Transformada de Laplace

Definición de la transformada de Laplace

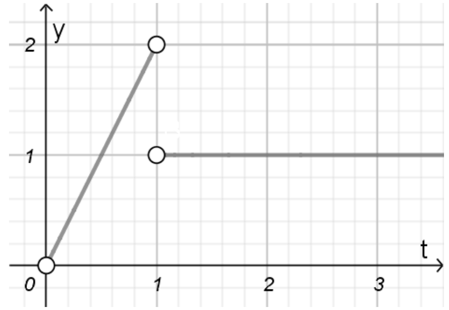
Dada una función $f: [0, \infty) \to \mathbb{C}$ se define su **transformada de Laplace** $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ como la función de la variable compleja s definida por:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

Observaciones

- La integral anterior es impropia cuanto menos porque el intervalo de integración no es acotado. La variable de integración es t en tanto el número complejo s es un parámetro en dicha integral. Distintos valores del parámetro reemplazados en el integrando dan lugar a distintas integrales impropias, que dependiendo del valor s, producirán una integral convergente o divergente.
- Se llama región de convergencia de la transformada de Laplace al subconjunto del plano complejo que consta de los $s \in \mathbb{C}$ tales que la integral impropia converge. Como veremos, bajo condiciones generales la región de convergencia es un semiplano de la forma $\mathrm{Re}(s) > \alpha$ (no analizaremos lo que ocurre en el borde $\mathrm{Re}(s) = \alpha$).

Ejemplo 1: Hallemos la transformada de Laplace de $f(t) = \begin{cases} 2t & \text{si} \quad 0 < t < 1 \\ 1 & \text{si} \quad t > 1 \end{cases}$



$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt = \int_0^1 2te^{-st}dt + \int_1^{\infty} e^{-st}dt$$

$$\int_0^1 2te^{-st}dt \overset{\text{si } s\neq 0}{\underset{\smile}{=}} -\frac{1}{s}2te^{-st}\Big|_0^1 + \frac{1}{s}\int_0^1 2e^{-st}dt = -\frac{1}{s}2te^{-st}\Big|_0^1 - \frac{2}{s^2}e^{-st}\Big|_0^1 = -\frac{2e^{-s}}{s} - \frac{2e^{-s}}{s^2} + \frac{2}{s^2}$$

Si s es tal que $\mathrm{Re}(s) > 0$:

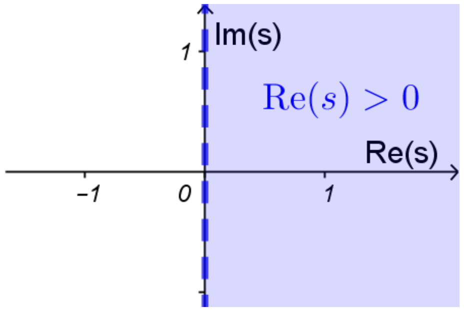
$$\int_1^{\infty} e^{-st}dt = \lim_{L\to\infty}\int_1^L e^{-st}dt = \lim_{L\to\infty} -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_1^L = \lim_{L\to\infty}\left(-\frac{1}{s}e^{-sL} + \frac{1}{s}e^{-s}\right) = \frac{1}{s}e^{-s}$$

porque:

$$|e^{-sL}| = e^{-\overbrace{\mathrm{Re}(s)}^{>0}L} \to 0 \text{ cuando } L \to \infty, \text{ así que: } \lim_{b\to\infty} e^{-sL} = 0$$

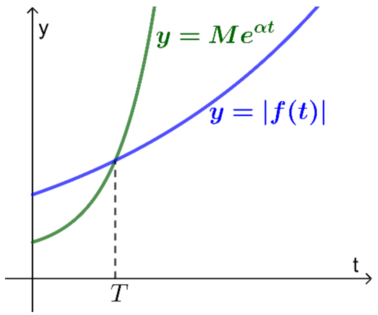
Luego,

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{2}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s} - \frac{2e^{-s}}{s^2} \quad \text{si} \quad \mathrm{Re}(s) > 0$$



Funciones de orden exponencial en $+\infty$

Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, una función $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ se dice **de orden exponencial α cuando $t \to \infty$** si existen constantes $T > 0, M > 0$ tales que: $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}\ , \forall t \geq T$



Es decir, si $\dfrac{f(t)}{e^{\alpha t}}$ está acotada en un entorno de $+\infty$.

Observar:

Si $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{f(t)}{e^{\alpha t}}$ existe entonces $f(t)$ es de orden exponencial α cuando $t \to \infty$.

En efecto: para cualquier $M > L$, se tendrá para t suficientemente grande, digamos $t \geq T$: $\dfrac{f(t)}{e^{\alpha t}} \leq M$

Ejemplo: cuando $t \to \infty$:

- $f(t) = -5e^{-t}$ es de orden exponencial α para todo $\alpha \geq -1$ pues $|f(t)| = 5e^{-t} \leq 5e^{\alpha t}\ , \forall t \geq 0$.
- $f(t) = te^{2t}$ es de orden exponencial α para todo $\alpha > 2$. En efecto, si $\alpha > 2$:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{e^{\alpha t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{te^{2t}}{e^{\alpha t}} = \lim_{t\to\infty} te^{(2-\alpha)t} = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^{(\alpha-2)t}} = 0 \ \text{ porque } t \ll e^{(\overbrace{\alpha-2}^{>0})t} \text{ para } t \to \infty$$

pero no es de orden exponencial α para ningún $\alpha \leq 2$ pues en ese caso $\dfrac{f(t)}{e^{\alpha t}} = te^{(2-\alpha)t}$ no está acotada.

- $g(t) = e^{(t^2)}$ no es de orden exponencial α para ningún α. Si lo fuera, existirían $T > 0, M > 0$ tales que:

$\left|e^{(t^2)}\right| \leq Me^{\alpha t}\ , \forall t \geq T$. Entonces $\left|\dfrac{e^{(t^2)}}{e^{\alpha t}}\right| \leq M$ para $t \geq T$, así que $e^{(t^2-\alpha t)} = e^{(t-\alpha)t}$ estaría acotada. Pero evidentemente esto no ocurre.

Teorema (condiciones suficientes de existencia de la transformada de Laplace)
Si una función $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ es seccionalmente continua en $[0, L]$, $\forall L > 0$, y f es de orden exponencial $\alpha \in \mathbb{R}$ cuando $t \to \infty$, entonces $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ existe para $\operatorname{Re}(s) > \alpha$.

Dem Supongamos que se cumplen las hipótesis del enunciado. Sea $T > 0$ tal que $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$, $\forall t \geq T$.

Como f es seccionalmente continua en $[0, L]$, está acotada en dicho intervalo. Luego, existe $K > 0$ tal que $|f(t)| \leq K$, $\forall t \in [0, L]$. Tomando $M^* = \text{máx}\{M, K\}$, se tiene: $|f(t)| \leq M^* e^{\alpha t}, \forall t \geq 0$.

Entonces

$$|f(t)e^{-st}| = |f(t)|e^{-\operatorname{Re}(s)t} \leq M^* e^{\alpha t} e^{-\operatorname{Re}(s)t} = M^* e^{-(\operatorname{Re}(s)-\alpha)t}$$

Además, si $\operatorname{Re}(s) > \alpha$ la siguiente integral es convergente:

$$\int_0^\infty e^{-(\operatorname{Re}(s)-\alpha)t} dt = \lim_{L\to\infty} -\frac{e^{-(\operatorname{Re}(s)-\alpha)t}}{\operatorname{Re}(s)-\alpha}\Bigg|_{t=0}^{t=L} = \lim_{L\to\infty} -\frac{e^{-(\operatorname{Re}(s)-\alpha)L} - 1}{\operatorname{Re}(s)-\alpha} = \frac{1}{\operatorname{Re}(s)-\alpha}$$

Luego, por criterio de comparación para integrales impropias, también converge la siguiente: $\displaystyle\int_0^\infty |f(t)e^{-st}| dt$

Es decir que $\int_0^\infty f(t)e^{-st} dt$ es absolutamente convergente y en particular converge.

Es decir, $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ existe para $\operatorname{Re}(s) > \alpha$.

Nota:

- Bajo las hipótesis del teorema la transformada $\mathcal{L}\{f(t)\}$ existe para $\operatorname{Re}(s) > \alpha$. Es decir que la región de convergencia es al menos el semiplano abierto estrictamente a la derecha de la recta vertical $\operatorname{Re}(s) > \alpha$.
- Las condiciones del teorema anterior son suficientes para la existencia de $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ pero no son necesarias.

Ejemplo (OPTATIVO): $f(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}$ no es seccionalmente continua en ningún intervalo $[0,L]$ porque $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{t}}=\infty$ no existe. Sin embargo, veamos que $F(s)=\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\}=\sqrt{\frac{\pi}{s}}$

En efecto,

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-st}dt \underbrace{=}_{\substack{u=\sqrt{t}\\ du=\frac{dt}{2\sqrt{t}}}} 2\int_0^\infty e^{-su^2}du=\int_{-\infty}^\infty e^{-su^2}du$$

Si $\mathrm{Re}(s)>0$ se tiene:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-s(u^2+v^2)}\,dA_{uv} \underbrace{=}_{\substack{\text{polares:}\\ u=r\cos\theta\\ v=r\,\mathrm{sen}\,\theta}} \int_0^\infty\int_0^{2\pi} e^{-sr^2}r\,d\theta\,dr=2\pi\int_0^\infty e^{-sr^2}r\,dr \underbrace{=}_{\substack{t=r^2\\ dt=2r\,dr}} \pi\int_0^\infty e^{-st}dt=\lim_{L\to\infty}\pi\int_0^L e^{-st}dt=$$

$$=\lim_{L\to\infty}\left(-\frac{\pi}{s}\right)e^{-st}\Big|_{t=0}^{t=L}=\lim_{L\to\infty}\left(-\frac{\pi}{s}\right)(e^{-sL}-1)=\frac{\pi}{s}$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-s(u^2+v^2)}\,dA_{uv}=\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{-su^2}e^{-sv^2}dv\,du=\left(\int_{-\infty}^\infty e^{-su^2}du\right)\left(\int_{-\infty}^\infty e^{-sv^2}dv\right)=\left(\int_{-\infty}^\infty e^{-su^2}du\right)^2$$

Entonces,

$$\left(\int_{-\infty}^\infty e^{-su^2}du\right)^2=\frac{\pi}{s}$$

Luego,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\}=\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-st}dt=\int_{-\infty}^\infty e^{-su^2}du=\sqrt{\frac{\pi}{s}}\quad \text{si } \mathrm{Re}(s)>0$$

Ejemplo 2: Calculemos $F(s) = \mathcal{L}\{e^{at}\}$ con $a \in \mathbb{C}$ (constante).

Rta $f(t) = e^{at}$ es continua en $[0, \infty)$ y es de orden exponencial $\alpha = \mathrm{Re}(a)$ cuando $t \to \infty$ pues $|f(t)| = |e^{at}| = e^{\mathrm{Re}(a)t}$ para $t \geq 0$. Se verifican las condiciones suficientes del teorema de existencia de la TL.

Si $s \neq a$:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{at} e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt = \lim_{L\to\infty} \int_0^L e^{-(s-a)t} dt = \lim_{L\to\infty} \left(-\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a} \right) \Bigg|_{t=0}^{t=L} =$$

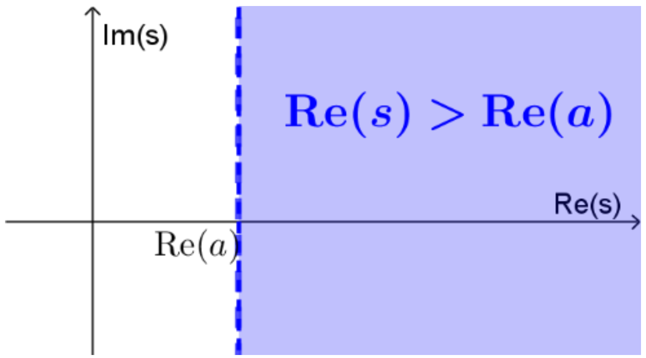
$$= \lim_{L\to\infty} \left(-\frac{e^{-(s-a)L}}{s-a} + \frac{1}{s-a} \right) = \frac{1}{s-a} \quad \text{si } \ s_1 = \mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(a)$$

En efecto,

$$\left| e^{-(s-a)L} \right| = e^{-\overbrace{(\mathrm{Re}(s)-\mathrm{Re}(a))}^{>0}L} \to 0 \ \text{ si } \ L \to \infty \ \text{así que} \lim_{L\to\infty} e^{-(s-a)L} = 0$$

Luego,

$$\boxed{\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} \quad \text{si } \ \mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(a)}$$



¡Recordarlas!

En particular, si $n = 0$:

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s} \quad \text{si } \ \mathrm{Re}(s) > 0$$

Ejemplo 3: Calcular $F(s)=\mathcal{L}\{t^n\}$ si $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

Rta $f(t)=t^n$ es continua en $[0,\infty)$ y es de orden exponencial α para todo $\alpha>0$ porque

$$\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{e^{\alpha t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{t^n}{e^{\alpha t}}=0 \text{ ya que } t^n \ll e^{\alpha t} \text{ cuando } t\to\infty$$

Se cumplen las condiciones suficientes de existencia de la TL.

Si $\mathrm{Re}(s)>0$ y $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$:

$$|L^n e^{-sL}|=L^n e^{-\mathrm{Re}(s)L}=\frac{L^n}{e^{\mathrm{Re}(s)L}}\to 0 \text{ si } L\to\infty\text{, de modo que } \lim_{L\to\infty}L^n e^{-sL}=0$$

Entonces,

$$\mathcal{L}\{1\}=\int_0^\infty e^{-st}dt=\lim_{L\to\infty}\int_0^L e^{-st}dt=\lim_{L\to\infty}\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_{t=0}^{t=L}\right)=\lim_{L\to\infty}\left(-\frac{1}{s}\overbrace{e^{-sL}}^{\to 0}+\frac{1}{s}\right)=\frac{1}{s}\quad \text{si } \mathrm{Re}(s)>0$$

Además, integrando por partes, para $s\neq 0$:

$$\int_0^L t^n e^{-st}dt \overset{\substack{u=t^n\,;\,dv=e^{-st}dt\\ du=nt^{n-1}dt\,;\,v=-e^{-st}/s}}{\underbrace{=}} -\frac{t^n e^{-st}}{s}\Bigg|_{t=0}^{t=L}+\frac{n}{s}\int_0^L t^{n-1}e^{-st}dt=-\frac{\overbrace{L^n e^{-sL}}^{\to 0 \text{ si } L\to\infty}}{s}+\frac{n}{s}\int_0^L t^{n-1}e^{-st}dt$$

Por lo tanto, si $\mathrm{Re}(s)>0$, tomando límite para $L\to\infty$ se obtiene la siguiente relación recursiva:

$$\int_0^\infty t^n e^{-st}dt=\frac{n}{s}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-st}dt$$

Luego, para $\mathrm{Re}(s) > 0$ se tiene:

- $n = 1$:

$$\mathcal{L}\{t\} = \int_0^{\infty} te^{-st}dt = \frac{1}{s}\int_0^{\infty} e^{-st}dt = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}\frac{1}{s} = \frac{1!}{s^2}$$

- $n = 2$:

$$\mathcal{L}\{t^2\} = \int_0^{\infty} t^2e^{-st}dt = \frac{2}{s}\int_0^{\infty} te^{-st}dt = \lim_{T\to\infty}\frac{2}{s}\mathcal{L}\{t\} = \frac{2}{s}\frac{1!}{s^2} = \frac{2!}{s^3}$$

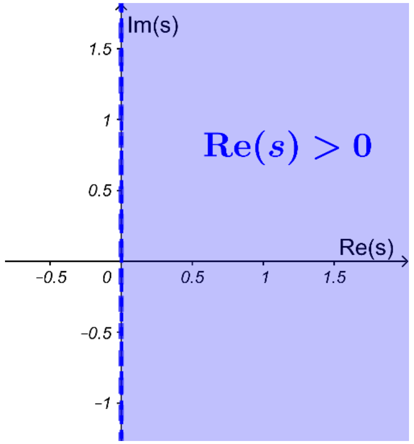
- $n = 3$:

$$\mathcal{L}\{t^3\} = \int_0^{\infty} t^3e^{-st}dt = \frac{3}{s}\int_0^{\infty} t^2e^{-st}dt = \lim_{T\to\infty}\frac{3}{s}\mathcal{L}\{t^2\} = \frac{3}{s}\frac{2!}{s^3} = \frac{3!}{s^4}$$

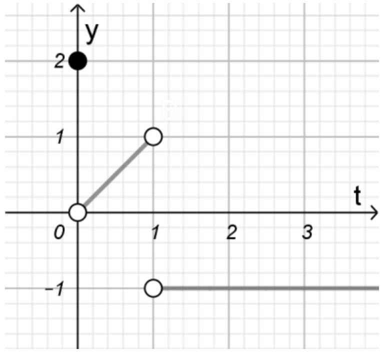
En general se demuestra por inducción sobre n que:

$$\boxed{\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \text{ si } \mathrm{Re}(s) > 0}$$

¡Recordarla!



Ejemplo 4: Calcular $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$ si $f(t)=\begin{cases} 2 & \text{si} \quad t=0 \\ t & \text{si} \quad 0<t<1 \\ -1 & \text{si} \quad t>1 \end{cases}$



Rta

$f(t)$ es continua en $[0,\infty)$ excepto en $t=0$ y $t=1$. Además los límites laterales en esos puntos existen:

$$\lim_{t\to 0^+} f(t)=\lim_{t\to 0^+} t=0\,,\ \lim_{t\to 1^-} f(t)=\lim_{t\to 1^-} t=1\,,\ \lim_{t\to 1^+} f(t)=\lim_{t\to 1^+}(-1)=-1\,,$$

$f(t)$ es de orden exponencial α para todo $\alpha\geq 0$ pues está acotada en un entorno de $+\infty$.

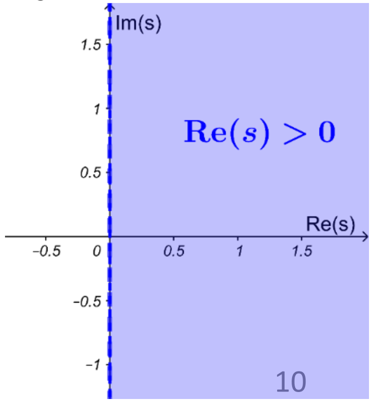
$$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_0^1 te^{-st}dt-\int_1^\infty e^{-st}dt$$

$$\int_0^1 te^{-st}dt=-\frac{t}{s}e^{-st}\Big|_{t=0}^{t=1}+\frac{1}{s}\int_0^1 e^{-st}dt=-\frac{t}{s}e^{-st}\Big|_{t=0}^{t=1}-\frac{1}{s^2}e^{-st}\Big|_{t=0}^{t=1}=-\frac{e^{-s}}{s}-\frac{e^{-s}}{s^2}+\frac{1}{s^2}$$

$$\int_1^\infty e^{-st}dt=\lim_{L\to\infty}\int_1^L e^{-st}dt=\lim_{L\to\infty}\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\Big|_{t=1}^{t=L}=\lim_{L\to\infty}\left(-\frac{\overbrace{e^{-sL}}^{\to 0}}{s}+\frac{e^{-s}}{s}\right)=\frac{e^{-s}}{s}\quad \text{si}\quad \mathrm{Re}(s)>0$$

pues si $\mathrm{Re}(s)>0$:

$$|e^{-sL}|=e^{-\overbrace{\mathrm{Re}(s)}^{>0}L}\to 0 \text{ cuando } L\to\infty$$



Por lo tanto,

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)=-\frac{e^{-s}}{s}-\frac{e^{-s}}{s^2}+\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-s}}{s}=\frac{1}{s^2}-\frac{2e^{-s}}{s}-\frac{e^{-s}}{s^2}\quad \text{si}\quad \mathrm{Re}(s)>0$$

Transformada inversa de Laplace

Si $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ para $\mathrm{Re}(s) > \alpha$ entonces $f(t)$ es la transformada inversa o antitransformada de Laplace de $F(s)$. Notar que es única salvo por sus valores en un conjunto de medida cero (por ejemplo, finito).

Notación: $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$

Observar que $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ es única salvo por sus valores en un subconjunto de $\mathbb{R}$ de medida cero (por ejemplo en conjuntos finitos).

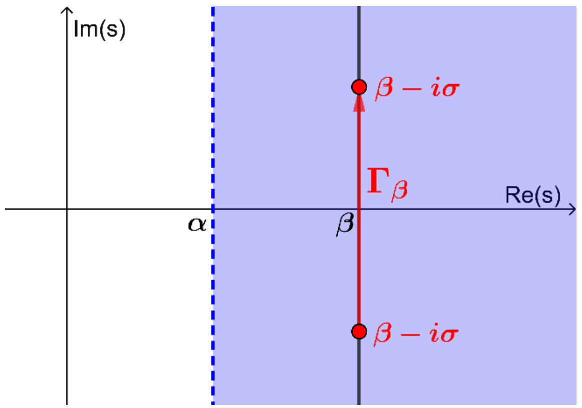
Ejemplo:

- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at}$, pues $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$
- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{s^4}\right\} = t^3$, pues $\mathcal{L}\{t^3\} = \frac{3!}{s^{3+1}} = \frac{6}{s^4}$

Integral de inversión

Dada $f: [0, \infty) \to \mathbb{C}$ continua, si $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ para $\mathrm{Re}(s) > \alpha$, entonces se puede recuperar $f(t)$ para $t > 0$ mediante la siguiente **integral de Bromwich** :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \lim_{\sigma \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta - i\sigma}^{\beta + i\sigma} F(s) e^{st} ds$$



donde la integral se calcula a lo largo del segmento vertical desde

$\beta - i\sigma$ hasta $\beta + i\sigma$, con $\beta > \alpha$ (β fijo). El límite anterior suele anotarse:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta - i\infty}^{\beta + i\infty} F(s) e^{st} ds$$

Ejemplo 5: Calculando la integral de Bromwich hallar $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ si $F(s) = \frac{1}{s(s-1)}$ para $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Rta Debemos calcular

$$\lim_{\sigma \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta - i\sigma}^{\beta + i\sigma} F(s) e^{st} ds$$

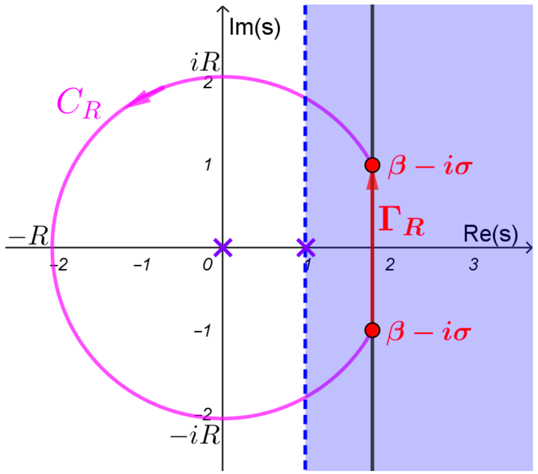
Como $F(s) = \frac{1}{s(s-1)}$ es analítica para $\mathrm{Re}(s) > 1$, aplicaremos teoría de residuos.

Consideremos la curva $C_R^* = C_R \cup \Gamma_R$ cerrada, simple, suave a trozos, con orientación antihoraria,

donde C_R es el arco de la circunferencia $|s| = R$ desde $\beta - i\sigma$ hasta $\beta + i\sigma$ y Γ_R es el segmento vertical desde $\beta - i\sigma$ hasta $\beta + i\sigma$ (con $\beta > \alpha$).

Como $F(s)$ es analítica sobre C_R^* y en su interior, excepto en los polos simples $s = 0$, $s = 1$, entonces por el teorema de los residuos:

$$\oint_{C_R^*} \frac{e^{st}}{s(s-1)} ds = 2\pi i \left[\mathrm{Res}_{s=0} \frac{e^{st}}{s(s-1)} + \mathrm{Res}_{s=1} \frac{e^{st}}{s(s-1)} \right]$$



$$\operatorname{Res}_{s=1}\frac{e^{st}}{s(s-1)}=\lim_{s\to1}\frac{(s-1)e^{st}}{s(s-1)}=\lim_{s\to1}\frac{e^{st}}{s}=e^{t}\quad;\quad \operatorname{Res}_{s=0}\frac{e^{st}}{s(s-1)}=\lim_{s\to0}\frac{se^{st}}{s(s-1)}=\lim_{s\to0}\frac{e^{st}}{s-1}=-1$$

Luego,

$$\int_{C_R}\frac{e^{st}}{s(s-1)}ds+\int_{\Gamma_R}\frac{e^{st}}{s(s-1)}ds=\oint_{C_R^*}\frac{e^{st}}{s(s-1)}ds=2\pi i(e^{t}-1)$$

Se puede probar que:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{e^{st}}{s(s-1)}ds=0$$

Entonces, tomando límite cuando $R\to\infty$ resulta:

$$\lim_{\sigma\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\sigma}^{\beta+i\sigma}F(s)e^{st}ds=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{e^{st}}{s(s-1)}ds=e^{t}-1$$

Propiedad de linealidad

Si $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ para $\mathrm{Re}(s) > \alpha_1$ y $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$ para $\mathrm{Re}(s) > \alpha_2$ y $\alpha = \text{máx}\{\alpha_1, \alpha_2\}$, entonces para cualesquiera constantes $\beta, \lambda \in \mathbb{C}$ vale:

$$\mathcal{L}\{\beta f(t) + \lambda g(t)\} = \beta\, F(s) + \lambda\, G(s) \quad \text{si } \mathrm{Re}(s) > \alpha$$

Nota: se deduce de aquí que $\mathcal{L}^{-1}$ es también un operador lineal: si $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ y $\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = g(t)$ entonces

$$\mathcal{L}^{-1}\{\beta\, F(s) + \lambda\, G(s)\} = \beta\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + \lambda\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$$

Ejemplo 6: Regresando al ejemplo 6, en lugar de emplear la integral de Bromwich, se obtiene el mismo resultado descomponiendo $F(s)$ en fracciones simples y aplicando linealidad:

$$F(s) = \frac{1}{s(s-1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s} = \frac{As + B(s-1)}{s(s-1)} = \frac{(A+B)s - B}{s(s-1)} \quad \text{así que} \begin{cases} A + B = 0 \\ -B = 1 \end{cases}$$

La solución del sistema es $(A, B) = (1, -1)$. Entonces, $F(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}$

Luego,

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = e^t - 1$$

Ejemplo 7: si $a \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\mathcal{L}\{\mathrm{sen}(at)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i}\right\} = \frac{1}{2i}\mathcal{L}\{e^{iat}\} - \frac{1}{2i}\mathcal{L}\{e^{-iat}\}$$

Sabemos que $\mathcal{L}\{e^{iat}\} = \frac{1}{s-ia}$ si $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(ia) = 0$ y que $\mathcal{L}\{e^{-iat}\} = \frac{1}{s-ia}$ si $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(-ia) = 0$

Luego,

$$\mathcal{L}\{\mathrm{sen}(at)\} = \frac{1}{2i}\frac{1}{s-ia} - \frac{1}{2i}\frac{1}{s+ia} = \frac{1}{2i}\frac{(s+ia)-(s-ia)}{(s-ia)(s+ia)} = \frac{1}{2i}\frac{2ia}{s^2+a^2} = \frac{a}{s^2+a^2} \quad \text{si } \mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(ia) = 0$$

De modo análogo se obtienen los resultados de la siguiente tabla para $a \in \mathbb{R}$:

Si $\mathrm{Re}(s) > 0$:	$\mathcal{L}\{\mathrm{sen}(at)\} = \frac{a}{s^2+a^2}$	;	$\mathcal{L}\{\cos(at)\} = \frac{s}{s^2+a^2}$
Si $\mathrm{Re}(s) > \lvert\mathrm{Re}(a)\rvert$:	$\mathcal{L}\{\mathrm{senh}(at)\} = \frac{a}{s^2-a^2}$	;	$\mathcal{L}\{\cosh(at)\} = \frac{s}{s^2-a^2}$

Ejemplo 8: si $a \in \mathbb{R}$ entonces, para $\operatorname{Re}(s) > 0$:

- $\mathcal{L}\{\cos^2(at)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1+\cos(2at)}{2}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{1\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{\cos(2at)\} = \frac{1}{2s} + \frac{s}{2(s^2+4a^2)}$
- $\mathcal{L}\{\cos^3(at)\} = \mathcal{L}\left\{\left(\frac{e^{iat}+e^{-iat}}{2}\right)^3\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{i3at}+3e^{iat}+3e^{-iat}+e^{-i3at}}{8}\right\} =$

$$= \frac{1}{8}\left(\mathcal{L}\{e^{i3at}\} + 3\mathcal{L}\{e^{iat}\} + 3\mathcal{L}\{e^{-iat}\} + \mathcal{L}\{e^{-i3at}\}\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{s-3ai} + \frac{3}{s-ai} + \frac{3}{s+ai} + \frac{1}{s+3ai}\right)$$

$$= \frac{s}{4}\left(\frac{1}{s^2+9a^2} + \frac{3}{s^2+a^2}\right) = \frac{s(s^2+7a^2)}{(s^2+9a^2)(s^2+a^2)}$$

Ejemplo 9: Calcular

a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^3-s}\right\}$ b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^3-2s^2}\right\}$ c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3+s}\right\}$ d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s^2+1)(s^2+4)}\right\}$

Rta La descomposición en suma de fracciones simples resulta útil.

a)

$$\frac{2}{s^3-s} = \frac{2}{s(s-1)(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+1} = \frac{A(s^2-1) + B(s^2+s) + C(s^2-s)}{s(s-1)(s+1)} =$$

Factores lineales no repetidos

$$= \frac{(A+B+C)s^2 + (B-C)s - A}{s(s-1)(s+1)} \quad \text{así que} \quad \begin{cases} A+B+C=0 \\ B-C=0 \\ -A=2 \end{cases}$$

Resulta: $A=-2$, $B=1$, $C=1$. Entonces,

$$\frac{2}{s^3-s} = -\frac{2}{s} + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1}$$

Luego,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^3-s}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{2}{s}+\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s+1}\right\}=-2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}=-2+e^{t}+e^{-t}=2\cosh(t)-2$$

b)

$$\frac{4}{s^3-2s^2}=\frac{4}{s^2(s-2)}=\boxed{\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}}+\frac{C}{s-2}=\frac{A(s^2-2s)+B(s-2)+Cs^2}{s^2(s-2)}=\frac{(A+C)s^2+(-2A+B)s-2B}{s^2(s-2)}$$

Factor lineal repetido 2 veces

$\begin{cases} A+C=0 \\ -2A+B=0 \\ -2B=4 \end{cases}$ tiene solución $A=-1$, $B=-2$, $C=1$, así que: $\dfrac{4}{s^3-2s^2}=-\dfrac{1}{s}-\dfrac{2}{s^2}+\dfrac{1}{s-2}$

Por lo tanto,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^3-2s^2}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{s}-\frac{2}{s^2}+\frac{1}{s-2}\right\}=-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}-2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}=-1-2t+e^{2t}$$

c)

$$\frac{1}{s^3+s}=\frac{1}{s(s^2+1)}=\frac{A}{s}+\boxed{\frac{Bs+C}{s^2+1}}=\frac{A(s^2+1)+(Bs+C)s}{s(s^2+1)}=\frac{(A+B)s^2+Cs+A}{s(s^2+1)}$$

Cuadrática irreducible

$\begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases}$ tiene solución $A=1$, $B=-1$, $C=0$, así que: $\dfrac{1}{s^3+s}=\dfrac{1}{s}-\dfrac{s}{s^2+1}$

Luego,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3+s}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}=1-\cos t$$

d)

$$\frac{3}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{3}{(s^2+1)(s^2+4)} = \boxed{\frac{As+B}{s^2+1}} + \boxed{\frac{Cs+D}{s^2+4}} = \frac{(As+B)(s^2+4)+(Cs+D)(s^2+1)}{s^2(s-2)} =$$

Cuadráticas irreducibles

$$= \frac{(A+C)s^3+(B+D)s^2+(4A+C)s+(4B+D)}{s^2(s-2)}$$

$\begin{cases} A+C=0 \\ B+D=0 \\ 4A+C=0 \\ 4B+D=3 \end{cases}$ tiene solución $A=0,\ B=1,\ C=0,\ D=-1,$ así que: $\dfrac{3}{(s^2+1)(s^2+4)} = \dfrac{1}{s^2+1} - \dfrac{1}{s^2+4}$

Así,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s^2+1)(s^2+4)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+4}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} = \operatorname{sen}(t) - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t)$$

Ejemplo 10: Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{(s^2+1)^2}\right\}$

Rta La expresión entre llaves es de por sí una fracción simple si se consideran sólo raíces reales al factorizar el denominador. De hecho, s^2+1 es un factor cuadrático irreducible en los reales, que está dos veces repetido. Si bien mostraremos aquí que podemos resolver esta antitransformada, más adelante la forma que mostramos acá quedará superada aplicando el teorema de convolución. ATENCIÓN

Podemos descomponer la expresión entre llaves en fracciones simples en el campo complejo (las cuentas se pueden volver engorrosas dado que queda un sistema lineal a coeficientes complejos):

$$\frac{4}{(s^2+1)^2}=\frac{4}{((s-i)(s+i))^2}=\frac{4}{(s-i)^2(s+i)^2}=\frac{A}{s-i}+\frac{B}{(s-i)^2}+\frac{C}{s+i}+\frac{D}{(s+i)^2}=$$

$$=\frac{A(s-i)(s+i)^2+B(s+i)^2+C(s+i)(s-i)^2+D(s-i)^2}{(s-i)^2(s+i)^2}$$

Entonces,

$$A(s-i)(s+i)^2+B(s+i)^2+C(s+i)(s-i)^2+D(s-i)^2=4 \quad (*)$$

- Con $s=i$ se obtiene: $-4B=4$ así que $B=-1$
- Con $s=-i$ se obtiene: $-4D=4$ así que $D=-1$

Reemplazando en $(*)$ se tiene: $A(s-i)(s+i)^2-(s+i)^2+C(s+i)(s-i)^2-(s-i)^2=4$

- Con $s=0$ se obtiene: $iA+1-iC+1=4$ así que $A-C=-2i$ $(**)$
- Con $s=2i$ se obtiene: $-9iA+9-3iC+1=4$ de donde resulta $3A+C=-2i$ $(***)$

De $(**)$ y $(***)$ se obtiene: $A=-i$, $C=i$. Por lo tanto: $\frac{4}{(s^2+1)^2}=\frac{-i}{s-i}-\frac{1}{(s-i)^2}+\frac{i}{s+i}-\frac{1}{(s+i)^2}$

Entonces,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{(s^2+1)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-i}{s-i} - \frac{1}{(s-i)^2} + \frac{i}{s+i} - \frac{1}{(s+i)^2}\right\} =$$

$$= -i\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-i}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-i)^2}\right\} + i\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+i}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+i)^2}\right\} = -ie^{it} - te^{it} + ie^{-it} - te^{-it} =$$

$$= -i\left(e^{it} - e^{-it}\right) - t\left(e^{it} + e^{-it}\right) = 2\,\mathrm{sen}(t) - 2t\cos(t)$$

Largo y con cuentas engorrosas que llevan mucho tiempo. Más adelante lo resolveremos con otras herramientas más eficientes (teorema de convolución).

Propiedad de sustitución o traslación en el dominio de la transformada

Si $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$ para $\operatorname{Re}(s)>\alpha$, entonces para todo $a\in\mathbb{C}$ vale: $\mathcal{L}\{f(t)e^{at}\}=F(s-a)$ si $\operatorname{Re}(s)>\alpha+\operatorname{Re}(a)$

Dem

$$\mathcal{L}\{f(t)e^{at}\}=\int_0^{\infty}f(t)e^{at}e^{-st}dt=\int_0^{\infty}f(t)e^{-(s-a)t}dt\overset{\text{si }\operatorname{Re}(s-a)>\alpha}{\widehat{=}}F(s-a)$$

Observar: $\operatorname{Re}(s-a)>\alpha \iff \operatorname{Re}(s)-\operatorname{Re}(a)>\alpha \iff \operatorname{Re}(s)>\alpha+\operatorname{Re}(a)$

La propiedad de sustitución puede escribirse en sentido inverso como:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\}=f(t)e^{at}\ \text{ donde }\ f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

Ejemplo 11:

a) $\mathcal{L}\{e^{at}\}=\mathcal{L}\{1.e^{at}\}=F(s-a)$ donde $F(s)=\mathcal{L}\{1\}=\frac{1}{s}$ para $\operatorname{Re}(s)>0$. Entonces,

$$\mathcal{L}\{e^{at}\}=\frac{1}{s-a}\text{ para }\operatorname{Re}(s)>\operatorname{Re}(a)$$

En particular, si $a\in\mathbb{R}$: $\mathcal{L}\{e^{at}\}=\frac{1}{s-a}$ para $\operatorname{Re}(s)>a$

b) $\mathcal{L}\{t^3e^{1t}\}\overset{a=1}{\widehat{=}}F(s-1)$ donde $F(s)=\mathcal{L}\{t^3\}=\frac{3!}{s^4}$ para $\operatorname{Re}(s)>0$. Entonces,

$$\mathcal{L}\{t^3e^{t}\}=F(s-1)=\frac{3!}{(s-1)^4}\quad\text{si }\operatorname{Re}(s)>1$$

c) $\mathcal{L}\{\operatorname{sen}(t)e^{-2t}\}=F\big(s-(-2)\big)=F(s+2)$ donde $F(s)=\mathcal{L}\{\operatorname{sen}(t)\}=\frac{1}{s^2+1}$ si $\operatorname{Re}(s)>0$. Por lo tanto,

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen}(t)e^{-2t}\}=\frac{1}{(s+2)^2+1}=\frac{1}{s^2+4s+5}\quad si\ \operatorname{Re}(s)>-2$$

d)

$$\mathcal{L}\{t^2\cos(2t)\} = \mathcal{L}\left\{t^2\left(\frac{e^{i2t}+e^{-i2t}}{2}\right)\right\} = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\{t^2e^{i2t}\} + \mathcal{L}\{t^2e^{-i2t}\}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(F(s-2i)+F(s-(-2i))) = \frac{1}{2}(F(s-2i)+F(s+2i)) \text{ donde } F(s)=\mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2}{s^3} \text{ para } \mathrm{Re}(s)>0$$

Entonces,

$$\mathcal{L}\{t^2\cos(2t)\} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{(s-2i)^3}+\frac{2}{(s+2i)^3}\right) = \frac{(s+2i)^3+(s-2i)^3}{(s-2i)^3(s+2i)^3} =$$

$$= \frac{s^3+6is^2-12s-8i+s^3-6is^2-12s+8i}{(s-2i)^3(s+2i)^3} = \frac{2s(s^2-2)}{(s^2+4)^3} \quad \text{para } \mathrm{Re}(s)>0$$

e) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{9}{s^2+8s+25}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{9}{(s+4)^2+9}\right\} = e^{-4t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{9}{s^2+9}\right\} = 3e^{-4t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\} = 3e^{-4t}\mathrm{sen}(3t)$ para $\mathrm{Re}(s)>0$

f) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{10}{s(s^2-6s+10)}\right\}$ Descomponemos en fracciones simples, teniendo en cuenta que $s^2-6s+10$ es irreducible en $\mathbb{R}$:

$$\frac{10}{s(s^2-6s+10)} = \frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2-6s+10} = \frac{A(s^2-6s+10)+(Bs+C)s}{s(s^2-6s+10)} = \frac{(A+B)s^2+(-6A+C)s+10A}{s(s^2-6s+10)}$$

$\begin{cases} A+B=0 \\ -6A+C=0 \\ 10A=10 \end{cases}$ tiene solución $(A,B,C)=(1,-1,6)$. Luego, $\frac{10}{s(s^2-6s+10)} = \frac{1}{s} - \frac{s-6}{s^2-6s+10}$

Por lo tanto,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{10}{s(s^2-6s+10)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}-\frac{s-6}{s^2-6s+10}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-6}{s^2-6s+10}\right\}$$

g) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{10}{s(s^2-6s+10)}\right\}$

Descomponemos en fracciones simples, teniendo en cuenta que $s^2-6s+10$ es irreducible en $\mathbb{R}$:

$$\frac{10}{s(s^2-6s+10)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2-6s+10}=\frac{A(s^2-6s+10)+(Bs+C)s}{s(s^2-6s+10)}=\frac{(A+B)s^2+(-6A+C)s+10A}{s(s^2-6s+10)}$$

$\begin{cases} A+B=0 \\ -6A+C=0 \\ 10A=10 \end{cases}$ tiene solución $(A,B,C)=(1,-1,6)$. Luego,

$$\frac{10}{s(s^2-6s+10)}=\frac{1}{s}-\frac{s-6}{s^2-6s+10}$$

Entonces,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{10}{s(s^2-6s+10)}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}-\frac{s-6}{s^2-6s+10}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-6}{s^2-6s+10}\right\}$$

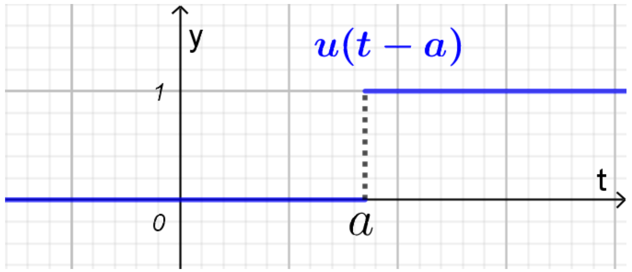
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-6}{s^2-6s+10}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-6}{(s-3)^2+1}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s-3)-3}{(s-3)^2+1}\right\}=e^{3t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-3}{s^2+1}\right\}=$$
$$=e^{3t}\left(\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}-3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}\right)=e^{3t}(\cos t-3\operatorname{sen} t)\ \text{ para } \operatorname{Re}(s)>3$$

Por ende:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{10}{s(s^2-6s+10)}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-6}{s^2-6s+10}\right\}=1-e^{3t}(\cos t-3\operatorname{sen} t)$$

Recordemos las funciones escalón unitario ($a \geq 0$):

$$u(t-a) = u_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < a \\ 1 & \text{si} \quad t > a \end{cases} \qquad \text{En particular } u(t) = u_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ 1 & \text{si} \quad t > 0 \end{cases}$$



Propiedad de traslación en el dominio del tiempo

Si $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ para $\text{Re}(s) > \alpha$, entonces para todo $a > 0$:

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s) \quad \text{si } \text{Re}(s) > \alpha$$

Dem

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = \int_0^\infty f(t-a)u(t-a)\, e^{-st}dt = \int_a^\infty f(t-a)\, e^{-st}dt \underbrace{=}_{\substack{\tau=t-a \\ d\tau=dt}} \int_0^\infty f(\tau)e^{-s(\tau+a)}\, d\tau$$

$$= \int_0^\infty f(\tau)e^{-as}\, e^{-s\tau}d\tau = e^{-as}\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}d\tau \underbrace{=}_{\text{si } \text{Re}(s)>\alpha} e^{-as}F(s)$$

La propiedad de traslación en el tiempo puede escribirse en sentido inverso como:

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)u(t-a) \quad \text{donde } f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

Ejemplo 12: Sea $a > 0$. Si se considera $f(t) = 1$ en la propiedad anterior, dado que $f(t-a) = 1$ se obtiene:

$$\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s) = e^{-as}\mathcal{L}\{1\} = \frac{e^{-as}}{s} \quad \text{si } \text{Re}(s) > 0$$

Ejemplo 13:

$$\mathcal{L}\{t\,u(t-2)\} = \mathcal{L}\{((t-2)+2)u(t-2)\} = \mathcal{L}\{(t-2)u(t-2)\} + 2\mathcal{L}\{u(t-2)\} =$$

$$= e^{-2s}\mathcal{L}\{t\} + 2e^{-2s}\mathcal{L}\{1\} = \frac{e^{-2s}}{s^2} + \frac{2e^{-2s}}{s} \text{ si } \operatorname{Re}(s) > 0$$

Ejemplo 14:

$$\mathcal{L}\left\{\cos(t)\,u\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right\} = \mathcal{L}\left\{\cos\left(t-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)u\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right\} = e^{-\left(\frac{\pi}{2}\right)s}\mathcal{L}\left\{\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right\} = e^{-\pi s/2}\mathcal{L}\{-\operatorname{sen} t\} =$$

$$= -e^{-\frac{\pi s}{2}}\mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\} = -e^{-\frac{\pi s}{2}}\frac{1}{s^2+1} = -\frac{e^{-\frac{\pi s}{2}}}{s^2+1}$$

Ejemplo 15: Aplicando dos propiedades en un mismo ejercicio

a)

$$\mathcal{L}\{e^{2t}u(t-1)\} = \mathcal{L}\left\{e^{2((t-1)+1)}u(t-1)\right\} = \mathcal{L}\left\{e^2e^{2(t-1)}u(t-1)\right\} = e^2\mathcal{L}\left\{e^{2(t-1)}u(t-1)\right\} =$$

$$= e^2e^{-1s}\mathcal{L}\{e^{2t}\} = e^2e^{-1s}\frac{1}{s-2} = \frac{e^{-(s-2)}}{s-2}$$

b)

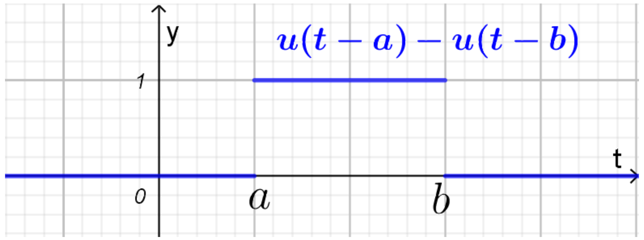
$$\mathcal{L}\{te^{2t}u(t-1)\} = \mathcal{L}\left\{((t-1)+1)e^{2((t-1)+1)}u(t-1)\right\} = e^{-1s}\mathcal{L}\left\{(t+1)e^{2(t+1)}\right\} = e^{-s}\mathcal{L}\{e^2e^{2t}(t+1)\} =$$

$$= e^{-s}e^2\mathcal{L}\{(t+1)e^{2t}\} = e^{-s}e^2(\mathcal{L}\{te^{2t}\} + \mathcal{L}\{e^{2t}\}) = e^{-(s-2)}\left(\frac{1}{(s-2)^2} + \frac{1}{s-2}\right) = \frac{s-1}{(s-2)^2}e^{-(s-2)}$$

Transformada de Laplace de funciones definidas por tramos

Si $0 \leq a < b < \infty$:

$$u(t-a) - u(t-b) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < a \\ 1 & \text{si} \quad t > a \end{cases} - \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < b \\ 1 & \text{si} \quad t > b \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < a \\ 1 & \text{si} \quad a < t < b \\ 0 & \text{si} \quad t > b \end{cases}$$



Más generalmente, si $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{N-1} < \infty$, entonces la función $f(t) = \begin{cases} f_1(t) & \text{si} \quad t_0 < t < t_1 \\ f_2(t) & \text{si} \quad t_1 < t < t_2 \\ \cdots\cdots\cdots & \\ f_{N-1}(t) & \text{si} \quad t_{N-2} < t < t_{N-1} \\ f_N(t) & \text{si} \quad t_{N-1} < t < \infty \end{cases}$

puede escribirse combinando escalones unitarios:

$$f(t) = f_1(t)(u(t-t_0) - u(t-t_1)) + f_2(t)u(t-t_1) - u(t-t_2)) + \cdots + f_{N-1}(t)(u(t-t_{N-2}) - u(t-t_{N-1})) + f_N(t)u(t_{N-1})$$

Reagrupando términos:

$$f(t) = f_1(t)u(t-t_0) + \big(f_2(t) - f_1(t)\big)u(t-t_1) + \big(f_3(t) - f_2(t)\big)u(t-t_2) + \cdots + \big(f_N(t) - f_{N-1}(t)\big)u(t-t_{N-1}) + f_N(t)\,u(t-t_N)$$

Con esta expresión y la propiedad de traslación en el tiempo, podemos obtener la transformada de Laplace de funciones definidas por tramos.

Ejemplo 16: Si $f(t)=\begin{cases}2t & \text{si} \quad 0<t<1\\ -t & \text{si} \quad 1<t<\infty\end{cases}$ entonces

$$f(t)=2t\big(u(t-0)-u(t-1)\big)-t\,u(t-1)=2t\,u(t)-3t\,u(t-1)$$

Por lo tanto:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}\{2t\,u(t)-3t\,u(t-1)\}=2\,\mathcal{L}\{t\,u(t)\}-3\,\mathcal{L}\{t\,u(t-1)\}$$

$$\mathcal{L}\{t\,u(t)\}=\mathcal{L}\{t\}=\frac{1}{s^2}$$

$$\mathcal{L}\{t\,u(t-1)\}=\mathcal{L}\{((t-1)+1)\,u(t-1)\}=\mathcal{L}\{(t-1)u(t-1)\}+\mathcal{L}\{u(t-1)\}=e^{-s}\mathcal{L}\{t\}+e^{-s}\mathcal{L}\{1\}=\frac{e^{-s}}{s^2}+\frac{e^{-s}}{s}$$

Luego,

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=2\,\mathcal{L}\{t\,u(t)\}-3\,\mathcal{L}\{t\,u(t-1)\}=\frac{2}{s^2}-3\left(\frac{e^{-s}}{s^2}+\frac{e^{-s}}{s}\right)=\frac{2}{s^2}-\frac{3e^{-s}}{s^2}-\frac{3e^{-s}}{s} \quad \text{si } \operatorname{Re}(s)>0$$

Ejemplo 17: a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-5s}}{s^4}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-5s}\,\frac{1}{s^4}\right\}=f(t-5)u(t-5)$ siendo $f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\}=\frac{1}{6}t^3.$

Por lo tanto: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-5s}}{s^4}\right\}=\frac{1}{6}(t-5)^3u(t-5)$

b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s-1}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-2s}\,\overbrace{\frac{1}{s-1}}^{F(s)}\right\}=f(t-2)u(t-2)$ con $f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}=e^t$. Entonces,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s-1}\right\}=e^{t-2}u(t-2)$$

c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s^2-s}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-1s}\,\frac{1}{s^2-s}\right\}=f(t-1)u(t-1)$ donde

$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-s}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}=e^t-1$. Luego: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s^2-s}\right\}=(e^{t-1}-1)\,u(t-1)$

d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2\pi s}}{s^2-10s+50}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-2\pi s}\frac{1}{s^2-10s+50}\right\} = f(t-2\pi)u(t-2\pi)$ donde

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-10s+50}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-5)^2+25}\right\} = e^{5t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+25}\right\} = \frac{1}{5}e^{5t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^2+25}\right\} = \frac{1}{5}e^{5t}\operatorname{sen}(5t)$$

Así,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2\pi s}}{s^2-10s+50}\right\} = \frac{1}{5}e^{5(t-2\pi)}\operatorname{sen}\big(5(t-2\pi)\big)u(t-2\pi) = \frac{1}{5}e^{5(t-2\pi)}\operatorname{sen}(5t)u(t-2\pi)$$

Propiedad de transformada de Laplace de funciones periódicas

Si $f(t)$ es una función periódica de período T y es seccionalmente continua en el intervalo cerrado $[0,T]$, entonces:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\int_0^T f(t)e^{-st}dt}{1-e^{-Ts}} \quad \text{si } \operatorname{Re}(s) > 0$$

Dem

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \sum_{n=0}^\infty \int_{nT}^{nT+T} f(t)e^{-st}dt$$

$$\int_{nT}^{nT+T} f(t)e^{-st}dt \overset{\substack{\tau=t-nT\\ d\tau=dt}}{\widehat{=}} \int_0^T f(\tau+nT)e^{-s(\tau+nT)}d\tau \overset{f(\tau+nT)=f(\tau)}{\widehat{=}} \int_0^T f(\tau)e^{-s(\tau+nT)}d\tau = \int_0^T f(\tau)e^{-Tsn}e^{-s\tau}d\tau == e^{-Tsn}\int_0^T f(\tau)\, e^{-s\tau}d\tau$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \sum_{n=0}^\infty \int_{nT}^{nT+T} f(t)e^{-st}dt = \sum_{n=0}^\infty e^{-Tsn}\left(\int_0^T f(\tau)\, e^{-s\tau}d\tau\right) = \left(\int_0^T f(\tau)\, e^{-s\tau}d\tau\right) \overbrace{\sum_{n=0}^\infty (e^{-Ts})^n}^{\substack{\text{serie geom}: r=e^{-Ts}\\ |r|=e^{-T\operatorname{Re}(s)}<1}} = \left(\int_0^T f(\tau)\, e^{-s\tau}d\tau\right)\frac{1}{1-e^{-Ts}}$$

<u>Ejemplo 18</u>: $f(t) = t \text{ si } 0 < t < 2; f(t+2) = f(t)$. Se trata de una función periódica de período $T = 2$, continua en $[0,2]$. Entonces,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\int_0^2 f(t)e^{-st}dt}{1-e^{-2s}} = \frac{1}{1-e^{-2s}}\int_0^2 te^{-st}dt = \frac{1}{1-e^{-2s}}\left(-\frac{te^{-st}}{s}\bigg|_0^2 + \frac{1}{s}\int_0^2 e^{-st}dt\right) = \frac{1}{1-e^{-2s}}\left(-\frac{te^{-st}}{s}\bigg|_0^2 - \frac{e^{-st}}{s^2}\bigg|_0^2\right) =$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2s}}\left(-\frac{2e^{-2s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s^2} + \frac{1}{s^2}\right)$$

Propiedad de transformada de Laplace de derivadas

Si $f(t), f'(t), \ldots, f^{(n-1)}(t)$ son funciones continuas en $[0,\infty)$ y son de orden exponencial α cuando $t \to \infty$

y $f^{(n)}(t)$ es seccionalmente continua en todo intervalo acotado $[0, L]$,

entonces si $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ para $\mathrm{Re}(s) > \alpha$, se tiene para $\mathrm{Re}(s) > \alpha$ la siguiente:

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - s^{n-3} f^{(2)}(0) - \cdots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Por ejemplo:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$
$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$$
$$\mathcal{L}\left\{f^{(3)}(t)\right\} = s^3 F(s) - s^2 f(0) - sf''(0) - f^{(2)}(0)$$

Esta propiedad es particularmente útil para resolver ecuaciones diferenciales lineales a coeficientes constantes (también para sistemas de tales ecuaciones diferenciales).

<u>Ejemplo 19</u>: Resolver el problema de valores iniciales $\begin{cases} y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 12t^2e^{2t} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$

<u>Rta</u> Vamos a hallar primeramente la transformada de Laplace $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ de la solución $y(t)$. Para ello aplicamos el operador $\mathcal{L}$ en ambos miembros de la ecuación diferencial:

$$\mathcal{L}\{y''(t) - 4y'(t) + 4y(t)\} = \mathcal{L}\{12t^2e^{2t}\}$$

Por linealidad:

$$\mathcal{L}\{y''(t) - 4y'(t) + 4y(t)\} = \mathcal{L}\{y''(t)\} - 4\mathcal{L}\{y'(t)\} + 4\mathcal{L}\{y(t)\}$$

Aplicando transformada de derivadas y reemplazando los valores iniciales:

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - s - 2$$
$$\mathcal{L}\{y'(t)\} = sY(s) - y(0) = sY(s) - 1$$

Por otra parte, aplicando traslación en el dominio de la transformada:

$$\mathcal{L}\{12t^2e^{2t}\} = 12\frac{2}{(s-2)^3} = \frac{24}{(s-2)^3}$$

Reemplazando todo en la ecuación diferencial, obtenemos la siguiente ecuación algebraica:

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} - 4\mathcal{L}\{y'(t)\} + 4\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{12t^2e^{2t}\}$$

$$(s^2Y(s) - s - 2\,) - 4(sY(s) - 1) + 4Y(s) = \frac{24}{(s-2)^3}$$

De aquí se puede obtener $Y(s)$ por despeje:

$$(s^2 - 4s + 4\,)Y(s) - s + 2 = \frac{24}{(s-2)^3}$$

$$(s-2)^2Y(s)=\frac{24}{(s-2)^3}+(s-2)$$

$$Y(s)=\frac{24}{(s-2)^5}+\frac{1}{s-2}$$

Aplicando antitransformada de Laplace obtenemos la solución:

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{24}{(s-2)^5}+\frac{1}{s-2}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{(s-2)^5}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}=e^{2t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{s^5}\right\}+e^{2t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}$$

$$y(t)=e^{2t}t^4+e^{2t}=(t^4+1)e^{2t}$$

<u>Ejemplo 20</u>: Resolver el problema de valor inicial $\begin{cases} x'(t)+x(t)=t\,u(t-1) \\ x(0)=2 \end{cases}$

<u>Rta</u> Sea $X(s)=\mathcal{L}\{x(t)\}$. Procedemos como en el ejemplo anterior: $\mathcal{L}\{x'(t)+x(t)\}=\mathcal{L}\{t\,u(t-1)\}$

Por linealidad: $\mathcal{L}\{x'(t)+x(t)\}=\mathcal{L}\{x'(t)\}+\mathcal{L}\{x(t)\}$

Aplicando transformada de derivadas y reemplazando los valores iniciales: $\mathcal{L}\{x'(t)\}=sX(s)-x(0)=sX(s)-2$

Por otra parte, aplicando traslación en el tiempo:

$$\mathcal{L}\{t\,u(t-1)\}=\mathcal{L}\{(t-1+1)\,u(t-1)\}=\mathcal{L}\{(t-1)\,u(t-1)\}+\mathcal{L}\{u(t-1)\}=e^{-s}\mathcal{L}\{t\}+e^{-s}\mathcal{L}\{1\}=e^{-s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}\right)$$

Reemplazando en la ec. diferencial:

$$sX(s)-2+X(s)=e^{-s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}\right)$$

$$sX(s) - 2 + X(s) = \frac{(s+1)}{s^2}e^{-s}$$

$$(s+1)X(s) = 2 + \frac{(s+1)}{s^2}e^{-s}$$

$$X(s) = \frac{2}{s+1} + \frac{e^{-s}}{s^2}$$

Luego,

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+1} + \frac{e^{-s}}{s^2}\right\} = 2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s^2}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = e^{-t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s^2}\right\} = g(t-1)u(t-1) \text{ con } g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t \;\text{ así que } \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s^2}\right\} = (t-1)u(t-1)$$

Por lo tanto, la solución del problema es:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = 2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s^2}\right\} = 2e^{-t} + (t-1)u(t-1)$$

Propiedad de transformada de Laplace de funciones integrales

Si $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ para $\operatorname{Re}(s) > \alpha$ entonces:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s} \quad \text{para } \operatorname{Re}(s) > \alpha$$

Dem Lo demostramos para $f(t)$ continua en $[0, \infty)$. En ese caso, aplicando el teorema fundamental del cálculo resulta derivable en ese intervalo. Aplicando la propiedad de transformada de derivada se obtiene:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{g'(t)\} = s\mathcal{L}\{g(t)\} - \overbrace{g(0)}^{0} = s\mathcal{L}\{g(t)\}$$

Despejando:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{F(s)}{s}$$

Ejemplo 21:

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen}(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t \cos(\tau)d\tau\right\} = \frac{\mathcal{L}\{\cos(t)\}}{s} = \frac{\frac{s}{s^2+1}}{s} = \frac{1}{s^2+1} \quad \text{para } \operatorname{Re}(s) > 0$$

Propiedad de transformada de Laplace de una convolución

Si $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ y $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$ para $\mathrm{Re}(s) > \alpha$, entonces:

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right\} = F(s)G(s) \text{ para } \mathrm{Re}(s) > \alpha$$

En sentido inverso:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = (f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \;\; \text{donde} \;\; f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}\;, g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$$

Ejemplo 22:

$$\mathcal{L}\{t * e^{-t}\} = \mathcal{L}\{t\}\mathcal{L}\{e^{-t}\} = \frac{1}{s^2}\frac{1}{(s+1)} = \frac{1}{s^2(s+1)} \;\; \text{para} \;\; \mathrm{Re}(s) > 0$$

Podemos comprobar este resultado calculando directamente la convolución y transformándola luego:

$$t * e^{-t} = \int_0^t \tau e^{-(t-\tau)}d\tau = \int_0^t \tau e^{-t}e^{\tau}d\tau = e^{-t}\int_0^t \tau e^{\tau}d\tau = e^{-t}\left(\tau e^{\tau}\Big|_0^t - \int_0^t e^{\tau}d\tau\right) = e^{-t}\left(\tau e^{\tau}\Big|_0^t - e^{\tau}\Big|_0^t\right)$$
$$= e^{-t}(te^t - e^t + 1) = t - 1 + e^{-t}$$

Así que:

$$\mathcal{L}\{t * e^{-t}\} = \mathcal{L}\{t - 1 + e^{-t}\} = \mathcal{L}\{t\} - \mathcal{L}\{1\} + \mathcal{L}\{e^{-t}\} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} = \frac{(s+1) - (s^2+s) + s^2}{s^2(s+1)} = \frac{1}{s^2(s+1)}$$

Notar: Los cálculos anteriores muestran una forma de hallar convoluciones, antitransformando el producto de las transformadas de las funciones que se desea convolucionar:

$$t * e^{-t} = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\frac{1}{(s+1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+1)}\right\} \overset{\text{frac. simples}}{\widetilde{=}} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right\} = t - 1 + e^{-t}$$

ATENCIÓN

Conviene observar que la propiedad de transformada de Laplace de funciones integrales es un caso particular del teorema de convolución. En efecto, si $g(t) = 1$ se tiene:

$$(f * 1)(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)\overbrace{g(t-\tau)}^{=1}\,d\tau = \int_0^t f(\tau)d\tau$$

Entonces, aplicando el teorema de convolución se obtiene:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)\frac{1}{s} = \frac{F(s)}{s}$$

<u>Ejemplo 23</u>: Resolver la siguiente ecuación integro-diferencial con la condición $x(0) = 0$

$$x'(t) + 2\,x(t) + 2\int_0^t x(\tau)d\tau = 1$$

<u>Rta</u> Sea $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$

Notemos que

$$\int_0^t x(\tau)d\tau = (x * 1)(t)$$

La ecuación se escribe entonces en la forma equivalente: $x'(t) + 2\,x(t) + 2\,(x * 1)(t) = 1$

Transformando ambos miembros:

$$\mathcal{L}\{x'(t) + 2\,x(t) + 2\,(x * 1)(t)\} = \mathcal{L}\{1\}$$

Aplicando propiedades:

$$\mathcal{L}\{x'(t)\} + 2\,\mathcal{L}\{\,x(t)\} + 2\,\mathcal{L}\{(x * 1)(t)\} = \mathcal{L}\{1\}$$

$$sX(s) - x(0) + 2\,X(s) + 2\,X(s)\frac{1}{s} = \frac{1}{s}$$

Como $x(0) = 0$, resulta:

$$\left(s + 2 + \frac{2}{s}\right)X(s) = \frac{1}{s}$$

$$(\,s^2 + 2s + 2)X(s) = 1 \quad \text{es decir} \quad X(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$$

Entonces,

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 2s + 2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2 + 1}\right\} = e^{-t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 1}\right\} = e^{-t}\text{sen}\, t$$

Ejemplo 24: Como lo prometimos al resolver el ejercicio 10, vamos a encararlo con el teorema de convolución

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{(s^2+1)^2}\right\}$$

Rta

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{(s^2+1)^2}\right\} = 4\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)}\frac{1}{(s^2+1)}\right\} = 4\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)}\right\} * \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)}\right\} = 4\,\mathrm{sen}(t) * \mathrm{sen}(t) =$$

$$= 4\int_0^t \mathrm{sen}(\tau)\,\mathrm{sen}(t-\tau)\ d\tau = 4\int_0^t \left(\frac{e^{i\tau}-e^{-i\tau}}{2i}\right)\left(\frac{e^{i(t-\tau)}-e^{-i(t-\tau)}}{2i}\right)d\tau = -\int_0^t \left(e^{i\tau}-e^{-i\tau}\right)\left(e^{i(t-\tau)}-e^{-i(t-\tau)}\right)d\tau =$$

$$= -\int_0^t \left(e^{i\tau}e^{i(t-\tau)} - e^{i\tau}e^{-i(t-\tau)} - e^{-i\tau}e^{i(t-\tau)} + e^{-i\tau}e^{-i(t-\tau)}\right)d\tau = -\int_0^t \left(e^{it} - e^{2i\tau}e^{-it} - e^{-2i\tau}e^{it} + e^{-it}\right)d\tau =$$

$$= -\left(e^{it}\tau - e^{-it}\frac{e^{2i\tau}}{2i} + e^{it}\frac{e^{-2i\tau}}{2i} + e^{-it}\tau\right)\Bigg|_0^t = \left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right) - \left(\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)2t - \left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)\right) =$$

$$= 2\,\mathrm{sen}(t) - 2t\,cos(t)$$

Ejemplo 25: Resolver la siguiente ecuación integro-diferencial, con las condiciones iniciales $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$

$$x'(t) + x(t) - 4\int_0^t e^{t-\tau}x(\tau)d\tau = t\,u(t-1)$$

Rta Podemos reescribir la ecuación dada como: $x'(t) + x(t) - 4\,e^{-t} * x(t) = t\,u(t-1)$

Denotemos $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$

$$\mathcal{L}\{x'(t) + x(t) - 4\,e^{-t} * x(t)\} = \mathcal{L}\{t\,u(t-1)\}$$

$$\mathcal{L}\{x'(t)\} + \mathcal{L}\{x(t)\} - 4\,\mathcal{L}\{e^{-t} * x(t)\} = \mathcal{L}\{t\,u(t-1)\}$$

$$\mathcal{L}\{x'(t)\} = sX(s) - x(0) = s\,X(s)$$

$$\mathcal{L}\{e^{-t} * x(t)\} = \mathcal{L}\{e^{-t}\}\mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{1}{s+1}X(s)$$

$$\mathcal{L}\{t\,u(t-1)\} = \mathcal{L}\{((t-1)+1)\,u(t-1)\} = \mathcal{L}\{(t-1)u(t-1)\} + \mathcal{L}\{u(t-1)\} = e^{-s}\mathcal{L}\{t\} + e^{-s}\mathcal{L}\{1\} = e^{-s}\frac{1}{s^2} + e^{-s}\frac{1}{s}$$

$$s\,X(s) + X(s) - \frac{4}{s+1}X(s) = e^{-s}\frac{(s+1)}{s^2}$$

$$\left(s + 1 - \frac{4}{s+1}\right)X(s) = e^{-s}\frac{(s+1)}{s^2}$$

$$\left(\frac{s^2+2s-3}{s+1}\right)X(s) = e^{-s}\frac{(s+1)}{s^2}$$

$$\frac{(s-1)(s+3)}{s+1}X(s) = e^{-s}\frac{(s+1)}{s^2}$$

$$X(s) = e^{-s}\frac{(s+1)^2}{s^2(s-1)(s+3)} \overbrace{=}^{\substack{\text{frac.}\\ \text{simples}}} -\frac{1}{3}\frac{1}{s^2} - \frac{2}{9}\frac{1}{s} - \frac{1}{36}\frac{1}{(s+3)} + \frac{1}{4}\frac{1}{(s-1)}$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{3}\frac{1}{s^2} - \frac{2}{9}\frac{1}{s} - \frac{1}{36}\frac{1}{(s+3)} + \frac{1}{4}\frac{1}{(s-1)}\right\} = -\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \frac{2}{9}\mathcal{L}^{-1}\{1\} - \frac{1}{36}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} + \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}$$

$$\boldsymbol{x(t) = -\frac{1}{3}t - \frac{2}{9} - \frac{1}{36}e^{-3t} + \frac{1}{4}e^{t}}$$