Ejercicio 3: Práctica estimación puntual

3) Sea $X_1, X_2, \dots, X_n$, una muestra aleatoria de tamaño n. $E(X_i)=\mu$ y $V(X_i)=\sigma^2>0$ para todo $i=1, \dots, n$

a) Demuestre que $\bar{X}^2$ es un estimador sesgado de μ^2.

b) Determine la magnitud del sesgo de este estimador.

c) ¿Qué sucede con el sesgo a medida que aumenta el tamaño n de la muestra?

Solución:

Se dice que el estimador puntual $\hat{\Theta}$ es un ***estimador insesgado*** del parámetro θ si $E(\hat{\Theta})=\theta$ cualquiera sea el valor verdadero de θ

En este caso, el estimador es $\bar{X}^2$ y el parámetro es μ^2.

Deberemos demostrar que: $E(\bar{X}^2) \neq \mu^2$

Para ello, veremos cómo reescribir $E(\bar{X}^2)$ (*)

Recordamos que la esperanza de un término al cuadrado aparece en la varianza, es decir

$\boxed{V(X)=E(X^2)-E(X)^2}$

$V(\bar{X})=E(\bar{X}^2)-E(\bar{X})^2$

De (*) $E(\bar{X}^2)=V(\bar{X})+E(\bar{X})^2=\sigma^2/n+\mu^2 \neq \mu^2$ lo que queríamos demostrar.

Por otro lado, $V(\bar{X})=V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)\overset{\text{Propiedad varianza}}{=}\left(\frac{1}{n}\right)^2 V\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)\overset{\text{Por independencia}}{=}\left(\frac{1}{n}\right)^2\sum_{i=1}^{n}V(X_i)\overset{\text{Por ser m.a}}{=}\left(\frac{1}{n}\right)^2 n\,\sigma^2=\sigma^2/n$

$E(\bar{X})=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)\underset{\text{Propiedad de linealidad}}{=}\frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)\underset{\text{Propiedad de linealidad}}{=}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\cancel{\frac{1}{n}}\,n\,\mu=\mu$

$E(\bar{X})^2=\mu^2$

Respuesta: $E(\bar{X}^2)=\sigma^2/n+\mu^2\neq\mu^2$, por lo tanto, $\bar{X}^2$ es un estimador sesgado para μ^2

b)

La diferencia $E(\hat{\Theta})-\theta$ se conoce como ***sesgo de estimador*** $\hat{\Theta}$**.** Anotamos $b(\hat{\Theta})=E(\hat{\Theta})-\theta$

b $(\bar{X}^2)$= E $(\bar{X}^2)$ - μ^2 = σ^2/n + μ^2 - μ^2 = σ^2/n >0, ya que σ^2>0 y n >0

La magnitud del sesgo es σ^2/n

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^2}{n}$ = 0, o sea que a medida que n aumenta, el sesgo tiende a 0.

Es decir, que $\bar{X}^2$ es un estimador asintóticamente insesgado.