INTRODUCCIÓN AL PROCESAMIENTO DE SEÑALES

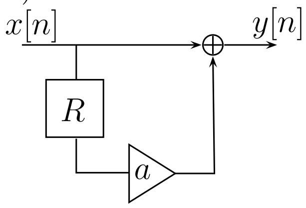
Práctica 2:

Caracterización de Sistemas.

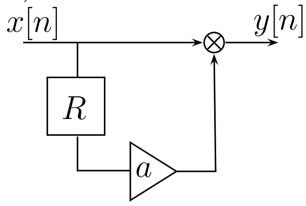
1. **Manejo de Sistemas Discretos**

   Dados los siguientes sistemas de variable independiente discreta:

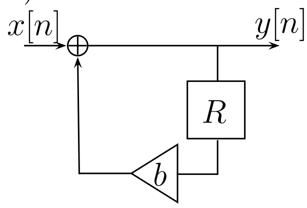
   S1)



   S2)



   S3)



   S4) $y[n] = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x[k]$ *S5*) $y[n] = n\ x[n]$ *S6*) $y[n] = x[n^2]$

   S7) $y[n] = x[-n]$ *S8*) $y[n] = \begin{cases} x[n] & |x[n]| \leq c \\ c & x[n] > c \\ -c & x[n] < -c \end{cases}$ con $c > 0$

   a) Halle una expresión de la señal de salida $y[n]$, cuando a su entrada se aplican las señales:
      I. $x[n] = 5\ \delta[n]$ II. $x[n] = 3\ \delta[n-1]$ III. $x[n] = \delta[n] + 2\ \delta[n-1]$
      Considere los valores de $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$, $b = 2$ (dos valores posibles para b) y $c = 3$.

   b) En función de lo observado, trate de inferir si los sistemas pueden ser o no causales, invariantes al desplazamiento, lineales, estables, y si poseen o no memoria.

   c) En los casos en los cuales no se puede verificar la falsedad de una de estas propiedades (por ejemplo, decir que el sistema es no lineal) a través de los ejemplos observados, debe proponer un contraejemplo adecuado, o demostrar el caso general. **Aclaración**: en el caso del sistema *S3*, la demostración rigurosa de la estabilidad no es sencilla (y se aconseja obviarla). Más adelante veremos herramientas con las cuales este análisis resulta más sencillo.

2. **Manejo de Sistemas Continuos**

   Dados los siguientes sistemas de variable independiente continua:

   S1) $y(t) = 2\ x(t) + 3\ x^2(t-1)$ *S2*) $y(t) = \cos(t)\ x(t)$ *S3*) $y(t) = a\ x(t) + b,\ b \neq 0$

   S4) $\dfrac{dy}{dt} = t^3\ x(t)$ con $y(-\infty) = 0$ *S5*) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\ d\tau$ *S6*) $y(t) = \int_{-\infty}^{t/2} x(\tau)\ d\tau$

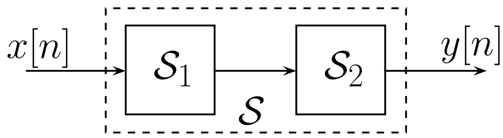
   S7) $y(t) = |x(t)|$

   a) Clasifíquelos de acuerdo a memoria, causalidad, invarianza en el tiempo, linealidad y estabilidad. Para alguno de los casos puede serle de utilidad analizar cómo responde el sistema a diferentes entradas.

   b) ¿Cambiaría su respuesta en el caso del sistema *S3*) en el caso $b = 0$? ¿Y en el caso del sistema *S4*) si se modifica la condición por $y(+\infty) = 0$?

3. **Sistemas en cascada**

   Dos sistemas de tiempo discreto, $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$, se conectan en cascada formando un nuevo sistema $\mathcal{S}$, tal como se muestra en la figura.



Establezca si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos. Recuerde que para demostrar la falsedad de un enunciado puede valerse de un contraejemplo, mientras que para demostrar la veracidad del mismo no es suficiente con un ejemplo en el cual se verifica.

a) Si $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ son lineales, entonces $\mathcal{S}$ es lineal (la conexión en cascada de dos sistemas lineales es lineal).

b) Si $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ son no-lineales, entonces $\mathcal{S}$ es no-lineal.

c) Si $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ son invariantes al desplazamiento, entonces $\mathcal{S}$ es invariante al desplazamiento.

d) Si $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ son lineales e invariantes al desplazamiento, entonces $\mathcal{S}$ es lineal e invariante al desplazamiento.

e) Si $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ son variantes al desplazamiento, entonces $\mathcal{S}$ es variante al desplazamiento.

f) Si $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ son causales, entonces $\mathcal{S}$ es causal.

g) Si $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ son estables, entonces $\mathcal{S}$ es estable (en sentido EA/SA).

4. **Filtro de Mediana**

Un *filtro de mediana* es un sistema discreto para procesar señales ruidosas y suavizarlas. Se implementa deslizando una ventana con número impar de muestras $(2K+1)$ sobre la entrada $x[n]$, de a una muestra por vez. Opera del siguiente modo: en el instante n se consideran las $2K+1$ muestras dentro de la ventana, se re-ordenan por su amplitud de menor a mayor y se toma el valor central como salida $y[n]$. Es decir, la salida del filtro se puede escribir como:

$$y[n] = \text{mediana}\,\{x[n-K],\, x[n-K+1], \ldots,\, x[n-1],\, x[n],\, x[n+1], \ldots,\, x[n+K]\}$$

Por ejemplo, $\text{mediana}\{-3, 1, 10, -5, 3\} = \text{mediana}\{-5, -3, \mathbf{1}, 3, 10\}$ y la salida es entonces $y[n] = 1$.

a) Considerando $K = 1$ calcule $y[n]$ para el caso $x[n] = \delta[n]$, y para el caso $x[n] = C$, con C constante.

b) También para $K = 1$ encuentre una expresión para la señal de salida $y[n]$ cuando la entrada es $x[n] = -\delta[n] + \delta[n-1] - \delta[n-2]$.

c) El filtro de mediana, ¿es un sistema lineal?, ¿es invariante al desplazamiento?, ¿es causal?, ¿es estable? (puede aprovechar los resultados anteriores)

5. **Usando Octave**

a) Mediante la utilización de funciones de Octave implemente los sistemas *S1* a *S5* del ejercicio 1 y verifique sus resultados analizando como responde el sistema a diferentes entradas.

Aclaración: Recuerde que en Octave no es posible definir el índice cero (ni índices negativos). Por ejemplo, para generar una delta, puede usar los comandos siguientes:

```
N = 10; delta = [zeros(1,N) 1 zeros(1,N)];
```

Luego, si se quiere que esta señal represente a $\delta[n]$, habría que considerar que el elemento `N+1` del vector `delta` corresponde al instante $n = 0$. Para esto, podemos definir el vector de los valores de n:

```
n = [-N:N];
```

Y luego, para interpretar esto gráficamente, se puede ejecutar:

```
stem(n,delta)
```

b) Utilizando el comando `medfilt1` de Octave, luego de cargar el paquete *signal*, verifique 4*a* y 4*b*. Observe el efecto de usar $K = 2$.

Algunos resultados

1. *a*) *S1*) I. $y[n] = 5\ \delta[n] + \frac{5}{2}\ \delta[n-1]$ II. $y[n] = 3\ \delta[n-1] + \frac{3}{2}\ \delta[n-2]$ III. $y[n] = \delta[n] + \frac{5}{2}\ \delta[n-1] + \delta[n-2]$
   S2) I. $y[n] = 0$ II. $y[n] = 0$ III. $y[n] = \delta[n-1]$
   S3) I. $y[n] = 5\ b^n\ u[n]$ II. $y[n] = 3\ b^{n-1}\ u[n-1]$ III. $y[n] = b^n\ u[n] + 2\ b^{n-1}\ u[n-1]$
   S4) I. $y[n] = 5 \sqcap_{2n_0+1}[n]$ II. $y[n] = 3 \sqcap_{2n_0+1}[n-1]$ III. $y[n] = \sqcap_{2n_0+1}[n] + 2 \sqcap_{2n_0+1}[n-1]$
   S5) I. $y[n] = 0$ II. $y[n] = 3\ \delta[n-1]$ III. $y[n] = 2\ \delta[n-1]$
   S6) I. $y[n] = 5\ \delta[n]$ II. $y[n] = 3\ \delta[n+1] + 3\ \delta[n-1]$ III. $y[n] = 2\ \delta[n+1] + \delta[n] + 2\ \delta[n-1]$
   S7) I. $y[n] = 5\ \delta[n]$ II. $y[n] = 3\ \delta[n+1]$ III. $y[n] = \delta[n] + 2\ \delta[n+1]$
   S8) I. $y[n] = 3\ \delta[n]$ II. $y[n] = 3\ \delta[n-1]$ III. $y[n] = \delta[n] + 2\ \delta[n-1]$

   b) y *c*) *S1*) Lineal, Invariante al Desplazamiento, Causal, con Memoria, Estable.
   S2) No lineal, Invariante al Desplazamiento, Causal, con Memoria, Estable.
   S3) Lineal, Invariante al Desplazamiento, Causal, con Memoria, Estable ($|b| < 1$), Inestable ($|b| \geq 1$).
   S4) Lineal, Invariante al Desplazamiento, No Causal, con Memoria, Estable.
   S5) Lineal, Variante al Desplazamiento, Causal, sin Memoria, Inestable.
   S6) Lineal, Variante al Desplazamiento, No Causal, con Memoria, Estable.
   S7) Lineal, Variante al Desplazamiento, No Causal, con Memoria, Estable.
   S8) No lineal, Invariante al Desplazamiento, Causal, sin Memoria, Estable.

2. *a*) *S1*) No lineal, Invariante en el Tiempo, Causal, con Memoria, Estable.
   S2) Lineal, Variante en el Tiempo, Causal, sin Memoria, Estable.
   S3) No lineal, Invariante en el Tiempo, Causal, sin Memoria, Estable.
   S4) Lineal, Variante en el Tiempo, Causal, con Memoria, Inestable.
   S5) Lineal, Invariante en el Tiempo, Causal, con Memoria, Inestable.
   S6) Lineal, Variante en el Tiempo, No Causal, con Memoria, Inestable.
   S7) No lineal, Invariante en el Tiempo, Causal, sin Memoria, Estable.

   b) El sistema *S3* resulta lineal. El sistema *S4* así definido es No Causal.

3. *a*) V *b*) F *c*) V *d*) V *e*) F *f*) V *g*) V

4. *a*) $y[n] = 0$ para el caso $x[n] = \delta[n]$ y $c[n] = C$ para el caso $x[n] = C$.
   b) $y[n] = -\delta[n-1]$
   c) No lineal, Invariante al Desplazamiento, no causal y estable.