María Valeria Calandra

4) Considere una muestra aleatoria de una distribución continua con densidad

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(1+\theta x)}{6} & \text{si } -3<x<3 \\ 0 & \text{caso contrario}\end{cases} \qquad \text{donde el parámetro } \theta \text{ es tal que } -1/3<\theta<1/3$$

a) ¿Es $\hat{\theta}=\dfrac{1}{3}\overline{X}$ un estimador insesgado de θ?. Explique.

b) Hallar $ECM(\hat{\theta})$. ¿Es $\hat{\theta}=\dfrac{1}{3}\overline{X}$ un estimador consistente de θ? Explique.

a) Para ver si un estimador es insesgado hay que hallar su esperanza y ver si coincide con el valor del parámetro que se quiere estimar:

$$E(\hat{\theta}) = E\left(\frac{1}{3}\overline{X}\right) = \frac{1}{3}E(\overline{X}) = \frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n} 3\theta = \frac{n3\theta}{3n} = \theta$$

Por linealidad Por linealidad Por (1)

Por lo tanto $\hat{\theta}$ es un estimador insesgado para θ

Cálculo auxiliar: (1)

$$E(X) = \int_{-3}^{3} X\,\frac{(1+\theta X)}{6}\,dx = \frac{1}{6}\int_{-3}^{3} X+\theta X^2\,dx = \frac{1}{6}\left(\frac{X^2}{2}+\theta\frac{X^3}{3}\right)\Big]_{-3}^{3} = 3\theta$$

b) $ECM(\hat{\theta}) = V(\hat{\theta}) + \underbrace{(E(\hat{\theta})-\theta)^2}_{\text{es cero por ser insesgado}} = \frac{1}{3n}(1-\theta^2)$

$$V(\hat{\theta}) = V\left(\frac{1}{3}\overline{X}\right) = \frac{1}{9n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{1}{9n^2}\sum_{i=1}^{n} 3-3\theta^2 = \frac{1}{9n^2}\, n(3-(3\theta)^2) = \frac{1}{3n}(1-3\theta^2)$$

Por independencia Por(2)
Y $V(ax)=a^2V(X)$

Cálculo auxiliar: (2)

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$E(X^2) = \int_{-3}^{3} X^2\,\frac{(1+\theta X)}{6}\,dx = \frac{1}{6}\int_{-3}^{3} X^2+\theta X^3\,dx = \frac{1}{6}\left(\frac{X^3}{3}+\theta\frac{X^4}{4}\right)\Big]_{-3}^{3} = 3$$

$$E(X) = \int_{-3}^{3} X\,\frac{(1+\theta X)}{6}\,dx = \frac{1}{6}\int_{-3}^{3} X+\theta X^2\,dx = \frac{1}{6}\left(\frac{X^2}{2}+\theta\frac{X^3}{3}\right)\Big]_{-3}^{3} = 3\theta$$

María Valeria Calandra

Para que un estimador sea consistente se debe cumplir que $\lim_{n\to\infty} V(\hat{\theta}\,) = 0$ y también que

$\lim_{n\to\infty} (E(\hat{\theta}\,) - \theta) = 0$ COMO AMBOS LÍMITES SON CERO POR LO TANTO $\hat{\theta}$ ES UN ESTIMADOR CONSISTENTE PARA θ

$$\lim_{n\to\infty} V(\hat{\theta}\,) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3n}(1-\theta^2) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} (E(\hat{\theta}\,) - \theta) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$