EJERCICIO 7

En una muestra aleatoria de 85 soportes para el cigüeñal de un motor de automóvil, 10 tienen un terminado que es más rugoso de lo que las especificaciones permiten.

a) Calcular un intervalo de confianza del 95% para la verdadera proporción de soportes en la población que exceden las especificaciones.

b) ¿Cuán grande debe ser la muestra si se desea tener una confianza del 95% de que el error de estimación sea menor que 0.05?.

RESOLUCIÓN:

Sea la variable aleatoria:

X: "$número\ de\ soportes\ para\ el\ cigueñal\ de\ un\ motor\ que\ tienen\ un\ terminado\ más\ rugoso$

$que\ el\ permitido$"

$X \sim B(n, p)$ donde n=85 (muestra grande)

La proporción muestral es $\hat{P} = \frac{10}{85}$

El nivel de confianza será aproximado: $1 - \alpha \approx 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$

Se desea construir un intervalo de confianza de *p*. Consideramos como pivote a :

$Z = \frac{\hat{P} - p}{\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}} \approx N(0{,}1)$ (aproximada ya que n es grande)

<u>El intervalo de confianza utilizado para *p*</u>:

$$\left[\hat{P} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}; \hat{P} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}\right]$$

De la tabla de la normal estandarizada vemos que $Z_{0.025} = 1.96$

Reemplazando se obtiene:

$$\left[\frac{10}{85} - 1.96\sqrt{\frac{\frac{10}{85}\left(1-\frac{10}{85}\right)}{85}}; \frac{10}{85} + 1.96\sqrt{\frac{\frac{10}{85}\left(1-\frac{10}{85}\right)}{85}}\right] = [0.045; 0.186]$$

b) Buscamos el tamaño n de la muestra tal que con un 95% de confianza la proporción de la muestra $\hat{P}$ tenga un error de estimación 0.05 de la proporción poblacional ***p***, es decir buscamos un n tal que:

$\frac{L}{2} < 0.05$, por lo tanto, como $\alpha = 0.05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$ si tomamos la muestra anterior como preliminar, se puede calcular n:

$$n \geq \left(\frac{2z_{\frac{\alpha}{2}}}{l}\right)^2 \hat{P}\left(1 - \hat{P}\right) = \left(\frac{2.1{,}96}{2.0{,}05}\right)^2 . \frac{10}{85} . \left(1 - \frac{10}{85}\right) = 159.51$$

Por lo tanto, hay que tomar una muestra de tamaño 160 por lo menos.

Si no tomamos la muestra inicial como preliminar, entonces directamente se puede plantear (tomando $\hat{P} = \frac{1}{2}$)

$$n \geq \left(\frac{2z\frac{\alpha}{2}}{l}\right)^2 0{,}25 = \left(\frac{2.1{,}96}{2.0{,}05}\right)^2 0{,}25 = 384.16$$

Entonces hay que tomar una muestra de por lo menos 385.