing competitive reactions using (aggregated) scanner data”

- 概要
 - 小売店レベルでのマーケティング政策に対する競争反応の構造を分析する
 - あるブランドの価格が、他のブランドの価格変更や販促行動によって受ける影響を分析する際にグレンジャー因果分析を使用
- データ
 - オランダのスーパーマーケットで得られた生活必需品の販売データ76週間分

4-1. Leeflang and Wittink (1992)

モデル

The following competitive reaction functions are used:

for $i = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{p_{it}}{p_{i,t-1}}\right) = & \alpha_i + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \sum_{t^*=1}^{T^*+1} \beta_{ijt^*} \ln\left(\frac{p_{j,t-t^*+1}}{p_{j,t-t^*}}\right) \\ & + \sum_{t^*=2}^{T^*+1} \beta_{iit^*} \ln\left(\frac{p_{i,t-t^*+1}}{p_{i,t-t^*}}\right) \\ & + \sum_{j=1}^n \sum_{t^*=1}^{T^*+1} \sum_{x=1}^4 \tau_{xijt^*} (wx_{j,t-t^*+1} \\ & \quad - wx_{j,t-t^*}) + \epsilon_{it} \quad (6) \end{aligned}$$

where $x = 1 = s$, $x = 2 = r$, $x = 3 = b$, $x = 4 = f$, and $t = (T^* + 2), \dots, T$.

Also, for $i = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} (wx_{it} - wx_{i,t-1}) \\ = & \delta_i + \sum_{j=1}^n \sum_{t^*=1}^{T^*+1} \mu_{xijt^*} \ln\left(\frac{p_{j,t-t^*+1}}{p_{j,t-t^*}}\right) \\ & + \sum_{t^*=2}^{T^*+1} \theta_{xxiit^*} (wx_{i,t-t^*+1} - wx_{i,t-t^*}) \\ & + \sum_{t^*=1}^{T^*+1} \sum_{\substack{y=1 \\ y \neq x}}^4 \theta_{xyiit^*} (wy_{i,t-t^*+1} - wy_{i,t-t^*}) \\ & + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \sum_{t^*=1}^{T^*+1} \sum_{y=1}^4 \theta_{xyijt^*} \\ & \times (wy_{j,t-t^*+1} - wy_{j,t-t^*}) + \Phi_{it} \quad (7) \end{aligned}$$

p_{it} ... ブランドiのt週目における価格

4-1. Leeflang and Wittink (1992)

ws_{it} = weighted sampling (premium, multi-pack) for brand i , in week t ,

wr_{it} = weighted refund activity for brand i , in week t ,

wb_{it} = weighted (package) bonus offer for brand i , in week t ,

wf_{it} = weighted feature (retailer advertising) activity for brand i , in week t .

The variable ws_{it} is defined as follows:

$$ws_{it} = \left(\sum_{v=1}^{V_i} \sum_{q=1}^{Q_{vi}} S_{qv it} d_{qv it}^s \right) / \left(\sum_{v=1}^{V_i} \sum_{q=1}^{Q_{vi}} S_{qv it} \right), \quad (5)$$

where

$S_{qv it}$ = unit sales for package size q , variety v , brand i , in week t ,

$d_{qv it}^s$ = weighted distribution of the sampling activity for package size q , variety v , brand i , in week t , i.e. the percentage of retail outlets offering the sample activity, with each

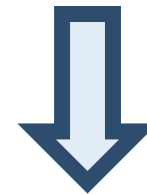
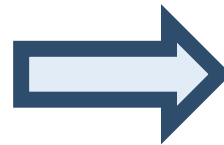
x の定義

s...sampling (試供品付属?)

r...refund (キャッシュバック?)

b...bonus (〇〇%増量など)

f...feature (チラシ掲載など)



$$wx = \frac{\text{該当商品の売上} * \text{該当商品が売られていた店の割合}}{\text{該当商品の売上}}$$

4-1. Leeflang and Wittink (1992)

- 結果 (分析を価格反応以外にも拡張している。)

Table 5
Causality test results ^a and statistically significant effects ^b in equations (6) and (7)

Criterion variable	Brand	Relevant predictors for each brand						
		1	2	3	4	5	6	7
Price	1		PF	F	PBF	P	P	PF
	2	PF*	F	P	PB	P	PR	P
	3	P	P	F		R	RB	
	4	P	PSB		SR		SBF	
	5	P	PBF	S	B	RF	F	PBF
	6	P			BF*	PR	RF	BF
	7	P	P	PS	BF	PS	RBF	
Sampling	2		F	SF	SF	F	SB	PS
	3		B		RBF	P	B	PSR
	4	F	SF	SF	PF		SBF	S
	5				PR	R		R
	6		SB	SF	SF	F	B	S
	7		B	S*F	F		BF	
Refund	4	F		P	PB	R		P*
	5	P	P	P	PR	P	PR	PBF
	6	P	PF	P	B	P	PF	PB
	7			S	PR	S	F	F
Bonus	2				PB	S		R
	4	PF	PB		R	PR	PR	PB
	6		B	PSF	F		F	PSR
	7	PF	P		B	S*R*	PR	RF
Feature	1	P		P	SF	PR	SRBF	SBF
	2	F	PS	F	S	PR*	RBF	S
	3	P	S	PS	S		SB	S
	4		B		B	P	BF	S*F
	5	F	B*	S	SF	P	S	PF
	6	F	SBF	F	S		PSR	S*RF
	7	P			PSBF	RF	P*SRF	RB

4-1. Leeflang and Wittink (1992)

Table 6
Number of significant causal relations

Predictor variable	Criterion variable					
	Price	Sampling	Refund	Bonus	Feature	Total
Price	24 ^a	4 (1) ^b	14 (3)	11	9 (5)	62 (9)
Sampling	5 (1)	14	2	4	18 (3)	43 (4)
Refund	5 (3)	4 (1)	4	6 (2)	7 (2)	26 (8)
Bonus	12	8 (1)	3 (1)	5	9 (2)	37 (4)
Feature	13 (4)	14 (2)	4 (2)	4 (2)	18	53 (10)
Total	59 (8)	44 (5)	27 (6)	30 (4)	61 (12)	221 (35)

^a The diagonal entries represent the number of simple competitive reactions.

^b The off-diagonal entries show the number of competitive reactions involving different variables, while the number in parentheses (*not* a subset of the number of competitive reactions) represents the number of relations between different variables for the same brand (intrafirm activities).

「価格変更や広告は他ブランドの競争反応を引き起こしやすい」と結論づけている

4-2. Krider, Li, Liu and Weinberg (2005)

“The Lead-Lag Puzzle of Demand and Distribution
:A Graphical Method Applied to Movies”

- 概要
 - 需要と供給どちらが(因果的な意味で)先かという問題の分析
 - 映画産業は需要と供給が公開期間の問題から非定常になる
 - この論文は非定常・短期間の時系列でも、状態空間図を用いることでリード-ラグ関係を分析できると述べている
 - 提案モデルの対抗馬として需給関係のグレンジャー因果分析をしている

4-2. Krider, Li, Liu and Weinberg (2005)

- データ
 - 2000年から2001年にアメリカで公開された231の映画の興行収入と公開館数
- モデル

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \alpha_3 y_{t-3} + \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + \beta_3 x_{t-3} + \varepsilon_t.$$

4-2. Krider, Li, Liu and Weinberg (2005)

- 結果

Table 3 Demand-Distribution Relations for 231 Movies
Classified by Granger Causality Tests

	Demand leads distribution		Subtotal
	Yes	No	
Distribution leads demand			
Yes	94	12	106
No	86	39	125
Subtotal	180	51	231

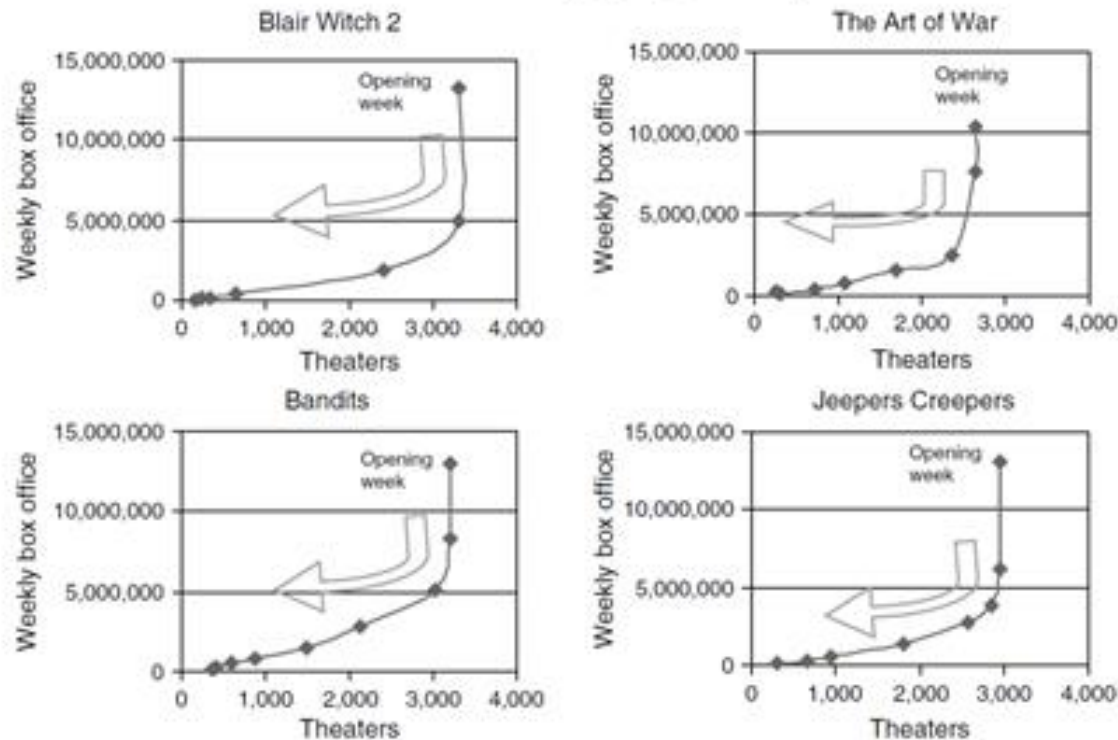
Note. Distribution is the number of theaters showing the movie, and demand is the box office revenue.

どちらも先行していない、またはどちらも先行しているという結果も出てしまう

4-2. Krider, Li, Liu and Weinberg (2005)

解決策として、提案手法でグレンジャー因果分析の結果を分類するとこうなる

Figure 4 Movies That Show Clockwise Curvature but Classified Differently by Granger Causality Tests



Note. The four movies are classified by the Granger causality test as different in lead-lag relationship between demand and distribution. The position of the four movies in the figure corresponds to the positions in the four cells of Table 3. For example, Blair Witch 2 is classified as both "demand leads distribution" and "distribution leads demand" in Table 3. Clockwise curvature of the state-space diagram is apparent for each movie.

4-3. 宮崎,星野 (2013)

「階層ベイズ動的モデルによるブランドスイッチングの分析
：グレンジャー因果性検定の利用」

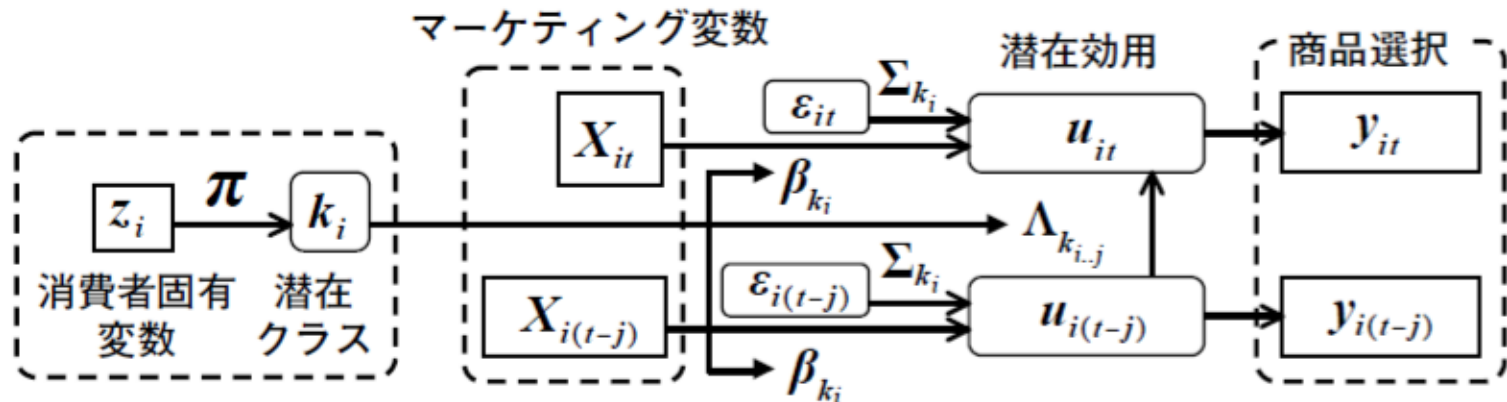
- 概要
 - 複数商品の購買行動間の因果関係を消費者セグメントごとに探索するためのモデルを開発
 - 当期のプロモーション等のマーケティング変数の影響を除去した、選好の時間的推移やロイヤルティを理解できる

4-3. 宮崎,星野 (2013)

- データ
 - フェイスティッシュ購買回数上位 3 ブランドと、その他のブランド群を1 ブランドにまとめた合計 4 ブランドのうちいずれかを異なる購買機会で5 回以上買った1191世帯分の購買データ
 - マーケティング活動データ(広告、ディスプレイ、価格)
 - 世帯の属性データ(収入、世帯人数、購買回数)

4-3. 宮崎,星野 (2013)

- モデル



i : 消費者 t : 時期 j : ラグ l : 潜在クラス k_i : 潜在クラスの指示変数 c : 商品カテゴリー ε_{it} : 誤差変数

図 1: モデルの全体構造

4-3. 宮崎,星野 (2013)

- モデル

ブランドの決定：効用の大小による。基準ブランドCの効用は0

$$y_{it} = \begin{cases} c (\neq C) & (u_{itc} > \max(\mathbf{u}_{it,-c}, 0)) \\ C & (\max(\mathbf{u}_{it}) < 0) \end{cases}$$

効用の決定：マーケティング変数と前期までの効用による階層ベイズVARモデル
kは潜在クラスのパラメータ

$$\mathbf{u}_{it} = X_{it}\boldsymbol{\beta}_{k_i} + \sum_{j=1}^m \Lambda_{k_i..j} \mathbf{u}_{i[t-j]} + \boldsymbol{\epsilon}_{it}, \quad \boldsymbol{\epsilon}_{it} \sim N(\mathbf{0}, \Sigma_{k_i})$$

4-3. 宮崎,星野 (2013)

- モデル

$$\mathbf{u}_{it} = X_{it}\boldsymbol{\beta}_{k_i} + \sum_{j=1}^m \Lambda_{k_i..j} \mathbf{u}_{i[t-j]} + \boldsymbol{\epsilon}_{it}, \quad \boldsymbol{\epsilon}_{it} \sim N(\mathbf{0}, \Sigma_{k_i})$$

$$\mathbf{u}_{i[t-j]} = (u_{i[t-j]1}, \dots, u_{i[t-j][C-1]})'$$

$$\Lambda_{k_i..j} = \begin{pmatrix} \lambda_{k_i11j} & \cdots & \lambda_{k_i1[C-1]j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{k_i[C-1]1j} & \cdots & \lambda_{k_i[C-1][C-1]j} \end{pmatrix}$$

マーケティング変数の影響を除外した
選好の変化
(グレンジャー因果分析対象)

$$X_{it} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_{it1} - p_{itC} & d_{it1} - d_{itC} & f_{it1} - f_{itC} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & p_{it2} - p_{itC} & d_{it2} - d_{itC} & f_{it2} - f_{itC} \\ & & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & p_{it[C-1]} - p_{itC} & d_{it[C-1]} - d_{itC} & f_{it[C-1]} - f_{itC} \end{pmatrix}$$

価格 ディスプレイ チラシ広告

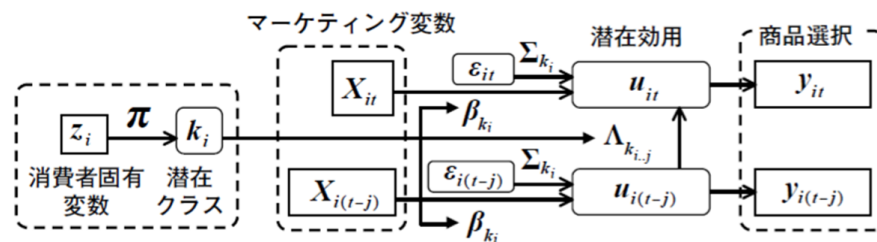
4-3. 宮崎,星野 (2013)

- モデル

潜在クラスの決定：多項ロジットモデルで行う

$$p(k_i = l | \pi, z_i) = \frac{\exp(\pi'_l z_i)}{\sum_{j=1}^L \exp(\pi'_j z_i)}$$

BICと対数周辺尤度によって、クラス数4、ラグ2のモデルに決定している



※事前分布の設定や推定方法は複雑なので触れません

i : 消費者 t : 時期 j : ラグ l : 潜在クラス k_i : 潜在クラスの指示変数 c : 商品カテゴリー ε_{it} : 誤差変数

図1: モデルの全体構造

4-3. 宮崎,星野 (2013)

- 結果：マーケティング変数の影響を除外したブランド選好を可視化

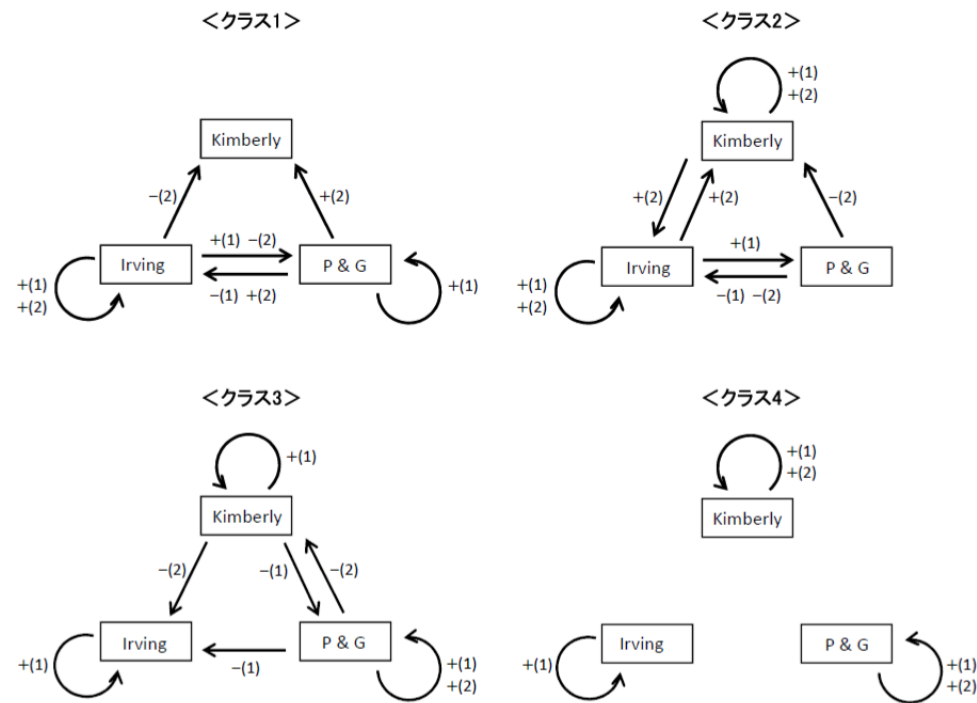


図 2：グレンジャー因果性分析の図解。

矢印方向にグレンジャー因果性があることを示す。矢印の横に書いてある表記について、カッコ内がラグ数、その前にある符号がそのラグにおける自己回帰係数の符号を表す。

Reference

- [1] Leeflang and Wittink (1992) “Diagnosing competitive reactions using (aggregated) scanner data”, International Journal of Research in Marketing Volume 9, Issue 1, March 1992, Pages 39-57
- [2] Krider, Li, Liu and Weinberg (2005) ” The Lead-Lag Puzzle of Demand and Distribution: A Graphical Method Applied to Movies”, Marketing Science Vol. 24, No. 4, Fall 2005, pp. 635–645
- [3]宮崎,星野(2013) 「階層ベイズ動的モデルによるブランドスイッチングの分析：グレンジャー因果性検定の利用」 マーケティング・サイエンスVol. 21 No. 1 2013 pp. 11 – 35
- [4]沖本(2010) 「経済・ファイナンスデータの計量時系列分析」 朝倉書店
- [5]Guo et al.(2008)” Partial Granger causality—Eliminating exogenous inputs and latent variables”, Journal of Neuroscience Methods 172 (2008) 79–93