Resueltos Lógica y Computabilidad

Ignacio E. Losiggio

February 17, 2019

1 Práctica 3 — Funciones no-computables y conjuntos c.e.

1.1 Probar, usando una diagonalización, que las siguientes funciones no son computables:

$$f_1(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y)\downarrow \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad f_3(x,y,z) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y)\downarrow \text{ y } \Phi_x^{(1)}(y) > z \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$f_2(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y) = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad f_4(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(x)\downarrow \text{ y } \Phi_x^{(1)}(x) \neq x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

1.1.1 $f_1(x,y)$

Si f_1 es computable entonces puedo construir el siguiente programa que lo la use a cuyo número llamaremos e:

$[A]$ IF $f_1(X_1, X_1) \neq 0$ GOTO A

Luego intentemos determinar el valor de $f_1(e,e)$:

$$f_1(e,e) = 1 \iff \Phi_e^{(1)}(e)\downarrow \iff f_1(e,e) = 0$$

1.1.2 $f_2(x,y)$

Armemos de vuelta una función que sea molesta:

$[A]$ IF $f_2(X_1, X_1) = 0$ GOTO A
$\quad Y \leftarrow Y + 1$

E intentemos determinar el valor de $f_2(e,e)$ otra vez:

$$f_2(e,e) = 1 \iff \Phi_e^{(1)}(e) = 0$$
$$f_2(e,e) = 0 \iff \Phi_e^{(1)}(e) \neq 0 \vee \Phi_e^{(1)}(e)\uparrow \iff f_2(e,e) \neq 0 \vee f_2(e,e)\uparrow$$

1.1.3 $f_3(x,y,z)$

Cómo venimos haciendo empezamos por el "programa rebelde":

$[A]$ IF $f_3(X_1,X_1,X_1) \neq 0$ GOTO A
$Y \leftarrow X_1 + 1$

Y intentamos ver que determinar el valor de $f_3(e,e,e)$ no tiene sentido:

$$\begin{aligned} f_3(e,e,e) = 1 &\iff \Phi_e^{(1)}(e)\downarrow \wedge\ \Phi_e^{(1)}(e) > e \\ &\iff f_3(e,e,e) = 0\ \wedge\ f_3(e,e,e) = 0 \\ &\iff f_3(e,e,e) = 0 \end{aligned}$$

1.1.4 $f_x(x)$

$[A]$ IF $f_4(X_1) \neq 0$ GOTO A
$Y \leftarrow X_1 + 1$

$$\begin{aligned} f_4(e) = 1 &\iff \Phi_e^{(1)}(e)\downarrow \wedge\ \Phi_e^{(1)}(e) \neq e \\ &\iff f_4(e) = 0\ \wedge\ f_4(e) = 0 \iff f_4(e) = 0 \end{aligned}$$

1.2 Probar, reduciendo a cualquier función del ejercicio 1, que las siguiente funciones no son computables:

$$g_1(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y)\uparrow \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$
$$g_2(x,y,z,w) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(z)\downarrow \text{ y } \Phi_y^{(1)}(w)\downarrow \text{ y } \Phi_x^{(1)}(z) > \Phi_y^{(1)}(w) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$
$$g_3(x,y,z) = \begin{cases} z+1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y)\downarrow \text{ y } \Phi_x^{(1)}(y) \neq z \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$
$$g_4(x,y,z) = \begin{cases} (\Phi_x^{(1)} \circ \Phi_y^{(1)})(z) & \text{si } \Phi_y^{(1)}(z)\downarrow \text{ y } (\Phi_x^{(1)} \circ \Phi_y^{(1)})(z)\downarrow \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

1.2.1 $g_1(x, y)$

$$\alpha \circ g_1 = f_1$$

1.2.2 $g_2(x, y, z, w)$

Sea e el número de un programa que computa la función identidad podemos decir:

$$g_2(x, e, y, z) = f_2(x, y, z)$$

1.2.3 $g_3(x, y, z)$

$$s(n(g_3(x, x, x))) = f_4(x)$$

1.2.4 $g_4(x, y, z)$

Sea (otra vez) e el número de un program que computa la función identidad podemos decir:

$$g_4(x, e, y) = f_1(x, y)$$