Transformaciones del plano complejo

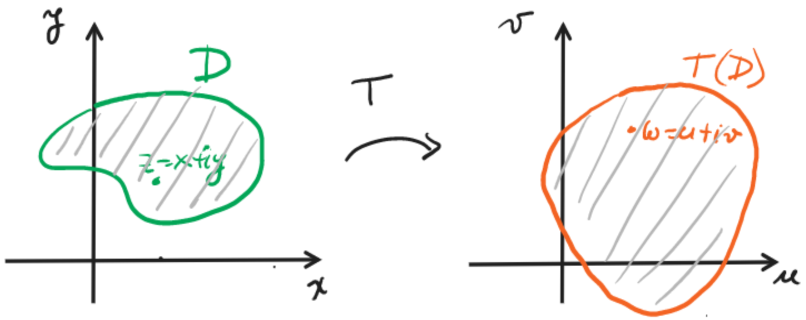
Sea $f: D \to \mathbb{C}$, $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, función compleja definida en $D \subseteq \mathbb{C}$.

No es posible visualizar la gráfica de f del modo habitual en un sistema de ejes cartesianos ortogonales, como estamos acostumbrados para funciones reales de una y dos variables reales. Ello requeriría establecer cuatro ejes mutuamente ortogonales en $\mathbb{R}^3$ (dos para las coordenadas cartesianas de z y otros dos para las coordenadas cartesianas de w).

Para superar este inconveniente hay distintas alternativas gráficas (una es graficando por separado sus partes real e imaginaria, otra haciendo lo mismo con su módulo y su argumento principal). Sin embargo en este curso vamos a privilegiar el "efecto geométrico" de f actuando sobre puntos $z \in D$ de un sistema coordenado ortogonal (x, y), mapeándolos en puntos $w = f(z)$ de otro sistema coordenado ortogonal (u, v) (es decir que la función pensada como transformación puntos de un plano dominio en puntos de un plano imagen.

Anotamos $T: w = f(z)$ o $T: \begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$ cuando queremos enfatizar este punto de vista ("T" por "transformación").

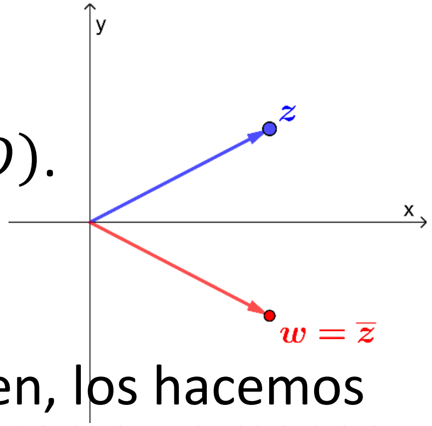
Como mostraremos más adelante, las transformaciones definidas por funciones analíticas gozan de propiedades geométricas interesantes.



Para estudiar el efecto de f sobre puntos, simplemente evaluamos la función en el punto. Los puntos z tales que $f(z) = z$ se denominan **puntos fijos** de la transformación f.

Para estudiar la acción de f sobre subconjuntos $A \subseteq D$ (curvas, regiones) graficamos la ***imagen de A por f*** , es decir

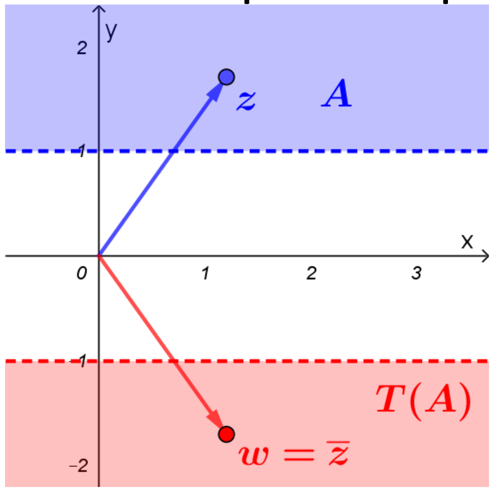
también anotado $T(A)$. En particular, la ***imagen de f*** se define como $f(D)$.



Por ejemplo: $f(z) = \bar{z}$ define una transformación $T: w = \bar{z}$ que geométricamente se corresponde con una reflexión respecto del eje real (en el gráfico, en lugar de superponer los planos dominio e imagen, los hacemos coincidir pero los distinguimos por colores. Es decir que interpretamos f como un mapeo del plano en sí mismo).

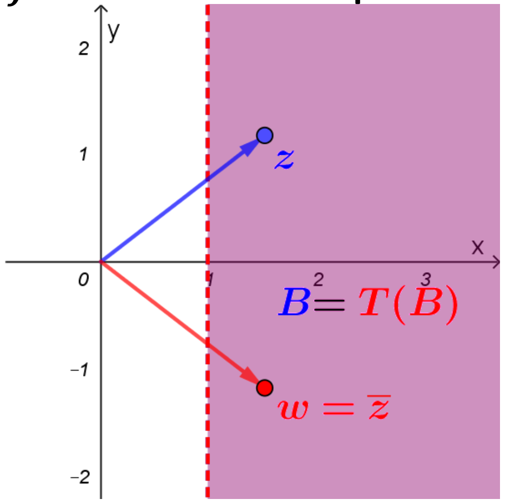
Si $A = \{z: \mathrm{Im}(z) > 1\}$ entonces

$f(A) = \{w \in \mathbb{C}: \mathrm{Im}(w) < -1\}$



Si $B = \{z: \mathrm{Re}(z) > 1\}$ entonces

$f(B) = \{w \in \mathbb{C}: \mathrm{Re}(w) > 1\}$



Dada $f: D \to \mathbb{C}$, es sencillo probar que si $A, B \subseteq D$ entonces:

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$
$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cup f(B)$$

Además, si f es inyectiva (es decir $f(z_1) \neq f(z_2)$ si $z_1 \neq z_2$) entonces:

$$f(A \cap B) = f(A) \cup f(B)$$

Dadas $f: D_f \to \mathbb{C}$, $g: D_g \to \mathbb{C}$ con $D_f, D_g \subseteq \mathbb{C}$. Si $f\left(D_f\right) \cap D_g \neq \emptyset$, la **composición de $\boldsymbol{f}$ con $\boldsymbol{g}$** es la función denotada $\boldsymbol{g \circ f}$ definida por $(g \circ f)(z) = g(f(z))$. Su dominio es $D_{g \circ f} = \left\{z \in D_f : f(z) \in D_g\right\}$.

Se corresponde con la acción concatenada o secuencial de f seguida de g: en primer lugar actúa f sobre $z \in D_{g \circ f}$ pasando a ser la imagen $f\ (z)$ argumento de g.

Notar que en general $g \circ f \neq f \circ g$ (observar la importancia de distinguir el orden en que dos funciones se componen).

La operación de composición permitirá describir ciertas transformaciones como concatenación de otras cuyas interpretaciones geométricas son más sencillas o elementales, permitiendo así entender mejor la acción de transformaciones más complejas.

<u>Ejemplo</u>: Sean $f(z) = 2z$, $g(z) = z - i$

a) Hallar las expresiones de $g \circ f$ y $f \circ g$

b) Si $A = \{z \in \mathbb{C}: |z - i| < 1\}$ comparar $(g \circ f)(A)$ con $(f \circ g)(A)$

<u>Rta</u>

a)

$$(g \circ f)(z) = g\big(f(z)\big) = g(2z) = 2z - i$$
$$(f \circ g)(z) = f\big(g(z)\big) = f(z - i) = 2(z - i) = 2z - 2i$$

Entonces, es claro que $g \circ f \neq f \circ g$, es decir que f y g no conmutan.

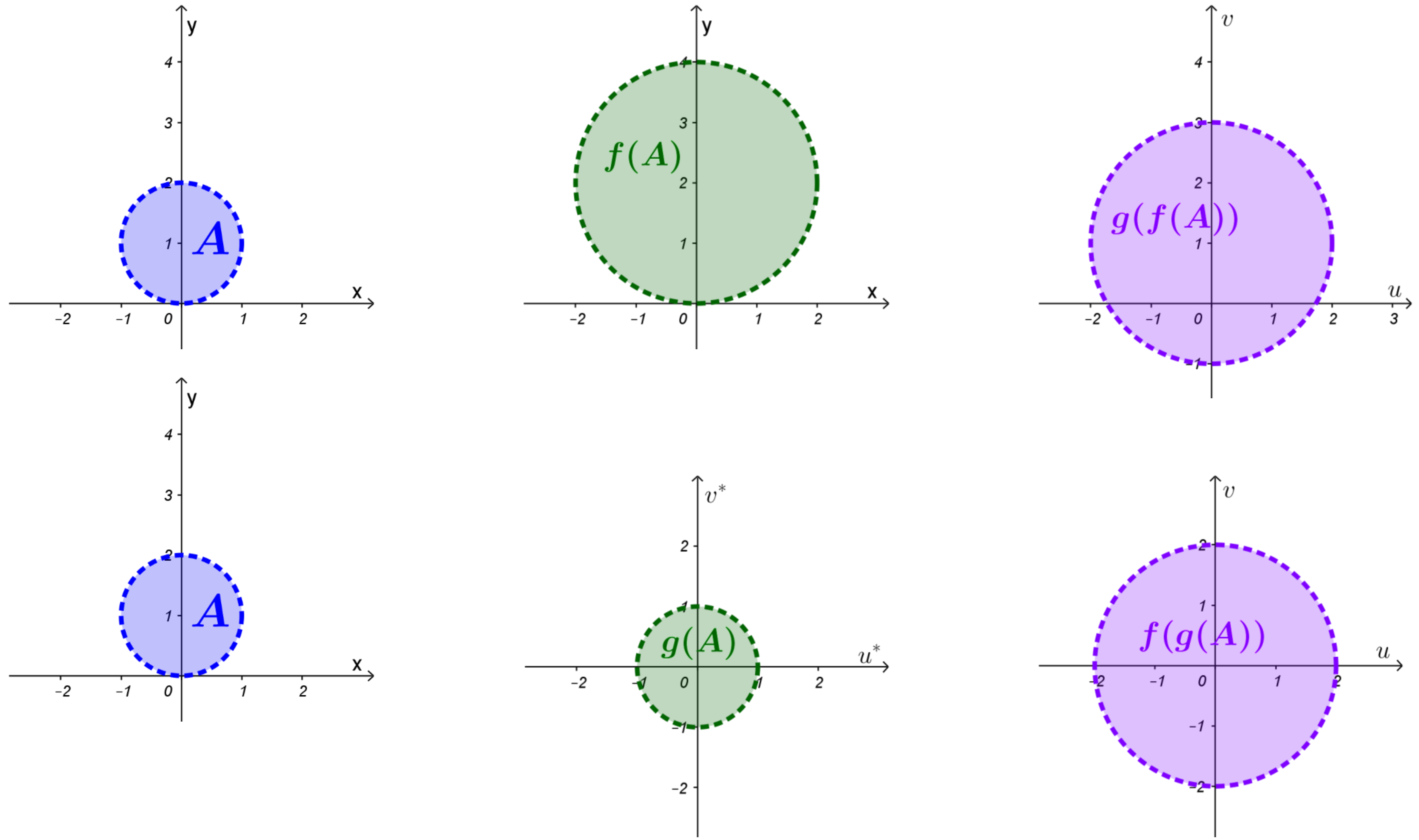
b) Claramente f actúa duplicando tamaño en tanto g actúa trasladando una unidad hacia abajo. Entonces,

$$f(A) = \{w^* \in \mathbb{C}: |w^* - 2i| < 2\} \qquad g(f(A)) = \{w \in \mathbb{C}: |w - i| < 2\}$$
$$g(A) = \{w^* \in \mathbb{C}: |w^*| < 1\} \qquad f(g(A)) = \{w \in \mathbb{C}: |w| < 2\}$$

Ejemplo: Sean $f(z) = 2z$, $g(z) = z - i$

$$f(A) = \{w^* \in \mathbb{C}: |w^* - 2i| < 2\} \qquad g(f(A)) = \{w \in \mathbb{C}: |w - i| < 2\}$$

$$g(A) = \{w^* \in \mathbb{C}: |w^*| < 1\} \qquad f(g(A)) = \{w \in \mathbb{C}: |w| < 2\}$$

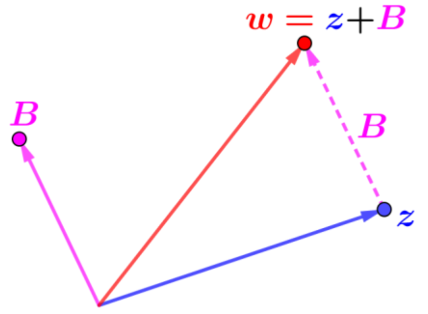


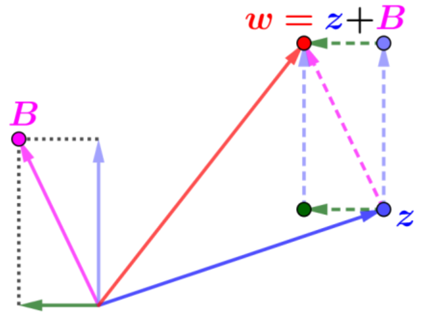
Algunas transformaciones elementales asociadas con funciones analíticas

Traslaciones Dado $B \in \mathbb{C}$, la traslación por el vector B es $\boldsymbol{T}: \boldsymbol{w} = \boldsymbol{z} + \boldsymbol{B}$ definida por la función $f(z) = z + B$ analítica en $\mathbb{C}$. Como la suma de complejos se corresponde con la suma de vectores en el plano, T "desplaza" cada punto z paralelamente a B y en su mismo sentido, la distancia $|B|$.

Si $B = b_1 + ib_2$, T se obtiene también por composición de dos traslaciones paralelas a los ejes coordenados: una traslación horizontal $|b_1|$ unidades, hacia derecha si $b_1 > 0$ o hacia izquierda si $b_1 < 0$, seguida de una traslación vertical $|b_2|$ unidades, hacia arriba si $b_2 > 0$ o hacia abajo

si $b_2 < 0$. El resultado es el mismo si se invierte el orden en esta composición.





Las traslaciones son casos particulares de movimientos rígidos del plano. Actuando sobre un conjunto no alteran proporciones ni ángulos entre curvas, ni forma ni tamaño, sólo cambian la posición en el plano (excepto en el caso trivial de la transformación identidad cuando $B = 0$). La imagen de un conjunto por una traslación es ***congruente*** con el original. Notar que la composición de traslaciones es otra traslación: si se compone la traslación por el vector B con la traslación por el vector E, se obtiene la traslación por el vector $B + E$. En particular, la traslación por el vector B tiene inversa dada por la traslación por el vector $-B$.

Para hallar analíticamente la imagen por $T: w = z + b$ de $A \subseteq \mathbb{C}$ procedemos así:

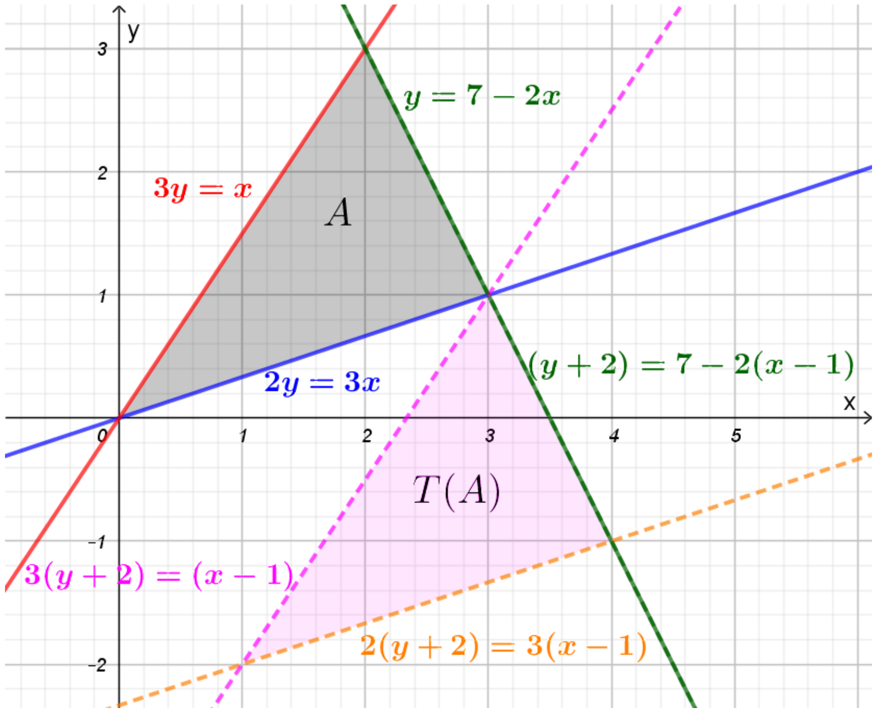
- Si las condiciones que definen A vienen dadas en términos de z, en ellas se reemplaza z por $w - b$, obteniendo las condiciones que determinan $T(A)$.
- Si las condiciones que definen A vienen dadas en términos de x e y, tenemos en cuenta que $T^{-1}: \begin{cases} x = u - b_1 \\ y = v - b_2 \end{cases}$ y en las condiciones que definen el conjunto A se reemplazan respectivamente x por $(u - b_1)$ e y por $(v - b_2)$, obteniendo las condiciones que definen al conjunto imagen $T(A)$.

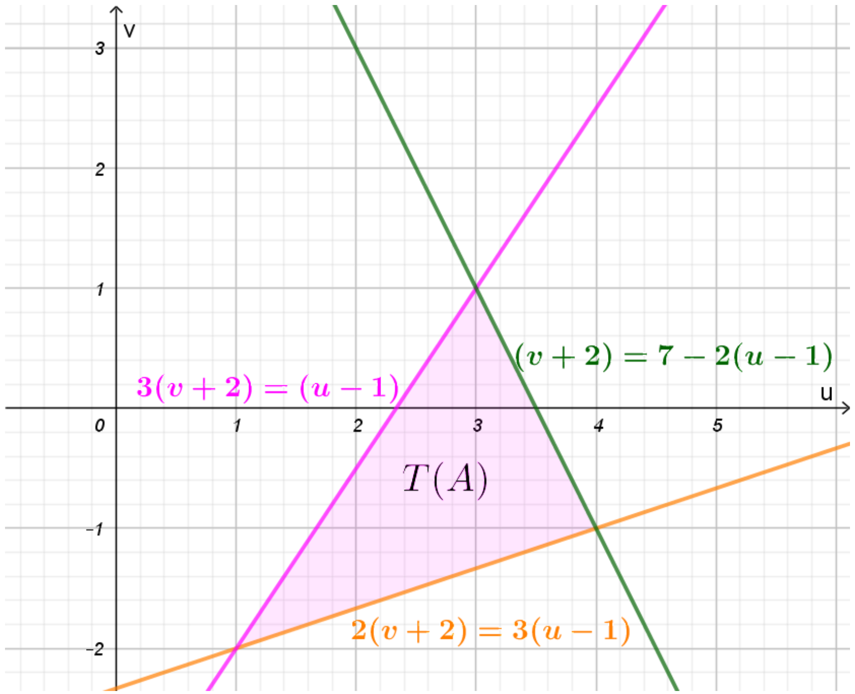
Si pensamos T como transformación del plano en sí mismo, de modo que la imagen de un punto la graficamos en el mismo plano cartesiano xy, entonces lo anterior se traduce en la regla para traslaciones de gráficas en $\mathbb{R}^2$: en cada ecuación o inecuación que define el conjunto a trasladar, se sustituye x por $x - b_1$ e y por $y - b_2$.

__Ejemplo__: sea A el triángulo limitado por las rectas de ecuaciones: $3y = x$, $2y = 3x$, $2x + y = 7$. Hallar las ecuaciones de las rectas que contienen a los lados del triángulo imagen de A por la traslación $T: w = z + 1 - 2i$

Rta Queremos trasladar una unidad hacia la derecha y 2 unidades hacia abajo. Entonces en las ecuaciones de las rectas dadas reemplazamos $x = u - 1$, $y = v - (-2)$

$$3y = x \iff 3(v+2) = (u-1) \iff 3v = u - 7$$
$$2y = 3x \iff 2(v+2) = 3(u-1) \iff 2v = 3u - 7$$
$$2x + y = 7 \iff 2(u-1) + (v+2) = 7 \iff v = 7 - 2u$$





Ejemplo: sea $A = \{x + iy\colon\ x + y \geq 1\}$

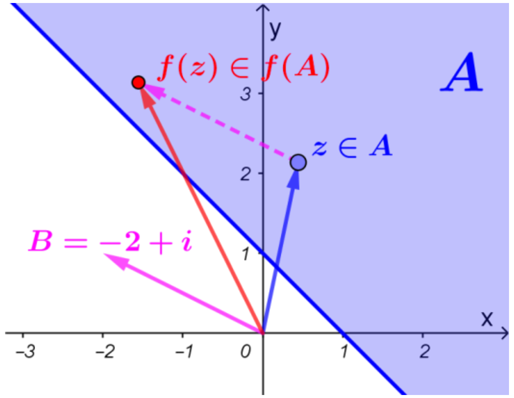
Si $f(z) = z - 2 + i$ entonces $f(A) = \{u + iv \in \mathbb{C}\colon\ v \geq -u\}$.

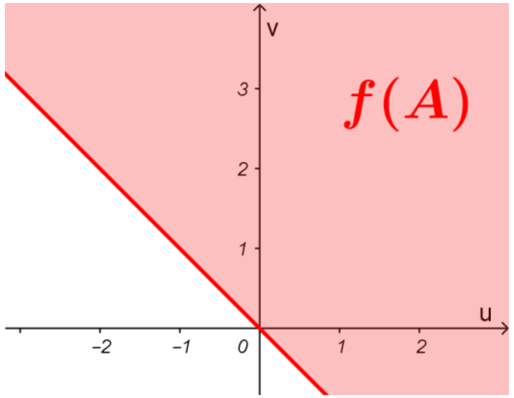
Analíticamente:

$w = z - 2 + i$ así que

$x + iy = z = w + 2 - i = u + iv + 2 - i = (u + 2) + i(v - 1)$

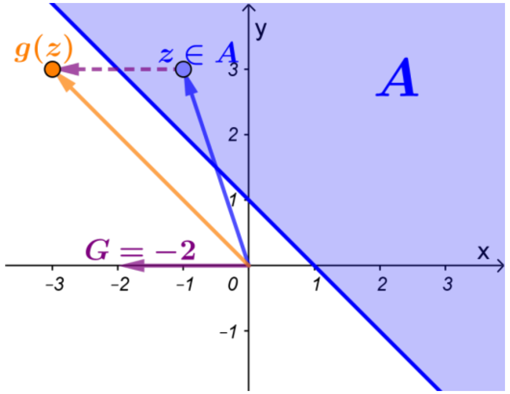
Entonces $T^{-1}\colon \begin{cases} x = u + 2 \\ y = v - 1 \end{cases}$

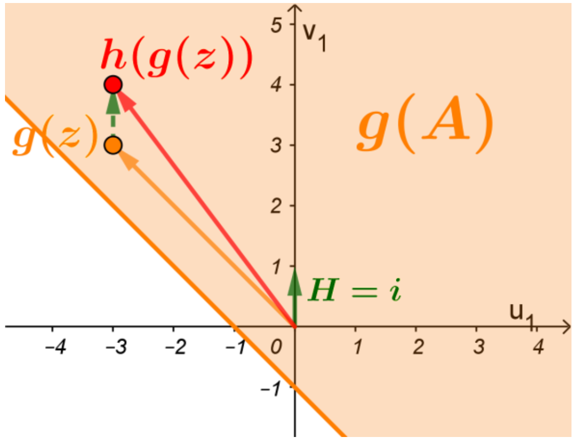


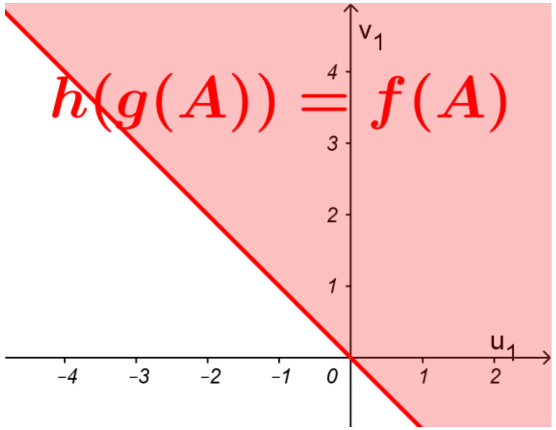


$$z \in A \ \Leftrightarrow x + y \geq 1 \Leftrightarrow u + 2 + v - 1 \geq 1 \ \Leftrightarrow v \geq -u \ \Leftrightarrow w \in f(A)$$

Pensando f como composición de las traslaciones $g(z) = z - 2$, $h(z) = z + i$ paralelas a los ejes coordenados: $f = h \circ g$







Ejercicio: graficar las sucesivas imágenes pensando $f = g \circ h$ (es decir, cambiando el orden de las traslaciones g y h).

Cambios de escala (homotecias)

Dado $a \in \mathbb{R}, a > 0$, se define la homotecia o escalamiento de factor “a” como $T: w = az$. Se tiene:

$$|w| = |az| = |a||z| = a|z|$$
$$\arg(w) = \arg(az) = \arg(a) + \arg(z) = 0 + \arg(z) = \arg(z)$$

de modo que los módulos se multiplican por el factor de escala a y los argumentos permanecen invariantes: esto indica que cada punto z es enviado en otro que yace sobre la misma semirrecta desde el origen por z y su distancia al origen se multiplica por el factor a. El origen permanece fijo. Es decir, el número $a > 0$ actúa como factor de escala. Si $a > 1$ se obtiene una amplificación o magnificación al $100a\%$, en tanto $0 < a < 1$ produce una reducción al $100a\%$.

actuando sobre un conjunto las homotecias preservan proporciones, ángulos entre curvas y conservan la forma pero no el tamaño (excepto cuando $a = 1$). La imagen de un conjunto por una homotecia es ***semejante*** al conjunto de partida. Si por ejemplo se aplica una homotecia a un triángulo isósceles, se obtendrá otro triángulo isósceles, o si se aplica a un rectángulo la longitud de uno de cuyos lados es el doble de la longitud del otro, se obtendrá otro rectángulo con las mismas características.

Notar que la composición de dos homotecias es otra homotecia: si se compone la homotecia de factor a con la homotecia de factor b, se obtiene la homotecia de factor ba. En particular, la homotecia de factor a admite como inversa la homotecia de factor a^{-1}.

Para hallar analíticamente la imagen de $A \subseteq \mathbb{C}$ por $T: w = az$, procedemos así:

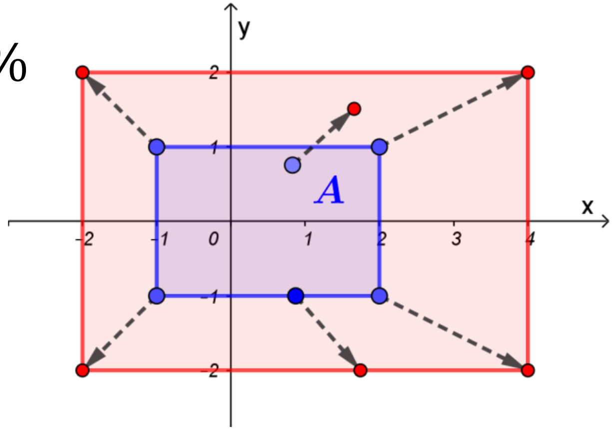
- Si las condiciones que definen A vienen dadas en términos de z, en ellas se reemplaza z por w/a, obteniendo las condiciones que determinan $T(A)$.
- Si las condiciones que definen A vienen dadas en términos de x e y, tenemos en cuenta que $T^{-1}: \begin{cases} x = u/a \\ y = v/a \end{cases}$ y en las condiciones que definen A reemplazamos x por $a^{-1}x$ e y por $a^{-1}y$, obteniendo las condiciones que definen la imagen $T(A)$.
- Observar que las rectas por el origen permanecen invariantes bajo cualquier homotecia.

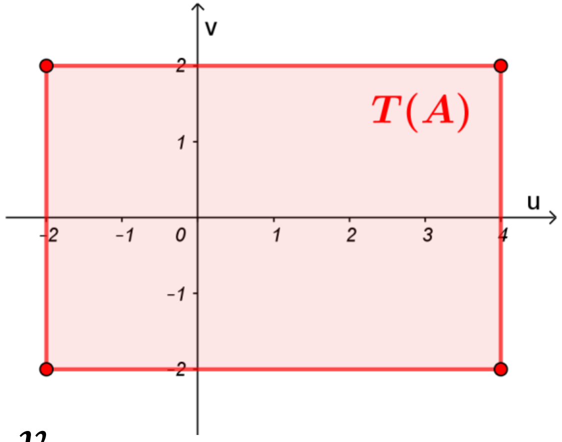
Ejemplo: $f(z) = 2z$ es una ampliación al 200%

- Si $A = \{x + iy: -1 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1\}$

es $f(A) = \{u + iv: -2 \leq u \leq 4, -2 \leq v \leq 2\}$

Analíticamente $T^{-1}: \begin{cases} x = u/2 \\ y = v/2 \end{cases}$



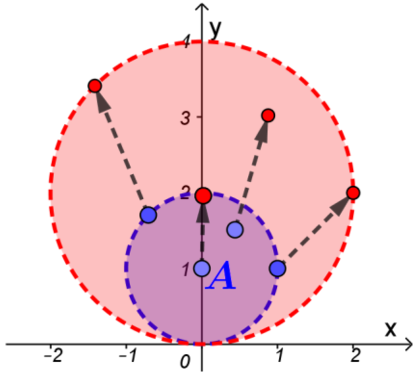


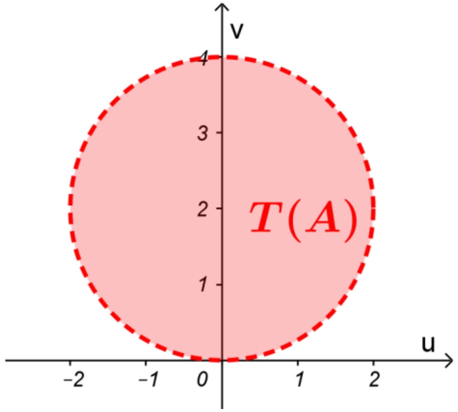
$$z \in A \iff -1 \leq x \leq 2 \,\wedge\, -1 \leq y \leq 1 \iff -1 \leq \frac{u}{2} \leq 2 \,\wedge\, -1 \leq \frac{v}{2} \leq 1 \iff$$
$$\iff -2 \leq u \leq 4 \,\wedge\, -2 \leq v \leq 2 \iff w \in f(A)$$

- Si $B = \{z: |z - i| < 1\}$

es $f(B) = \{w: |w - 2i| < 2\}$

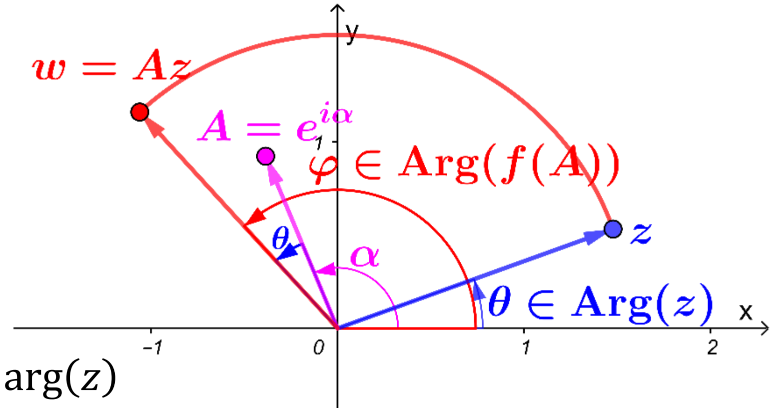
Analíticamente $T^{-1}: z = w/2$





$$z \in A \iff |z - i| < 1 \iff \left|\frac{w}{2} - i\right| < 1 \iff |w - 2i| < 2 \iff w \in f(A)$$

Rotaciones alrededor del origen



Se definen como $T: w = Az$ donde $A \in \mathbb{C}, |A| = 1$ es una constante.

Entonces $A = e^{i\alpha}$ donde $\alpha \in \arg(A)$.

Se tiene, para $z \neq 0$:

$$|w| = |Az| = |A||z| \overbrace{=}^{|A|=1} |z|$$
$$\arg(w) = \arg(Az) = \arg(A) + \arg(z) = \alpha + \arg(z)$$

Luego, conservan módulos pero al argumento se le suma un ángulo constante α. Entonces w se obtiene girando z alrededor del origen un ángulo de magnitud $|\alpha|$, en sentido antihorario si $\alpha > 0$ u horario si $\alpha < 0$. Si $A = 1$ entonces $\alpha = 0$ y se obtiene la identidad.

Observar que el origen es punto fijo. Además, las rotaciones alrededor del origen preservan distancias entre puntos, ángulos entre curvas, forma y tamaño de un conjunto. La imagen de un conjunto bajo una rotación es ***congruente*** con el conjunto original. Por ejemplo, aplicando una tal transformación a un rectángulo cuyos lados miden 1 y 2 unidades, no podrá obtenerse un cuadrado por imagen (la proporción 1:2 original no se conservaría). Un triángulo isósceles no equilátero no podría ser transformado en uno equilátero, un triángulo rectángulo tampoco podrá transformarse en uno no rectángulo, etc.

Notar que la composición de dos rotaciones alrededor del origen es una rotación alrededor del origen: la rotación de ángulo α seguida por la rotación de ángulo β es la rotación de ángulo $\alpha + \beta$. En particular, la inversa de una rotación alrededor del origen por el ángulo $\alpha \in \arg(U)$ es la rotación alrededor del origen (en sentido opuesto) por el ángulo

$$-\alpha \in \arg(U^{-1}), \text{ es decir } T^{-1}: z = U^{-1}w$$

La rotación de ángulo $\alpha = \pi$ (o congruentes mód 2π) es la reflexión en el origen pues $U = e^{i\alpha} = e^{i\pi} = -1$ así que $w = Uz = -z$.

Para hallar analíticamente la imagen de $E \subseteq \mathbb{C}$ por $T: w = Az$ con $|A| = 1$ procedemos así:

- Si las condiciones que definen E vienen dadas en términos de z, en ellas se reemplaza z por w/A, obteniendo las condiciones que determinan $T(E)$.
- Si las condiciones que definen A vienen dadas en términos de x e y, entonces si $A = c + id$, tengamos en cuenta que como $|A| = 1$ es $A^{-1} = \bar{A} = c - id$. Entonces $z = (c - id)(u + iv)$, bastará comparar partes reales y partes imaginarias para obtener expresiones de x e y en términos de u y v, las que reemplazadas en las condiciones que definen E permiten obtener las condiciones que definen la imagen $T(E)$.

Seguramente en Matemática C encararon esto pensando en la siguiente transformación lineal $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$A = e^{i\alpha}$

$$T: u + iv = (\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)(x + iy) = (x\cos\alpha - y\operatorname{sen}\alpha) + i(x\operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha)$$

$$T: \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ así que } T^{-1}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Es evidente que la matriz de rotación $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ de ángulo α tiene por inversa la rotación de ángulo $-\alpha$, así que:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\operatorname{sen}(-\alpha) \\ \operatorname{sen}(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

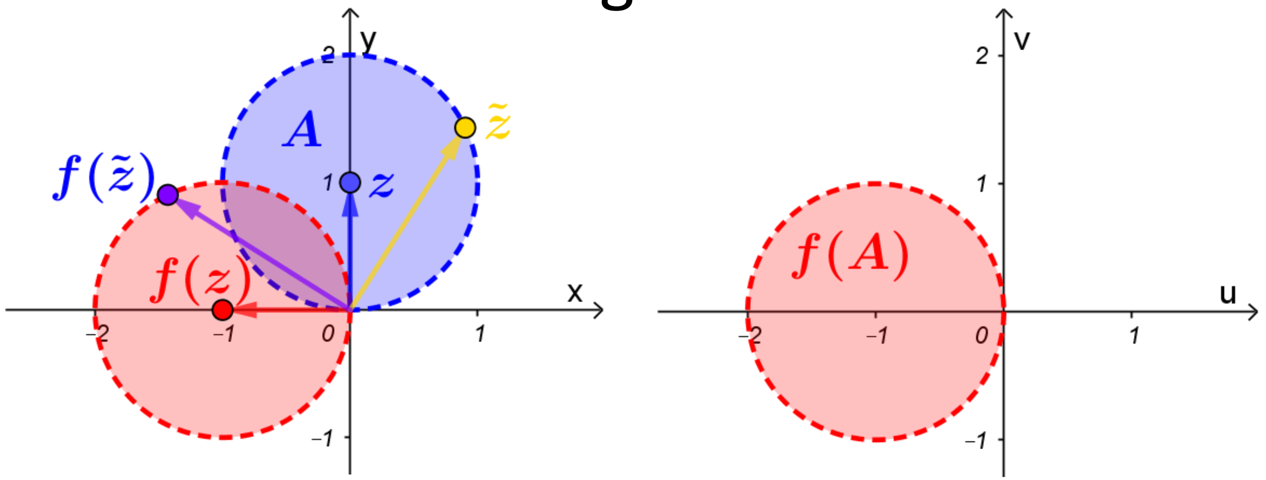
Luego,

$$T^{-1}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Lo bueno de la variable compleja es que permite operar con números (complejos) en lugar de matrices…

Ejemplo: $f(z) = iz$ actúa rotando 90° alrededor del origen en sentido antihorario pues $U = i = e^{i\pi/2}$

así que $\alpha = \operatorname{Arg}(U) = \frac{\pi}{2} > 0$.



- Si $A = \{z \in \mathbb{C}: |z - i| < 1\}$

es $f(A) = \{w \in \mathbb{C}: |w + 1| < 1\}$

Analíticamente $T^{-1}: z = -iw$ así que

$$z \in A \Leftrightarrow |z - i| < 1 \Leftrightarrow |-iw - i| < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |-i(w + 1)| < 1 \Leftrightarrow |w + 1| < 1 \Leftrightarrow w \in T(A)$$

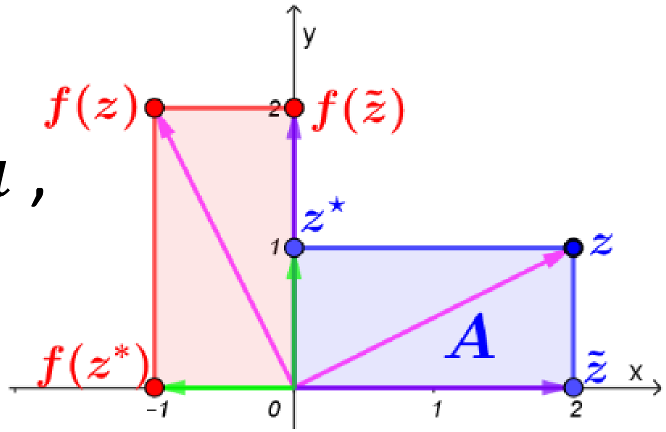
- Si $A = \{x + iy: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$

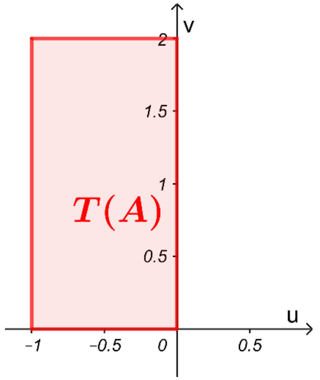
es $f(A) = \{u + iv: -1 \leq u \leq 0, 0 \leq v \leq 2\}$

Analíticamente $T^{-1}: z = -iw$ así que

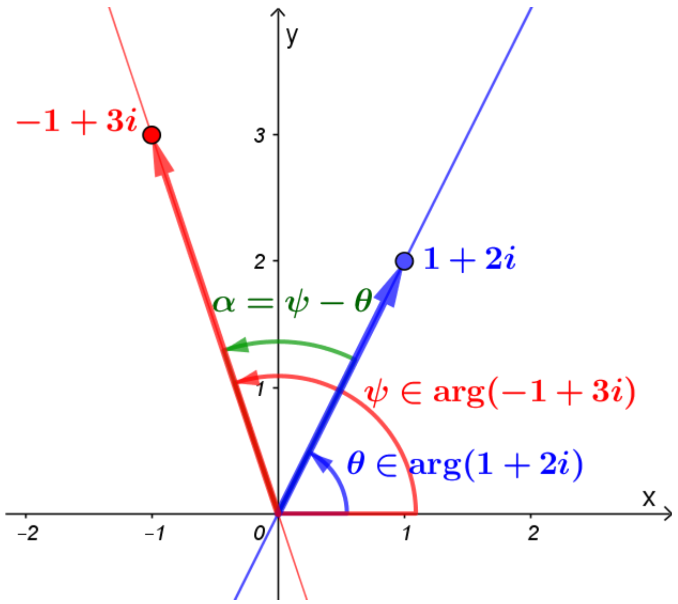
$x + iy = z = -iz = -i(u + iv) = v - iu$,

es decir $T^{-1}: \begin{cases} x = v \\ y = -u \end{cases}$





$$z \in A \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2 \;\; \wedge \;\; 0 \leq y \leq 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0 \leq v \leq 2 \;\; \wedge \;\; 0 \leq -u \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq v \leq 2 \;\; \wedge \;\; -1 \leq u \leq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \;\; w \in T(A)$$



<u>**Ejemplo**</u>: Hallar una transformación analítica T que lleve la recta

$E = \{x + iy : y = 2x\}$ sobre la recta $T(E) = \{u + iv : v = -3u\}$.

Observar que $z_1 = 1 + 2i$ es vector director de la recta $y = 2x$,

mientras que $w_1 = -1 + 3i$ es vector director de la recta $v = -3u$.

Entonces debemos rotar alrededor del origen un ángulo igual a:

$$\alpha \in \overbrace{\arg(w_1)}^{\psi} - \overbrace{\arg(z_1)}^{\theta} = \arg\left(\frac{w_1}{z_1}\right) = \arg\left(\frac{-1+3i}{1+2i}\right) = \arg\left(\frac{(-1+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}\right) =$$

Por ejemplo: $\alpha = \operatorname{Arg}\left(\frac{1+i}{5}\right) = \operatorname{Arg}(1+i) = \frac{\pi}{4}$

Luego, una transformación que logra el objetivo es $w = e^{i\pi/4}z$. Si a continuación cambiamos la escala nos mantenemos en la recta imagen, porque ésta pasa por el origen. Entonces también puede considerarse

$T: w = \sqrt{2}e^{i\pi/4}z$. Es decir $T: w = (1 + i)z$

<u>Ejercicio</u>: comprobar analíticamente el resultado anterior.

<u>Nota</u>: cuando definamos las transformaciones lineales este ejercicio se podrá pantear como

$T: w = Az$ con A una constante compleja, que puede determinarse por ejemplo mediante

$T(1 + 2i) = -1 + 3i$, es decir $(1 + 2i)A = -1 + 3i$. Despejando:

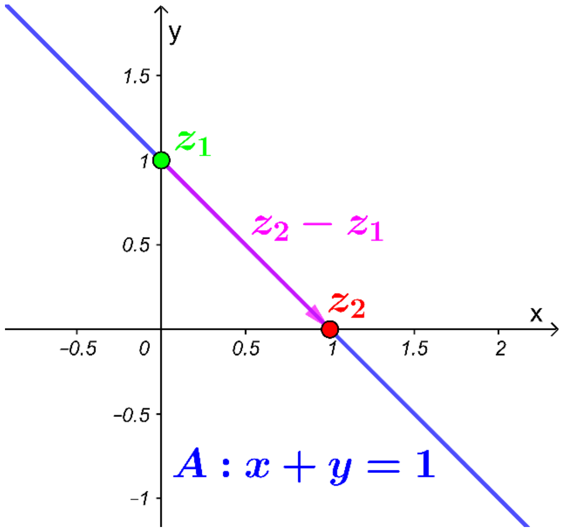
$$A = \frac{-1 + 3i}{1 + 2i} = \frac{(-1 + 3i)(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)} = 1 + i$$

Ejemplo: Hallar una transformación analítica T que lleve una recta sobre otra, por ejemplo

$A = \{x + iy: x + y = 1\}$ sobre $B = \{u + iv: v = 2u - 1\}$.

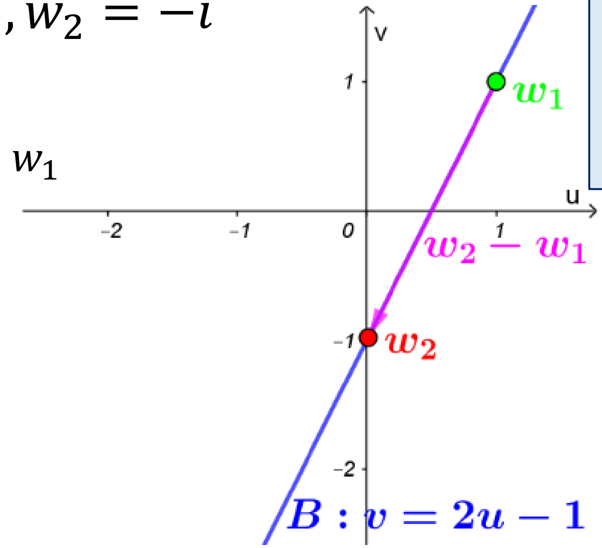
- Se eligen dos puntos cualesquiera en cada recta. En este ejemplo se eligió:

$$z_1 = i\,, z_2 = 1, w_1 = 1 + i\,, w_2 = -i$$



$$T^{**}: w = \left(\frac{w_2 - w_1}{z_2 - z_1}\right)(z - z_1) + w_1$$

$$T^{**}: \frac{w - w_1}{w_2 - w_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$



Entonces:

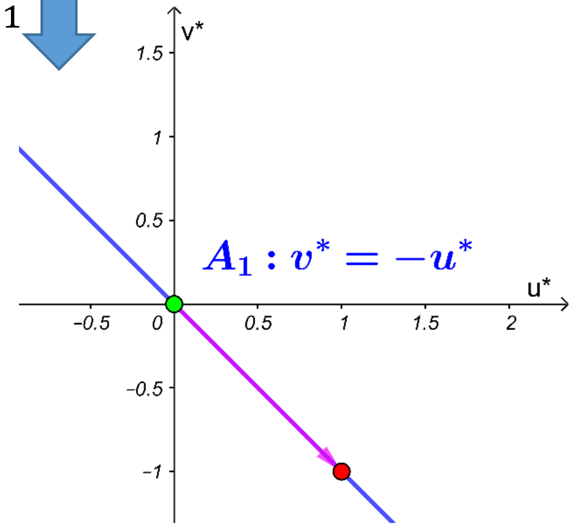
$$\frac{w - 1 - i}{-i - (1 + i)} = \frac{z - i}{1 - i}$$

Despejando:

$$w = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right)z + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

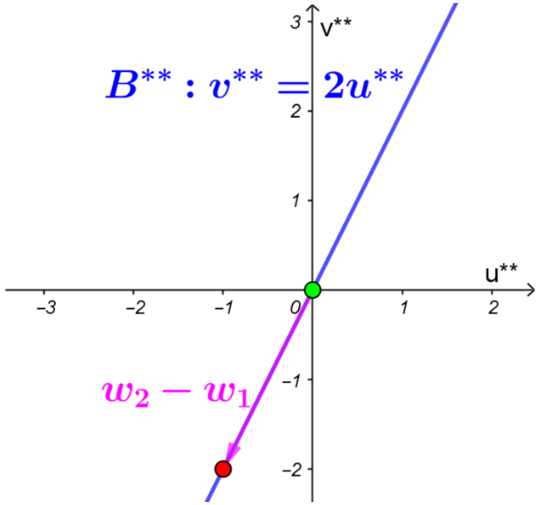
$w^* = z - z_1$

traslación



$$T^{**}: w^{**} = \left(\frac{w_2 - w_1}{z_2 - z_1}\right)w^*$$

Escalamiento y rotación alrededor del origen



$w = w^{**} + w_1$

traslación

Sea L la recta del plano z que pasa por dos puntos dados $z_1 \neq z_2$ y sea L^* la recta del plano w que pasa por dos puntos dados $w_1 \neq w_2$.

Acabamos de probar que existe una transformación T tal que

- $T(z_1) = w_1$ y $T(z_2) = w_2$
- $T(L) = L^*$

También probamos que T puede obtenerse componiendo traslaciones con una rotación. Luego, cada semiplano determinado por L es mapeado por T en cada semiplano determinado por L^*. Cabe preguntarse cuál semiplano en el dominio se mapea sobre cuál del codominio.

<u>Nota</u>: cuando definamos las transformaciones lineales este ejercicio se podrá plantear como

$T: w = Az + B$ con A, B constantes complejas, que puede determinarse enviando dos puntos cualesquiera de L en dos cualesquiera de L^*. Por ejemplo, $z_1 = i$, $z_2 = 1, w_1 = 1 + i$, $w_2 = -i$

Es decir, resolviendo el sistema lineal 2×2 en las incógnitas $A, B \in \mathbb{C}$:

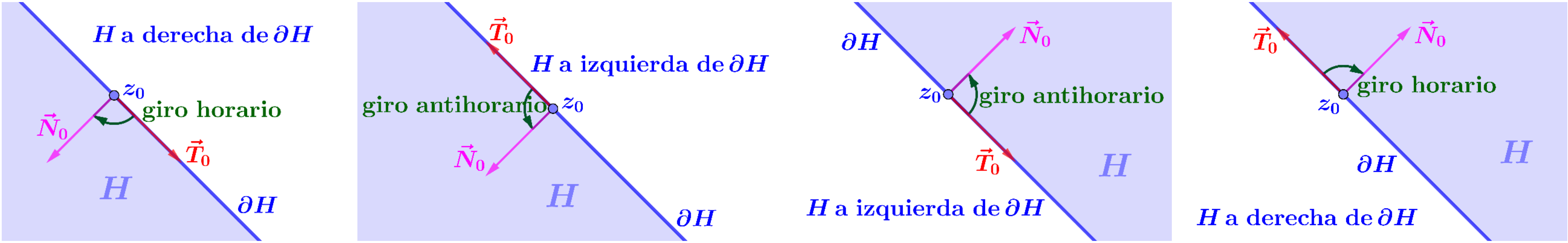
$$\begin{cases} Ai + B & = & 1 + i \\ A1 + B & = & -i \end{cases}$$

Solución: $(A, B) = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

Luego,

$$T: w = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right)z + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

Dado un punto $z_0 \in \partial H$, supongamos orientado el borde ∂H según el vector tangente unitario $\vec{T}_0$. De los dos vectores normales unitarios en z_0 denotemos $\vec{N}_0$ el que apunta hacia el interior de H. Si al llevar $\vec{T}_0$ sobre $\vec{N}_0$ mediante un ángulo recto (90°) el giro es antihorario decimos que el interior de H queda del lado izquierdo de ∂H. En cambio, si el giro es horario decimos que el interior de H queda del lado derecho de ∂H. Las cuatro figuras a continuación aclaran lo anterior cuando H es un semiplano:



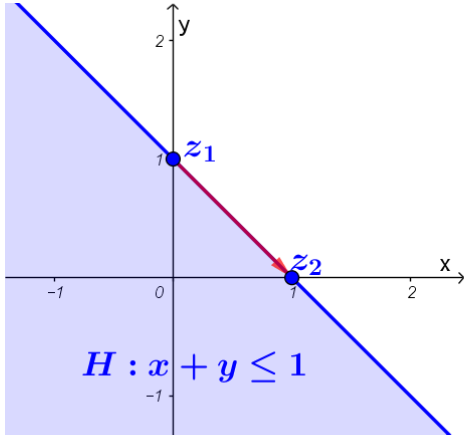
El vector $\vec{T}_0$ establece la orientación de ∂H. Esto puede hacerse eligiendo dos puntos $z_1, z_2 \in \partial H$ suficientemente cercanos y definiendo

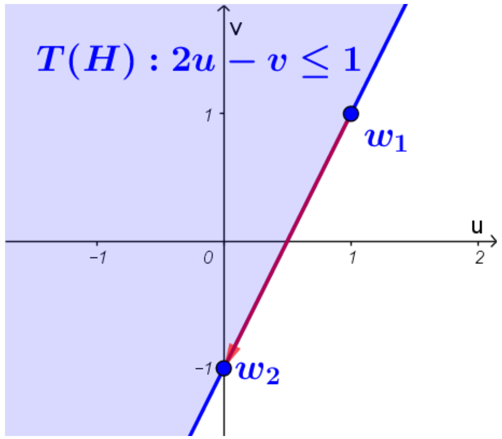
$$\vec{T}_0 = \frac{z_2 - z_1}{|z_2 - z_1|}$$

Al recorrer su frontera ∂H desde z_1 a z_2 (es decir con orientación $\vec{T}_0$) la región H quedará ya sea a izquierda ya sea a derecha de L. Es claro que las traslaciones, las homotecias y las rotaciones no modifican nada de esto. Luego, si una transformación T es composición de tales, al recorrer $\partial T(H)$ desde $w_1 = T(z_1)$ a $w_2 = T(z_2)$ el semiplano imagen $T(H)$ deberá quedar del mismo lado de $\partial T(H)$ que lo que estaba H respecto de ∂H. Si por ejemplo H quedaba a izquierda de ∂H, lo mismo será para $T(H)$ respecto de $\partial T(H)$. El razonamiento es válido en cualquier punto de la frontera (donde ésta sea suave).

Ejemplo: Dado $H=\{x+iy: x+y\leq 1\}$, hallar una transformación T tal que $T(H)=\{u+iv: v\geq 2u-1\}$.

Rta Elegimos $z_1=i$, $z_2=1$, $w_1=1+i$, $w_2=-i$. Notar que si se orienta ∂H desde z_1 a z_2 queda H a su derecha. Y si se orienta $\partial T(H)$ desde w_1 a w_2 queda $T(H)$ a su derecha.





Luego, planteamos:

$$\frac{w-w_1}{w_2-w_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\Leftrightarrow\frac{w-(1+i)}{-i-(1+i)}=\frac{z-i}{1-i}\Leftrightarrow w-1-i=\frac{(z-i)(-1-2i)}{1-i}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow w=\frac{(z-i)(-1-2i)}{1-i}+1+i\Leftrightarrow w=\left(\frac{1-3i}{2}\right)z+\left(\frac{-1+i}{2}\right)$$

Mediante la operación de composición de funciones podemos obtener transformaciones más elaboradas a partir de las elementales definidas anteriormente (traslaciones, cambios de escala y rotaciones alrededor del origen). ¿Qué obtenemos en general al combinarlas?

- Si componemos dos traslaciones obtenemos una traslación.
- Si componemos dos cambios de escala obtenemos un cambio de escala.
- Si componemos dos rotaciones alrededor del origen obtenemos una rotación alrededor del origen.
- Si componemos un cambio de escala con una rotación alrededor del origen:

$$f_1(z) = az, a > 0; \;\; f_2(z) = e^{i\alpha}z; f_2\big(f_1(z)\big) = f_1\big(f_2(z)\big) = ae^{i\alpha}z = Az$$

donde $A = ae^{i\alpha} \neq 0$ es una constante compleja.

Y así podemos seguir combinando. En el ejemplo anterior obtuvimos una transformación del tipo:

$$w = \left(\frac{1-3i}{2}\right)z + \left(\frac{-1+i}{2}\right)$$

En general, si se componen transformaciones elementales (traslaciones, cambios de escala y rotaciones alrededor del origen, se obtienen transformaciones como las que se definen a continuación (lineales).

Transformaciones lineales (TL)

Son las que se pueden escribir como $T: \boldsymbol{w} = \boldsymbol{Az} + \boldsymbol{B}$ donde $A, B \in \mathbb{C}$ son constantes complejas. Es decir las definidas por funciones "lineales" $f(z) = Az + B$. Si $A = 0$ la transformación es trivial (constante) y geométricamente colapsa todo el plano en el único punto $w = B$.

Observar que las elementales (traslaciones, cambios de escala y rotaciones alrededor del origen) son casos particulares de transformaciones lineales. Y componiéndolas obtenemos transformaciones lineales, porque más generalmente la composición de lineales es lineal:

$$T_1: w = Az + B; T_2: w = Cz + D$$
$$T_2 \circ T_1: w = C(Az + B) + D$$
$$T_2 \circ T_1: w = (CA)z + (CB + D)$$

Además, toda transformación lineal no trivial $T: w = Az + B$ es composición de elementales pues:

si $A = ae^{i\alpha} \neq 0$, donde $|A| = a > 0$, $\alpha \in \arg(A)$

definiendo $T_1: w = e^{i\alpha}z$ (rotación), $T_2: w = az$ (cambio de escala), $T_3: w = z + B$ (traslación), resulta:

$$T_3\left(T_2\big(T_1(z)\big)\right) = T_3\left(T_2\big(e^{i\alpha}z\big)\right) = T_3\big(ae^{i\alpha}z\big) = T_3(Az) = Az + B = T(z)$$

Toda transformación lineal no trivial $T: w = Az + B$ con $A \neq 0$ admiten inversa, la cual es también lineal:

$$T^{-1}: z = \frac{w - B}{A} = \left(\frac{1}{A}\right)w + \left(-\frac{B}{A}\right)$$

Para hallar analíticamente la imagen de $E \subseteq \mathbb{C}$ por una transformación lineal no trivial $T: w = Az + B$ con $A \neq 0$, ante todo empleamos la expresión de la inversa

$$z = \underbrace{\frac{w - B}{A}}_{T^{-1}(w)}$$

y procedemos así:

- Si las condiciones que definen A en el plano dominio vienen dadas en términos de z, en ellas se reemplaza z por $T^{-1}(w)$, obteniendo las condiciones que determinan $T(A)$.
- Si las condiciones que definen A en el plano dominio vienen dadas en términos de las componentes x e y de z, entonces a partir de la igualdad

$$x + iy = z = T^{-1}(w) = \frac{(u + iv) - B}{A}$$

comparando partes reales entre sí y partes imaginarias entre sí, se obtienen expresiones para x y y en términos de u y v,

$$T^{-1}: \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$$

las que reemplazadas en las condiciones que definen A permiten obtener las condiciones que definen la imagen $T(A)$ en el plano imagen w.

¿Cuántos puntos fijos posee una TL?

- Podría no tener ninguno (ejemplo: traslación por el vector $B \neq 0$).
- Podría tener exactamente uno (ejemplo: homotecia de factor $a \neq 1$; rotación de ángulo $\alpha \neq 0$).
- Si posee al menos dos puntos fijos $z_1 \neq z_2$ entonces: $\begin{cases} Az_1 + B = z_1 \\ Az_2 + B = z_2 \end{cases}$

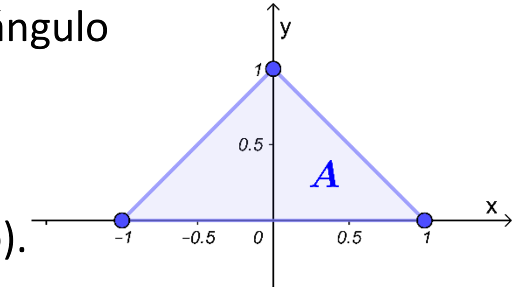
Restando miembro a miembro la segunda ecuación de la primera en dicho sistema resulta: $(A-1)\underbrace{(z_2 - z_1)}_{\neq 0} = 0.$

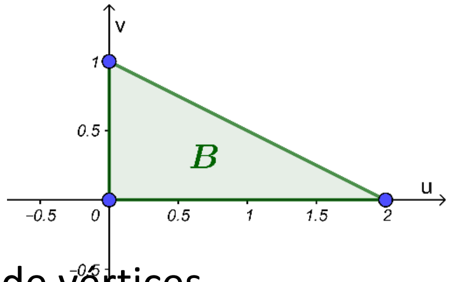
Así que $A = 1$, que reemplazado en el sistema da $B = 0$. Luego $w = z$ es la identidad y todos los puntos son fijos.

Como ya observamos antes, las transformaciones lineales <u>elementales</u> preservan las proporciones y la forma de un conjunto aunque no necesariamente conservan distancias, posición o tamaño. Por lo tanto, **las transformaciones lineales no triviales T , siendo composición de lineales elementales, también gozan de esta propiedad, por lo que $T(A)$ ha de ser un conjunto semejante a A (misma forma y proporciones, no necesariamente conservando tamaño o posición). También continúa válida la observación acerca de la posición de A respecto de la frontera orientada ∂A y lo correspondiente en la imagen por T cuando la orientación de $\partial T(A)$ es la inducida por la de ∂A.**

<u>**Ejemplo**</u>: Analice si existe alguna transformación lineal T tal que $T(A) = B$.

a) si A es el triángulo de vértices $z_1 = -1, z_2 = 1, z_3 = i$ y B el triángulo de vértices $w_1 = 0, w_2 = 2, w_3 = i$?





No, porque los dos triángulos,

si bien son rectángulos, no son semejantes (A es isósceles pero B no).

b) si A es el rectángulo de vértices $z_1 = -1, z_2 = 3, z_3 = 2 + 2i, z_4 = -1 + 2i$ y B el rectángulo de vértices

$w_1 = 0, w_2 = 1, w_3 = 1 + 3i, w_4 = 3i$?

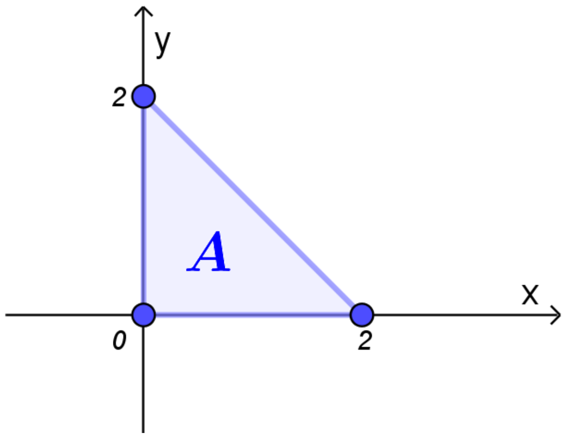
No, porque A y B no son semejantes. La relación entre lado corto y largo en A es 2:4 en cambio en B es 1:3).

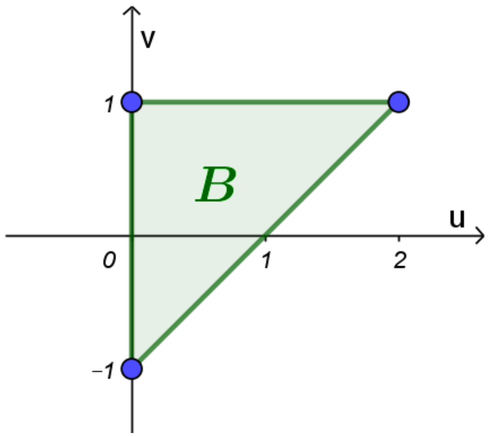
c) Si A es el triángulo de vértices $z_1 = 0, z_2 = 2, z_3 = i$ y B el triángulo de vértices $w_1 = 0, w_2 = -2, w_3 = i$?

No: el ángulo recto ocurre en el origen en el dominio así que lo mismo ha de ocurrir en la imagen. Luego $T(0) = 0$ o sea $T(z_1) = w_1$. Además, el lado más corto se debe mapear en el más corto de la imagen, así que $T(i) = i$, es decir $T(z_3) = w_3$. Entonces T sería lineal con al menos dos puntos fijos así que tendría que ser la identidad. Pero esto no puede ser porque la identidad mapearía A sobre sí mismo y no sobre B.

Ejemplo: Hallar una transformación lineal T tal que $T(A) = B$

a) A el triángulo de vértices $z_1 = 0, z_2 = 2, z_3 = 2i$ y B el triángulo de vértices $w_1 = i, w_2 = 2 + i, w_3 = -i$.





Observar que $f(z) = \bar{z} + i$ verifica $f(A) = B$ pero no es lineal (de hecho, no es analítica). En cambio, $T: w = -iz + i$ (rotación alrededor del origen de ángulo 90° en sentido horario, seguida de una traslación una unidad hacia arriba) es lineal y cumple $T(A) = B$.

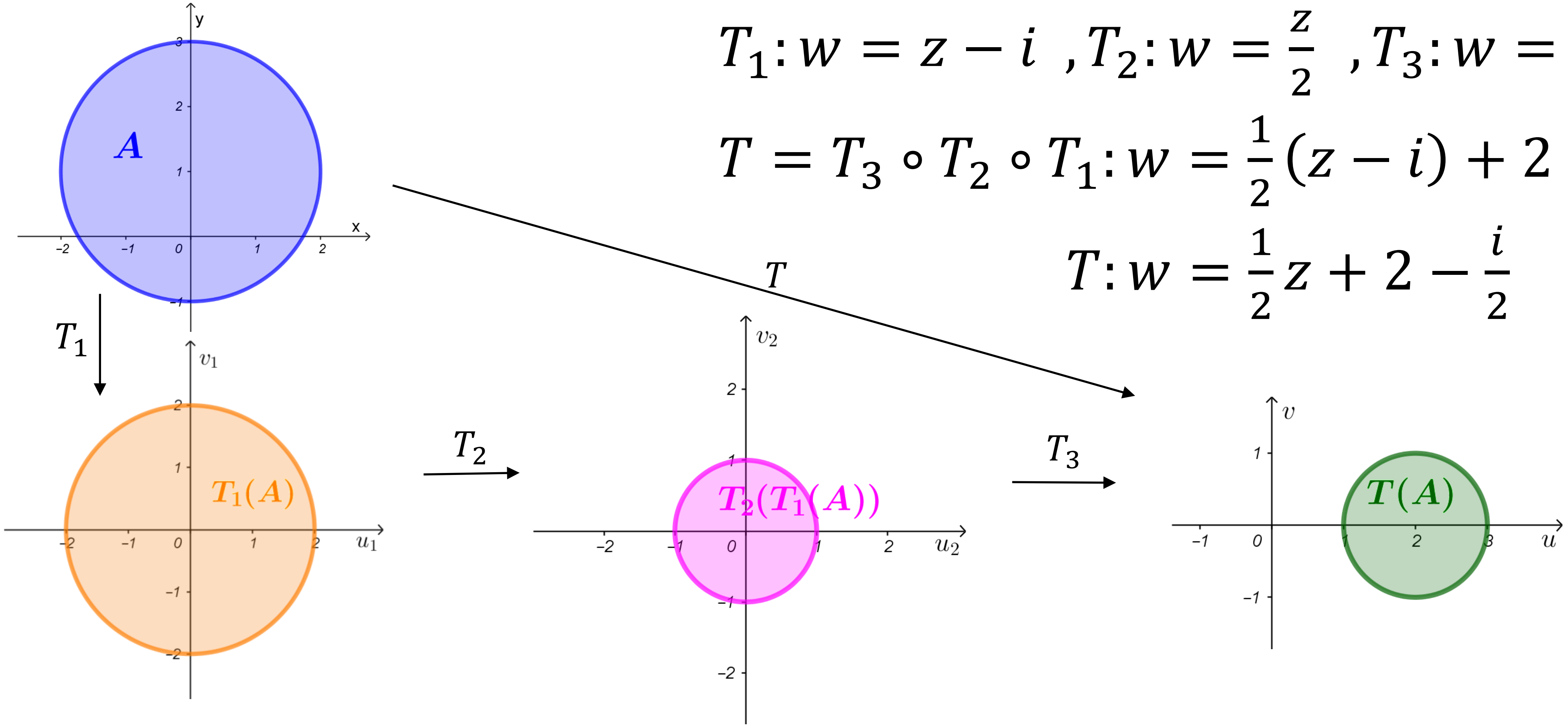
b) $A = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| \leq 2\}, B = \{w \in \mathbb{C} : |w - 2| \leq 1\}$

Los conjuntos A y B son semejantes. Para hallar T procedemos en etapas:

$$T_1 : w = z - i \;\; , T_2 : w = \frac{z}{2} \;\; , T_3 : w = z + 2$$

$$T = T_3 \circ T_2 \circ T_1 : w = \frac{1}{2}(z - i) + 2$$

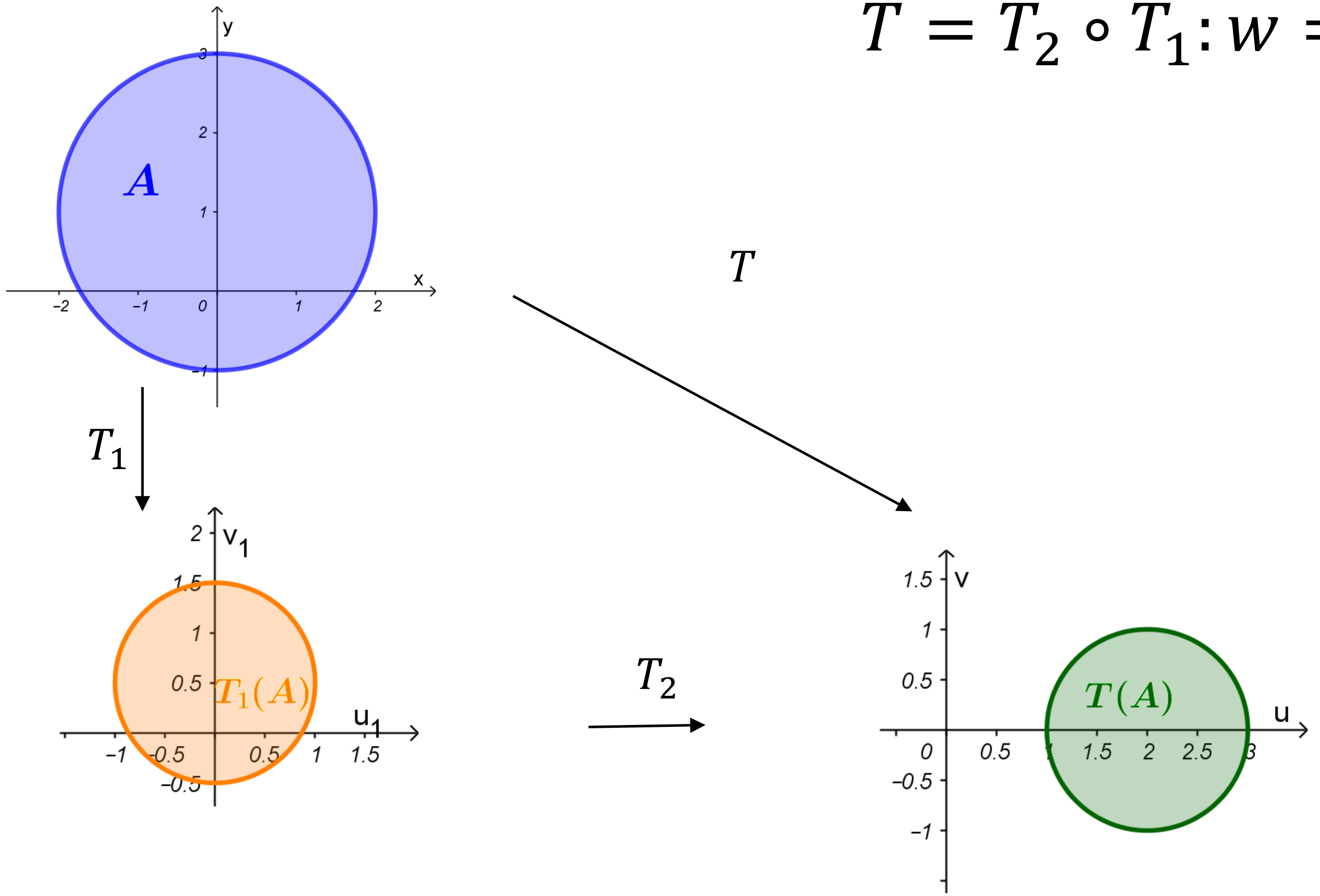
$$T : w = \frac{1}{2} z + 2 - \frac{i}{2}$$



Otra posibilidad es la siguiente:

$$T_1 : w = \frac{1}{2} z, T_2 : w = z + {\color{red}2 - \frac{i}{2}},$$

$$T = T_2 \circ T_1 : w = \frac{1}{2} z + {\color{red}2 - \frac{i}{2}}$$



Notar que T_2 se obtuvo comparando los centros de la circunferencia dada y su imagen. Es decir, teníamos que trasladar el centro $z = i/2$ hacia el nuevo centro $w = 2$. Entonces el vector de traslación tenía que ser $w - z = {\color{red}2 - \frac{i}{2}}$

<u>Ejemplo</u>: Hallar la imagen de

$$A = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| \leq 1 \ \wedge \ \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) \leq 0\}$$

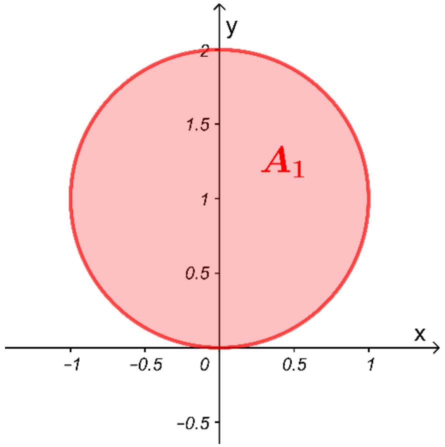
Por la transformación lineal $T: w = (1 - i)z - 1 + 2i$

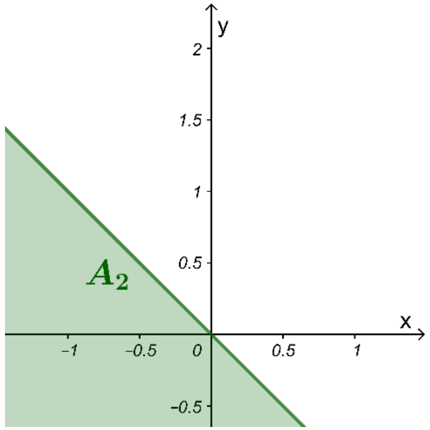
<u>Rta</u>

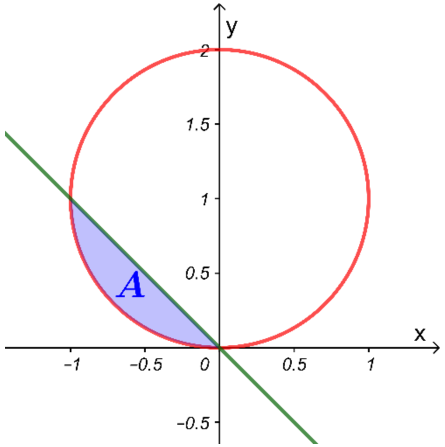
$$T^{-1}: z = \frac{w + 1 - 2i}{1 - i}$$

$$A = A_1 \cap A_2$$

$$A_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| \leq 1\} \qquad A_2 = \{x + iy \in \mathbb{C} : x + y \leq 0\}$$





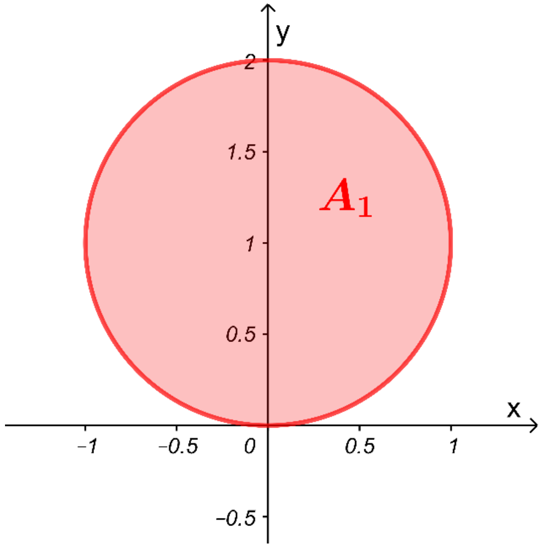


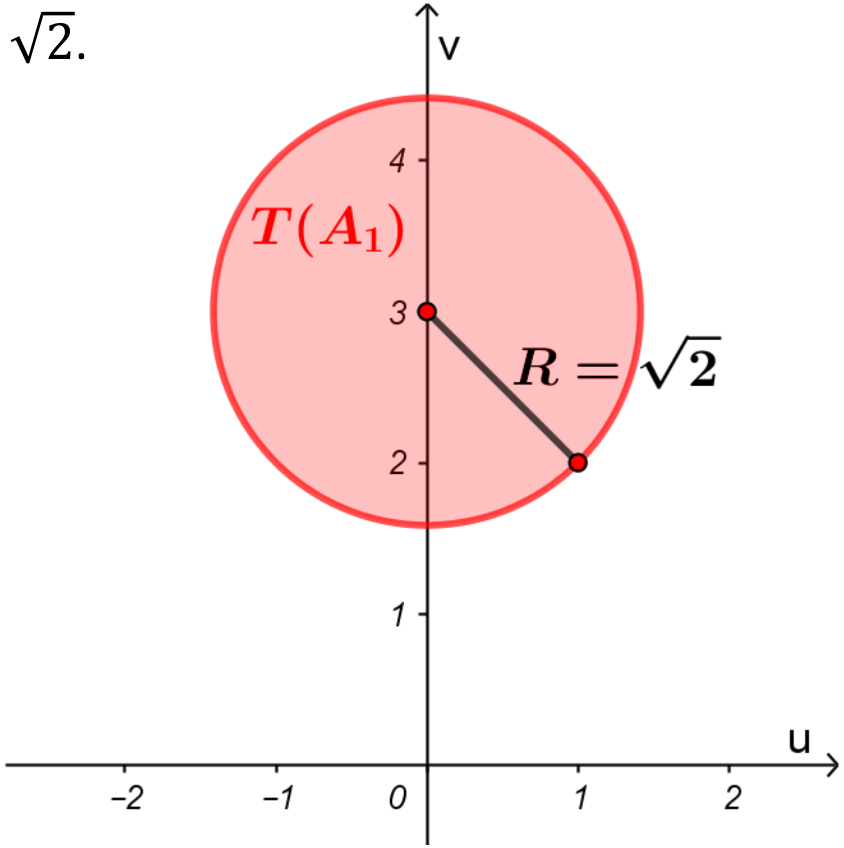
Como T es inyectiva: $T(A) = T(A_1) \cap T(A_2)$.

A_1 es un disco cerrado centrado en i de radio 1.

$$z \in A_1 \Leftrightarrow |z-i| \leq 1 \Leftrightarrow \left|\frac{w+1-2i}{1-i} - i\right| \leq 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left|\frac{w+1-2i-i(1-i)}{1-i}\right| \leq 1 \Leftrightarrow \left|\frac{w-3i}{1-i}\right| \leq 1 \Leftrightarrow \frac{|w-3i|}{|1-i|} \leq 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |w-3i| \leq |1-i| \Leftrightarrow |w-3i| \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow w \in T(A_1)$$

Luego, $T(A_1)$ es un disco cerrado centrado en $3i$ de radio $\sqrt{2}$.





A_2 es un semiplano cerrado definido a partir de las componentes x, y de z. Debemos expresarlas en términos de las componentes u, v de w:

$$z = \frac{w+1-2i}{1-i} = \frac{u+iv+1-2i}{1-i} = \frac{(u+1)+i(v-2)}{1-i} =$$

$$= \frac{[(u+1)+i(v-2)](1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{u-v+3}{2} + i\,\frac{u+v-1}{2}$$

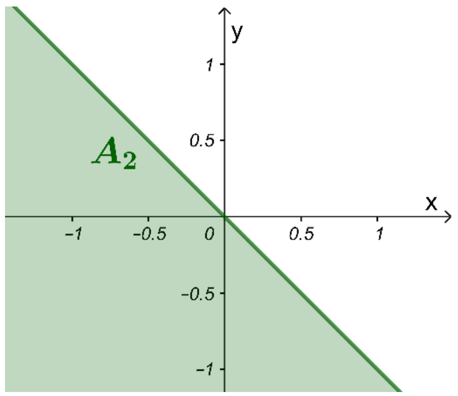
Entonces:

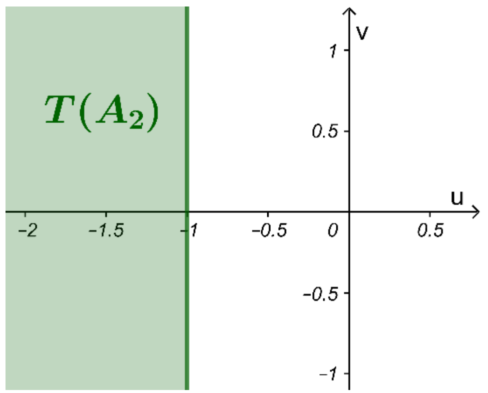
$$T^{-1}\colon \begin{cases} x = \dfrac{u-v+3}{2} \\ y = \dfrac{u+v-1}{2} \end{cases}$$

Luego,

$$z \in A_2 \Leftrightarrow x+y \leq 0 \Leftrightarrow \frac{u-v+3}{2} + \frac{u+v-1}{2} \leq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{2u+2}{2} \leq 0 \Leftrightarrow u+1 \leq 0 \Leftrightarrow u \leq -1$$

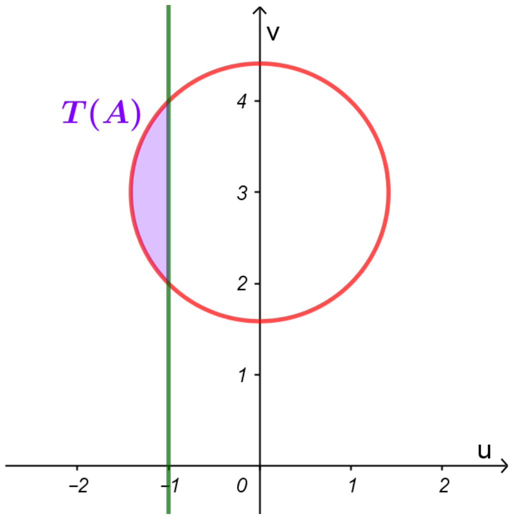
Luego, $T(A_2)$ es el semiplano cerrado centrado $u \leq -1$.





Por lo tanto,

$$T(A) = T(A_1) \cap T(A_2) = \{u + iv \in \mathbb{C} : \ u^2 + (v-3)^2 \leq 2 \ \wedge \ u \leq -1\}$$



Ejemplo: Hallar analíticamente la imagen por $T: w = (1-i)z - 1$ del conjunto dado.

a) $A_1 = \{x + iy \in \mathbb{C} : y \geq x\}$

b) $A_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z+i| \leq 1\}$

c) $A = \{x + iy \in \mathbb{C} : \ x^2 + (y+1)^2 \leq 1 \quad \wedge \ y \geq x + 2\}$

Rta Sean $z = x + iy, w = u + iv$

$$T^{-1}: z = \frac{w+1}{1-i}$$

$$x + iy = z = \frac{w+1}{1-i} = \frac{u + iv + 1}{1-i} = \frac{(u+1) + iv}{1-i} =$$

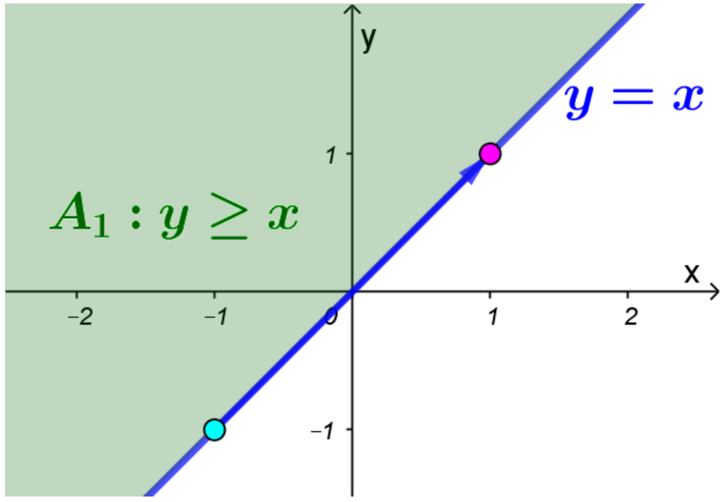
$$= \frac{[(u+1) + iv](1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{(u - v + 1) + i(u + v + 1)}{2}$$

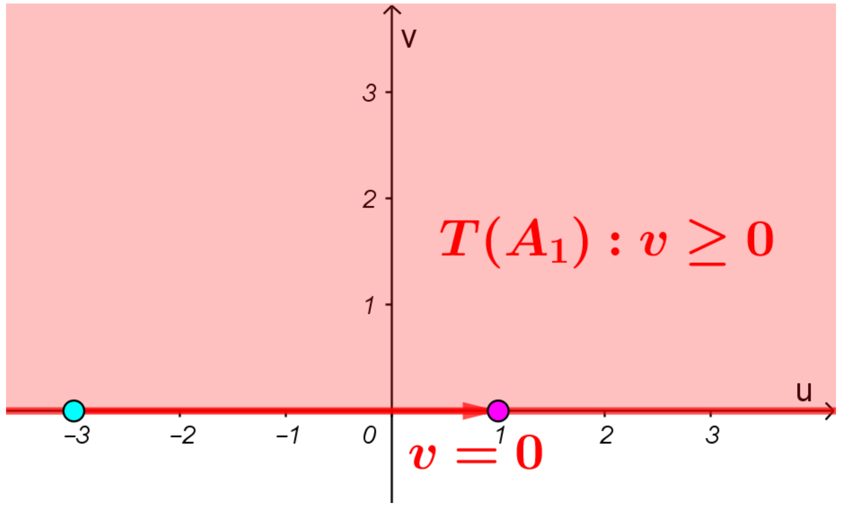
$$T^{-1}: \begin{cases} x = \dfrac{u - v + 1}{2} \\ y = \dfrac{u + v + 1}{2} \end{cases}$$

a) $A_1 = \{x + iy \in \mathbb{C} : y \geq x\}$

$$z \in A_1 \Leftrightarrow y \geq x \Leftrightarrow \frac{u+v+1}{2} \geq \frac{u-v+1}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow u+v+1 \geq u-v+1 \Leftrightarrow v \geq 0$$

$$T(A_1) = \{u + iv \in \mathbb{C} : v \geq 0\}$$





b) $A_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z+i| \leq 1\}$

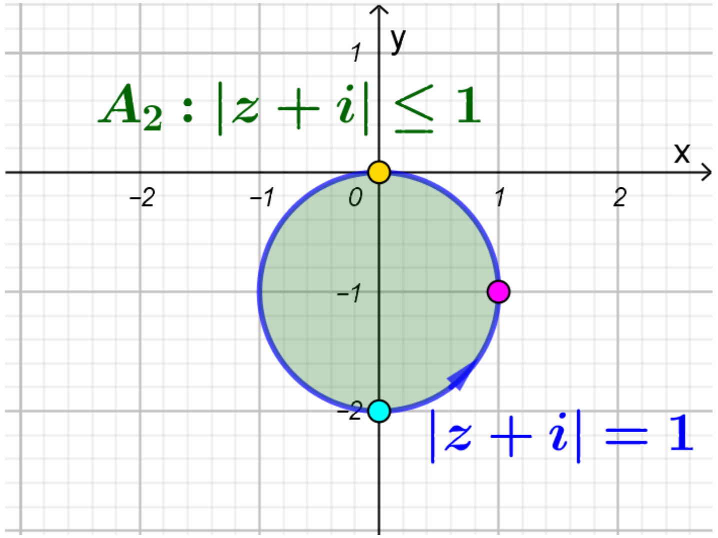
$$z \in A_2 \Leftrightarrow |z+i| \leq 1 \Leftrightarrow \left|\frac{w+1}{1-i} + i\right| \leq 1 \Leftrightarrow$$

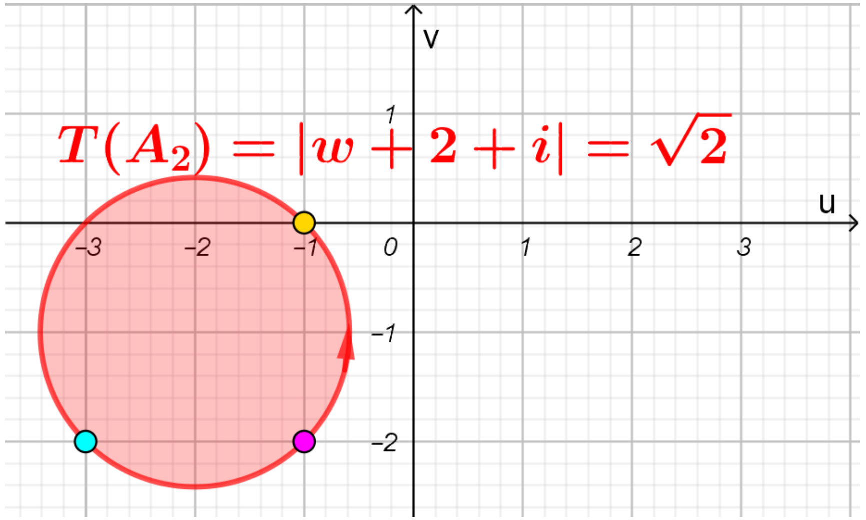
$$\Leftrightarrow \left|\frac{w+1+i(1-i)}{1-i}\right| \leq 1 \Leftrightarrow \left|\frac{w+2+i}{1-i}\right| \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |w+2+i| \leq |1-i| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |w+2+i| \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow w \in T(A_2)$$

$$T(A_2) = \left\{w \in \mathbb{C} : |w+2+i| \leq \sqrt{2}\right\}$$

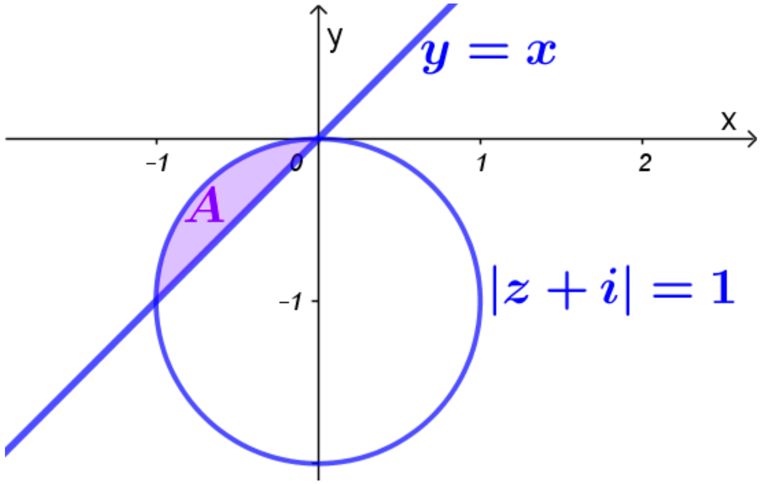


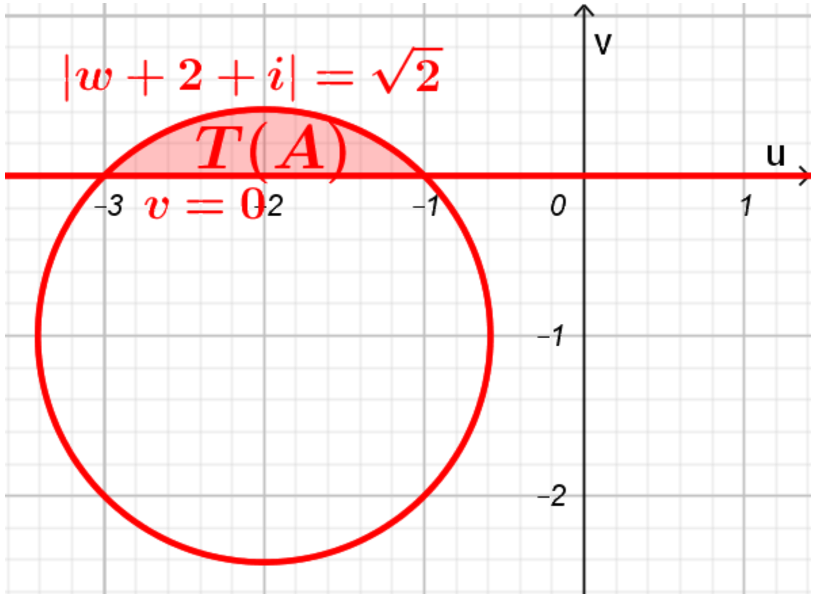


c) $A = \{x + iy \in \mathbb{C} : \ x^2 + (y+1)^2 \leq 1 \ \wedge \ y \geq x\}$

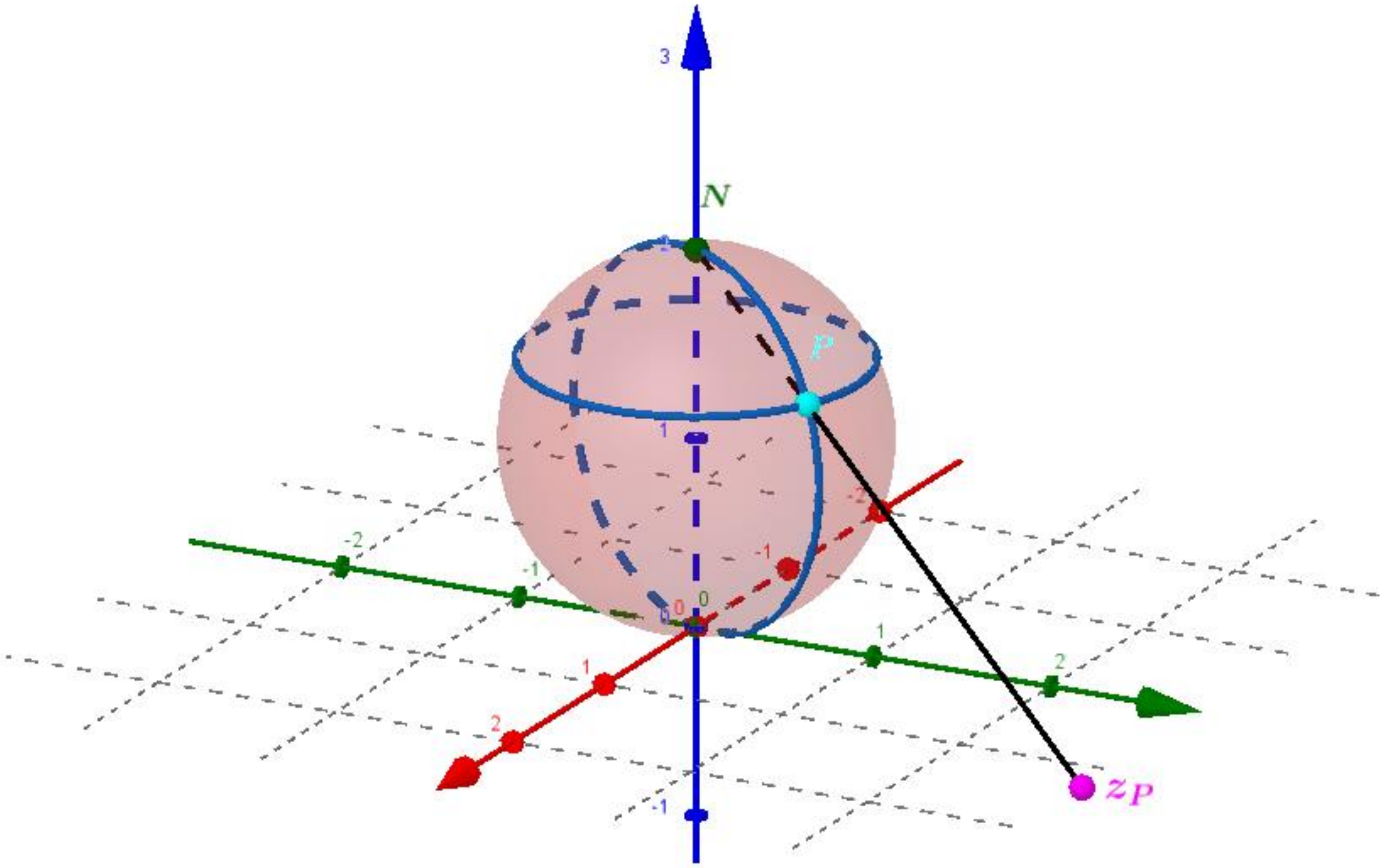
Es claro que $A = A_1 \cap A_2$. Como T es inyectiva:

$$T(A) = T(A_1) \cap T(A_1) = \{u + iv \in \mathbb{C} : v \geq 0 \ \wedge \ (u+2)^2 + (v+1)^2 \leq 2\}$$





Proyección estereográfica - Punto del infinito



En la figura anterior se muestra una correspondencia uno a uno entre los puntos de una esfera (excepto el “polo norte” N) y el plano xy (que interpretamos como el plano complejo):

Si P es un punto de la esfera, $P \neq N$, la recta por N y P interseca al plano xy en un punto $z_P(a, b)$, que interpretamos como el número complejo $a + ib$.

A medida que z_P se aleja del origen (en cualquier dirección) en en plano xy, el punto P se mueve sobre la esfera acercándose arbitrariamente a N (sin alcanzarlo). Esto sugiere agregar a $\mathbb{C}$ un punto $\infty \notin \mathbb{C}$, llamado punto del infinito, que esté arbitrariamente alejado del origen. El conjunto $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ se llama plano complejo extendido.

La topología de $\mathbb{C}^*$puede definirse trasladando la de la esfera en $\mathbb{R}^3$. Los entornos de puntos de $\mathbb{C}$ son los usuales. Los entornos del punto del infinito ∞ se corresponden con los de N. En particular, si $R > 0$, el conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$ que consta de todos los complejos cuya distancia al origen supera R es un entorno (reducido) de ∞.

Podemos ahora extender la noción de límite para contemplar el punto del infinito.

- Si ∞ es punto de acumulación del dominio de $f(z)$ y $L \in \mathbb{C}$:
  $\lim_{z \to \infty} f(z) = L \iff f(z)$ se acerca arbitrariamente a L con tal que $|z|$ sea suficientemente grande. Equivalentemente: $\lim_{|z| \to \infty} |f(z) - L| = 0.$

<u>**Ejemplo**</u>:

1) $\lim_{z \to \infty} \frac{1}{z} = 0$ pues $\lim_{|z| \to \infty} \left|\frac{1}{z}\right| = \lim_{|z| \to \infty} \frac{1}{|z|} = 0$

2) $\lim_{z \to \infty} \frac{iz^2 - z}{z^2 + i} = i$ pues $\lim_{z \to \infty} \frac{iz^2 - z}{z^2 + i} = \lim_{z \to \infty} \frac{z^2\left(i - \frac{1}{z}\right)}{z^2\left(1 + \frac{i}{z}\right)} = \lim_{z \to \infty} \frac{i - \frac{1}{z}}{1 + \frac{i}{z}} = i$

3) $\lim_{z \to \infty} e^{-z}$ no es 0. En efecto, calculemos el límite por algunos caminos:

$$\lim_{\substack{z \to \infty \\ Im(z) = 0 \\ Re(z) > 0}} e^{-z} = \lim_{x \to \infty} e^{-x} = 0 \qquad \lim_{\substack{z \to \infty \\ Im(z) = 0 \\ Re(z) < 0}} e^{-z} = \lim_{x \to -\infty} e^{-x} = \infty$$

$\lim_{\substack{z \to \infty \\ Re(z) = 0 \\ Im(z) > 0}} e^{-z} = \lim_{y \to \infty} e^{-iy}$ oscilante (e^{-iy} “gira” sobre la circunferencia centrada en el origen de radio 1).

- Si ∞ es punto de acumulación del dominio de $f(z)$:

  $\lim_{z \to \infty} f(z) = \infty \Leftrightarrow f(z)$ se aleja arbitrariamente del origen, con tal que $|z|$ sea suficientemente grande. Equivalentemente: $\lim_{|z| \to \infty} |f(z)| = \infty$.

Ejemplo:

1) $\lim_{z \to \infty} (iz - z^3 + 2) = \infty$ pues

$$\lim_{|z| \to \infty} |iz - z^3 + 2| = \lim_{|z| \to \infty} |z|^3 \overbrace{\left|\frac{i}{z^2} - 1 + \frac{2}{z^3}\right|}^{\to 1} = \infty$$

2) $\lim_{z \to \infty} \frac{5z - iz^3 + 1}{z^2 - 2i} = \infty$ pues

$$\lim_{|z| \to \infty} \left|\frac{5z - iz^3 + 1}{z^2 - 2i}\right| = \lim_{|z| \to \infty} \left|\frac{z^3\left(\frac{5}{z^2} - i + \frac{1}{z^3}\right)}{z^2\left(1 - \frac{2i}{z}\right)}\right| = \lim_{|z| \to \infty} \frac{\overbrace{|z|}^{\to \infty} \overbrace{\left|\frac{5}{z^2} - i + \frac{1}{z^3}\right|}^{\to 1}}{\underbrace{\left|1 - \frac{2i}{z}\right|}_{\to 1}} = \infty$$

- Si z_0 es punto de acumulación del dominio de $f(z)$:

  $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty \Leftrightarrow f(z)$ se aleja arbitrariamente del origen, con tal que z sea suficientemente cercano a z_0 pero distinto de z_0.

  Equivalentemente: $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$.

<u>**Ejemplo**</u>:

$$\lim_{z\to i} \frac{z^2}{iz^3-1} = \infty \text{ pues } \lim_{z\to i} \left|\frac{z^2}{iz^3-1}\right| = \lim_{z\to i} \frac{\overbrace{|z|^2}^{\to 1}}{\underbrace{|iz^3-1|}_{\to 0}} = \infty$$

Inversión

La función $f\colon \mathbb{C}-\{0\} \to \mathbb{C}-\{0\}$, $f(z)=\frac{1}{z}$ define la transformación $T\colon w=\frac{1}{z}$ llamada **inversión**.

Se extiende naturalmente a $\mathbb{C}^*$ definiendo $T(0)=\infty$ y $T(\infty)=0$, resultando una biyección. Además, T es inversa de sí misma

$$T^{-1}\colon z=\frac{1}{w}$$

En términos de las componentes:

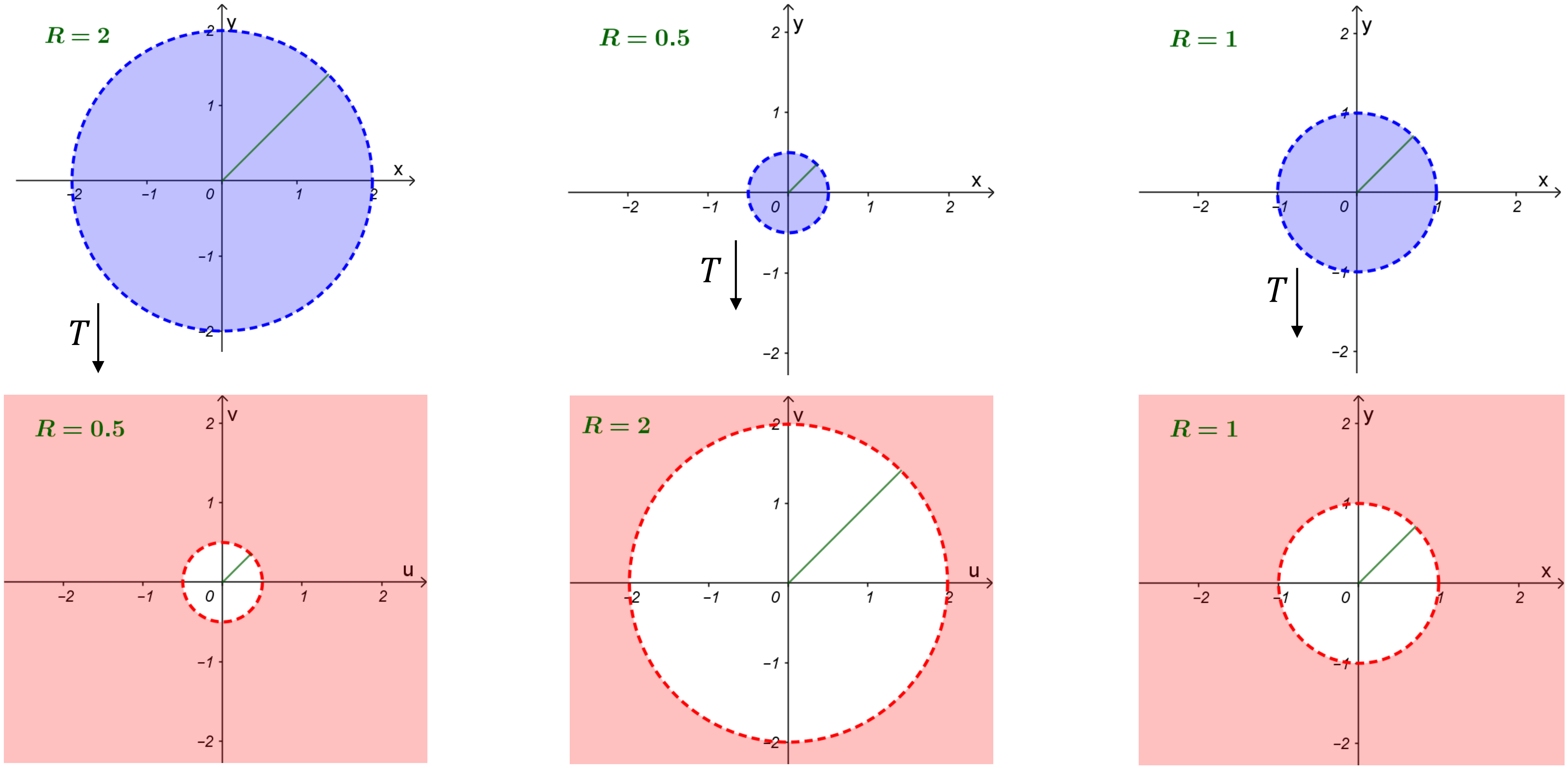
$$x+iy=z=\frac{1}{w}=\frac{1}{u+iv}=\frac{u-iv}{(u+iv)(u-iv)}=\frac{u-iv}{u^2+v^2}=\frac{u}{u^2+v^2}-i\,\frac{v}{u^2+v^2}$$

Así que

$$T^{-1}\colon \begin{cases} x=\dfrac{u}{u^2+v^2} \\ y=\dfrac{-v}{u^2+v^2} \end{cases}$$

Sea $A = \{z \in \mathbb{C}^* : |z| < R\}$ donde $R > 0$. Se tiene:

$$z \in A \Leftrightarrow |z| < R \Leftrightarrow \left|\frac{1}{w}\right| < R \Leftrightarrow \frac{1}{|w|} < R \Leftrightarrow |w| > \frac{1}{R}$$



En general:

$$|z| < R \Leftrightarrow \left|\frac{1}{w}\right| < R \Leftrightarrow \frac{1}{|w|} < R \Leftrightarrow |w| > \frac{1}{R}$$

$$|z| = R \Leftrightarrow \left|\frac{1}{w}\right| = R \Leftrightarrow \frac{1}{|w|} = R \Leftrightarrow |w| = \frac{1}{R}$$

$$|z| > R \Leftrightarrow \left|\frac{1}{w}\right| > R \Leftrightarrow \frac{1}{|w|} > R \Leftrightarrow |w| < \frac{1}{R}$$

¿Cómo actúa la inversión sobre otros conjuntos?

Consideremos rectas y circunferencias del plano z. Ambas clases de curvas responden a la siguiente ecuación general: $Ax^2 + Ay^2 + Cx + Dy + E = 0$

Si $A \neq 0$ la ecuación describe circunferencias. Si $A = 0$ pero $CD \neq 0$, la ecuación describe rectas.

Para hallar la imagen de tales curvas por la inversión, basta ver cómo se transforma la ecuación general anterior:

$$Ax^2 + Ay^2 + Cx + Dy + E = 0 \Leftrightarrow A\left(\left(\frac{u}{u^2+v^2}\right)^2 + \left(\frac{-v}{u^2+v^2}\right)^2\right) + C\left(\frac{u}{u^2+v^2}\right) + D\left(\frac{-v}{u^2+v^2}\right) + E = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A\left(\frac{u^2}{(u^2+v^2)^2} + \frac{v^2}{(u^2+v^2)^2}\right) + C\left(\frac{u}{u^2+v^2}\right) - D\left(\frac{v}{u^2+v^2}\right) + E = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{A + Cu - Dv + E(u^2+v^2)}{u^2+v^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Eu^2 + Ev^2 + Cu - Dv + A = 0$$

Como esta última ecuación es del mismo tipo que la original, esto muestra la siguiente propiedad de la inversión.

Propiedad: La inversión $T\colon w = \frac{1}{z}$ mapea

a) rectas del plano z en rectas o circunferencias del plano w.

b) Circunferencias del plano z en rectas o circunferencias del plano w.

Más detalladamente:

- L es recta $\wedge$ $z = 0 \in L$ $\Leftrightarrow A = 0$ $\wedge$ $E = 0$ $\Leftrightarrow$ $T(L) = \{(u, v)\colon Eu^2 +$

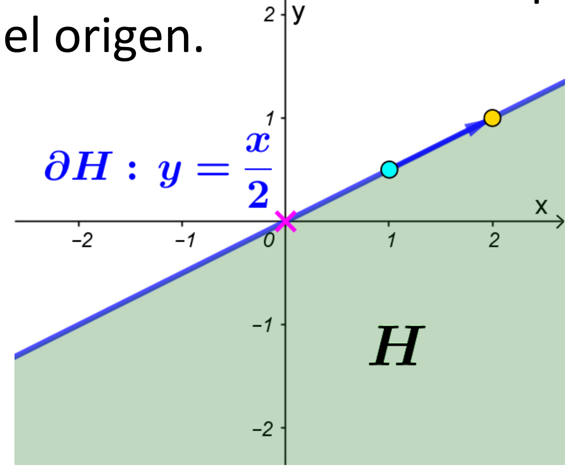
Ejemplo: hallar la imagen de $H = \{x + iy \in \mathbb{C}: y \leq x/2\}$ por la inversión $T: w = 1/z$. ¿Cuál es la imagen de la frontera ∂H?

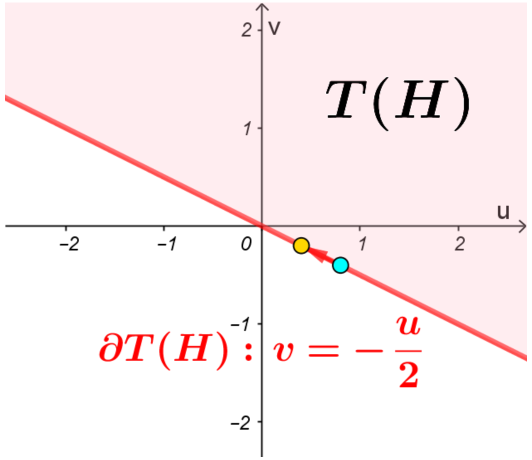
Rta

$$z \in H \Leftrightarrow y \leq \frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{-v}{u^2+v^2} \leq \frac{1}{2}\frac{u}{u^2+v^2} \Leftrightarrow -v \leq \frac{1}{2}u \Leftrightarrow v \geq -\frac{1}{2}u$$

$$z \in \partial H \Leftrightarrow y = \frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{-v}{u^2+v^2} = \frac{1}{2}\frac{u}{u^2+v^2} \Leftrightarrow -v = \frac{1}{2}u \Leftrightarrow v = -\frac{1}{2}u$$

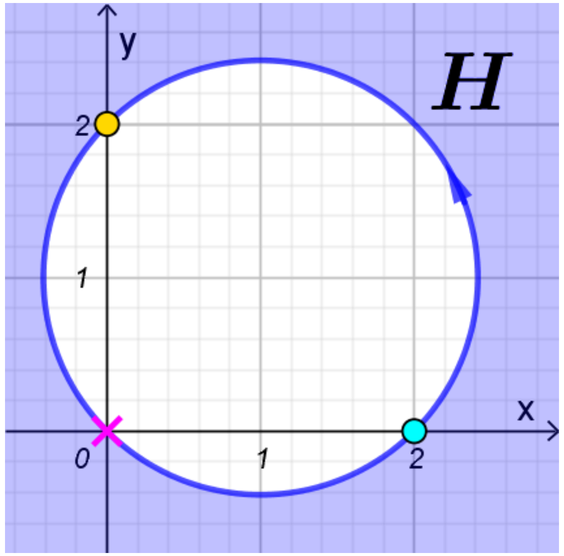
Notar: $z = 0 \in \partial H$ así que $w = \infty \in \partial T(H)$. Entonces $\partial T(H)$ no está acotado. Luego, $\partial T(H)$ es una recta. Además, ∂H no está acotado así que $z = \infty \in \partial H$. Entonces $w = 0 \in \partial T(H)$. Luego, $\partial T(H)$ es recta por el origen.





Ejemplo: hallar la imagen de $H=\{z\in\mathbb{C}: |z-1-i|\geq\sqrt{2}\}$ por la inversión. ¿Cuál es la imagen de la frontera ∂H?

Rta



$z\in H \Leftrightarrow |z-1-i|\geq\sqrt{2} \Leftrightarrow \left|\frac{1}{w}-1-i\right|\geq\sqrt{2} \Leftrightarrow \left|\frac{1-(1+i)w}{w}\right|\geq\sqrt{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{|1-(1+i)w|}{|w|}\geq\sqrt{2} \Leftrightarrow |1-(1+i)w|\geq\sqrt{2}|w| \Leftrightarrow$

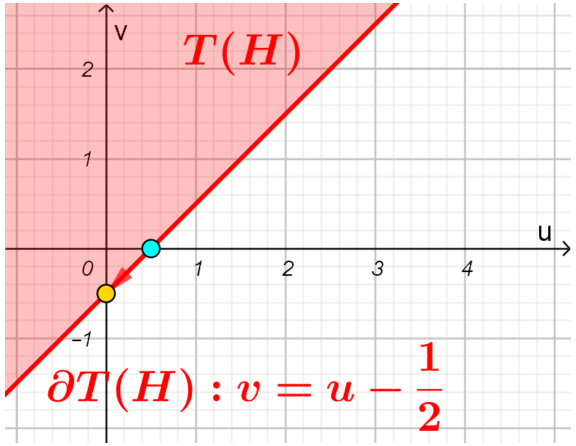
$\Leftrightarrow\ |1-(1+i)(u+iv)|\geq\sqrt{2}|u+iv| \Leftrightarrow |1-(u+iv+iu-v)|\geq\sqrt{2}|u+iv| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (v-u+1)^2+(-u-v)^2\geq 2(u^2+v^2) \Leftrightarrow$

$v^2+u^2+1-2uv+2v-2u+u^2+v^2+2uv\geq 2u^2+2v^2 \Leftrightarrow v\geq u-\frac{1}{2}$

Es claro que

$z\in\partial H \Leftrightarrow v=u-\frac{1}{2}$



Notar: $z=0\in\partial H$ así que $w=\infty\in\partial T(H)$. Entonces $\partial T(H)$ no está acotado. Luego, $\partial T(H)$ es una recta. Además, ∂H está acotado así que $z=\infty\notin\partial H$.

Entonces $w=0\notin\partial T(H)$. Luego, $\partial T(H)$ es recta que no pasa por el origen.

Ejemplo: hallar la imagen de $H = \{x + iy \in \mathbb{C}: x + y \geq -1\}$ por la inversión. ¿Cuál es la imagen de la frontera ∂H?

Rta

$$z \in H \Leftrightarrow x + y \geq -1 \Leftrightarrow \frac{u}{u^2+v^2} + \frac{-v}{u^2+v^2} \geq -1 \Leftrightarrow u - v \geq -(u^2+v^2)$$

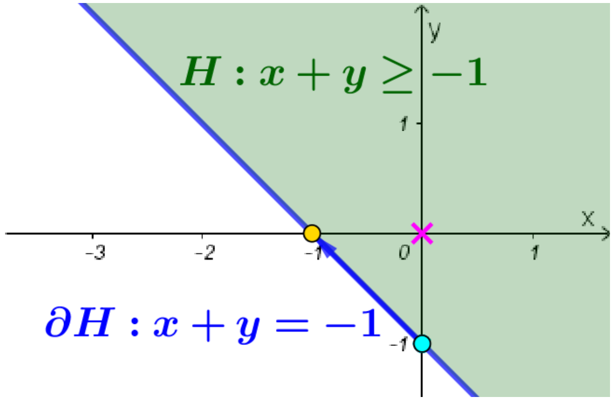
$$\Leftrightarrow u^2 + v^2 + u - v \geq 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(v - \frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left|w - \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

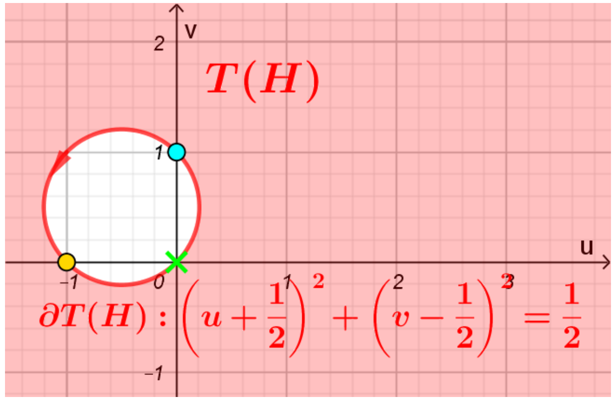
$$z \in \partial H \Leftrightarrow \left|w - \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Notar: $z = 0 \notin \partial H$ así que $w = \infty \notin \partial T(H)$. Entonces $\partial T(H)$ está acotado. Luego, $\partial T(H)$ es una circunferencia. Además, ∂H no está acotado así que $z = \infty \in \partial H$. Entonces $w = 0 \in \partial T(H)$. Luego, $\partial T(H)$ es circunferencia por el origen.

Además, $z = 0 \in H$ de modo que $w = \infty \in T(H)$.

Entonces $T(H)$ no está acotado.





Ejemplo: hallar la imagen de $H = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1 - i| \geq 1\}$ por la inversión. ¿Cuál es la imagen de la frontera ∂H?

Rta

$$z \in H \Leftrightarrow |z - 1 - i| \geq 1 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{w} - 1 - i\right| \geq 1 \Leftrightarrow \left|\frac{1 - (1+i)w}{w}\right| \geq 1 \Leftrightarrow$$

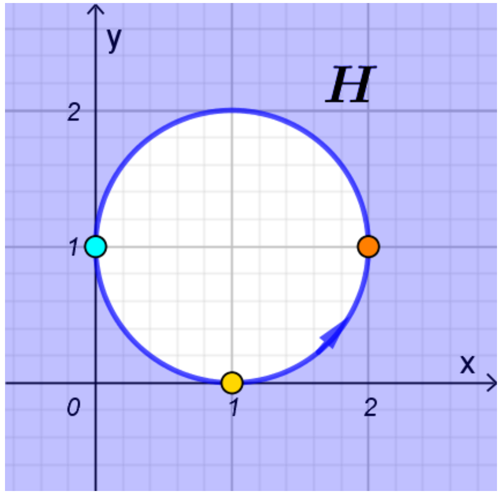
$$\Leftrightarrow \frac{|1 - (1+i)w|}{|w|} \geq 1 \Leftrightarrow |1 - (1+i)w| \geq |w| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ |1 - (1+i)(u+iv)| \geq |u+iv| \Leftrightarrow |1 - (u + iv + iu - v)| \geq |u+iv| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (v - u + 1)^2 + (-u - v)^2 \geq u^2 + v^2 \Leftrightarrow$$

$$v^2 + u^2 + 1 - 2uv + 2v - 2u + u^2 + v^2 + 2uv \geq u^2 + v^2 \Leftrightarrow u^2 + v^2 - 2u + 2v \geq -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (u-1)^2 + (v+1)^2 \geq 1 \Leftrightarrow \ |w - 1 + i| \geq 1$$



Es claro que

$$z \in \partial H \Leftrightarrow v = u - \frac{1}{2}$$

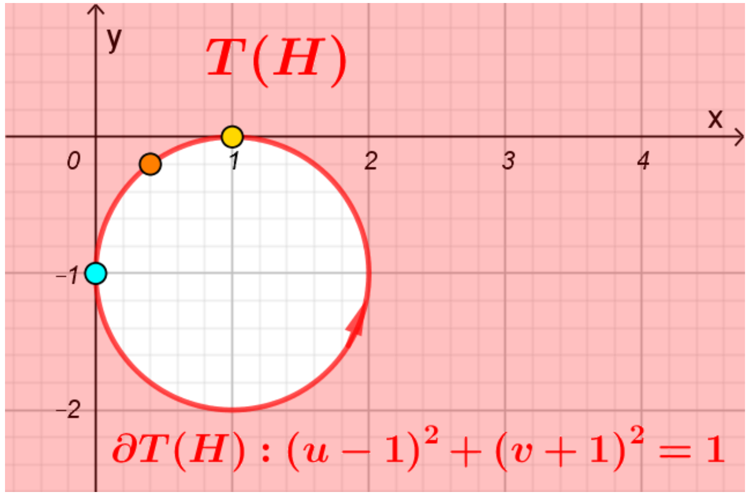
Notar: $z = 0 \notin \partial H$ así que $w = \infty \notin \partial T(H)$. Entonces $\partial T(H)$ está acotado.

Luego, $\partial T(H)$ es una circunferencia. Además, ∂H está acotado

así que $z = \infty \notin \partial H$. Entonces $w = 0 \notin \partial T(H)$. Luego, $\partial T(H)$ es circunferencia

Que no pasa por el origen.

Además, $z = 0 \in H$ de modo que $w = \infty \in T(H)$.Entonces $T(H)$ no está acotado.



<u>Transformación lineal fraccionaria</u>

Sea llama **transformación lineal fraccionaria** (TLF) a toda transformación de la forma $T: w = \frac{Az+B}{Cz+D}$ donde $A, B, C, D \in \mathbb{C}$ son constantes tales que $AD - BC \neq 0$.

Si bien no está definida cuando $z = -D/C$, se extiende naturalmente a $\mathbb{C}^*$ definiendo $T\left(-\frac{D}{C}\right) = \infty$ y $T(\infty) = \lim_{z\to\infty} \frac{Az+B}{Cz+D} = \frac{A}{C}$ resultando una biyección.

<u>**Observación**</u>: Si $AD - BC = 0$ la expresión $\frac{Az+B}{Cz+D}$ resultaría constante.

En efecto: C, D no pueden ser ambos nulos porque el denominador sería idénticamente nulo. Distingamos dos posibilidades:

- $C = 0$: entonces $D \neq 0$ y como $AD - BC = 0$ entonces $AD = 0$.

  Luego: $\frac{Az+B}{Cz+D} = \frac{B}{D}$
- $C \neq 0$: se tiene $Az + B = \frac{A}{C}(Cz + D) + B - \frac{AD}{C} = \frac{A}{C}(Cz + D) + \frac{\overbrace{BC-AD}^{=0}}{C}$
- Entonces: $\frac{Az+B}{Cz+D} = \frac{\frac{A}{C}(Cz+D)}{Cz+D} = \frac{A}{C}$

Observar:

Si $C = 0, D = 1$ la TLF es lineal.

Si $A = D = 0, B = C = 1$, la TLF es la inversión.

Si componemos una transformación lineal no trivial con la inversión obtenemos una TLF pues:

$$T_1:\ w = Az + B \text{ con } A \neq 0 \qquad\qquad T_2: w = 1/z$$

$$T_2 \circ T_1: w = \frac{1}{Az + B} \qquad\qquad T_1 \circ T_2: w = \frac{A}{z} + B = \frac{Bz + A}{z}$$

<u>Propiedad</u>: Toda transformación lineal fraccionaria es composición de transformaciones lineales con la inversión.

<u>Dem</u> Si $C = 0$ la TLF es obviamente lineal:

$$\frac{Az + B}{Cz + D} = \frac{A}{D} z + \frac{B}{D}$$

Si $C \neq 0$, sean

$$T_1: w = Cz + D \quad ; \quad T_2: w = \frac{1}{z} \quad ; \quad T_3: w = \left(\frac{BD - AC}{C}\right) z + \frac{A}{C}$$

Se tiene:

$$\frac{Az + B}{Cz + D} = \frac{\frac{A}{C}(Cz + D) + \frac{BD - AC}{C}}{Cz + D} = \left(\frac{BD - AC}{C}\right) \frac{1}{Cz + D} + \frac{A}{C} = (T_3 \circ T_2 \circ T_1)\,(z)$$

La siguiente propiedad es muy fácil de probar.

Propiedad:

a) La composición de transformaciones lineales fraccionarias es una transformación lineal fraccionaria.
b) Toda TLF posee inversa, la cual es también una TLF.

Ejemplo: Dada la TLF $T: w = \frac{iz+1}{z-2i}$ mostrar que T^{-1} es una TLF.

Rta

$$w = \frac{iz+1}{z-2i} \Leftrightarrow w(z-2i) = iz+1 \Leftrightarrow wz - 2iw = iz + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow wz - iz = 2iw + 1 \Leftrightarrow (w-i)z = 2iw + 1 \Leftrightarrow z = \frac{2iw+1}{w-i}$$

Entonces,

$$T^{-1}: z = \frac{2iw+1}{w-i}$$

Propiedad: $T: w = \frac{Az+B}{Cz+D}$ con $AD - BC \neq 0$ mapea

a) rectas del plano z en rectas o circunferencias del plano w.

b) Circunferencias del plano z en rectas o circunferencias del plano w.

Dem: Como toda TLF es o bien lineal o bien composición de lineales con la inversión, la afirmación del enunciado es inmediata porque la familia de rectas y circunferencias es mapeada sobre sí misma tanto por las transformaciones lineales como por la inversión.

Más detalladamente:

- L es recta $\wedge\ z = -D/C \in L\ \Rightarrow T(L)$ es recta por el punto $w = A/C$
- L es recta $\wedge\ z = -D/C \notin L \Rightarrow T(L)$ es circunferencia por el punto $w = A/C$
- $\mathcal{C}$ es circunferencia $\wedge\ z = -D/C \in \mathcal{C} \Rightarrow T(\mathcal{C})$ es recta que no pasa por el punto $w = A/C$
- $\mathcal{C}$ es circunferencia $\wedge\ z = -D/C \notin \mathcal{C} \Rightarrow T(\mathcal{C})$es circunferencia que no pasa por el punto $w = A/C$

Ejemplo: hallar la imagen de H por $T: w = \frac{iz+1}{z-2i}$

¿Cuál es la imagen de la frontera ∂H?

a) $H = \{z \in \mathbb{C}: |z-i| \geq 1\}$ b) $H = \{x+iy \in \mathbb{C}: \ x+y \leq 2\}$

c) $H = \{z \in \mathbb{C}: |z| \leq 1\}$ d) $H = \{x+iy \in \mathbb{C}: y \geq x\}$

Rta

$$w = \frac{iz+1}{z-2i} \Leftrightarrow w(z-2i) = iz+1 \Leftrightarrow wz - 2iw = iz+1 \Leftrightarrow wz - iz = 2iw+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (w-i)z = 2iz+1 \Leftrightarrow z = \frac{2iw+1}{w-i}$$

Entonces,

$$T^{-1}: z = \frac{2iw+1}{w-i}$$

$$x+iy = z = \frac{2iw+1}{w-i} = \frac{2i(u+iv)+1}{(u+iv)-i} = \frac{(1-2v)+i2u}{u+i(v-1)} = \frac{(1-2v)+i2u}{u+i(v-1)} \frac{u-i(v-1)}{u-i(v-1)} =$$

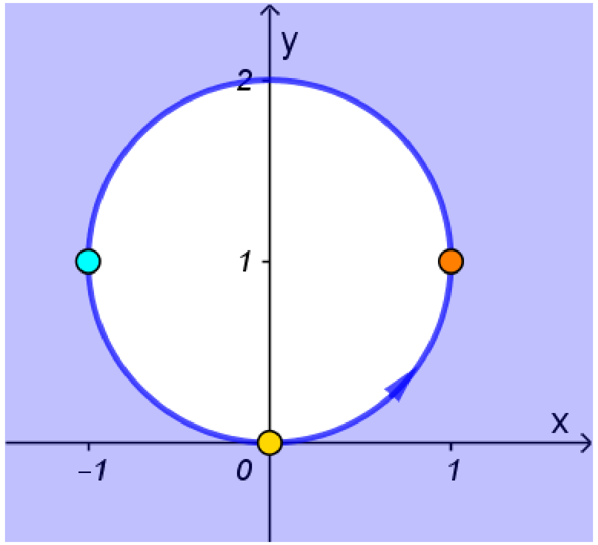
$$= \frac{(1-2v)u+2u(v-1)}{u^2+(v-1)^2} + i\frac{2u^2-(1-2v)(v-1)}{u^2+(v-1)^2} = -\frac{u}{u^2+(v-1)^2} + i\frac{2u^2+2v^2-3v+1}{u^2+(v-1)^2}$$

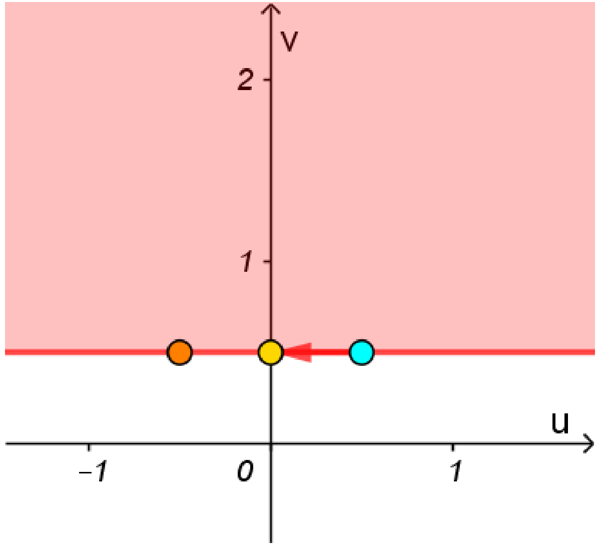
Es decir,

$$T^{-1}: \begin{cases} x = -\dfrac{u}{u^2+(v-1)^2} \\ y = \dfrac{2u^2+2v^2-3v+1}{u^2+(v-1)^2} \end{cases}$$

a) **Notar**: $z = 2i \in \partial H$ así que $w = \infty \in \partial T(H)$. Entonces $\partial T(H)$ no está acotado. Luego, $\partial T(H)$ es una recta. Además, ∂H está acotado así que $z = \infty \notin \partial H$. Entonces $w = i \notin \partial T(H)$. Luego, $\partial T(H)$ es recta que no pasa por $w = i$. Además, como H no está acotado entonces $z = \infty \in H$, por lo que $w = i \in T(H)$.

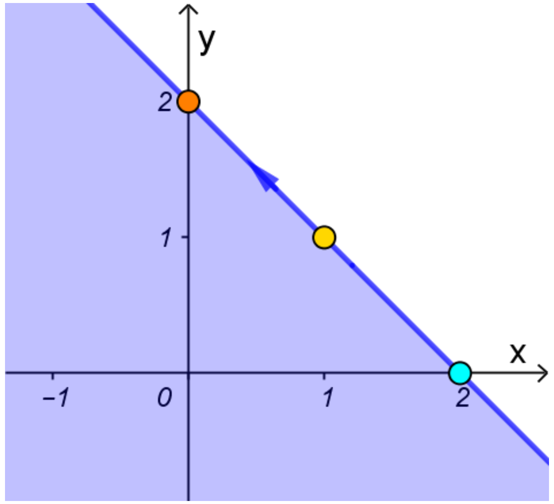
$$z \in H \Leftrightarrow |z-i| \geq 1 \Leftrightarrow \left|\frac{2iw+1}{w-i} - i\right| \geq 1 \Leftrightarrow \left|\frac{2iw+1-i(w-i)}{w-i}\right| \geq 1 \Leftrightarrow \frac{|iw|}{|w-i|} \geq 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ |iw| \geq |w-i| \Leftrightarrow |w| \geq |w-i| \Leftrightarrow \ |u+iv| \geq |u+iv-i| \Leftrightarrow |u+iv| \geq |u+i(v-1)| \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow u^2+v^2 \geq u^2+(v-1)^2 \Leftrightarrow \ u^2+v^2 \geq u^2+v^2-2v+1 \Leftrightarrow \ 2v \geq 1 \Leftrightarrow v \geq \frac{1}{2}$$
$$z \in \partial H \Leftrightarrow v = \frac{1}{2}$$

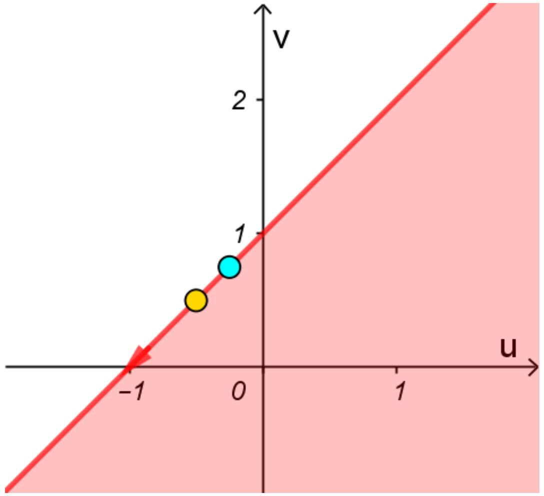




b) **Notar**: $z = 2i \in \partial H$ así que $w = \infty \in \partial T(H)$. Entonces $\partial T(H)$ no está acotado. Luego, $\partial T(H)$ es una recta. Además, ∂H no está acotado así que $z = \infty \in \partial H$. Entonces$w = i \in \partial T(H)$. Luego, $\partial T(H)$ es recta que pasa por $w = i$.

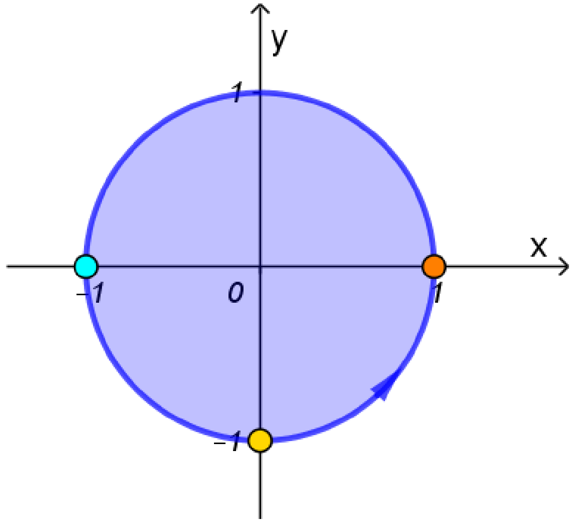
$$z \in H \Leftrightarrow x + y \leq 2 \Leftrightarrow -\frac{u}{u^2 + (v-1)^2} + \frac{2u^2 + 2v^2 - 3v + 1}{u^2 + (v-1)^2} \leq 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{2u^2 - u + 2v^2 - 3v + 1}{u^2 + (v-1)^2} \leq 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2u^2 - u + 2v^2 - 3v + 1 \leq 2u^2 + 2(v-1)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -u + 2v^2 - 3v + 1 \leq 2v^2 - 4v + 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow v \leq u + 1$$
$$z \in \partial H \Leftrightarrow v = u + 1$$

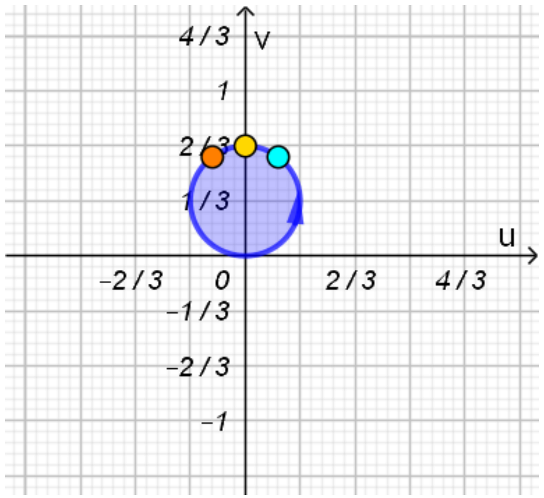




c) **Notar**: $z = 2i \notin \partial H$ así que $w = \infty \notin \partial T(H)$. Entonces $\partial T(H)$ está acotado. Luego, $\partial T(H)$ es una circunferencia. Además, ∂H está acotado así que $z = \infty \notin \partial H$, $z = \infty \notin H$. Entonces $w = i \notin \partial T(H)$, $w = i \notin T(H)$. Luego, $\partial T(H)$ es circunferencia que no pasa por $w = i$.

$$z \in H \Leftrightarrow |z| \leq 1 \Leftrightarrow \left|\frac{2iw+1}{w-i}\right| \leq 1 \Leftrightarrow \frac{|2iw+1|}{|w-i|} \leq 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |2iw+1| \leq |w-i| \Leftrightarrow |2i(u+iv)+1| \leq |u+iv-i| \Leftrightarrow |(1-2v)+2iu| \leq |u+i(v-1)| \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (1-2v)^2+(2u)^2 \leq u^2+(v-1)^2 \Leftrightarrow 1-4v+4v^2+4u^2 \leq u^2+v^2-2v+1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3u^2+3v^2-2v \leq 0 \Leftrightarrow u^2+v^2-\frac{2}{3}v \leq 0 \Leftrightarrow u^2+\left(v-\frac{1}{3}\right)^2 \leq \frac{1}{9} \Leftrightarrow \left|w-\frac{i}{3}\right| \leq \frac{1}{3}$$
$$z \in \partial H \Leftrightarrow u^2+\left(v-\frac{1}{3}\right)^2 \leq \frac{1}{9}$$





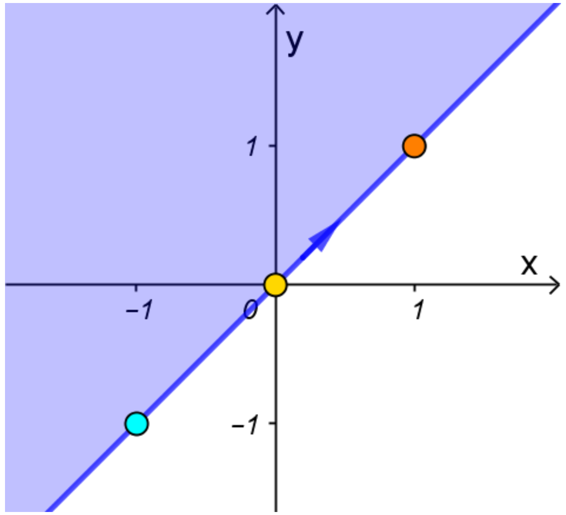
d) **Notar**: $z = 2i \notin \partial H$ así que $w = \infty \notin \partial T(H)$. Entonces $\partial T(H)$ está acotado. Luego, $\partial T(H)$ es una circunferencia. Además, ∂H no está acotado así que $z = \infty \in \partial H$. Entonces $w = i \in \partial T(H)$. Luego, $\partial T(H)$ es circunferencia que pasa por $w = i$.

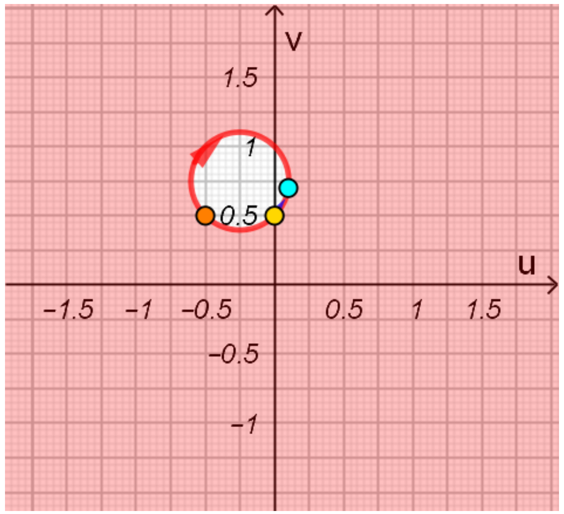
$$z \in H \Leftrightarrow y \geq x \Leftrightarrow \frac{2u^2 + 2v^2 - 3v + 1}{u^2 + (v-1)^2} \geq -\frac{u}{u^2 + (v-1)^2} \Leftrightarrow 2u^2 + 2v^2 - 3v + 1 \geq -u \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2u^2 + u + 2v^2 - 3v \geq -1 \Leftrightarrow u^2 + \frac{1}{2}u + v^2 - \frac{3}{2}v \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(v - \frac{3}{4}\right)^2 \geq \frac{1}{8} \Leftrightarrow \left|w + \frac{1}{4} - \frac{4i}{4}\right| \leq \frac{1}{8}$$

$$z \in \partial H \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(v - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{8}$$





Transformaciones potencia

La **transformación potencia $\boldsymbol{n}$-ésima** es $T: w = z^n$ donde $n \geq 2$ es un entero.

Si $z = re^{i\theta}$ con $r = |z|, \theta = \mathrm{Arg}(z)$ entonces

$$w = \left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}$$

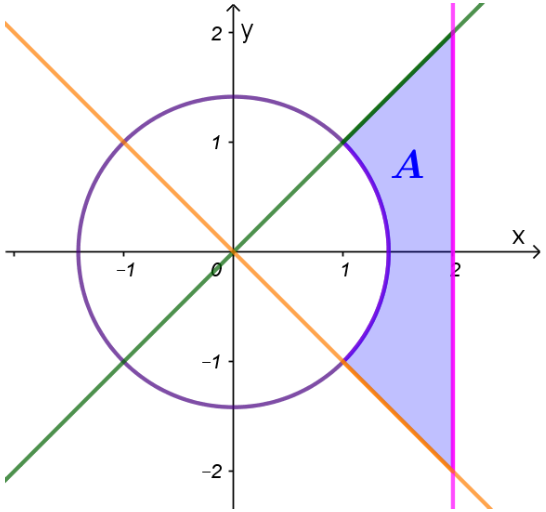
así que

$$w = \rho e^{i\varphi} \text{ donde } \rho = r^n = |w| \,, \varphi = n\theta \in \arg(w)$$

En particular si $n = 2,\ T$ duplica ángulos con vértice en el origen; si $n = 3,\ T$ triplica ángulos con vértice en el origen; etc.

Ejemplo: Si $T: w = z^2$ hallar $T(A)$

$A = \{x + iy \in \mathbb{C}: -x \leq y \leq x \ \ \wedge \ \ x^2 + y^2 \geq 2 \ \wedge \ \ y \leq 2\}$



Rta

$$-x \leq y \leq x \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \leq \overbrace{\mathrm{Arg}(z)}^{\theta} \leq \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq 2\theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Luego, si $\varphi \in \arg(w)$ resulta: $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

Por otra parte,

$$x^2 + y^2 \leq 2 \Leftrightarrow \overbrace{|z|}^{r} \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow r^2 \leq 2$$

Entonces, si $\rho = |w|$ resulta: $\rho \leq 2$

Dado que $u + iv = w = z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i2xy$ entonces $T: \begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$

Luego,

$$x = 2 \ \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2^2 - y^2 \\ v = 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 4 - (v/4)^2 \\ y = v/4 \end{cases}$$

Entonces la recta $x = 2$ es mapeada en la parábola de eje horizontal

(abre hacia la izquierda) $u = 4 - \frac{1}{16}v^2$ con vértice $V(4,0)$.

Por lo tanto,

$$T(A) = \left\{u + iv \in \mathbb{C}: \ u^2 + v^2 \geq 4 \ \ \wedge \ \ u \geq 0 \ \ \wedge \ \ u \leq 4 - \frac{1}{16}v^2\right\}$$