Кафедра дискретной математики МФТИ

Курс математической статистики

Игашов Илья, 593 группа

Задание №5

№1.

Пусть $\xi = (\xi_1, \xi_2) \sim N(a, \Sigma)$, где $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ и $\Sigma = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$. Постройте график плотности этого случайного вектора. Для $y \in \{-3, 0, 1, 5\}$ постройте графики $f_{\xi_1|\xi_2}(x|y)$. Построить график $E(\xi_1|\xi_2 = y)$ в зависимости от y и проведите на этом графике прямую $x = E\xi_1$.

In [72]:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
from scipy.stats import multivariate_normal
from scipy.stats import norm

%matplotlib inline
```

In [73]:

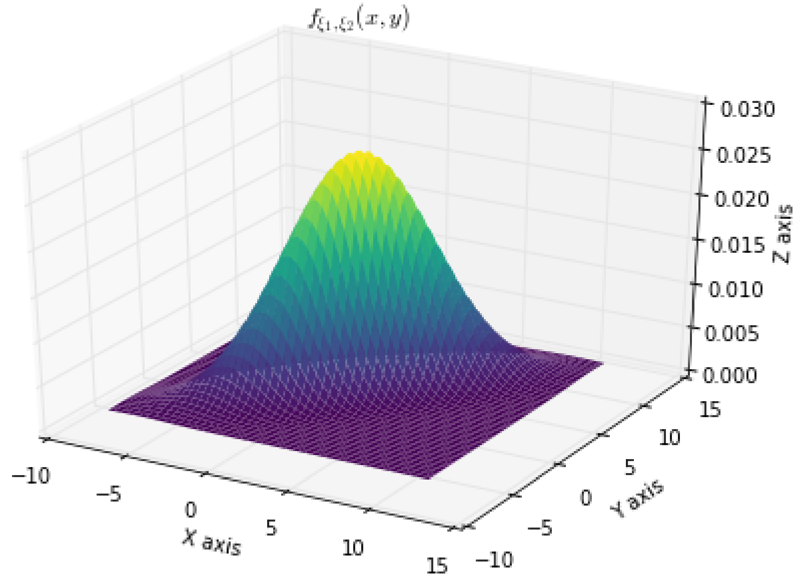
```
a = np.array([1, 4])
covar = np.array([[10, 8], [8, 10]])
```

In [78]:

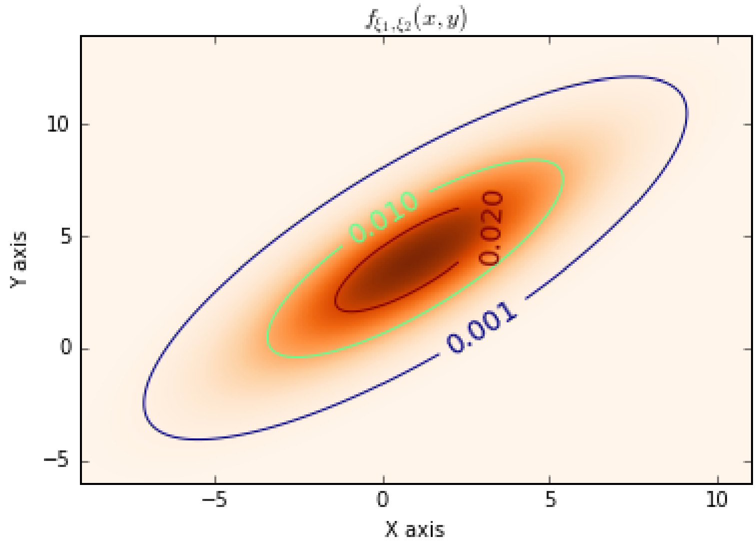
```
# Create grid and multivariate normal.
x = np.linspace(a[0] - 10, a[0] + 10, 500)
y = np.linspace(a[1] - 10, a[1] + 10, 500)
X, Y = np.meshgrid(x, y)
pos = np.empty(X.shape + (2,))
pos[:, :, 0] = X; pos[:, :, 1] = Y

# Make a 3D plot.
fig = plt.figure()
ax = Axes3D(fig)
ax.plot_surface(X, Y, multivariate_normal.pdf(pos, a, covar), cmap='viridis', li
newidth=0)
ax.set_xlabel('X axis')
ax.set_ylabel('Y axis')
ax.set_zlabel('Z axis')
plt.title(r'$f_{\xi_1,\xi_2}(x,y)$')
plt.show()

# Make a pcolormesh.
plt.figure()
plt.pcolormesh(X, Y, multivariate_normal.pdf(pos, a, covar),  cmap='Oranges')
CS = plt.contour(X, Y, multivariate_normal.pdf(pos, a, covar), [0.001, 0.01, 0.0
2])
plt.clabel(CS, fontsize=14, inline=1, fmt='%1.3f', cmap='Set3')
plt.title(r'$f_{\xi_1,\xi_2}(x,y)$')
plt.xlabel('X axis')
plt.ylabel('Y axis')
plt.show()
```



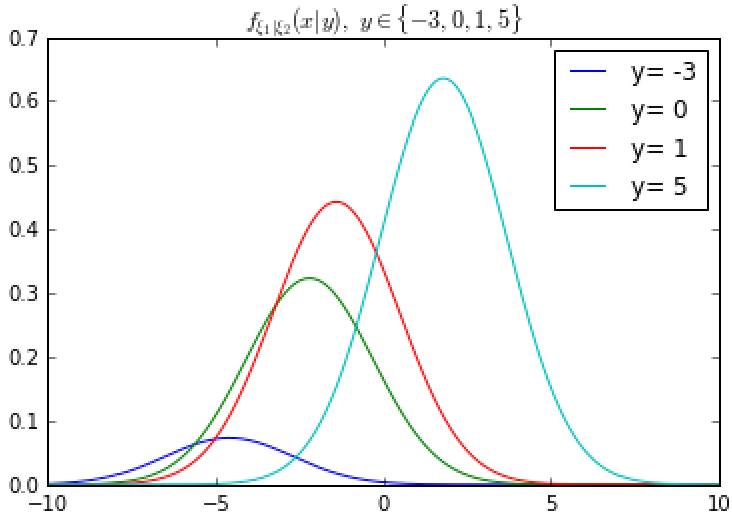
$f_{\xi_1,\xi_2}(x,y)$
0.030
0.025
0.020
0.015
0.010
0.005
0.000
Z axis
−10
−5
0
5
10
15
X axis
−10
−5
0
5
10
15
Y axis



$f_{\xi_1,\xi_2}(x,y)$
0.010
0.020
0.001
10
5
0
−5
Y axis
−5
0
5
10
X axis

In [75]:

```
# Plot of conditional density function for y = -3, 0, 1, 5.
plt.figure()
for y in [-3, 0, 1, 5]:
    X = np.array([(x, y) for x in np.linspace(-10, 10, 500)])
    plt.plot(np.linspace(-10, 10, 500),
             multivariate_normal.pdf(X, a, covar) / norm.pdf(y, 4, 10),
             label=('y= ' + str(y)))
    plt.title(r'$f_{\xi_1|\xi_2}(x|y), \ y\in\{-3,0,1,5\}$')
    plt.legend()
    plt.grid()
plt.show()
```



Посчитаем условное математическое ожидание $E(\xi_1|\xi_2)$:

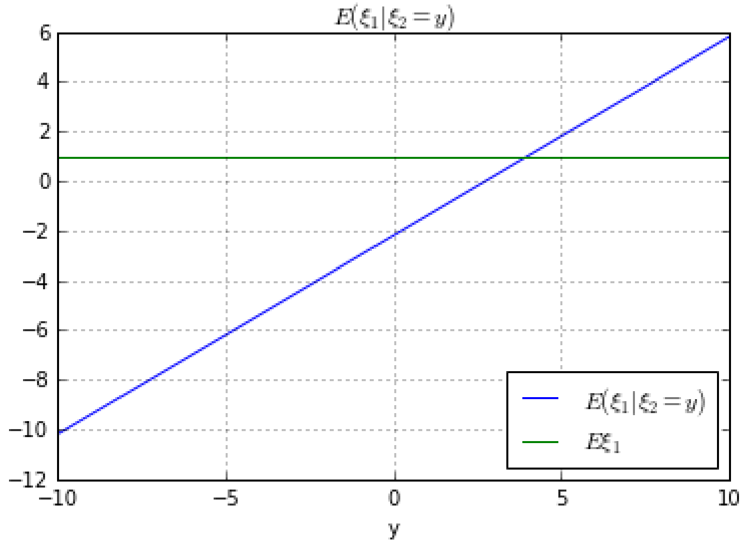
Пусть $\xi_1 = \alpha\xi_2 + \eta, \ \ \eta = \xi_1 - \alpha\xi_2,$

$cov(\eta, \xi_2) = cov(\xi_1, \xi_2) - \alpha D(\xi_2) = 8 - 10\alpha = 0.$

Отсюда: $\alpha = 0.8, \ \ E(\xi_1|\xi_2) = \alpha E(\xi_2|\xi_2) + E(\eta|\xi_2) = \alpha\xi_2 + E\eta = \alpha\xi_2 + E\xi_1 - \alpha E\xi_2 = 0.8\xi_2 - 2.2.$

In [71]:

```
# Plot of conditional expectation.
grid = np.linspace(-10, 10, 500)
plt.plot(grid, 0.8 * grid - 2.2, label=r'$E(\xi_1|\xi_2=y)$')
plt.plot(grid, np.ones(500), label=r'$E\xi_1$')
plt.title(r'$E(\xi_1|\xi_2=y)$')
plt.legend(loc=4)
plt.xlabel('y')
plt.grid()
plt.show()
```



Вывод

Мы рассмотрели нормально распределенный случайный вектор (ξ_1, ξ_2), построили график плотности его распределения, а также рассмотрели условную плотность и условное математическое ожидание случайной величины ξ_1 относительно ξ_2. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 кореллируют, и значит, что УМО $E(\xi_1|\xi_2)$ является, фактически, "уточненным значением" математического ожидания случайной величины ξ_1, которое мы узнаем благодаря случайной величине ξ_2, от которой зависит ξ_1 (по графикам условных плоностей $f_{\xi_1|\xi_2}$ при разлиных y это видно: например, при различных y максимум достигается на разных значениях x; также если проводить сечения $y = const$ на графике двумерной плотности, то видно, что значения математического ожидания величины ξ_1 меняются).

$E(\xi_1|\xi_2)$ - сама по себе $\mathcal{F}_{\xi_2}$ - измеримая случайная величина (ее выражение в явном виде выведено выше).

$E(\xi_1|\xi_2 = y)$ - борелевская функция $\psi(y)$, смысл которой - значение математического ожидания величины ξ_1 при условии, что $\xi_2 = y$.

Из последнего графика видно, что $E(\xi_1|\xi_2 = E\xi_2) = E(\xi_1)$. Это логично, если в графике плотности вектора (ξ_1, ξ_2) провести сечение $y = E\xi_2 = 4$, то видно, что $E\xi_1 = 1$.

In [ ]: