

# Árboles de búsqueda 2

Fernando Schapachnik<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>En realidad... `push('Fernando Schapachnik',  
push('Esteban Feuerstein', autores))`

<sup>2</sup>Departamento de Computación, FCEyN,  
Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires, Argentina

Algoritmos y Estructuras de Datos II,  
segundo cuatrimestre de 2018

## (2) Algoritmos

- ¿Cuánto tardan las búsquedas?  $O(\log n)$
- ¿Y las inserciones y borrados?
- Debemos garantizar algoritmos que restauren el invariante de AVL.

### (3) Inserción

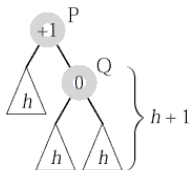
- Insertar el nuevo nodo como en un ABB (el nuevo nodo es una hoja).
- Recalcular los factores de balanceo que cambiaron por la inserción, sólo en la rama en la que ocurrió la inserción, de abajo hacia arriba.
- ¿Podrían haber cambiado los otros factores? No.
- Si en la rama aparece un factor de balanceo de  $\pm 2$ , hay que rebalancear.
- Eso se hace a través de **rotaciones**.

## (4) Rotaciones en AVL

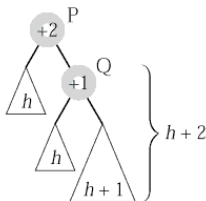
- Cuatro rotaciones posibles, dos simples, dos dobles:
  - RR: inserción en el subárbol derecho (R) de un hijo derecho (R) del nodo que se desbalancea.
  - LR: inserción en el subárbol izquierdo (L) de un hijo derecho (R) del nodo que se desbalancea.
  - RL: inserción en el subárbol derecho (R) de un hijo izquierdo (L) del nodo que se desbalancea.
  - LL: inserción en el subárbol izquierdo (L) de un hijo izquierdo (L) del nodo que se desbalancea.

## (5) Rotaciones simples

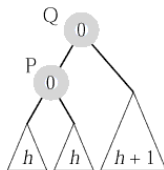
- Veamos como ejemplo la RR (la LL es simétrica):



a)



b)

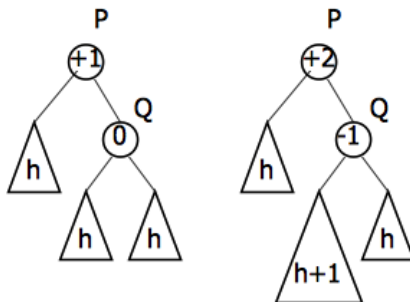


c)

- En el ejemplo el nodo  $Q$  es el primero de la rama donde cambió el FdB.
- La inserción no influye en los antepasados de  $P$  porque luego de la rotación recuperan su factor de balanceo anterior.

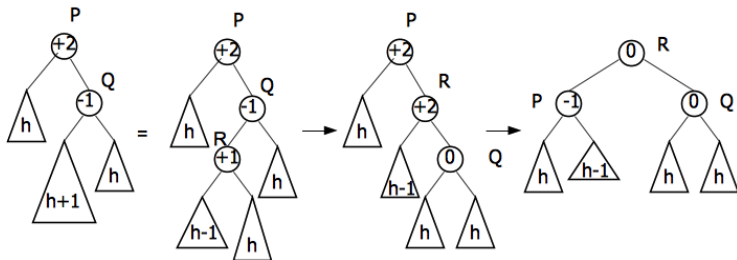
## (6) Rotaciones dobles

- Veamos como ejemplo la LR (la RL es simétrica).
- La inserción produce lo siguiente:



## (7) Rotaciones dobles (cont.)

- Lo que tenemos que hacer es:



- La inserción, ¿influye en la altura de los antepasados de  $P$ ?  
No, y por eso no hace falta seguir rebalanceando.
- ¿Qué pasaría si  $FdB(R) = -1$ ?
- ¿Cuánto cuestan las rotaciones?  $O(1)$ .
- Ojo, eso es una vez que encuentro dónde hacerlas, primero debo detectarlas.
- ¿Cuánto cuesta eso?  $O(h) = O(\log n)$

## (8) Costo de la inserción

Analicemos el costo de las inserciones:

- 1) Insertar el nodo: proporcional a la altura del árbol,  $\Theta(\log n)$ .
- 2) Recalcular los FdB de la rama: proporcional a la altura del árbol,  $\Theta(\log n)$ .
- 3) Hacer las rotaciones necesarias:  $O(1)$ , ya que se hacen una o dos rotaciones por inserción.

TOTAL)  $\Theta(\log n)$

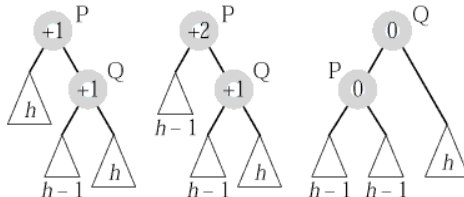


## (9) Borrado en AVLs

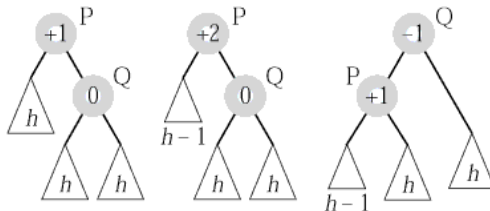
- Borrar el nodo como en un ABB.
- Recalcular los factores de balanceo que cambiaron por el borrado (sólo en la rama del borrado, de abajo hacia arriba).
- Para cada nodo con factor de balanceo  $\pm 2$  hay que hacer una rotación simple o doble:  $O(\log n)$  rotaciones en el caso peor.

## (10) Rotación simple en el borrado

- Eliminemos una hoja de un subárbol izquierdo de  $P$ , si el hijo derecho tiene  $\text{FdB} +1$ :

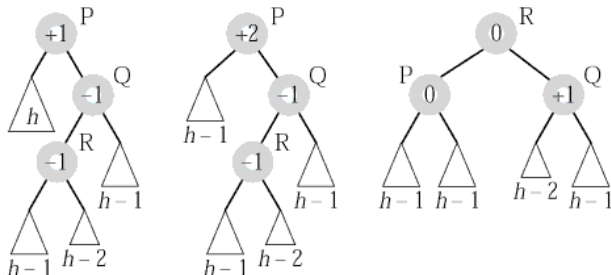


- Eliminemos una hoja de un subárbol izquierdo de  $P$ , si el hijo derecho tiene  $\text{FdB} 0$ :



## (11) Rotación doble en el borrado

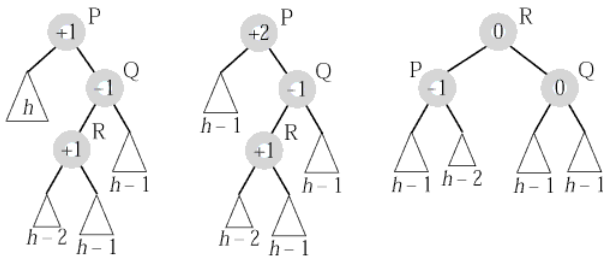
- Eliminemos una hoja de un subárbol izquierdo de  $P$ , si el hijo derecho tiene FdB  $-1$  y su nieto también.



- Hacemos una rotación entre  $R$  y  $Q$  ( $P$  pasa a  $+2$ ,  $R$  y  $Q$  pasan a  $+1$ ) y luego una rotación  $P$ - $R$ .

## (12) Rotación doble en el borrado (cont.)

- Eliminemos una hoja de un subárbol izquierdo de  $P$ , si el hijo derecho tiene FdB  $-1$  y su nieto  $+1$ .



- Hacemos una rotación entre  $R$  y  $Q$  ( $P$  y  $R$  pasan a  $+2$ ,  $Q$  pasa a  $0$ ) y luego una rotación  $P$ - $R$ .

## (13) Costo del borrado

Analicemos el costo del borrado:

- 1) Borrar el nodo: proporcional a la altura del árbol,  $\Theta(\log n)$ .
- 2) Recalcular los FdB de la rama: proporcional a la altura del árbol,  $\Theta(\log n)$ .
- 3) Hacer las rotaciones necesarias:  $\Theta(\log n) \cdot \Theta(1)$ , ya que en el peor caso hay que hacer rotaciones a lo largo de toda la rama.

TOTAL)  $\Theta(\log n)$

## (14) Tarea

- Mirar en detalles las rotaciones y entenderlas. Ser capaces de explicarlas (que es lo mismo que entenderlas).
- Escribir el pseudo código imperativo de la inserción en AVL.
- Para valientes: escribir el pseudo código imperativo del borrado en AVL.