Estimación puntual

Contenidos

- Planteamiento del problema
- Criterios de comparación de estimadores:
  - Insesgadez
  - Estimadores de mínima varianza
  - Error cuadrático medio
  - Consistencia
- Métodos para obtener estimadores
  - Método de los momentos
  - Método de máxima verosimilitud

Planteamiento del problema

- Supondremos
  - se observa una m.a.s. de una variable aleatoria X,
  - que sigue una distribución conocida (normal, exponencial, Poisson, etc)
  - aunque con parámetros desconocidos
- El problema que estudiaremos es cómo estimar estos parámetros a partir de los datos de la muestra.
- De estos parámetros lo único que se conoce es su rango de posibles valores, denominado espacio paramétrico.

Ejemplos: Algunos parámetros de interés podrían ser la media o la varianza poblacional, o la proporción de la población que posee determinado atributo.

Definiciones

Estadístico Un estadístico T es una función real de la muestra aleatoria $(X_1, X_2, \ldots \ldots, X_n)$.

Estimador Estadístico que se usa para estimar un parámetro.

Estimación Realización específica de un estimador.

Estimador Puntual Función de la muestra que da como resultado un único valor. La correspondiente realización se llama estimación puntual del parámetro.

Notación:

$$\begin{aligned} \theta &= \text{parametro que se quiere estimar} \\ \hat{\theta} &= \text{estimador de } \theta \end{aligned}$$

(acento circunflejo (ˆ) encima)

Ejemplos de estimadores

Ejemplo: Media poblacional μ, un estimador se denota por $\hat{\mu}$. Un estimador puede ser la media muestral

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{X_1 + ... + X_n}{n} \quad \Leftarrow \text{Estimador : funcion de la muestra}$$

Para un mismo parámetro θ podemos definir tantos estimadores como queramos. Algunos serán mejores que otros? ¿Cuál utilizar?

Ejemplo:
$X =$ el gasto de un estudiante universitario en la compra de libros de texto. ¿cuál es el gasto medio $\mu = E[X]$?
Una m.a.s. de tamaño n: $(X_1, X_2, ..., X_n)$. Obtenemos los valores: $(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Ejemplos de estimadores

Ejemplo cont.:
a) Proponer cuatro estimadores del parámetro poblacional μ

$$T_1(X_1,\ldots,X_n) = \hat{\mu}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$T_2(X_1,\ldots,X_n) = \hat{\mu}_2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$T_3(X_1,\ldots,X_n) = \hat{\mu}_3 = \frac{X_1 + X_n}{2}$$

$$T_4(X_1,\ldots,X_n) = \hat{\mu}_4 = X_2 - X_1 \quad \Leftarrow \text{Puede haber estimadores absurdos}$$

Ejemplos de estimadores

Ejemplo cont.:
b) Suponer que $n = 3$ y que la muestra es $x_1 = 30$, $x_2 = 20$ y $x_3 = 10$. Calcular las estimaciones con cada uno de los estimadores propuestos en apartado **a)**.

$$\begin{aligned}
T_1(x_1, x_2, x_3) &= \frac{30 + 20 + 10}{3} = 20 \\
T_2(x_1, x_2, x_3) &= \frac{30 + 20 + 10}{2} = 30 \\
T_3(x_1, x_2, x_3) &= \frac{30 + 10}{2} = 20 \\
T_4(x_1, x_2, x_3) &= 20 - 30 = -10
\end{aligned}$$

¿Cuál estimación utilizo? Una respuesta es utilizar aquella estimación cuyo estimador tenga mejores propiedades.

Propiedades de los estimadores

- Un estimador $\hat{\theta}$ de θ es insesgado si verifica que

$$E[\hat{\theta}] = \theta$$

Ejemplo: La media, la varianza y las proporciones muestrales son estimadores insesgados de los correspondientes parámetros poblacionales.

- Si $E[\hat{\theta}] \neq \theta$ se dice que el estimador es sesgado
- El sesgo de un estimador viene entonces definido por

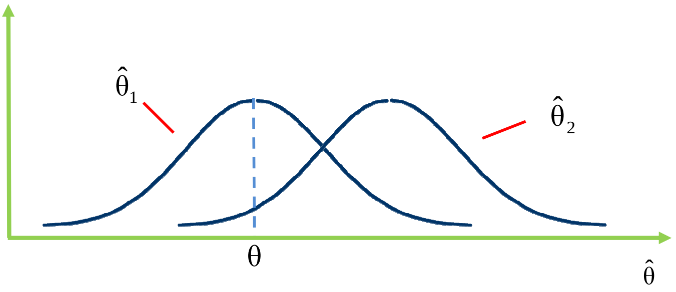
$$Sesgo(\hat{\theta}) = E[\hat{\theta}] - \theta$$

- En la práctica es preferible un estimador cuya distribución esté más concentrada alrededor del parámetro que se está estimando ($sesgo = 0$)

Propiedades de los estimadores

- $\hat{\theta}_1$ es un estimador insesgado
- $\hat{\theta}_2$ es un estimador sesgado

$\hat{\theta}_1$ **ES UN ESTIMADOR INSESGADO** $\hat{\theta}_2$ **ES SESGADO**



Propiedades de los estimadores

Ejemplo cont.:

c) ¿Cuáles de los estimadores del ejemplo anterior son insesgados?

$$
\begin{aligned}
{\color{red}E[T_1]} &= E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \overbrace{E[X_i]}^{\mu} {\color{red}= \mu} \qquad \Leftarrow {\color{red}\text{insesgado}} \\
E[T_2] &= E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \frac{n}{n-1}\mu \\
{\color{red}E[T_3]} &= E\left[\frac{X_1 + X_n}{2}\right] = \frac{E[X_1] + E[X_n]}{2} = \frac{\mu + \mu}{2} {\color{red}= \mu} \qquad \Leftarrow {\color{red}\text{insesgado}} \\
E[T_4] &= E\left[X_2 - X_1\right] = E[X_2] - E[X_2] = \mu - \mu = 0
\end{aligned}
$$

T_1 y T_3 son insesgados ¿Cuál utilizo?

Propiedades de los estimadores

En lo que respecta a la varianza en general serán preferibles aquellos estimadores que tengan menor varianza, pues serán más precisos en el sentido de que variarán poco de unas muestras a otras.

- Sean $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ dos estimadores insesgados de θ. Diremos que $\hat{\theta}_1$ es más eficiente que $\hat{\theta}_2$ si se verifica que

$$V[\hat{\theta}_1] < V[\hat{\theta}_2]$$

- Si $\hat{\theta}$ es un estimador insesgado de θ, y no hay ningún otro estimador insesgado que tenga menor varianza, entonces se dice que $\hat{\theta}$ es el estimador insesgado más eficiente o estimador de mínima varianza

Estimadores de mínima varianza

Algunos estimadores insesgados de mínima varianza son

- La media muestral cuando la muestra proviene de una distribución normal
- La varianza muestral cuando la muestra proviene de una distribución normal
- La proporción muestral cuando la muestra proviene de una distribución binomial

Error cuadrático medio

Sea $\hat{\theta}$ un estimador de θ . El error cuadrático medio de $\hat{\theta}$ es

$$ECM[\hat{\theta}] = E\left[\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2\right]$$

Proposición: Sea $\hat{\theta}$ un estimador de θ. Se cumple que:

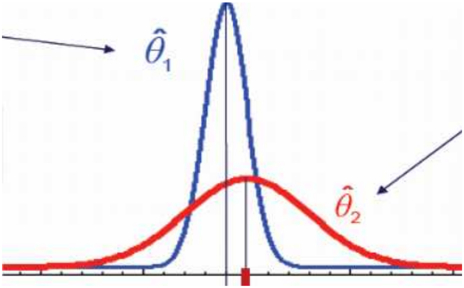
$$\begin{aligned} ECM[\hat{\theta}] &= V[\hat{\theta}] + \left(E[\hat{\theta}] - \theta\right)^2 \\ &= V[\hat{\theta}] + \left(Sesgo(\hat{\theta})\right)^2 \end{aligned}$$

Error cuadrático medio

¿Cómo seleccionar el estimador más adecuado?

- Que $E[\hat{\theta}]$ no se aleje mucho de θ
- Que $\hat{\theta}$ tenga poca varianza
- Si hay varios estimadores, con distinto sesgo y varianza. Es mejor el que tenga menor ECM

- $\hat{\theta}_1$ es sesgado
- $\hat{\theta}_2$ es insesgado pero de mayor varianza



Más ejemplos

Ejemplo: El consumo de un cierto producto en una familia de cuatro miembros durante los meses de verano, es una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo $(\alpha, \alpha + 1)$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (\alpha, \alpha + 1) \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria de consumos de distintas familias.

a) Demostrar que la media muestral es un estimador sesgado de á y que su sesgo es $\frac{1}{2}$.

b) Calcular el error cuadrático medio de $\bar{X}$.

c) Obtener un estimador insesgado de á (a partir de $\bar{X}$).

Más ejemplos

Ejemplo cont.:
a)

$$E[\bar{X}] = \int_{\alpha}^{\alpha+1} f(x)dx = \alpha + \frac{1}{2} \neq \alpha \quad \Rightarrow \quad Sesgo(\bar{X}) = \frac{1}{2}$$

b)

$$\begin{aligned} ECM(\bar{X}) &= V[\bar{X}] + (Sesgo(\bar{X}))^2 \\ &= \frac{1}{12n} + \frac{1}{4} \\ &= = \frac{3n+1}{12n} \end{aligned}$$

c)

$$\hat{\alpha} = \bar{X} - \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad E[\hat{\alpha}] = \alpha$$

Metodos de construccón de estimadores

- Método de los momentos
  Se basa en igualar los momentos muestrales con los momentos poblacionales
- Método de máxima verosimilitud
  Se basa en maximizar la función de verosimilitud MV (que mide lo verosímil o creíble que resulta cada valor de θ cuando se ha obtenido una muestra concreta)

Método de máxima verosimilitud

La función de verosimilitud $L(\theta)$ se defiene

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} p_\theta(x_i) \quad \Leftarrow \text{distribuciones discretas}$$

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) \quad \Leftarrow \text{distribuciones continuas}$$

- $L(\theta)$ es función de θ, para unos ciertos valores fijos de la muestra $(x_1, \ldots, x_n)$. No es una variable aleatoria
- Por comodidad, se usa su logaritmo $\ln L(\theta) \Leftarrow$ función soporte

Propiedades del estimadores de MV

- El EMV siempre está dentro del espacio paramétrico.
- El estimador de máxima verosimilitud es, bajo condiciones generales, se distribuye asintóticamente (cuando el tamaño muestral tiende a infinito) según una normal.
- El EMV es un estimador consistente (en el límite, para muestras grandes, tiende a tener el valor del parámetro).
- El EMV es asintóticamente insesgado (tiende a ser insesgado).
- El EMV es asintóticamente eficiente (tiende a tener mínima varianza).