Leyes integrales del campo magnético

Flujo de B a través de una superficie cerrada:

$$\oiint_S \vec{B} \bullet d\vec{a} = ???$$

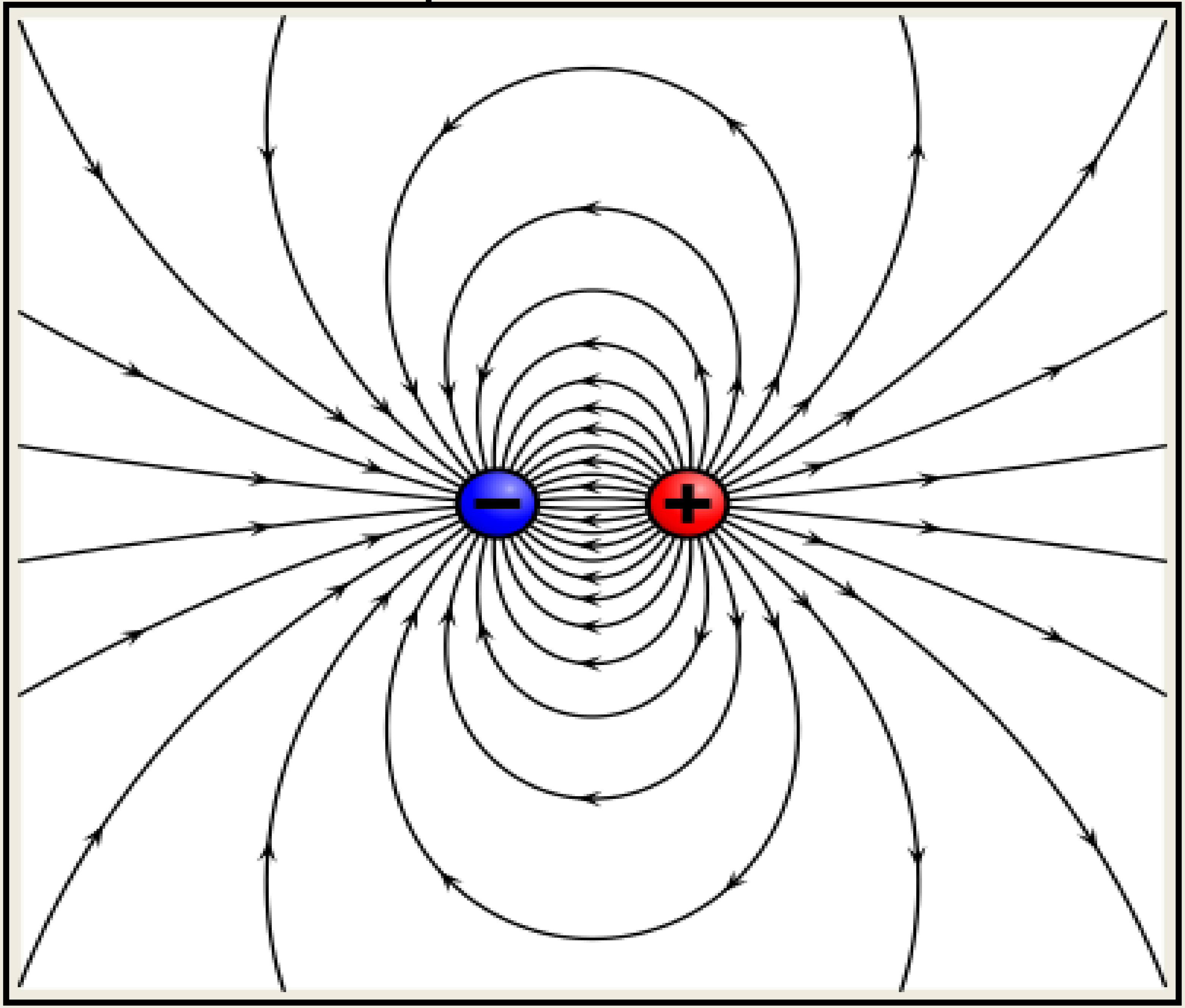
(Ley de Gauss para CM)

Circulación de B:

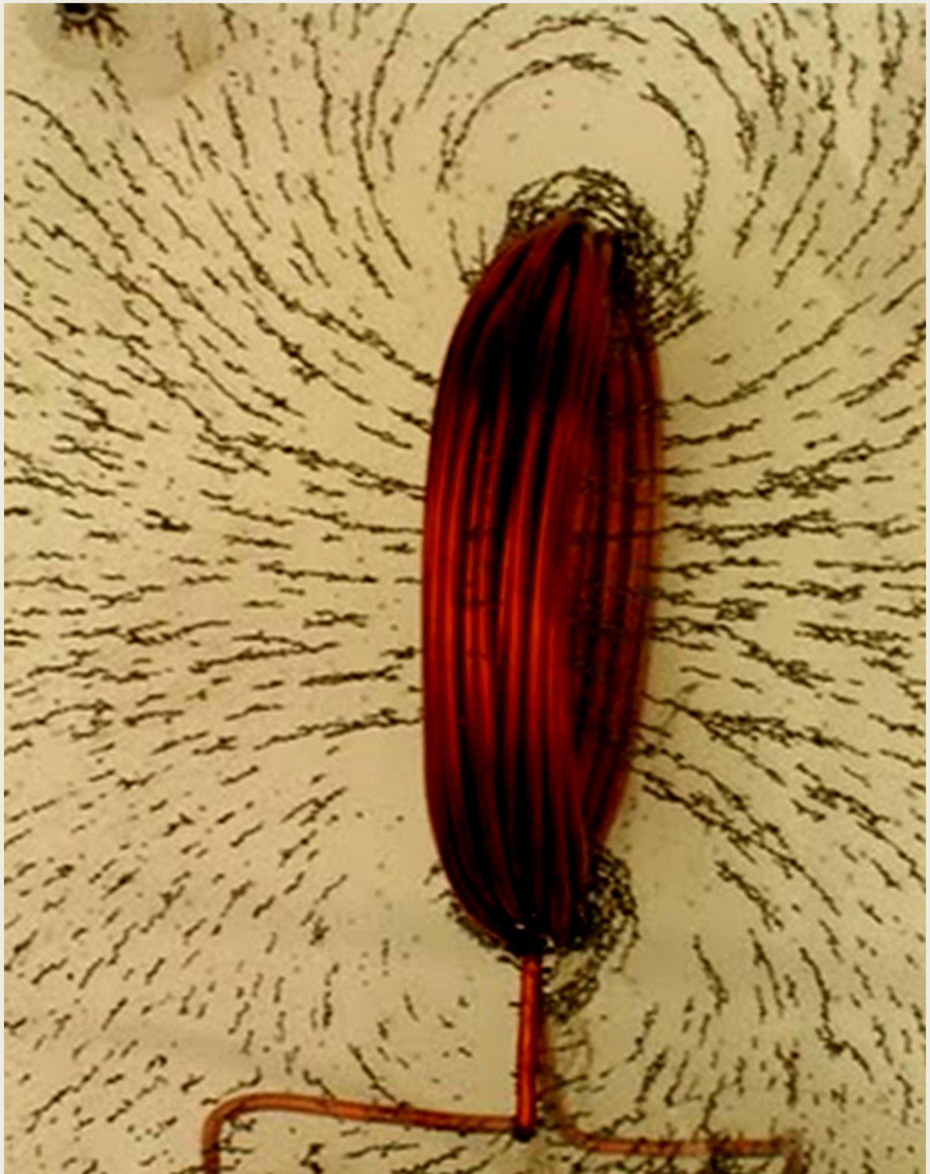
$$\oint_C \vec{B} \bullet d\vec{l} = ???$$

(Ley de Ampere)

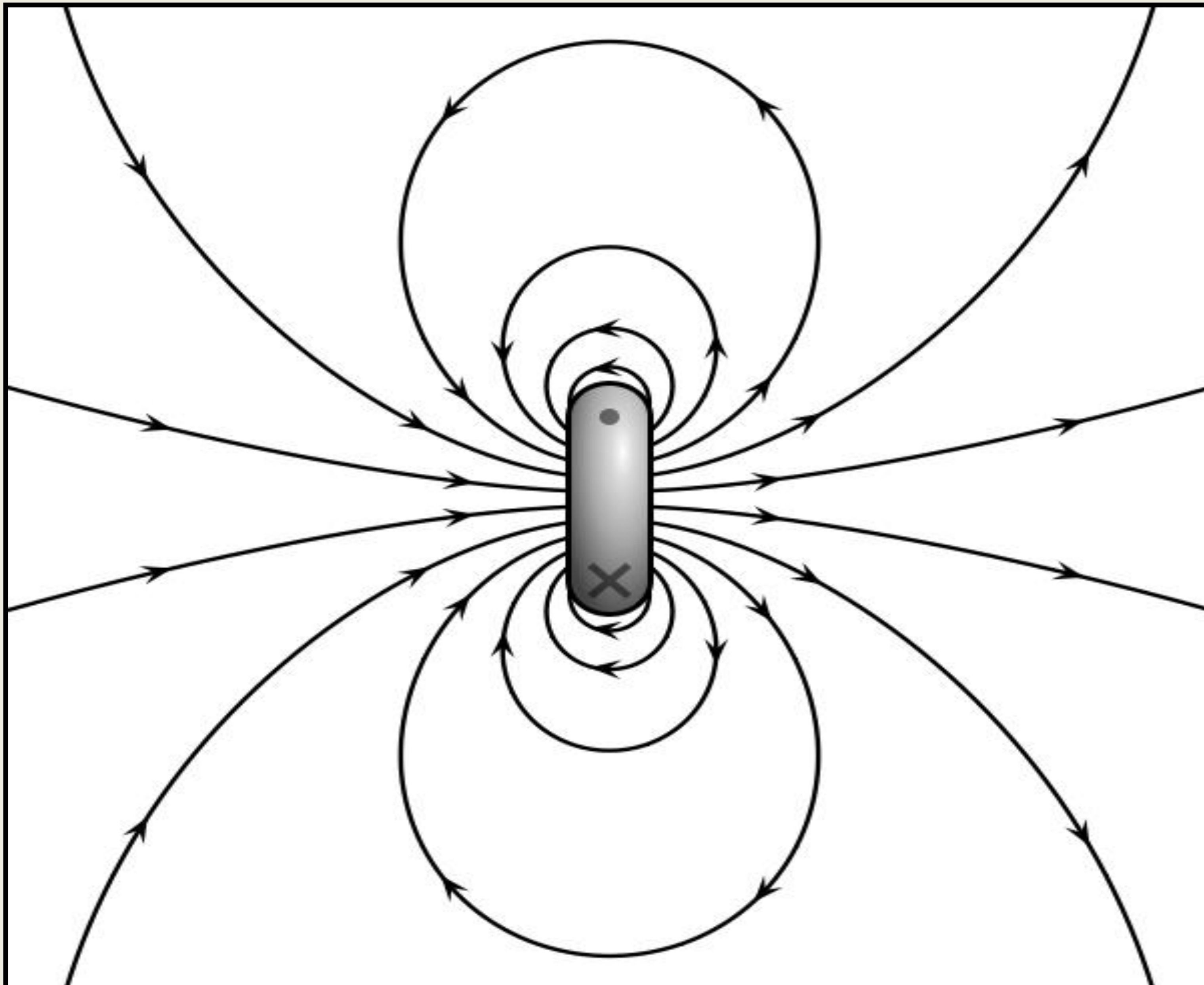
Dipolo eléctrico



Líneas de campo magnético B de un conjunto de espiras circulares por las que circula una corriente I ejemplificadas con limaduras de hierro



Dipolo magnético (espira)



Ley de Gauss para campo magnético

Las líneas de campo magnético forman lazos cerrados.

No comienzan ni terminan en ninguna fuente.

No existen monopolos magnéticos

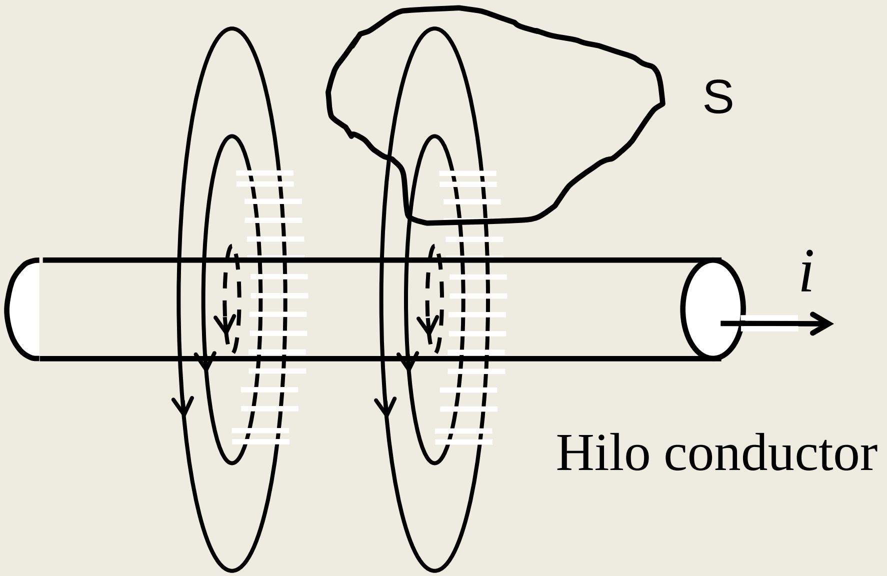
$$\Phi_{magnético} = \iint_S \vec{B} \bullet d\vec{a}$$

$$\text{Sobre una superficie cerrada:}$$

$$\boxed{\oiint_S \vec{B} \bullet d\vec{a} = 0}$$

Ley de Gauss para campo magnético

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

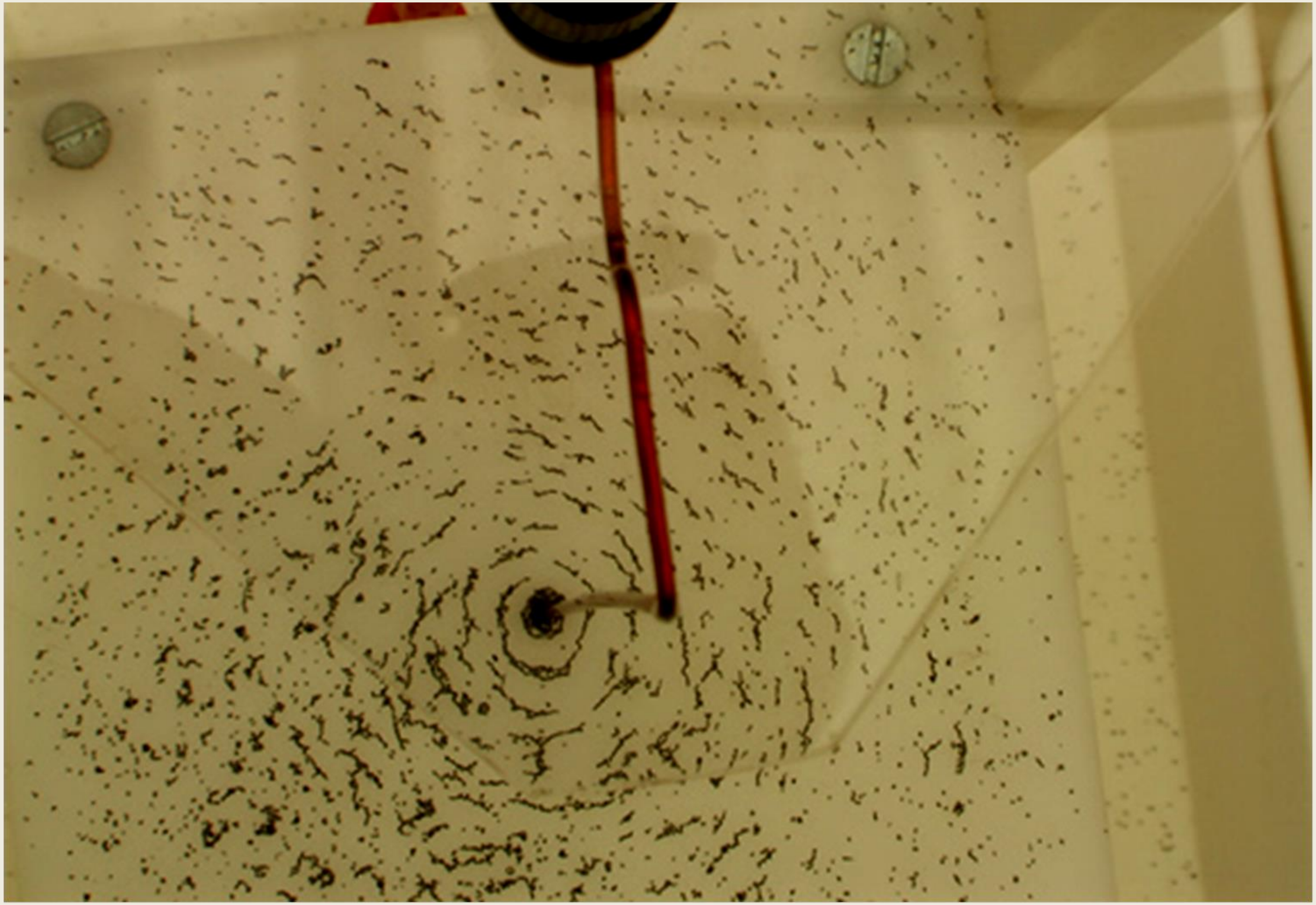


El flujo magnético en una superficie cerrada es cero

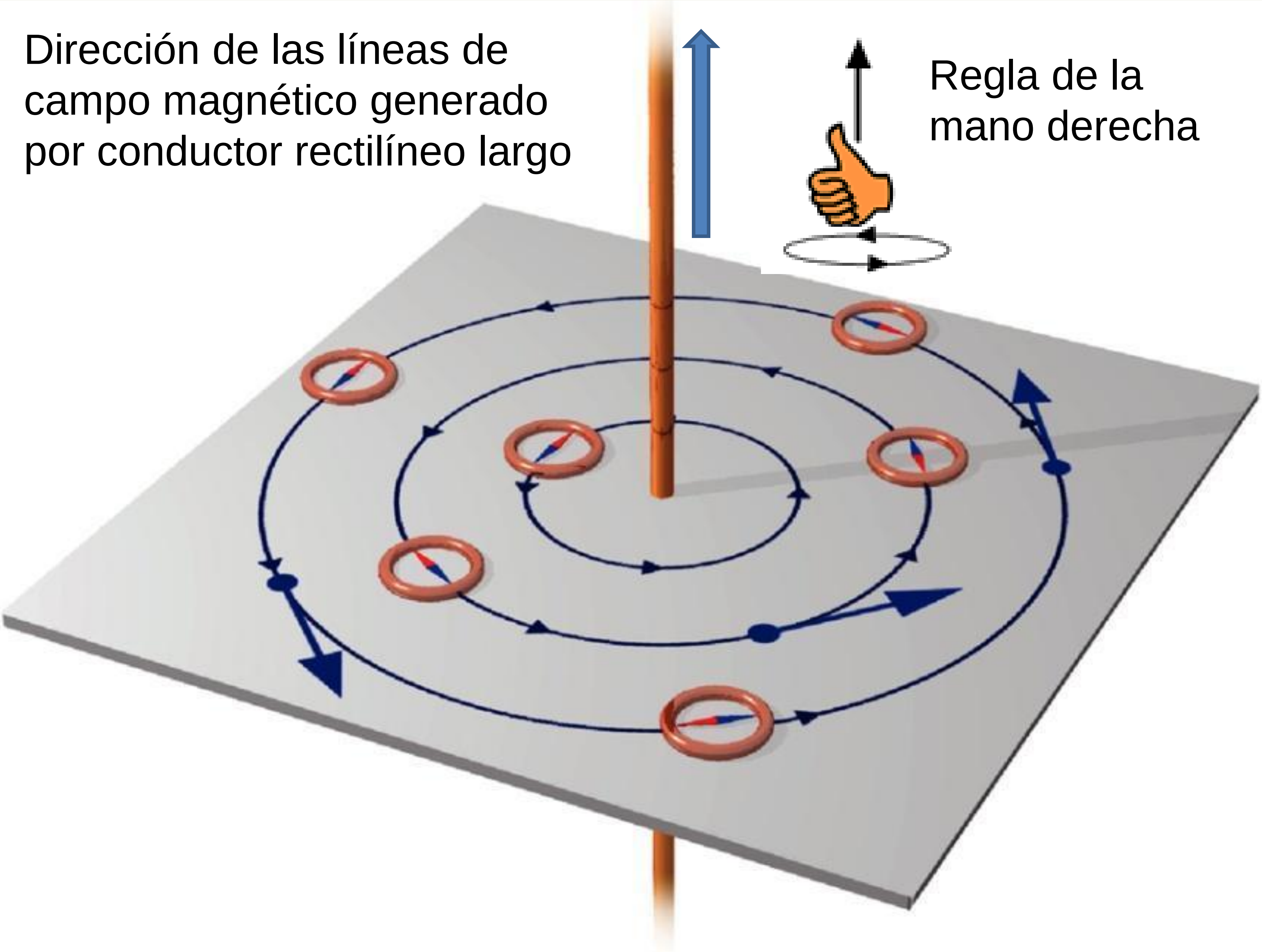
Esto se debe a que las líneas de campo son cerradas

No existen monopolos magnéticos

Líneas de campo magnético B de un conductor rectilíneo largo por el que circula una corriente I ejemplificadas con limaduras de hierro



Dirección de las líneas de campo magnético generado por conductor rectilíneo largo



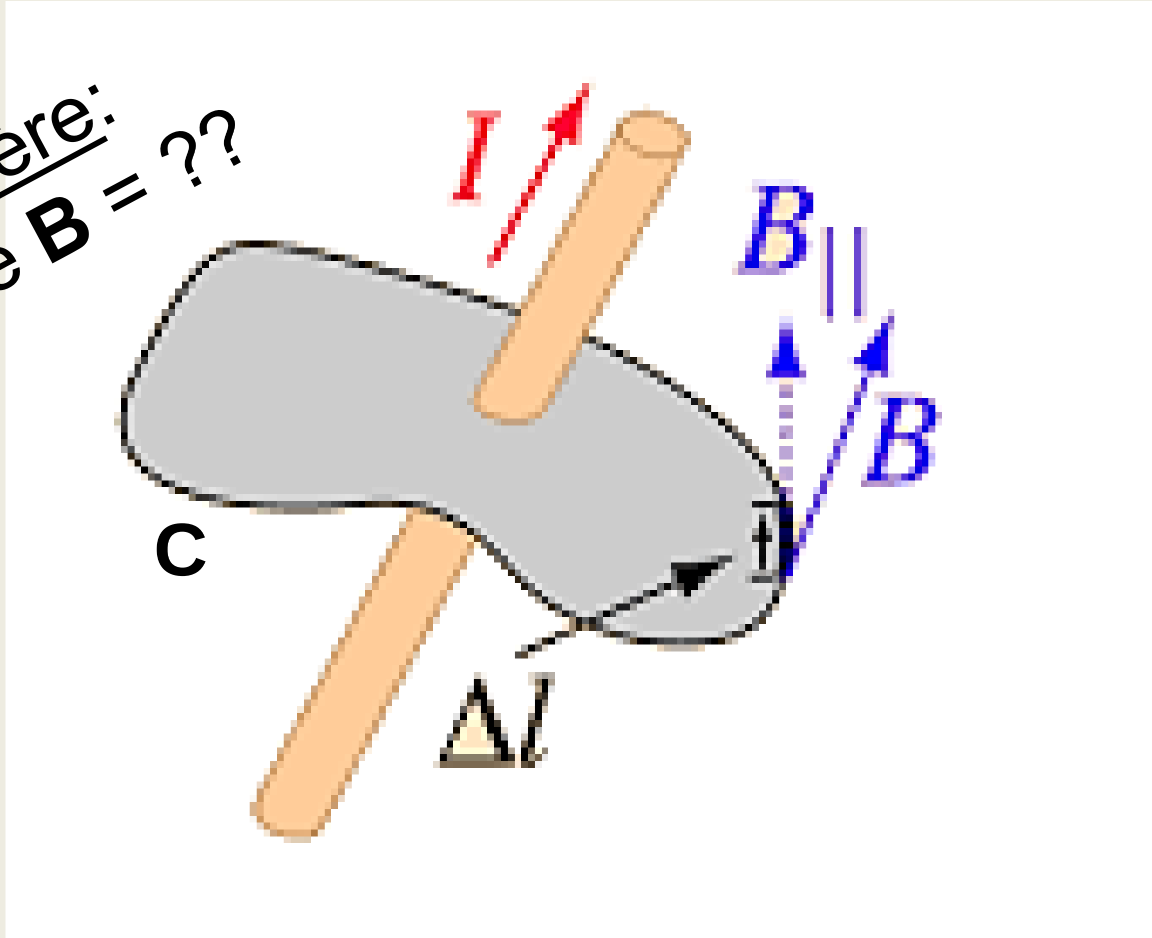
La ley de Ampère se puede deducir para el caso especial del campo creado por un conductor rectilíneo muy largo comparado con su diámetro.

La figura muestra dicho conductor, que porta una corriente eléctrica estacionaria I, y genera un campo **B** en su entorno.

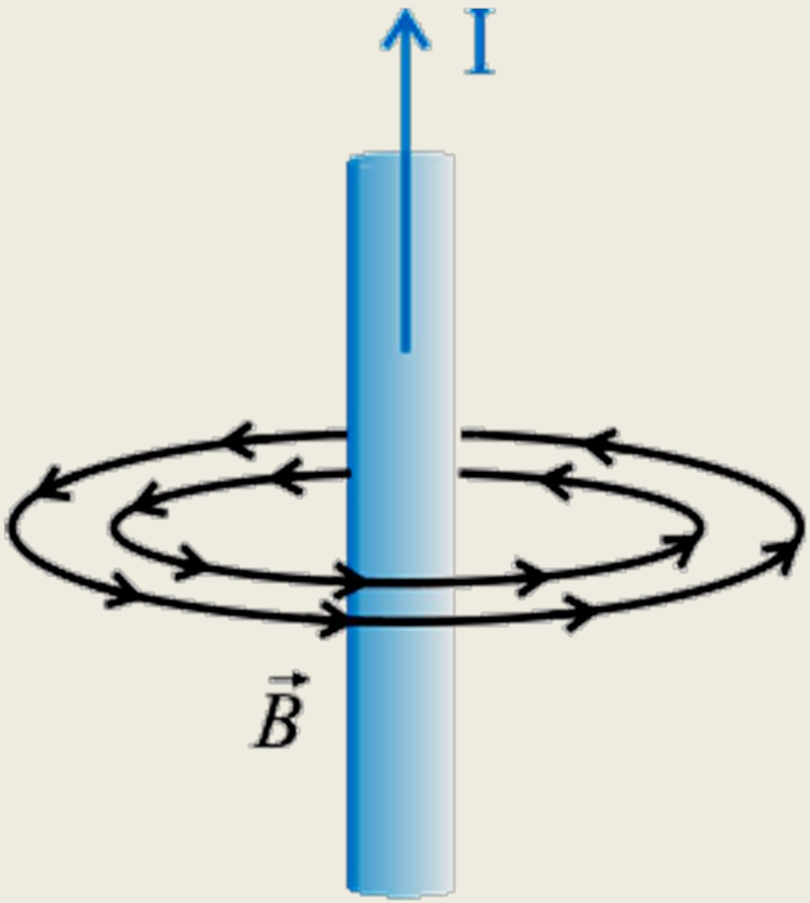
Calculemos la circulación de dicho vector **B** a lo largo de una curva arbitraria que rodea al conductor.

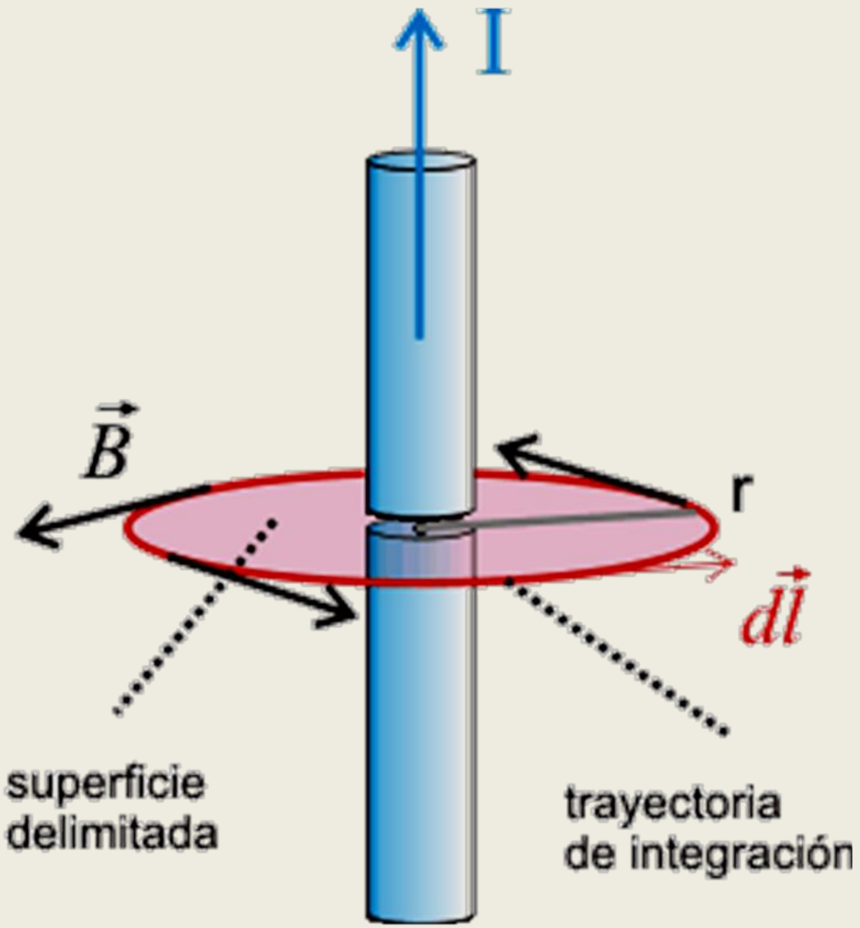
<u>Ley de Ampère:</u>

Circulación de **B** = ??

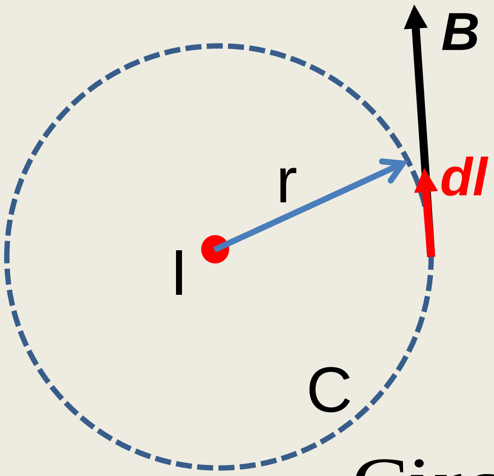


Campo magnético de recta de corriente por Ley de Ampere





Campo magnético de recta de corriente por Ley de Ampere



Por simetría, el módulo del campo solo depende de r y las líneas son circunferencias concéntricas al conductor.

Curva amperiana: circunferencia de radio r

$$\text{Circulación de } \vec{B}: \quad \oint_C \vec{B} \bullet d\vec{l} = \oint_C B\, dl \cos(0)$$

$$\text{como } \vec{B} \text{ se calcula sobre la circunferencia C,}$$

$$\text{por simetría, } B \text{ es cte sobre C y paralelo a } d\vec{l}$$

$$B \oint_C dl = B\, 2\pi\, r = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} 2\pi\, r = \mu_0\, I$$

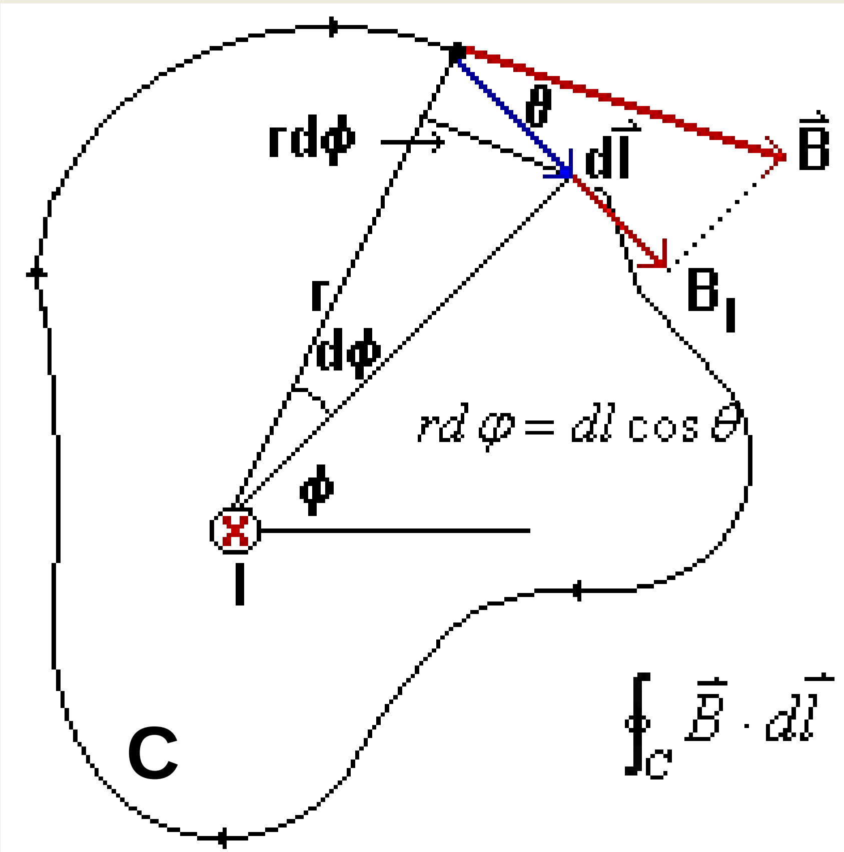
$$\therefore \boxed{\oint_C \vec{B} \bullet d\vec{l} = \mu_0\, I}$$

Ley de Ampere

Para simplificar los cálculos, supongamos que la curva arbitraria C yace en un plano perpendicular al conductor rectilíneo.

El vector campo magnético **B** en un punto cualquiera de la curva, está en el plano de la figura y es perpendicular al vector **r** que va desde el conductor al punto.

La magnitud de **B** en ese punto debido al conductor está dado por: $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$



$B_l = B\cos\theta$ (componente tangencial)

$$B_l\,dl = B\cos\theta\,dl = \vec{B}\cdot d\vec{l}$$

$$\vec{B}\cdot d\vec{l} = B\,dl\cos\theta = B\,\frac{r\,d\varphi}{\cos\theta}\cos\theta$$

$$\vec{B}\cdot d\vec{l} = B\,r\,d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,r\,d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\,d\varphi$$

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\oint d\varphi$$

$$\boxed{\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I}$$

LEY DE AMPÉRE

Pero si la curva **C** no contiene al conductor, el cambio neto en el ángulo ϕ alrededor de la trayectoria es 0 :

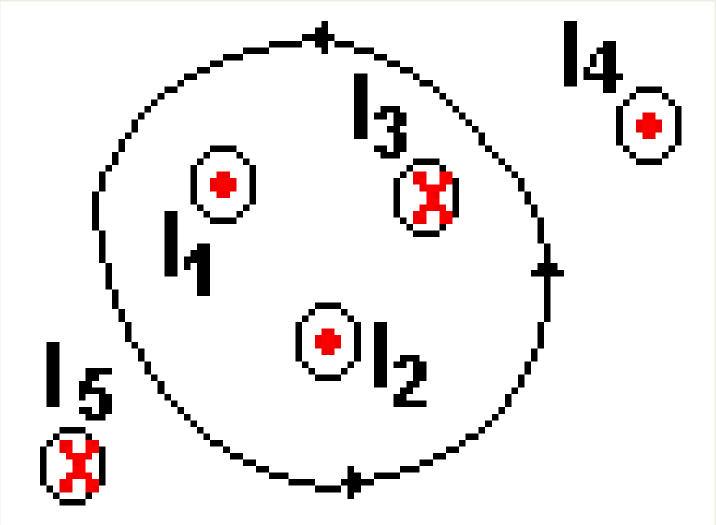
$$\oint_{C} d\varphi = 0$$

ya que el valor de ϕ será el mismo al comienzo y al final de cualquier recorrido completo sobre la trayectoria (*HACER LA REPRESENTACIÓN SOBRE LA FIGURA ANTERIOR, SUPONIENDO QUE EL CONDUCTOR ESTÁ POR FUERA DE LA CURVA* **C**).

Si hay presentes otros conductores que no atraviesan la superficie encerrada por la curva **C**, estos pueden contribuir al valor de **B** en cada punto, pero las integrales curvilíneas de sus campos son nulas.

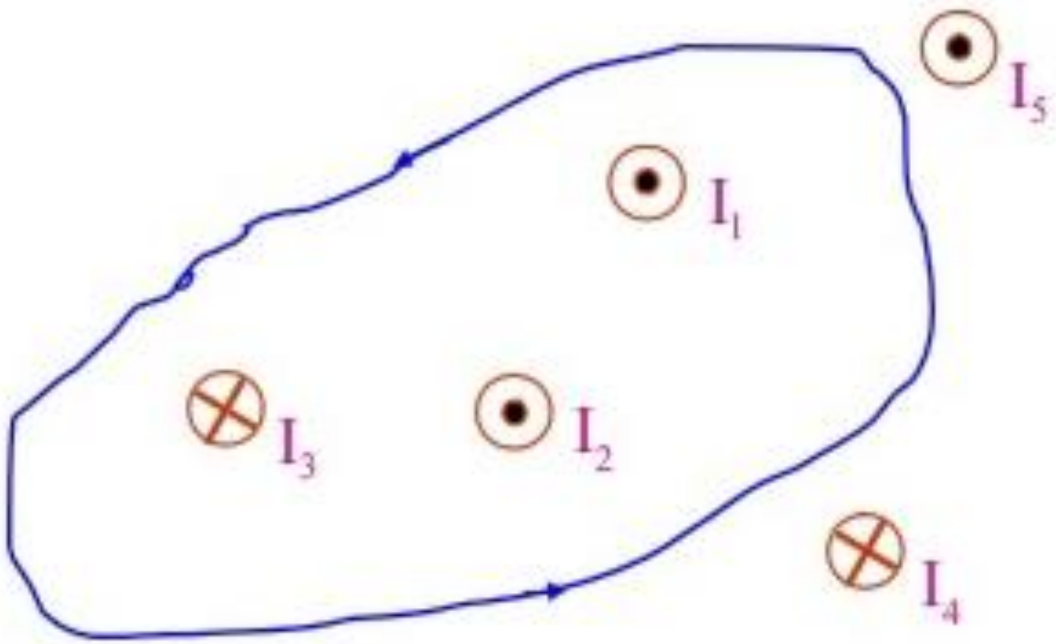
$$\boxed{\oint_{C} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{\mathbf{neta}}}$$

Ley de Ampére para varias corrientes



Las corrientes $\mathbf{I_4}$ e $\mathbf{I_5}$ NO cuentan en la sumatoria

En el caso en el que la curva de integración encierre varias corrientes, el signo de cada una de ellas viene dado por la regla de la mano derecha: *curvando los dedos de la mano derecha en el sentido de la integración, el pulgar indica el sentido de la corriente que contribuye de forma positiva.*



$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_o I_c$$

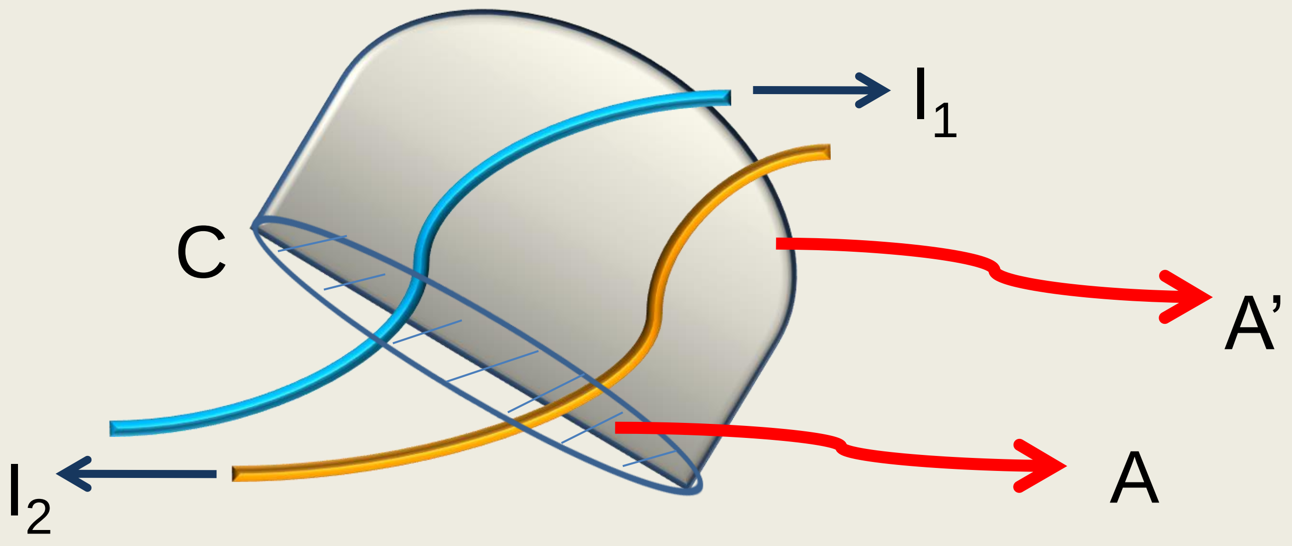
donde

$$I_c = I_1 + I_2 - I_3$$

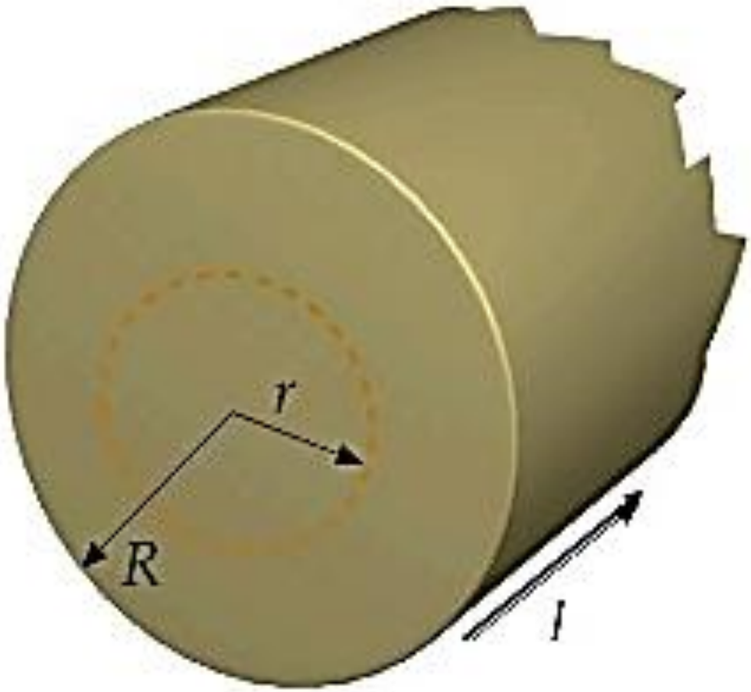
Ley de Ampere

Circulación de B: $$\oint_C \vec{B} \bullet d\vec{l} = \mu_0 \ I_{Neta}$$

La circulación de B alrededor de cualquier trayectoria cerrada C es proporcional a la **corriente estacionaria neta** que pasa a través de **cualquier superficie limitada por C**

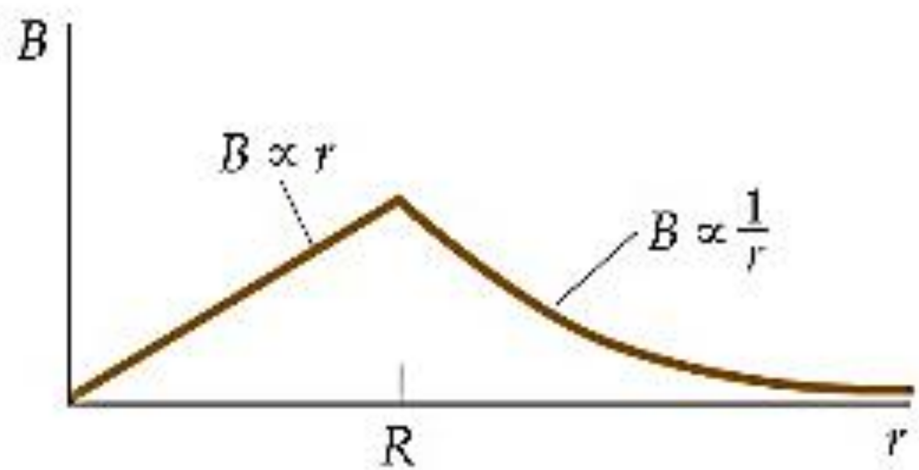


Ejemplo: Cálculo del campo magnético producido por un alambre recto y largo que transporta una corriente I.

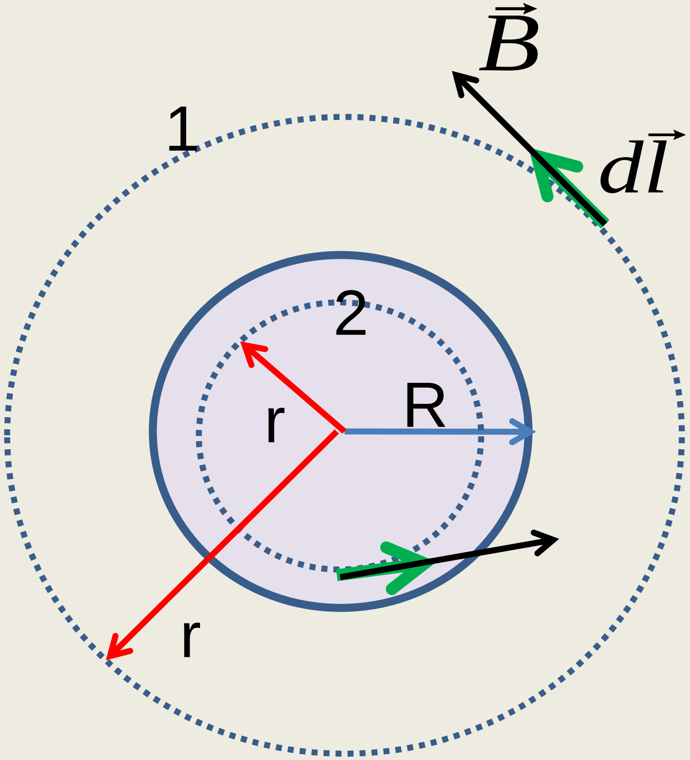


$$r < R \quad \Rightarrow B = \frac{\mu_o I}{2\pi R^2} r$$

$$r > R \quad \Rightarrow B = \frac{\mu_o I}{2\pi r}$$



Problemas: C2 a P11, Práctica 7



Conductor cilíndrico muy largo de radio R, que lleva en toda su área transversal una corriente I hacia el lector. Por simetría, B sólo depende de r y es paralelo a dl

Para r > R : curva 1:

$$\text{Ley de Ampere:} \quad \oint_C \vec{B} \bullet d\vec{l} = \mu_0 \; I_{Neta}$$

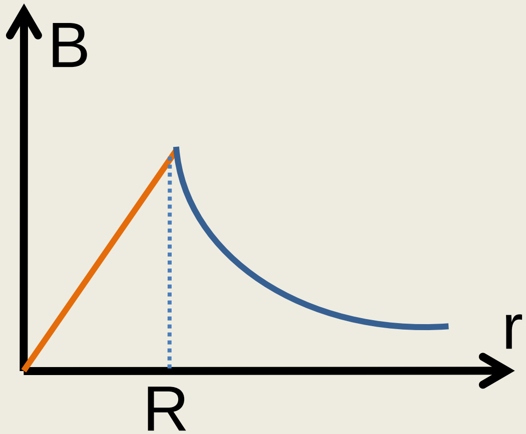
$$B \oint_C dl = B\, 2\pi\, r = \mu_0 \, I \Rightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}}$$

Para r < R : curva 2:

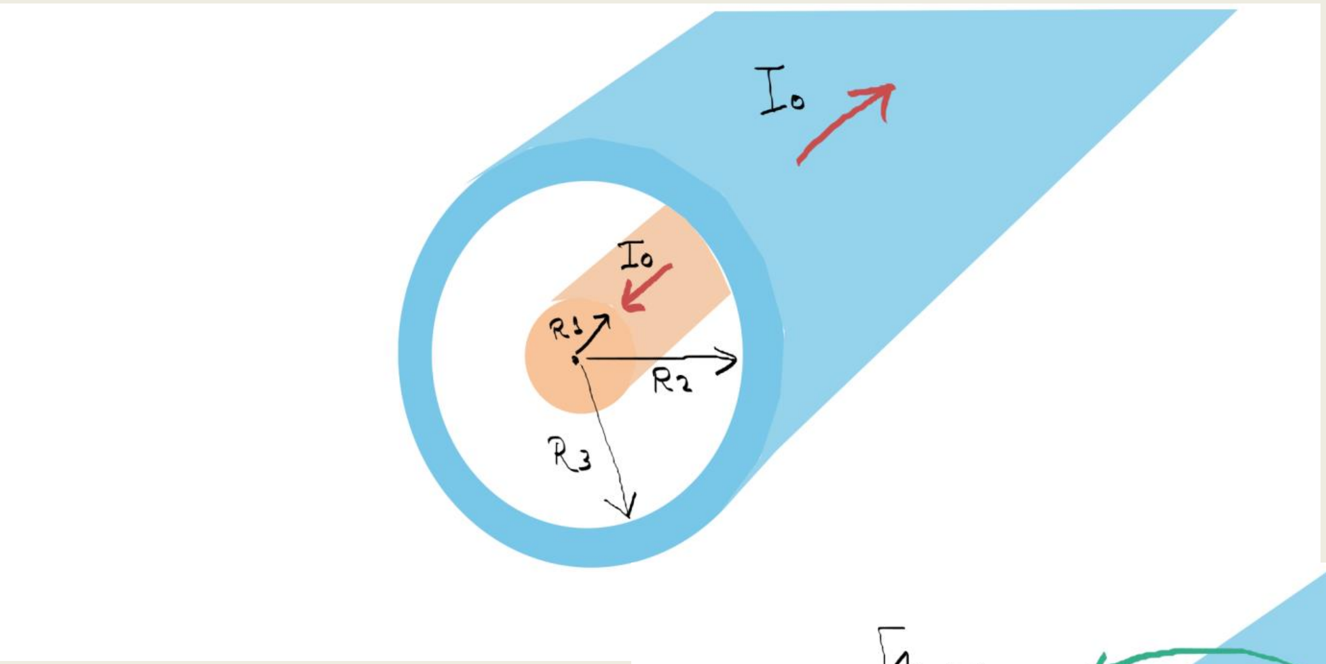
$$B \oint_C dl = B\, 2\pi\, r = \mu_0 \, I_{neta} \; ;$$

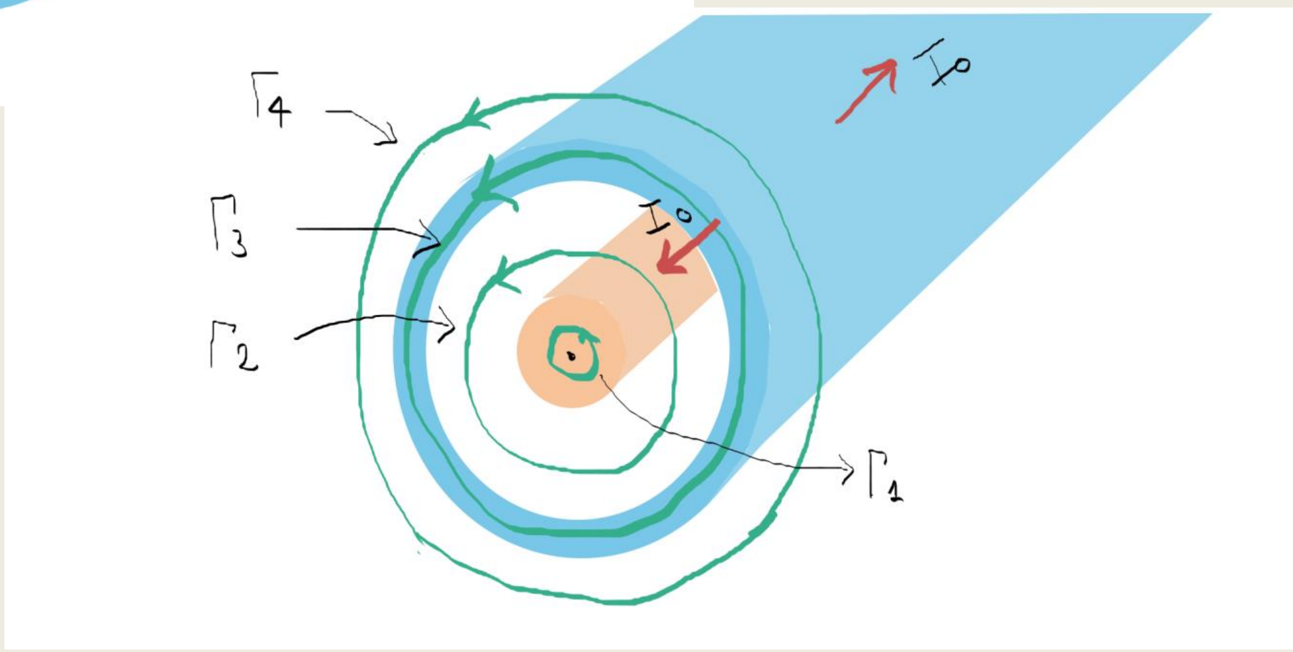
$$I_{neta} \text{ dentro de curva } 2 = \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2$$

$$B\, 2\pi\, r = \mu_0 \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2 \Rightarrow \boxed{B = \mu_0 \frac{I}{2\pi R^2} r}$$

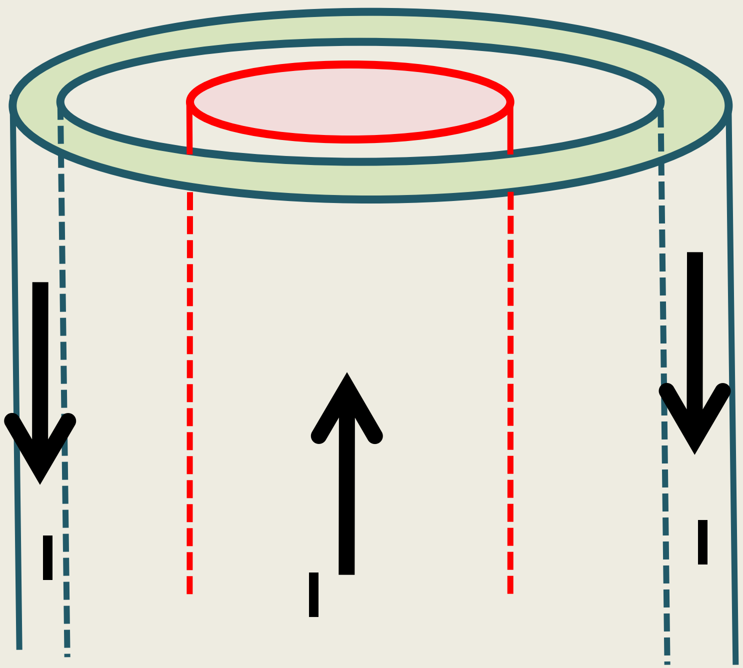


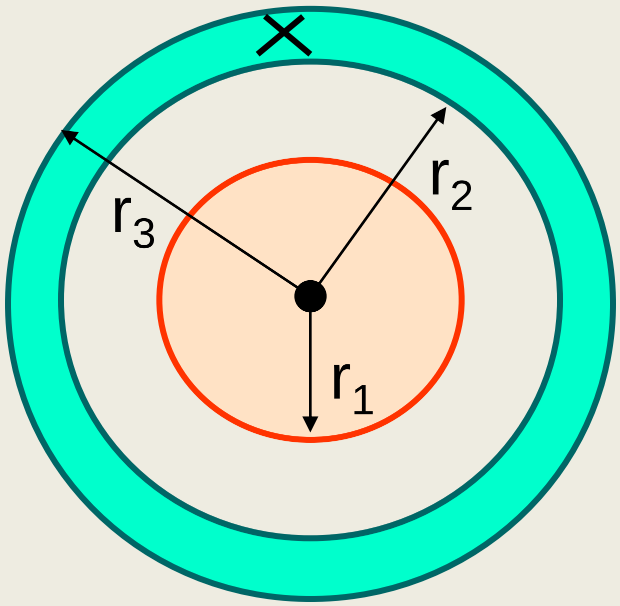
Cálculo de campo magnético de un cable coaxial que porta una corriente I_0. Esquema de las curvas Amperianas.





Campo magnético de conductor coaxial que lleva una corriente I





Como tenemos DOS conductores, podemos usar el Principio de Superposición para calcular el campo magnético en todas las regiones:

$r < r_1$

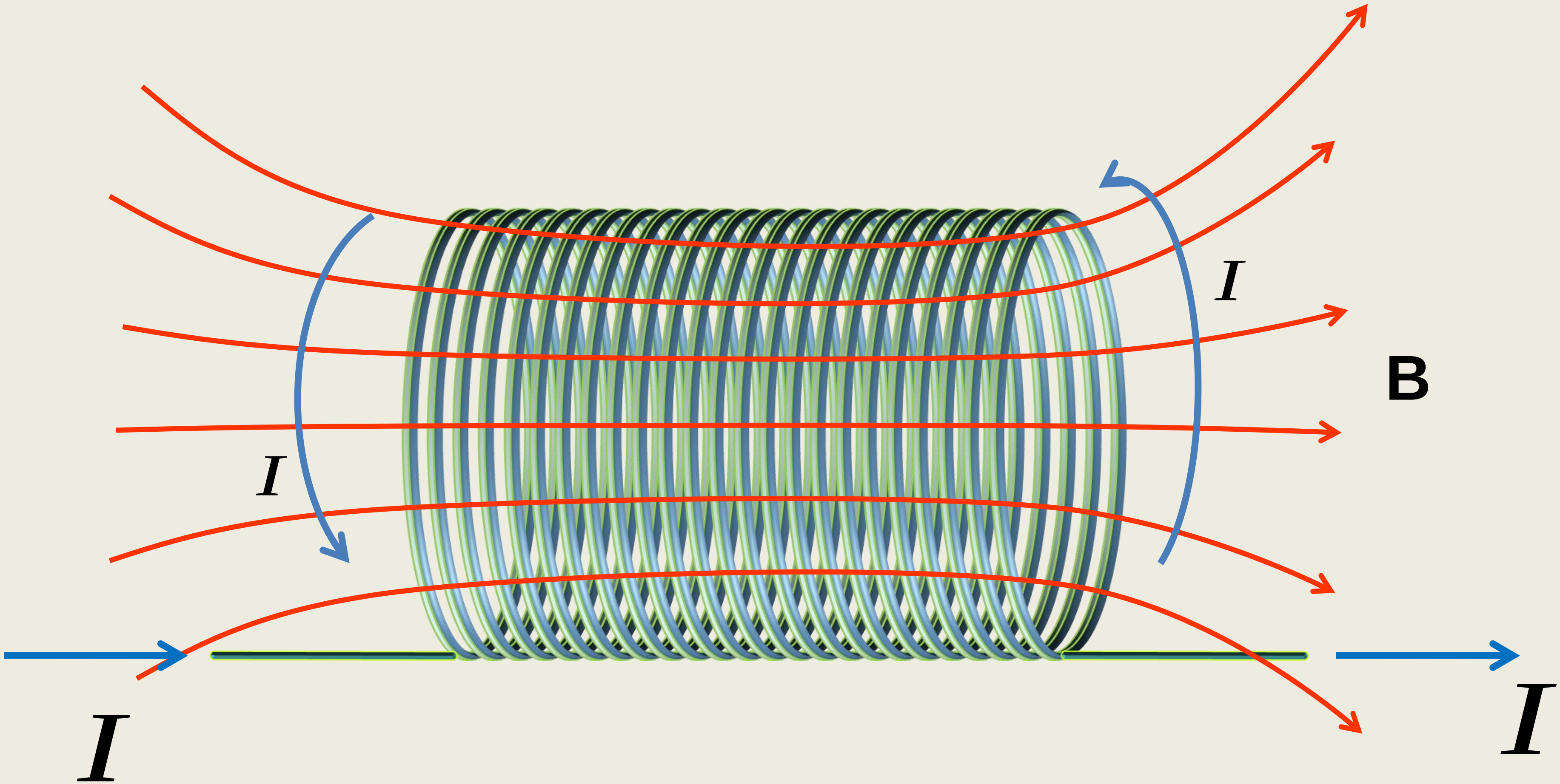
$r_1 < r < r_2$

$r_2 < r < r_3$

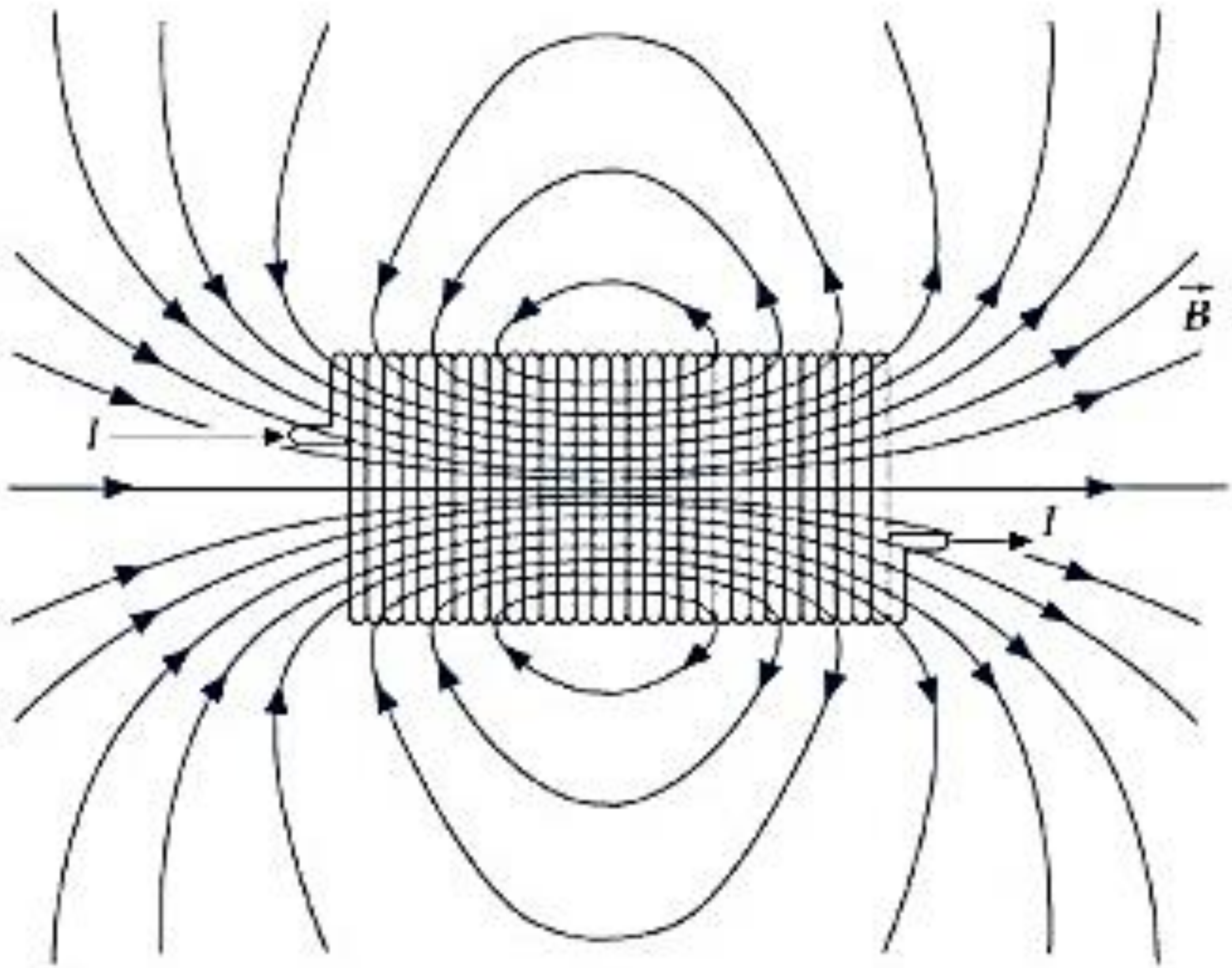
$r > r_3$

Debido a la alta simetría (cilíndrica), el módulo del campo sólo depende de r y las líneas forman circunferencias concéntricas alrededor de los conductores → *Ley de Ampere*

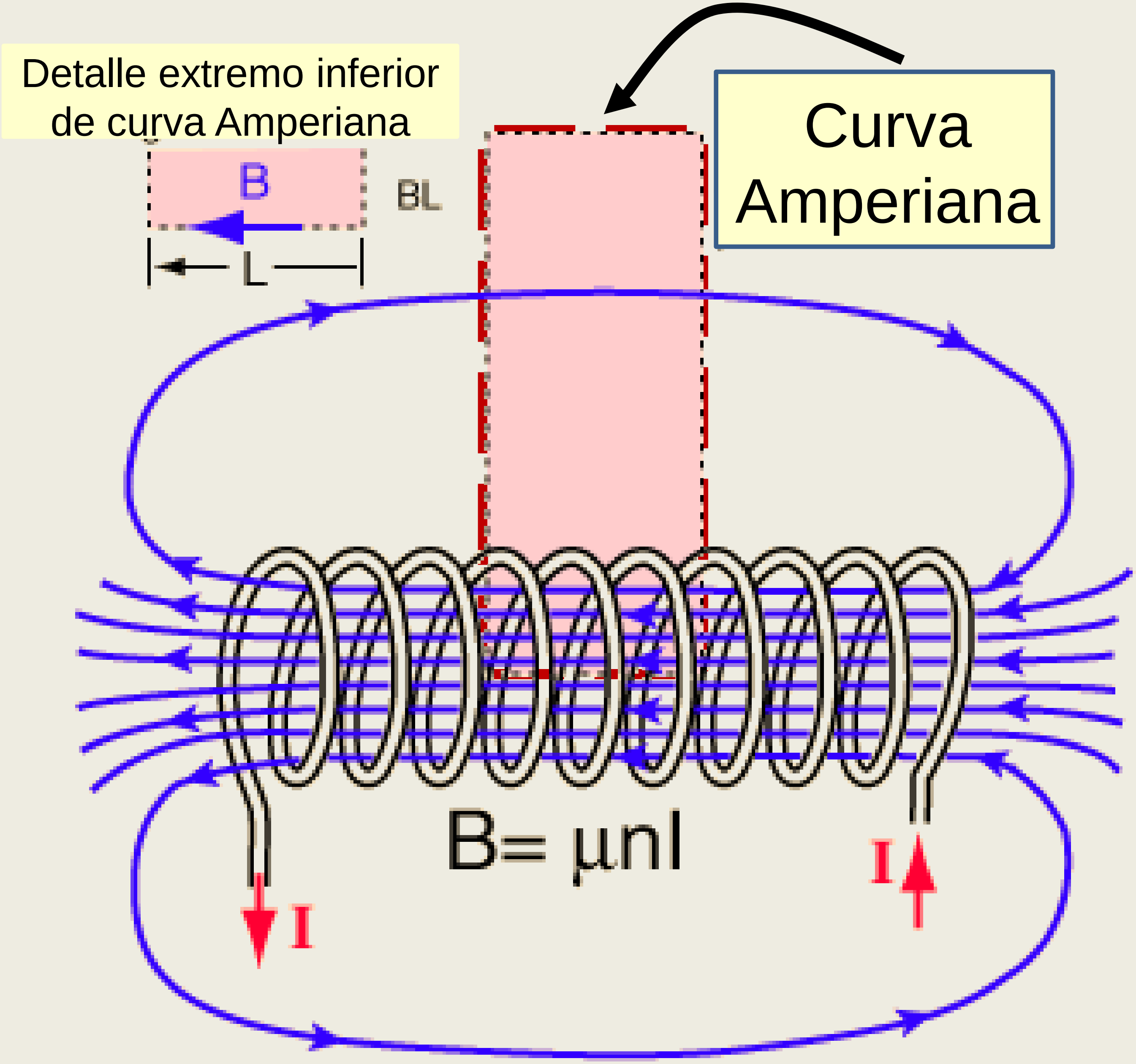
Líneas de campo de un solenoide (conjunto de espiras circulares arrolladas en forma de cilindro, muy apretadas entre sí) que porta una corriente estacionaria I



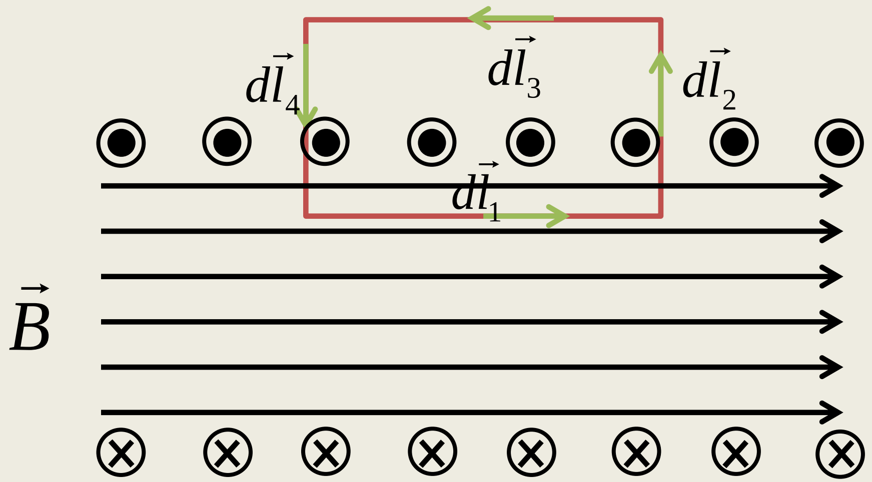
Líneas de campo magnético debido a un solenoide



Cálculo campo magnético en solenoide “largo”



Campo magnético generado por una corriente que circula en solenoide



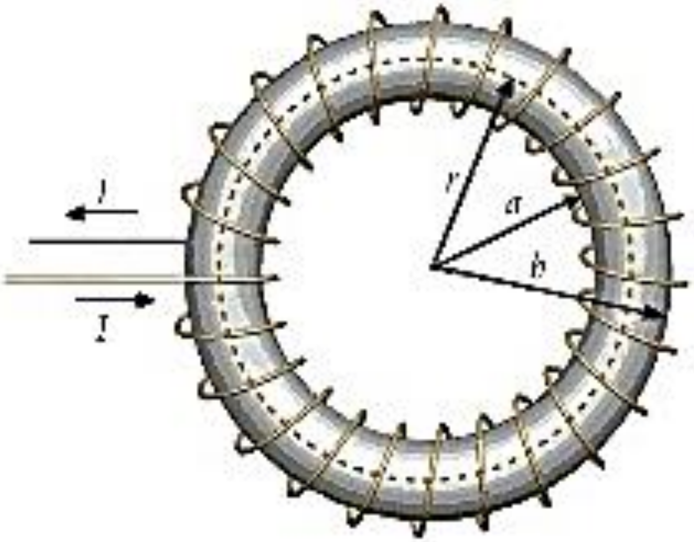
$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_o I_{enc}$$

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_{C_1} \vec{B}\cdot d\vec{l}_1 + \cancel{\int_{C_2} \vec{B}\cdot d\vec{l}_2} + \cancel{\int_{C_3} \vec{B}\cdot d\vec{l}_3} + \cancel{\int_{C_4} \vec{B}\cdot d\vec{l}_4} = \mu_o Ni$$

$$\int_{C_1} \vec{B}\cdot d\vec{l}_1 = \int_{C_1} \left|\vec{B}\right|\left|d\vec{l}_1\right| \cos 0 = \left|\vec{B}\right| \int_0^L dl_1 = \left|\vec{B}\right| L = \mu_o Ni$$

$$\left|\vec{B}\right| = \frac{\mu_o Ni}{L} = \mu_o in$$

Ejemplo 2: Campo magnético creado por un toroide.



Como curva de integración tomamos una circunferencia de radio r centrada en el toroide. Como B es constante en todo el círculo:

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint_C B\,dl = B\oint_C dl = B\,2\pi R = \mu_o I_c$$

Para $a < r < b$ ⟹ $I_c = NI$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_o}{2\pi}\frac{NI}{r}\vec{u}_n}$$

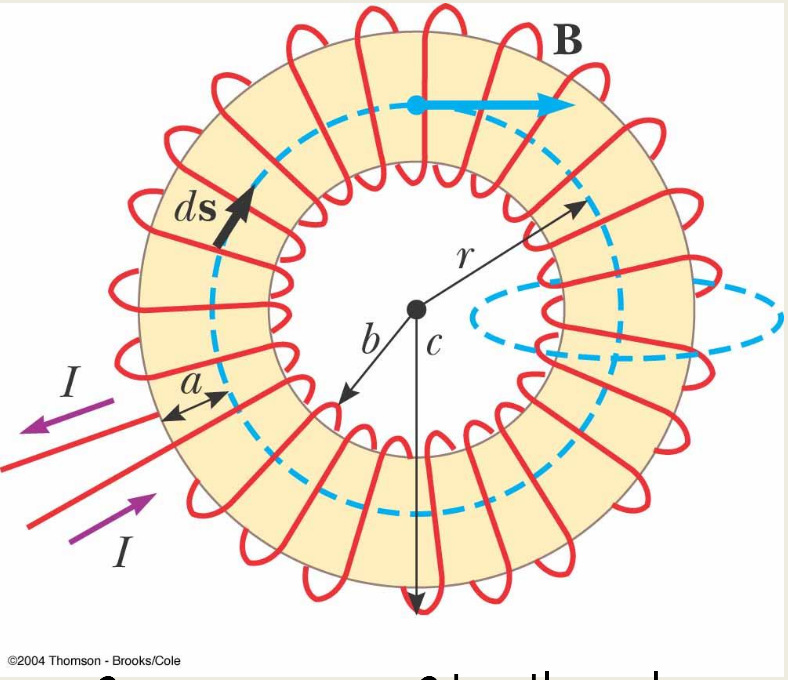
Casos particulares

$r < a \Rightarrow \vec{B} = 0$ ⟹ No existe corriente a través del circulo de radio r.

$r > b \Rightarrow \vec{B} = 0$ ⟹ La corriente que entra es igual a la que sale.

Si (b-a)<< radio medio ⟹ $\vec{B}$ es uniforme en el interior.

Campo magnético generado por una corriente que circula en toroide



$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_o I_{enc}$$

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint_C \left|\vec{B}\right|\left|d\vec{l}\right|\cos 0 = \left|\vec{B}\right|\int_0^{2\pi r} dl = 2\pi r\left|\vec{B}\right| = \mu_o NI$$

$$\left|\vec{B}\right| = \frac{\mu_o NI}{2\pi r}$$