



ELECTROTECNIA Y ELECTRÓNICA

(Mecánica - Electromecánica - Computación)

TRABAJO DE APLICACIÓN Nº 04

Preparado por: Ing. Pablo Morcelle del Valle, Ing. Augusto Cassino, Ing. Guillermo Renzi.

Actualizado por: Ing. Fabián Blasseti, Ing. Gustavo Adgi Romano, Ing. Mónica González

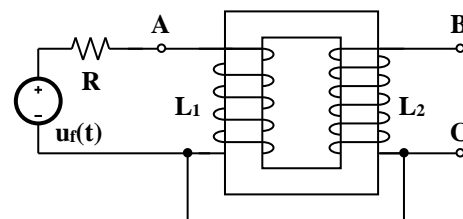
CIRCUITOS ACOPLADOS. Flujo mutuo. Coeficiente de acoplamiento. Inductancia mutua. Puntos homólogos. Resolución de circuitos

TRANSFORMADOR. Relación de transformación. Modelo conductivo. Circuito referido al primario y al secundario.

REPASAR: Fasores. Diagramas fasoriales.

EJERCICIO Nº 01:

La figura muestra un núcleo magnético con dos bobinas enrolladas. La bobina izquierda es alimentada mediante una fuente de tensión senoidal real, cuyos datos son $U_f = 10V$, $R = 1\Omega$ y $f = 50Hz$. Además, $L_1 = L_2 = 3,2mH$ y $k = 0,8$.



- Explicar qué es un circuito acoplado magnéticamente y en qué se basa su funcionamiento.
- Explicar qué son los puntos homólogos y cuál es su utilidad en el estudio del comportamiento de bobinas acopladas. ¿Es necesario energizar el circuito para conocer la ubicación de los puntos homólogos? Explicar con detalle las alternativas posibles.
- ¿Cómo resulta la polaridad de las tensiones inducidas en cada bobinado en relación a los puntos homólogos?

EJERCICIO Nº 02:

Con referencia al circuito del EJERCICIO Nº 01 se requiere simplificar el esquema del circuito, eliminando del dibujo el núcleo magnético.

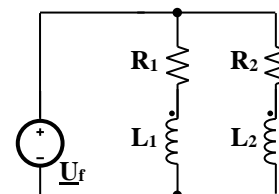
- Determinar la ubicación de los puntos homólogos.
- Explicar qué representa físicamente el factor (o coeficiente) de acoplamiento magnético. ¿Qué valores puede tomar el mismo y qué representan sus valores extremos?
- Explicar qué representa el coeficiente de inductancia mutua y escribir las relaciones que existen entre M , k , L_1 , L_2 , N_1 y N_2 . Efectuar comentarios.
- ¿A qué se llama *dispersión*? ¿Qué relación tiene con k , L_1 y L_2 ? Explicar con detalle, planteando las relaciones matemáticas que vinculan dichos parámetros.
- ¿Cómo se obtienen la inductancia de dispersión L_d y la de magnetización L_m ? Explicar su respectivo significado.
- Utilizando números complejos y fasores calcular la tensión entre los bornes A y B (U_{AB}).

RESPUESTA: $U_{AB} = \sqrt{2} / 45^\circ V$.

SUGERENCIA: Representar las tensiones inducidas con fuentes controladas es muy útil. Explicar cómo se asignan las polaridades.

EJERCICIO Nº 03:

El circuito de la figura muestra dos inductores acoplados magnéticamente en serie con un resistor y alimentados por una fuente $U_f = j120 V$. Los restantes datos son $L_1 = 1 H$, $L_2 = 2 H$, $R_1 = R_2 = 50 \Omega$, $f = 50 Hz$, $k = 0,7$. Se requiere determinar la tensión en el resistor R_2 .



- Explicar cómo se obtienen los signos de los términos que representan las tensiones inducidas en la expresión hallada.
- Determinar la *expresión* de la tensión en el resistor 2. Luego, reemplazar valores y calcular dicha tensión.

RESPUESTA: $U_{R2} = 3 / -58^\circ V$.

- Repetir a) y b) si se invierte uno de los inductores (cambia la ubicación del punto homólogo de uno de ellos).

RESPUESTA: $U_{R2} = 52,5 / 24^\circ V$.

- En base a los resultados de a), b) y c), observar qué efecto produce en el circuito la inversión del inductor comparando las expresiones matemáticas. Explicar los resultados.
- Repetir el ejercicio utilizando fuentes de tensión controladas para representar las tensiones inducidas.



EJERCICIO N° 04:

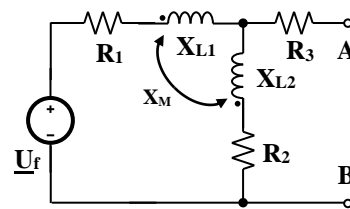
El circuito de la figura muestra una conexión particular de dos bobinas acopladas magnéticamente, llamada *autotransformador*. Los valores de los elementos son: $\underline{U}_f = 10 \angle 0^\circ \text{ V}$, $\mathbf{R}_1 = 4 \Omega$, $\mathbf{R}_2 = 4 \Omega$, $\mathbf{R}_3 = 3 \Omega$, $\mathbf{X}_1 = 10 \Omega$, $\mathbf{X}_2 = 5 \Omega$ y $\mathbf{X}_M = 6 \Omega$.

- Plantear, sin reemplazar valores numéricos, las ecuaciones que describen el funcionamiento del circuito. Explicar cómo se obtienen los signos de los términos que representan las tensiones inducidas en dichas expresiones.
- A partir del resultado anterior, determinar la expresión de la tensión entre **A** y **B** y calcular su valor. No olvidar explicar todos los pasos seguidos.

RESPUESTA: $\underline{U}_{AB} = 4,8 \angle -34^\circ \text{ V}$.

- Determinar el equivalente Norton visto desde los puntos **A** y **B**, explicando paso a paso el procedimiento seguido.

RESPUESTA: $\underline{I}_N = 0,55 \angle -77^\circ \text{ A}$, $\underline{Y}_N = 0,11 \angle -43^\circ \text{ S}$.

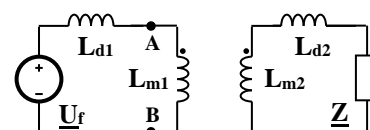


EJERCICIO N° 05:

El circuito magnéticamente acoplado de la figura es un modelo típico y simplificado de un transformador, en el cual se desprecian las “pérdidas” por efecto Joule.

Se supone conocidos \underline{U}_f , \mathbf{L}_1 , \mathbf{L}_2 , \mathbf{k} y \underline{Z} .

- ¿Qué significa que se desprecian las “pérdidas” por efecto Joule?
- ¿A qué se llama *primario* y *secundario* de un transformador?
- Dibujar el circuito básico de un transformador y explicar su funcionamiento.
- A partir de los datos y del circuito descrito en a) explicar cómo se obtienen \mathbf{L}_m y \mathbf{L}_d .



SUGERENCIA: Recordar la relación entre \mathbf{k} y \mathbf{L} .

- A partir de los resultados de c) ¿cómo es el acoplamiento entre \mathbf{L}_{m1} y \mathbf{L}_{m2} y por qué? ¿Cómo se denomina el acoplamiento en esta situación? ¿Cuál es su implicancia en los parámetros del circuito?
- Obtener un equivalente conductivo visto desde los puntos **AB** hacia la carga, a partir del cociente entre \underline{I}_{AB} y \underline{U}_{AB} .

SUGERENCIA: Explicar qué es un *equivalente conductivo*. Plantear la admitancia equivalente “vista” desde AB hacia la derecha.

- A partir de la expresión encontrada en el punto e) dibujar el circuito obtenido y describir cada uno de los nuevos elementos de circuito hallados. Efectuar comentarios.

OBSERVACIÓN: Este nuevo modelo hallado se denomina habitualmente *modelo conductivo con el secundario referido al primario*.

EJERCICIOS INTEGRADORES

Sugerencia: Resolver todos los ejercicios siguiendo las pautas establecidas para los ejercicios anteriores: No dar por hechos u obvios suposiciones o afirmaciones, nada debe darse por implícito. Plantear, explicar, justificar, respetar la nomenclatura y simbología. En este caso, el hábito hace al monje.

EJERCICIO N° 06:

Un autotransformador similar al del EJERCICIO N° 04 se pone en cortocircuito en forma accidental. Dicha situación se representa en el circuito de la figura.

Los datos son $\underline{U}_f = 220 \text{ V}$; $f = 50 \text{ Hz}$; $\mathbf{L}_1 = 0,1 \text{ H}$; $\mathbf{R}_1 = 10 \Omega$; $\mathbf{L}_2 = 0,05 \text{ H}$; $\mathbf{R}_2 = 5 \Omega$ y $\mathbf{k} = 0,5$.

- Plantear las ecuaciones que definen el funcionamiento del circuito (sin reemplazar valores), explicando paso a paso cómo se obtienen las mismas.
- A partir de las ecuaciones obtenidas en a) calcular la impedancia equivalente que ve \underline{U}_f .

RESPUESTA: $\underline{Z}_{eq} = 27 \angle 63^\circ \Omega$

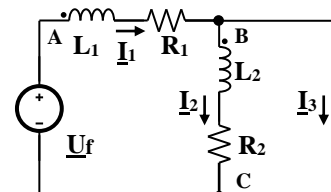
- Repetir b) si el acoplamiento magnético fuera nulo. Explicar y comparar con los resultados del punto b).

RESPUESTA: $\underline{Z}_{eq} = 32 \angle 72^\circ \Omega$

- Repetir c) si el acoplamiento fuera perfecto. Comparar y analizar los resultados con lo obtenido en los puntos b) y c).

RESPUESTA: $\underline{Z}_{eq} = 20 \angle 9^\circ \Omega$

- El bobinado secundario (\mathbf{L}_2) se daña si la corriente eficaz supera los **20 A**. Analizar los casos planteados y verificar si el bobinado soporta la solicitud impuesta.





EJERCICIO N° 07:

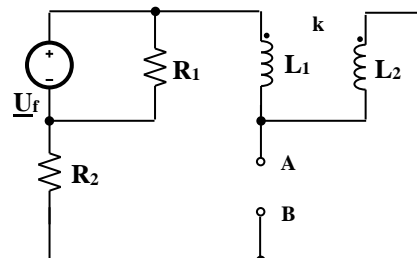
En el circuito de la figura los datos son $\underline{U}_f = 220 \text{ V}$; $\mathbf{R}_1 = 5 \Omega$; $\mathbf{R}_2 = 10 \Omega$; $\mathbf{L}_1 = 32 \text{ mH}$; $\mathbf{L}_2 = 191 \text{ mH}$; $f = 50 \text{ Hz}$; $k = 0,81$.

- Determinar la polaridad de las tensiones inducidas en las bobinas acopladas magnéticamente, en base a la utilización de los puntos homólogos.
- Determinar el equivalente de Thevenin entre A y B. Dibujar el circuito obtenido describiendo cada componente del mismo.

RESPUESTA: $\underline{U}_{Th} = 276,8 \angle 18,3^\circ \text{ V}$, $\underline{Z}_{Th} = 19,9 \angle 37,4^\circ \Omega$

- Se conecta un capacitor $\mathbf{C} = 318 \mu\text{F}$ entre los bornes A y B. Determinar la corriente resultante en el capacitor.

RESPUESTA: $\underline{I}_C = 17,4 \angle 10,8^\circ \text{ A}$.



EJERCICIO N° 08:

En el circuito de la figura: $\underline{U}_{f1} = \underline{U}_{f2} = 12 \text{ V}$; $\mathbf{L}_1 = 2 \text{ mH}$; $\mathbf{L}_2 = 0,5 \text{ mH}$; $\mathbf{C} = 1,59 \text{ mF}$; $\mathbf{R}_1 = 2 \Omega$; $\mathbf{R}_2 = 40 \Omega$; $f = 50 \text{ Hz}$; $k = 1$.

- Calcular la tensión en el capacitor.

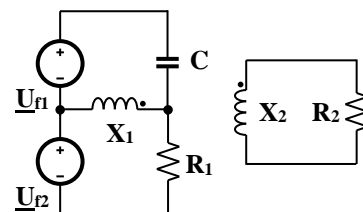
RESPUESTA: $18,8 \text{ V} \angle 7,4^\circ$

- Obtener el circuito equivalente de Norton "visto" por \mathbf{R}_2 .

RESPUESTA: $\underline{I}_N = 16,97 \text{ A} \angle 135^\circ$; $\underline{Y}_N = -j6,38 \text{ S}$

- Redibujar el circuito incluyendo el núcleo ferromagnético de manera de obtener la disposición física de las bobinas sobre el mismo. Fundamentar el resultado.

Para los puntos a) y b), no olvidar explicar el procedimiento de resolución con respecto al acoplamiento inductivo.



EJERCICIO N° 09:

En el circuito de la figura: $\underline{I}_f = 1 \angle 30^\circ \text{ A}$; $\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_2 = 0,5 \text{ mH}$; $\mathbf{C}_1 = 1,59 \text{ mF}$; $\mathbf{C}_2 = 4 \text{ mF}$; $\mathbf{R} = 10 \Omega$; $f = 50 \text{ Hz}$; $k = 1$.

- Obtener el circuito equivalente de Thevenin "visto" por R. Explicar el procedimiento de resolución con respecto al acoplamiento inductivo.

RESPUESTA: $\underline{U}_{Th} = 0,534 \text{ V} \angle -60^\circ$; $\underline{Z}_{Th} = -j0,366 \Omega$

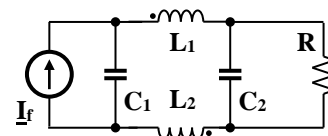
- Si se invierte el punto homólogo de uno de los inductores ¿cómo se modifican los cálculos? Explicar.

RESPUESTA: $\underline{U}_{Th} = 0,417 \text{ V} \angle -60^\circ$; $\underline{Z}_{Th} = -j0,417 \Omega$

- Si no hubiese acoplamiento inductivo ¿cómo se modifican los cálculos? Comparar con los resultados de a) y b) y emitir opinión al respecto.

RESPUESTA: $\underline{U}_{Th} = 0,479 \text{ V} \angle -60^\circ$; $\underline{Z}_{Th} = -j0,404 \Omega$

- Redibujar los circuitos de los casos a) y b) incluyendo el núcleo ferromagnético de manera de obtener la disposición física de las bobinas sobre el mismo. Fundamentar el resultado.



EJERCICIO N° 10:

El circuito de la figura corresponde al modelo una línea trifásica de alta tensión, en la cual las inductancias y los resistores representan el comportamiento de los conductores y las cargas, respectivamente.

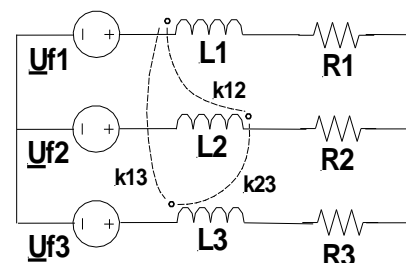
Los datos son $\underline{U}_{f1} = 220 \text{ kV} \angle 0^\circ$; $\underline{U}_{f2} = 220 \text{ kV} \angle -120^\circ$; $\underline{U}_{f3} = 220 \text{ kV} \angle 120^\circ$; $\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_2 = \mathbf{L}_3 = 32 \text{ mH}$; $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_3 = 10 \Omega$; $f = 50 \text{ Hz}$; $k_{12} = 0,5$; $k_{23} = 0,8$; $k_{13} = 0,2$.

- Determinar las corrientes en cada inductor.

RESPUESTA: $\underline{I}_1 = 15,0 \text{ kA} \angle -29^\circ$; $\underline{I}_2 = 9,1 \text{ kA} \angle 63^\circ$; $\underline{I}_3 = 17,2 \text{ kA} \angle -177^\circ$.

- Repetir los cálculos si se considera que $k_{12} = k_{23} = k_{13} = 0$ y emitir comentarios a partir de la comparación de los resultados.

RESPUESTA: $\underline{I}_1 = 15,6 \text{ kA} \angle -45^\circ$; $\underline{I}_2 = 15,6 \text{ kA} \angle -165^\circ$; $\underline{I}_3 = 15,6 \text{ kA} \angle 75^\circ$.



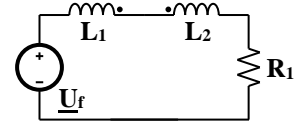


EJERCICIOS RESUELTOS

Aclaración: Debe observarse que en la resolución de estos ejercicios se efectúan planteos, explicaciones, justificaciones, y nada se da por sobreentendido.

EJERCICIO N° 11

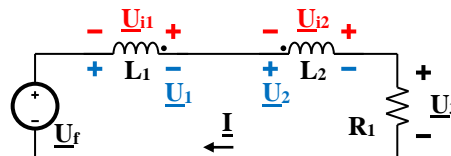
Para el circuito magnéticamente acoplado de la figura con los siguientes datos $\underline{U}_f = 220 \text{ V}$; $\omega = 314 \text{ rad/s}$; $L_1 = 1 \text{ H}$; $L_2 = 0,5 \text{ H}$; $R_1 = 100 \Omega$; $M = 0,65 \text{ H}$:



- Calcular el coeficiente de acoplamiento que existe entre los bobinados L_1 y L_2 .
- Calcular la corriente en el circuito. Explicar cómo se obtienen la ecuación de LKT, en especial los términos de la tensión inducida y sus signos.
- Representar en un circuito el acoplamiento magnético mediante el uso de fuentes controladas.
- Repetir el inciso anterior si el coeficiente de acoplamiento entre los inductores es nulo.

RESOLUCIÓN

- En función de los datos disponibles, el coeficiente de acoplamiento se puede determinar a partir de los valores de inductancia mutua y autoinductancias de los bobinados: $M = k\sqrt{L_1 \cdot L_2} \Rightarrow k = M/\sqrt{L_1 \cdot L_2}$
- Para calcular la corriente en el circuito se supone un sentido de la misma y se definen las tensiones en función de esta suposición, tanto para las tensiones por ley de Ohm como tensiones inducidas por los inductores.



Aplicando la 2LK a la única malla del circuito: $\underline{U}_f = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3 - \underline{U}_{i1} - \underline{U}_{i2}$

Aplicando la ley de Ohm en cada elemento: $\underline{U}_1 = \underline{I} \cdot jX_1$; $\underline{U}_2 = \underline{I} \cdot jX_2$; $\underline{U}_3 = \underline{I} \cdot R_1$

Las tensiones inducidas en cada bobinado dependen de las corrientes que las producen. En este caso la corriente es la misma, por lo tanto: $\underline{U}_{i1} = \underline{U}_{i2} = \underline{I} \cdot jX_M$

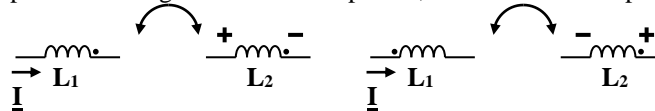
Las tensiones son iguales debido a que la corriente es la misma en ambos bobinados acoplados magnéticamente.

Además: $X_1 = \omega \cdot L_1$; $X_2 = \omega \cdot L_2$; $X_M = \omega \cdot M$

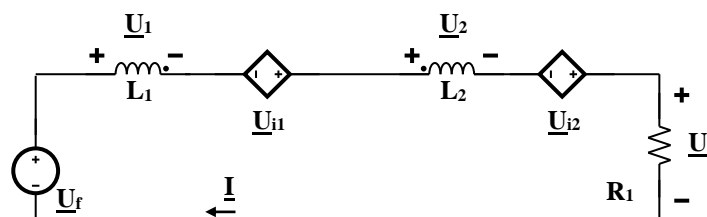
Por lo tanto, la corriente resulta: $\underline{I} = \underline{U}_f / R_1 + j(X_1 + X_2) - j2X_M$

La polaridad de las tensiones inducidas se establece mediante el uso de los puntos homólogos. Para analizar las tensiones que se inducen en un bobinado en particular, se deben conocer los sentidos y valores de las corrientes en los demás bobinados que están magnéticamente acoplados con el bobinado bajo análisis.

Si la corriente hacia el primer inductor se encuentra primero con punto homólogo, en el otro bobinado se induce una tensión con polaridad positiva en su punto homólogo. Si sucede lo opuesto, la tensión tiene la polaridad opuesta.



- Para evitar confusiones es muy útil utilizar fuentes de tensión controladas por corriente para representar circuitalmente las tensiones inducidas en los bobinados:



La polaridad de las fuentes está definida por el sentido de corriente elegido o definido en el circuito y la ubicación de los puntos homólogos de los bobinados.

Se puede observar que no ya no hace falta colocar los puntos homólogos ya que su efecto está representado por las polaridades de las fuentes de tensión controladas.

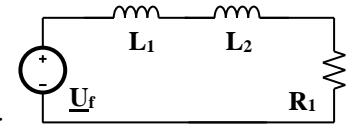


Para asignar las polaridades se procede como fue descrito en el inciso anterior, donde: $\underline{U}_{i1} = \underline{U}_{i2} = \underline{I} \cdot jX_M$

En el caso del circuito estudiado las tensiones son iguales debido a que la corriente es la misma en ambos bobinados acoplados magnéticamente.

d) Si el acoplamiento es nulo entonces el coeficiente de inductancia mutua es nulo: $M = 0$. Por lo tanto la corriente resulta:

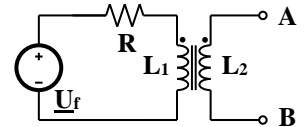
$$\underline{I} = \underline{U}_f / R_1 + j(X_1 + X_2)$$



Las fuentes de tensión controladas se anulan y el circuito queda de la siguiente forma:

EJERCICIO N° 12

En el circuito de la figura las bobinas están *perfectamente acopladas* y además los siguientes componentes son dato: \underline{U}_f , R , L_2 y $a = N_1 / N_2$:

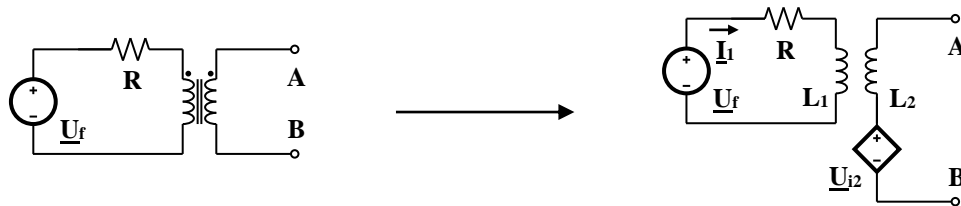


- Explicar paso a paso cómo se obtienen las ecuaciones que permiten determinar el circuito equivalente de Thevenin visto desde AB. Expresar los resultados en función de los datos sin racionalizar las expresiones complejas que resulten.
- En función de la observación de los resultados del punto anterior, explicar cómo resulta el circuito equivalente conductivo del circuito acoplado visto desde **AB**.

RESOLUCIÓN

a) **1er paso:** Se calcula la tensión a circuito abierto entre A y B.

En este caso se puede observar que debido a la fuente de tensión se establece una corriente en el bobinado primario, con lo cual existe solamente una tensión inducida del lado secundario. Esta tensión se representa mediante una fuente controlada.



En el lado primario no existe tensión inducida debido a que el lado secundario está a circuito abierto y por lo tanto no

existe corriente. Planteando 2LK y ley de Ohm en el primario: $\underline{U}_{AB} = \underline{U}_{i2} = \underline{I}_1 \cdot jX_M = \frac{\underline{U}_f}{R + jX_1} \cdot jX_M = \underline{U}_{Th}$

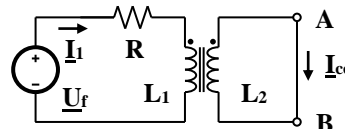
El acoplamiento magnético que existe entre ambos bobinados permite escribir las siguientes relaciones: $\frac{L_1}{L_2} = \frac{N_1^2}{N_2^2} = a^2$

$$; \quad M = k\sqrt{L_1 \cdot L_2}$$

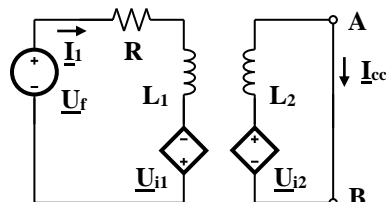
Dado que ambos bobinados están perfectamente acoplados, $k = 1$, entonces:

$$M = aL_2 = \frac{L_1}{a} \Rightarrow X_M = aX_2 = \frac{X_1}{a}. \text{ Luego: } \underline{U}_{Th} = \frac{\underline{U}_f}{R + ja^2X_2} \cdot jaX_2$$

2do paso: Se realiza un cortocircuito entre A y B:



Se puede observar que en este caso existe tensión inducida en el bobinado primario porque el cortocircuito entre A y B permite a la tensión inducida del lado secundario dar lugar a una corriente.



$$\underline{U}_{i1} = \underline{I}_{cc} \cdot jX_M \quad ; \quad \underline{U}_{i2} = \underline{I}_1 \cdot jX_M$$



Planteando la 2LK: $\underline{U}_f = \underline{I}_1 \cdot (R + jX_1) - \underline{U}_{i1} = \underline{I}_1 \cdot (R + jX_1) - \underline{I}_{cc} \cdot jaX_2$
 $\underline{U}_{i2} = \underline{I}_{cc} \cdot jX_2 \Rightarrow \underline{I}_1 \cdot jX_M = \underline{I}_{cc} \cdot jX_2$

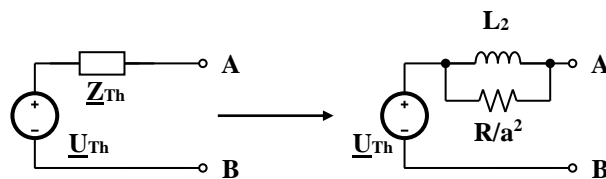
Resolviendo: $\underline{I}_{cc} = a \cdot \underline{U}_f / R$

3er paso: Se determina la impedancia de Thevenin relacionando la tensión de Thévenin (tensión de circuito abierto calculada en el 1er paso) y la corriente de Norton (o corriente de cortocircuito, calculada en el 2do paso):

$$\underline{Z}_{Th} = \frac{\underline{U}_{Th}}{\underline{I}_{cc}} = \frac{\frac{\underline{U}_f}{R + ja^2X_2} \cdot jaX_2}{\frac{a \cdot \underline{U}_f}{R}} = \frac{R \cdot jaX_2}{a \cdot (R + ja^2X_2)}$$

Si la expresión anterior se reordena levemente se obtiene: $\underline{Z}_{Th} = \frac{R/a^2 \cdot jX_2}{R/a^2 + jX_2}$

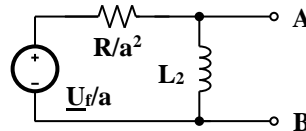
Por lo tanto, el circuito resulta:



b) El equivalente conductivo se obtiene reordenando las ecuaciones anteriores: $\underline{I}_{cc} = \frac{a \cdot \underline{U}_f}{R} = \frac{\underline{U}_f}{R/a} = \frac{\underline{U}_f}{a} \cdot \frac{1}{R/a^2}$

$$\underline{U}_{Th} = \frac{\underline{U}_f}{R + ja^2X_2} \cdot jaX_2 = \underline{U}_f \cdot \frac{jaX_2}{a^2(R/a^2 + jX_2)} = \frac{\underline{U}_f}{a} \cdot \frac{jX_2}{R/a^2 + jX_2}$$

Esta última expresión es similar a la ecuación de un divisor de tensión. El circuito equivalente conductivo resulta:



Se puede verificar que este modelo cumple con la equivalencia obtenida.

COMENTARIOS FINALES Y CONCLUSIONES

En el desarrollo de este **TAP** han resultado importantes los siguientes aspectos:

- Definición de los puntos homólogos. Importancia de los mismos en circuitos con acoplamiento magnético para “eliminar” el núcleo y poder operar con ecuaciones de parámetros exclusivamente eléctricos (tensión y corriente).
- Determinación de las polaridades de las tensiones inducidas en base a la localización de los puntos homólogos.
- Significado físico del factor o coeficiente de acoplamiento.
- Concepto del coeficiente de inductancia mutua.
- Vinculación de la relación de transformación con las inductancias de los bobinados acoplados y la cantidad de vueltas de los arrollamientos.
- Separación de las inductancias propias en inductancia de dispersión y de magnetización.
- Modelo del transformador. Relación de transformación. Utilización del circuito equivalente conductivo referido al primario o al secundario. Significado de los parámetros del modelo.