Кафедра дискретной математики МФТИ

Курс математической статистики

Игашов Илья, 593 группппа

Задание №8

№2.

Рассмотрите схему испытаний Бернулли (т.е. броски монет) с вероятностью успеха p. Постройте несколько графиков априорного (сопряженное из теоретической задачи 8.4) распределения для разных параметров и объясните, как значения параметров априорного распределения соотносятся с априорными знаниями о монете. Это могут быть, например, знания вида ”монета, скорее, честна” (при таком априорном распределении наиболее вероятны значения p в окрестности 0.5) , ”монета нечестная” (наименее вероятны значения p в окрестности 0.5), ”монета, скорее всего, нечестная, перевес в сторону герба” (наиболее вероятны значения p в окрестности 1).

Проведите по 20 бросков для разных монет (можно сгенерировать на компьютере несколько выборок для различных p) и найдите байесовские оценки вероятности выпадения герба при различных параметрах априорного распределения, при которых получаются разные интерпретации априорных знаний (достаточно трех пар). Сравните с оценками максимального правдоподобия. Постройте графики абсолютных величин отклонений оценок, построенных по выборке $X_1, \ldots, X_n$ ($n \leq 20$), от истинных значений параметра в зависимости от n (для разных p разные графики). Сделайте выводы.

In [1]:

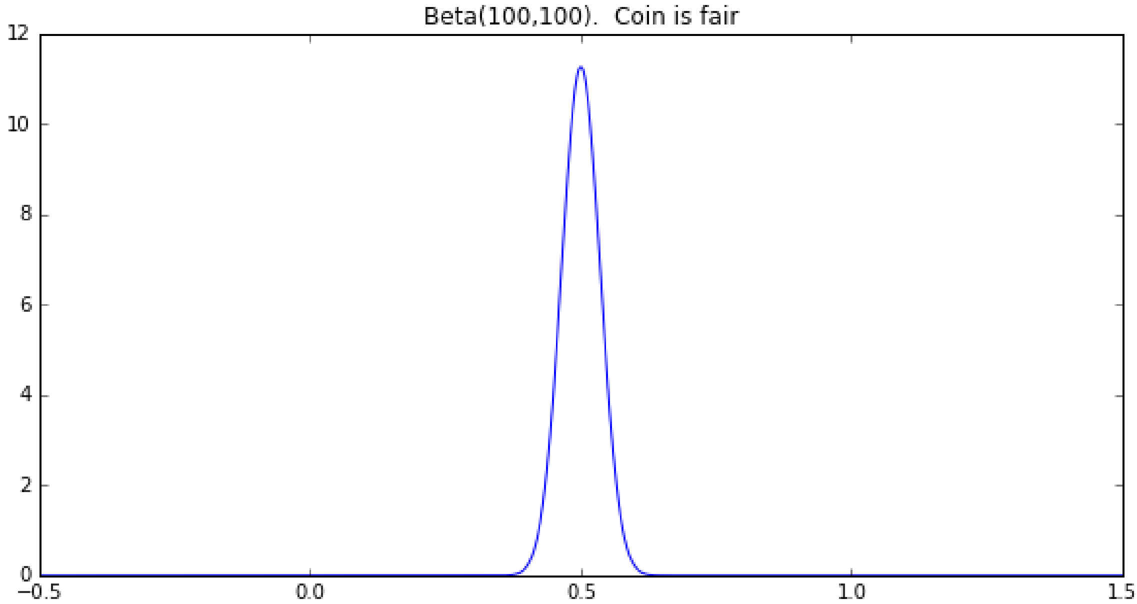
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import bernoulli
from scipy.stats import beta

%matplotlib inline
```

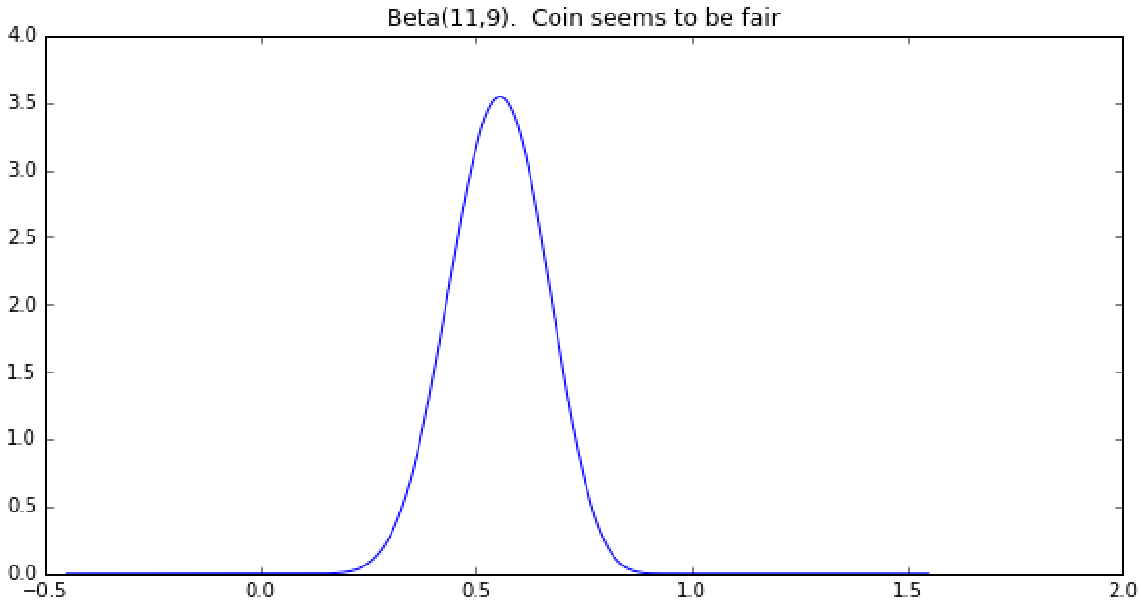
Сопряженным к данному распределением является бета-распределение $Beta(\alpha, \beta)$. Итнерпретация следующая: α отвечает за количество экспериментов, закончившихся успехом, β — за количество неудач. В нашем случае успехом считается выпадение орла, неудачей — выпадение решки. Из графиков ниже видно, что точкой макимума плотности бета-распределения $Beta(\alpha, \beta)$ является точка с примерным значением вероятности успеха в нашей схеме бернулли.

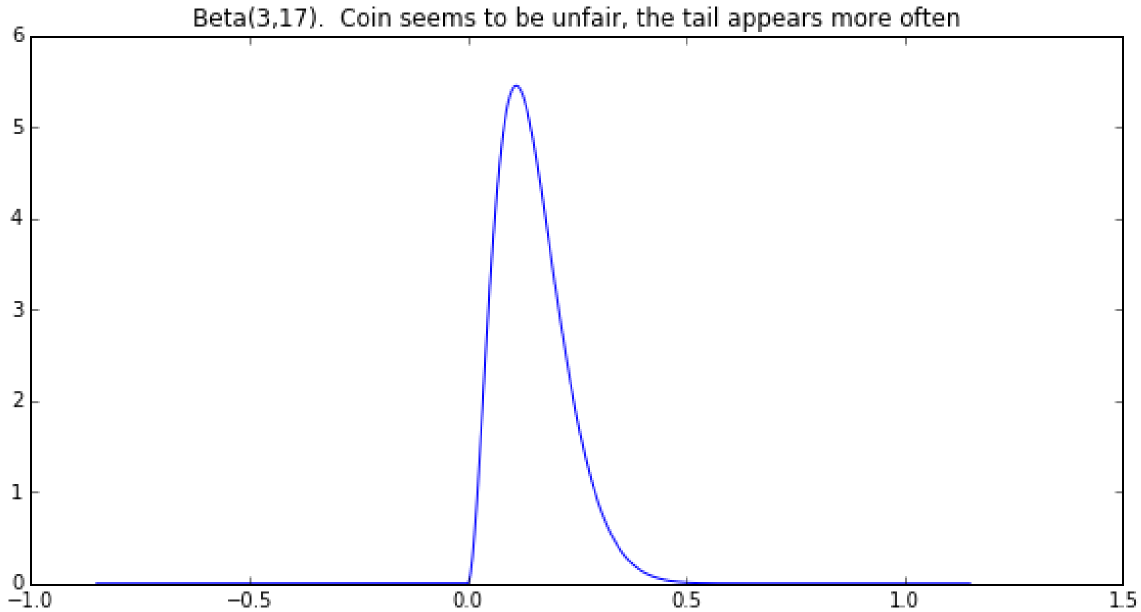
Таким образом, мы можем подобрать несколько пар параметров для априорного распределения, которые отражали бы наши априорные знания о монете.

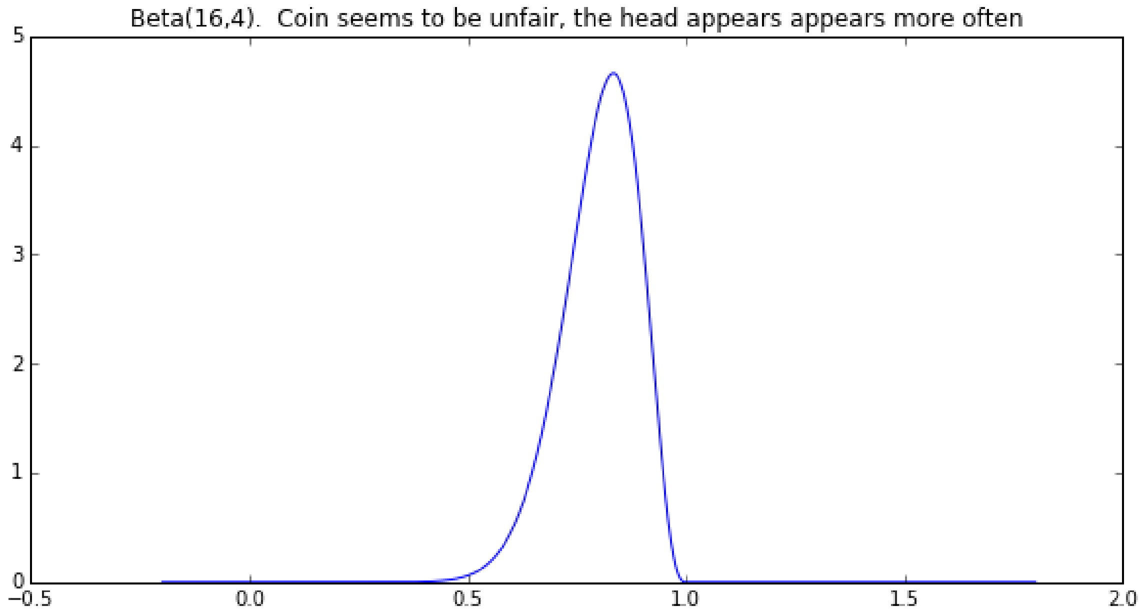
In [2]:

```
# Параметры априорного распределения и их трактовки.
params = [[100, 100], [11, 9], [3, 17], [16, 4]]
description = [
    'Coin is fair',
    'Coin seems to be fair',
    'Coin seems to be unfair, the tail appears more often',
    'Coin seems to be unfair, the head appears appears more often'
]

# Графики получившихся априорных распределений.
i = 0
for par in params:
    grid = np.linspace(beta.mean(par[0], par[1]) - 1, beta.mean(par[0], par[1])
+ 1, 1000)
    plt.figure(figsize=(10, 5))
    plt.plot(grid, beta.pdf(grid, par[0], par[1]))
    plt.title(r'Beta(' + str(par[0]) + ',' + str(par[1]) + ').  ' +
description[i])
    plt.show()
    i += 1
```


Beta(100,100). Coin is fair
12
10
8
6
4
2
0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5


Beta(11,9). Coin seems to be fair
4.0
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0


Beta(3,17). Coin seems to be unfair, the tail appears more often
6
5
4
3
2
1
0
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5



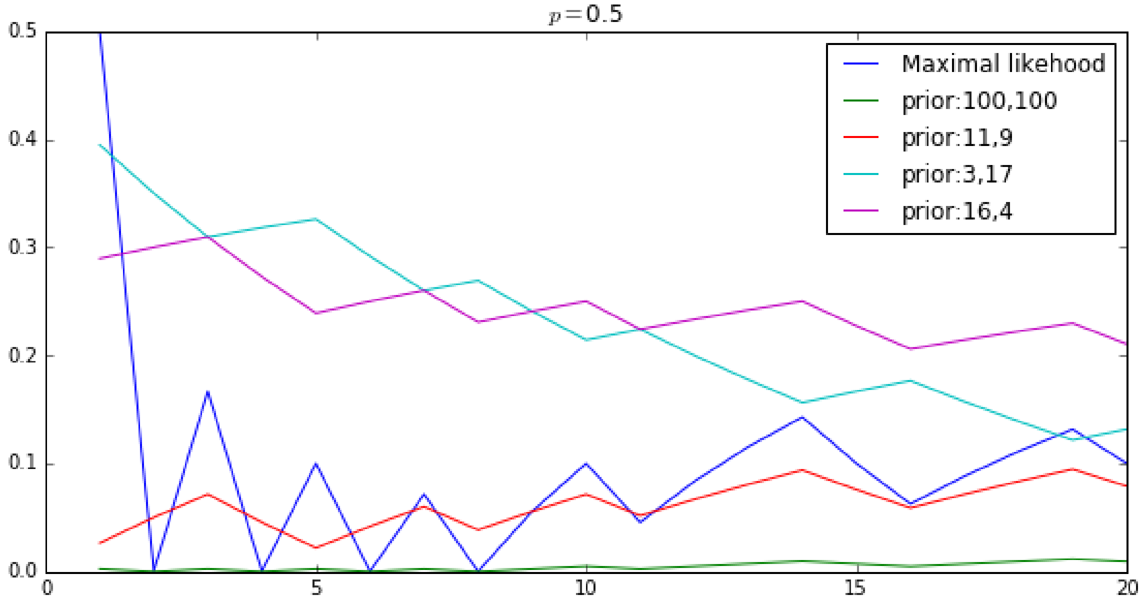
Гиперпараметры апостериорного распределения: $\alpha + \sum_{i=1}^{n} X_i - 1, \beta + n - \sum_{i=1}^{n} X_i$ - 1.

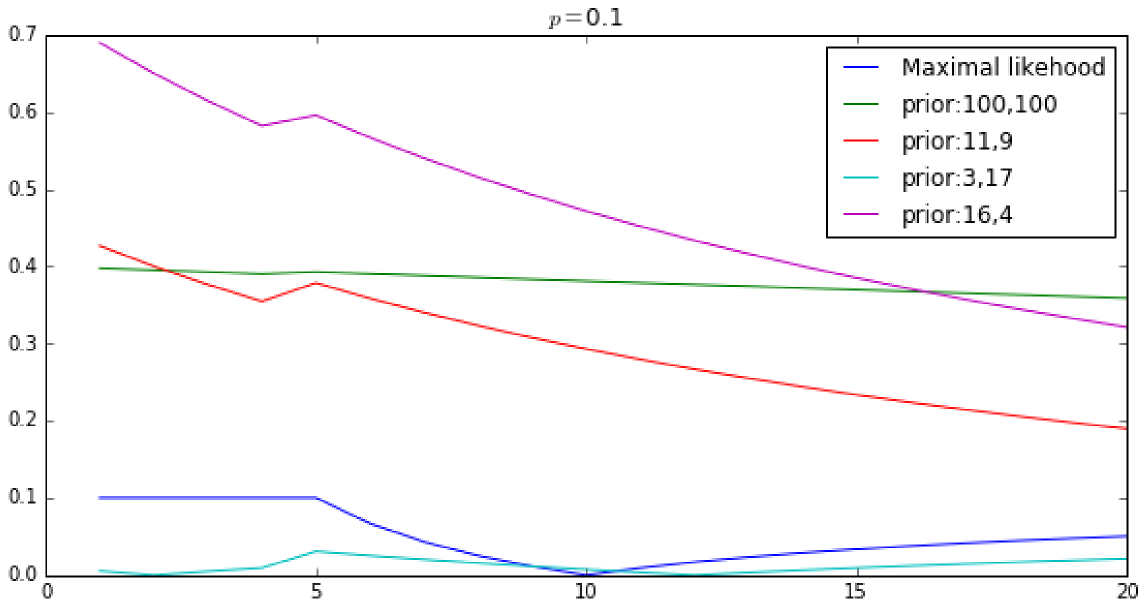
Байесовская оценка: $\theta^* = \frac{\alpha + \sum_{i=1}^{n} X_i - 1}{\alpha + \beta + n - 2}$.

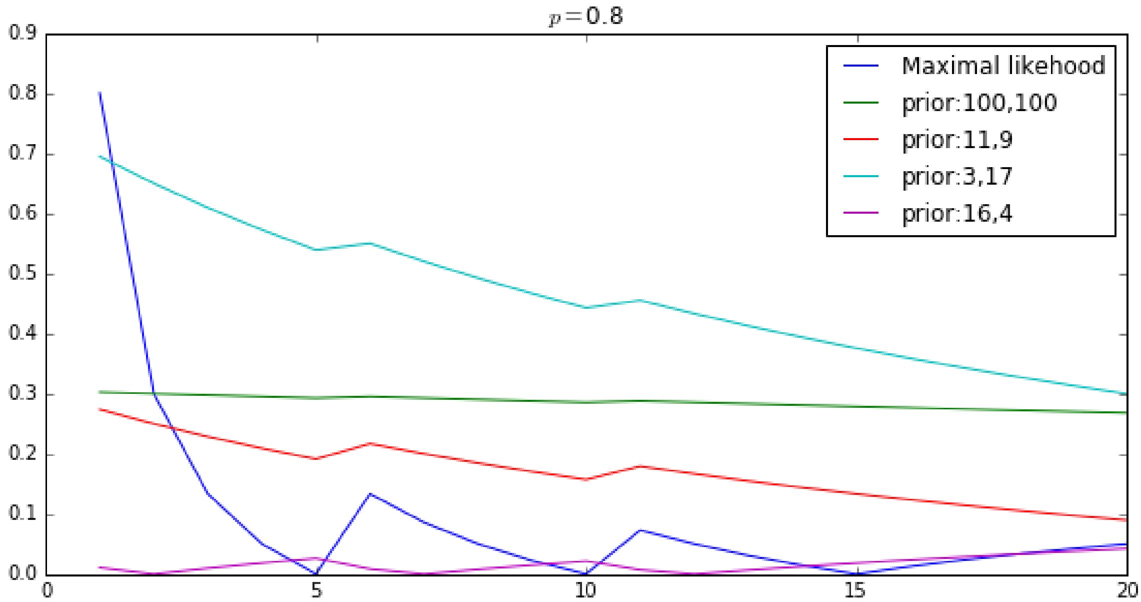
Оценка максимального правдоподобия: $\hat{\theta} = \bar{X}$.

In [3]:

```
# Проведем по 20 экспериментов для разных монет.
N = 20
probabilities = [0.5, 0.1, 0.8]
for p in probabilities:
    # Генерируем бернулиевскую выборку размера 20.
    sample = bernoulli.rvs(p, size=N)

    # Оценка максимального правдоподобия.
    likehood = np.array([np.mean(sample[:n]) for n in range(1, N + 1, 1)])

    # Байесовские оценки вероятности выпадения орла для различных априорных параметров.
    bayes = np.array([
            np.array([
                    (par[0] + np.mean(sample[:n]) * n - 1) / (par[0] + par[1] -
2 + n)
                    for n in range(1, N + 1, 1)
                ])
            for par in params
        ])

    # Строим графики абсолютных значений отклонений оценок от истинного значения.
    grid = np.linspace(1, N, N)
    plt.figure(figsize=(10, 5))
    plt.plot(grid, abs(likehood - p), label='Maximal likehood')
    i = 0
    for estimate in bayes:
        plt.plot(grid, abs(estimate - p), label=('prior:' + str(params[i][0]) +
',' + str(params[i][1])))
        i += 1

    plt.title(r'$p=$' + str(p))
    plt.legend()
    plt.show()
```


$p = 0.5$
Maximal likehood
prior:100,100
prior:11,9
prior:3,17
prior:16,4
0.0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5
0 5 10 15 20


$p = 0.1$
Maximal likehood
prior:100,100
prior:11,9
prior:3,17
prior:16,4
0.0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7
0 5 10 15 20


$p = 0.8$
Maximal likehood
prior:100,100
prior:11,9
prior:3,17
prior:16,4
0.0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9
0 5 10 15 20

Вывод

Графики показывают, что априорные знания о монете позволяют построить хорошую байесовскую оценку. Так, например, в первом случае монета честная ($p = 0.5$), и лучше всего оценивает вероятность выпадения орла байесовская оценка с априорным распределением $Beta(100, 100)$. Эта оценка даже превосходит ОМП в смысле модуля отклонения от истинного значения. Дальше идет байесовская оценка с априорным распределением $Beta(11, 9)$ (ее поведение схоже с поведением ОМП), чему также соответствует предположение о том, что монета честная. Наибольлшие отклонения от истинного значения дают оставшиеся байесовские оценки. Их априорные параметры отражают предположение о том, что монета, скорее всего, нечестная. Это не соответствует правде, и данные оценки получились плохими.

В целом можно сказать, что априорные знания о монете (и, соответственно, выбор априорных параметров) играют очень важную роль в построении хорошей байесовской оценки. Если мы, например, делаем предположение, совершенно не соответствующее действительности, то байесовская оценка получится очень плохой (см. графики).

In [ ]:

```

```