

Resueltos Lógica y Computabilidad

Ignacio E. Losiggio

February 15, 2019

1 Práctica 2 — Funciones \mathcal{S} -computables

1.1

1.1.1 Definir *macros* para las siguientes pseudo-instrucciones (con su interpretación natural) e indicar en cada caso qué etiquetas se asumen “frescas”

- $V_i \leftarrow k$

[R] $V_i \leftarrow V_i - 1$
IF $V_i \neq 0$ GOTO R
 $V_i \leftarrow V_i + 1$
 \vdots k veces
 $V_i \leftarrow V_i + 1$

Se toma sólo la etiqueta R cómo fresca.

- $V_i \leftarrow V_j + k$

$V_i \leftarrow k$
 $Z_a \leftarrow Z_a + 1$
IF $Z_a \neq 0$ GOTO C
[S] $V_j \leftarrow V_j - 1$
 $V_i \leftarrow V_i + 1$
 $Z_a \leftarrow Z_a + 1$
[C] IF $V_j \neq 0$ GOTO S
IF $Z_a \neq 0$ GOTO F
[L] $V_j \leftarrow V_j + 1$
[F] $Z_a \leftarrow Z_a - 1$
IF $Z_a \neq 0$ GOTO L

Se toman las etiquetas S , C , L , F y la variable Z_a cómo frescas.

- IF $V_i = 0$ GOTO L
 - IF $V_i \neq 0$ GOTO C
 - $Z_a \leftarrow Z_a + 1$
 - IF $Z_a \neq 0$ GOTO L
 - $[C]$ $Z_a \leftarrow Z_a + 1$

Se toman la etiqueta C y la variable Z_a cómo frescas.

- GOTO L
 - $Z_a \leftarrow Z_a + 1$
 - IF $Z_a \neq 0$ GOTO L

Se toma sólo la variable Z_a cómo fresca.

- 1.1.2 Definir dos pseudo-programas distintos en el lenguaje \mathcal{S} (usando las macros convenientes del punto anterior) que computen la función de dos variables $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. Par aalguno de los dos, expandir las macros utilizadas prestando atención a la instanciación de variables y etiquetas frescas.

$Y \leftarrow X_1 + 0$ $\text{GOTO } B$ $[A] Y \leftarrow Y + 1$ $X_2 \leftarrow X_2 - 1$ $[B] \text{ IF } X_2 \neq 0 \text{ GOTO } A$	$[A] \text{ IF } X_1 = 0 \text{ GOTO } B$ $Y \leftarrow Y + 1$ $X_1 \leftarrow X_1 - 1$ $\text{GOTO } A$ $[B] \text{ IF } X_2 = 0 \text{ GOTO } E$ $Y \leftarrow Y + 1$ $X_2 \leftarrow X_2 - 1$ $\text{GOTO } B$
--	---

Vamos a expandir la segunda de las formulaciones (por ser la que tiene macros más

simples).

```

[A] IF  $X_1 \neq 0$  GOTO  $Y$ 
     $Z_1 \leftarrow Z_1 + 1$ 
    IF  $Z_1 \neq 0$  GOTO  $B$ 
[Y]  $Z_1 \leftarrow Z_1 + 1$ 
     $Y \leftarrow Y + 1$ 
     $X_1 \leftarrow X_1 - 1$ 
     $Z_2 \leftarrow Z_2 + 1$ 
    IF  $Z_2 \neq 0$  GOTO  $A$ 
[B] IF  $X_2 \neq 0$  GOTO  $Z$ 
     $Z_3 \leftarrow Z_3 + 1$ 
    IF  $Z_3 \neq 0$  GOTO  $E$ 
[Z]  $Z_3 \leftarrow Z_3 + 1$ 
     $Y \leftarrow Y + 1$ 
     $X_2 \leftarrow X_2 - 1$ 
     $Z_4 \leftarrow Z_4 + 1$ 
    IF  $Z_4 \neq 0$  GOTO  $B$ 

```

1.1.3 Sea P el programa en \mathcal{S} que resulta de expandir todas las macros en alguno de los códigos del punto anterior. Determinar cuál es la función computada en cada caso:

- $\Psi_P^{(1)} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$f(x) = x$, se puede ver fácil desde planteo del ejercicio anterior, los parámetros no inicializados son ceros por lo que la función pedida se instancia como $f(x_1, 0) = x + 0$ y se transforma nuestra suma en la función identidad.

- $\Psi_P^{(2)} : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$

$f(x, y) = x + y$, la función pedida el ejercicio anterior.

- $\Psi_P^{(3)} : \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$

$f(x, y, z) = x + y$, dado que ignoramos el tercer parámetro en ambas formulaciones del programa.

1.2

1.2.1 Sea $\mathcal{C}_S = \{\Psi_P^{(n)} \mid P \text{ es un programa en } S, n \geq 1\}$ la clase de funciones S -parciales computables. Mostrar que \mathcal{C}_S es una clase PRC

Para mostrar que es PRC necesito dar un programa para las iniciales y demostrar que \mathcal{C}_S está cerrado por composición y recursión primitiva.

Vamos primero por las iniciales:

$$\begin{array}{lll} n(x) = 0 & s(x) = x + 1 & u_i^n(x_1, \dots, x_n) = x_i \\ Z_1 \leftarrow Z_1 + 1 & Y \leftarrow X_1 + 1 & Y \leftarrow X_i + 0 \end{array}$$

Y ahora veamos cómo resolver la composición, tomo $h : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ y $g_1, \dots, g_k : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ que pertenezcan a \mathcal{C}_S (y por lo tanto tengan programas que podamos usar cómo macros):

$$f(x_1, \dots, x_n) = h(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_k(x_1, \dots, x_n))$$

$$Z_1 \leftarrow g_1(X_1, \dots, X_n)$$

$$\vdots$$

$$Z_k \leftarrow g_k(X_1, \dots, X_n)$$

$$Y \leftarrow h(Z_1, \dots, Z_k)$$

Para que esto funcione tenemos que restringir a cada macro a dejar sus variables de entrada intactas al finalizar su ejecución. Una forma de mecanizarlo es que cada macro copie todas sus variables de entrada a variables temporales “frescas” (que no se hayan usado ni se vayan a usar) y que cada macro designe como variable de salida una variable temporal “fresca”. La única excepción a esto es el macro de asignación $V_i \leftarrow Expr$ que aunque el resultado de $Expr$ esté en una variable “fresca” debe modificar V_i para cumplir con su tarea.

Dicho todo esto, vamos por la recursión primitiva, la cuál es más simple de lo que parece, tomo $h : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ y $g : \mathbb{N}^{n+2} \rightarrow \mathbb{N}$ que pertenezcan a \mathcal{C}_S (¡Osea que tenemos programas!):

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n, 0) &= h(x_1, \dots, x_n) \\ f(x_1, \dots, x_n, t+1) &= g(f(x_1, \dots, x_n, t), x_1, \dots, x_n, t) \end{aligned}$$

```

       $Y \leftarrow h(X_1, \dots, X_n)$ 
[L] IF  $X_{n+1} = 0$  GOTO  $E$ 
       $Z_1 \leftarrow Z_1 + 1$ 
       $X_{n+1} \leftarrow X_{n+1} - 1$ 
       $Y \leftarrow g(Y, X_1, \dots, X_n, Z_1)$ 
      GOTO  $L$ 

```

1.2.2 Demostrar (sin definir un programa en \mathcal{S}) que la función $*$: $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $*(x, y) = x \cdot y$ es \mathcal{S} -computable.

En la práctica anterior la demostramos primitiva recursiva y sabemos que $pr \subseteq PRC$ para cualquier conjunto PRC . En el punto anterior demostramos que $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}$ era PRC , por lo que todas las primitivas recursivas están allí, entre ellas $*$.

1.2.3 Si $f : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ es una función primitiva recursiva ¿Qué podemos decir acerca de la existencia de un programa en el lenguaje \mathcal{S} que la compute?

Que existe (por las mismas razones del punto anterior).

1.3 Decimos que un programa P es *autocontenido* si en cada instrucción IF $V \neq 0$ GOTO L que ocurre en P , L es una etiqueta definida en P .

1.3.1 Demostrar que todo programa P tiene un programa autocontenido P' equivalente (P y P' son programs equivalentes si $\Psi_P^{(n)} = \Psi_{P'}^{(n)} \forall n \geq 1$).

Supongamos P un programa no autocontenido con una cantidad k de etiquetas “libres” L_1, \dots, L_k (etiquetas en uso pero sin lugar hacia dónde saltar). Como el programa P es finito usa una cantidad finita de variables temporales Z_1, \dots, Z_n y tiene una cantidad finita de instrucciones podemos construir P' agregándole las siguientes instrucciones al final de P :

```

[L1]  $Z_{n+1} \leftarrow Z_{n+1} + 1$ 
       $\vdots$ 
[Lk]  $Z_{n+1} \leftarrow Z_{n+1} + 1$ 

```

Necesitamos sólo una variable “fresca” y cómo nunca modificamos a Y el resultado del programa P no se modifica.

1.3.2 Sean P y Q dos programas autocontenidos con etiquetas disjuntas y sea $r : \mathbb{N}^n \rightarrow \{0, 1\}$ un predicado primitivo recursivo. Definir macros para las siguientes pseudo-instrucciones (con su interpretación natural)

- IF $r(V_1, \dots, V_n)$ GOTO L

$$Z_a \leftarrow r(V_1, \dots, V_n)$$

$$\text{IF } Z_a \neq 0 \text{ GOTO } L$$
- IF $r(V_1, \dots, V_n)$ THEN P ELSE Q

$$\text{IF } r(V_1, \dots, V_n) \text{ GOTO } P$$

$$; \text{ Acá van los contenidos de } Q$$

$$\text{GOTO } E$$

$$[P] ; \text{ Acá van los contenidos de } P$$
- WHILE $r(V_1, \dots, V_n)$ P

$$[L] \text{ IF } r(V_1, \dots, V_n) \text{ GOTO } E$$

$$; \text{ Acá van los contenidos de } P$$

$$\text{GOTO } L$$

1.3.3 Dadas las funciones $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 3 \\ \uparrow & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad g(x) = 2x$$

Demostrar que es \mathcal{S} -parcial computable la función

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \geq 5 \vee x = 3 \\ g(x) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Tengo que las operaciones $a = b$, $a \geq b$, $a \vee b$ y $a \cdot b$ son p.r., por lo que sé que existen programas en \mathcal{S} que las computan. También tengo que la división por casos en una clase PRC genera una función dentro de la misma clase. Dado todo esto ya puedo asegurar que $g(x)$ es \mathcal{S} -parcial computable y que si $f(x)$ lo fuera entonces $h(x)$ también.

Me queda demostrar que en \mathcal{S} los programas (a veces) se cuelgan. Defino $j(x) = \uparrow \forall x$ y reescribo $f(x)$ cómo una composición con $j(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 3 \\ j(x) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Y sólo me queda ofrecer el código de $j(x)$:

[A] GOTO A

1.4

1.4.1 Se definen las siguientes variantes del lenguaje \mathcal{S} :

- \mathcal{S}_1 : Igual que \mathcal{S} pero sin la instrucción $V \leftarrow V + 1$
- \mathcal{S}_2 : Igual que \mathcal{S} pero sin la instrucción IF $V \neq 0$ GOTO L
- \mathcal{S}_3 : Igual que \mathcal{S} pero sin la instrucción $V \leftarrow V - 1$

Demostrar que para cada uno de estos lenguajes existe al menos una función \mathcal{S} -parcial computable que no es computable en este nuevo lenguaje.

Para el primer caso podemos tomar $f(x) = 1$. Como Y arranca valiendo 0 y sólo podemos decrementarlo entonces no es posible hacer que el valor de Y supere el 0 con las instrucciones que nos quedan.

Para el segundo caso podemos tomar la función $f(x) = x$. Para hacer que el valor de Y llegue a x hay que ejecutar *al menos* x instrucciones. Dado que no tenemos ninguna forma de controlar el flujo del programa es obvio que todo programa en \mathcal{S}_2 siempre va a ejecutar la misma cantidad de instrucciones. Entonces finalmente podemos decir que para cualquier programa P en \mathcal{S}_2 existe un x mayor a su longitud (la cantidad de instrucciones). Por lo que no se puede construir un programa que sea $f(x) = x$ para cualquier x . Otra respuesta posible (y más simple) era hablar de la función que se indefiniera siempre. Como en \mathcal{S}_2 todos los programas tienen una cantidad finita de instrucciones entonces todos son totales, el programa que se indefiniera para toda entrada no es construible.

Para \mathcal{S}_3 notemos primero que al iniciar el programa todo el estado no inicializado $(X_n, X_{n+1}, \dots, Y, Z_1, Z_2, Z_3, \dots)$ toma el valor 0. Esto hace que todas esas variables no generen saltos en las instrucciones IF $V \neq 0$ GOTO L . Podemos incrementarlas en 1 y allí sólo van a producir saltos en esas instrucciones, pero una vez hecho esto no pueden *dejar de hacerlo*. Por ende el flujo que toma el programa depende únicamente que si las variables de entrada son 0 o son > 0 . No existe forma de que una $V \neq 0$ en un tiempo t pase a ser igual a 0 en un tiempo $t + k$. Es decir, los programas en \mathcal{S}_3 dependen de cuáles de la finita cantidad de entradas que leen son $\neq 0$ pero no de los valores que ellas tienen. Es por esto que no puede construirse $f(x) = x$.

1.4.2 Sea \mathcal{S}' el lenguaje de programación definido como \mathcal{S} salvo que sus instrucciones (etiquetadas o no) son de los siguientes tipos (con su interpretación antural):

$V \leftarrow V'$
 $V \leftarrow V + 1$
 IF $V \neq V'$ GOTO L

Demstrar que una función es parcial computable en \mathcal{S}' si y solo si lo es en \mathcal{S} .

Cómo los lenguajes estos están cerrados por las instrucciones básicas y la secuencia alcanzaria con ofrecer macros que representen a las instrucciones básicas de c/u en el otro para mostrar su equivalencia.

\mathcal{S}'	Macro en \mathcal{S}
$V \leftarrow V'$	$V \leftarrow V' + 0$
$V \leftarrow V + 1$	$V \leftarrow V + 1$
IF $V \neq V'$ GOTO L	$Z_a \leftarrow V \dot{-} V' + V' \dot{-} V$ IF $Z_a \neq 0$ GOTO L
\mathcal{S}	Macro en \mathcal{S}'
$V \leftarrow V + 1$	$V \leftarrow V + 1$
IF $V \neq 0$ GOTO L	IF $V \neq Z_a$ GOTO L IF $Z_a \neq V$ GOTO A $Z_a \leftarrow Z_a + 1$ IF $Z_a \neq V$ GOTO E [A] $Z_a \leftarrow Z_a + 1$ IF $Z_a \neq V$ GOTO B $Z_a \leftarrow Z_a + 1$ IF $Z_a \neq V$ GOTO E [B] $Z_a \leftarrow Z_a + 1$ $Z_b \leftarrow Z_b + 1$ IF $Z_a \neq V$ GOTO B [E] $V \leftarrow Z_b$
$V \leftarrow V \dot{-} 1$	

1.5

1.5.1 Demostrar que si $p : \mathbb{N}^{n+1} \rightarrow \{0, 1\}$ es un predicado \mathcal{S} -computable (total), entonces es \mathcal{S} -parcial computable:

$$\text{mínimoNA}_p(x_1, \dots, x_n, y) = \begin{cases} \min\{t \mid y \leq t \wedge p(x_1, \dots, x_n, t)\} & \text{si existe algún } t \\ \uparrow & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La forma más simple de demostrarlo es dar un programa:

```

      Y ← y
[A] IF p(X1, ..., Xn, Y) ≠ 0 GOTO E
      Y ← Y + 1
      GOTO A

```

1.5.2 Mostrar, usando el resultado anterior, que si $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ es biyectiva y \mathcal{S} -computable (total) entonces también lo es su inversa f^{-1} .

Partiendo del ejercicio anterior y con unos reemplazos simples obtenemos algo similar a esto:

$$p(x, y) = (f(x) = y)$$

$$f^{-1}(x) = \text{mínimoNA}_p(x, 0)$$

Cómo sabemos que f es total entonces siempre existe ese t y f^{-1} resulta también total.

1.6 Un programa P en el lenguaje \mathcal{S} con instrucciones I_1, I_2, \dots, I_n se dice *optimista* si $\forall i = 1, \dots, n$, si I_i es la instrucción IF $V \neq 0$ GOTO L entonces L no aparece como etiqueta de ninguna instrucción I_j con $j \leq i$.

Demostrar que el siguiente predicado es primitivo recursivo:

$$r(x) = \begin{cases} 1 & \text{si el programa cuyo número es } x \text{ es optimista} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Podemos simplemente escribirlo:

$$r(x) = \prod_{i=1}^{|x|} l(r(x[i])) > 2 \implies i < \min_{j \leq |x|} (l(x[j]) + 2 = l(x[i]))$$

Cómo $l, r, \prod_i^k, >, <, \implies, \min_{t \leq y}, +, l[k], |l|$ e $=$ son primitivas recursivas y la función es una composición de primitivas recursivas entonces r es primitiva recursiva.

1.7 Utilizando las funciones primitivas-recursivas $\text{STP}^{(n)}$ y $\text{SNAP}^{(n)} : \mathbb{N}^{n+2} \rightarrow \mathbb{N}$ vistas en clase, mostrar que las siguientes son funciones \mathcal{S} -parciales computables:

$$\begin{aligned}
 f_1(x, y) &= \begin{cases} 1 & \text{si } y \in \text{Dom } \Phi_x^{(1)} \\ \uparrow & \text{si no} \end{cases} & f_2(x) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \text{Dom } \Phi_x^{(1)} \neq \emptyset \\ \uparrow & \text{si no} \end{cases} \\
 f_3(x, y) &= \begin{cases} 1 & \text{si } y \in \text{Im } \Phi_x^{(1)} \\ \uparrow & \text{si no} \end{cases} & f_4(x, y) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \text{Dom } \Phi_x^{(1)} \cap \text{Im } \Phi_y^{(1)} \neq \emptyset \\ \uparrow & \text{si no} \end{cases}
 \end{aligned}$$