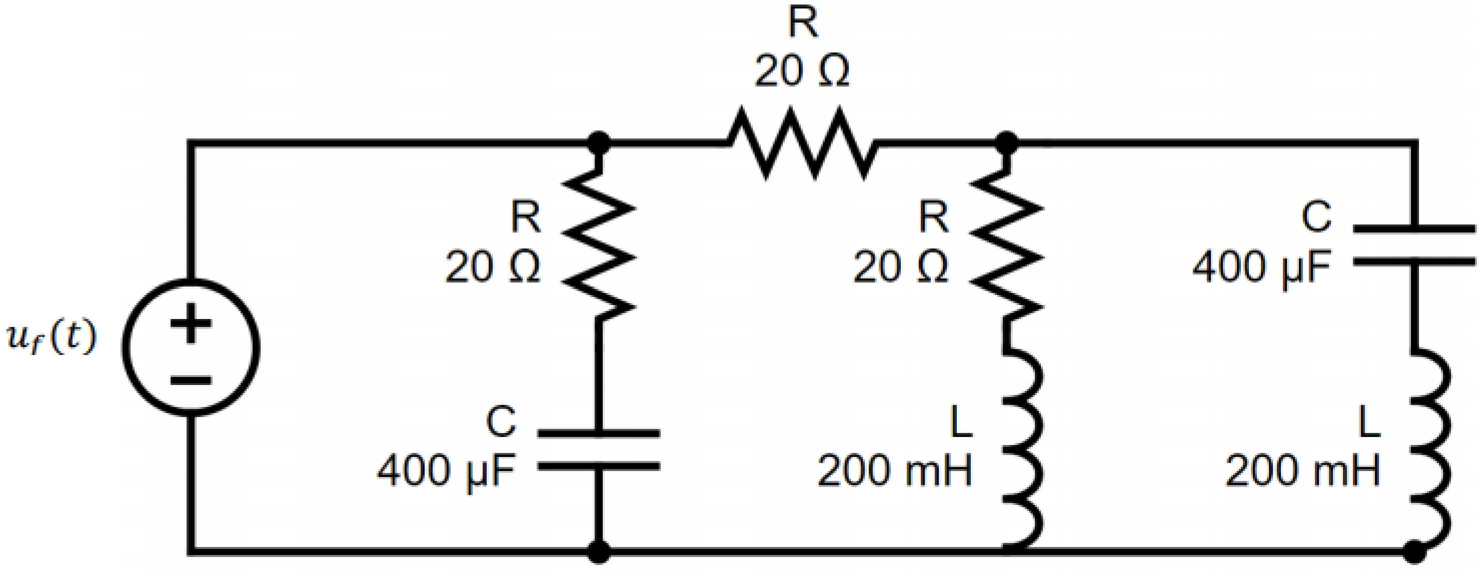
Ejercicio introductorio



En el circuito de la figura, se tiene: $\mathrm{u_f(t) = 50\ V\ sen(wt)}$, $R = 20\Omega$, $C = 400\ \mu F$, $L = 200\ mH$, $\omega = 50\ rad/s$

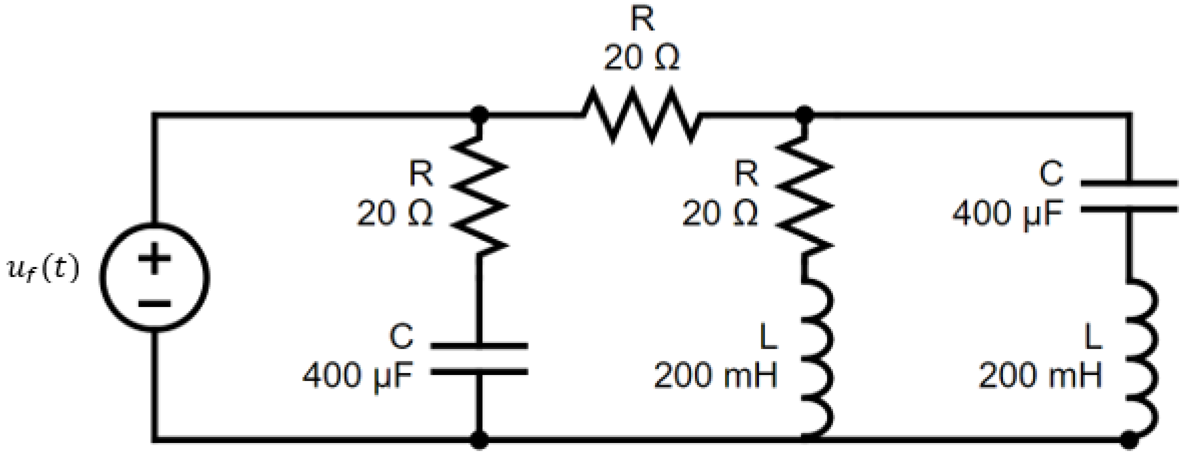
Determinar:

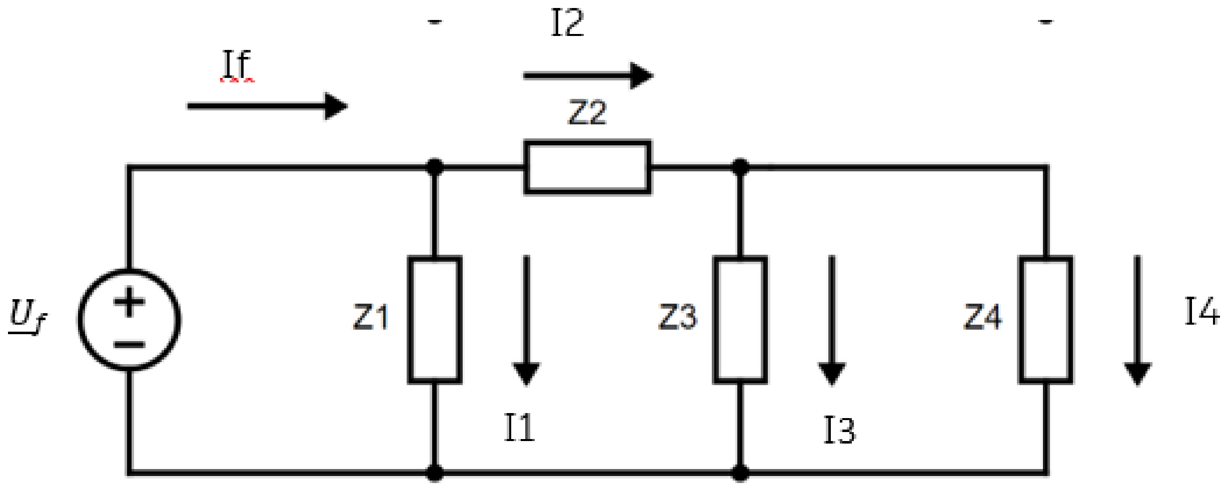
1. Las corrientes que pasan por cada elemento.

2. La impedancia y admitancia equivalente.

3. El diagrama fasorial.

1. Corrientes que pasan por cada elemento.





Donde:

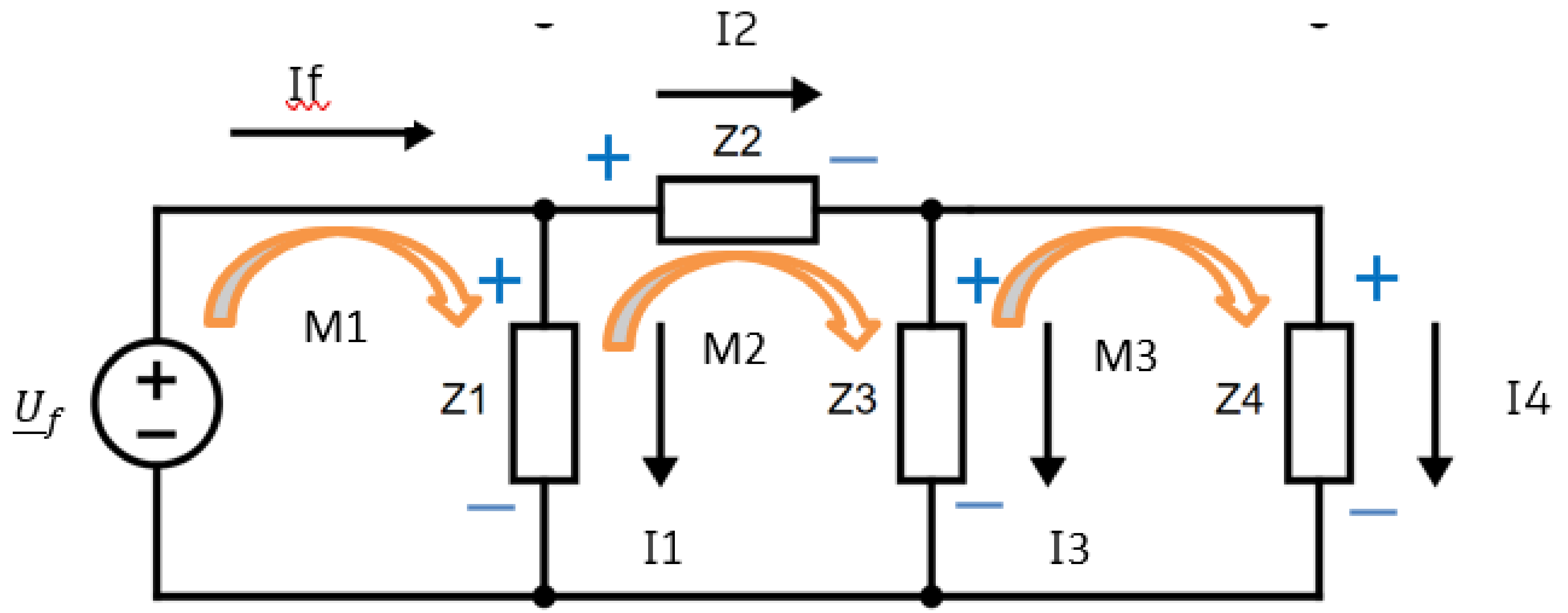
- $\underline{Z}_1 = R - jX_C$
- $\underline{Z}_2 = R$
- $\underline{Z}_3 = R + jX_L$
- $\underline{Z}_4 = jX_L - jX_c$

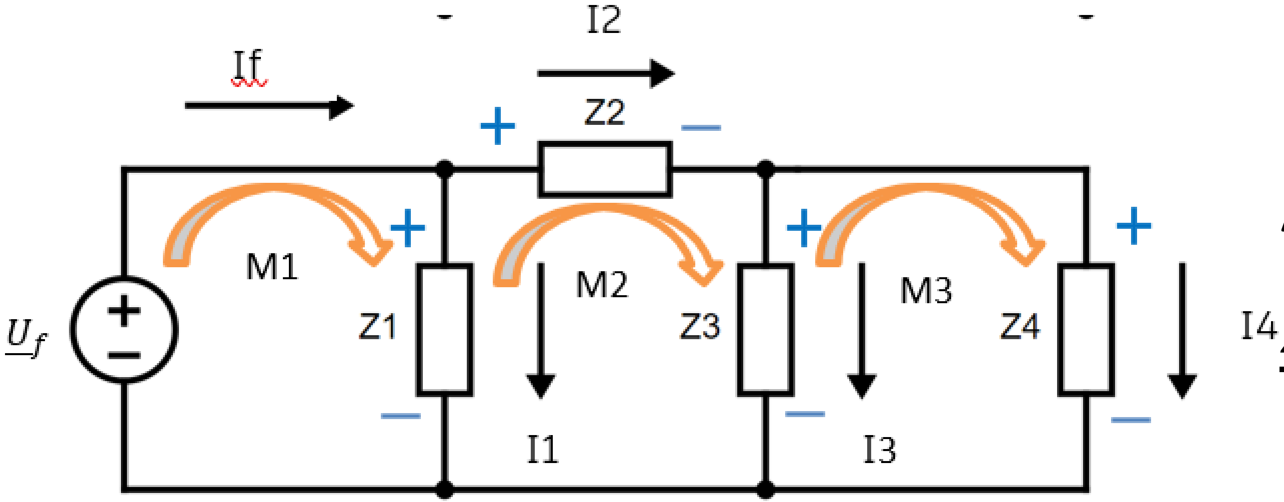
Y, a su vez, $X_c = \frac{1}{\omega C}$ y $X_L = \omega L$, con $\omega = 2\pi f$

Nos quedará:

- $\underline{Z}_1 = 20\ \Omega - j\left(\frac{1}{50\ rad/s * 400 * 10^{-6} F}\right) = 20\ \Omega - j\ 50\ \Omega = 53{,}85\ \Omega\ e^{-68\mathrm{j}}$
- $\underline{Z}_2 = 20\ \Omega = 20\ \Omega\ e^{0j}$
- $\underline{Z}_3 = 20\Omega + j * 50\ rad/s * 200 * 10^{-3} H = 20\ \Omega + j\ 10\ \Omega = 22{,}36\ \Omega\ e^{27j}$
- $\underline{Z}_4 = jX_L - jX_c = j\ 10\ \Omega - j\ 50\ \Omega = -j\ 40\ \Omega = 40\ \Omega\ e^{-90j}$

Primero, para facilitar las cosas, sabemos que $u_f(t) = 50\ \mathrm{V}\ \mathrm{sen}(\mathrm{wt} + 0)$, cuyo desfase es 0. Por lo que podemos decir que su equivalencia en el plano complejo es $\underline{U_f} = 50\ V\ e^{0j}$, o bien $\underline{U_f} = 50\ \mathrm{V}$





Ahora, para obtener la corriente en $\underline{Z}_1$ utilizamos la Ley De Kirchhoff de mallas en la malla M1:

$$u_f(t) = R * i_1(t) + \frac{1}{C} * \int i_1(t)\, dt$$

Que mediante la aplicación de la teoría de complejos, puede reducirse a:

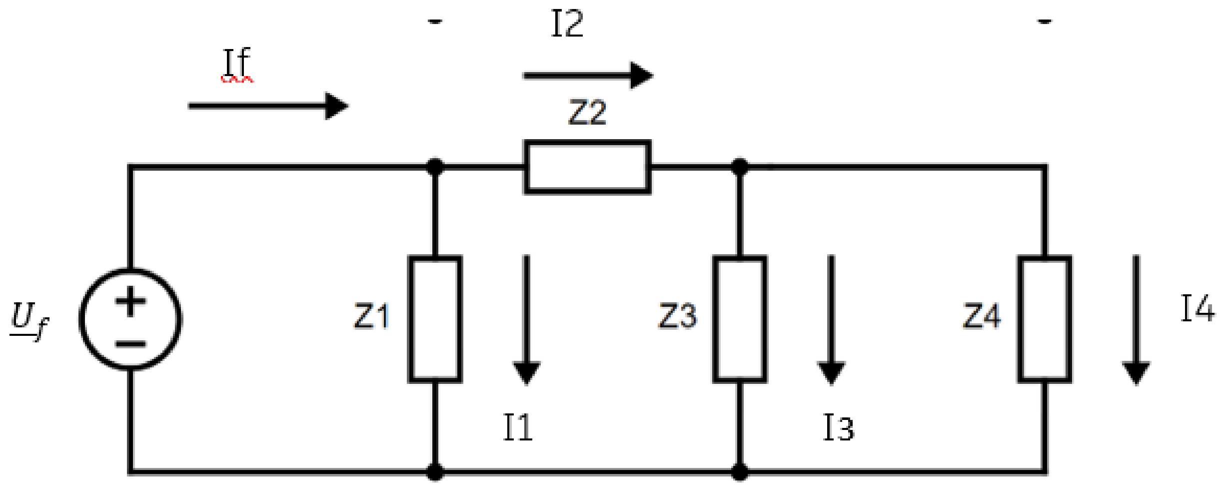
$$\underline{U}_f = \underline{I}_1 * \underline{Z}_1$$

Despejamos $\underline{I}_1$:

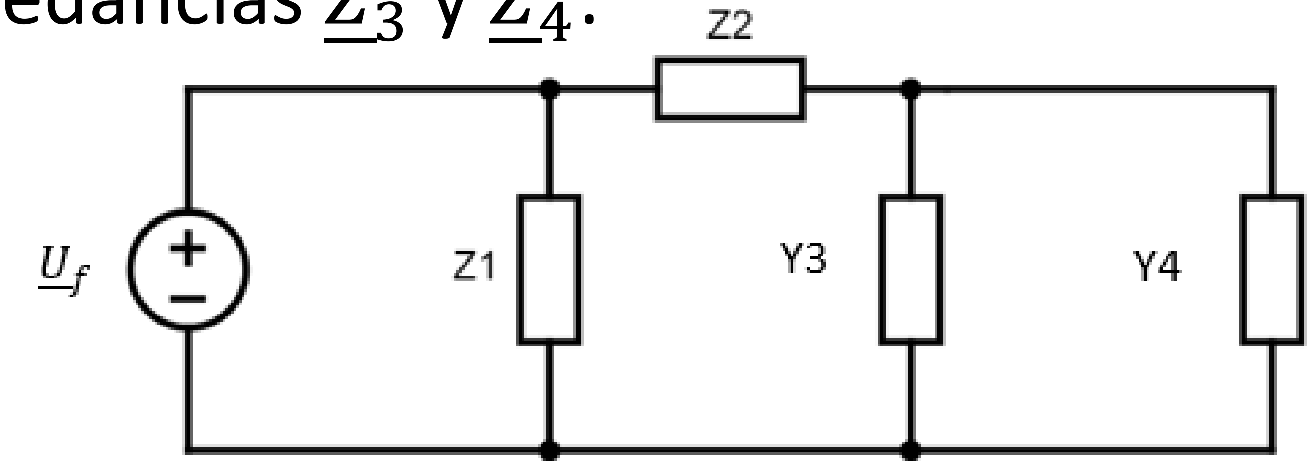
$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_f}{\underline{Z}_1} = \frac{50\ V}{20\ \Omega - j\ 50\ \Omega} = 0{,}34\ A + j\ 0{,}86\ A$$

Ahora, para realizar un cálculo sencillo, conviene reducir la parte restante del circuito a una impedancia que quedará en paralelo con $\underline{Z}_1$.

Ahora, para realizar un cálculo sencillo, conviene reducir la parte restante del circuito a una impedancia que quedará en paralelo con $\underline{Z}_1$.



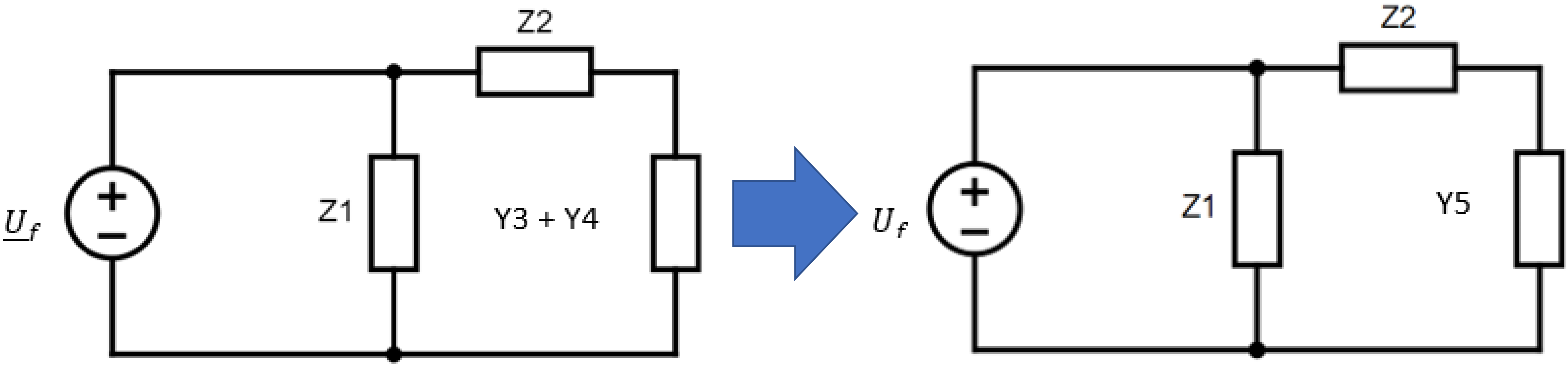
Para ello, comenzamos convirtiendo en ***admitancias*** las impedancias $\underline{Z}_3$ y $\underline{Z}_4$:



Dónde:

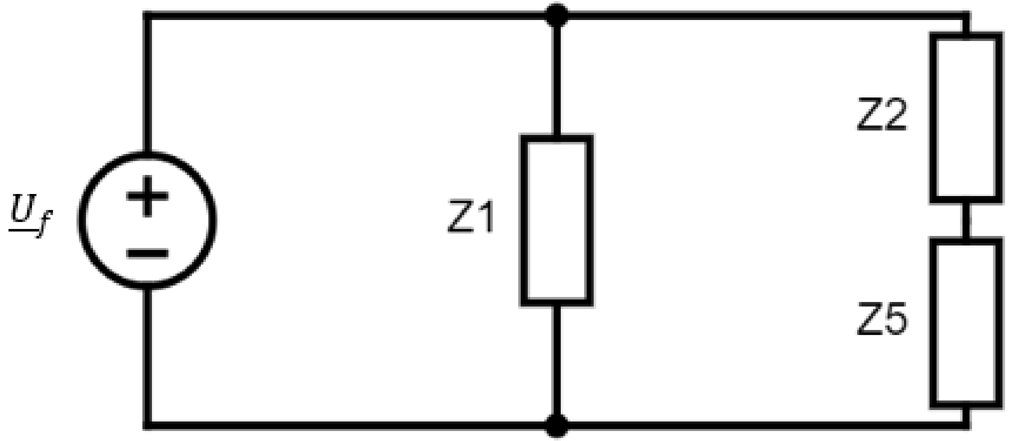
$$\underline{Y}_3 = \frac{1}{\underline{Z}_3} = \frac{1}{22{,}36}\ e^{-27j} S$$

$$\underline{Y}_4 = \frac{1}{\underline{Z}_4} = \frac{1}{40} e^{90j} S$$



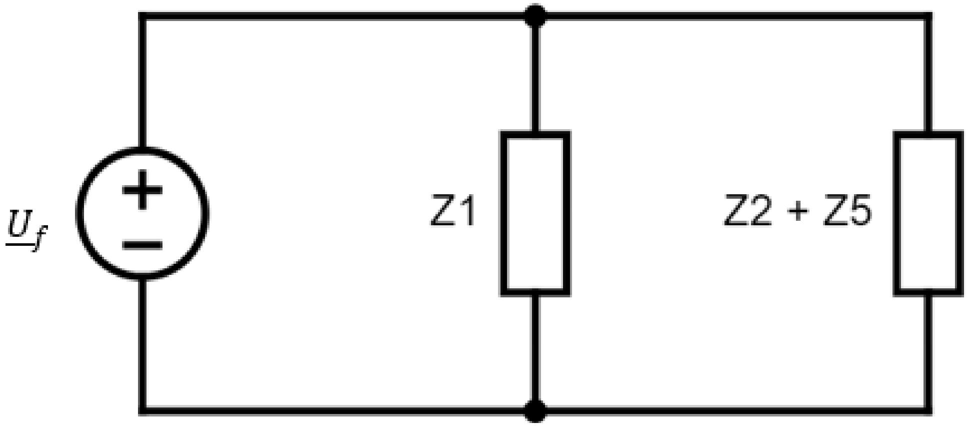
$$\underline{Y}_5 = \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4 = 0{,}04\ S - j\ 0{,}02\ S + j\ 0{,}025\ S$$
$$= 0{,}04\ S + J\ 0{,}005\ S$$

Ahora transformo la suma de ***admitancias*** en una nueva impedancia para facilitar el cálculo en serie



Donde:

$$\underline{Z}_5 = \frac{1}{\underline{Y}_5} = 24{,}6\ \Omega - \mathrm{j}\ 3{,}1\ \Omega$$

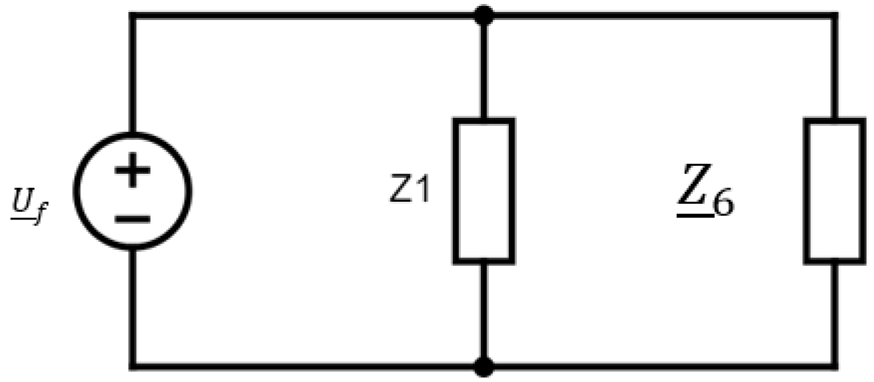


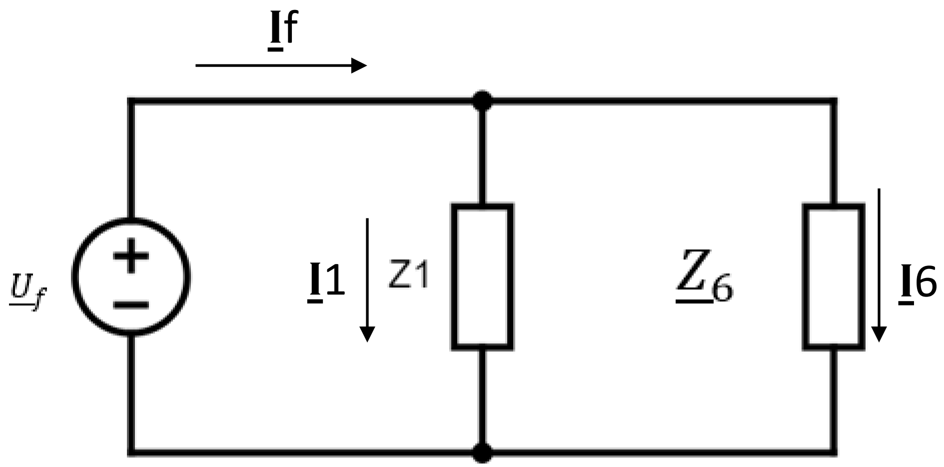
Donde:

$$\underline{Z}_6 = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_5 = 44{,}6\ \Omega - \mathrm{j}\ 3{,}1\ \Omega$$

Ahora, teniendo en los bornes de $\underline{Z}_6$ una tensión igual a la de la fuente, utilizamos la Ley de ohm para obtener la corriente que pasa por $\underline{Z}_6$:

$$\underline{I}_6 = \frac{\underline{U}_f}{\underline{Z}_6} = \frac{50\ V}{44{,}6\ \Omega - j\ 3{,}1\ \Omega} = 1{,}1\ \mathrm{A} + \mathrm{j}\ 0{,}08\ \mathrm{A}$$

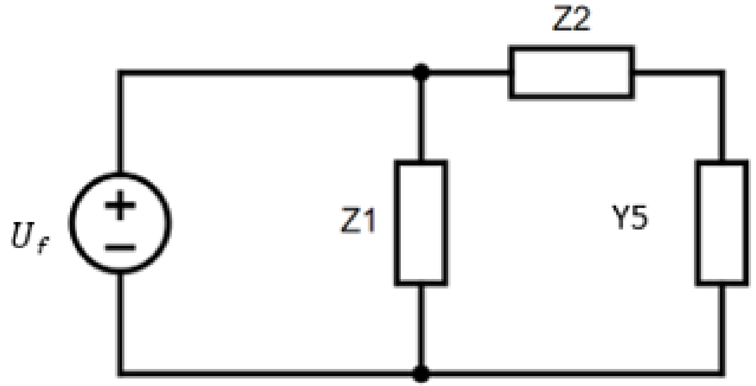




Por Ley de Kirchhoff de las corrientes podemos obtener la corriente de la fuente:

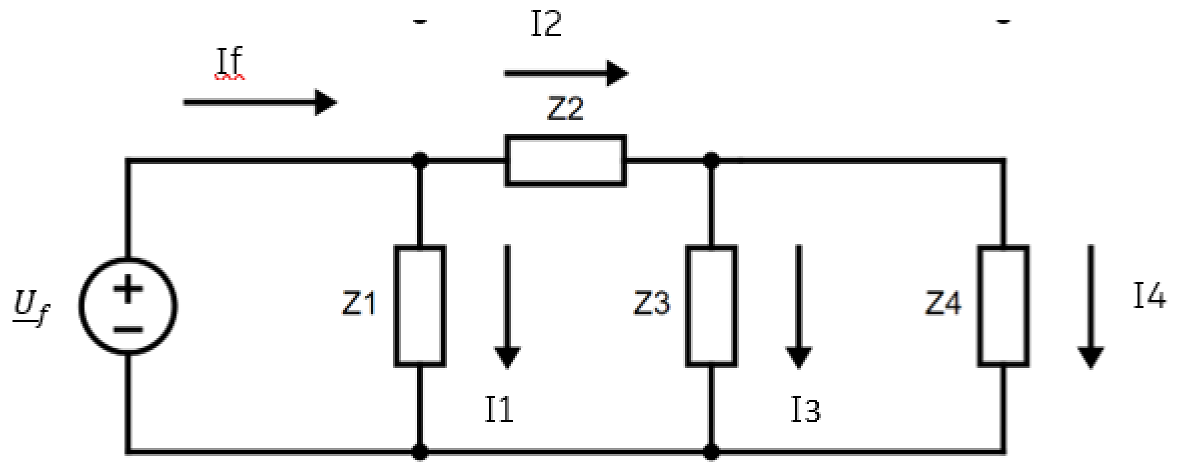
$$\underline{I}_f = \underline{I}_1 + \underline{I}_6 = 1{,}46\ A + j\ 0{,}93\ A$$

Ídem para la corriente en $\underline{Z}_2$:



$$\underline{I}_f = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \underline{I}_1 + \underline{I}_6$$

Por lo tanto, $\underline{I}_2 = \underline{I}_6 = 1{,}1\ \mathrm{A} + \mathrm{J}\ 0{,}08\ \mathrm{A}$



También podemos decir que:

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_3 + \underline{I}_4$$

Para obtener una segunda ecuación, utilizamos la Ley de Kirchhoff de Mallas en M3:

$$\underline{I}_3\,\underline{Z}_3 - \underline{I}_4\,\underline{Z}_4 = 0$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_4 \frac{\underline{Z}_4}{\underline{Z}_3}$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_4 \frac{\underline{Z}_4}{\underline{Z}_3} + \underline{I}_4$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_4 \left(1 + \frac{\underline{Z}_4}{\underline{Z}_3}\right)$$

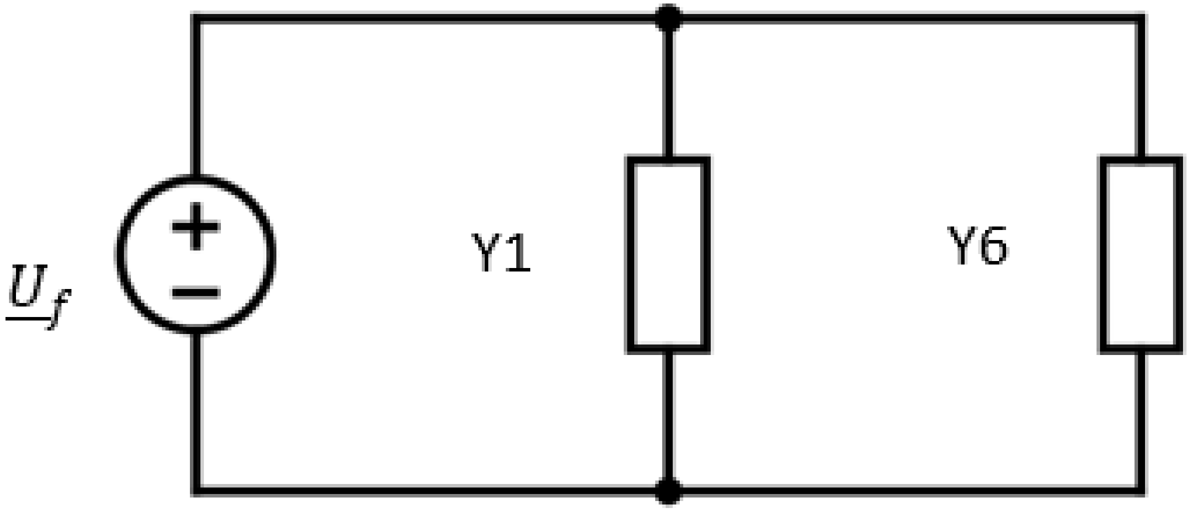
Por lo tanto, $\underline{I}_4 = 0{,}035\ A + j\ 0{,}683\ A$

Y solo queda obtener $\underline{I}_3$:

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_2 - \underline{I}_4 = 1\ A - j\ 0{,}6\ A$$

2. Impedancia y admitancia equivalente.

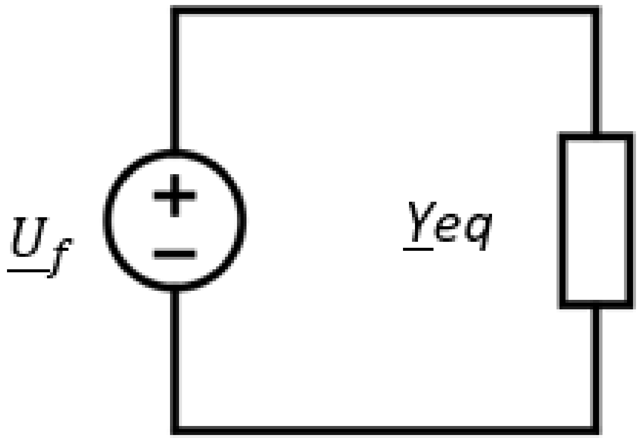
Para la obtener la **impedancia** y **admitancia** equivalente, partimos desde la máxima reducción que hicimos:



Con $\underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1}$

Y $\underline{Y}_6 = \frac{1}{\underline{Z}_6} = 0{,}022\ S + j\ 1{,}55 * 10^{-3}\ S$

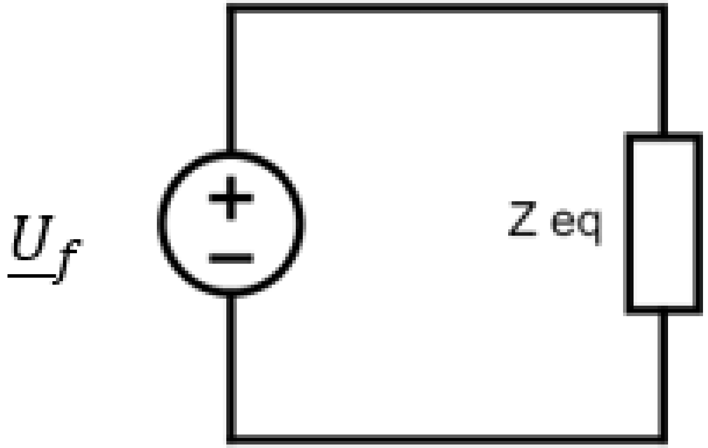
Y ahora sumamos las **admitancias**, obteniendo así la ***admitancia equivalente***:



Donde:

$$\underline{Y}_{eq} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_6 = 0{,}03\ S + j\ 0{,}02\ S$$

Y para obtener la ***impedancia equivalente***:



$$\underline{Z}_{eq} = \frac{1}{\underline{Y}_{eq}} = 24{,}2\ \Omega - j\ 15{,}6\ \Omega$$

Otra manera de resolver el circuito, es mediante un análisis del circuito original, bajo las leyes de Kirchhoff.

- Planteando la Ley de Kirchoff de las Tensiones (LKT), para las mallas 2 y respectivamente

I. $\underline{I}_1 * \underline{Z}_1 = \underline{I}_2 * \underline{Z}_2 + \underline{I}_3 * \underline{Z}_3$

II. $\underline{I}_3 * \underline{Z}_3 = \underline{I}_4 * \underline{Z}_4$

- Planteando la Ley de Kirchhoff de las Corrientes (LKC), en el nodo superior que une las mallas 2 y 3

III. $\underline{I}_2 = \underline{I}_3 + \underline{I}_4$

Esto nos define un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, factible de resolver aplicando la teoría de complejos.

Un poco de álgebra…

Partiendo de II, podemos encontrar la siguiente relación:

ii. $\underline{I}_4 = \underline{I}_3 * \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_4}$

Con *ii*, y con *III*, podremos reemplazar en la ecuación *I*, llegando a:

i. $\underline{I}_1 * \underline{Z}_1 = \underline{I}_3 * (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_2 * \underline{Z}_3}{\underline{Z}_4})$

Finalmente

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{I}_1 * \underline{Z}_1}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_2 * \underline{Z}_3}{\underline{Z}_4}}$$

Si se reemplazan los datos, y se es congruente con la teoría de los números complejos, se llegará a resultados análogos.

Se propone al alumno, que resuelva el ejercicio, mediante el método de nodos.

Diagrama Fasorial

- Resulta útil expresar las corrientes de forma exponencial para realizar los diagramas fasoriales a escala.

I. $\underline{I}_1 = (0{,}34 + j\,0{,}86)A = 0{,}925\ e^{68{,}43j}$

II. $\underline{I}_2 = (1{,}1 + \mathrm{J}\ 0{,}08)\mathrm{A} = 1{,}103\ e^{4{,}16j}$

III. $\underline{I}_3 = (1 - j\,0{,}6)A = 1{,}167\ e^{-31j}$

IV. $\underline{I}_4 = (0{,}035 + j\,0{,}683)A = 0{,}684\ e^{87j}$

V. $\underline{I}_f = (1{,}46 + j\,0{,}93)A = 1{,}731\ e^{32{,}5j}$

Finalmente, el diagrama fasorial quedará del siguiente modo::