Capacidad y Energía Electrostática

Ya hemos visto que los materiales conductores en equilibrio electrostático son superficies (volúmenes) equipotenciales:

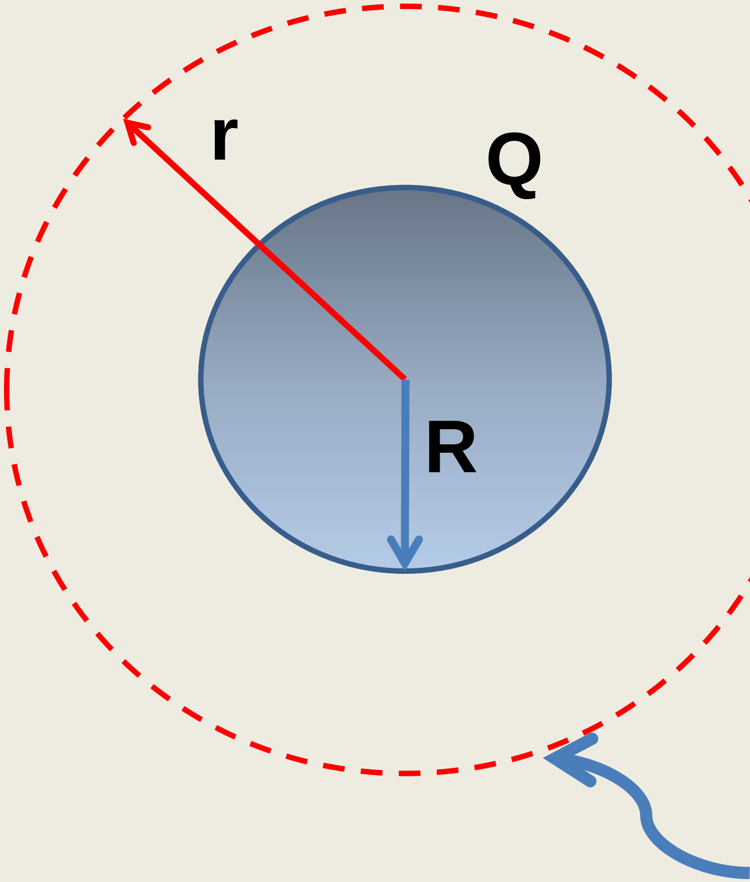
en su interior $E = 0$

$V = cte$

El potencial (con Referencial = 0 en infinito) de un conductor cargado y aislado es proporcional a la carga Q que lleva y de parámetros geométricos del mismo.

En general, cuanto más grande es el conductor, mayor es la cantidad de carga que puede almacenar para un determinado valor de potencial.

Veamos un ejemplo: cálculo del potencial de un conductor esférico cuando está cargado con Q:



Para calcular el potencial, debemos conocer el campo eléctrico.

Como tenemos una distribución continua de cargas con simetría esférica, podemos intentar usar la ley de Gauss para calcular el campo eléctrico.

Superficie gaussiana esférica

(aprovechamos la simetría del problema)

$$V_R - V_\infty = -\int_\infty^R \vec{E} \bullet d\vec{l} \quad (1) \quad \text{con Referencial}: V_\infty = 0$$

$\vec{E}$: campo eléctrico de una esfera de radio R

$$d\vec{l} = dr\,\vec{r}$$

sobre superficie gaussiana :

$$\oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{a} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = E\,4\pi r^2 \Rightarrow \quad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

reemplazando en (1) :

$$\boxed{V_R} = -\int_\infty^R \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,dr = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}Q\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_\infty^R = \boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}Q\frac{1}{R}}$$

$V_R = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q \frac{1}{R}$ es proporcional a Q e inversamente proporcional a R

A mayor Q ⟹ mayor V_R

A mayor R ⟹ menor V_R (para la misma Q)

El conductor parece tener una especie de "capacidad" de almacenar determinada carga para determinada ddp:

DEFINICIÓN DE CAPACIDAD: $\boxed{C = \frac{Q}{V}}$ $[\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}}] = [\mathrm{Faradio}]$

Así, para la esfera: $C = \frac{Q}{V_R} = 4\pi\varepsilon_0 R$

Solo depende del radio

Prob C1, Práctica 5

Un sistema de dos conductores que portan cargas iguales y opuestas constituye un condensador.

Se carga transfiriendo carga de un conductor al otro.

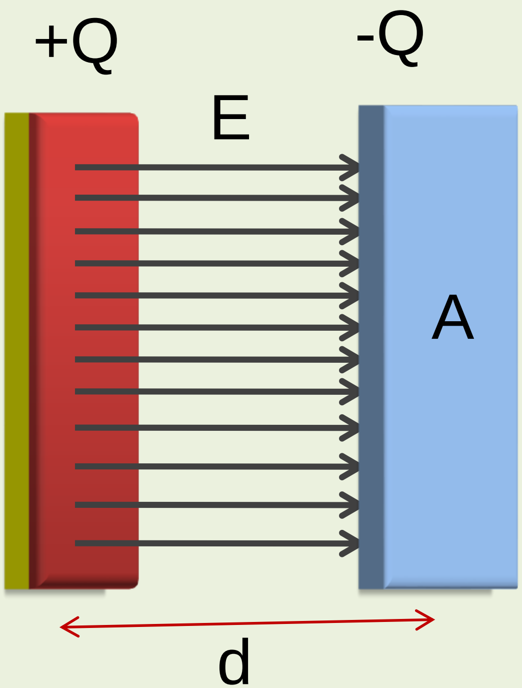
La capacidad de tales sistemas dependerá solo de las dimensiones de los conductores y de su disposición geométrica.

Existen algunos pocos condensadores de geometría simple que nos permiten un cálculo sencillo de su capacidad: el condensador plano, el cilíndrico y el esférico.

Para este cálculo se determina la ddp entre los conductores (V), que siempre queda proporcional a Q; luego se divide Q por la expresión de V y ¡ voilà !, ya tenemos la capacidad.

Condensador plano

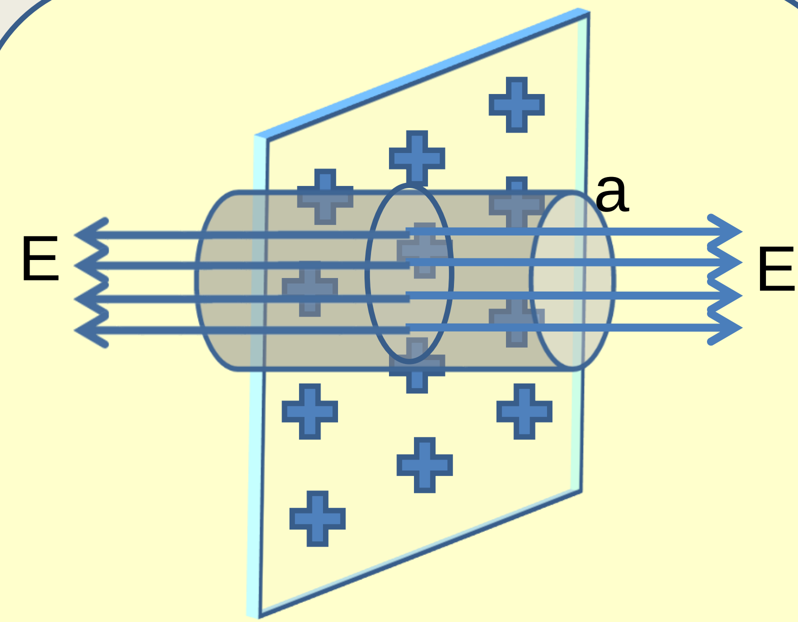
Prob P1, Práctica 5



$$\Delta V = -\int_{-Q}^{Q} \vec{E} \bullet d\vec{l} = E\,d$$

$$\therefore \quad V = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d = \frac{Q\,d}{\varepsilon_0\,A}$$

$$C \equiv \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon_0\,A}{d}$$



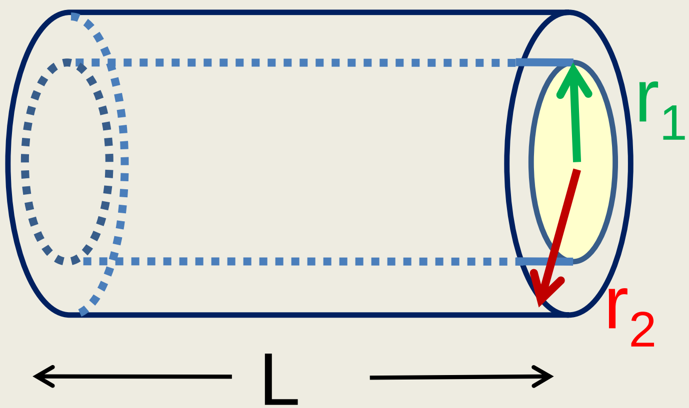
Gauss:

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{a} = E\,a + E\,a =$$

$$2\,E\,a = \frac{\sigma\,a}{\varepsilon_0} \qquad \therefore \quad E = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}$$

Capacidad de un capacitor cilíndrico

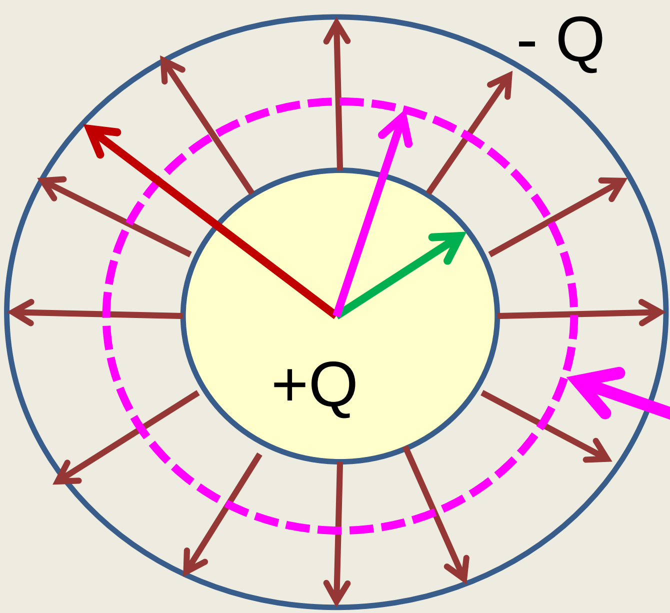
Prob P1, Práctica 5



$+Q$ en r_1

$-Q$ en r_2

$L >> r_1 , r_2$



Por simetría: campo radial (r)

Solo hay CE entre r_1 y r_2

<u>Superficie gaussiana cilíndrica</u>
de radio $r_1 < r < r_2$

$$C = \frac{Q}{V}\,; \qquad dV = -\vec{E} \bullet d\vec{l} = -E_r\, dr$$

$$\text{por Gauss: sup. gaussiana cilíndrica} \qquad r_1 < r < r_2$$

$$\oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{a} = \oiint_S E_r\, dA_{LATERAL} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

$$E_r\, 2\pi\, r\, L = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E_r = \frac{1}{2\pi\, r\, L\varepsilon_0}\frac{Q_{\text{int}}}{r}$$

$$V = V_1 - V_2 = -\int_{r_2}^{r_1} E_r\, dr = \frac{Q}{2\pi\, L\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r}$$

$$V = \frac{Q}{2\pi\, L\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \Rightarrow \boxed{C = \frac{2\pi\, L\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}}$$

En el proceso de carga de un capacitor C,

se adiciona carga dq a un potencial V.

El dW se transforma en dU como:

$$dU = V\ dq = \frac{q}{C}\, dq$$

La energía final se obtiene integrando:

$$\int_0^{\mathrm{U_{final}}} dU = U_{final} = \frac{1}{C} \int_0^{Q_{final}} q\, dq = \frac{1}{2C} Q^2{}_{final}$$

Energía total necesaria para cargar un capacitor inicialmente descargado hasta su carga final

$$\boxed{U_{final} = \frac{1}{2C} Q^2_{final}}$$

Utilizando la definición de capacidad :

$$C = \frac{Q}{V}, \text{ reemplazando en la ec. anterior :}$$

$$\boxed{U_{final} = \frac{1}{2} C V^2_{final}}$$

Almacenamiento de energía en un capacitor

$$dU = V\,dq = \frac{q}{C}\,dq$$

incremento de energía al traer una carga dq a un potencial V

$$U = \int dU = \int_0^Q \frac{q}{C}\,dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}C\,V^2$$

para capacitor plano :

$$U = \frac{1}{2}C\,V^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0\,A}{d}(E\,d)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\,E^2(Ad)$$

densidad de energía $\boxed{u_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0\,E^2}$

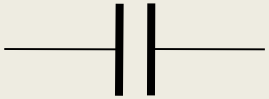
Prob P3, P4, C5, C6
Práctica 5

Capacitores en serie y paralelo

Los capacitores son disposiciones de conductores capaces de almacenar carga eléctrica (y por lo tanto energía). Estas disposiciones pueden tener simetría plana, esférica o cilíndrica.

Los capacitores se utilizan como elementos de circuitos eléctricos. Estos elementos circuitales tienen distintos comportamientos dependiendo del tipo de circuito en el que están conectados (corriente continua o alterna) y los veremos más adelante.

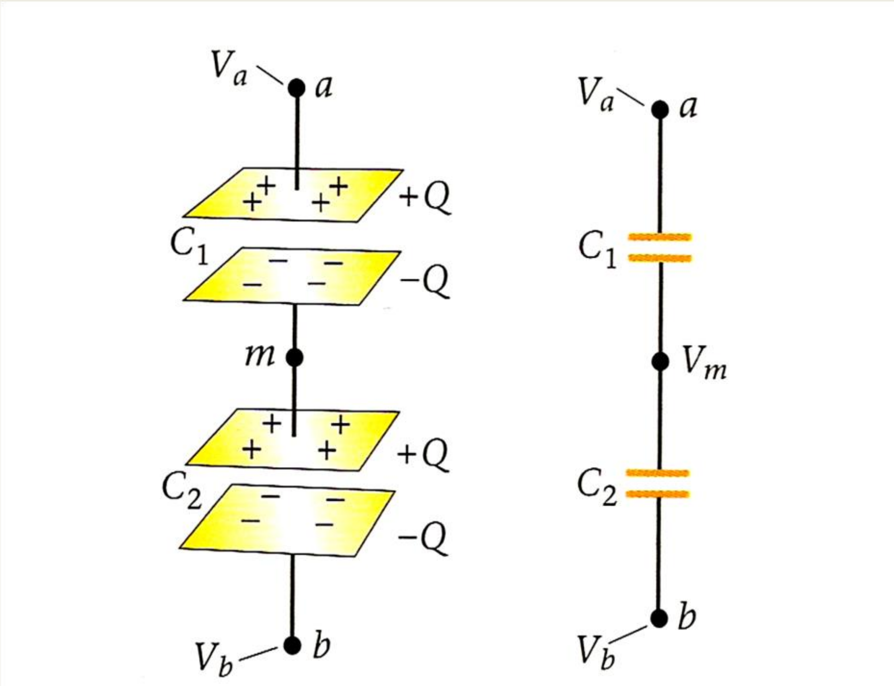
El símbolo circuital del capacitor es:



Existen dos formas básicas de conectar capacitores entre sí:

serie y paralelo

Capacitores conectados en serie



Tres propiedades:

1) a $\longrightarrow$ b: pasamos por C_1 y C_2
2) $V_{ab} = V_a + V_b$
3) $Q_1 = Q_2 = Q$

capacitor equivalente: sustituye a la combinación sin que cambie la carga total entregada al circuito

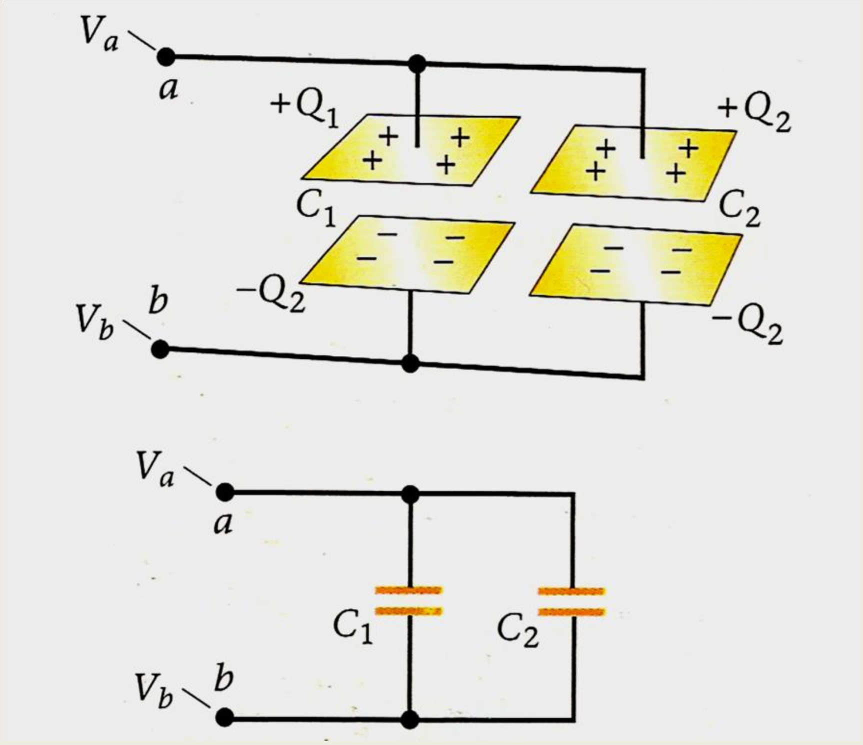
$$V_{ab} = V_a + V_b \; ; \quad V_a = \frac{Q}{C_1} \;\; y \;\; V_b = \frac{Q}{C_2}$$

$$\therefore V_{ab} = \frac{\cancel{Q}}{C_1} + \frac{\cancel{Q}}{C_2} = \frac{\cancel{Q}}{C_{eq}}$$

Capacitor equivalente

$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \qquad \frac{1}{C_{eq}} = \sum_n \frac{1}{C_n}}$$

Capacitores conectados en paralelo



Tres propiedades:

1) a $\longrightarrow$ b: pasamos por C_1 o C_2
2) $V_{ab} = V_a = V_b$
3) $Q_{total} = Q_1 + Q_2$

capacitor equivalente: sustituye a la combinación sin que cambie la carga total entregada al circuito

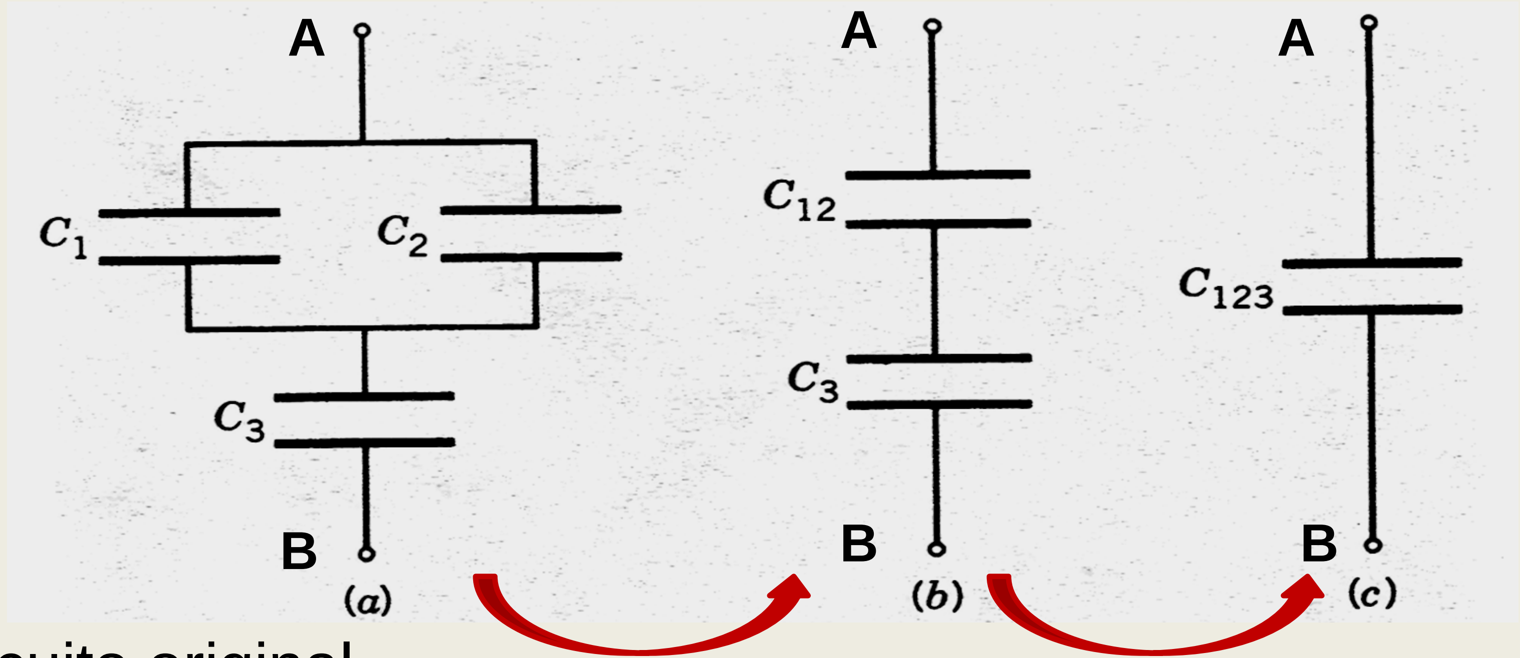
$$Q_{total} = Q_1 + Q_2 \ ; \quad Q_1 = C_1 V_{ab} \ \ y \ \ Q_2 = C_2 V_{ab}$$

$$\therefore Q_{total} = C_1 V_{ab} + C_2 V_{ab} = C_{eq} V_{ab}$$

Capacitor Equivalente

$$\boxed{\begin{aligned} C_{eq} &= C_1 + C_2 \\ C_{eq} &= \sum_n C_n \end{aligned}}$$

Estrategia de resolución de problemas con capacitores: llevar el circuito original a un solo capacitor equivalente conectado a la misma diferencia de potencial que la combinación inicial

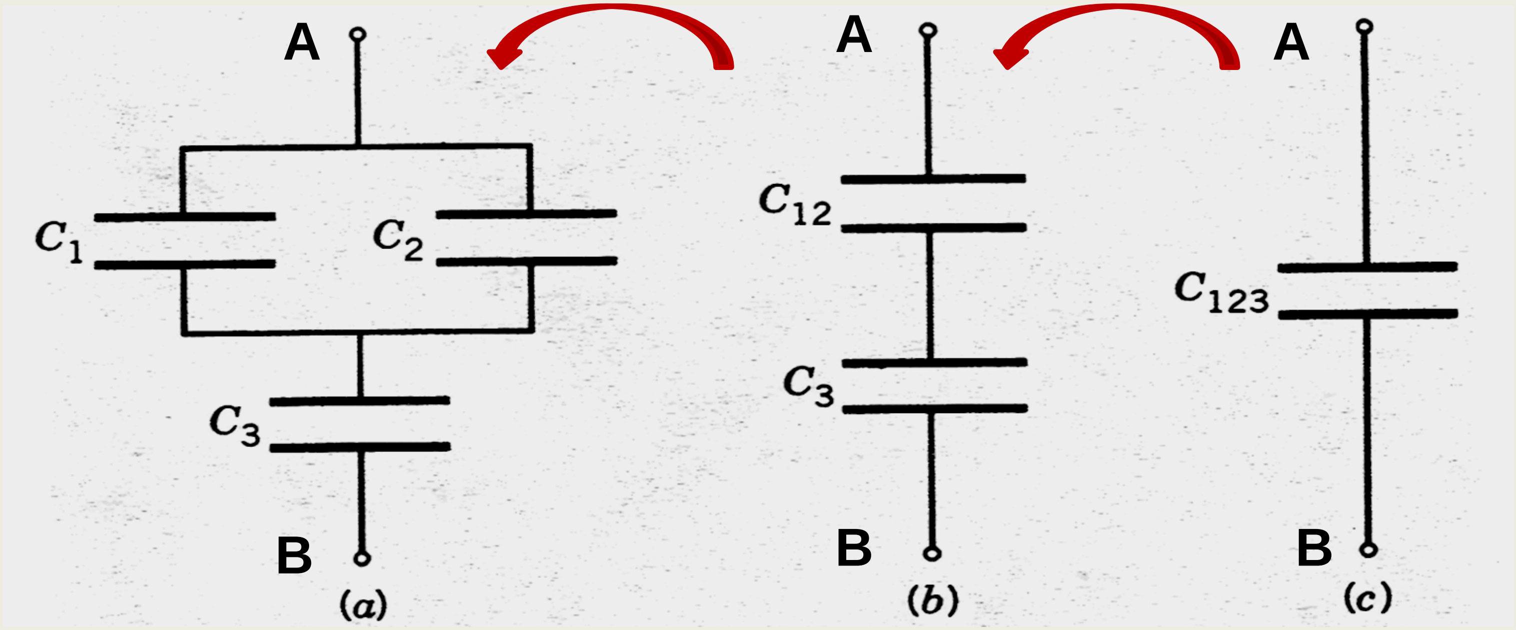


(a) Circuito original

(b) Resolver conexión paralelo C_1-C_2: $C_{12} = C_1 + C_2$

(c) Resolver conexión serie C_{12} – C_3: $1/C_{123} = 1/C_{12} + 1/C_3$

Conocido C_{123}, calcular $Q_{123} = C_{123}\ V_{AB}$



Conocido $Q_{123} = C_{123}\ V_{AB}$, volver al circuito (b) y calcular:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{12}\,(=Q_{123})\ y \quad Q_3\,(=Q_{123}) \\ V_{12} = \dfrac{Q_{12}}{C_{12}} \quad y \quad V_3 = \dfrac{Q_3}{C_3} \end{array} \right.$$

Finalmente, volver al circuito original y resolver el paralelo C_1 C_2 (¡hacerlo como ejercitación!)

Prob P5, P6, C7, P7, P8 Práctica 5