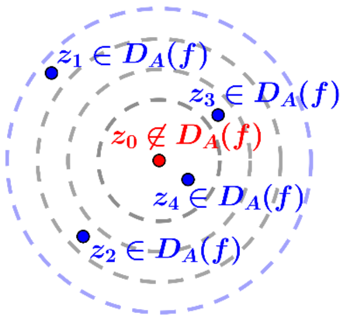
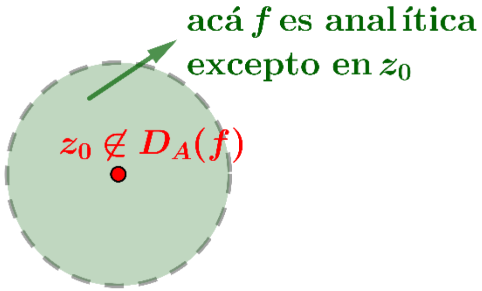
Singularidades – Clasificación de puntos singulares aislados

Singularidades

Se dice que $z_0 \in \mathbb{C}$ es un punto singular o ***singularidad*** de la función $f(z)$ si f no es analítica en z_0 pero en todo entorno de z_0 hay al menos un punto donde f es analítica.



En palabras, *una singularidad es un punto donde la función no es analítica pero hay puntos arbitrariamente cercanos a él donde sí lo es.*



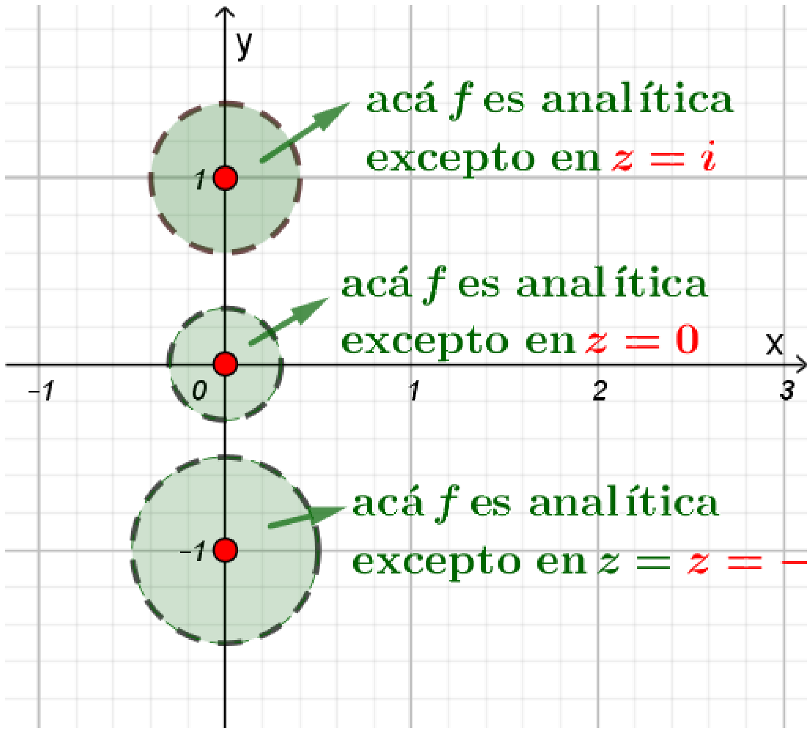
Se dice que $z_0 \in \mathbb{C}$ es una ***singularidad aislada*** de $f(z)$ si existe algún entorno de z_0 cuyo único punto de no analiticidad es z_0.

Es evidente que si una función posee un número finito de singularidades, todas ellas serán aisladas.

Ejemplo 1:

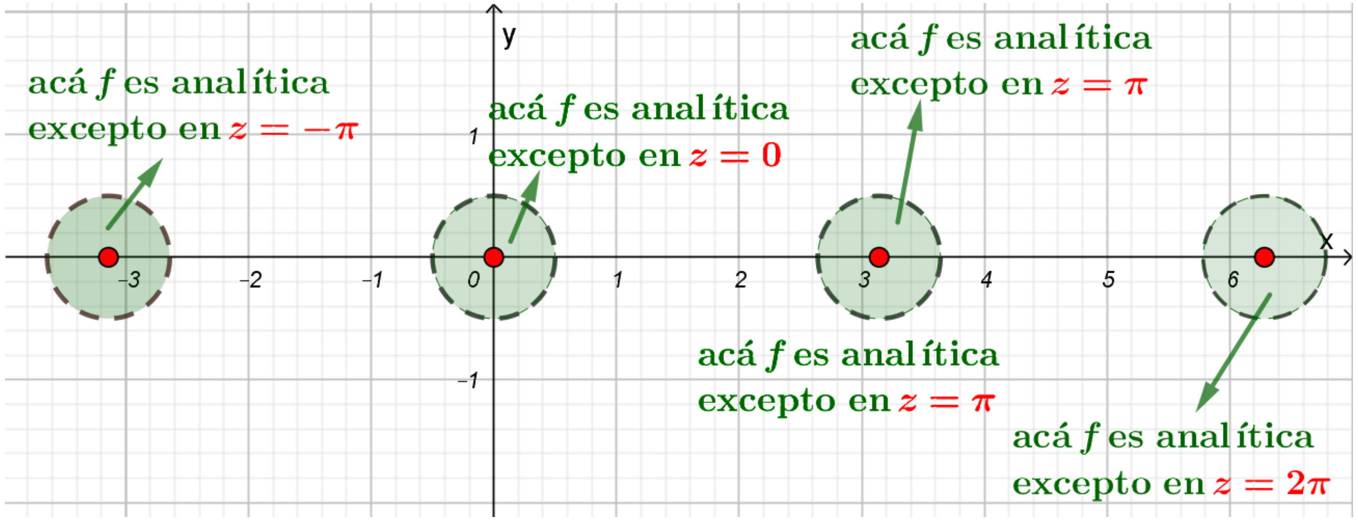
a) $f(z) = \mathrm{Re}(z)$ Aplicando Cauchy-Riemann: $D_{ana}(f) = \emptyset$. Ningún punto posee puntos arbitrariamente cercanos donde f sea analítica. Entonces f no posee puntos singulares.

b) $f(z) = \frac{e^{1/z}}{z^2+1}$ Singularidades: $z = -i$, $z = 0$, $z = i$. Son todas aisladas.



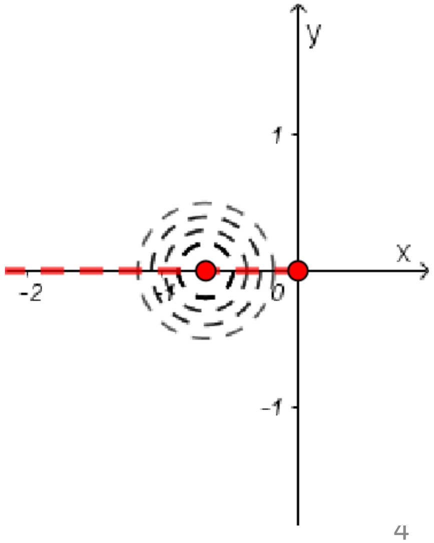
Ejemplo 1:

c) $f(z) = \dfrac{z}{\operatorname{sen}(z)}$ Singularidades: $z_k = k\pi \,, k \in \mathbb{Z}$. Son todas aisladas.



d) $f(z) = \operatorname{Ln}(z)$ Singularidades: $z = x + i0$ donde $x \leq 0$.

Ninguna es aislada porque en todo entorno de cada punto del semieje real negativo siempre hay otros puntos de ese mismo semieje (en rojo), donde f no es analítica.

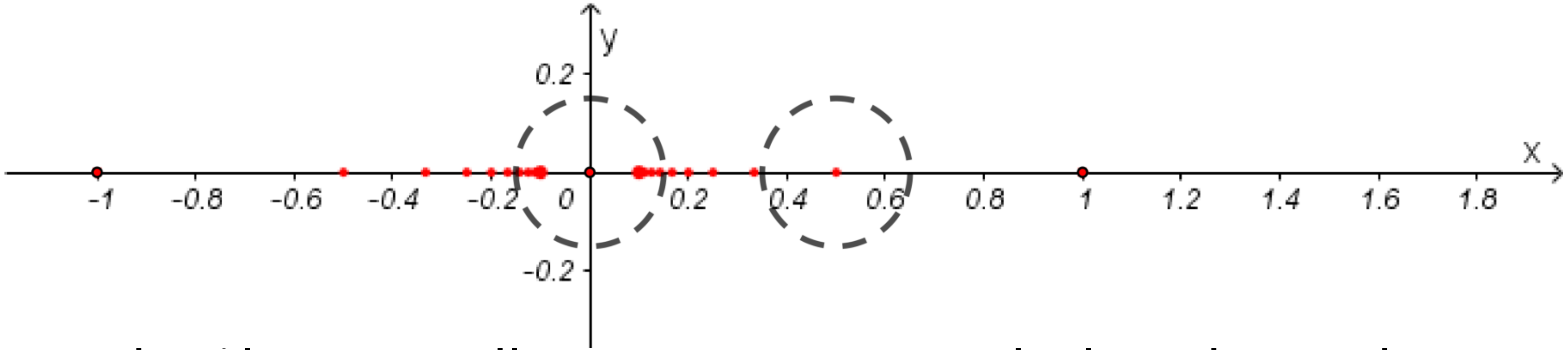


e) $f(z) = \dfrac{1}{sen(\pi/z)}$

Singularidades:

$z_0 = 0$ (no aislada)

$z_k = \frac{1}{k}$ con $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ (aisladas).



Aunque en el gráfico no se llegue a apreciar, en todo entorno de $z_0 = 0$ de por pequeño que se escoja, siempre hay puntos z_k con $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$, donde f no es analítica. En efecto:

$$\lim_{k\to\infty} z_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0 = z_0$$

Clasificación de singularidades aisladas

Sea z_0 un punto singular aislado de la función $f(z)$. Entonces $z_0 \notin D_{ana}(f)$ pero existe $R > 0$ tal que $f(z)$ es analítica en el entorno reducido $E^*(z_0, R)$. Luego, $f(z)$ admite una representación en serie de Laurent convergente en la corona $0 < |z - z_0| < R$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b_n(z - z_0)^{-n}}_{(I)} \quad \text{si} \quad 0 < |z - z_0| < R$$

La parte (I) de este desarrollo que involucra potencias negativas de $(z - z_0)$ se denomina ***parte principal*** de la serie de Laurent de $f(z)$ convergente en la corona $0 < |z - z_0| < R$ (notar que esta corona es un entorno reducido de z_0).En base a ella se define la siguiente clasificación del punto singular z_0:

<u>**SINGULARIDADES EVITABLES**</u>: Si $b_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se dice que z_0 es una ***singularidad evitable*** (o removible) de $f(z)$. Esto ocurre cuando la serie de Laurent que converge en el entorno reducido de z_0 carece de potencias negativas de $(z - z_0)$, de modo que (I) no está presente y la serie es de la forma:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots \quad \text{si} \quad 0 < |z - z_0| < R$$

<u>**Caracterización de singularidades evitables**</u>: Sea z_0 singularidad aislada de $f(z)$. Son equivalentes:

a) z_0 es singularidad evitable de $f(z)$.

b) Existe $\tilde{f}(z)$ analítica en z_0 tal que $f(z) = \tilde{f}(z)$ para los z de un entorno reducido de z_0.

c) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ existe (es un número complejo).

Dem

a)⇒b) Supongamos que z_0 es singularidad evitable. Entonces el DSL convergente en un entorno reducido de z_0 no contiene potencias negativas de $z - z_0$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{si } 0 < |z - z_0| < R$$

La serie del miembro de la derecha es de potencias no negativas con radio de convergencia $0 < R \leq \infty$, así que su suma $\tilde{f}(z)$ es analítica en z_0. Entonces, en el entorno reducido $0 < |z - z_0| < R$ es $f(z) = \tilde{f}(z)$.

b)⇒a) Supongamos que que $f(z) = \tilde{f}(z)$ para $0 < |z - z_0| < R$ (donde $R > 0$), siendo $\tilde{f}(z)$ analítica en z_0. Entonces $\tilde{f}(z)$ posee un DST centrado en z_0:

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{si } |z - z_0| < R$$

Luego,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{si } 0 < |z - z_0| < R$$

Por unicidad, este es el DSL de $f(z)$ que converge en un entorno reducido $0 < |z - z_0| < R$. Como no contiene potencias negativas, entonces z_0 es singularidad esencial de $f(z)$.

b)⇒c) Supongamos que $f(z)=\tilde{f}(z)$ para $0<|z-z_0|<R$ (donde $R>0$), siendo $\tilde{f}(z)$ analítica en z_0. Entonces $\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \tilde{f}(z) = \tilde{f}(z_0)$ existe.

c)⇒b) Supongamos $\lim_{z\to z_0} f(z) = L$ existe. Consideremos la función

$$h(z)=\begin{cases}(z-z_0)^2 f(z) & \text{si} \quad 0<|z-z_0|<R \\ 0 & \text{si} \quad z=z_0\end{cases}$$

Claramente es analítica si $0<|z-z_0|<R$, por ser producto de analíticas. Por otra parte,

$$\lim_{z\to z_0}\frac{h(z)-h(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)^2 f(z)}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = \overbrace{\lim_{z\to z_0}(z-z_0)}^{=0}\ \overbrace{\lim_{z\to z_0} f(z)}^{=L} = 0$$

Entonces $h'(z_0)=0$. Luego, $h(z)$ es derivable en el entorno $|z-z_0|<R$. Por lo tanto, $h(z)$ es analítica en z_0. Su serie de Taylor es

$$h(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \underbrace{a_0}_{=h(z_0)=0} + \underbrace{a_1}_{=h\prime(z_0)=0}(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots = \sum_{n=2}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \quad \text{si } |z-z_0|<R$$

Así, para $|z-z_0|<R$ resulta:

$$f(z)=\frac{h(z)}{(z-z_0)^2}=\sum_{n=2}^{\infty} a_n(z-z_0)^{n-2} = a_2+a_3(z-z_0)+a_4(z-z_0)^2+\cdots \quad \text{si } 0<|z-z_0|<R$$

La función $\tilde{f}(z)=\sum_{n=2}^{\infty} a_n(z-z_0)^{n-2}$ es analítica en z_0 por ser suma de una serie de potencias no negativas con radio de convergencia $R>0$.

<u>Ejemplo 2</u>: $z_0 = 1$ es singularidad **evitable** de $f(z) = (z-1)^{-1}\mathrm{Ln}(z)$.

En efecto, $\mathrm{Ln}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(z-1)^{n+1}$ si $|z-1| < 1$ así que

$$f(z) = \frac{\mathrm{Ln}(z)}{z-1} = \frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}(z-1)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}(z-1)^n$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(z-1) + \frac{1}{3}(z-1)^2 + \cdots \quad \text{si} \quad 0 < |z-1| < 1$$

no contiene potencias negativas de $(z-1)$. La parte principal (I) en este desarrollo es nula.

<u>Notar</u>:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to 1}\frac{\mathrm{Ln}(z)}{z-1} \overset{\substack{"0/0" \\ L'Hôpital}}{\overbrace{=}} \lim_{z\to 1}\frac{\frac{1}{z}}{1} = 1$$

Luego, la función $\tilde{f}(z) = \begin{cases} \frac{\mathrm{Ln}(z)}{z-1} & \text{si} \quad z \neq 0, z \neq 1 \\ 1 & \text{si} \quad z = 1 \end{cases}$ es analítica en $z_0 = 1$

<u>Ejemplo 3</u>: En base a un desarrollo en serie de potencias, clasificar las singularidades aisladas de $f(z)=\frac{2\text{sen}^2 z}{z}$

<u>Rta</u>

$D_A(f)=\mathbb{C}-\{0\}$. La única singularidad es $z_0=0$. Luego, es aislada.

Sabemos que:

$$\cos(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n} \text{ si } |z|<\infty$$

Luego,

$$\frac{2\text{sen}^2 z}{z}=\frac{2}{z}\left(\frac{1-\cos(2z)}{2}\right)=\frac{1}{z}\left(1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(2z)^{2n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}}{(2n)!}z^{2n-1}$$
$$=z-\frac{1}{3}z^3+\frac{2}{45}z^5+\cdots \text{ si } 0<|z|<\infty$$

Como la parte principal de este DSL es nula, $z_0=0$ es una **singularidad evitable** de $f(z)$.

Observemos que

$$\lim_{z\to 0}f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{2\text{sen}^2 z}{z}\overset{\text{"0/0"}}{\underbrace{=}_{L'Hôpital}}\lim_{z\to 0}\frac{4\,\text{sen}(z)\cos(z)}{1}=0$$

Como este límite existe, esto confirma que la singularidad $z_0=0$ es evitable.

POLOS: Si $b_n = 0$ para todo $n > k$, pero $b_k \neq 0$, se dice que z_0 es un ***polo de orden k*** de $f(z)$. Esto ocurre cuando la parte principal (I) de la serie de Laurent que converge en el entorno reducido de z_0 no es nula pero consta de una cantidad finita de términos no nulos, siendo $-k$ la menor potencia de $(z - z_0)$ presente en (I) con coeficiente no nulo. La serie es de la forma:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \underbrace{\frac{\overbrace{b_k}^{\neq 0}}{(z - z_0)^k} + \frac{b_{k-1}}{(z - z_0)^{k-1}} + \cdots + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \frac{b_1}{(z - z_0)}}_{(I)} \quad \text{si} \quad 0 < |z - z_0| < R$$

Ejemplo 4: $z_0 = -1$ es un polo de orden $k = 2$ de $f(z) = \frac{1}{(z+1)^2 z}$

En efecto,

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(z+1) - 1} = \frac{-1}{1 - (z+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)(z+1)^n \quad \text{si} \quad |z - 1| < 1$$

Entonces,

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)^2} \frac{1}{z} = \frac{1}{(z+1)^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)(z+1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)(z+1)^{n-2}$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{(z+1)^2} - \frac{1}{(z+1)}}_{\text{parte ppal.}} - 1 - (z+1) - (z+1)^2 - \cdots \quad \text{si} \quad 0 < |z+1| < 1$$

Ejemplo 5: $z_0 = 1$ es un polo de orden $k = 2$ de $f(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$

En efecto,

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{(z-1)+1}{(z-1)^2} = \frac{1}{(z-1)} + \frac{1}{(z-1)^2} \quad \text{si } 0 < |z-1| < \infty$$

La última es una serie de potencias de $(z-1)$ que representa a $f(z)$ en el entorno reducido $0 < |z-1| < \infty$. Por unicidad, es la serie de Laurent convergente en ese entorno. La menor potencia de $(z-1)$ presente en ella es (-2), lo que de acuerdo con la definición indica que $z_0 = 1$ es un polo de orden $k = 2$ de $f(z)$.

Ejemplo 6: $z_0 = \pi$ es un polo de orden $k = 4$ de $f(z) = (z-\pi)^{-5}\mathrm{sen}(z)$.

En efecto, $\mathrm{sen}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$ si $|z| < \infty$

Entonces,

$$\mathrm{sen}(z-\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z-\pi)^{2n+1} \text{ si } |z-\pi| < \infty$$

$$\mathrm{sen}(z) = \mathrm{sen}\big((z-\pi)+\pi\big) = \mathrm{sen}(z-\pi)\cos(\pi) + \cos(z-\pi)\,\mathrm{sen}(\pi) = -\mathrm{sen}(z-\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}(z-\pi)^{2n+1} \text{ si } |z-\pi| < \infty$$

Luego,

$$f(z) = \frac{\mathrm{sen}(z)}{(z-\pi)^5} = -\frac{\mathrm{sen}(z-\pi)}{(z-\pi)^5} = -\frac{1}{(z-\pi)^5}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z-\pi)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}(z-\pi)^{2n-4} =$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{(z-\pi)^4} + \frac{1}{3!}\frac{1}{(z-\pi)^2}}_{(I)} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!}(z-\pi)^2 + \cdots \text{ si } 0 < |z-\pi| < \infty$$

Vemos que la parte principal (I) tiene un número finito de términos no nulos, siendo $(z-1)^{-4}$ la potencia más negativa presente en ella.

Observar:

$$\lim_{z\to\pi} f(z) = \lim_{z\to\pi} \frac{\mathrm{sen}(z)}{(z-\pi)^5} \overset{\text{"0/0"}}{\underset{L'Hôpital}{=}} \lim_{z\to\pi} \frac{\cos(z)}{5(z-\pi)^4} = \infty$$

Teorema de caracterización de polos: Sea z_0 singularidad aislada de $f(z)$. Son equivalentes:

a) z_0 es un polo de orden k de $f(z)$.

b) Existe $\tilde{f}(z)$ analítica en z_0 con $\tilde{f}(z_0) \neq 0$ tal que $f(z) = \frac{\tilde{f}(z)}{(z-z_0)^k}$ para los z de un entorno reducido de z_0.

Ejemplo 7: $z_0 = 1$ es un polo de orden $k = 3$ de $f(z) = \frac{e^{z-1}}{(z-1)^3 \cos(\pi z)}$

En efecto, la función $f_1(z) = \frac{e^{z-1}}{\cos(\pi z)}$ es analítica en $z_0 = 1$ (cociente de analíticas con denominador no nulo).

Además $f_1(z_0) = f_1(1) = \frac{e^0}{\cos(\pi)} = -1 \neq 0$

Se tiene:

$$f(z) = (z-1)^{-3} f_1(z)$$

Corolario: Sea z_0 un polo de $f(z)$. Entonces $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

Dem Supongamos que z_0 es un polo de orden k de $f(z)$. Entonces por el teorema anterior sea $\tilde{f}(z)$ analítica en z_0 con $\tilde{f}(z_0) \neq 0$ tal que $f(z) = \frac{\tilde{f}(z)}{(z-z_0)^k}$ para los z de un entorno reducido de z_0.

Luego,

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{\tilde{f}(z)}{(z-z_0)^k} = \infty$$

puesto que $\lim_{z \to z_0} \tilde{f}(z) = \tilde{f}(z_0) \neq 0$ mientras que $\lim_{z \to z_0} (z-z_0)^k = 0$.

Nota: puede probarse que la recíproca de este corolario también se cumple, es decir que si z_0 es una singularidad aislada de $f(z)$ tal que $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$, entonces z_0 un polo de $f(z)$.

Dem del teorema de caracterización de polos

a)⇒b) Supongamos que z_0 es un polo de orden k de $f(z)$. Entonces el DSL convergente en un entorno reducido de z_0 es de la forma:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{k} b_n(z-z_0)^{-n} \text{ si } 0 < |z-z_0| < R$$

donde $b_k \neq 0$. Es decir,

$$f(z) = (z-z_0)^{-k}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^{n+k} + \sum_{n=1}^{k} b_n(z-z_0)^{k-n}\right) = (z-z_0)^{-k}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^{n+k} + b_1(z-z_0)^{k-1} + b_2(z-z_0)^{k-2} + \cdots + b_k\right)$$

La serie entre paréntesis es de potencias no negativas y converge si $|z-z_0| < R$ con $R > 0$. Luego, representa una función $\tilde{f}(z)$ analítica en z_0. Entonces $f(z) = (z-z_0)^{-k}\tilde{f}(z)$ en el entorno reducido $0 < |z-z_0| < R$. Además,

$$\tilde{f}(z_0) = b_k \neq 0$$

b)⇒a) Supongamos que que $f(z) = \frac{\tilde{f}(z)}{(z-z_0)^k}$ para $0 < |z-z_0| < R$ (donde $R > 0$), siendo $\tilde{f}(z)$ analítica en z_0. Entonces $\tilde{f}(z)$ posee un DST centrado en z_0:

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \text{ si } |z-z_0| < R$$

Notemos que $a_0 = \tilde{f}(z_0) \neq 0$.

Luego,

$$f(z) = \frac{\tilde{f}(z)}{(z-z_0)^k} = \frac{1}{(z-z_0)^k}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^{n-k} =$$

$$= \frac{\overbrace{a_0}^{\neq 0}}{(z-z_0)^k} + \frac{a_1}{(z-z_0)^{k-1}} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{(z-z_0)} + a_k + a_{k+1}(z-z_0) + \cdots \quad \text{si } 0 < |z-z_0| < R$$

Por unicidad, este es el DSL de $f(z)$ que converge en un entorno reducido $0 < |z-z_0| < R$. Es claro que z_0 resulta ser polo de orden k de $f(z)$.

SINGULARIDADES ESENCIALES: Si $b_n \neq 0$ para infinitos índices $n \in \mathbb{N}$ se dice que z_0 es una ***singularidad esencial*** de $f(z)$. Esto ocurre cuando la parte principal (I) contiene infinitos términos no nulos. La serie de Laurent convergente en un entorno reducido de z_0 es de la forma:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n}}_{(I)} \quad \text{si} \quad 0 < |z - z_0| < R$$

con infinitas potencias negativas $(z - z_0)^{-n}$ presentes.

Teorema de Picard: Si $f(z)$ tiene una singularidad esencial en el punto z_0 entonces encada entorno reducido de z_0 la función toma todos los valores complejos infinitas veces con la posible excepción de un único valor.

Ejemplo 8: $f(z) = e^{1/z}$ tiene una singularidad aislada en el origen. En efecto:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \quad \text{si} \quad |z| < \infty$$

Entonces,

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} = 1 + \underbrace{\frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!} \frac{1}{z^3} + \cdots}_{(I)} \quad \text{si} \quad 0 < |z| < \infty$$

Este es el DSL de la función en un entorno reducido del origen y contiene infinitas potencias negativas de z. Luego, $z_0 = 0$ es singularidad esencial de $f(z)$.

Notar: $f(z) = e^{1/z}$ no toma el valor $w^* = 0$ pues la exponencial compleja nunca se anula. Pero si $w \neq 0$,

$$f(z) = w \Leftrightarrow e^{1/z} = w \Leftrightarrow \frac{1}{z} \in \ln(w) \Leftrightarrow z \in \frac{1}{\ln(w)}$$

Es decir que para todo $w \neq 0$ hay infinitos valores $z \neq 0$ tales que $e^{1/z} = w$.

Ejemplo 9: $z_0 = 0$ es singularidad aislada de $f(z) = z\cos\left(\frac{1}{z}\right)$

En efecto,

$$f(z) = z\cos\left(\frac{1}{z}\right) = z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{1}{z}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\frac{1}{z^{2n-1}} =$$

$$= z \underbrace{- \frac{1}{2!}\frac{1}{z} + \frac{1}{4!}\frac{1}{z^3} - \frac{1}{6!}\frac{1}{z^5} + \cdots}_{(I)} \quad \text{si} \quad 0 < |z| < \infty$$

La parte principal (I) contiene infinitos términos no nulos. Entonces $z_0 = 0$ es singularidad esencial de $f(z)$.

Atención: $\cos\left(\frac{1}{z}\right)$ no está acotada! Así que no podemos argumentar que $f(z)$ tiende a cero cuando z tiende a cero aplicando “cero por acotada”, porque ese no es el caso.

Ejercicio: En base a un desarrollo adecuado en serie de potencias, clasificar las singularidades aisladas de $f(z)$

a) $f(z) = \frac{2\mathrm{sen}^2 z}{z}$

b) $f(z) = \frac{\mathrm{Ln}(z)}{(z-1)^3}$

c) $f(z) = \frac{(z-1)e^{2/z}}{z}$

Rta

a) $D_A(f) = \mathbb{C} - \{0\}$. La única singularidad es $z_0 = 0$. Luego, es aislada.

Sabemos que:

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \text{ si } |z| < \infty$$

Luego,

$$\frac{2\text{sen}^2 z}{z} = \frac{2}{z}\left(\frac{1-\cos(2z)}{2}\right) = \frac{1}{z}\left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(2z)^{2n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}}{(2n)!} z^{2n-1}$$
$$= z - \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{45}z^5 + \cdots \text{ si } 0 < |z| < \infty$$

Como la parte principal de este DSL es nula, $z_0 = 0$ es una **singularidad evitable** de $f(z)$.

Observemos que

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{2\text{sen}^2 z}{z} \overset{\text{"0/0"}}{\underbrace{\overset{L'Hôpital}{=}}} \lim_{z\to 0} \frac{4\,\text{sen}(z)\cos(z)}{1} = 0$$

Como este límite existe, esto confirma que la singularidad $z_0 = 0$ es evitable.

b) $f(z) = \frac{\mathrm{Ln}(z)}{(z-1)^3}$

$D_A(f) = \mathbb{C} - (\{1\} \cup \{x+iy: y=0, x \leq 0\})$. Las singularidades son $z=1$ y $z = x + i0$ con $x \leq 0$. La primera $z=1$ es aislada. Las demás no lo son.

Anteriormente hemos visto que:

$$\mathrm{Ln}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (z-1)^{n+1} \text{ si } |z-1| < 1$$

Luego,

$$\frac{\mathrm{Ln}(z)}{(z-1)^3} = \frac{1}{(z-1)^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (z-1)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (z-1)^{n-2} =$$
$$= \underbrace{\frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{(z-1)}}_{(I)} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}(z-1) + \frac{1}{5}(z-1)^2 + \cdots \text{ si } 0 < |z-1| < 1$$

Como la parte principal (I) de este DSL contiene finitos términos no nulos, siendo (-2) la potencia más negativa presente, entonces $z_0 = 1$ es un **polo de orden $k = 2$** de $f(z)$.

Observemos que

$$\lim_{z \to 1} f(z) = \lim_{z \to 1} \frac{\mathrm{Ln}(z)}{(z-1)^3} = \overset{\text{"}0/0\text{"}}{\underbrace{=}_{L'H\hat{o}pital}} \lim_{z \to 1} \frac{\frac{1}{z}}{3(z-1)^2} = \infty$$

Esto confirma que la singularidad $z_0 = 1$ es un polo.

c) $f(z) = \frac{(z-1)e^{2/z}}{z}$ $\qquad$ $D_A(f) = \mathbb{C} - \{0\}$. El único punto singular es $z = 0$. Evidentemente es aislado.

Sabemos que

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \quad \text{si} \quad |z| < \infty$$

Reemplazando:

$$e^{2/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}\frac{1}{z^n} \quad \text{si} \quad 0 < |z| < \infty$$

Luego,

$$f(z) = \frac{(z-1)e^{2/z}}{z} = \left(1 - \frac{1}{z}\right)e^{2/z} = \left(1 - \frac{1}{z}\right)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}\frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}\frac{1}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}\frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}\frac{1}{z^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(n-1)!}\frac{1}{z^n} =$$

$$= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-2)2^{n-1}}{n!}\frac{1}{z^n} = 1 + \underbrace{\frac{1}{z} - \frac{2}{3}\frac{1}{(z-1)^3} + \cdots}_{(I)} \quad \text{si} \quad 0 < |z-1| < 1$$

Como la parte principal (I) de este DSL contiene infinitos términos no nulos, entonces $z_0 = 1$ es una **singularidad esencial** de $f(z)$.

Teorema de caracterización de singularidades de cocientes de funciones analíticas

Sea $f(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$ con $N(z)$ y $D(z)$ funciones analíticas en el punto z_0. Si z_0 es cero de orden $p \geq 0$ de $N(z)$ y cero de orden $q \geq 1$ de $D(z)$, se verifica:

(SE) si $p \geq q$ entonces z_0 es una singularidad evitable de $f(z)$.

(PO) si $p < q$ entonces z_0 es un polo de orden $k = q - p$ de $f(z)$.

Dem del teorema

Bajo las hipótesis y aplicando el teorema de caracterización de ceros de analíticas, existen funciones $N_1(z)$ y $D_1(z)$ analíticas en z_0 tales que en un entorno de z_0 se tiene:

$$N(z) = (z - z_0)^p N_1(z) \text{ con } N_1(z_0) \neq 0$$
$$D(z) = (z - z_0)^q D_1(z) \text{ con } D_1(z_0) \neq 0$$

Luego, en un entorno reducido de z_0 es:

$$f(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{(z - z_0)^p N_1(z)}{(z - z_0)^q D_1(z)} = (z - z_0)^{p-q} f_1(z)$$

$$\text{donde } f_1(z) = \frac{N_1(z)}{D_1(z)} \text{ es analítica en } z_0 \text{ y } f_1(z_0) = \frac{N_1(z_0)}{D_1(z_0)} \neq 0$$

Caso (SE): Si $p \geq q$, entonces $p - q \geq 0$ así que $(z - z_0)^{p-q}$ es analítica en z_0. La función $f(z)$ coincide en un entorno reducido de z_0 con la función analítica $(z - z_0)^{p-q} f_1(z)$. Por lo tanto, la serie de Taylor centrada en z_0 de esta función, representará a $f(z)$ en un entorno reducido de ese punto. Por unicidad será la serie de Laurent de $f(z)$ convergente en un entorno reducido de z_0. Y dado que su parte principal es nula, se deduce que z_0 es singularidad aislada de $f(z)$.

Caso (PO): Si $p < q$, sea $k = q - p > 0$. En un entorno reducido de z_0 es

$$f(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = (z - z_0)^{p-q} f_1(z) = (z - z_0)^{-k} f_1(z)$$

Luego, por el teorema de caracterización de polos podemos afirmar que z_0 es un polo de orden k de $f(z)$.

<u>Ejemplo 10</u>: Aplicando el teorema anterior clasificar la singularidad z_0 de la función $f(z)$.

a) $f(z) = \frac{z\,\mathrm{Ln}(z+1)}{\mathrm{sen}(3z)(e^z-1)^2}$; $z_0 = 0$ b) $f(z) = \frac{1-e^{z-1}}{\mathrm{sen}(\pi z)}$; $z_0 = 1$

<u>Rta</u>

a) Las funciones $N(z) = z\,\mathrm{Ln}(z+1)$, $D(z) = \mathrm{sen}(3z)(e^z-1)^2$ son analíticas en $z_0 = 0$.

- $N(z) = z\,\mathrm{Ln}(z+1)$ $\qquad N(0) = 0$

  $N'(z) = \mathrm{Ln}(z+1) + \frac{z}{z+1}$ $\qquad N'(0) = 0$

  $N''(z) = \frac{1}{z+1} + \frac{1}{(z+1)^2}$ $\qquad N''(0) = 2 \neq 0$

  Entonces $z_0 = 0$ es un cero de orden $p = 2$ de $N(z)$.
- $z_0 = 0$ es cero de orden $q_1 = 1$ de $D_1(z) = \mathrm{sen}(3z)$ pues $D_1(0) = 0$ pero $D_1'(z) = 3\cos(3z)$ así que $D_1'(0) = 3 \neq 0$.
- $z_0 = 0$ es cero de orden $q_2 = 1$ de $D_2(z) = e^z - 1$ pues $D_2(0) = 0$ pero $D_2'(z) = e^z$así que $D_2'(0) = 1 \neq 0$.
- $z_0 = 0$ es cero de orden $q_3 = 2q_2 = 2$ de $D_3(z) = (e^z-1)^2 = \big(D_2(z)\big)^2$ ¿Porqué?
- $z_0 = 0$ es cero de orden $q = q_1 + q_3 = 3$ de $D(z) = \mathrm{sen}(3z)(e^z-1)^2 = D_1(z)D_3(z)$ ¿Porqué?

Como $p = 2 < 3 = q$, el teorema anterior permite afirmar que $z_0 = 0$ es polo de orden $k = q - p = 3 - 2 = 1$ de $f(z)$.

b) Ejercicio! Mostrar que $z_0 = 1$ es una singularidad evitable de $f(z)$.