# Funciones complejas de variable compleja

Una función compleja de variable compleja es una correspondencia $f$ que a cada elemento $z$ de un conjunto no vacío $D \subseteq \mathbb{C}$ le asigna uno y sólo un número complejo $w$. Tal correspondencia se anota $f: D \to \mathbb{C}$, siendo $D$ el ***dominio (de definición)*** de la función. Se dice que $w$ es la imagen de $z$ por $f$ o el valor de $f$ en $z$ y se indica $\boldsymbol{w = f(z)}$. Cuando $D$ no se explicita se lo considera como el mayor subconjunto de $\mathbb{C}$ para el cual la expresión $f(z)$ responde a la definición de función, en cuyo caso $D$ es el ***dominio de definición más amplio*** de $f$.

Si anotamos en forma binómica $z = x + iy$ (con $x, y \in \mathbb{R}$) , $w = u + iv$ (con $u, v \in \mathbb{R}$), entonces $f: D \to \mathbb{C}$, $w = f(z)$, define un par de funciones $u$, $v$ de las dos variables reales $x, y$ definidas en $D \subseteq \mathbb{R}^2$:

$$u: D \to \mathbb{R} \qquad\qquad v: D \to \mathbb{R}$$

$$u(x, y) = Re(f(x + iy)) \qquad\qquad v(x, y) = Im(f(x + iy))$$

$u(x, y)$ es la **parte real de $\boldsymbol{f(z)}$** y $\boldsymbol{v(x, y)}$ es la **parte imaginaria de $\boldsymbol{f(z)}$**

Entonces:

$$f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$$

**Ejemplo**:

1) $f(z) = iz^2$ es una función cuyo dominio más amplio es $D = \mathbb{C}$.

Por ejemplo: $f(1-i) = i(1-i)^2 = i(1-2i+i^2) = i(-2i) = 2$.

Escribiendo $z = x + iy$, se tiene:

$$\begin{aligned} f(z) &= iz^2 = i(x+iy)^2 = i(x^2 + 2xiy + (iy)^2) = i(x^2 + i2xy - y^2) \\ &= -2xy + i(x^2 - y^2) \end{aligned}$$

Así, las partes real e imaginaria de $f(z)$ son:

$$u(x,y) = -2xy \qquad\qquad v(x,y) = x^2 - y^2$$

2) $f(z) = \frac{1}{i\,\bar{z}+1}$ tiene como dominio $D = \mathbb{C} - \{-i\}$ pues:

$$\begin{aligned} i\,\bar{z} + 1 = 0 \;\Leftrightarrow i\,\overline{(x+iy)} + 1 = 0 \Leftrightarrow i(x - iy) + 1 = 0 \Leftrightarrow (y+1) + ix = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\; y + 1 = 0 \;\wedge\; x = 0 \;\Leftrightarrow\; y = -1 \;\wedge\; x = 0 \Leftrightarrow\; z = -i \end{aligned}$$

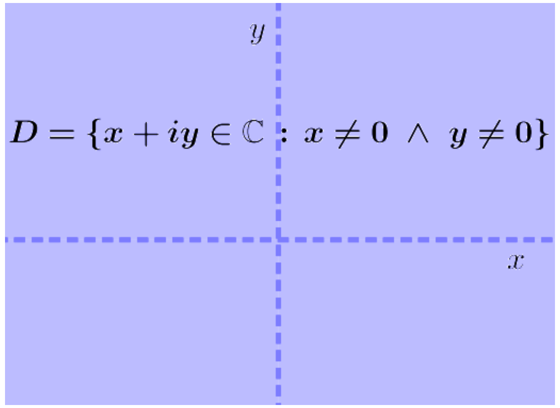
Además,

$$f(z) = \frac{1}{i\,\bar{z}+1} = \frac{1}{(y+1)+ix} = \frac{(y+1)-ix}{(y+1)^2 + x^2} = \underbrace{\frac{(y+1)}{(y+1)^2 + x^2}}_{u(x,y)} + i\,\underbrace{\frac{-x}{(y+1)^2 + x^2}}_{v(x,y)}$$

3) $f(z) = \frac{2z}{Im(z^2)}$

Como

$$Im(z^2) = Im\big((x+iy)^2\big) = Im(x^2 - y^2 + i2xy) = 2xy$$




Entonces el dominio de definición más amplio de $f$ es

$$D = \{z \in \mathbb{C} : Im(z^2) \neq 0\} = \{x + iy : xy \neq 0\} = \{x + iy : x \neq 0 \ \wedge \ \neq 0\}$$

Se tiene:

$$f(z) = \frac{2z}{Im(z^2)} = \frac{2(x+iy)}{Im(x^2 - y^2 + i2xy)} = \frac{2(x+iy)}{2xy} = \frac{x+iy}{xy} = \frac{1}{y} + i\frac{1}{x}$$

Sus partes real e imaginaria están definidas en $D$ y vienen dadas por:

$$u(x,y) = Re(f(z)) = \frac{1}{y} \qquad v(x,y) = Im(f(z)) = \frac{1}{x}$$

4) $f(z) = x^2y + ix$ tiene dominio $D = \mathbb{C}$. Es claro que

$$u(x,y) = Re(f(z)) = x^2y \qquad v(x,y) = Im(f(z)) = x$$

5) $f(z) = Arg(z)$ función argumento principal de $z$. Es evidente que: $v(x,y) = Im(f(z)) = 0$

Además:

$$u(x,y) = Re(f(z)) = \begin{cases} arctg(y/x) & \text{si} \quad x > 0 \\ \pi/2 & \text{si} \quad x = 0, y > 0 \\ -\pi/2 & \text{si} \quad x = 0, y < 0 \\ \pi + arctg(y/x) & \text{si} \quad x < 0, y \geq 0 \\ -\pi + arctg(y/x) & \text{si} \quad x < 0, y < 0 \end{cases}$$

El dominio más amplio de $f(z)$ es $D = \mathbb{C} - \{0\}$ puesto que $z = 0$ no posee argumento y todo número complejo $z \neq 0$ posee uno y sólo un argumento principal.

6) Volviendo a $f(z) = iz^2$, otra manera de describir las partes real e imaginaria de $f$ es a partir de la representación $z = re^{i\theta}$, de modo que $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$. Se obtiene así:

$$f(z) = iz^2 = ir^2e^{i2\theta} = ir^2(\cos(2\theta) + i\,\text{sen}(2\theta)) = \underbrace{-r^2\,\text{sen}(2\theta)}_{U(r,\theta)} + i\,\underbrace{r^2\cos(2\theta)}_{V(r,\theta)}$$

Es decir,

$$f(z) = U(r,\theta) + i\,V(r,\theta)$$

donde

$$U(r,\theta) = u(\underbrace{r\cos\theta}_{x}, \underbrace{r\,\text{sen}\,\theta}_{y})$$

$$V(r,\theta) = v(\underbrace{r\cos\theta}_{x}, \underbrace{r\,\text{sen}\,\theta}_{y})$$

Si $A \subseteq D$, la ***imagen de A por f*** es el conjunto $f(A) = \{f(z) : z \in A\}$. El conjunto $f(D)$ se ***llama imagen de f***. Se dice que $f$ es una ***función acotada*** si $f(D)$ es un conjunto acotado, es decir si existe una constante $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in D$.

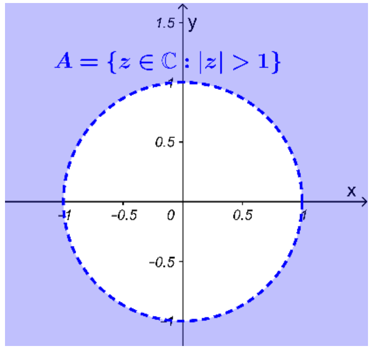
<u>Ejemplo</u>: $f(z) = 1/z$ es una función cuyo dominio de definición más amplio es $D = \mathbb{C} - \{0\}$. Se tiene:

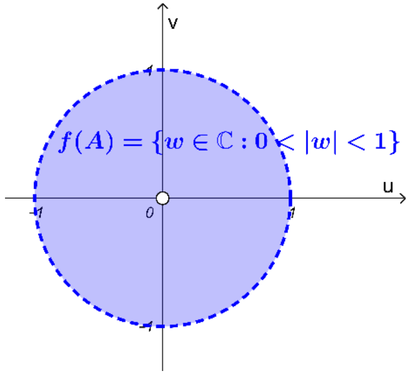
$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \underbrace{\frac{x}{x^2 + y^2}}_{u(x,y)} + i\,\underbrace{\frac{-y}{x^2 + y^2}}_{v(x,y)}$$

Si $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ entonces $f(A) = \{w \in \mathbb{C} : 0 < |w| < 1\}$. En efecto:

$$z \in A \iff |z| > 1 \iff 0 < \frac{1}{|z|} < 1 \iff 0 < \left|\frac{1}{z}\right| < 1 \iff 0 < |f(z)| < 1$$

Observar que $f$ no está acotada pues $f(D)$ no es un conjunto acotado (por ejemplo $x = \frac{1}{n} \in D$ y $f(1/n) = n \to \infty$).



***Funciones polinómicas en la variable $z$ :*** son las de la forma $f(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0$

donde $n$ es un entero no negativo y $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ son constantes complejas (no dependen de $z$). Si $c_n \neq 0$, la función polinómica se dice de grado $n$.

Es claro que su dominio de definición más amplio es $\mathbb{C}$.

**Ejemplo**: $f(z) = iz^2 + 3z$ es polinómica de grado 2. Se tiene:

$$iz^2 + 3z = i(x+iy)^2 + 3(x+iy) = i(x^2 - y^2 + i2xy) + 3x + 3iy = (3x - 2xy) + i(x^2 - y^2 + 3y)$$

Por lo tanto: $f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$ donde

$$u(x,y) = 3x - 2xy, \quad v(x,y) = x^2 - y^2 + 3y$$

Observamos que $u(x,y)$, $v(x,y)$ son polinómicas de grado 2 en las variables reales $x$ e $y$.

En general, si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ es polinómica de grado $n$ en la variable $z$, tanto $u(x,y)$ como $v(x,y)$ son funciones polinómicas reales de grado $n$ en las dos variables $x, y$.

**Notar**: Se deduce de allí que la función $f(z) = \bar{z}$ no es polinómica en la variable $z$. En efecto:

$$f(z) = \bar{z} = \overline{x+iy} = x - iy = \underbrace{x}_{u(x,y)} + i\underbrace{(-y)}_{v(x,y)}$$

Como $u(x,y)$ y v$(x,y)$ son de grado 1, si $f(z) = \bar{z}$ fuera polinómica sería de grado $1$. Existirían pues constantes complejas $c_1$, $c_0$ tales que: $\bar{z} = c_1 z + c_0$. Pero esto no es posible:

- Si $z$=0: $0 = \bar{0} = c_1 0 + c_0 = c_0$ así que $c_0 = 0$. Luego, $\bar{z} = c_1 z$
- Si $z$=1: $1 = \bar{1} = c_1 1 = c_1$. Luego, $\bar{z} = z$
- Si $z$=$i$: $-i = \bar{i} = i$. Absurdo!

Análogamente se prueba que $f(z) = \mathrm{Re}(z)$ y $f(z) = \mathrm{Im}(z)$ no son polinómicas en la variable $z$.

***Funciones racionales en la variable $z$***: son las que se pueden expresar como cociente entre dos funciones polinómicas, es decir

$$f(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \quad \text{con } N(z), D(z) \text{ polinómicas en la variable } z$$

El dominio más amplio de tales funciones es $D = \{z \in \mathbb{C} : D(z) \neq 0\}$

es decir $D = \mathbb{C} - \{z : D(z) = 0\}$

<u>**Ejemplo**</u>: $f(z) = \frac{1}{z^3+8i}$

Para obtener su dominio debemos buscar las $3$ raíces complejas de la ecuación

$$z^3 + 8i = 0$$

$$z^3 + 8i = 0 \iff z^3 = -8i \iff z = \sqrt[3]{-8i}$$

Hallemos módulo y argumento principal de $-8i$:

$$r = |-8i| = 8 \qquad ; \qquad \theta = \mathrm{Arg}(-8i) = -\frac{\pi}{2}$$

así que:

$$-8i = 8e^{-i\pi/2}$$

Entonces,

$$z_k = \sqrt[3]{-8i} = \sqrt[3]{r}e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{3}\right)}; k = 0,1,2.$$

Luego,

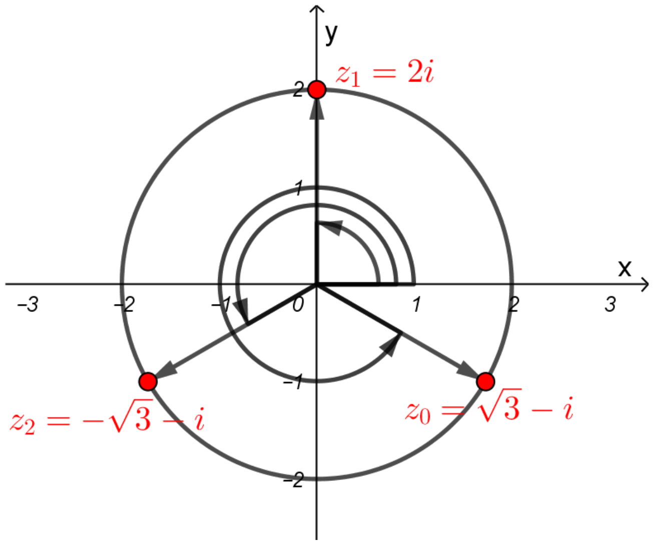
$$z_k = \sqrt[3]{-8i} = \sqrt[3]{8}e^{i\left(\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{(4k-1)\pi}{6}}\ ; k = 0,1,2.$$

Así:

$$z_0 = 2e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2\left(cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\ sen\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\ \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - i$$

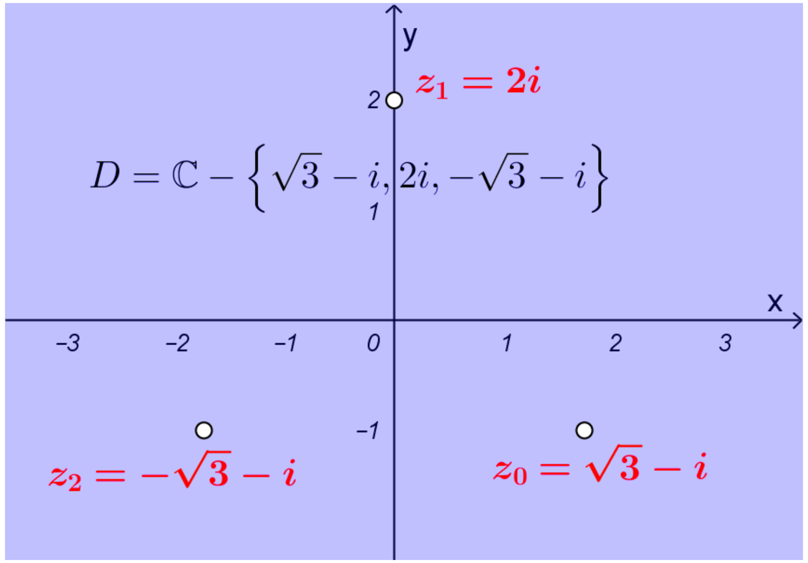
$$z_1 = 2e^{i\frac{3\pi}{6}} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$$

$$z_2 = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} = 2\left(cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\ sen\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) =$$
$$= 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\ \frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} - i$$




Por lo tanto,

$$D_{\text{def}}(f) = \mathbb{C} - \{\sqrt{3} - i, 2i, -\sqrt{3} - i\}$$



**Ejercicio**: Hallar y graficar el dominio más amplio de las siguientes funciones y obtener sus partes real e imaginaria.

a) $f(z) = \frac{\bar{z}}{Re(z)}$ ; b) $f(z) = \frac{1}{z^4+2iz^2}$ ; c) $f(z) = \frac{1}{iz^2-z+2i}$ ; d) $f(z) = \frac{1}{z^4+4}$ ;

e) $f(z) = \frac{1}{2\,\overline{z} + iz-5-4i}$ ; f) $f(z) = \frac{1}{|z-1|-|z-i|}$

Rta:

a) $D = \mathbb{C} - \{iy : y \in \mathbb{R}\}$; b) $D = \mathbb{C} - \{0, 1 - i, -1 + i\}$; c) $D = \mathbb{C} - \{i, -2i\}$ ;

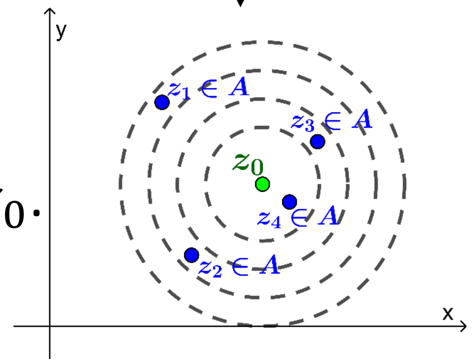
d) $D = \mathbb{C} - \{1 + i, -1 + i, -1 - i, 1 - i\}$; e) $D = \mathbb{C} - \{2 - i\}$; f) $D = \mathbb{C} - \{x + iy : y = x\}$

# Límites de funciones de una variable compleja

Puntos hacia los cuales tiene sentido estudiar límites de funciones

Recordemos que $z_0 \in \mathbb{C}$ es un ***punto de acumulación de un subconjunto $A$*** del plano complejo si se verifica la siguiente condición:

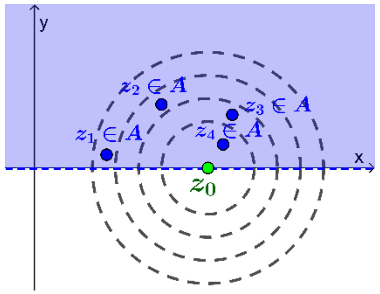
Todo entorno reducido de $z_0$ contiene al menos un punto de $S$, es decir $\forall \varepsilon > 0, E^*(z_0, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, que expresa que hay puntos de $A$ distintos de $z_0$ y tan cercanos a él como se quiera.




Observar que esta condición no tiene en cuenta si $z_0$ pertenece o no a $A$.

En particular, si $f: D \to \mathbb{C}$ y $z_0$ es punto de acumulación de $A \subseteq D$, se podrá evaluar $f(z)$ en puntos $z \in A$ tan cercanos a $z_0$ como se quiera pero distintos de $z_0$.

Ejemplo: 1) Los puntos de acumulación de $A = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ son los $z_0$ con $\text{Im}(z_0) \geq 0$.




2) Cualquier $z_0 \in \mathbb{C}$ es punto de acumulación del dominio $D = \mathbb{C} - \{0\}$ de $f(z) = \frac{1}{z}$ Por ejemplo el origen, porque hay puntos $z \neq 0$ tan cercanos al origen como se quiera donde $f$ está definida.

3) Cualquier $z_0 \in \mathbb{C}$ es de acumulación del dominio de $f(z) = \text{Arg}(z)$ ¿Por qué?

# Límites de funciones complejas

Sean $f : D \to \mathbb{C}$, $A \subseteq D$, $z_0$ un punto de acumulación de $A$. Como observamos antes, es posible evaluar $f(z)$ en puntos $z \in A$ arbitrariamente cercanos a $z_0$ y diferentes de él. Entonces, tiene sentido la definición siguiente.

Def: Se dice que $f(z)$ tiende a $L \in \mathbb{C}$ cuando $z$ tiende $z_0$ por el conjunto $A$ si los valores $f(z)$ se acercan arbitrariamente a $L$ con tal que $z \in A$ sea suficientemente cercano a $z_0$ pero $z \neq z_0$. Cuando esto ocurre el número complejo $L$ es único y se llama el ***límite de $f(z)$ para $z$ tendiendo a $z_0$ por el conjunto $A$***.
Notación:

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in A}} f(z) = L$$

Si $A = D$, hablamos del ***límite de $f(z)$ para $z$ tendiendo a $z_0$*** y anotamos: $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$

Es claro que si $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$ existe entonces para cualquier $A \subseteq D$ tal que $z_0$ sea punto de acumulación de $A$, necesariamente $\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in A}} f(z) = L$.

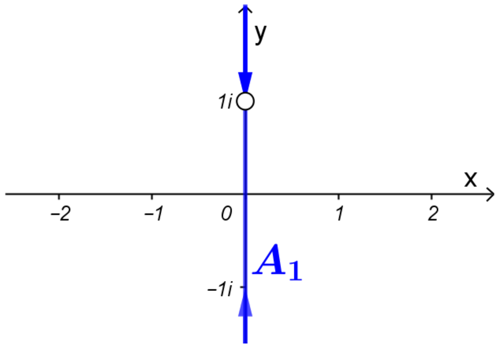
## Observar:

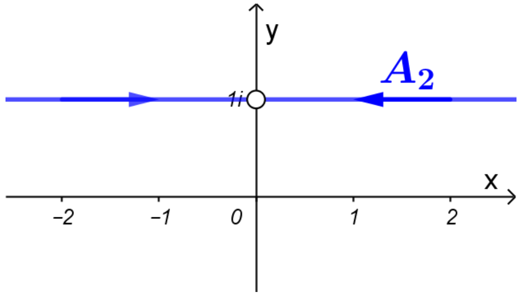
- Si para algún $A \subseteq D$ el $\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in A}} f(z)$ no existe entonces $\lim_{z \to z_0} f(z)$ no existe.
- Si para $A_1 \neq A_2$ subconjuntos de $D$ es $\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in A_1}} f(z) \neq \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in A_2}} f(z)$ entonces $\lim_{z \to z_0} f(z)$ no existe.

<u>**Ejemplo**</u>:

1) $f(z)=\dfrac{\overline{z}+i}{z-i}$ , $D=D_{\text{def}}(f)=\mathbb{C}-\{i\}$ , $z_0=i$ (es punto de acumulación de $D$).

Sean $A_1=\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Re}(z)=0, \operatorname{Im}(z)\neq 1\}$, $A_2=\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Im}(z)=1 , \operatorname{Re}(z)\neq 0\}$.
Entonces $z_0$ es punto de acumulación de $A_1$ y de $A_2$ y se tiene:




$$\lim_{\substack{z\to i\\ z\in A_1}} f(z)=\lim_{\substack{z\to i\\ \operatorname{Re}(z)=0}}\frac{\overline{z}+i}{z-i}=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,1)\\ x=0}}\frac{\overline{x+iy}+i}{(x+iy)-i}=\lim_{y\to 1}\frac{\overline{iy}+i}{iy-i}=\lim_{y\to 1}\frac{-iy+i}{iy-i}=\lim_{y\to 1}\frac{-(iy-i)}{(iy-i)}=-1$$

$$\lim_{\substack{z\to i\\ z\in A_2}} f(z)=\lim_{\substack{z\to i\\ \operatorname{Im}(z)=0}}\frac{\overline{z}+i}{z-i}=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,1)\\ y=1}}\frac{\overline{x+iy}+i}{(x+iy)-i}=\lim_{x\to 0}\frac{\overline{x+i}+i}{x+i-i}=\lim_{y\to 1}\frac{x-i+i}{x}=\lim_{y\to 1}\frac{x}{x}=1$$

Como $\lim\limits_{\substack{z\to i\\ z\in A_1}} f(z)=-1\neq 1=\lim\limits_{\substack{z\to i\\ z\in A_2}} f(z)$, podemos afirmar que $\lim\limits_{z\to i} f(z)$ no existe.

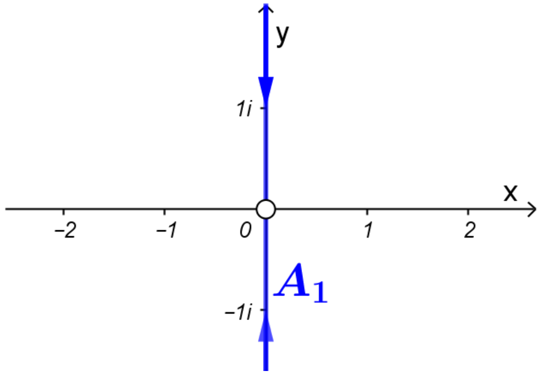
2) $f(z)=\frac{\mathrm{Re}(z)}{\overline{z}}$ $\quad z_0=0$ es punto de acumulación del dominio $D=\mathbb{C}-\{0\}$ pues $\forall R>0, E^*(0,R)\cap D\neq\emptyset$. Entonces tiene sentido preguntarse acerca de la existencia del límite de $f(z)$ para $z\to 0$.

Observemos que se trata de una forma indeterminada "$0/0$" puesto que claramente tanto numerador como denominador tienden a $0$ cuando $z\to 0$.

El siguiente límite no existe:

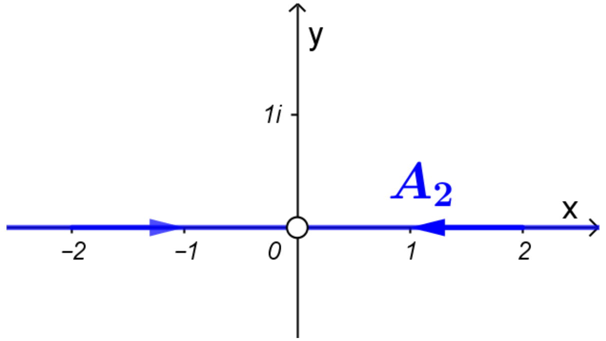
$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{Re}(z)}{\overline{z}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x}{x-iy}$$

En efecto, sean $A_1=\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}(z)=0\,,\mathrm{Im}(z)\neq 0\}$, $A_2=\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}(z)=0\,,\mathrm{Re}(z)\neq 0\}$. Se tiene:




$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in A_1}} f(z)=\lim_{\substack{z\to 0\\ \mathrm{Re}(z)=0}}\frac{\mathrm{Re}(z)}{\overline{z}}=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}}\frac{x}{x-iy}=\lim_{y\to 0}\frac{0}{(0-iy)}=\lim_{y\to 0}0=0$$

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in A_2}} f(z)=\lim_{\substack{z\to 0\\ \mathrm{Im}(z)=0}}\frac{\mathrm{Re}(z)}{\overline{z}}=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}}\frac{x}{x-iy}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0}1=1$$



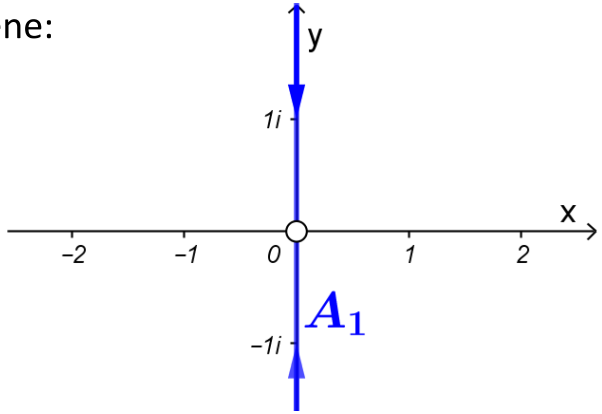

Como estos dos límites son distintos, entonces $\lim_{z\to 0} f(z)$ no existe.

3) $f(z)=\frac{\mathrm{Im}(z^2)}{z^2}$

Tiene sentido preguntarse acerca de la existencia del límite de $f(z)$ para $z\to 0$ pues $z_0=0$ es punto de acumulación del dominio $D=\mathbb{C}-\{0\}$. Observemos que se trata de una forma indeterminada "$0/0$" cuando $z\to 0$:

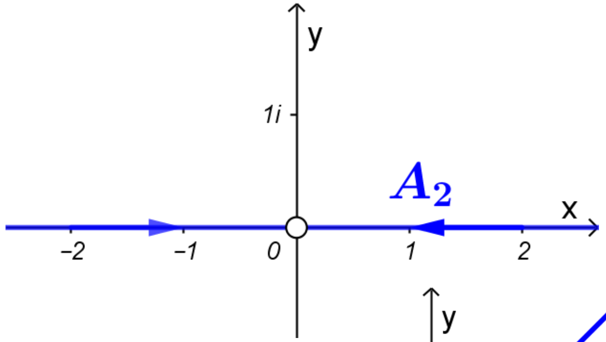
Se tiene:

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{Im}(z^2)}{z^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2xy}{x^2+y^2+i2xy}$$



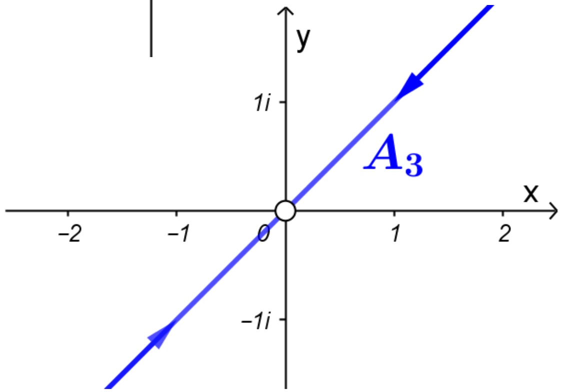

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ \mathrm{Re}(z)=0}}\frac{\mathrm{Im}(z^2)}{z^2}=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}}\frac{2xy}{x^2+y^2+i2xy}=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2}=0$$

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ \mathrm{Im}(z)=0}}\frac{\mathrm{Im}(z^2)}{z^2}=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}}\frac{x^2-y^2+i2xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2}=0$$




Sin embargo:

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ \mathrm{Im}(z)=\mathrm{Re}(z)}}\frac{\mathrm{Im}(z^2)}{z^2}=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}}\frac{x^2-y^2+i2xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{i2x^2}{2x^2}=i$$




Luego, $\lim_{z\to 0} f(z)$ no existe, ¿verdad?

4) $f(z) = Arg(z)$ cuyo dominio es $D = \mathbb{C} - \{0\}$. Sea $z_0 = x_0 + iy_0$

- Si $y_0 = 0\ , x_0 < 0$:

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ Im(z)>0 \\ Re(z)=x_0}} Arg(z) = \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,0) \\ y>0 \\ x=x_0}} arctg\left(\frac{y}{x}\right) + \pi = \lim_{y \to 0^+} arctg\left(\frac{y}{x_0}\right) + \pi = 0 + \pi = \pi$$

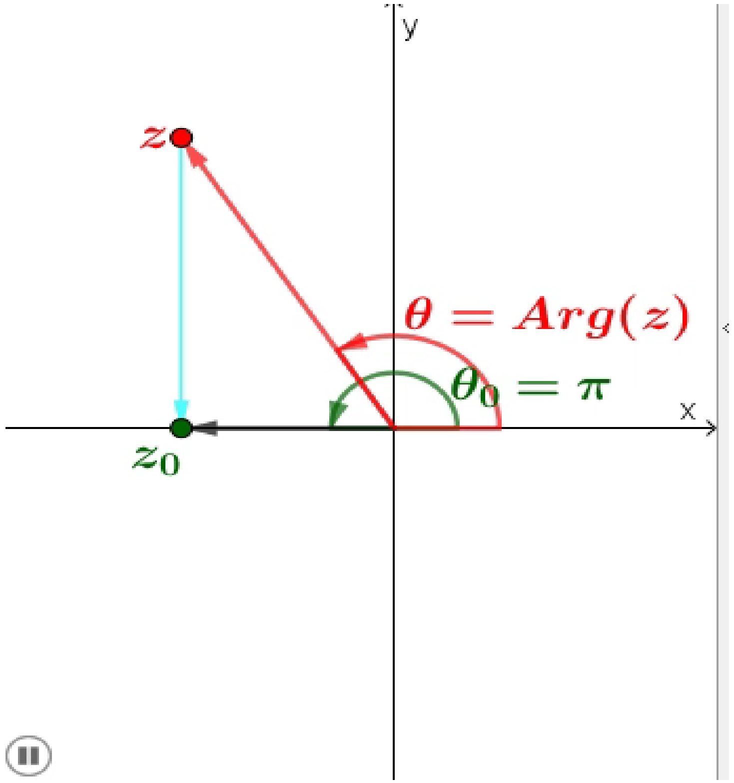
$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ Im(z)<0 \\ Re(z)=x_0}} Arg(z) = \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,0) \\ y<0 \\ x=x_0}} arctg\left(\frac{y}{x}\right) + \pi = \lim_{y \to 0^-} arctg\left(\frac{y}{x_0}\right) - \pi = 0 - \pi = -\pi$$

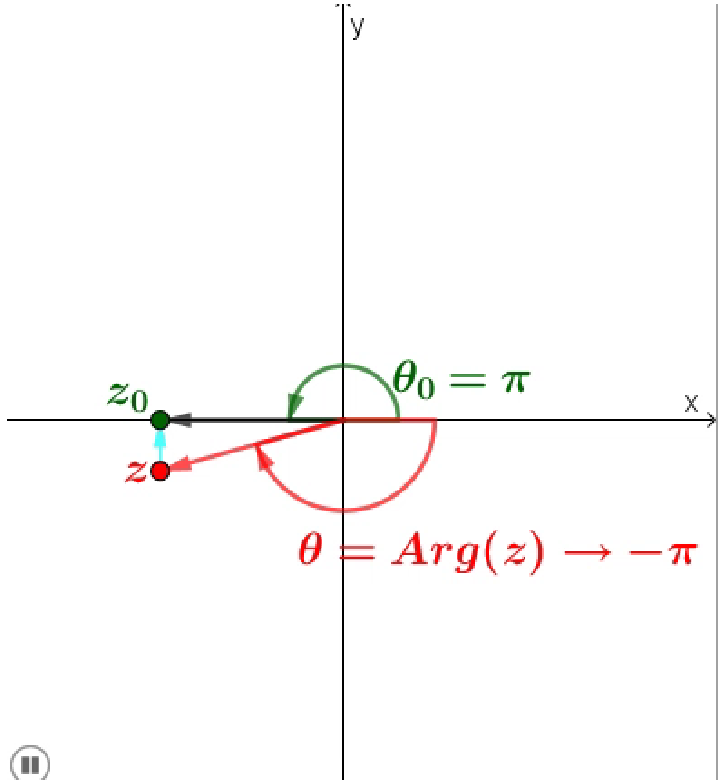
- Si $y_0 = 0\ , x_0 = 0$:

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ Im(z)>0 \\ Re(z)=0}} Arg(z) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y>0 \\ x=0}} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ Im(z)<0 \\ Re(z)=0}} Arg(z) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y<0 \\ x=0}} \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

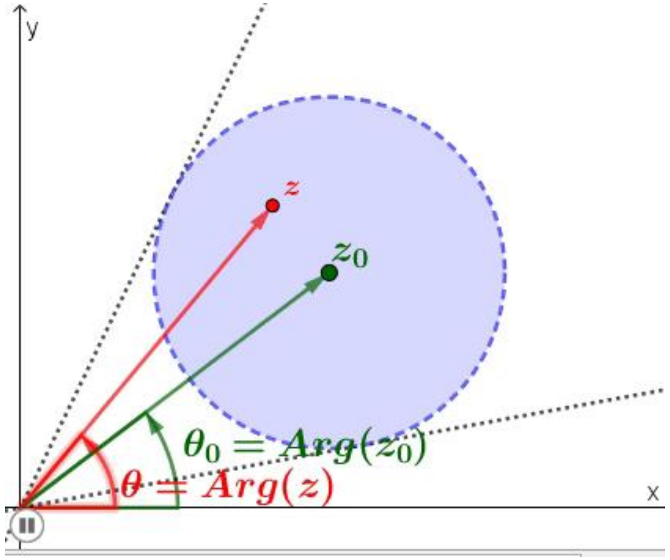
Es decir, cuando $z_0$ es el origen o se sitúa sobre el semieje real negativo $\lim_{z \to z_0} Arg(z)$ no existe.


y
x
$z$
$\theta = Arg(z)$
$\theta_0 = \pi$
$z_0$


y
x
$\theta_0 = \pi$
$z_0$
$z$
$\theta = Arg(z) \to -\pi$

En otros casos, es decir cuando $z_0 = x_0 + iy_0$ no cae en el semieje real negativo ni en el origen, el siguiente gráfico ayuda a entender que

si $z_0 \in D = \mathbb{C} - \{z : Im(z) = 0 \quad \wedge \quad Re(z) \leq 0\}$ entonces $\lim\limits_{z \to z_0} \operatorname{Arg}(z) = \operatorname{Arg}(z_0)$




Analíticamente, dado $z = x + iy$,

- Si $y > 0$ vale: $\operatorname{Arg}(z) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$
- Si $y < 0$ vale: $\operatorname{Arg}(z) = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$
- Si $x > 0$ vale: $\operatorname{Arg}(z) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$

Puesto quelas expresiones anteriores para $\operatorname{Arg}(z)$ son claramente continuas en las respectivas regiones de validez (¿por que?), entonces $\operatorname{Arg}(z)$ resultará una función continua (anticipándonos a la definición de continuidad para funciones de variable compleja) en cada una de ellas. Pero entonces, como

$D = \{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Im}(z) > 0\} \cup \{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Im}(z) < 0\} \cup \{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re}(z) > 0\}$,

resulta que $\operatorname{Arg}(z)$ es continua en $D$.

El concepto de límite $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$ involucra la idea que $f(z)$ se aproxima arbitrariamente a $L$ cuando $z \to z_0$. Esa aproximación viene dada por la distancia $|f(z) - L|$ entre $f(z)$ y $L$. Resulta entonces evidente que:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{z \to z_0} |f(z) - L| = 0$$

En particular:

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = 0 \quad \underbrace{\Leftrightarrow}_{(*)} \quad \lim_{z \to z_0} f(z) = 0$$

**Dos resultados útiles**

En variable real el "teorema del sándwich" establece, para funciones de dos variables reales, el siguiente resultado intuitivo:

Si en un entorno reducido de $(x_0, y_0)$ es $h(x,y) \leq f(x,y) \leq g(x,y)$ y si $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y) = L = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)$, entonces $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$.

En particular, si en un entorno reducido de $(x_0, y_0)$ es $|f(x,y)| \leq |g(x,y)|$ y si $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} |g(x,y)| = 0$, entonces $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0$.

Traducido a variable compleja y junto con $(*)$, se obtiene el siguiente resultado.

**Teorema**: Si en un entorno reducido de $z_0$ es $|f(z)| \leq |g(z)|$ y si $\lim_{z \to z_0} |g(z)| = 0$, entonces $\lim_{z \to z_0} f(z) = 0$.

**Corolario ("Cero por acotada")**: Si $\lim_{z \to z_0} g(z) = 0$ y $h(z)$ está acotada en un entorno reducido de $z_0$, entonces $\lim_{z \to z_0} g(z)h(z) = 0$

Dem: En un entorno reducido de $z_0$ se verifica $|h(z)| \leq M$. Entonces,

$$|g(z)h(z)| = |g(z)||h(z)| \leq M|g(z)| \to 0$$

Luego, por el teorema anterior es $\lim_{z \to z_0} g(z)h(z) = 0$.

**Ejemplo**: Analizar el $\lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}\,Re(z^4)}{z^4}$

Rta: Examinemos el comportamiento de $f(z)=\frac{\bar{z}\,Re(z^4)}{z^4}$ para $z\to 0$ por algunos "caminos" sencillos:

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ \mathrm{Re}(z)=0}}\frac{\bar{z}\,Re(z^4)}{z^4}=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}}\frac{\overline{(x+iy)}\,Re\left((x+iy)^4\right)}{(x+iy)^4}=\lim_{y\to 0}\frac{\overline{(iy)}\,Re\left((iy)^4\right)}{(iy)^4}=\lim_{y\to 0}\frac{(-iy)y^4}{y^4}=\lim_{y\to 0}(-iy)=0$$

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ \mathrm{Im}(z)=0}}\frac{\bar{z}\,Re(z^4)}{z^4}=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}}\frac{\overline{(x+iy)}\,Re\left((x+iy)^4\right)}{(x+iy)^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x\,Re(x^4)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^5}{x^4}=\lim_{x\to 0}x=0$$

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ \mathrm{Im}(z)=\mathrm{Re}(z)}}\frac{\bar{z}\,Re(z^4)}{z^4}=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}}\frac{\overline{(x+iy)}\,Re\left((x+iy)^4\right)}{(x+iy)^4}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-ix)Re\left((x+ix)^4\right)}{(x+ix)^4}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-ix)\,Re\left(x^4(1+i)^4\right)}{x^4(1+i)^4}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(1-i)\,Re(-4x^4)}{(-4x^4)}=\lim_{x\to 0}x(1-i)=0$$

Los tres límites anteriores arrojan el mismo resultado. Veamos que efectivamente $\lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}\,Re(z^4)}{z^4}=0$. Para probarlo, no alcanza con analizar por "caminos". Debemos razonar en general, acotando el módulo $|f(z)-0|$:

$|Re(w)|\leq|w|$

$w=z^4$

Para $z\neq 0$ es

$$|f(z)|=\left|\frac{\bar{z}\,Re(z^4)}{z^4}\right|=\frac{|\bar{z}\,Re(z^4)|}{|z^4|}=\frac{|\bar{z}||Re(z^4)|}{|z|^4}=\frac{|z||Re(z^4)|}{|z|^4}\leq\frac{|z||z^4|}{|z|^4}=\frac{|z||z|^4}{|z|^4}=|z|$$

Como $\lim_{z\to 0}|z|=0$ entonces $\lim_{z\to 0}|f(z)|=0$. Luego, $\lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}\,Re(z^4)}{z^4}=0$

**Ejercicio**: Analizar el $\lim_{z\to 0}\frac{\overline{z}^2\,Im(z^4)}{z^5}$

**Ejemplo**: $f(z) = z^3 Arg(z)$

$z_0 = 0$ es punto de acumulación del dominio $D = \mathbb{C} - \{0\}$.

Si $g(z) = z^3$y $h(z) = Arg(z)$, se tiene:

- $\lim_{z \to 0} g(z) = g(0) = 0$
- $h(z) = Arg(z)$ es acotada pues $|h(z)| = |Arg(z)| \leq \pi$

Recordar que si $w \neq 0$:
$-\pi < Arg(w) \leq \pi$
Entonces:
$|Arg(w)| \leq \pi$

Entonces por la propiedad "cero por acotada":

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{z \to 0} \underbrace{z^3}_{\to 0} \underbrace{Arg(z)}_{\text{acotada}} = 0$$

Basados en las desigualdades $|\mathrm{Re}(z)| \le |z| \le |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$ , $|\mathrm{Im}(z)| \le |z| \le |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$, se prueba la siguiente proposición:

**Proposición**: Dados $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$ punto de acumulación del dominio de $f$, $L = L_1 + iL_2$. Vale:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = L_1 \quad \wedge \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = L_2$$

**Ejemplo**: $\lim_{z \to i} \frac{2}{\overline{z}} = 2i$ pues si $z = x + iy$:

$$\frac{2}{\overline{z}} = \frac{2z}{\overline{z}\,z} = \frac{2z}{|z|^2} = \frac{2x + i2y}{x^2 + y^2} = \underbrace{\frac{2x}{x^2 + y^2}}_{u(x,y)} + i\underbrace{\frac{2y}{x^2 + y^2}}_{v(x,y)}$$

Como las funciones racionales reales son continuas en todo su dominio, se tiene:

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} u(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{2x}{x^2 + y^2} = u(0,1) = 0 = L_1$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} v(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{2y}{x^2 + y^2} = v(0,1) = 2 = L_2$$

Así que

$$\lim_{z \to i} \frac{2}{\overline{z}} = L_1 + iL_2 = 0 + i2 = 2i$$

Observación: si $f(z) = \frac{2}{\overline{z}}$ acabamos de mostrar que $\lim_{z \to i} f(z) = 2i = f(i)$

# Continuidad

Def: una función $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ se dice ***continua en el punto*** $\boldsymbol{z_0} \in \mathbb{C}$ si se cumplen:

I) $z_0 \in D = D_{\text{def}}(f)$

II) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ existe (es un número complejo)

III) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

Se dice que $f$ es **continua en un conjunto** $A \subseteq D$ si lo es en cada punto $z_0 \in A$.

**Ejemplo**:

1) La función $f(z) = \frac{\mathrm{Re}(z)}{\overline{z}}$ es discontinua en $z_0 = 0$ pues $z_0$ no pertenece al dominio de $f$.

2) Cualquiera sea $\alpha \in \mathbb{C}$ , $f(z) = \begin{cases} \frac{\mathrm{Re}(z)}{\overline{z}} & \text{si} \quad z \neq 0 \\ \alpha & \text{si} \quad z = 0 \end{cases}$ , aún estando definida en el origen, también es discontinua allí porque

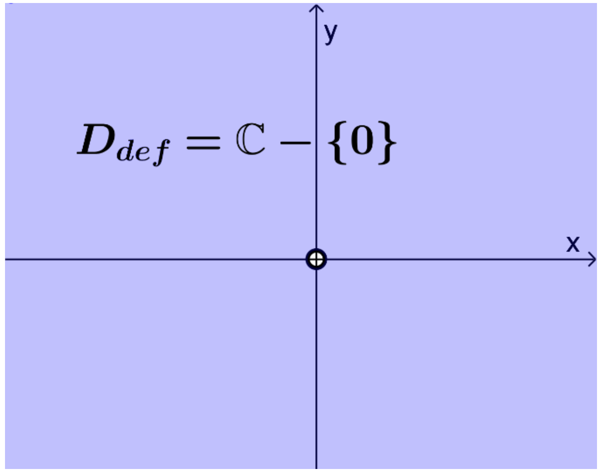
$\lim\limits_{z \to 0} f(z)$ no existe, como se mostró en un ejemplo anterior.

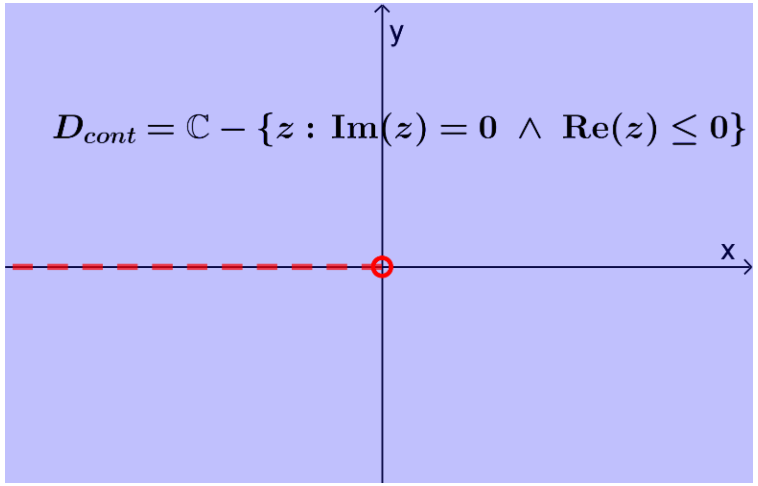
Ejercicio: mostrar que $f(z) = \begin{cases} \frac{\bar{z}\, Re\left(z^4\right)}{z^4} & \text{si} \quad z \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad z = 0 \end{cases}$ es continua en el origen.

**Ejemplo**: $f(z) = Arg(z)$ es discontinua en el origen (por no estar definida allí) y también en el semieje real negativo (por no existir su límite tendiendo a esos puntos). En los demás puntos del plano complejo es continua, como observamos anteriormente.

Entonces:

$$D_{\mathrm{def}}(f) = \mathbb{C} - \{0\} \qquad D_{\mathrm{cont}}(f) = \mathbb{C} - \{z\colon\ Im(z) = 0 \ \wedge \ Re(z) \leq 0\}$$



**Teorema**: Dada $f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$, se tiene: $f(z)$ es continua en $z_0$ si y sólo si $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son continuas en $(x_0, y_0)$.

Observación: se deduce que las constantes (complejas), $f(z) = z$, $g(z) = \mathrm{Re}(z)$, $h(z) = \mathrm{Im}(z)$, $k(z) = \bar{z}$ son continuas en $\mathbb{C}$, puesto que sus partes real e imaginaria son funciones polinómicas reales.

**Algunos resultados análogos al caso de funciones de variable real**

**Proposición 1**: Si $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ y $\lim\limits_{z \to z_0} g(z)$ existen, entonces:

a) $\lim\limits_{z \to z_0} (f(z) + g(z)) = \lim\limits_{z \to z_0} f(z) + \lim\limits_{z \to z_0} g(z)$

b) $\lim\limits_{z \to z_0} (f(z)g(z)) = \left(\lim\limits_{z \to z_0} f(z)\right)\left(\lim\limits_{z \to z_0} g(z)\right)$

c) $\text{Si} \lim\limits_{z \to z_0} g(z) \neq 0, \text{entonces} \lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim\limits_{z \to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z \to z_0} g(z)}$

**Proposición 2 ("corrimiento del límite")**: Si $f(w)$ es continua en $w_0$ y $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = w_0$, entonces: $\lim\limits_{z \to z_0} f(g(z)) = f(\, w_0)$.

A partir de las proposiciones anteriores se deduce el siguiente resultado.

**Teorema**:

a) La suma y el producto de funciones continuas en $z_0$ es continua en $z_0$ y el cociente lo es si su denominador no se anula en $z_0$.

b) Si $g(z)$ es continua en $z_0$ y $f(w)$ es continua en $w_0$, entonces la composición $f(g(z))$ es continua en $z_0$.

El siguiente resultado es inmediato a partir del análogo para límites:

**Corolario 2**: Las funciones polinómicas en $z$ son continuas en todo el plano complejo. Las funciones racionales en $z$ lo son en todo su dominio (es decir excepto en los puntos del plano donde se anula su denominador).

Ejemplo: Hallar el dominio de continuidad de las funciones

1) $f(z) = \left(z + \frac{z^2 - i}{z^3 + 4z}\right)^3$

Puesto que es una función racional, $f(z)$ es continua en su dominio, es decir $D_{\text{cont}}(f) = -\{0, 2i, -2i\}$.

$$z^3 + 4z = 0$$
$$z(z^2 + 4) = 0$$
$$z = 0 \quad \vee \quad z^2 + 4 = 0$$
$$z = 0 \ \vee \ z = 2i \ \vee \ z = -2i$$

2) $f(z) = \frac{\mathrm{Im}(z^3)}{z}$

$h(z) = z^3$ es continua en $\mathbb{C}$ por ser polinómica.

$k(z) = \mathrm{Im}(z)$ es continua en $\mathbb{C}$ pues sus partes real e imaginaria son continuas en $\mathbb{R}^2$.

$t(z) = \mathrm{Im}(z^3)$ es continua en $\mathbb{C}$ pues es composición de continuas.

$p(z) = z$ es continua en $\mathbb{C}$ por ser polinómica.

$f(z) = \frac{\mathrm{Im}(z^3)}{z}$ es continua en $\mathbb{C} - \{0\}$ por ser cociente de continuas (denominador no nulo)

3) $f(z) = \begin{cases} \frac{z^3 - iz^2 + 4i}{z - 2i} & \text{si} \quad z \neq 2i \\ 0 & \text{si} \quad z = 2i \end{cases}$

Rta:

$z^3 - iz^2 + 4i = (z - 2i)(z^2 + iz - 2)$

Ruffini

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -i & 0 & 4i \\ 2i & & 2i & -2 & -4i \\ \hline & 1 & i & -2 & 0 \end{array}$$

$$\lim_{z \to 2i} \frac{z^3 - iz^2 + 4i}{z - 2i} = \lim_{z \to 2i} \frac{(z - 2i)(z^2 + iz - 2)}{(z - 2i)} = \lim_{z \to 2i} (z^2 + iz - 2) = -8 \neq 0 = f(2i)$$

Luego, $f$ es discontinua en $z = 2i$.

En cualquier otro punto $f$ es continua porque en un entorno de $z \neq 2i$ coincide con la función racional con denominador no nulo $\frac{z^3 - iz^2 + 4i}{z - 2i}$

Por lo tanto: $D_{\text{cont}}(f) = \mathbb{C} - \{2i\}$.

4) $f(z) = \begin{cases} \dfrac{\overline{z}^2\, Im(z^4)}{z^5} & \text{si} \quad z \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad z = 0 \end{cases}$ $\qquad D_{\text{def}} = \mathbb{C}.$

Si $z \neq 0$ la función es continua porque:

$$f_1(z) = \bar{z} \ ;\ D_{\text{cont}}(f_1) = \mathbb{C}$$
$$f_2(z) = z^2 \ ;\ D_{\text{cont}}(f_1) = \mathbb{C}$$
$$f_3(z) = \overline{z}^{\,2} = f_1(f_2(z)); D_{\text{cont}}(f_3) = \mathbb{C} \text{ (composición de continuas)}$$
$$f_4(z) = \text{Im}(z) \ ;\ D_{\text{cont}}(f_4) = \mathbb{C}$$
$$f_5(z) = z^4 \ ;\ D_{\text{cont}}(f_5) = \mathbb{C}$$
$$f_6(z) = Im(z^4) = f_4\big(f_5(z)\big);\ D_{\text{cont}}(f_6) = \mathbb{C} \text{ (composición de continuas)}$$
$$f_7(z) = \overline{z}^{\,2}\, Im(z^4) = f_3(z) f_6(z) \text{ (producto de continuas)}$$
$$f_8(z) = z^5 \ ;\ D_{\text{cont}}(f_8) = \mathbb{C}$$
$$f_9(z) = \frac{\overline{z}^{\,2}\, Im(z^4)}{z^5} = \frac{f_7(z)}{f_8(z)};\ D_{\text{cont}}(f_9) = \mathbb{C} - \{0\} \text{ (cociente de continuas)}$$

Además $\lim\limits_{z \to 0} f(z) = \lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\overline{z}^2\, Im(z^4)}{z^5} = 0 = f(0)$ En efecto, para $z \neq 0$:

Recordar:
$|Re(w)| \leq |w|$
$|Im(w)| \leq |w|$

$$0 \leq \left|\frac{\overline{z}^2\, Im(z^4)}{z^5}\right| = \frac{|\overline{z}^2\, Im(z^4)|}{|z^5|} = \frac{|\overline{z}^2\,||\, Im(z^4)|}{|z^5|} = \frac{|\overline{z}|^2 |\, Im(z^4)|}{|z|^5} = \frac{|z|^2 |\, Im(z^4)|}{|z|^5} = \frac{\left| Im\, \overbrace{z^4}^{w} \right|}{|z|^3} \leq \frac{|z^4|}{|z|^3} \leq \frac{|z|^4}{|z|^3} = |z| \ \to 0$$

Entonces, $D_{\text{cont}}(f) = \mathbb{C}$

Ejercicio: Hallar el dominio de continuidad de las siguientes funciones

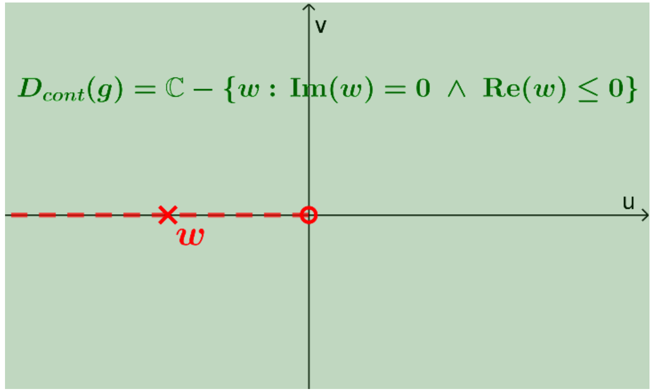
$$f(z) = \frac{Im(z^3)}{z} \quad ; \quad g(z) = \begin{cases} \frac{Im(z^3)}{z} & \text{si} \quad z \neq 0 \\ i & \text{si} \quad z = 0 \end{cases} \quad ; \quad h(z) = \begin{cases} \frac{Im(z^3)}{z} & \text{si} \quad z \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad z = 0 \end{cases}$$

**Ejemplo**: Sean $f(z) = Arg(iz)\,;\ g(w) = Arg(w)$.

$w = L(z) = iz$ es continua en $\mathbb{C}$ y admite inversa continua en $\mathbb{C}$, dada por $z = L^{-1}(w) = -iw$.

Se verifica:

$$f \text{ es continua en } D \iff g \text{ es continua en } L(D)$$




En efecto:

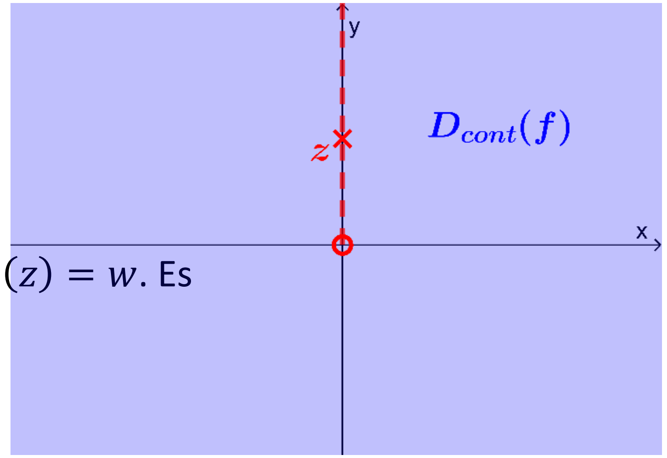
$$f(z) = Arg(iz) = g(L(z)) \quad ; \quad g(w) = Arg(w) = f(L^{-1}(w))$$

- Si $f$ es continua en $z\epsilon D$ entonces $g$ es continua en $w = L(z) = iz$

porque $g(w) = f\ (L^{-1}(w))$ es composición de continuas: $L^{-1}$ continua en $w$ compuesta con $f$ continua en $L^{-1}(w) = z$. Es decir: $L(D_{cont}(f)) \subseteq D_{cont}(g)$.

- Si $g$ es continua en $w\epsilon L(D)$ entonces $f$ es continua en $z = L^{-1}(w) = -iw$

porque $f(z) = g\ (L(z))$ es composición de continuas: $L$ continua en $z$ compuesta con $g$ continua en $L(z) = w$. Es decir: $L^{-1}(D_{cont}(g)) \subseteq D_{cont}(f)$. O sea: $D_{cont}(g) \subseteq L(D_{cont}(f))$.




En base a las dos observaciones anteriores: $D_{cont}(g) = L(D_{cont}(f))$ o equivalentemente $D_{cont}(f) = L^{-1}(D_{cont}(g))$.

Ahora bien, sabemos que $g$ es continua excepto en el origen y en el semieje real negativo. Entonces $f$ es continua en la imagen $D_{cont}(f) = L^{-1}(D_{cont}(g))$. Pero un punto $w$ no cae en el semieje real negativo si y sólo si $L^{-1}(w) = -iw$ no cae en el semieje imaginario positivo.

Entonces:

$$D_{\text{cont}}(f) = \mathbb{C} - \{z : Re(z) = 0\,, Im(z) \geq 0\}$$

# Derivada

Una función $f(z)$ definida al menos en un entorno del punto $z_0$ se dice ***derivable en*** $\boldsymbol{z_0}$ si el siguiente límite existe:

$$f'(z_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Cuando esto ocurre, el límite anterior se llama la derivada de $f$ en $z_0$.

Observar: $f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$

La función $f$ se dice derivable en un conjunto si lo es en cada punto de ese conjunto.

Ejemplo: Averigüemos dónde es derivable $f(z) = z^2$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z_0 + \Delta z)^2 - z_0^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z_0^2 + 2z_0\Delta z + (\Delta z)^2) - z_0^2}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{2z_0\Delta z + (\Delta z)^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(2z_0 + \Delta z)\Delta z}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} (2z_0 + \Delta z) = 2z_0$$

Entonces el dominio de derivabilidad de $f$ es $D_{\text{der}} = \mathbb{C}$ y se tiene: $f'(z) = 2z$

Ejemplo: ¿Cuál es el dominio de derivabilidad de $f(z) = \bar{z}$ ?

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{z_0 + \Delta z} - \bar{z_0}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\bar{z_0} + \overline{\Delta z} - \bar{z_0}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

Este límite no existe pues:

$$\lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ Im(\Delta z)=0}} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 \qquad \lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ Re(\Delta z)=0}} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overline{i\Delta y}}{i\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-i\Delta y}{i\Delta y} = -1$$

Entonces el dominio de derivabilidad de $f$ es vacío: $D_{\text{der}} = \emptyset$. Vemos que la función $f(z) = \bar{z}$ es continua en todo el plano complejo pero no admite derivada en ningún punto!

Propiedad:

a) La derivada de una constante es cero.

b) Para $n \in \mathbb{N}$: $\frac{d}{dz}(z^n) = nz^{n-1}$

En efecto, con el mismo razonamiento que en variable real:

$$\frac{d}{dz}(z^n) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\Delta z)^k z^{n-k} - z^n}{\Delta z}$$

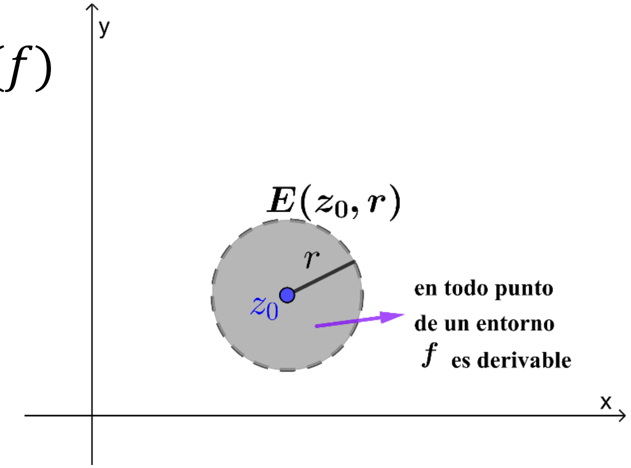
$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (\Delta z)^k z^{n-k} - z^n}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (\Delta z)^k z^{n-k}}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (\Delta z)^{k-1} z^{n-k} = \binom{n}{1} z^{n-1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} z^{n-1} = nz^{n-1}$$

# Analiticidad

Se dice que la función $f(z)$ es ***analítica en el punto $z_0$*** si es derivable no sólo en dicho punto sino en todos los puntos de algún entorno suficientemente pequeño de $z_0$. Es decir:

$$f(z) \text{ es analítica en } z_0 \iff \text{ existe } r > 0 \text{ tal que } E(z_0, r) \subseteq D_{\text{der}}(f)$$




Se dice que la función $f(z)$ es ***analítica en un conjunto*** si lo es en cada punto de dicho conjunto.

Ejemplo:

1) $f(z) = \bar{z}$ Como $D_{\text{der}}(f) = \emptyset$ entonces $D_{\text{ana}}(f) = \emptyset$

2) $f(z) = z\,Re(z)$ Se tiene: $D_{\text{der}}(f) = \{0\}$ así que $D_{\text{ana}}(f) = \emptyset$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z_0 + \Delta z)Re(z_0 + \Delta z) - z_0 Re(z_0)}{\Delta z} =$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z_0 + \Delta z)(x_0 + \Delta x) - z_0 x_0}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z_0 \Delta x + x_0 \Delta z + \Delta z \Delta x}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \left( z_0 \frac{\Delta x}{\Delta z} + x_0 + \Delta x \right)$$

Pero $\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta z}$ no existe (¿por qué?), así que la derivada existe si y sólo si $z_0 = 0$:

$$f'(0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(0 + \Delta z) - f(0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} (0 + \Delta x) = 0$$

**Teorema**:

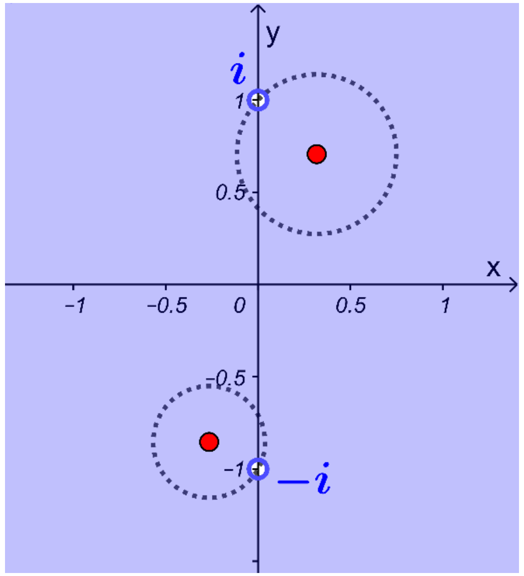
a) Suma, resta, producto y composición de funciones derivables (analíticas) es una función derivable (analítica). Las reglas de derivación usuales son válidas.

b) Cociente de funciones derivables (analíticas) es derivable (analítica), excepto en los puntos donde se anula el denominador.

c) La regla de la cadena es válida. Luego, composición de derivables es derivable y composición de analíticas es analítica.

Ejemplo: Hallar los dominios de derivabilidad y analiticidad de $f(z) = \frac{(iz^3+1)^2}{z^2+1}$

Se trata de una función racional. Numerador y denominador son derivables en todo el plano complejo, por ser polinómicas. Entonces $f$ es derivable en todo el plano complejo excepto en los puntos que anulan al denominador: $D_{\text{der}}(f) = \mathbb{C} - \{-i, i\}$ Por lo tanto $D_{\text{ana}}(f) = \mathbb{C} - \{-i, i\}$.




$$f'(z) = \frac{2(iz^3+1)3iz^2(z^2+1) - (iz^3+1)^2 2z}{(z^2+1)^2}$$

Observar: Las funciones polinómicas y las racionales son derivables y analíticas

en todo su dominio.

**Teorema**: Si $f(z)$ es derivable en $z_0$ entonces es continua en $z_0$.

Dem:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{(z-z_0)}(z-z_0) + f(z_0) = f'(z_0).0 + f(z_0) = f(z_0)$$

Observar: Si $f(z)$ es discontinua en $z_0$ entonces no es derivable en $z_0$.

## Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Sea $f(z) = \bar{z}\,\mathrm{Im}(z) = (x - iy)y = xy - iy^2$

$$u(x,y) = \mathrm{Re}\big(f(z)\big) = xy \qquad v(x,y) = \mathrm{Im}\big(f(z)\big) = -y^2$$

Supongamos que $f$ es derivable en el punto $z_0 = x_0 + iy_0$, de modo que existe el siguiente límite:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{(z_0 + \Delta z)}\mathrm{Im}(z_0 + \Delta z) - \overline{z_0}\,\mathrm{Im}(z_0)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\overline{(x_0 + iy_0 + \Delta x + i\Delta y)}\mathrm{Im}(x_0 + iy_0 + \Delta x + i\Delta y) - \overline{(x_0 + iy_0)}\,\mathrm{Im}(x_0 + iy_0)}{\Delta z}$$

Calculado por el camino $\mathrm{Im}(\Delta z) = \Delta y = 0$ se tiene:

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ \mathrm{Im}(\Delta z) = 0}} \frac{\overline{(z_0 + \Delta z)}\mathrm{Im}(z_0 + \Delta z) - \overline{z_0}\,Im(z_0)}{\Delta z} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 - iy_0 + \Delta x)y_0 - (x_0 - iy_0)y_0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_0 \Delta x}{\Delta x} = y_0$$

Calculado por el camino $\mathrm{Re}(\Delta z) = \Delta x = 0$ se tiene:

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ Re(\Delta z)=0}} \frac{\overline{(z_0 + \Delta z)} Im(z_0 + \Delta z) - \overline{z_0}\, Im(z_0)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{(x_0 - iy_0 - i\Delta y)(y_0 + \Delta y) - (x_0 - iy_0)y_0}{i\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 - 2iy_0 - \Delta y)\Delta y}{i\Delta y}$$

$$= -i(x_0 - 2iy_0) = -2y_0 - ix_0$$

Como estamos suponiendo que el límite existe, por ambos caminos debe dar el mismo resultado, entonces:

$$y_0 = f'(z_0) = -2y_0 - ix_0$$

Se deduce que: $y_0 = -2y_0 \quad \wedge \quad 0 = -x_0$ es decir (*) $\begin{cases} y_0 = -2y_0 \\ 0 = -x_0 \end{cases}$

<u>Observar</u>:

$$u(x,y) = xy \qquad v(x,y) = -y^2$$

$$u_x(x,y) = y \qquad v_x(x,y) = 0$$

$$u_y(x,y) = x \qquad v_y(x,y) = -2y$$

Así que (*) expresa que $(x_0, y_0)$ es solución del sistema $\begin{cases} u_x(x,y) = v_y(x,y) \\ v_x(x,y) = -u_y(x,y) \end{cases}$

La observación no es fortuita. En efecto, razonemos con $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ en general. Supongamos que $f$ es derivable en el punto $z_0 = x_0 + iy_0$, de modo que existe el siguiente límite:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

Luego, por cualquier camino que se la calcule debe obtenerse el mismo valor. En particular:

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ Im(\Delta z)=0}} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} =$$

$$= \lim_{\substack{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0) \\ \Delta y = 0}} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) + i\,v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) - i\,v(x_0, y_0)}{\Delta x + i\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) + i\,v(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0) - i\,v(x_0, y_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i\,\frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Luego, si $f$ es derivable en el punto $z_0 = x_0 + iy_0$ entonces $u_x(x_0, y_0)$ y $v_x(x_0, y_0)$ existen.

Análogamente:

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ Re(\Delta z)=0}} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} =$$

$$= \lim_{\substack{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0) \\ \Delta x = 0}} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) + i\, v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) - i\, v(x_0, y_0)}{\Delta x + i\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) + i\, v(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) - i\, v(x_0, y_0)}{\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{i\, \Delta y} + i\frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{i\, \Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} -i\frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta y} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta y} = -i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) =$$

$$= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Luego, si $f$ es derivable en el punto $z_0 = x_0 + iy_0$ entonces $u_y(x_0, y_0)$ y $v_y(x_0, y_0)$ existen.

Comparando: $f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + i\, v_x(x_0, y_0)$ , $f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) - i\, u_y(x_0, y_0)$ resulta:

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \quad \wedge \quad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)$$

Como $(x_0, y_0)$ satisface este par de igualdades entonces es solución del sistema de ecuaciones $\begin{cases} u_x(x,y) = v_y(x,y) \\ u_y(x,y) = -v_x(x,y) \end{cases}$

Al sistema de ecuaciones anterior se lo conoce como las **condiciones de Cauchy-Riemann** (CR para abreviar). Queda demostrado el siguiente resultado.

**Teorema (Condición necesaria de derivabilidad)**:

Si $f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$ es derivable en $z_0 = x_0 + iy_0$ entonces $u_x(x, y)$, $u_y(x, y)$, $v_x(x, y)$, $v_y(x, y)$ existen en el punto $(x_0, y_0)$ y verifican allí las condiciones de Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0) \end{cases}$$

y además se verifica $f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$.

Nota:

- Si en un punto no existe alguna de las derivadas parciales $u_x$, $u_y$, $v_x$ o $v_y$ o si no se verifican las condiciones de CR, entonces en dicho punto $f$ no es derivable.
- Si en un punto existen las derivadas parciales $u_x$, $u_y$, $v_x$ o $v_y$ y verifican las condiciones de CR, no podemos afirmar que en dicho punto $f$ es derivable, porque las condiciones CR son necesarias pero no suficientes para derivabilidad.

**Ejemplo**: Sea $f(z) = \begin{cases} \frac{xy^2 + i\,x^2y}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ Se tiene:

$$u(x,y) = Re\big(f(z)\big) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad v(x,y) = Im\big(f(z)\big) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Entonces:

$$u_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(\Delta x, 0) - u(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

$$v_y(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(0, \Delta y) - v(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta y} = 0$$

$$u_y(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(0, \Delta y) - u(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0}{\Delta y} = 0$$

$$v_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(\Delta x, 0) - v(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

Vemos que en el origen se satisfacen las condiciones CR.

Sin embargo:

$$\lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ \mathrm{Im}(\Delta z)=0}} \frac{f(0+\Delta z)-f(0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

$$\lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ \mathrm{Im}(\Delta z)=\,\mathrm{Re}(\Delta z)}} \frac{f(0+\Delta z)-f(0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^3 + i(\Delta x)^3}{\left((\Delta x)^2+(\Delta x)^2\right)(1+i)\Delta x} = \frac{1}{2}$$

Como el resultado depende del camino, entonces $f'(0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(0+\Delta z)-f(0)}{\Delta z}$ no existe.

Este ejemplo muestra que en el origen se verifican las ecuaciones CR pero $f$ no es derivable en $z = 0$.

Entonces, que un punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ sea solución del sistema CR no garantiza que $f'(z_0)$ exista! (donde $z_0$=$x_0 + iy_0$).

**El contenido de las páginas 43 a 46 puede omitirse e ir directamente a pág 47**

**Teorema**

Sea $f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$. Supongamos que $u_x(x, y)$, $u_y(x, y)$, $v_x(x, y)$ y $v_y(x, y)$ existen en un entorno del punto $(x_0, y_0)$. Vale:

$f$ es derivable en $z_0 = x_0 + iy_0$ si y sólo si las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son diferenciables en $(x_0, y_0)$ y se verifican las condiciones de Cauchy-Riemann en $(x_0, y_0)$.

Dem: Incluimos la demostración para quienes hayan visto la noción de diferenciabilidad en varias variables reales.

$\Leftarrow$) Supongamos que $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son diferenciables en $(x_0, y_0)$. Entonces existen funciones $\varepsilon_k(\Delta x, \Delta y)$, $k = 1{,}2$, tales que:

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\varepsilon_k(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0 \qquad (k = 1{,}2)$$

$$\Delta u = u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) = u_x(x_0, y_0)\Delta x + u_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)$$

$$\Delta v = v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0) = v_x(x_0, y_0)\Delta x + v_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)$$

Luego,

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \Delta u + i\, \Delta v \\ &= \big(u_x(x_0, y_0) + i\, v_x(x_0, y_0)\big)\Delta x + \Big(u_y(x_0, y_0) + i\, v_y(x_0, y_0)\Big)\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) + i\, \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y) \end{aligned}$$

Entonces

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\big(u_x(x_0, y_0) + i\, v_x(x_0, y_0)\big)\Delta x + \Big(u_y(x_0, y_0) + i\, v_y(x_0, y_0)\Big)\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) + i\, \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)}{\Delta x + i\, \Delta y}$$

Empleando las ecuaciones CR se tiene:

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\left(\frac{\big(u_x(x_0,y_0)+i\,v_x(x_0,y_0)\big)\Delta x}{\Delta x+i\,\Delta y}+\frac{\big(u_y(x_0,y_0)+i\,v_y(x_0,y_0)\big)\,\Delta y}{\Delta x+i\,\Delta y}\right.$$

Por lo tanto $f$ es derivable en $z_0$. De hecho: $f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + i\ v_x(x_0, y_0)$

$\Rightarrow$) Supongamos que $f$ es derivable en $z_0$ y se verifican las condiciones CR en $(x_0, y_0)$. Entonces:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0)$$

Equivalentemente:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) - f'(z_0)\Delta z}{\Delta z} = 0$$

Sea $\varepsilon(\Delta z) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) - f'(z_0)\Delta z$ de modo que $\lim_{\Delta z \to 0} \varepsilon(\Delta z) = 0$

Se tiene:

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) - f'(z_0)\Delta z = \Delta z\ \varepsilon(\Delta z)$$

Si $f'(z_0) = \alpha + i\beta$ y $\varepsilon(\Delta z) = \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) + i\ \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)$, se tiene:

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) - (\alpha + i\beta)(\Delta x + i\Delta y) = \Delta z\ \varepsilon(\Delta z)$$

Luego, $\quad \Delta u + i\Delta v + (-\alpha\Delta x + \beta\Delta y) + i(-\beta\Delta x - \alpha\Delta y) = (\varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x -$

Entonces:

$$\Delta u + i\Delta v + (-\alpha\Delta x + \beta\Delta y) + i(-\beta\Delta x - \alpha\Delta y) =$$
$$= (\varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x - \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y) + i(\varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\Delta y)$$

Se deduce que:

$$\Delta u = \alpha\Delta x - \beta\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x - \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y$$
$$\Delta v = \beta\Delta x + \alpha\Delta y + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\Delta y$$

donde

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{\varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x - \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$
$$= \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \underbrace{\varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)}_{\to 0} \underbrace{\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}}_{acotada} - \underbrace{\varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)}_{\to 0} \underbrace{\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}}_{acotada} = 0$$

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{\varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$
$$= \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \underbrace{\varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)}_{\to 0} \underbrace{\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}}_{acotada} + \underbrace{\varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)}_{\to 0} \underbrace{\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}}_{acotada} = 0$$

Esto prueba que $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son diferenciables en $(x_0, y_0)$.

A partir del teorema anterior y el hecho que la continuidad de las derivadas parciales de primer orden de $u(x, y)$ y de $v(x, y)$ implica la diferenciabilidad de $u(x, y)$ y de $v(x, y)$, se deduce el siguiente teorema.

**Teorema (Condición suficiente de derivabilidad)**

Sea $f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$. Si $u_x(x, y)$, $u_y(x, y)$, $v_x(x, y)$ y $v_y(x, y)$ existen en un entorno de $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, son continuas en $(x_0, y_0)$ y en dicho punto verifican las condiciones de Cauchy-Riemann, entonces $f$ es derivable

en $z_0 = x_0 + iy_0$.

**Ejemplo**: Hallar los dominios de derivabilidad y de analiticidad de las funciones dadas:

a) $f(z) = (2x^2y + y^2) + i(x^2 + 2y^2)$

b) $f(z) = (3xy^2 + x^3) + i(y^3 + 9y - 6xy)$

c) $f(z) = (3x^2y + 6y - 3y^2) + i(6xy - 6x - x^3)$

d) $f(z) = (2x^3y + y^2) + i(3y^2 - x^2)$

Rta

a) $f(z) = (2x^2y + y^2) + i(x^2 + 2y^2)$

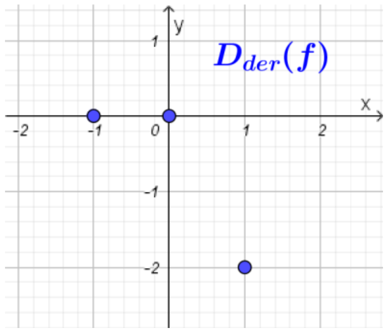
$$u(x,y) = 2x^2y + y^2 \qquad v(x,y) = x^2 + 2y^2$$

Derivadas parciales:

$$u_x(x,y) = 4xy \qquad v_x(x,y) = 2x$$
$$u_y(x,y) = 2x^2 + 2y \qquad v_y(x,y) = 4y$$

Las cuatro derivadas parciales son continuas en $\mathbb{R}^2$ (son funciones polinómicas). Entonces $f$ es derivable en los puntos solución del sistema de ecuaciones CR:

$$\begin{cases} u_x(x,y) = v_y(x,y) \\ u_y(x,y) = -v_x(x,y) \end{cases} \equiv \begin{cases} 4xy = 4y \\ 2x^2 + 2y = -2x \end{cases} \equiv \begin{cases} (x-1)y = 0 \\ x^2 + x + y = 0 \end{cases}$$




De la primera ecuación: $x = 1 \quad \vee \quad y = 0$

Reemplazándolos respectivamente en la segunda ecuación:

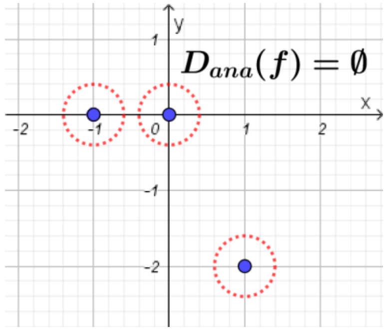
Si $x = 1$: $1^2 + 1 + y = 0$ así que $y = -2$. Una solución es $(x,y) = (1,-2)$

Si $y = 0$: $x^2 + x + 0 = 0$ así que $x(x+1) = 0$ así que $x = 0 \;\vee\; x = -1$. Se tienen las soluciones $(x,y) = (0,0)$ y $(x,y) = (-1,0)$

Luego: $D_{der}(f) = \{1 - 2i, 0, -1\}$

La derivada en esos puntos es:

$$f'(1-2i) = u_x(1,-2) + i\,v_x(1,-2) = -8 + 2i$$
$$f'(0) = u_x(0,0) + i\,v_x(0,0) = 0 + 0i = 0$$
$$f'(-1) = u_x(-1,0) + i\,v_x(-1,0) = 0 - 2i = -2i$$




Como ningún punto de $D_{der}(f)$ admite un entorno de derivabilidad, entonces el dominio de analiticidad es vacío: $D_{ana}(f) = \emptyset$

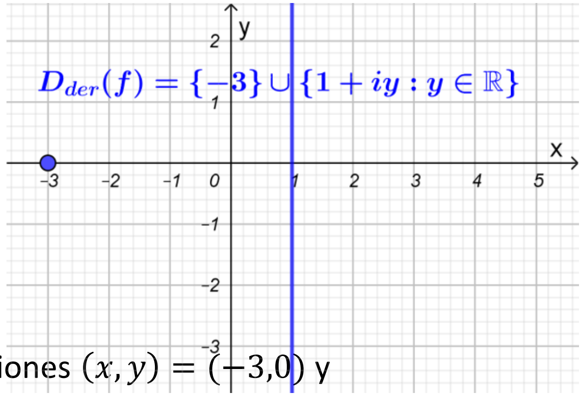
b) $f(z) = (3xy^2 + x^3) + i(y^3 + 9y - 6xy)$

$$u(x,y) = 3xy^2 + x^3 \qquad v(x,y) = y^3 + 9y - 6xy$$

Derivadas parciales:

$$u_x(x,y) = 3y^2 + 3x^2 \qquad v_x(x,y) = -6y$$
$$u_y(x,y) = 6xy \qquad v_y(x,y) = 3y^2 + 9 - 6x$$

Las cuatro derivadas parciales son continuas en $\mathbb{R}^2$ (son funciones polinómicas). Entonces $f$ es derivable en los puntos solución del sistema de ecuaciones CR:




$$\begin{cases} u_x(x,y) = v_y(x,y) \\ u_y(x,y) = -v_x(x,y) \end{cases} \equiv \begin{cases} 3y^2 + 3x^2 = 3y^2 + 9 - 6x \\ 6xy = 6y \end{cases} \equiv \begin{cases} x^2 + 2x - 3 = 0 \\ (x-1)y = 0 \end{cases}$$

De la segunda ecuación: $x = 1 \quad \vee \quad y = 0$

Reemplazándolos respectivamente en la primera ecuación:

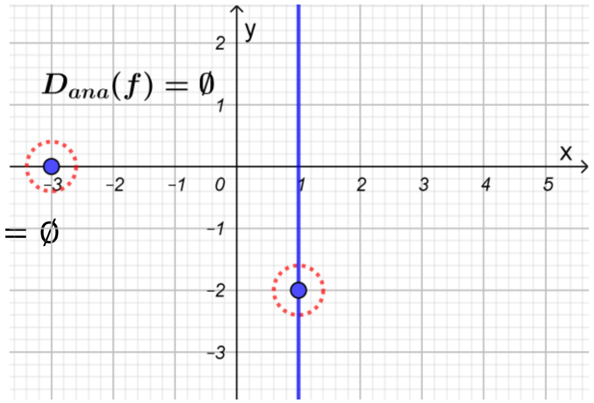
Si $x = 1$: $1^2 + 2 - 3 = 0$, que se verifica $\forall y \epsilon \mathbb{R}$. Se tienen las soluciones $(x,y) = (1,y)$ con $y \epsilon \mathbb{R}$ (recta de ecuación $x = 1$).

Si $y = 0$: $x^2 + 2x - 3 = 0$, cuyas soluciones son $x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(-3)}}{2} = -1 \pm 2$ es decir $x = -3 \ \vee \ x = 1$. Se tienen las soluciones $(x,y) = (-3,0)$ y $(x,y) = (1,0)$.

Luego: $D_{der}(f) = \{-3, 1\} \cup \{1 + i\,y : y \epsilon \mathbb{R}\} = \{-3\} \cup \{1 + i\,y : y \epsilon \mathbb{R}\}$

La derivada en esos puntos es:

$$f'(-3) = u_x(-3,0) + i\,v_x(-3,0) = 27$$
$$f'(1 + iy) = u_x(1,y) + i\,v_x(1,y) = 1 + 3y^2 - 6iy, \forall y \epsilon \mathbb{R}$$




Como ningún punto de $D_{der}(f)$ admite un entorno de derivabilidad, entonces el dominio de analiticidad es vacío: $D_{ana}(f) = \emptyset$

c) $f(z) = (3x^2y + 6y - 3y^2) + i(6xy - 6x - x^3)$

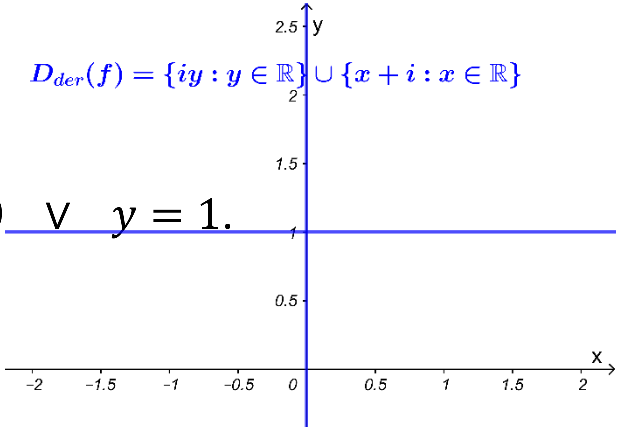
$$u(x,y) = 3x^2y + 6y - 3y^2 \qquad\qquad v(x,y) = 6xy - 6x - x^3$$

Derivadas parciales:

$$u_x(x,y) = 6xy \qquad\qquad v_x(x,y) = 6y - 6 - 3x^2$$
$$u_y(x,y) = 3x^2 + 6 - 6y \qquad\qquad v_y(x,y) = 6x$$

Las cuatro derivadas parciales son continuas en $\mathbb{R}^2$ (son funciones polinómicas). Entonces $f$ es derivable en los puntos solución del sistema de ecuaciones CR:

$$\begin{cases} u_x(x,y) = v_y(x,y) \\ u_y(x,y) = -v_x(x,y) \end{cases} \equiv \begin{cases} 6xy = 6x \\ 3x^2 + 6 - 6y = -6y + 6 + 3x^2 \end{cases} \equiv \begin{cases} x(y-1) = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \equiv x(y-1) = 0$$



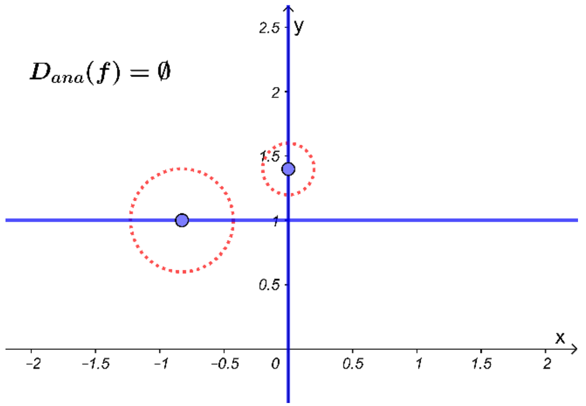

Evidentemente la segunda ecuación es superflua. La primera ecuación tiene soluciones: $x = 0 \quad \vee \quad y = 1$.

Es decir, la soluciones del sistema son las dos rectas de ecuaciones $x = 0$ y $y = 1$.

Luego: $D_{der}(f) = \{iy : y\epsilon\mathbb{R}\} \cup \{x + i : x\epsilon\mathbb{R}\}$

La derivada en esos puntos es:

$$f'(iy) = u_x(0,y) + i\, v_x(0,y) = i(6y - 6), \forall y\epsilon\mathbb{R}$$
$$f'(x+i) = u_x(x,1) + i\, v_x(x,1) = 6x - 3ix^2, \forall x\epsilon\mathbb{R}$$




Como ningún punto de $D_{der}(f)$ admite un entorno de derivabilidad, entonces el dominio de analiticidad es vacío: $D_{ana}(f) = \emptyset$.

d) $f(z) = (2x^3y + y^2) + i(3y^2 - x^2)$

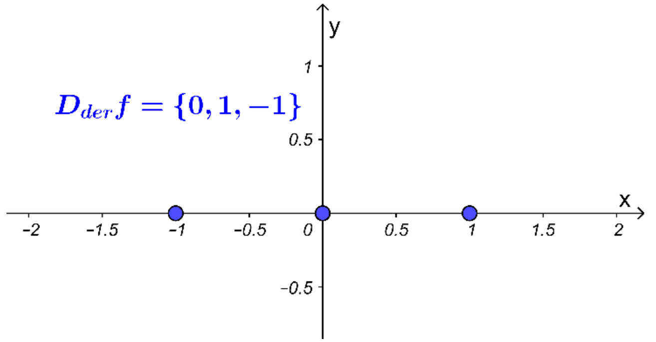
$$u(x,y) = 2x^3y + y^2 \qquad v(x,y) = 3y^2 - x^2$$

Derivadas parciales:

$$u_x(x,y) = 6x^2y \qquad v_x(x,y) = -2x$$
$$u_y(x,y) = 2x^3 + 2y \qquad v_y(x,y) = 6y$$

Las cuatro derivadas parciales son continuas en $\mathbb{R}^2$ (son funciones polinómicas). Entonces $f$ es derivable en los puntos solución del sistema de ecuaciones CR:

$$\begin{cases} u_x(x,y) = v_y(x,y) \\ u_y(x,y) = -v_x(x,y) \end{cases} \equiv \begin{cases} 6x^2y = 6y \\ 2x^3 + 2y = 2x \end{cases} \equiv \begin{cases} (x^2-1)y = 0 \\ x^3 - x + y = 0 \end{cases}$$




La primera ecuación tiene soluciones: $x = 1 \quad \vee \quad x = -1 \quad \vee \quad y = 0.$

Reemplazándolas respectivamente en la segunda ecuación:

Si $x = 1$: $2 - 2 + 2y = 0$ se tiene $y = 0$. Es decir el punto $z = 1$.

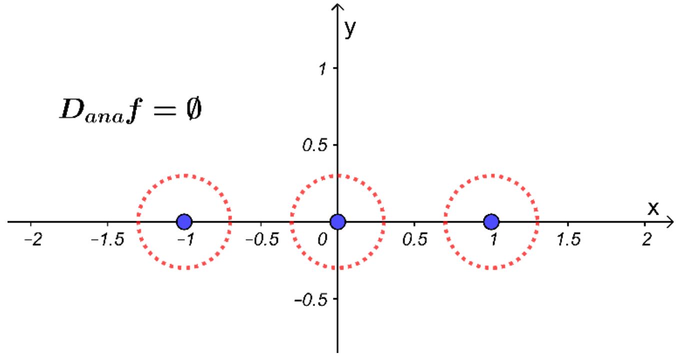
Si $x = -1$: $-2 + 2 + 2y = 0$ se tiene $y = 0$. Es decir el punto $z = -1$.

Si $y = 0$: $x^3 - x = 0$ así que $(x^2 - 1)x = 0$. Entonces $x = 0 \quad \vee \quad x = 1 \quad \vee \quad x = -1$. Es decir los puntos $z = 0, z = 1, z = -1$.

Luego: $D_{der}(f) = \{0,1,-1\}$

La derivada en esos puntos es:

$$f'(0) = u_x(0,0) + i\,v_x(0,0) = 0$$
$$f'(1) = u_x(1,0) + i\,v_x(1,0) = -2i$$
$$f'(-1) = u_x(-1,0) + i\,v_x(-1,0) = 2i$$




Como ningún punto de $D_{der}(f)$ admite un entorno de derivabilidad, entonces el dominio de analiticidad es vacío: $D_{ana}(f) = \emptyset$.

**Ejemplo**: Verificar que $D_{ana}(f) = \mathbb{C}$ si

$$f(z) = e^x(x\cos y - y \operatorname{sen} y) + ie^x(x \operatorname{sen} y + y\cos y)$$

Rta $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ donde

$$u(x,y) = e^x(x\cos y - y\operatorname{sen} y) \qquad v(x,y) = e^x(x\operatorname{sen} y + y\cos y)$$

Derivadas parciales:

$$u_x(x,y) = e^x(x\cos y - y\operatorname{sen} y + \cos y) \qquad v_x(x,y) = e^x(x\operatorname{sen} y + y\cos y + \operatorname{sen} y)$$

$$u_y(x,y) = -e^x(x\operatorname{sen} y + \operatorname{sen} y + y\cos y) \qquad v_y(x,y) = e^x(x\cos y + \cos y - y\operatorname{sen} y)$$

Las cuatro derivadas parciales son continuas en $\mathbb{R}^2$(productos de continuas). Entonces $f$ es derivable en $z = x + iy$ si y sólo si $(x,y)$ es solución del sistema CR:

$$\begin{cases} u_x(x,y) = v_y(x,y) \\ u_y(x,y) = -v_x(x,y) \end{cases} \equiv \begin{cases} e^x(x\cos y - y\operatorname{sen} y + \cos y) = e^x(x\cos y + \cos y - y\operatorname{sen} y) \\ -e^x(x\operatorname{sen} y + \operatorname{sen} y + y\cos y) = -e^x(x\operatorname{sen} y + y\cos y + \operatorname{sen} y) \end{cases}$$

Estas ecuaciones se verifican idénticamente para todo $(x,y)\epsilon\mathbb{R}^2$. Luego, $f(z)$ es derivable en $D_{der}(f) = \mathbb{C}$. Por lo tanto $D_{ana}(f) = \mathbb{C}$ pues todo punto de $D_{der}(f) = \mathbb{C}$ admite un entorno incluido en $D_{der}(f)$.

Derivada:

$$f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = e^x(x\cos y - y\operatorname{sen} y + \cos y) + ie^x(x\operatorname{sen} y + y\cos y + \operatorname{sen} y)$$