

Commande non linéaire d'un convertisseur Boost par la méthode directe de Lyapunov

Mohamed IGADARNE
Master 2 EEA – Parcours I3A
Université de Perpignan Via Domitia

Introduction

Dans ce rapport, on s'intéresse à la modélisation et à la commande non linéaire d'un convertisseur Boost utilisé comme étage d'élévation de tension pour une application photovoltaïque. L'objectif principal est de réguler la tension de sortie autour d'une consigne fixée, malgré les variations de la tension d'entrée issues du générateur PV

La démarche adoptée comporte deux étapes principales :

- la modélisation non linéaire du convertisseur et la mise en évidence du point d'équilibre associé à une tension de sortie de référence ;
- la conception de lois de commande non linéaires à l'aide de la méthode directe de Lyapunov, avec trois variantes : commande à l'équilibre, commande par annulation complète de la dérivée de Lyapunov et commande par annulation des seuls termes instables.

Les résultats de simulation seront obtenus ultérieurement sous MATLAB/Simulink à partir des lois de commande dérivées dans ce document.

1 Modélisation non linéaire du convertisseur Boost

1.1 Paramètres et hypothèses

On considère un convertisseur Boost idéal fonctionnant en conduction continue (CCM), alimenté par une source de tension représentant un générateur photovoltaïque. Les paramètres physiques sont les suivants :

$$\begin{aligned} C &= 4000 \times 10^{-6} \text{ F}, & L &= 40 \times 10^{-3} \text{ H}, \\ R &= 10 \text{ } \Omega, & E &= 12 \text{ V}, \\ f_h &= 1 \times 10^3 \text{ Hz}, & T_h &= \frac{1}{f_h}. \end{aligned}$$

Les hypothèses classiques suivantes sont adoptées :

- composants idéaux (inductance et condensateur sans pertes, interrupteur et diode parfaits) ;
- fréquence de hachage suffisamment élevée pour justifier un modèle continûment moyenné ;
- fonctionnement en conduction continue, c'est-à-dire que le courant dans l'inductance ne s'annule pas.

On définit les variables d'état :

$$x_1 = i_L \quad (\text{courant dans l'inductance}), \quad x_2 = v_C \quad (\text{tension de sortie}).$$

La commande est le rapport cyclique moyen :

$$u \in (0, 1), \quad u = \text{duty cycle du hacheur}.$$

Le schéma électrique du convertisseur Boost étudié est représenté figure 1.

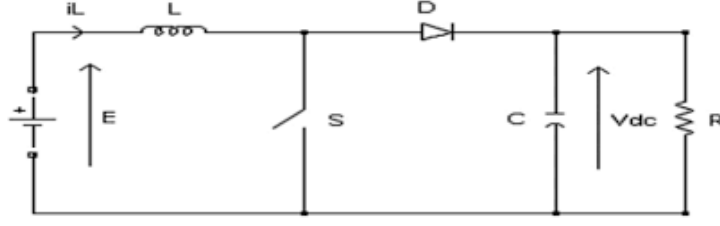


FIGURE 1 – Schéma électrique du convertisseur Boost.

1.2 Modèle continûment moyenné

Sous ces hypothèses, le modèle continûment moyenné du convertisseur Boost s'écrit :

$$\begin{cases} L \dot{i}_L = E - (1 - u) v_C, \\ C \dot{v}_C = (1 - u) i_L - \frac{v_C}{R}. \end{cases} \quad (1)$$

En posant $x_1 = i_L$ et $x_2 = v_C$, on obtient la forme compacte :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{E - (1 - u) x_2}{L}, \\ \dot{x}_2 = \frac{(1 - u) x_1 - x_2/R}{C}. \end{cases} \quad (2)$$

On remarque que le modèle (2) est non linéaire en raison des produits $(1 - u) x_i$ entre la commande et les états.

2 Validation du modèle sous SIMULINK

La validation consiste à vérifier que le modèle moyenné issu des équations différentielles représente correctement le comportement du convertisseur Boost implémenté sous SIMULINK avec des composants idéaux.

2.1 Schémas utilisés

Le convertisseur réel est modélisé par un circuit haché utilisant les blocs électriques idéaux de SIMULINK (interrupteur, diode, source de tension, inductance, condensateur, résistance). Le hacheur est commandé par un bloc PWM recevant en entrée le rapport cyclique u .

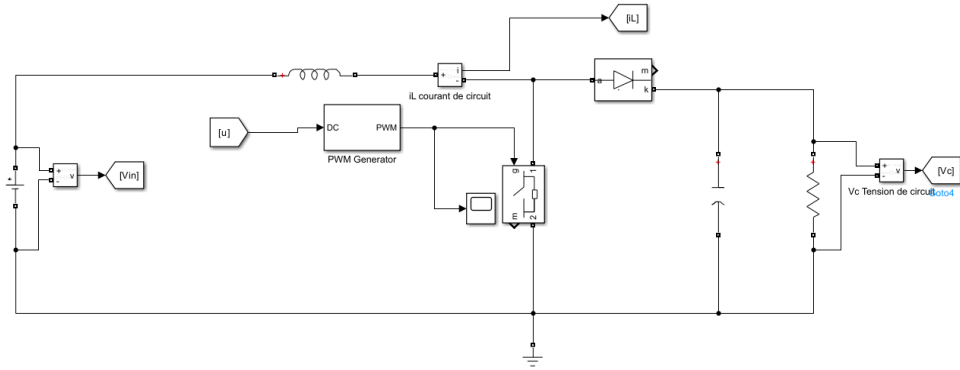


FIGURE 2 – Schéma du circuit Boost haché avec composants idéaux sous SIMULINK.

En parallèle, le modèle moyenné est implémenté sous forme de blocs élémentaires (gains, sommes, intégrateurs) réalisant directement les équations

$$\begin{cases} L \dot{i}_L = E - (1 - u) v_C, \\ C \dot{v}_C = (1 - u) i_L - \frac{v_C}{R}. \end{cases}$$

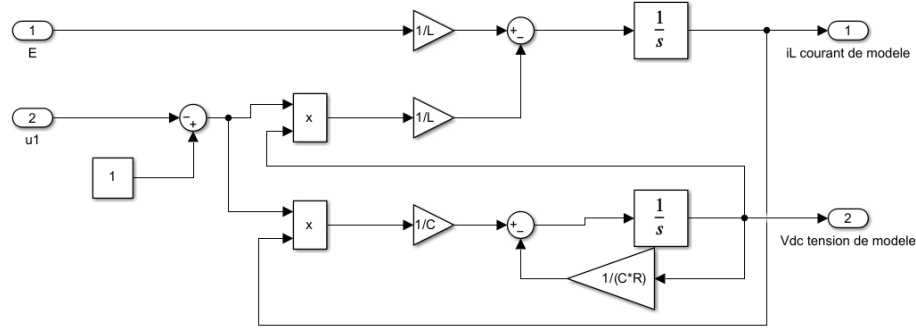


FIGURE 3 – Implémentation du modèle moyenné du convertisseur Boost sous SIMULINK.

Les deux schémas utilisent les mêmes paramètres (L, C, R, E) et la même commande $u(t)$. Les simulations sont réalisées en temps discret avec un pas d'échantillonnage

$$T_s = 4 \times 10^{-4} \text{ s},$$

afin de réduire le temps de calcul tout en conservant une bonne précision numérique. Les composants sont supposés idéaux, et les conditions initiales sont prises nulles ($i_L(0) = 0, v_C(0) = 0$). Le rapport cyclique est fixé à la valeur d'équilibre u_{eq} correspondant à une tension de sortie de référence V_{ref} .

2.2 Comparaison des réponses

La figure 4 présente la comparaison entre les réponses du circuit haché et du modèle moyenné pour le courant inductif et la tension de sortie. On superpose, pour chaque grandeur, la courbe issue du circuit détaillé et celle issue du modèle analytique.

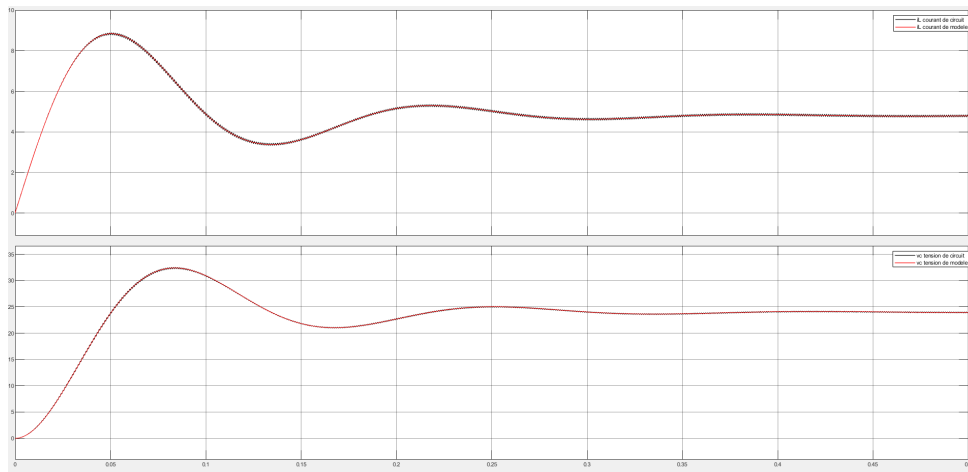


FIGURE 4 – Comparaison des réponses du circuit Boost détaillé et du modèle moyenné.

On observe une très bonne concordance entre les deux modèles : Les petites différences proviennent essentiellement de l'ondulation à la fréquence de découpage dans le circuit haché, qui n'apparaît pas dans le modèle moyenné.

Cette comparaison valide l'utilisation du modèle moyenné pour l'étude en boucle ouverte et la conception des lois de commande présentées dans la suite.

3 Point d'équilibre et changement de variables

3.1 Fixation d'une tension de sortie de référence

L'objectif de commande est de réguler la tension de sortie $v_C(t)$ autour d'une consigne constante V_{ref} , avec $V_{\text{ref}} > E$ pour un fonctionnement en survolteur. On cherche donc un point d'équilibre $(i_{L,\text{eq}}, v_{C,\text{eq}}, u_{\text{eq}})$ tel que :

$$\dot{i}_L = 0, \quad \dot{v}_C = 0, \quad v_{C,\text{eq}} = V_{\text{ref}}.$$

En substituant ces conditions dans (1) avec une commande constante $u(t) \equiv u_{\text{eq}}$, on obtient :

$$\begin{cases} 0 = E - (1 - u_{\text{eq}}) v_{C,\text{eq}}, \\ 0 = (1 - u_{\text{eq}}) i_{L,\text{eq}} - \frac{v_{C,\text{eq}}}{R}. \end{cases} \quad (3)$$

En choisissant $v_{C,\text{eq}} = V_{\text{ref}}$, les expressions suivantes sont obtenues :

$$\boxed{\begin{aligned} u_{\text{eq}} &= 1 - \frac{E}{V_{\text{ref}}}, \\ i_{L,\text{eq}} &= \frac{V_{\text{ref}}^2}{R E}, \\ v_{C,\text{eq}} &= V_{\text{ref}}. \end{aligned}} \quad (4)$$

3.2 Changement de variables : équilibre nul

Pour appliquer la méthode directe de Lyapunov, il est commode de travailler avec un système dont l'équilibre est en l'origine. On introduit donc les variables décalées :

$$\tilde{i}_L = i_L - i_{L,\text{eq}}, \quad \tilde{v}_C = v_C - v_{C,\text{eq}}. \quad (5)$$

En réécrivant (1) en fonction de $(\tilde{i}_L, \tilde{v}_C)$ et en utilisant les relations d'équilibre (4), on obtient, après simplification, le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{i}}_L = \frac{(u - u_{\text{eq}}) v_{C,\text{eq}} + (u - 1) \tilde{v}_C}{L}, \\ \dot{\tilde{v}}_C = \frac{i_{L,\text{eq}}(u_{\text{eq}} - u) + (1 - u) \tilde{i}_L - \tilde{v}_C/R}{C}. \end{cases} \quad (6)$$

On vérifie que $(\tilde{i}_L, \tilde{v}_C) = (0, 0)$ est un point d'équilibre de (6) pour $u = u_{\text{eq}}$.

4 Conception de commande par la méthode directe de Lyapunov

4.1 Choix de la fonction de Lyapunov et dérivée généralisée

On considère la fonction de Lyapunov candidate suivante, correspondant à l'énergie stockée dans l'inductance et le condensateur :

$$V(\tilde{i}_L, \tilde{v}_C) = \frac{L}{2} \tilde{i}_L^2 + \frac{C}{2} \tilde{v}_C^2. \quad (7)$$

Cette fonction est :

- définie positive : $V(\tilde{i}_L, \tilde{v}_C) > 0$ pour $(\tilde{i}_L, \tilde{v}_C) \neq (0, 0)$,
 - nulle à l'origine : $V(0, 0) = 0$,
 - radialement non bornée : $V(\tilde{i}_L, \tilde{v}_C) \rightarrow +\infty$ lorsque $\|(\tilde{i}_L, \tilde{v}_C)\| \rightarrow +\infty$.
- La dérivée de V le long des trajectoires du système (6) vaut :

$$\dot{V} = L \tilde{i}_L \dot{\tilde{i}}_L + C \tilde{v}_C \dot{\tilde{v}}_C. \quad (8)$$

En substituant les expressions de $\dot{\tilde{i}}_L$ et $\dot{\tilde{v}}_C$ issues de (6), puis en simplifiant, on obtient :

$$\dot{V} = (u - u_{\text{eq}}) (v_{C,\text{eq}} \tilde{i}_L - i_{L,\text{eq}} \tilde{v}_C) - \frac{1}{R} \tilde{v}_C^2. \quad (9)$$

Cette expression met en évidence deux contributions :

- un terme $(u - u_{\text{eq}}) (v_{C,\text{eq}} \tilde{i}_L - i_{L,\text{eq}} \tilde{v}_C)$ qui n'est pas toujours négatif (il dépend du choix de la commande) ;
- un terme $-\tilde{v}_C^2/R$, reste négatif et participe à la diminution de la fonction de Lyapunov, donc à la stabilité du système.

4.2 Commande 1 : commande à l'équilibre (duty constant)

Une première loi de commande consiste à fixer le rapport cyclique à sa valeur d'équilibre :

$$u(t) = u_{\text{eq}} = 1 - \frac{E}{V_{\text{ref}}}. \quad (10)$$

Dans ce cas, $u - u_{\text{eq}} = 0$, et (9) devient :

$$\dot{V} = -\frac{1}{R} \tilde{v}_C^2 \leq 0. \quad (11)$$

La dérivée de V est donc négative semi-définie. En appliquant le théorème d'invariance de LaSalle, on montre que l'unique trajectoire qui reste dans l'ensemble $\{\tilde{v}_C = 0, \dot{\tilde{v}}_C = 0\}$ est $(\tilde{i}_L, \tilde{v}_C) = (0, 0)$. On en déduit que l'équilibre est *globalement asymptotiquement stable* pour $u = u_{\text{eq}}$.

Cette loi de commande est simple, mais sa robustesse vis-à-vis des variations de la tension d'entrée E (bruit PV, éclaircissement variable) est limitée, ce qui motive l'utilisation de lois non linéaires plus élaborées.

4.3 Commande 2 : annulation complète de \dot{V}

L'idée de cette seconde loi de commande est d'imposer directement une dérivée de Lyapunov strictement définie négative. On spécifie par exemple :

$$\dot{V}_{\text{dés}} = -\alpha_1 \tilde{i}_L^2 - \alpha_2 \tilde{v}_C^2, \quad \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0. \quad (12)$$

En identifiant $\dot{V}_{\text{dés}}$ avec (9), on impose :

$$(u - u_{\text{eq}}) (v_{C,\text{eq}} \tilde{i}_L - i_{L,\text{eq}} \tilde{v}_C) - \frac{1}{R} \tilde{v}_C^2 = -\alpha_1 \tilde{i}_L^2 - \alpha_2 \tilde{v}_C^2. \quad (13)$$

Ainsi, pour $v_{C,\text{eq}} \tilde{i}_L - i_{L,\text{eq}} \tilde{v}_C \neq 0$, la loi de commande non linéaire est donnée par :

$$u(\tilde{i}_L, \tilde{v}_C) = u_{\text{eq}} + \frac{-\alpha_1 \tilde{i}_L^2 - (\alpha_2 - \frac{1}{R}) \tilde{v}_C^2}{v_{C,\text{eq}} \tilde{i}_L - i_{L,\text{eq}} \tilde{v}_C}. \quad (14)$$

Avec cette loi, la dérivée de V vérifie, par construction :

$$\dot{V} = -\alpha_1 \tilde{i}_L^2 - \alpha_2 \tilde{v}_C^2 < 0 \quad \text{pour tout } (\tilde{i}_L, \tilde{v}_C) \neq (0, 0). \quad (15)$$

L'équilibre est donc globalement asymptotiquement stable, avec une vitesse de convergence réglable via les gains α_1 et α_2 .

Remarques pratiques.

- La loi (14) est singulière lorsque $v_{C,\text{eq}}\tilde{i}_L - i_{L,\text{eq}}\tilde{v}_C = 0$. En pratique, on traite ce cas en revenant à la commande constante $u = u_{\text{eq}}$ lorsque le dénominateur devient trop petit.
- La commande physique doit respecter les contraintes $0 < u < 1$. Une saturation numérique (par exemple $0,05 \leq u \leq 0,95$) est généralement ajoutée en implémentation.

4.4 Commande 3 : annulation des seuls termes instables de \dot{V}

On observe dans (9) que le terme $-\frac{1}{R}\tilde{v}_C^2$ est stable (negatif) et contribue toujours à diminuer V . Le terme susceptible de rendre \dot{V} positif est le produit $(u - u_{\text{eq}})(v_{C,\text{eq}}\tilde{i}_L - i_{L,\text{eq}}\tilde{v}_C)$. L'idée de cette troisième loi est donc d'agir uniquement sur ce terme,

Pour arriver à ça il faut que :

$$u - u_{\text{eq}} = -k(v_{C,\text{eq}}\tilde{i}_L - i_{L,\text{eq}}\tilde{v}_C), \quad k > 0. \quad (16)$$

Alors,

$$\boxed{u(\tilde{i}_L, \tilde{v}_C) = u_{\text{eq}} - k(v_{C,\text{eq}}\tilde{i}_L - i_{L,\text{eq}}\tilde{v}_C), \quad k > 0.} \quad (17)$$

et la dérivée de Lyapunov devient :

$$\dot{V} = -k(v_{C,\text{eq}}\tilde{i}_L - i_{L,\text{eq}}\tilde{v}_C)^2 - \frac{1}{R}\tilde{v}_C^2 \leq 0. \quad (18)$$

L'ensemble où $\dot{V} = 0$ impose simultanément $v_{C,\text{eq}}\tilde{i}_L - i_{L,\text{eq}}\tilde{v}_C = 0$ et $\tilde{v}_C = 0$. En étudiant la dynamique sur cet ensemble et en appliquant le théorème d'invariance de LaSalle, on montre que l'unique trajectoire qui y reste est $(\tilde{i}_L, \tilde{v}_C) = (0, 0)$. L'équilibre est donc également globalement asymptotiquement stable sous la loi (17).

5 Résultats de simulation des lois de commande

Dans cette partie, on compare les trois lois de commande définies précédemment à partir des réponses issues de SIMULINK. Pour chaque commande, on observe la tension de sortie $v_C(t)$, le courant dans l'inductance $i_L(t)$ et le rapport cyclique $u(t)$, en présence d'une perturbation sur la tension d'entrée V_{in} . On s'intéresse en particulier au temps de réponse et au temps de réponse à 5 % (temps d'accommodation dans la bande $\pm 5\%$ autour de la consigne), ainsi qu'au caractère oscillant ou non de la réponse.

5.1 Commande 1 : commande à l'équilibre

Sous la commande 1 (duty fixé à u_{eq}), la réponse en tension est *oscillante* avec un dépassement important. Pour une consigne de $V_{\text{ref}} = 24 \text{ V}$, la tension de sortie atteint un maximum d'environ 32.4 V , soit un dépassement de l'ordre de 35 %. Le temps de réponse à 5 % (temps nécessaire pour que $v_C(t)$ reste définitivement dans la bande $[0,95 V_{\text{ref}}, 1,05 V_{\text{ref}}]$) est d'environ

$$t_{r,5\%}^{(1)} \simeq 0,20 \text{ s.}$$

Ces résultats confirment que, même si la commande à l'équilibre permet d'atteindre la bonne valeur moyenne en régime permanent dans le cas nominal, elle engendre des oscillations marquées et un dépassement élevé. De plus, cette loi reste sensible aux variations de V_{in} , puisqu'aucune action de correction n'est appliquée en fonction de l'état courant du système.

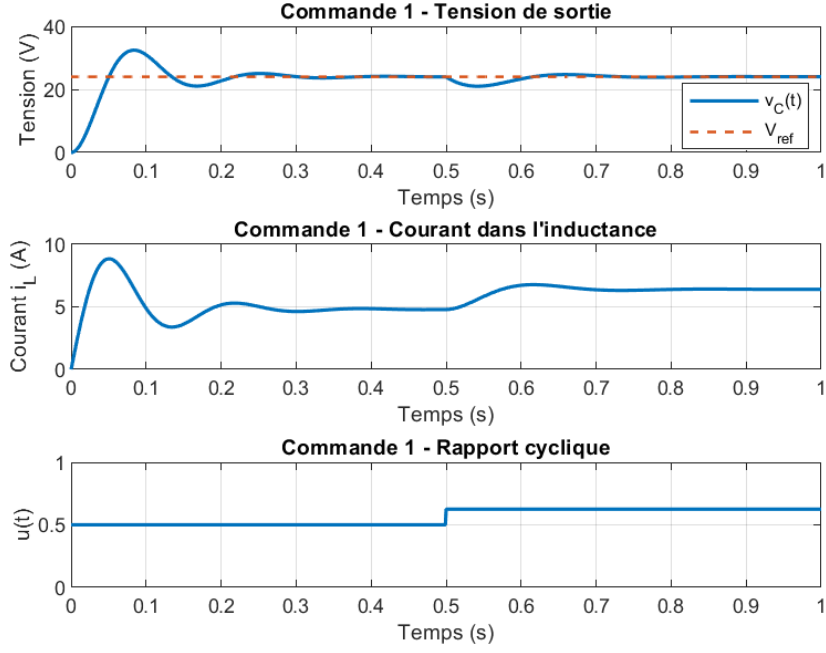


FIGURE 5 – Tension de sortie, courant inductif et commande pour la commande 1.

5.2 Commande 2 : annulation complète de la dérivée de Lyapunov

Avec la commande 2 (annulation complète de la dérivée de Lyapunov), la réponse en tension $v_C(t)$ est *non oscillante* et présente un comportement nettement plus satisfaisant. Le temps de réponse et le temps de réponse à 5 % sont tous deux d'environ

$$t_r^{(2)} \simeq t_{r,5\%}^{(2)} \simeq 0,12 \text{ s},$$

sans dépassement notable et avec une convergence rapide vers la consigne, y compris après la perturbation sur V_{in} . Le courant $i_L(t)$ suit la même dynamique amortie.

La différence principale se trouve au niveau de la commande $u(t)$: pour cette loi, le rapport cyclique présente des variations *agressives*, avec une fréquence de variation élevée, même lorsque la sortie suit correctement V_{ref} . Autrement dit, la tension est bien régulée, mais l'effort de commande est important, ce qui peut poser des problèmes en pratique (solicitation du hacheur, pertes supplémentaires, contraintes sur l'électronique de puissance).

5.3 Commande 3 : annulation des seuls termes non stabilisants

Avec la commande 3 (annulation des seuls termes non stabilisants de la dérivée de Lyapunov), la réponse en tension $v_C(t)$ est très proche de celle obtenue avec la commande 2. La dynamique est *non oscillante*, et le temps de réponse ainsi que le temps de réponse à 5 % sont également de l'ordre de

$$t_r^{(3)} \simeq t_{r,5\%}^{(3)} \simeq 0,12 \text{ s}.$$

La tension de sortie revient à la référence après la perturbation sur V_{in} avec une qualité de régulation comparable à celle de la commande 2, et le courant inductif présente le même type de comportement amorti.

En revanche, la commande $u(t)$ est nettement plus *douce* : avant la perturbation, le duty varie peu autour de sa valeur nominale, et reste globalement lisse. Après la perturbation sur V_{in} , on observe bien des variations plus rapides de $u(t)$ pour ramener le système vers la consigne, mais

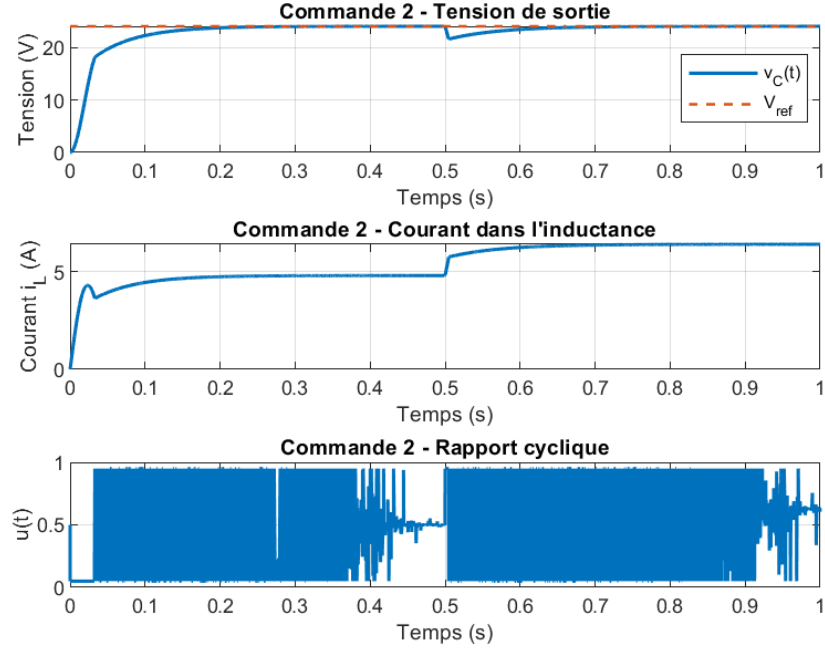


FIGURE 6 – Tension de sortie, courant inductif et commande pour la commande 2.

ces variations restent moins violentes que celles de la commande 2 et se stabilisent rapidement. La loi 3 fournit donc une régulation de la tension équivalente à la commande 2, tout en limitant l'effort de commande.

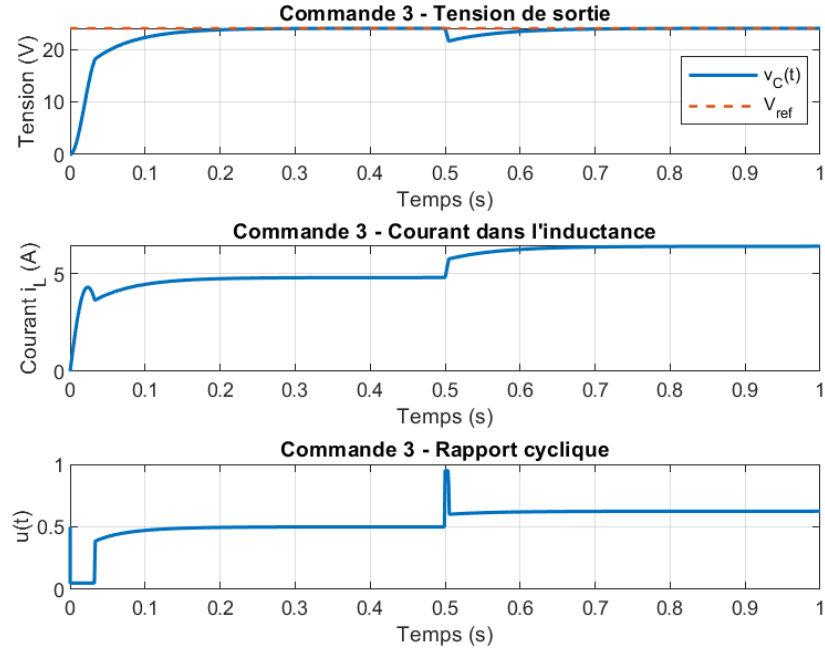


FIGURE 7 – Tension de sortie, courant inductif et commande pour la commande 3.

5.4 Discussion et choix de la loi de commande

Les simulations montrent que :

- la commande 1 présente un dépassement important ($\approx 35\%$), un temps de réponse à 5 % plus long ($\approx 0,2$ s) et un comportement oscillant ; elle est donc peu adaptée à une régulation de tension précise et robuste ;
- les commandes 2 et 3 offrent des réponses en tension et en courant très similaires, non oscillantes, avec un temps de réponse d'environ 0,12 s et un bon retour à la consigne après perturbation de V_{in} ;
- parmi ces deux lois, la commande 3 se distingue par une commande $u(t)$ plus régulière et moins agressive, ce qui en fait un meilleur compromis entre performance de régulation et effort de commande.

Au vu de ces résultats, la commande 3 apparaît comme la stratégie la plus intéressante pour une implémentation pratique : elle permet de conserver une bonne dynamique et une bonne robustesse vis-à-vis des variations de V_{in} , tout en limitant les sollicitations sur l'interrupteur de puissance.

6 Conclusion et perspectives

Dans ce travail, on a proposé et comparé plusieurs lois de commande non linéaire pour un convertisseur Boost, à partir d'un modèle moyenné validé sous SIMULINK. Les résultats de simulation montrent que les commandes basées sur la méthode directe de Lyapunov permettent d'obtenir une dynamique non oscillante, un temps de réponse court et une erreur statique nulle sur la tension de sortie. Parmi elles, la commande annulant uniquement les termes non stabilisants de la dérivée de Lyapunov offre un bon compromis entre performances de régulation et effort de commande.

Cependant, l'étude a été menée en supposant que la tension d'entrée V_{in} ainsi que les paramètres du système (L, C, R) sont parfaitement connus et que les mesures sont idéales. En pratique, ces hypothèses sont rarement vérifiées : les capteurs introduisent du bruit de mesure et des biais, les paramètres peuvent varier avec la température, le vieillissement ou les conditions d'exploitation, et la tension fournie par le générateur photovoltaïque est fortement fluctuante. Ces incertitudes peuvent dégrader la qualité de la régulation et remettre en cause la robustesse des lois de commande développées.

Plusieurs pistes peuvent être envisagées pour tenir compte de ces aspects dans des travaux ultérieurs. Une première approche consiste à renforcer l'action intégrale dans la loi de commande, afin de compenser les erreurs lentes et les incertitudes sur les paramètres. Il est également possible de recourir à des commandes non linéaires adaptatives, associées à des observateurs d'état, pour estimer en ligne les grandeurs non mesurées et adapter les gains en fonction des variations du système. Enfin, dans le contexte particulier de la production photovoltaïque, des stratégies de commande adaptatives pourraient être développées en s'appuyant sur la prédiction de la tension PV à partir des conditions climatiques (irradiance, température, etc.), elles-mêmes prévisibles via des modèles météorologiques ou des approches de type apprentissage automatique. Ces perspectives ouvrent la voie à une commande plus robuste et mieux intégrée aux contraintes réelles d'un système de conversion d'énergie solaire.