Transformaciones conformes

Curvas suaves

Sea $\mathcal{C}$ curva en $\mathbb{R}^2$ parametrizada por $\mathcal{C}: \vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$, es decir $\mathcal{C}: \begin{cases} x = X(t) \\ y = Y(t) \end{cases}$ con $t \in [a, b]$. Se dice que $\mathcal{C}$ es una **curva suave** si las funciones X, Y poseen derivadas continuas y no simultáneamente nulas en $[a, b]$. En tal caso, como $\|\vec{r}(t)\| \neq 0$, queda definido en cada punto de $\mathcal{C}$ el vector tangente unitario

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}\,'(t)}{\|\vec{r}(t)\|} = \frac{\langle X'(t), Y'(t)\rangle}{\sqrt{\left(X'(t)\right)^2 + \left(Y'(t)\right)^2}}$$

- La dirección de $\vec{T}(t)$ es la de la recta tangente a $\mathcal{C}$ y el sentido de $\vec{T}(t)$ es el de un desplazamiento a lo largo de $\mathcal{C}$ que se produce al incrementar el parámetro en una cantidad infinitesimal dt. Así, $\vec{T}(t)$ ***determina la orientación de la curva $\mathcal{C}$ originada por valores crecientes del parámetro***.
- $\vec{T}(t)$ varía con continuidad a lo largo de $\mathcal{C}$, de modo que no sufre cambios bruscos en su dirección, mostrando que $\mathcal{C}$ no presenta puntos "angulosos".

En lo que sigue será conveniente acostumbrarse a considerar $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{C}$, donde cada $(X(t), Y(t)) \in \mathcal{C}$ se piensa como el número complejo $Z(t) = X(t) + iY(t)$. Es decir,

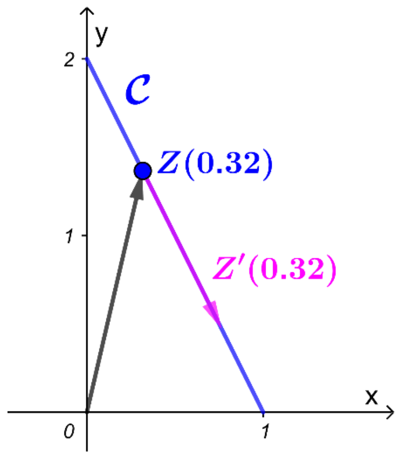
$$\mathcal{C}: z = \overbrace{X(t) + iY(t)}^{Z(t)} \quad \text{con} \quad t \in [a, b]$$

Las condiciones de suavidad se traducen en que $Z'(t) = X'(t) + iY'(t)$ es continua y no nula en $[a, b]$. Ele vector $Z'(t)$ es un vector tangente a $\mathcal{C}$ en cada punto $Z(t)$. Al incrementar los valores del parámetro t el punto $Z(t)$ recorre $\mathcal{C}$ en el sentido indicado por $Z'(t)$.

Ejemplo

1) Sea $\mathcal{C}$ el segmento que une los puntos $(1,0)$ y $(0,2)$. Podemos parametrizarlo por

$$\mathcal{C}: \begin{cases} x = t \\ y = 2 - 2t \end{cases} \text{con } \ t \in [0,1]$$



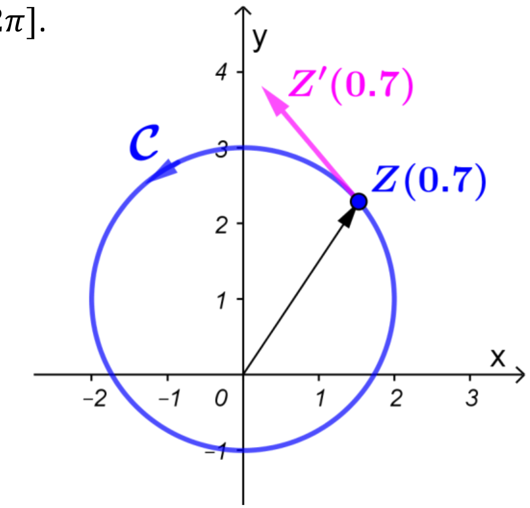
1) Como subconjunto del plano complejo se describe mediante

$$\mathcal{C}: z = \overbrace{t + i(2-2t)}^{Z(t)} \ \text{ con } \ t \in [0,1]$$

El vector $Z'(t) = X'(t) + iY'(t) = 1 - 2i$ es tangente a $\mathcal{C}$ en cada punto.

La orientación por valores crecientes del parámetro t recorre $\mathcal{C}$ por abscisas crecientes pues $X'(t) = 1 > 0$. También podemos decir esa orientación corresponde a ordenadas decrecientes puesto que $Y'(t) = -2 < 0$.

2) Sea $\mathcal{C}$ la circunferencia de ecuación $x^2 + (y-1)^2 = 4$. Podemos parametrizarla por $\mathcal{C}: \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 1 + 2 \operatorname{sen} t \end{cases}$ con $\ t \in [0,2\pi]$.



Entonces $Z(t) = i + 2(\cos t + i \operatorname{sen} t) = i + 2e^{it}$.

Es decir, $\mathcal{C}: z = i + 2e^{it}$ con $\ t \in [0,2\pi]$

Un vector tangente es $Z'(t) = \frac{d}{dt}\left(i + 2e^{it}\right) = 2ie^{it}$.

La orientación por valores crecientes del parámetro t recorre $\mathcal{C}$ en sentido antihorario.

Notar que en este caso no podemos decir por ejemplo que esa orientación corresponde a abscisas crecientes dado que $X(t) = 2\cos t$ no es función monótona en $[0,2\pi]$.

Giro de tangentes

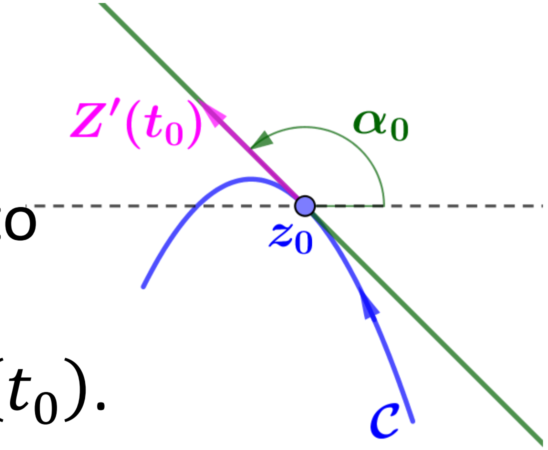
Sea $f(z)$ analítica en $z_0 = x_0 + iy_0$ tal que $f'(z_0) \neq 0$. Ya hemos mencionado que la derivada de una función analítica es también analítica. En particular dicha derivada es continua. Como $f'(z_0) \neq 0$ entonces $f'(z) \neq 0$ en un entorno $E(z_0, R)$ de z_0. En efecto, como $f'(z)$ es continua entonces $|f'(z)|$ es continua y no nula en z_0, por lo que ha de ser $|f'(z)| > 0$ en un entorno de z_0, lo que implica que $f'(z_0) \neq 0$ en dicho entorno.

Consideremos una curva suave $\mathcal{C}: z = Z(t), t \in [a, b]$,

orientada por valores crecientes del parámetro.

Supongamos $\mathcal{C}$ está incluida en $E(z_0, R)$ y pasa por el punto

$Z(t_0) = z_0$ con $t_0 \in (a, b)$.



Un vector director de la recta tangente en ese punto es $Z'(t_0)$.

Sea $\alpha_0 \in \arg\big(Z'(t_0)\big)$ el ángulo de inclinación de la recta tangente a $\mathcal{C}$ en z_0.

Sea $f(\mathcal{C})$ la curva imagen por el punto imagen $w_0 = f(z_0)$. Entonces:
$f(\mathcal{C})\colon w = W(t), t \in [a,b],$ donde $W(t) = f\big(Z(t)\big)$.
Veamos que $f(\mathcal{C})$ es suave. En efecto, en virtud de la regla de la cadena:

$$W'(t) = \frac{d}{dt} f\big(Z(t)\big) = \underbrace{f'\big(Z(t)\big)}_{\neq 0\ (*)}\ \underbrace{Z'(t)}_{\neq 0\ (**)} \neq 0$$

$(*)$: $\mathcal{C} \subset E(z_0, R)$ así que para todo t es $Z(t) \in E(z_0, R)$ y en ese entorno f' no se anula.

$(**)$: $Z'(t)$ no se anula en (a,b) por ser $Z(t)$ suave.

Además, $f'\big(Z(t)\big)$ es continua en $[a,b]$ por ser composición de continuas, así que $f'\big(Z(t)\big)Z'(t)$ es continua allí por ser producto de continuas.

Notar Cuando el parámetro t crece el punto $Z(t)$ se desplaza a lo largo de $\mathcal{C}$ en la dirección de $Z'(t)$. Ese "punto móvil" $Z(t)$ es mapeado por f en el "punto móvil" $W(t) = f\big(Z(t)\big)$. La orientación de la curva imagen $f(\mathcal{C})$ por valores crecientes del parámetro t queda reflejada por el vector $W'(t)$.

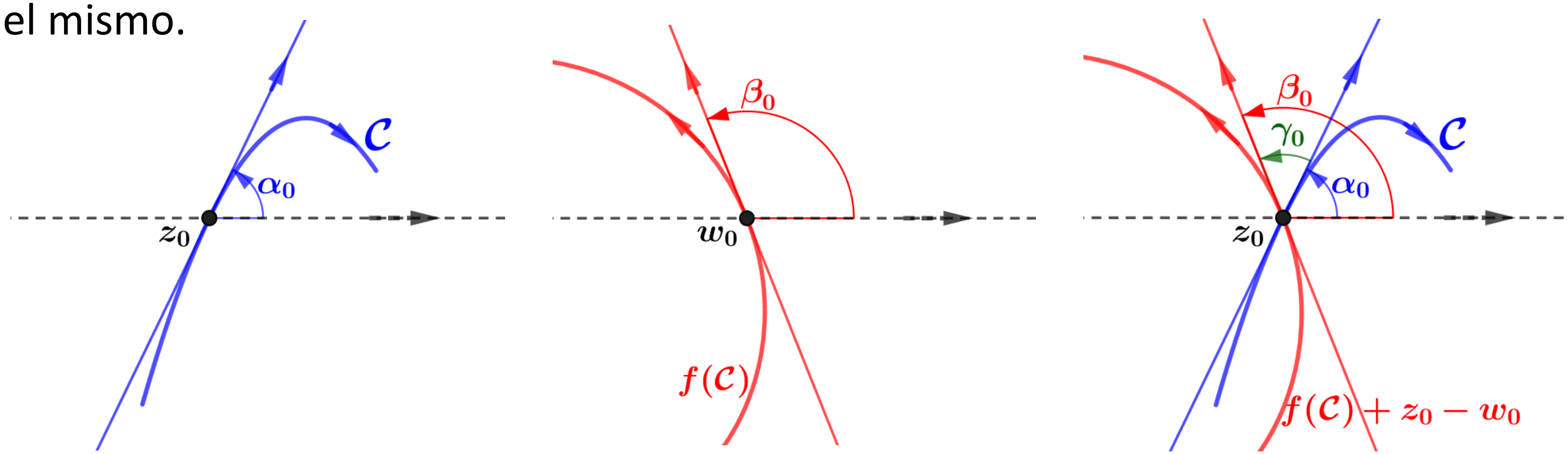
En particular: $W'(t_0) = f'\big(Z(t_0)\big)Z'(t_0) = f'(z_0)Z'(t_0)$

Esta igualdad vincula el vector tangente $W'(t_0)$ a $f(\mathcal{C})$ en $w_0 = f(z_0)$ con el vector tangente $Z'(t_0)$ a $\mathcal{C}$ en z_0. Comparando argumentos:

$$\underbrace{\arg\big(W'(t_0)\big)}_{\beta_0} = \arg\big(f'(z_0)Z'(t_0)\big) = \underbrace{\operatorname{Arg}\big(f'(z_0)\big)}_{\gamma_0} + \underbrace{\arg\big(Z'(t_0)\big)}_{\alpha_0}$$

Dado que $\gamma_0 = \operatorname{Arg}(f'(z_0)\,)$ depende del punto z_0 y de la función f pero no de $\mathcal{C}$, lo anterior muestra que podemos interpretar γ_0 como el **ángulo de giro de rectas tangentes** en z_0. Si se traslada la imagen $f(\mathcal{C})$ haciendo coincidir w_0 con z_0, la recta tangente a $f(\mathcal{C})$ en se obtendrá rotando un ángulo γ_0 alrededor del punto la recta tangente a $\mathcal{C}$.

Si se mantiene f y el punto z_0 pero se cambia $\mathcal{C}$, eventualmente cambiarán las rectas tangentes, α_0 y β_0, pero γ_0 será el mismo.



Notar: lo anterior “se cae” si $f'(z_0) = 0$. En ese caso no queda definido un “ángulo de rotación de tangentes” en z_0.

Por ejemplo, $f(z) = z^2$ en el origen $z_0 = 0$, donde $f'(0) = 0$.

- $\mathcal{C}: y = x$ es mapeada en $T(\mathcal{C}): u = 0$ así que la tangente a $\mathcal{C}$ gira $45°$.
- $\mathcal{C}^*: y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ (con ángulo de inclinación $\alpha_0 = \frac{\pi}{6}$) es mapeada en $T(\mathcal{C}): v = \sqrt{3}\,u$ (con ángulo de inclinación $\alpha_0 = \frac{\pi}{3}$) así que la tangente a $\mathcal{C}$ gira 30°.

Así, no todas las curvas por $z_0 = 0$ son tales que sus rectas tangentes giran el mismo ángulo… Siendo $f(z) = z^2$ analítica en el origen $z_0 = 0$, esto sólo puede atribuirse a que $f'(0) = 0$.

Ejemplo: Sean $f(z) = \frac{z-1}{z-i}$, $z_0 = 1 + i$

a) Mostrar que f determina un ángulo de rotación de tangentes γ_0 en z_0. Calcular γ_0.

b) Comprobar a) para la curva $\mathcal{C}: x^2 + y^2 = 2$, hallando la imagen $f(\mathcal{C})$ y las ecuaciones de las rectas tangentes a $\mathcal{C}$ en z_0 y a $f(\mathcal{C})$ en $w_0 = f(z_0)$.

Rta

a) $f'(z) = \frac{(z-i)-(z-1)}{(z-i)^2} = \frac{1-i}{(z-i)^2}$ es analítica en $z_0 = 1 + i$.

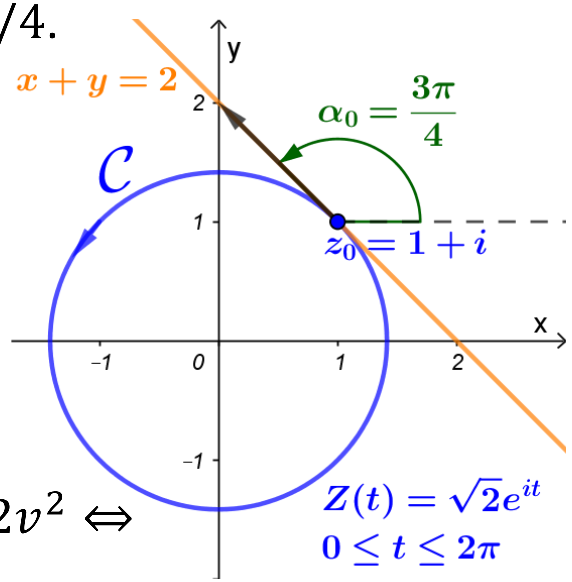
Además, $f'(1+i) = \frac{1-i}{((1+i)-i)^2} = 1 - i \neq 0$. Por lo tanto, queda definido el ángulo de rotación de tangentes en z_0 mediante:

$$\gamma_0 = \mathrm{Arg}\big(f'(1+i)\big) = \mathrm{Arg}(1-i) = -\frac{\pi}{4}$$

b) $w = \frac{z-1}{z-i} \Leftrightarrow w(z-i) = z - 1 \Leftrightarrow wz - iw = z - 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow wz - z = iw - 1 \Leftrightarrow (w-1)z = iw - 1 \Leftrightarrow z = \frac{iw-1}{w-1}$$

La recta tangente a $\mathcal{C}$ en $z_0 = 1 + i$ es $x + y = 2$. Su ángulo de inclinación es $\alpha_0 = 3\pi/4$.
Por otra parte,



$$z \in \mathcal{C} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2 \Leftrightarrow |z| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left|\frac{iw-1}{w-1}\right| = \sqrt{2} \Leftrightarrow$$

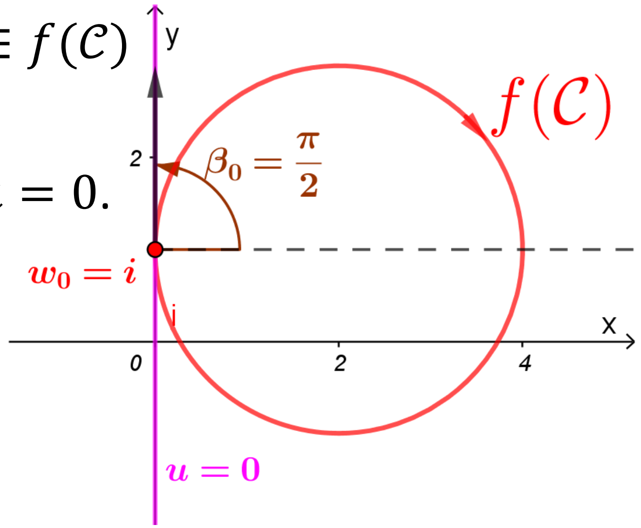
$$\Leftrightarrow \frac{|iw-1|}{|w-1|} = 2 \Leftrightarrow |iw-1| = \sqrt{2}|w-1| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |i(u+iv)-1| = \sqrt{2}|(u+iv)-1| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |-v-1+iu| = \sqrt{2}|(u-1)+iv| \Leftrightarrow \ (-v-1)^2 + u^2 = 2(u-1)^2 + 2v^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v^2 + 2v + 1 + u^2 = 2u^2 - 4u + 2 + 2v^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u^2 - 4u + v^2 - 2v = -1 \Leftrightarrow \ (u-2)^2 + (v-1)^2 = 4 \ \Leftrightarrow \ w \in f(\mathcal{C})$$



Entonces, la recta tangente a $f(\mathcal{C})$ en $w_0 = f(1+i) = \frac{(1+i)-1}{(1+i)-i} = i$ es claramente $u = 0$.

Su ángulo de inclinación es $\beta_0 = \frac{\pi}{2}$

Tal como lo prevé la teoría expuesta: $\gamma_0 + \alpha_0 = -\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2} = \beta_0$

Conformidad

Sea $f(z)$ analítica en $z_0 = x_0 + iy_0$. Se dice que la transformación $T: w = f(z)$ es **conforme en el punto $\boldsymbol{z_0}$** si preserva en magnitud y signo el ángulo entre pares de curvas suaves por z_0.

Expliquemos en detalle el significado.

Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ curvas suaves por z_0:

$$\mathcal{C}_1: z = Z_1(t), t \in [a,b] \qquad \mathcal{C}_2: z = Z_2(t), t \in [a,b]$$

donde

- $Z_1(t_0) = z_0 = Z_2(t_0)$
- $Z_1{}'(t), Z_2{}'(t)$ continuas en $[a,b]$ y tales que $Z_1{}'(t_0) \neq 0, Z_2{}'(t_0) \neq 0$

Las imágenes de las curvas son

$$f(\mathcal{C}_1): z = \overbrace{f\big(Z_1(t)\big)}^{W_1(t)}, t \in [a,b] \qquad \mathcal{C}_2: z = \overbrace{f\big(Z_2(t)\big)}^{W_2(t)}, t \in [a,b]$$

Sea α_{12} el ángulo de lado inicial $Z_1{}'(t_0)$ y lado final $Z_2{}'(t_0)$ y sea β_{12} el ángulo de lado inicial $W_1{}'(t_0)$ y lado final $W_2{}'(t_0)$.Si f es conforme en z_0 entonces $\beta_{12} = \alpha_{12}$

Ejemplo $f(z) = \bar{z}$ no es conforme en ningún punto z_0. Basta el siguiente contraejemplo.

$$\mathcal{C}_1: z = z_0 + t, t \in [-1,1]$$
$$\mathcal{C}_2: z = z_0 + it, t \in [-1,1]$$

Entonces

$$T(\mathcal{C}_1): w = z_0 + t, t \in [-1,1]$$
$$T(\mathcal{C}_2): w = z_0 - it, t \in [-1,1]$$

Por lo tanto, cuando $t = 0$ resulta:

$$Z_1'(0) = 1 \qquad\qquad Z_2'(0) = i$$
$$W_1'(0) = 1 \qquad\qquad W_2'(0) = -i$$

Luego,

$$\alpha_{12} = \frac{\pi}{2} \neq -\frac{\pi}{2} = \beta_{12}$$

Teorema Sea$f(z)$ analítica en z_0. Se verifica:

$T: w = f(z)$ es conforme en z_0 si y sólo si $f'(z_0) \neq 0$

Dem

$\Leftarrow$) Sean $\mathcal{C}_1: z = Z_1(t), t \in [a, b]$ $\mathcal{C}_2: z = Z_2(t), t \in [-1,1]$

parametrizaciones suaves con $Z_1(t_0) = z_0 = Z_2(t_0)$.

Sea $w_0 = f(z_0)$ y γ_0: ángulo de rotación de tangentes en z_0

Si

α_1: ángulo de inclinación de $\mathcal{C}_1$en z_0

α_2: ángulo de inclinación de $\mathcal{C}_2$en z_0

β_1: ángulo de inclinación de $T(\mathcal{C}_1)$ en w_0

β_2: ángulo de inclinación de $T(\mathcal{C}_2)$ en w_0

entonces

$$\beta_1 = \alpha_1 + \gamma_0 \qquad \beta_2 = \alpha_2 + \gamma_0$$

Por lo tanto,

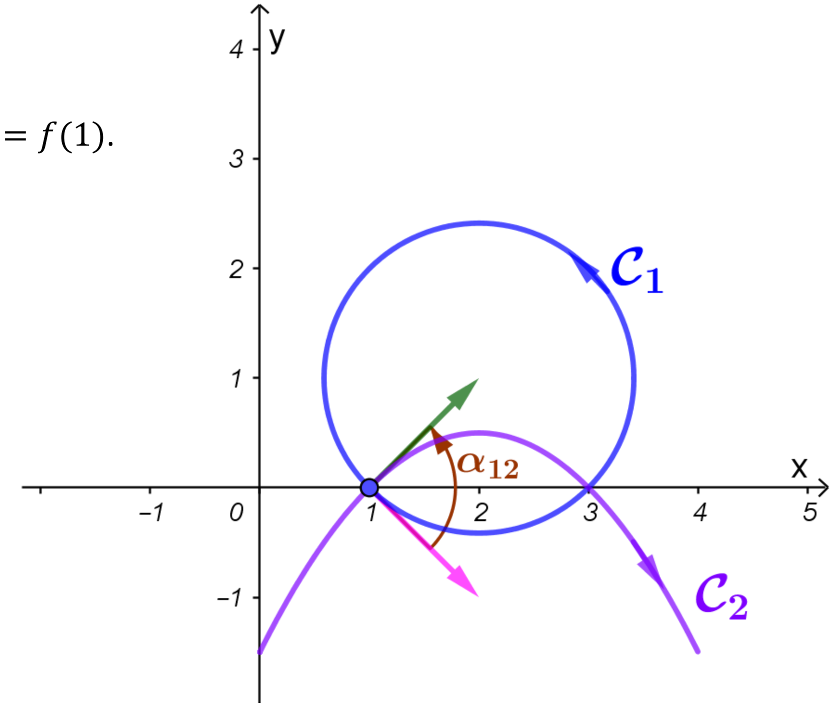
$$\beta_{12} = \beta_2 - \beta_1 = (\alpha_2 + \gamma_0) - (\alpha_1 + \gamma_0) = \alpha_2 - \alpha_1 = \alpha_{12}$$

Ejemplo Sea $f(z) = iz + \text{Ln}(z)$.

a) ¿Cuál es el dominio de conformidad de $T: w = f(z)$?

b) Si $\mathcal{C}_1: (x-2)^2 + (y-1)^2 = 2$ hallar la ecuación de la recta tangente a la imagen $f(\mathcal{C}_1)$ en el punto $w_0 = f(1)$.

c) Si $\mathcal{C}_2: y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x-2)^2$, ¿qué ángulo forman $f(\mathcal{C}_1)$ y $f(\mathcal{C}_2)$ en el punto $w_0 = f(1)$?



<u>Rta</u>

a) $D_{ana}(f) = \mathbb{C} - \{x + iy: y = 0, x \leq 0\}$

$f'(z) = i + \frac{1}{z}$ así que $f'(z) = 0 \Leftrightarrow z = i$

Entonces el dominio de conformidad es

$$D_{conf}(f) = \mathbb{C} - (\{i\} \cup \{x + iy: y = 0, x \leq 0\})$$

b) $z_0 = 1 \in D_{conf}(f)$, $w_0 = f(z_0) = i$

$$f'(z_0) = f'(1) = 1 + i$$

El ángulo de rotación de tangentes en $z_0 = 1$ bajo la transformación $w = f(z)$ es

$$\gamma_0 = \text{Arg}\big(f'(1)\big) = \text{Arg}(1 + i) = \frac{\pi}{4}$$

Sea α_1 el ángulo de inclinación de la recta tangente a $\mathcal{C}_1$ en $z_0 = 1$ y β_1 el ángulo de inclinación de la recta tangente a $f(\mathcal{C}_1)$ en $w_0 = f(1) = i$. Por la rotación de tangentes:

$$\beta_1 = \alpha_1 + \gamma_0 = \alpha_1 + \frac{\pi}{4}$$

Para hallar α_0 derivamos implícitamente$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 2$, obteniendo: $2(x-2) + 2(y-1)y' = 0$. En el punto $z_0 = 1$ esto da $2(1-2) + 2(0-1)y'(1) = 0$ así que $y'(1) = -1$. Si orientamos $\mathcal{C}_1$ en sentido antihorario resulta $\alpha_1 = \text{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$

Entonces, $\beta_1 = \alpha_1 + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 0$. Luego, la recta tangente a $f(\mathcal{C}_1)$ en el punto $w_0 = f(1) = i$ es la recta horizontal $v = 1$.

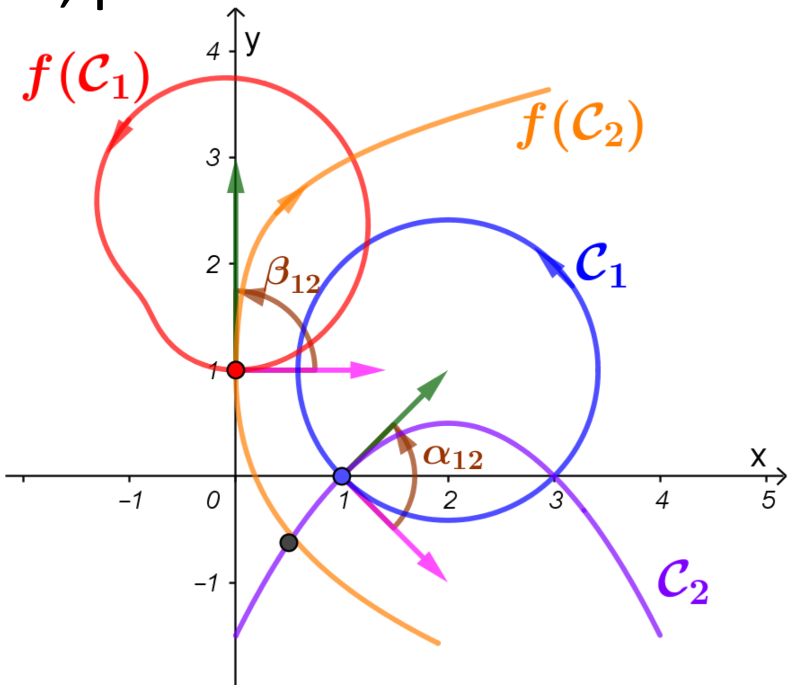
c) Sean α_{12} el ángulo orientado desde $\mathcal{C}_1$ hasta $\mathcal{C}_2$ y β_{12} el ángulo orientado desde $T(\mathcal{C}_1)$ hasta $\mathrm{T}(\mathcal{C}_2)$. Como f es conforme en $z_0 = 1$, preserva el ángulo entre pares de curvas por z_0, es decir $\beta_{12} = \alpha_{12}$

$$\alpha_{12} = \alpha_2 - \alpha_1$$

Para hallar α_2 derivamos $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x-2)^2$ obteniendo $y' = -(x-2)$. En el punto $z_0 = 1$ esto da $y'(1) = 1$. Entonces $\alpha_2 = \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$

Luego, $\alpha_{12} = \alpha_2 - \alpha_1 = \frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$

Entonces, $\beta_{12} = \frac{\pi}{2}$



En la figura se muestran las curvas y sus imágenes en un mismo plano y se identifican en color rosa los vectores tangentes a $\mathcal{C}_1$ y $T(\mathcal{C}_1)$ y en color verde los vectores tangentes $\mathcal{C}_2$ y $T(\mathcal{C}_2)$. Se observa que el ángulo entre ellos se preserva en magnitud y signo, cuando se pasa de las curvas dadas a las curvas imagen. En este ejemplo ese ángulo es recto.