María Valeria Calandra

7) Denotemos por X la proporción de tiempo asignado que un estudiante seleccionado al azar emplea trabajando en cierta prueba de actitud, y supongamos que la f.d.p. de X es:

$$f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0\le x\le 1\\ 0, & c.c\end{cases} \qquad \text{donde } \theta>-1$$

Una muestra aleatoria de diez estudiantes produce la siguiente información:
0.92, 0.79, 0.90, 0.65, 0.86, 0.47, 0.73, 0.97, 0.94, 0.77.

a) Utilice el método de los momentos para obtener un estimador de θ y luego calcule la estimación para esta información.

b) Obtenga el E.M.V. de θ y luego calcule la estimación para la información dada.

a) Método de los momentos:

El método consiste en Igualar los momentos muestrales a los momentos poblacionales correspondientes:

Primer momento poblacional es: $E(X)=\int_0^1 X(\theta+1)X^{\theta}dx=\frac{(\theta+1)}{(\theta+2)}$

Primer momento muestral es: $\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}=\bar{X}$

Igualando ambos momentos:

$$\bar{X}=\frac{(\theta+1)}{(\theta+2)}$$

Despejo θ: $\quad \bar{X}\,(\theta+2)=(\theta+1)$

$$\bar{X}\,\theta+2\bar{X}=(\theta+1)$$

Por lo tanto $\hat{\theta}=\frac{1-2\bar{X}}{\bar{X}-1}$ es el estimador de θ por Momentos

Entonces la estimación con la muestra es:

$$\hat{\theta}=\frac{1-2\times 0.8}{0{,}8-1}=3$$

b) $L(X_1X_2X_3\ldots\ldots X_n,\theta)=(\theta+1)X_1^{\theta}(\theta+1)X_2^{\theta}(\theta+1)X_3^{\theta}\ldots\ldots\ldots\ldots(\theta+1)X_n^{\theta}$

$$L(X_1X_2X_3\ldots\ldots X_n,\theta)=(\theta+1)^nX_1^{\theta}X_2^{\theta}X_3^{\theta}\ldots X_n^{\theta}$$

$$\ln\big(L(X_1X_2X_3\ldots\ldots X_n,\theta)\big)=n\,(ln(\theta+1)))+\theta(\ln(X_1)+\ln(X_2)+\cdots\ldots..+\ln(X_n))$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln\big(L(X_1X_2X_3\ldots\ldots X_n,\theta)\big)=\frac{n}{\theta+1}+(\ln(X_1)+\ln(X_2)+\cdots\ldots..+\ln(X_n))=0$$

$$(\ln(X_1) + \ln(X_2) + \cdots \ldots\ldots + \ln(X_n)) = -\frac{n}{\theta + 1}$$

$\hat{\theta} = -\frac{n}{(\ln(X_1)+\ln(X_2)+\cdots\ldots\ldots+\ln(X_n))} - 1$ Estimador de Máxima Verosimilitud de θ

$\hat{\theta} = 3{,}11$ estimación