

Ejercicio 3: Práctica estimación puntual

3) Sea X_1, X_2, \dots, X_n , una muestra aleatoria de tamaño n . $E(X_i) = \mu$ y $V(X_i) = \sigma^2 > 0$ para todo $i=1, \dots, n$

- Demuestre que \bar{X}^2 es un estimador sesgado de μ^2 .
- Determine la magnitud del sesgo de este estimador.
- ¿Qué sucede con el sesgo a medida que aumenta el tamaño n de la muestra?

Solución:

Se dice que el estimador puntual $\hat{\theta}$ es un *estimador insesgado* del parámetro θ si $E(\hat{\theta}) = \theta$ cualquiera sea el valor verdadero de θ

En este caso, el estimador es \bar{X}^2 y el parámetro es μ^2 .

Deberemos demostrar que: $E(\bar{X}^2) \neq \mu^2$

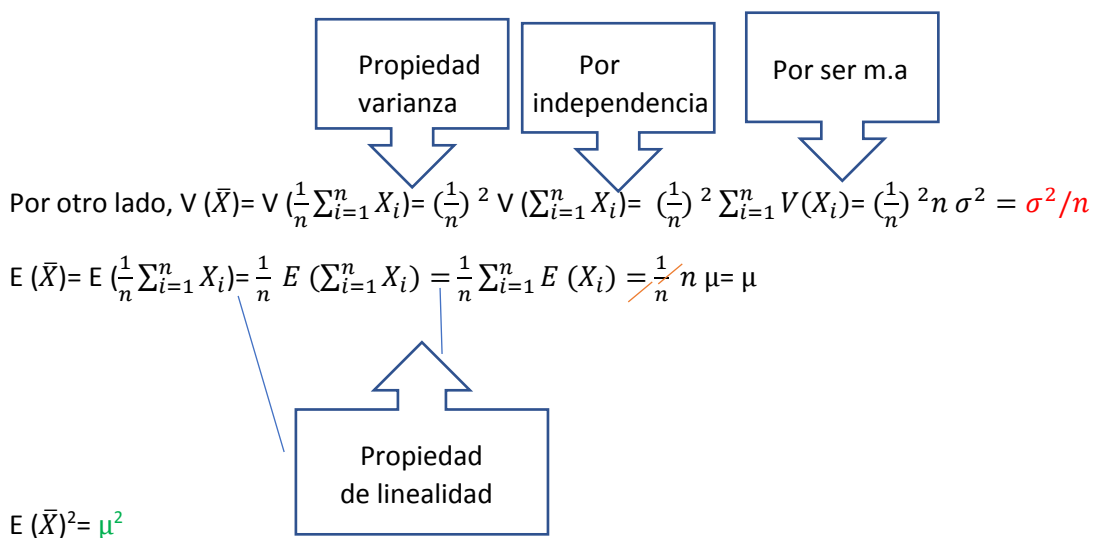
Para ello, veremos cómo reescribir $E(\bar{X}^2)$ (*)

Recordamos que la esperanza de un término al cuadrado aparece en la varianza, es decir

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$V(\bar{X}) = E(\bar{X}^2) - E(\bar{X})^2$$

De (*) $E(\bar{X}^2) = V(\bar{X}) + E(\bar{X})^2 = \sigma^2/n + \mu^2 \neq \mu^2$ lo que queríamos demostrar.



Respuesta: $E(\bar{X}^2) = \sigma^2/n + \mu^2 \neq \mu^2$, por lo tanto, \bar{X}^2 es un estimador sesgado para μ^2

b)

La diferencia $E(\hat{\theta}) - \theta$ se conoce como *sesgo de estimador* $\hat{\theta}$. Anotamos $b(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$

$$b(\bar{X}^2) = E(\bar{X}^2) - \mu^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 - \mu^2 = \frac{\sigma^2}{n} > 0, \text{ ya que } \sigma^2 > 0 \text{ y } n > 0$$

La magnitud del sesgo es σ^2/n

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2}{n} = 0, \text{ o sea que a medida que } n \text{ aumenta, el sesgo tiende a } 0.$$

Es decir, que \bar{X}^2 es un estimador asintóticamente insesgado.