Números complejos

Los números complejos $(\mathbb{C}, +, .)$ son un conjunto $\mathbb{C}$ dotado de dos operaciones básicas, la suma "+" y el producto ".", que a cada par de complejos asignan otro complejo, satisfaciendo las siguientes condiciones:

1. La suma y el producto de complejos cumplen las leyes usuales de la aritmética. Para cualesquiera números complejos z_1, z_2, z_3:
   - Asociatividad: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ $\quad (z_1 . z_2) . z_3 = z_1 . (z_2 . z_3)$
   - Conmutatividad: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ $\quad z_1 . z_2 = z_2 . z_1$
   - Distributividad del producto en la suma: $z_1 . (z_2 + z_3) = (z_1 . z_2) + (z_1 . z_3)$
   - Existencia de elementos neutros (0 de la suma y 1 del producto): $z_1 + 0 = z_1$ $\quad z_1 . 1 = z_1$
   - Existencia de opuestos para la suma: $z_1 + (-z_1) = 0$
   - Existencia de recíprocos o inversos para los complejos no nulos: si $z_1 \neq 0$, existe $\frac{1}{z_1}$ tal que $z_1 . \left(\frac{1}{z_1}\right) = 1$

   Notar que $z.0 = 0$ pues $z.0 = z.(0+0) = z.0 + z.0$ así que restando $z.0$ en ambos miembros:
   $$0 = z.0 - z.0 = z.0 + z.0 - z.0 = z.0$$

2. Existe un número complejo denotado $\boldsymbol{i}$, llamado **unidad imaginaria**, con la propiedad que $\boldsymbol{i^2 = -1}$.

3. Todo número complejo z se escribe en forma única como $\boldsymbol{z = a + bi}$, donde $\boldsymbol{a, b} \in \mathbb{R}$. Esta expresión se conoce como la **forma binómica** del complejo z, a es su "parte real" y "b" su "parte imaginaria". Anotamos: $\boldsymbol{a = \mathrm{Re}(z)}$, $\boldsymbol{b = \mathrm{Im}(z)}$. Atención: tanto la parte real como la imaginaria son números reales. Así, $\mathrm{Im}(2+3i)$ NO ES $3i$ sino $\mathrm{Im}(2+3i) = 3$.

4. Todo número real a puede considerarse como número complejo identificándolo con $\boldsymbol{a = a + 0i}$. Para cualesquiera números reales a, b su suma $a +_{\mathbb{R}} b$ su producto $a ._{\mathbb{R}} b$ como números reales coinciden respectivamente su suma y su producto como números complejos. Esto permite considerar el conjunto de números reales como subconjunto de los números complejos: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

De la unicidad de la representación binómica se deduce que dos complejos son iguales si y sólo si sus partes reales son iguales y sus partes imaginarias son iguales. Es decir, para $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

$$a + bi = c + di \iff a = c \ \wedge \ b = d$$

Si $a = \mathrm{Re}(z) = 0$, el número complejo $z = bi$ ($b \in \mathbb{R}$) se dice **imaginario puro**.

Es sencillo comprobar que: $0 = 0 + 0i$, $1 = 1 + 0i$

<u>No se puede establecer desigualdades entre números complejos (no reales)</u>

El conjunto de los números reales admite un orden total en el que todo real no nulo a es o bien "positivo" ($a > 0$) o su opuesto es positivo ($-a > 0$), siendo ese orden compatible con las operaciones de suma y producto: tanto la suma como el producto de positivos también es positivo.

En particular, el cuadrado de cualquier número real no nulo es siempre positivo. En efecto, sea $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Se tiene:

- Si $a > 0$, entonces $a^2 = a.a > 0$ siendo producto de positivos.
- Si $-a > 0$, entonces $a^2 = (-a).(-a) > 0$ siendo producto de positivos.

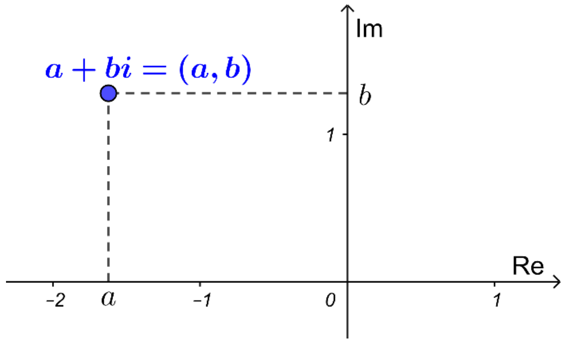
En cambio, **no es posible definir una relación de orden completo en el conjunto de los números complejos, que resulte compatible con la suma y el producto**. En efecto, si tal relación existiera los cuadrados de los números complejos habrían de ser positivos. En particular, dado que en $\mathbb{C}$ tanto 1 como -1 son cuadrados (pues: $1 = 1^2$, $-1 = i^2$), serían positivos por lo que su suma $0 = -1 + 1$ también lo sería. Pero esto es un absurdo.

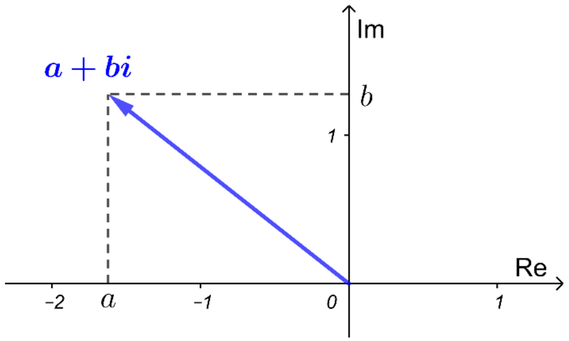
Por lo tanto, ninguno de ambos lados de una desigualdad $>$, $<$, $\geq$, $\leq$ puede ser un número complejo no real.

Representación gráfica de los números complejos (diagrama de Argand)

Para representar gráficamente el número complejo $a + bi$, donde $a, b \in \mathbb{R}$, construimos el par ordenado $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ y lo representamos, en un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales en el plano, por el punto que tiene esas coordenadas. En tales gráficos el eje de abscisas es el **eje real** y el de ordenadas el **eje imaginario**.

Pero también podemos representar $a + bi$ como el vector de $\mathbb{R}^2$ con primera componente a y segunda componente b.





Suma y producto de números complejos

Para sumar o multiplicar números complejos en forma binómica, basta hacer uso de las leyes de la aritmética y recordar que $i^2 = -1$.
Si $z = a + bi$, $w = c + di$, entonces:

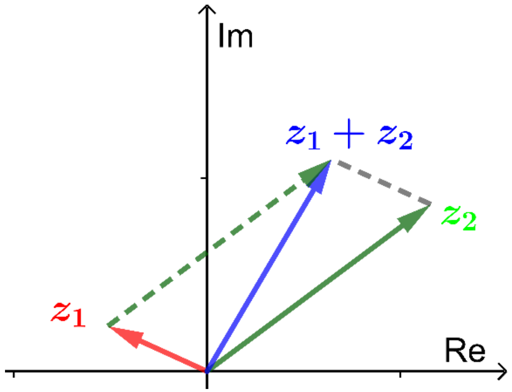
$$z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + i(b + d)$$

$$zw = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac + adi + bci - bd = (ac - db) + i(ad + bc)$$

Si $z = a + bi$ entonces su opuesto es $-z = (-a) + (-b)i = -a - bi$

Si $z = a + bi \neq 0$ entonces su recíproco o inverso multiplicativo es $\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i$

Observar que como la suma de complejos se realiza "componente a componente", se corresponde con la suma usual de vectores del plano (diagonal del paralelogramo de lados z_1 y z_2):



Resta de números complejos

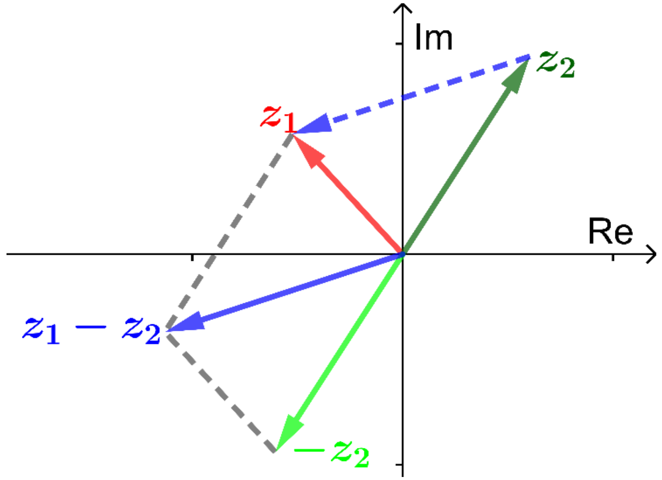
La resta de complejos se define por: $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$.

En forma binómica, si $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$

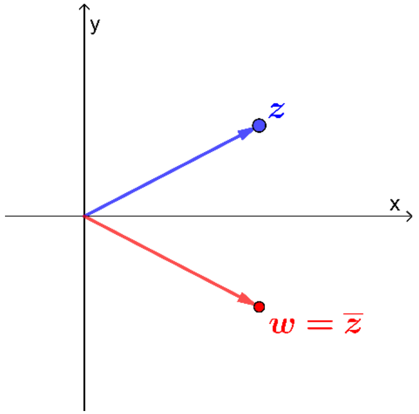
$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a + bi) + (-c - di) = (a - c) + i(b - d)$$

Para obtenerla gráficamente se suma a z_1 el vector opuesto de z_2:

Observar que $z_1 - z_2$ puede obtenerse graficando el vector con origen en el punto z_2 y extremo final en el punto z_1 y luego trasladarlo con punto de aplicación en el origen.
La diferencia $z_1 - z_2$ es la otra diagonal del paralelogramo de lados los vectores z_1 y z_2 y apunta desde z_2 hacia z_1.



Conjugación compleja



Dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$, se llama conjugado complejo z al número complejo $\bar{z} = a - bi$.

Así, $\overline{2-3i} = 2 + 3i$, $\bar{i} = -i$, $\overline{(\sqrt{3})} = \sqrt{3}$.

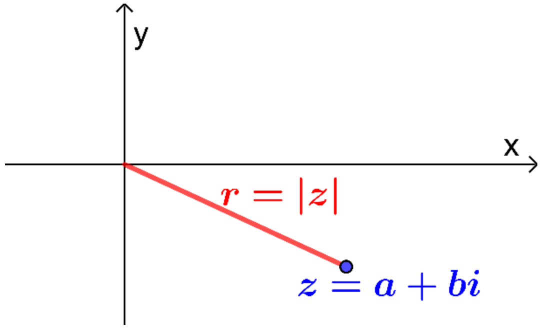
Gráficamente z y $\bar{z}$ se obtienen uno del otro mediante una reflexión en el eje real.

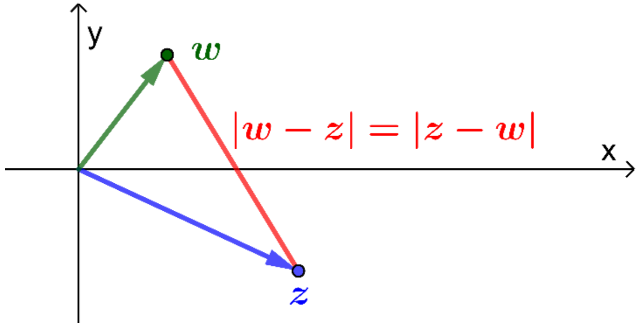
Módulo de un número complejo

Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$.

Se llama **módulo de z** al siguiente número real no negativo: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (la raíz cuadrada es la única raíz cuadrada real no negativa del número real no negativo $a^2 + b^2$. Es claro que $|z|$ representa la distancia del punto z al origen y también la longitud del vector z). Observar que la distancia entre los puntos $z = a + bi$ y $w = c + di$ está dada por: $\sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} = |z - w|$.

Se verifican las siguientes propiedades elementales:





- $|z| \geq 0$
- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|\bar{z}| = |z|$
- $z\bar{z} = |z|^2$
- Si $z = t \in \mathbb{R}$ entonces $|z|$ coincide con el valor absoluto de t.
- $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$, $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$
- $\big||z| - |w|\big| \leq |z \pm w| \leq |z| + |w|$
- $|zw| = |z|.|w|$
- Si $w \neq 0$, $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$

Observar:

- Si $t \in \mathbb{R}$, $z = a + bi \in \mathbb{C}$, entonces $tz = ta + tbi$
- Si $z = a + bi$, $w = c + di \neq 0$, entonces

$$\frac{z}{w} = \frac{z\overline{w}}{w\overline{w}} = \frac{z\overline{w}}{|w|^2}$$

Ejemplo:

$$\frac{2+3i}{3-i} = \left(\frac{2+3i}{3-i}\right)\left(\frac{3+i}{3+i}\right) = \frac{(2+3i)(3+i)}{|3-i|^2}$$
$$= \frac{6+2i+9i+3i^2}{3^2+(-1)^2} = \frac{6+11i-3}{9+1} = \frac{3}{10} + \frac{11}{10}i$$

Argumentos de un número complejo – Argumento principal

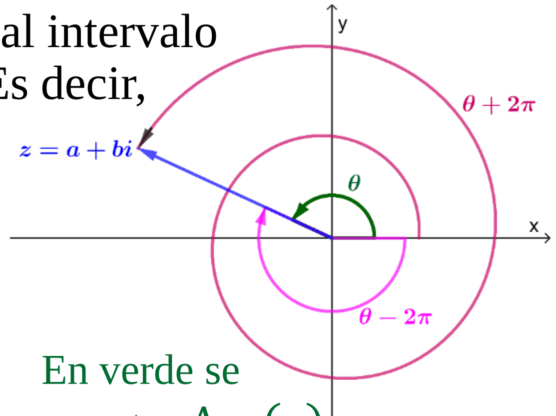
Dado $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, se llama argumento de z a cualquier ángulo orientado con vértice el origen, lado inicial el semieje real positivo y lado final la semirrecta por el origen que pasa por z, considerándolo positivo si es antihorario y negativo cuando es horario. En general mediremos dichos ángulos en radianes. Denotamos $\mathbf{arg}(\boldsymbol{z})$ al **conjunto de todos los argumentos de $\boldsymbol{z \neq 0}$**. Notar que $z = 0$ no posee un argumento definido.

Es claro que dos cualesquiera argumentos de un mismo $z \neq 0$ difieren en un número entero de giros completos alrededor del origen. Cada giro tiene una magnitud de 2π radianes. Entonces, para cualquier $\theta \in \arg(z)$ es $\arg(z) = \{\theta + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

Entre todos los argumentos de $z \neq 0$, medidos en radianes, uno y sólo uno de ellos pertenece al intervalo semiabierto $(-\pi, \pi]$. Se llama argumento principal de z y se denota con mayúscula $\mathbf{Arg}(\boldsymbol{z})$. Es decir,

$$\boldsymbol{\theta = \mathrm{Arg}(z) \Leftrightarrow \theta \in arg(z) \quad \wedge \quad -\pi < \theta \leq \pi}$$

Por ejemplo: $\frac{7\pi}{4} \in \arg(1-i)$, $\arg(1-i) = \left\{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$, $\mathrm{Arg}(1-i) = -\frac{\pi}{4}$



En verde se muestra $\mathrm{Arg}(z)$

$\underline{\textbf{Cálculo de Arg}(z)}$

Sea $z = x + iy \neq 0$. Vale:

Si $x > 0$: $\operatorname{Arg}(z) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$

Si $x = 0 \ \wedge \ y > 0$: $\operatorname{Arg}(z) = \frac{\pi}{2}$

Si $x = 0 \ \wedge \ y < 0$: $\operatorname{Arg}(z) = -\frac{\pi}{2}$

Si $x < 0 \ \wedge \ y \geq 0$: $\operatorname{Arg}(z) = \pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$

Si $x < 0 \ \wedge \ y < 0$: $\operatorname{Arg}(z) = -\pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$

Ejemplo:

$$\operatorname{Arg}(-1+i) \overbrace{=}^{\substack{x=-1<0 \\ y=1\geq 0}} \pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{(-1)}\right) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

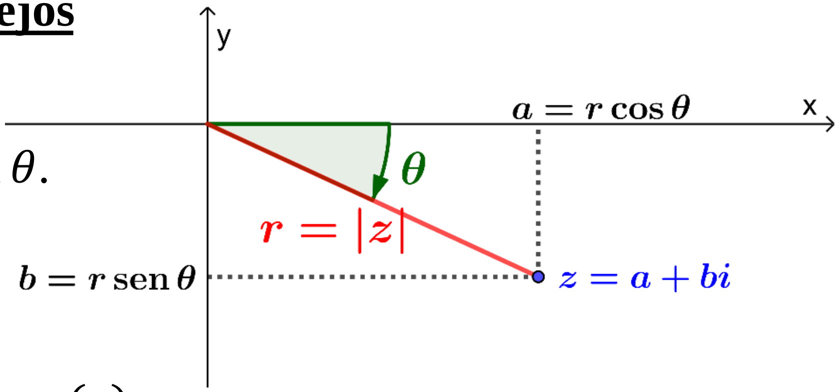
$$\operatorname{Arg}(-1) \overbrace{=}^{\substack{x=-1<0 \\ y=0\geq 0}} \pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{0}{(-1)}\right) = \pi$$

$$\operatorname{Arg}(2+i) \overbrace{=}^{x=2>0} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\operatorname{Arg}(-2i) \overbrace{=}^{\substack{x=0 \\ y=-2<0}} -\frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{Arg}\left(-\sqrt{3}-i\right) \overbrace{=}^{\substack{x=-\sqrt{3}<0 \\ y=-1<0}} -\pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{-1}{(-\sqrt{3})}\right) = -\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}$$

Forma polar o trigonométrica de los complejos



Dado un complejo $z = a + bi \neq 0$, sean $r = |z|$, $\theta \in \arg(z)$.

Por las definiciones de las funciones trigonométricas: $a = r\cos\theta$, $b = r\,\mathrm{sen}\,\theta$.

Entonces: $z = a + bi = r\cos\theta + r\,\mathrm{sen}\,\theta\, i = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$

Se obtiene así la **forma polar o trigonométrica** del complejo z:

$$\boldsymbol{z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)} \quad \textbf{donde} \quad \boldsymbol{r = |z|, \theta \in arg(z)}$$

Las operaciones de producto y cociente son sencillas con esta forma:

$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1)$ donde $r_1 = |z_1|, \theta_1 \in \arg(z_1)$

$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2)$ donde $r_2 = |z_2|, \theta_2 \in \arg(z_2)$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1) r_2(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2) \\ &= r_1 r_2\,[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \mathrm{sen}\,\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2) + i(\mathrm{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2)] \\ &= r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1 + \theta_2)) \end{aligned}$$

Es decir que para multiplicar complejos basta multiplicar sus módulos y sumar sus argumentos:

$$\boldsymbol{z_1 z_2 = |z_1||z_2|\,(cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,sen(\theta_1 + \theta_2))}$$

Se deduce que si $n \in \mathbb{N}$: $\boldsymbol{z^n = r^n(cos(n\theta) + i\,sen(n\theta))}$ **si** $\boldsymbol{r = |z|, \theta \in arg(z)}$

También, si $z_2 \neq 0$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1)r_2(\cos\theta_2 - i\,\mathrm{sen}\,\theta_2)}{{r_2}^2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1)(\cos\theta_2 - i\,\mathrm{sen}\,\theta_2)$$

$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1)(\cos(-\theta_2) + i\,\mathrm{sen}(-\theta_2)) = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1 - \theta_2))$$

Es decir que para efectuar el cociente entre dos complejos basta dividir sus módulos y restar sus argumentos:

$$\boldsymbol{\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,sen(\theta_1 - \theta_2)) \quad \mathbf{si} \quad z_2 \neq 0}$$

<u>Ejemplo</u>:

$$1 + i = \sqrt{2}\left(cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\,sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \qquad \left(-1 + \sqrt{3}i\right) = 2\left(cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\,sen\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$(1 + i)\left(-1 + \sqrt{3}i\right) = 2\sqrt{2}\left(cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\,sen\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = 2\sqrt{2}\left(cos\left(\frac{11}{12}\pi\right) + i\,sen\left(\frac{11}{12}\pi\right)\right)$$

$$\frac{(1 + i)}{\left(-1 + \sqrt{3}i\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{3}\right) + i\,sen\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{3}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(cos\left(-\frac{5}{12}\pi\right) + i\,sen\left(-\frac{5}{12}\pi\right)\right)$$

<u>Forma exponencial de los números complejos</u>

En Matemática C se estudiaron las series de potencias en el campo real. En particular, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$e^x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \qquad \operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Entonces, aceptando algunas propiedades elementales para series complejas se tiene $\forall \theta \in \mathbb{R}$:

$$\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \theta^{2n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \theta^{2n+1} = \sum_{n \text{ par}}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \theta^n + \sum_{n \text{ impar}}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \theta^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \theta^n$$

Es decir,

$$\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta \overset{(**)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (i\theta)^n$$

Si aceptamos que (*) sigue siendo válida cuando el argumento x se reemplaza por cualquier número complejo, entonces:

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (i\theta)^n \ , \forall \theta \in \mathbb{R}$$

Comparando con (**) obtenemos la siguiente igualdad para todo $\theta \in \mathbb{R}$, llamada **identidad de Euler**: $\boldsymbol{\cos\theta + i\, sen\, \theta = e^{i\theta}}$

Por lo tanto,

$$z = r(cos\,\theta + i\, sen\,\theta) = re^{i\theta}$$

Esta es la forma exponencial del complejo z:

$$\boldsymbol{z} = re^{i\theta} \ \text{ donde } \ r = |z|, \theta \in \arg(z)$$

Potencias

La fórmula del binomio de Newton es válida en los complejos para $n \in \mathbb{Z}$.

Si $z = a + ib \in \mathbb{C}$,

$$(a+i\,b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k (ib)^{n-k} \quad \text{donde} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Ejemplo:

$$(1-i\,\sqrt{3})^6 = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} 1^k \left(-i\sqrt{3}\right)^{6-k} = \binom{6}{0} 1^0 \left(-i\sqrt{3}\right)^{6-0} + \binom{6}{1} 1^1 \left(-i\sqrt{3}\right)^{6-1} +$$

$$\binom{6}{2} 1^2 \left(-i\sqrt{3}\right)^{6-2} + \binom{6}{3} 1^3 \left(-i\sqrt{3}\right)^{6-3} + \binom{6}{4} 1^4 \left(-i\sqrt{3}\right)^{6-4} + \binom{6}{5} 1^5 \left(-i\sqrt{3}\right)^{6-5} + \binom{6}{6} 1^6 \left(-i\sqrt{3}\right)^{6-6} =$$

$$= \left(-i\sqrt{3}\right)^6 + 6\left(-i\sqrt{3}\right)^5 + 15\left(-i\sqrt{3}\right)^4 + 20\left(-i\sqrt{3}\right)^3 + 15\left(-i\sqrt{3}\right)^2 + 6\left(-i\sqrt{3}\right) + 1 =$$

$$= -27 - 54\sqrt{3}\,i + 135 + 60\sqrt{3}i - 45 - 6\sqrt{3}\,i + 1 =$$

$$= (-27 + 135 - 45 + 1) + \left(-54\sqrt{3} + 60\sqrt{3} - 6\sqrt{3}\right)i = 64$$

Podemos comprobarlo en forma polar: $1 - i\,\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ así que

$$(1-i\,\sqrt{3})^6 = 2^6\left(\cos\left(\frac{6\pi}{3}\right) - i\,\text{sen}\left(\frac{6\pi}{3}\right)\right) = 64\left(\cos(2\pi) - i\,\text{sen}(2\pi)\right) = 64$$

Raíces de complejos

Dado un complejo z y un entero $n \geq 2$, se llama raíz n −ésima de z a cualquier complejo w tal que $w^n = z$

Es claro que la única raíz n-ésima de 0 es 0.

Si $z \neq 0$ y w se escriben en forma trigonométrica:

$$z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \quad \text{donde} \quad r = |z|, \theta \in \arg(z)$$

$$w = \rho(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi) \quad \text{donde} \quad \rho = |w|, \varphi \in \arg(w)$$

entonces:

$$w^n = z \quad \Leftrightarrow \quad \rho^n(\cos(n\varphi) + i \operatorname{sen}(n\varphi)) = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \rho^n = r \\ n\varphi = \theta + 2k\pi \,, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Es decir, si $\sqrt[n]{r}$ denota la única raíz real n-ésima no negativa de r:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \,, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Pareciera que hay infinitas raíces n-ésimas de un mismo complejo. Sin embargo, es fácil probar que sólo hay n raíces n −ésimas, que son las siguientes:

$$Si\ \theta \in \arg(z) \text{ entonces: } \sqrt[n]{z} = w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right) \quad \text{con} \quad k = 0,1,2, \dots, (n-1)$$

Ejemplo:

$$-8i = 8\left(cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\ sen\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\sqrt[3]{-8i} = \sqrt[3]{8}\left(cos\left(\frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right) + i\ sen\left(\frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right)\right)\ , k = 0{,}1{,}2$$

Para $k = 0$:

$$\sqrt[3]{-8i} = \sqrt[3]{8}\left(cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i\ sen\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} - i$$

Para $k = 1$:

$$\sqrt[3]{-8i} = \sqrt[3]{8}\left(cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\ sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2i$$

Para $k = 2$:

$$\sqrt[3]{-8i} = \sqrt[3]{8}\left(cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\ sen\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} - i$$

Comprobémoslo:

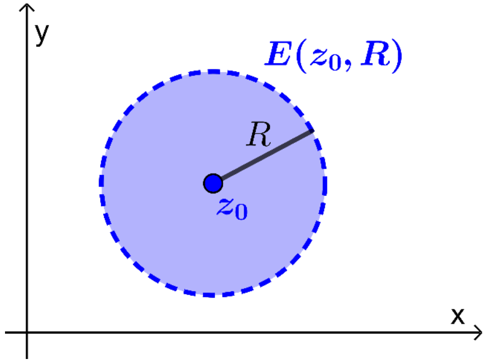
$$\left(\sqrt{3} - i\right)^3 = \left(\sqrt{3}\right)^3 + 3\left(\sqrt{3}\right)^2(-i) + 3\left(\sqrt{3}\right)(-i)^2 + (-i)^3 = 3\sqrt{3} - 9i - 3\sqrt{3} + i = -8i$$

$$(2i)^3 = -8i$$

$$\left(-\sqrt{3} - i\right)^3 = \left(-\sqrt{3}\right)^3 + 3\left(-\sqrt{3}\right)^2(-i) + 3\left(-\sqrt{3}\right)(-i)^2 + (-i)^3 = -3\sqrt{3} - 9i + 3\sqrt{3} + i = -8i$$

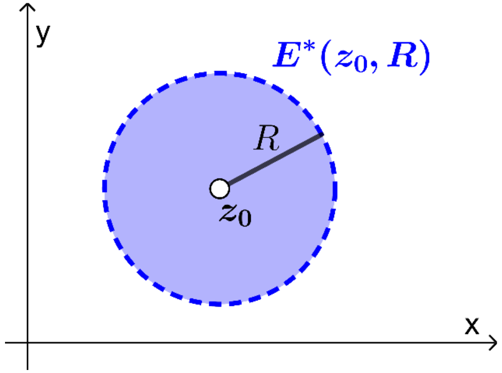
Topología elemental del plano complejo

Dados $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$, se llama **entorno** de z_0 de radio $R > 0$ al conjunto



$$E(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| < R\}$$

Se llama **entorno reducido** de z_0 de radio $R > 0$ al conjunto que se obtiene de $E(z_0, R)$ retirando el punto z_0:



$$E^*(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\}$$

El primero representa todos los puntos suficientemente cercanos a z_0, en tanto el segundo representa los puntos suficientemente cercanos a z_0 pero distintos de él.

Dados un subconjunto $S \subset \mathbb{C}$ y un punto un punto z_0, hay tres posibilidades:

- z_0 es **punto interior** de S si algún entorno (suficientemente pequeño) de z_0 está incluido en S, es decir si existe $\varepsilon > 0$ tal que $E(z_0, \varepsilon) \subset S$. Notar que todo punto interior de S pertenece a S pero no necesariamente todo punto de S es interior a S. Por ejemplo, $z_0 = 1$ es interior a $S_1 = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 2\}$ pero no a $S_2 = \{z \in \mathbb{C}: |z| \leq 1\}$ ni a $S_3 = \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$.
- z_0 es **punto exterior** de S si algún entorno (suficientemente pequeño) de z_0 es disjunto con S, es decir si existe $\varepsilon > 0$ tal que $E(z_0, \varepsilon) \cap S = \emptyset$. Notar que ningún punto exterior de S pertenece a S pero no necesariamente un punto que no pertenece a S es exterior a S. Por ejemplo, $z_0 = 1$ es exterior a $S_1 = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 2\}$ pero no a $S_2 = \{z \in \mathbb{C}: |z| \leq 1\}$ ni a $S_3 = \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$.

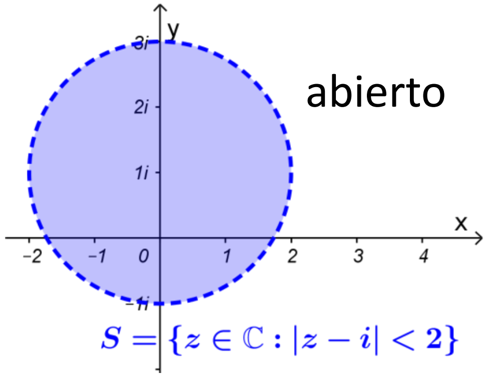
Dados un subconjunto $S \subset \mathbb{C}$ y un punto un punto z_0, hay tres posibilidades:

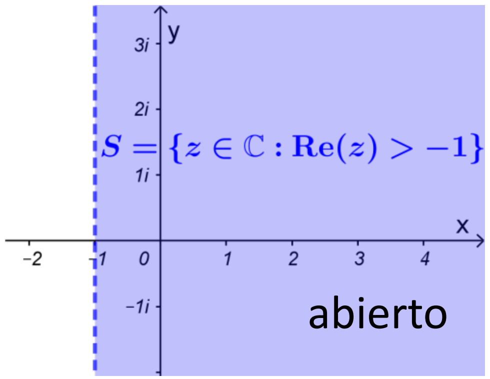
- z_0 es **punto interior** de S si algún entorno (suficientemente pequeño) de z_0 está incluido en S, es decir si existe $\varepsilon > 0$ tal que $E(z_0, \varepsilon) \subset S$. Notar que todo punto interior de S pertenece a S pero no necesariamente todo punto de S es interior a S. Por ejemplo, $z_0 = 1$ es interior a $S_1 = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 2\}$ pero no a $S_2 = \{z \in \mathbb{C}: |z| \leq 1\}$ ni a $S_3 = \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$.
- z_0 es **punto exterior** de S si algún entorno (suficientemente pequeño) de z_0 es disjunto con S, es decir si existe $\varepsilon > 0$ tal que $E(z_0, \varepsilon) \cap S = \emptyset$. Notar que ningún punto exterior de S pertenece a S pero no necesariamente un punto que no pertenece a S es exterior a S. Por ejemplo, $z_0 = 2i$ es exterior a $S_1 = \{z \in \mathbb{C}: |z| \leq 1\}$ pero no a $S_2 = \{z \in \mathbb{C}: |z| = 2\}$ ni a $S_3 = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 2\}$.
- z_0 es **punto frontera** de S si todo entorno de z_0 contiene al menos un punto de S y al menos un punto que no pertenece a S. Ejemplo: la frontera de $S = E(z_0, R)$ es $\{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| = R\}$. La frontera de $S = \{i\}$ es $\{i\}$. La frontera de $\mathbb{C}$ es vacía. La frontera de $S = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) \geq -1\}$ es $\{z \in \mathbb{C} : Re(z) = -1\}$.
- z_0 es **punto de acumulación** de S si todo entorno de z_0 contiene infinitos puntos de S, lo que equivale a que todo entorno reducido de z_0 contiene al menos un punto de S. La condición se expresa:

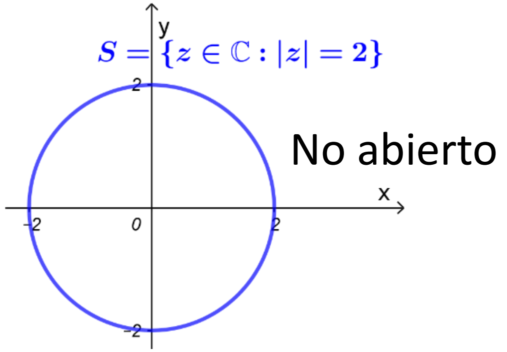
$$\forall R > 0, E^*(z_0, R) \cap S \neq \emptyset.$$

El **interior** de un conjunto S es el conjunto formado por los puntos interiores de S; el **exterior** de S es el conjunto que consta de los puntos exteriores de S; la **frontera** de S se es el conjunto de todos los puntos de frontera de S. Ejemplo: $S = \{x + iy \in \mathbb{C} : -1 < x \leq 1\}$. El interior de S es $\{x + iy \in \mathbb{C} : -1 < x < 1\}$. La frontera de S es $\{x + iy \in \mathbb{C} : x = -1\} \cup \{x + iy \in \mathbb{C} : x = 1\}$. El exterior de S es$\{x + iy \in \mathbb{C} : x < -1\} \cup \{x + iy \in \mathbb{C} : x > 1\}$. Por otra parte, si $S_3 = \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$ entonces el interior de S_3 es vacío y la frontera de S_3 coincide con S_3.

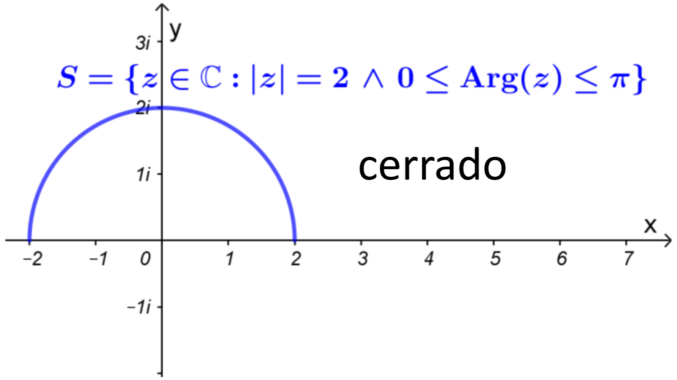
- S es un conjunto ***abierto*** si para cada $z_0 \in S$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $E(z_0;\varepsilon) \subseteq S$. Ejemplo: $S = E(i;2)$ y $S = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) > -1\}$ son conjuntos abiertos, pero $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ no lo es.

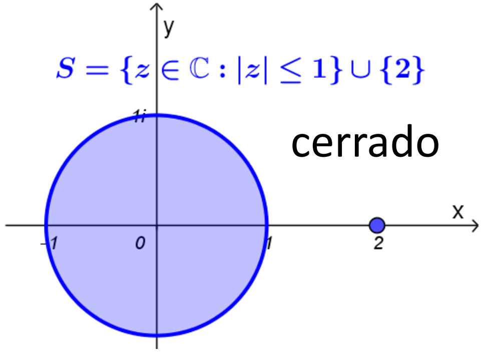


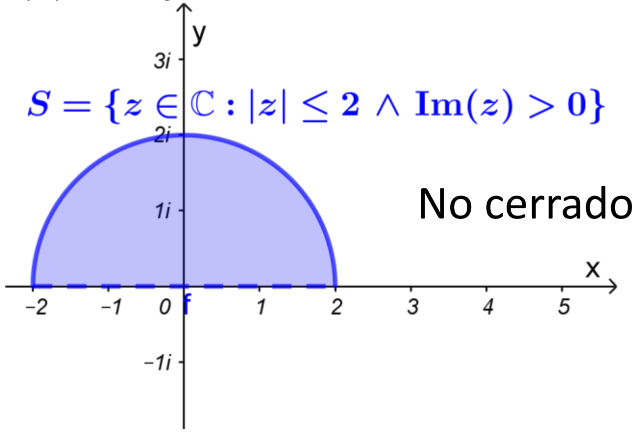




- S es un conjunto ***cerrado*** si su frontera está incluida en S . Ejemplo: $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2 \ \wedge \ 0 \leq \mathrm{Arg}(z) \leq \pi\}$ es un conjunto cerrado; $S = \{0, 1 + i\}$ es cerrado; $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2 \ \wedge \ \mathrm{Im}(z) > 0\}$ no es cerrado.







Es claro que S es un conjunto ***abierto*** si todos sus puntos son interiores.

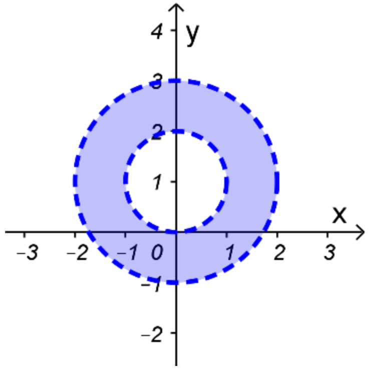
No es difícil probar que:

- S es un conjunto ***abierto*** sii S excluye a su frontera.
- S es un conjunto ***cerrado*** sii su complemento $\mathbb{C} - S$ es in conjunto abierto.
- S es un conjunto ***cerrado*** sii contiene a todos sus puntos de acumulación.

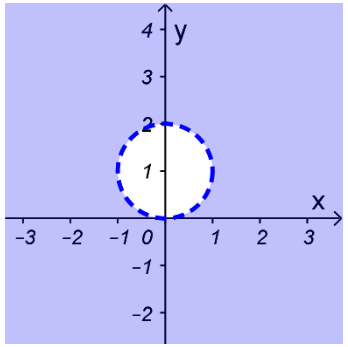
Otro concepto:

- S es un conjunto ***acotado*** si existe $M > 0$ tal que $\forall z \in S, |z| \leq M$. Por ej: $S_1 = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z - i| < 2\}$ es acotado pues $\forall z \in S_1, |z| \leq 3$, pero $S_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| > 1\}$ no lo es.
- S se dice ***arco-conexo*** si todo par de puntos de S pueden conectarse mediante una curva continua que los tiene por extremos y está completamente incluida en S. Por ejemplo, los anteriores S_1 y S_2 son abiertos conexos pero $S_3 = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}(z)| > 1\}$ es abierto inconexo.

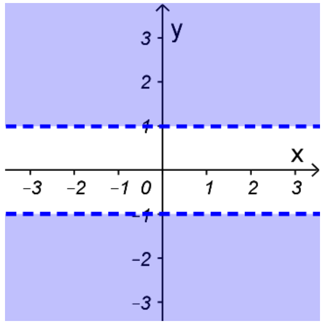
Acotado
Conexo



No
acotado.
Conexo



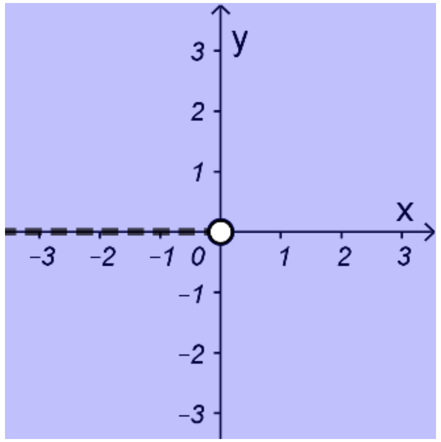
No
acotado.
Inconexo



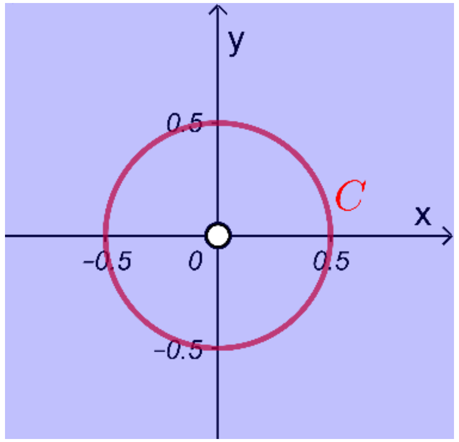
Para S abierto, puede probarse que S es conexo si y sólo si S es arco-conexo.

- S se dice ***abierto simplemente conexo*** si además de ser abierto conexo tiene la propiedad que toda curva C cerrada, simple, suave o suave a trozos e incluida en S es tal que la región interior a ella también está incluida en S.
  Por ejemplo: $S_4 = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 1\}$ y $S_5 = \mathbb{C} - \{x + iy : y = 0 \ \wedge x \leq 0\}$ son abiertos simplemente conexos pero $S_1 = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ y $S_6 = \mathbb{C} - \{0\}$ no son simplemente conexos.

Abierto simplemente conexo



Abierto conexo. No simplemente conexo



Ejemplo: Representar gráficamente los siguientes subconjuntos del plano complejo:

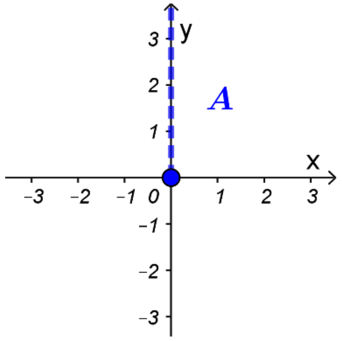
a) $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(iz) = 0 \ \wedge \ \operatorname{Re}(iz) \leq 0\}$

b) $B = \{z \in \mathbb{C} : |z| = |z + 2i|\}$

c) $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < |z + 2i| < |z - 4i|\}$

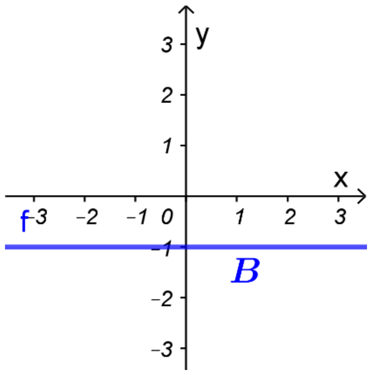
Rta

a) $\qquad z = x + iy \qquad iz = i(x + iy) = -y + ix$



- $\operatorname{Im}(iz) = 0 \ \Leftrightarrow \ \operatorname{Im}(-y + ix) = 0 \Leftrightarrow \ x = 0$
- $\operatorname{Re}(iz) \leq 0 \ \Leftrightarrow \ \operatorname{Re}(-y + ix) \leq 0 \Leftrightarrow -y \leq 0 \ \Leftrightarrow y \geq 0$

Por lo tanto, $A = \{x + iy \in \mathbb{C} : x = 0 \ \wedge y \geq 0\}$



b)

$|z| = |z + 2i| \ \Leftrightarrow \ |z|^2 = |z + 2i|^2 \Leftrightarrow |x + iy|^2 = |x + iy + 2i|^2 \ \Leftrightarrow |x + iy|^2 = |x + i(y + 2)|^2 \ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ x^2 + y^2 = x^2 + (y + 2)^2 \ \Leftrightarrow \ y^2 = y^2 + 4y + 4 \Leftrightarrow \ 4y = -4 \ \Leftrightarrow \ y = -1$

Luego, $B = \{x + iy \in \mathbb{C} : y = -1\}$

c)

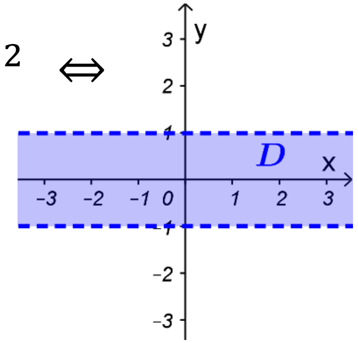
- $|z| < |z + 2i| \ \Leftrightarrow \ |z|^2 < |z + 2i|^2 \ \Leftrightarrow \ |x + iy|^2 < |x + iy + 2i|^2 \ \Leftrightarrow \ |x + iy|^2 < |x + i(y + 2)|^2 \ \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \ x^2 + y^2 < x^2 + (y + 2)^2 \ \Leftrightarrow \ y^2 < y^2 + 4y + 4 \Leftrightarrow \ 4y > -4 \ \Leftrightarrow \ y > -1$

- $|z + 2i| < |z - 4i| \ \Leftrightarrow \ |z + 2i|^2 < |z - 4i|^2 \ \Leftrightarrow \ |x + iy + 2i|^2 < |x + iy - 4i|^2 \ \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \ |x + i(y + 2)|^2 < |x + i(y - 4)|^2 \ \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \ x^2 + (y + 2)^2 < x^2 + (y - 4)^2 \ \Leftrightarrow \ y^2 + 4y + 4 < y^2 - 8y + 16 \Leftrightarrow \ 12y < 12 \ \Leftrightarrow \ y < 1$



Entonces $D = \{z \in \mathbb{C} : -1 < y < 1\}$