Кафедра дискретной математики МФТИ

Курс математической статистики

Игашов Илья, 593 группа

Задание №8

№3.

Рассматривается следующая параметрическая модель: $X_1, \ldots, X_N$ — выборка из распределения $N(\theta, 1)$. Известно, что θ близко к нулю: с вероятностью не менее 0.95 выполнено неравенство $|\theta| < 0.5$.

Сгенерируйте выборку размера 100 из распределения Коши с нулевым параметром сдвига и с параметром масштаба, равным 1. При $N = 100$ используйте эту выборку в качестве $X_1, \ldots, X_N$ для описанной выше модели. Посчитайте байесовские оценки (для одного априорного распределения, учитывающего описанное выше свойство распределения параметра θ) и оценки максимального правдоподобия для всех $n \leq 100$. Постройте графики абсолютной величины отклонения этих оценок от истинного значения параметра $\theta_0 = 0$ в зависимости от n. Сделайте выводы.

In [1]:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import norm
from scipy.stats import cauchy

%matplotlib inline
```

In [2]:

```
# Генерируем выборку из распределения Коши.
N = 100
sample = cauchy.rvs(size=N)
```

Параметры априорного распределения $N(\mu, \sigma^2)$

Очевидно, $\mu = 0$. Найдем σ^2 (сделаем для $P(|\theta| < 0.5) = 0.95$).

Неравенство Чебышева:

$$P(|\theta| \geq 0.5) \leq \frac{D\theta}{0.5^2} = \frac{\sigma^2}{0.25}$$

$$P(|\theta| < 0.5) = 1 - P(|\theta| \geq 0.5) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{0.25}$$

$$\frac{\sigma^2}{0.25} \geq 1 - P(|\theta| < 0.5) = 0.05$$

Возьмем $\sigma^2 = 0.0125$.

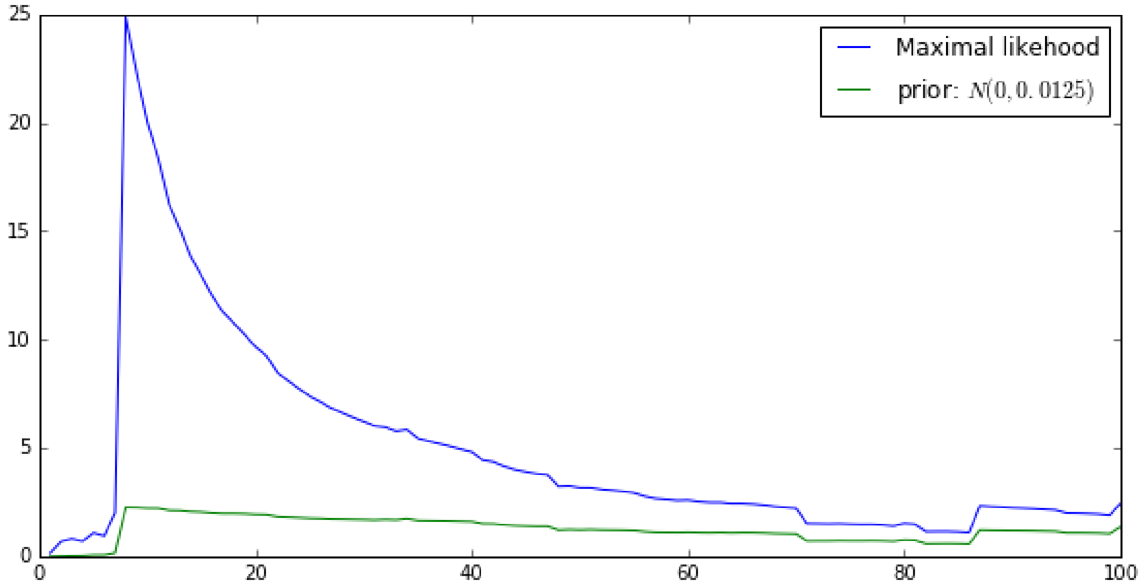
Байесовская оценка: $\theta^* = \left(\frac{\mu}{\sigma^2} + \sum_{i=1}^n X_i\right) / \left(\frac{1}{\sigma^2} + n\right) = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\frac{1}{\sigma^2}+n}$.

In [3]:

```
# Оценка максимального правдоподобия.
likehood = np.array([np.mean(sample[:n]) for n in range(1, N + 1, 1)])

# Байесовская оценка с априорным распределением N(0,0.0125).
sigma = 0.0125
bayes = np.array([
                (np.mean(sample[:n]) * n)/ (n + (1 / sigma))
                for n in range(1, N + 1, 1)
            ])
```

In [4]:

```
theta_0 = 0

# Графики абсолютных отклонений значений оценок от истинного значения.
grid = np.linspace(1, N, N)
plt.figure(figsize=(10, 5))
plt.plot(grid, abs(likehood - theta_0), label='Maximal likehood')
plt.plot(grid, abs(bayes - theta_0), label=(r'prior: $N(0, 0.0125)$'))

plt.legend()
plt.show()
```



Вывод

Выбор подходящих параметров для сопряженного априорного распределения позволил получить хорошую байесовскую оценку параметра θ. График показывает, что она лучше оценки по методу максимального правдоподобия в смысле абсолютного значения отклонения от истинного значения.

Параметры сопряженного распределения $N(\mu, \sigma_0^2)$ можно интерпретировать так: если значение σ_0^2 достаточно велико относительно σ^2 (последнее равно 1 в нашем случае), то это значит, что мы меньше опираемся на априорное распределение и больше — на выборку и, следовательно, математическое ожидание апостериорного распределения будет ближе к математическому ожиданию выборки. В противном случае (а у нас так и получилось) — математическое ожидание будет ближе к μ (мы в большей степени учитываем априорное распределение). (https://people.eecs.berkeley.edu/~jordan/courses/260-spring10/other-readings/chapter9.pdf (https://people.eecs.berkeley.edu/~jordan/courses/260-spring10/other-readings/chapter9.pdf) стр. 8-9)

In [ ]: