CIRCUITOS CON SEÑALES POLIARMÓNICAS

Se estudia el comportamiento de circuitos con señales ***periódicas no naturales.***

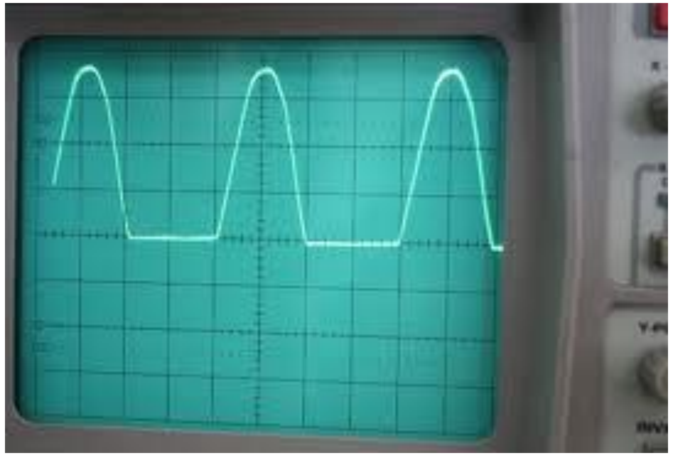
Estas señales ***periódicas no naturales*** *pueden ser generadas por las fuentes o por no nealidades de los elementos pasivos.*

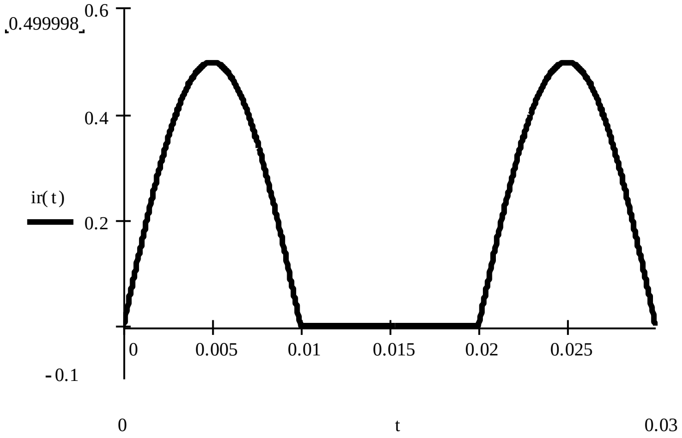
SEÑALES POLIARMÓNICAS

Son señales ***periódicas no naturales****, que se encuentran con frecuencia en electrónica y con cada vez mayor asiduidad en las redes, debido a la influencia que los circuitos electrónicos tienen en las mismas*

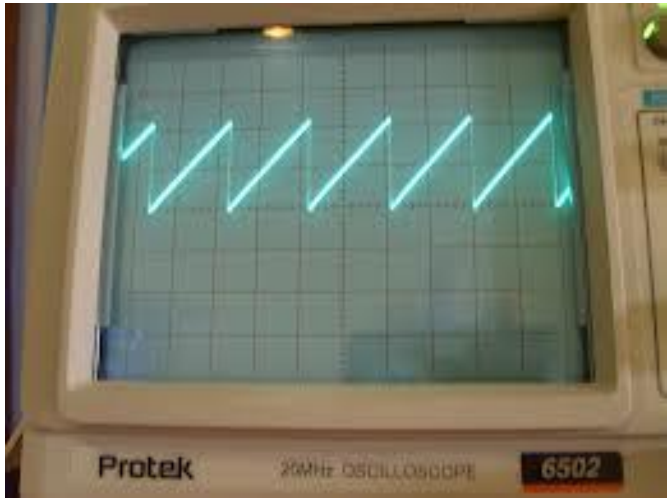
Algunos ejemplos típicos son

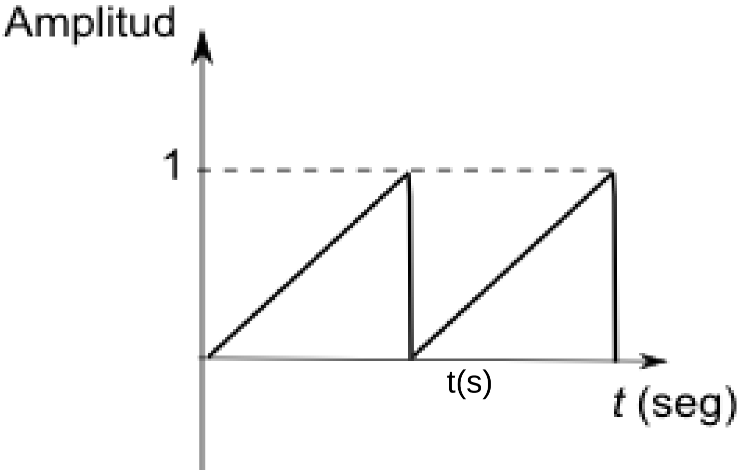
Rectificada media onda



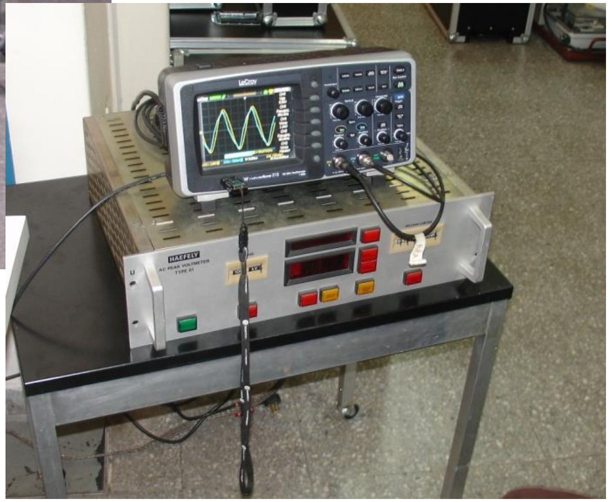


Diente de sierra



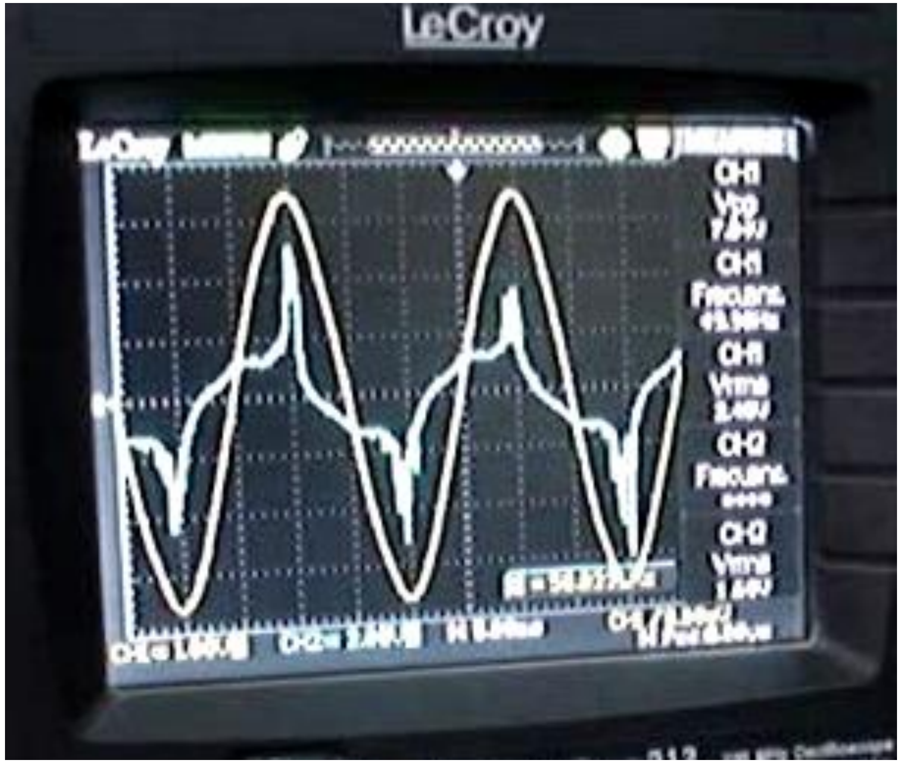


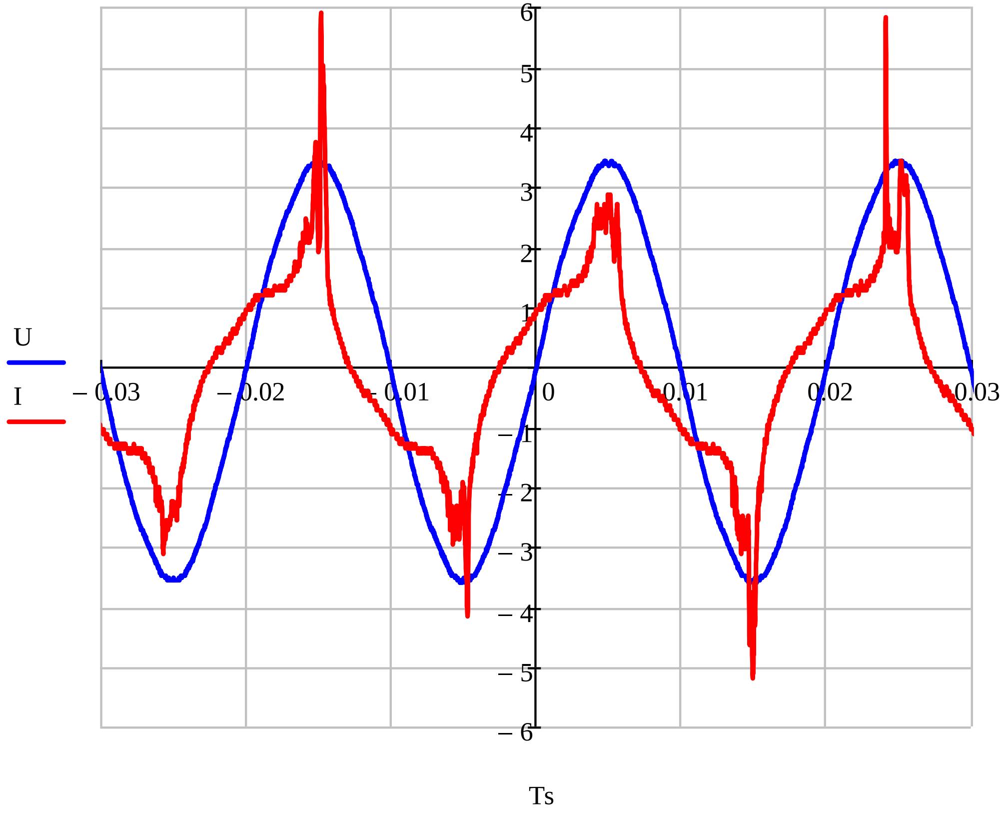
CIRCUITOS CON SEÑALES POLIARMÓNICAS



SEÑALES POLIARMÓNICAS

Señal periódica no senoidal arbitraria debida a carga no lineal





¿Cómo se estudian los circuitos que presentan este tipo de señales?

SERIE DE FOURIER

Si la señal es periódica de periodo T se cumple que ⇨ $F(t) = f(t+T)$

*Una **serie de Fourier** es una suma de infinitos términos senos y/o cosenos de amplitudes adecuadas y cuyas frecuencias son múltiplos de la frecuencia de la onda original, que se suele denominar **frecuencia fundamental**, mediante la cual es posible representar funciones periódicas no senoidales*

$$u(t) = A_0 + A_1 sen(\omega_1 t) + A_2 sen(\omega_2 t) + A_3 sen(\omega_3 t) + \cdots$$
$$\cdots + B_1 \cos(\omega_1 t) + B_2 \cos(\omega_2 t) + B_3 \cos(\omega_3 t) + \cdots$$
$$= U_0 + U_1 sen(\omega_1 t + \phi_1) + U_2 sen(\omega_2 t + \phi_2) + U_3 sen(\omega_3 t + \phi_3) + \cdots$$

con $\omega_2 = 2\omega_1$; $\omega_3 = 3\omega_1$; *etc.*

$U_i = \sqrt{(A_i^{\,2} + B_i^{\,2})}$; $\phi_i = arctg(B_i/A_i)$

¿Cómo se calculan los coeficientes de la serie a partir de la expresión analítica de la función original?

SERIE DE FOURIER

Para que exista una representación por serie de Fourier la función en estudio debe cumplir las ***condiciones de Dirichlet:***

- *La función debe ser periódica*
- *El valor medio en en el período debe ser finito*
- *Si la función es discontinua, el número de discontinuidades en el período debe ser finito*
- *Debe tener un número finito de máximos positivos y negativos en el período*

Cumplidas las condiciones anteriores, se puede demostrar que el cálculo de los coeficientes de la serie se puede realizar con las siguientes expresiones

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt$$

Observar que corresponde al valor medio de la función original

$$A_n = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\,sen\left(n\omega t\right)dt$$

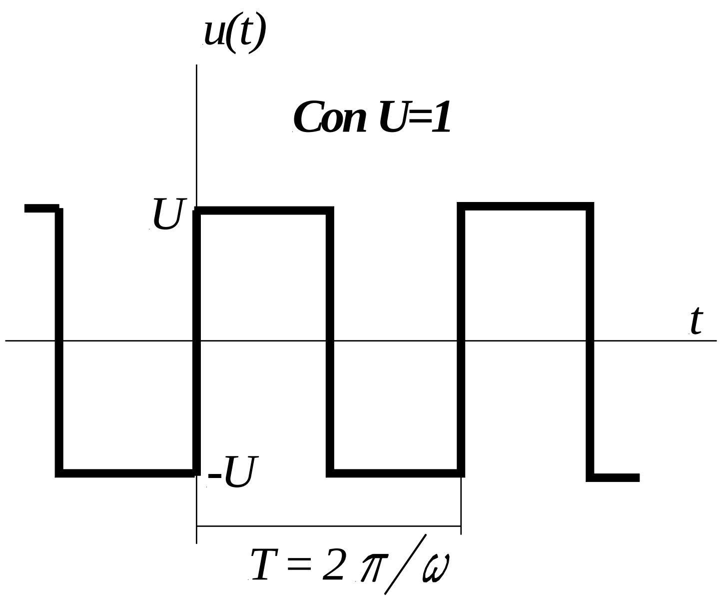
$$B_n = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\cos\left(n\omega t\right)dt$$

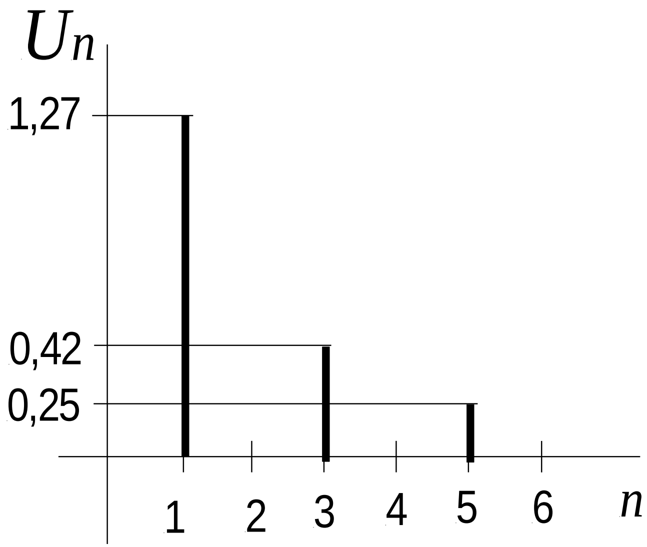
SERIE DE FOURIER

***ESPECTRO DE** FRECUENCIAS **O DE** LÍNEAS*

Para una dada forma de onda se grafican las amplitudes (en módulo) de los coeficientes en función de los armónicos.

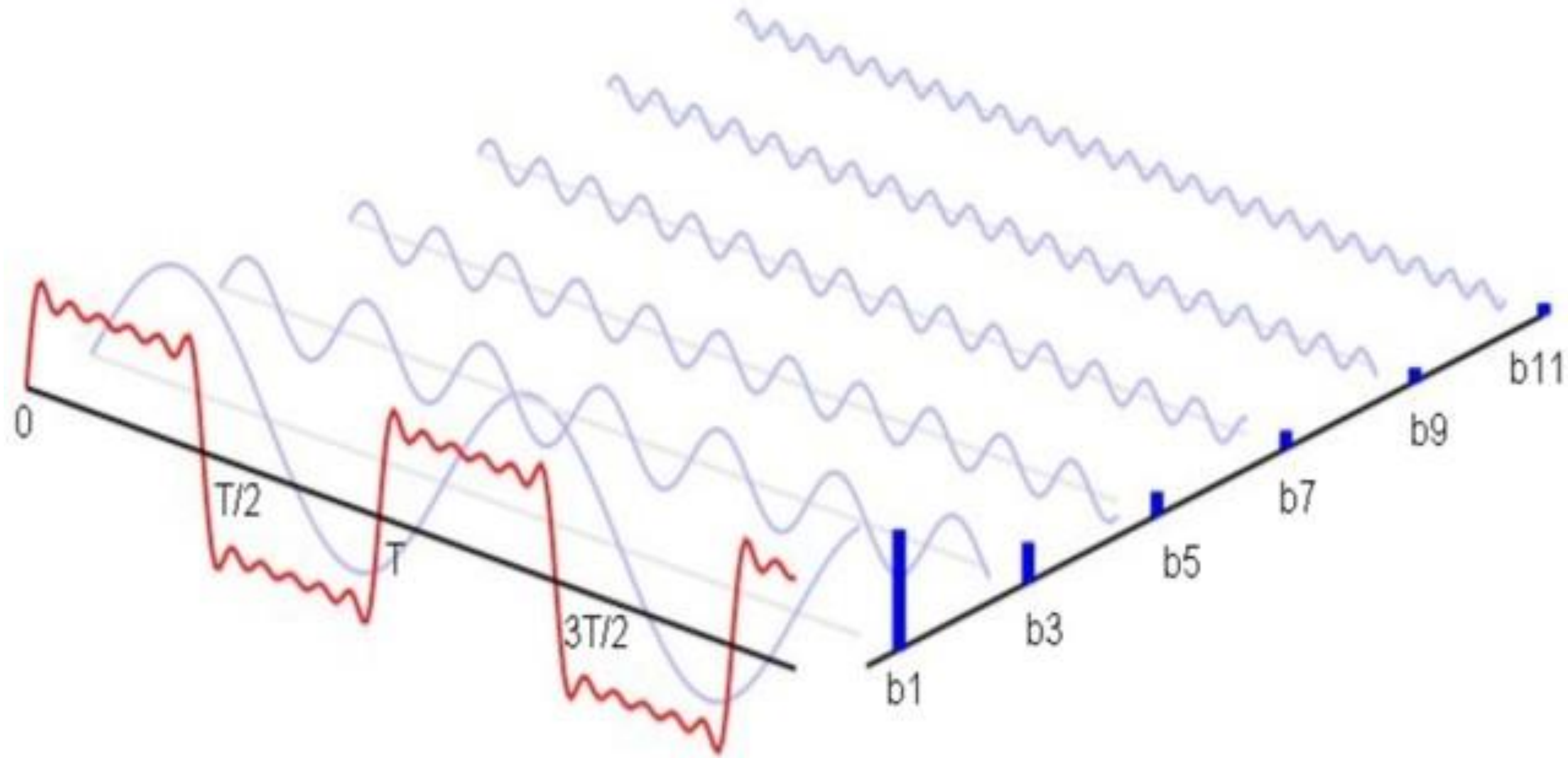
$$u(t) = U_0 + U_1 sen(\omega_1 t + \phi_1) + U_2 sen(\omega_2 t + \phi_2) + U_3 sen(\omega_3 t + \phi_3) + \cdots$$





SERIE DE FOURIER

***ESPECTRO DE** FRECUENCIAS **O DE** LÍNEAS*

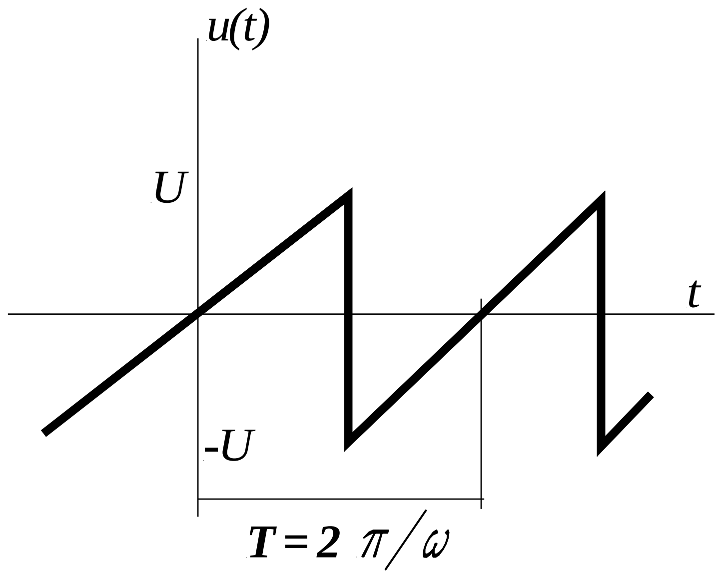


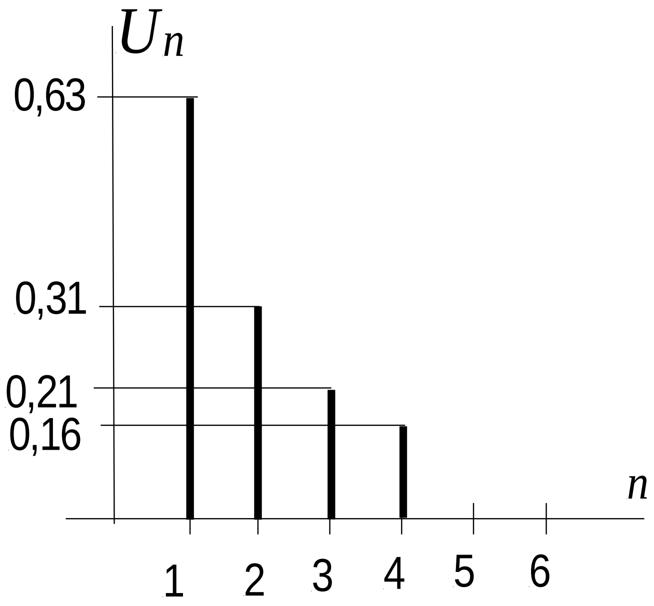
SERIE DE FOURIER

ESPECTRO DE FRECUENCIAS O DE LÍNEAS

Para una dada forma de onda se grafican las amplitudes (en módulo) de los coeficientes en función de los armónicos.

$$u(t) = U_0 + U_1 sen(\omega_1 t + \phi_1) + U_2 sen(\omega_2 t + \phi_2) + U_3 sen(\omega_3 t + \phi_3) + \cdots$$





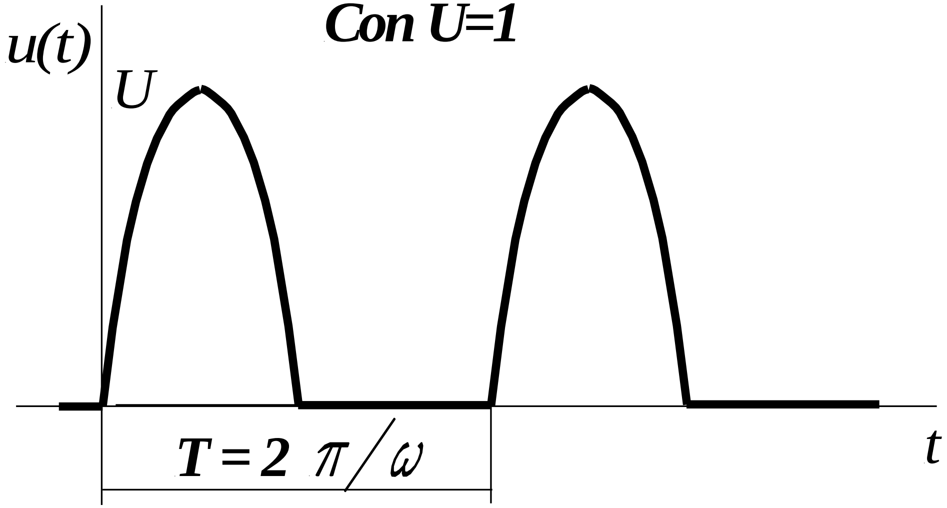
SERIE DE FOURIER

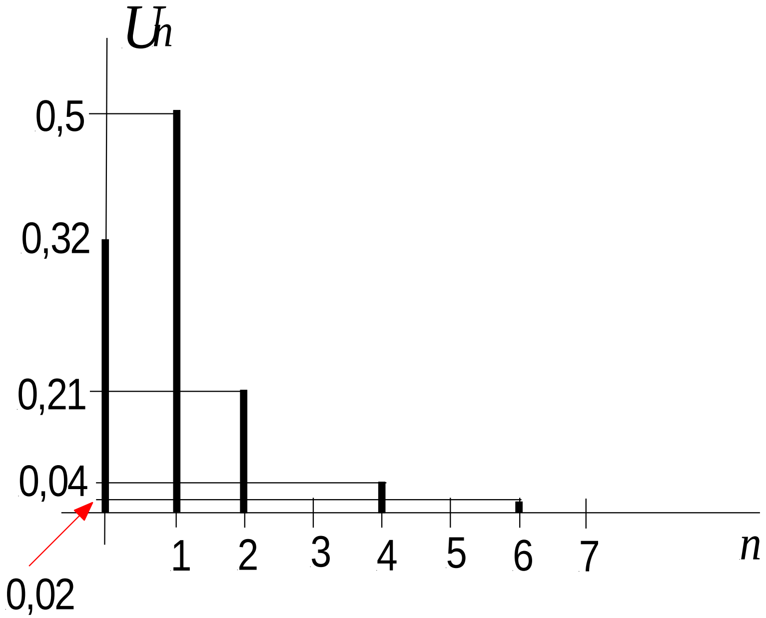
ESPECTRO DE FRECUENCIAS O DE LÍNEAS

Para una dada forma de onda se grafican las amplitudes (en módulo) de los coeficientes en función de los armónicos.

$$u(t) = U_0 + U_1 sen(\omega_1 t + \phi_1) + U_2 sen(\omega_2 t + \phi_2) + U_3 sen(\omega_3 t + \phi_3) + \cdots$$

Con U=1

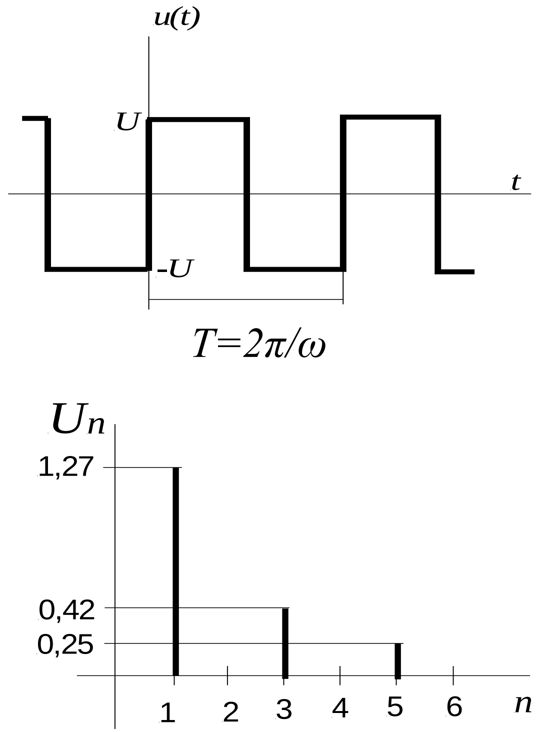


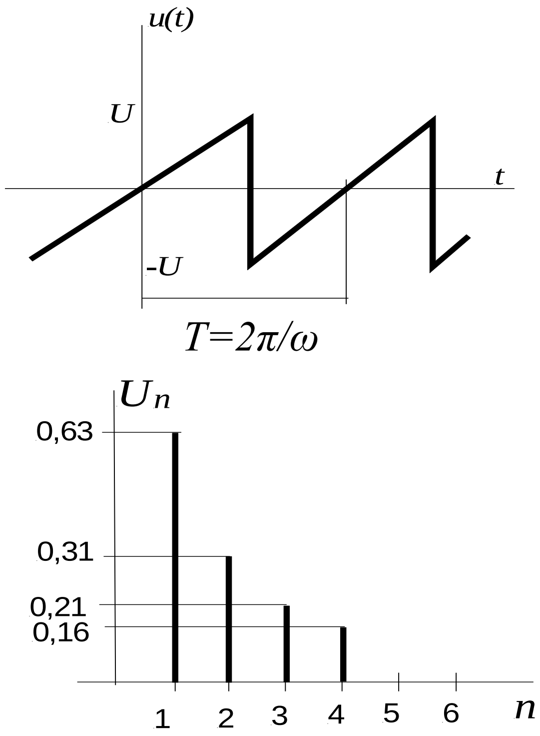


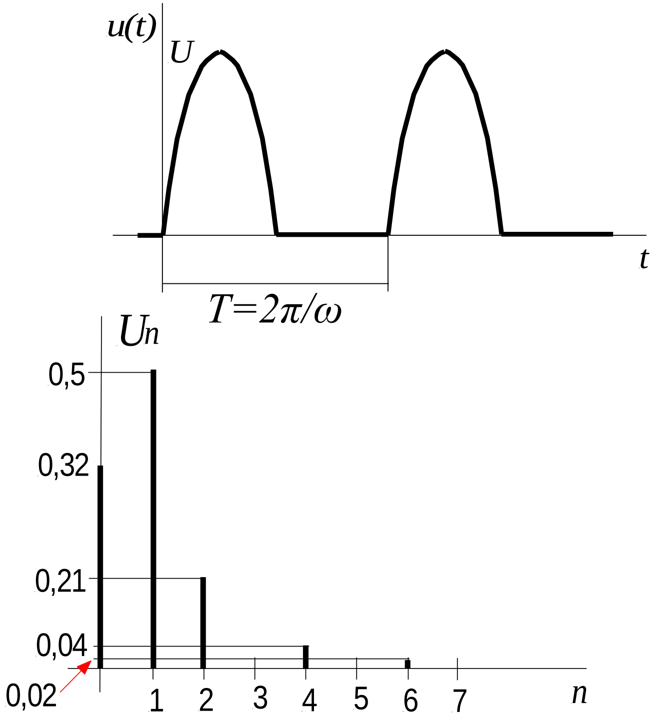
SERIE DE FOURIER

ESPECTRO DE FRECUENCIAS O DE LÍNEAS

$$u(t) = U_0 + U_1 sen(\omega_1 t + \phi_1) + U_2 sen(\omega_2 t + \phi_2) + U_3 sen(\omega_3 t + \phi_3) + \cdots$$







Si las funciones tienen grandes discontinuidades las amplitudes del espectro decrecen lentamente (se necesitan muchos términos de la serie); si el espectro disminuye rápidamente significa que la serie se puede representar con pocos términos

SEÑALES POLIARMÓNICAS

VALOR EFICAZ

Si u(t) es una poliarmónica

$$u(t)=U_0+U_1 sen(\omega_1 t+\phi_1)+U_2 sen(\omega_2 t+\phi_2)+U_3 sen(\omega_3 t+\phi_3)+\cdots$$

La expresión general del valor eficaz de u(t)

$$U_{ef}^{\ 2}=\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt$$

$$U_{ef}^{\ 2}=\frac{1}{T}\int_0^T \left(U_0+U_1 sen(\omega_1 t+\phi_1)+U_2 sen(\omega_2 t+\phi_2)+U_3 sen(\omega_3 t+\phi_3)+\cdots\right)^2 dt$$

Reordenando la expresión anterior

SEÑALES POLIARMÓNICAS

VALOR EFICAZ

$$U_{ef}^{\,2} = \frac{1}{T}\int_0^T U_0^{\,2}dt + \frac{1}{T}\int_0^T U_1^{\,2}sen^2\left(\omega_1 t + \phi_1\right)dt + \frac{1}{T}\int_0^T U_2^{\,2}sen^2\left(\omega_2 t + \phi_2\right)dt + \frac{1}{T}\int_0^T U_3^{\,2}sen^2\left(\omega_3 t + \phi_3\right)dt + \cdots$$

pues los productos de subíndices diferentes son nulos

Se puede observar que cada término resulta en el valor eficaz del correspondiente armónico, y que el valor eficaz del término que representa el valor medio es el mismo valor medio

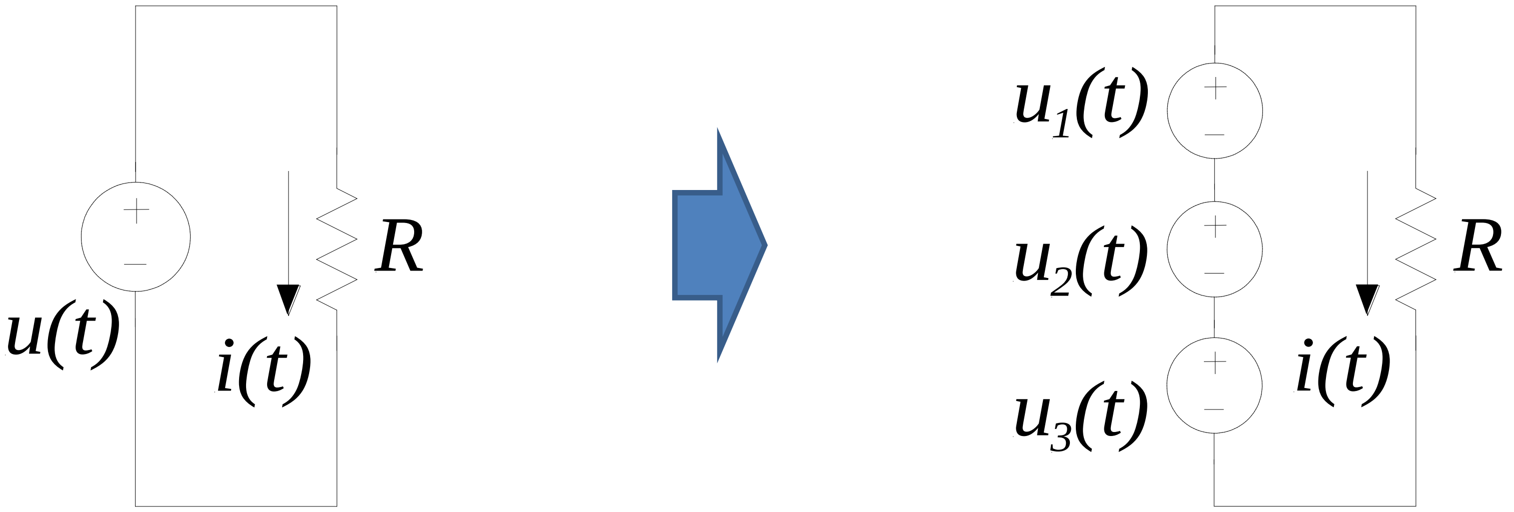
$$U_{ef}^{\;2} = U_{0ef}^{\;2} + U_{1ef}^{\;2} + U_{2ef}^{\;2} + U_{3ef}^{\;2} + \cdots$$

SEÑALES POLIARMÓNICAS

APLICACIÓN

Una señal de tensión poliarmónica ***u(t)=10sen(50t) + 10sen(100t) + 10sen(150t) V*** *se aplica a un resistor* ***R = 1Ω****.*

Mediante la aplicación del ***principio de superposición*** *determinar y graficar cada componente de corriente resultante, así como la corriente total.*

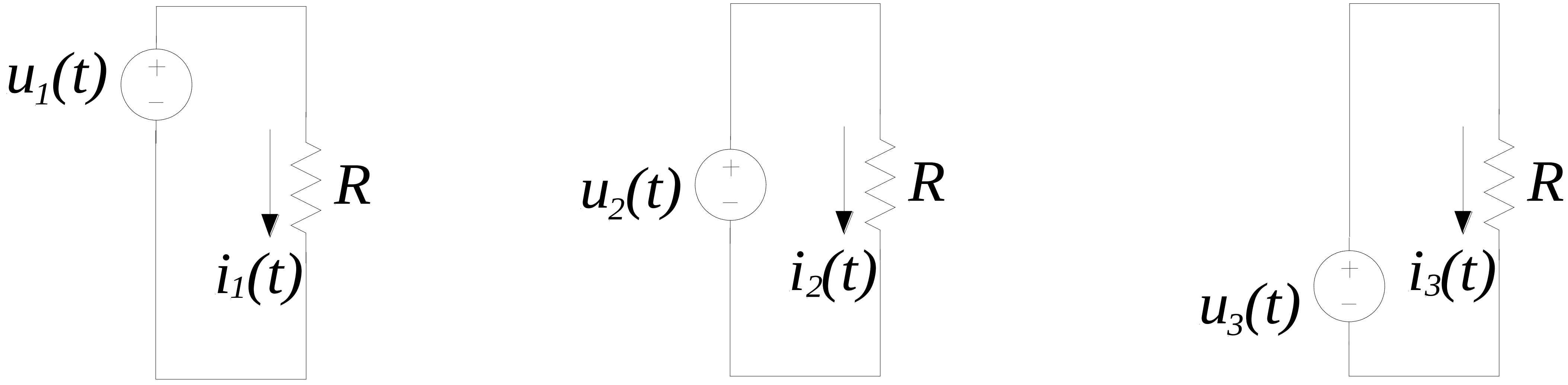


Pues
$\boldsymbol{u(t)=u_1(t)+u_2(t)+u_3(t)}$

SEÑALES POLIARMÓNICAS

APLICACIÓN

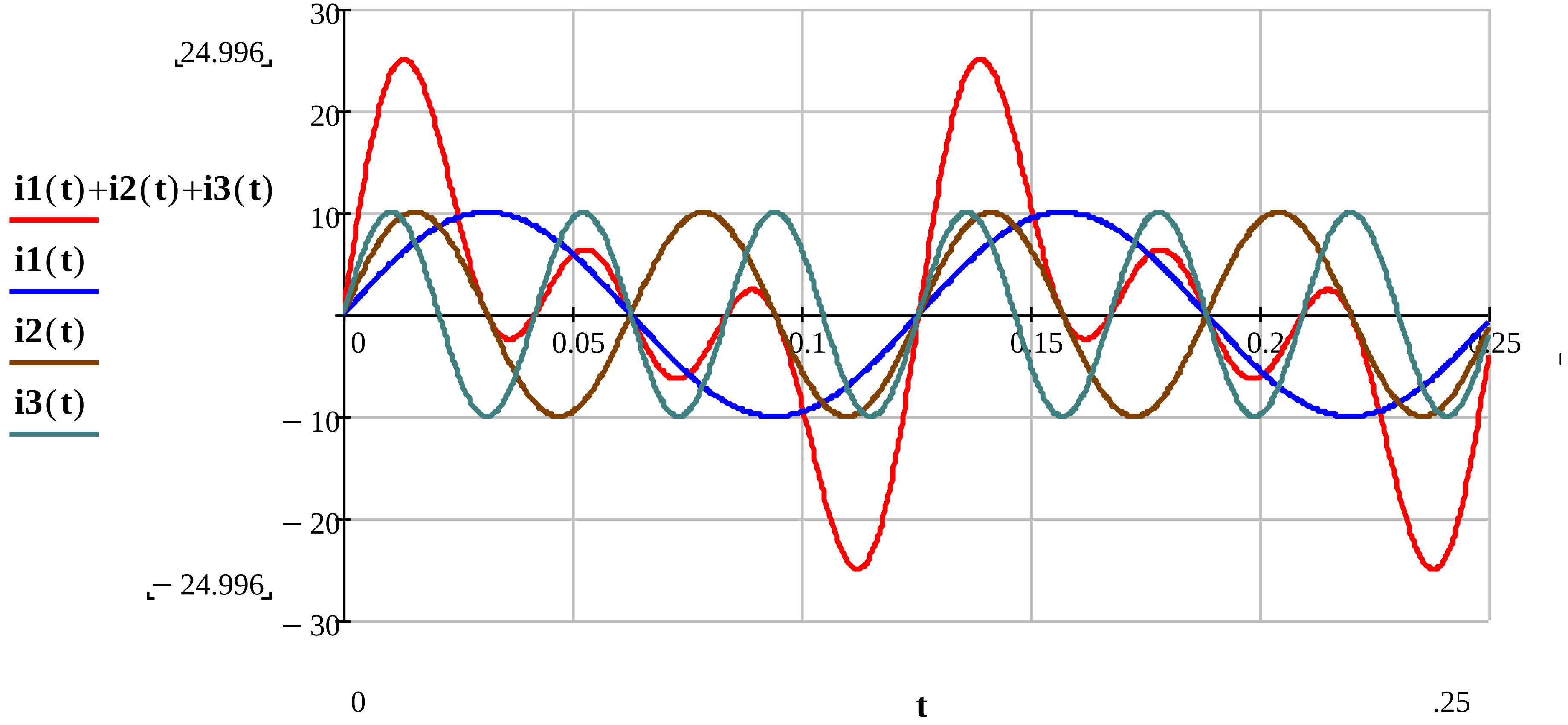
SOLUCIÓN → *aplicación del* ***principio de superposición***



$$i(t)=i_1(t)+i_2(t)+i_3(t)=10sen(50t) + 10sen(100t) + 10sen(150t)\ A$$

SEÑALES POLIARMÓNICAS

APLICACIÓN



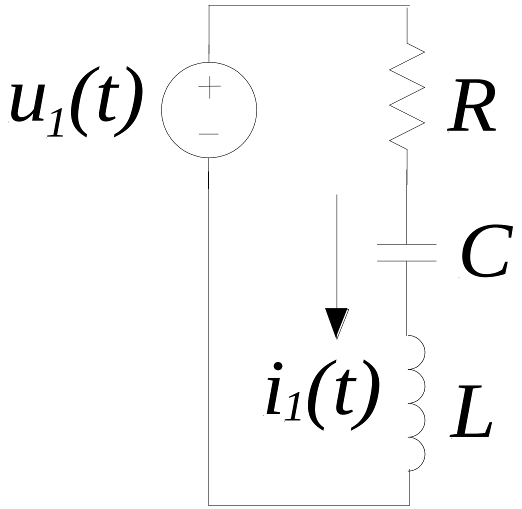
SEÑALES POLIARMÓNICAS

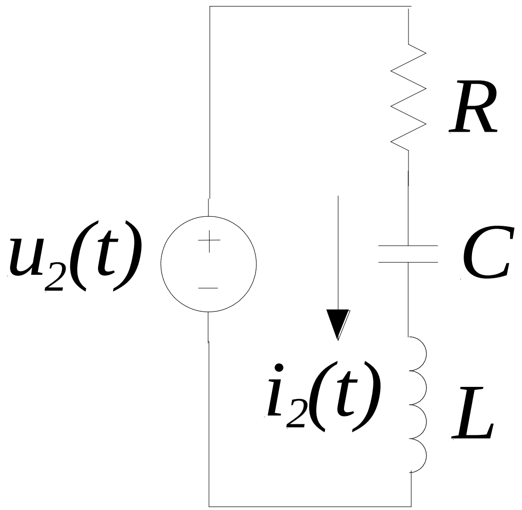
APLICACIÓN

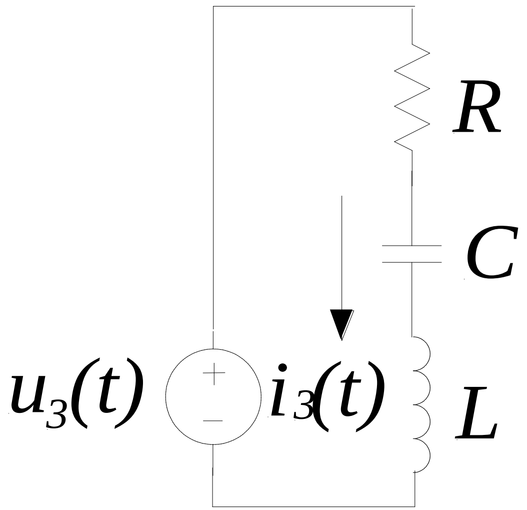
*Se intercala ahora una impedancia serie **LC**, con **L =100 mH** y **C = 1 mF** ¿qué tipo de circuito resulta? Repetir lo realizado en el caso anterior.*

Comparar los resultados y efectuar comentarios.

SOLUCIÓN** → aplicación del **principio de superposición







$\boldsymbol{i_1(t)=0{,}67sen(50t+1{,}5)\ A}$

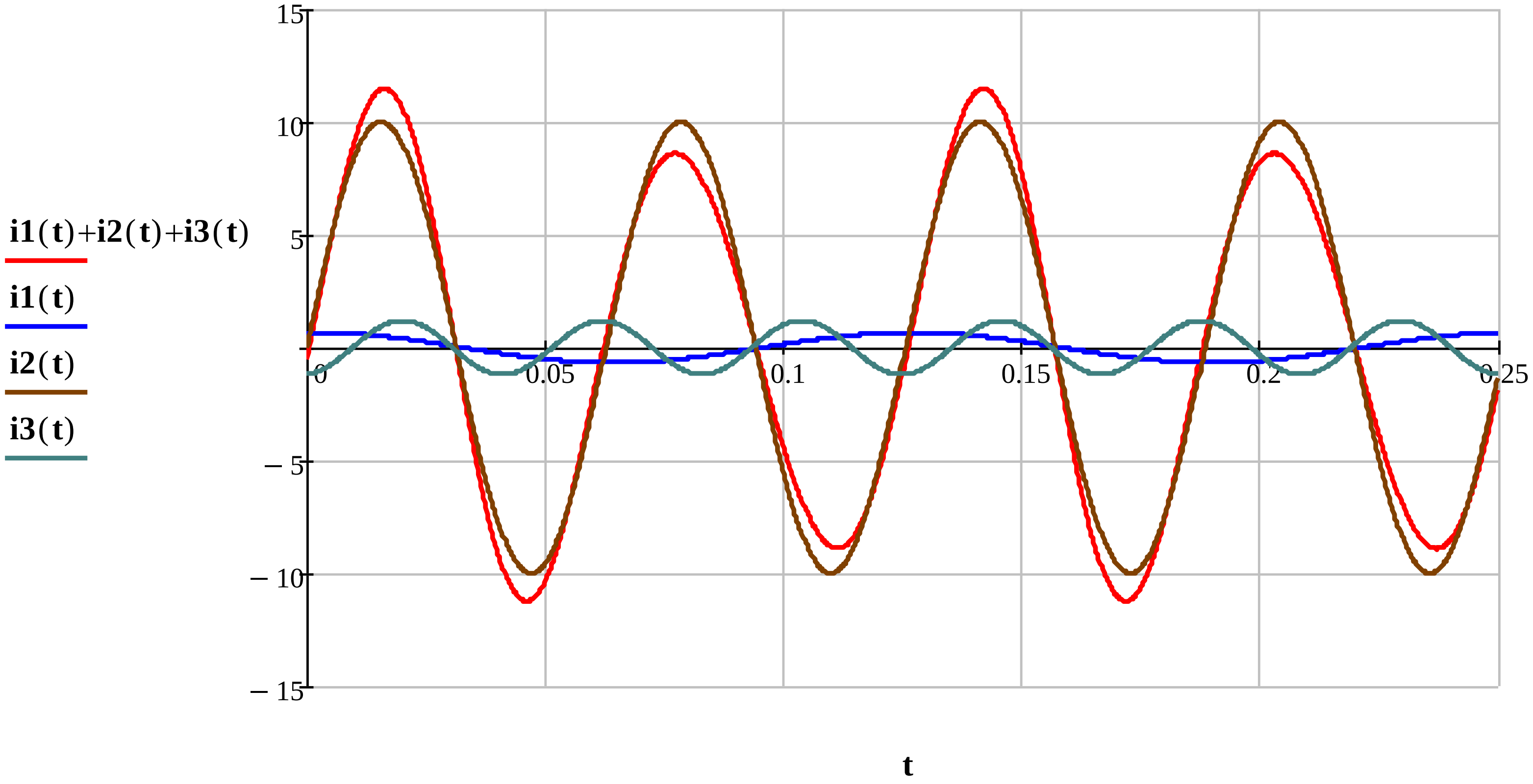
$\boldsymbol{i_2(t)=10sen(100t)\ A}$

$\boldsymbol{i_3(t)=1{,}19sen(150t-1{,}45)\ A}$

SEÑALES POLIARMÓNICAS

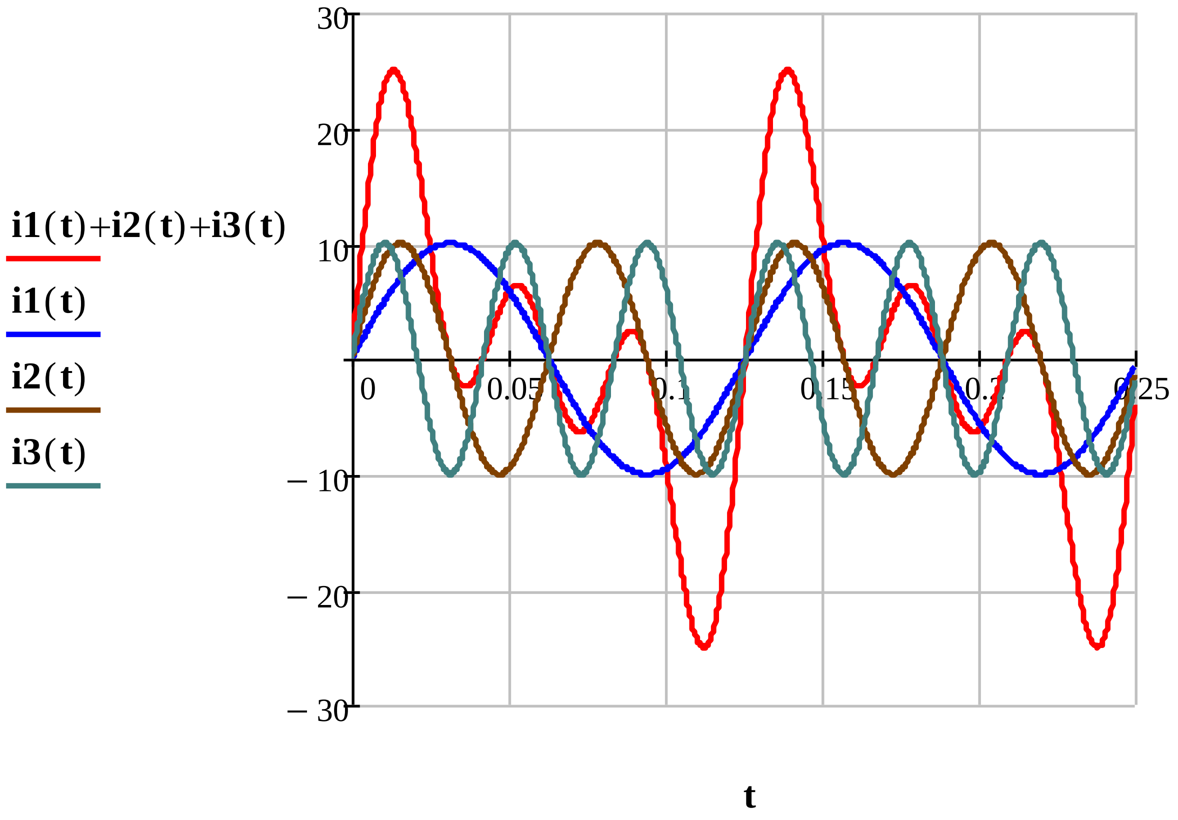
APLICACIÓN

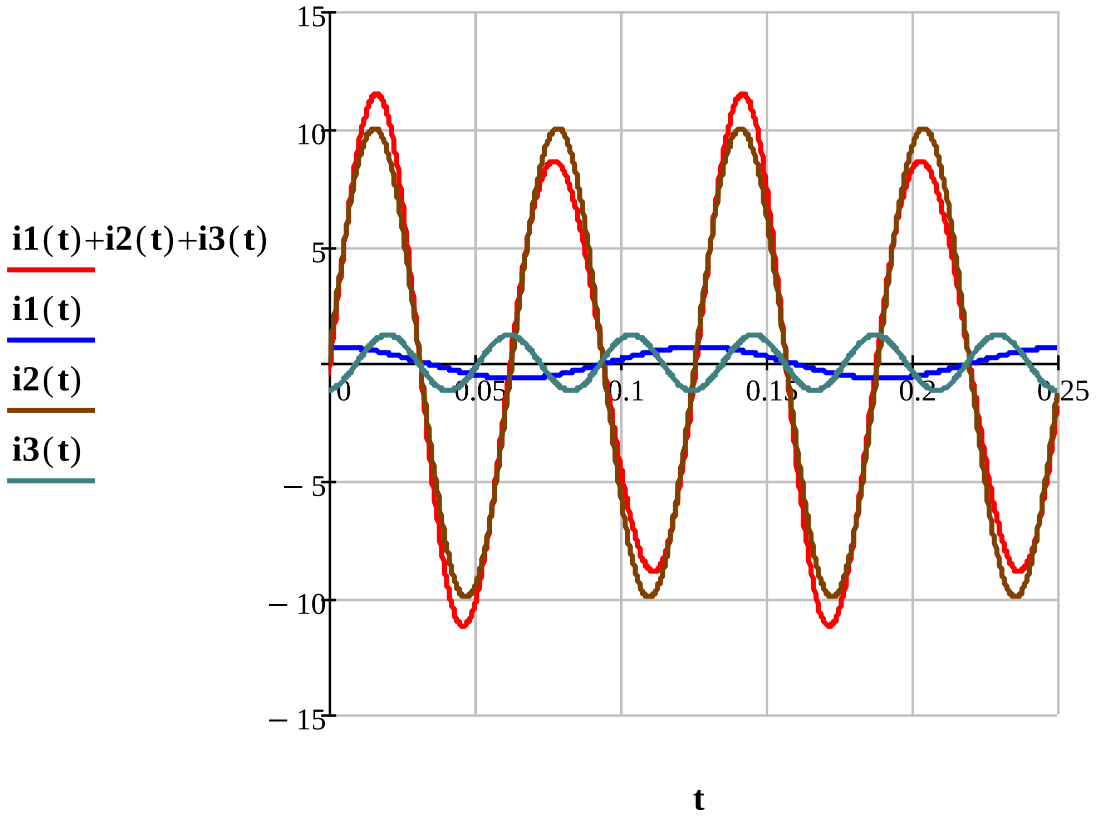
$$i\,(t)=0{,}67sen(50t+1{,}5)+10sen(100t)+1{,}19sen(150t-1{,}45)\ A$$



SEÑALES POLIARMÓNICAS

APLICACIÓN





TÉCNICAS QUE SIMPLIFICAN EL CÁLCULO DE LOS COEFICIENTES DE LA SERIE DE FOURIER

Repasando:

Si la señal es periódica de periodo T se cumple que ⇒ $F(t) = f(t+T)$

*Una **serie de Fourier** es una suma de infinitos términos senos y/o cosenos de amplitudes adecuadas y cuyas frecuencias son múltiplos de la frecuencia de la onda original, que se suele denominar **frecuencia fundamental**, mediante la cual es posible representar funciones periódicas no senoidales*

$$u(t) = A_0 + A_1 sen(\omega_1 t) + A_2 sen(\omega_2 t) + A_3 sen(\omega_3 t) + \cdots$$

$$\cdots + B_1 \cos(\omega_1 t) + B_2 \cos(\omega_2 t) + B_3 \cos(\omega_3 t) + \cdots$$

$$= U_0 + U_1 sen(\omega_1 t + \phi_1) + U_2 sen(\omega_2 t + \phi_2) + U_3 sen(\omega_3 t + \phi_3) + \cdots$$

con $\omega_2 = 2\omega_1$; $\omega_3 = 3\omega_1$; *etc.*

$U_i = \sqrt{(A_i^{\,2} + B_i^{\,2})}$; $\phi_i = arctg(B_i/A_i)$

SERIE DE FOURIER

Para que exista una representación por serie de Fourier la función en estudio debe cumplir las ***condiciones de Dirichlet:***

- *La función debe ser periódica*
- *El valor medio en en el período debe ser finito*
- *Si la función es discontinua, el número de discontinuidades en el período debe ser finito*
- *Debe tener un número finito de máximos positivos y negativos en el período*

Cumplidas las condiciones anteriores, se puede demostrar que el cálculo de los coeficientes de la serie se puede realizar con las siguientes expresiones

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,dt$$

Observar que corresponde al valor medio de la función original

$$A_n = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\,sen\left(n\omega t\right)dt$$

$$B_n = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\cos\left(n\omega t\right)dt$$

SERIE DE FOURIER

Se puede simplificar el cálculo y la expresión de la serie observando las simetrías de la función original; algunos ejemplos:

Función impar *(simetría respecto al origen)*
La serie que representa a este tipo de funciones sólo contienen términos **seno**

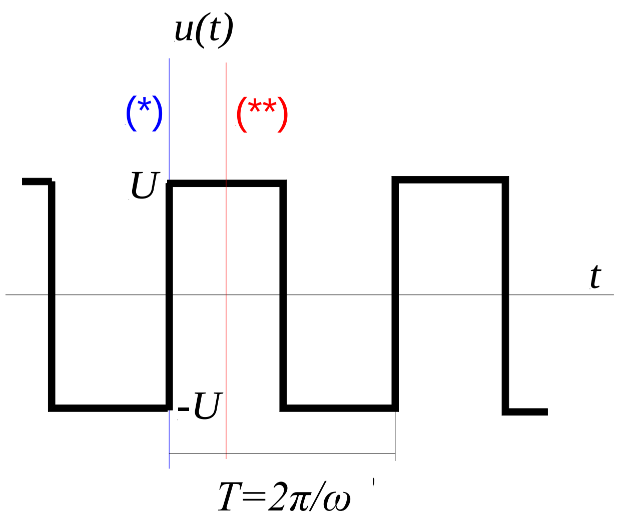
$$f(t) = -f(-t)$$

Función par *(simetría respecto al eje de ordenadas):*
La serie que representa a este tipo de funciones sólo contienen términos **coseno**

$$f(t) = f(-t)$$

SERIE DE FOURIER

Ejercicio: *Encontrar la serie de Fourier que representa a la siguiente forma de onda:*

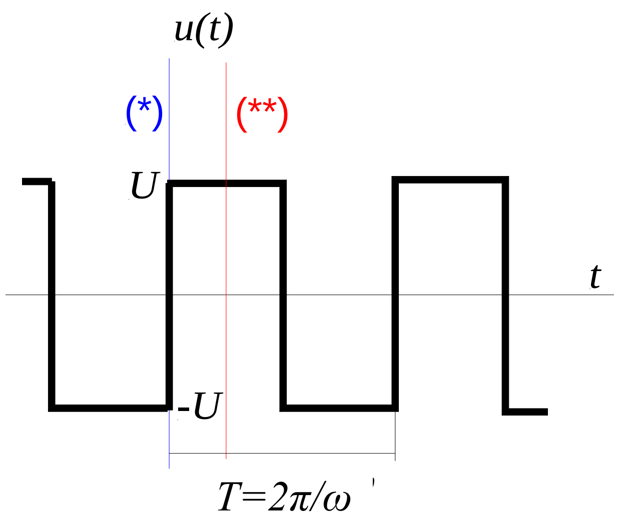


Tips: ▸ *El valor medio de la señal es* ***nulo*** $\rightarrow A_0 = 0$

▸ *De acuerdo a dónde se ubique el eje de ordenadas, la simetría puede ser* ***par (**)*** *o* ***impar (*)****, → serie de* ***cosenos*** *o de* ***senos***

SERIE DE FOURIER

Ejercicio: *Encontrar la serie de Fourier que representa a la siguiente forma de onda:*



Si se supone el eje en (*), se deduce que los $\mathbf{B_n = 0}$ *(sólo hay términos del seno) y el cálculo de los* $\mathbf{A_n}$ *resultan*

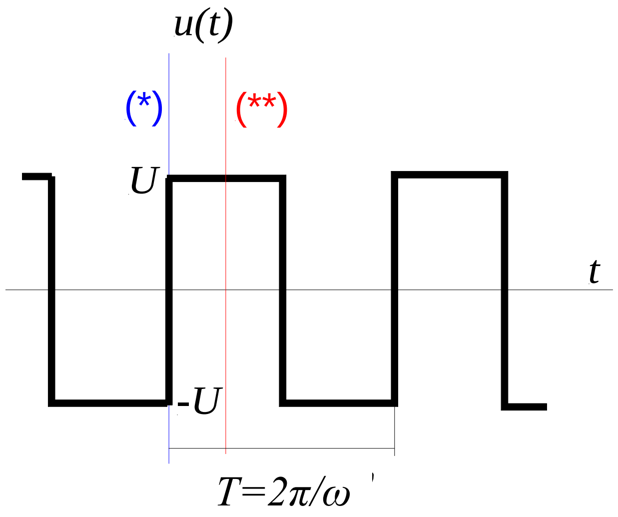
$$An = \frac{2U}{\pi . n}\left(1 - \cos n\pi\right)$$

$$An = \frac{4U}{\pi . n} \quad \text{si } n \text{ es impar}$$

$$An = 0 \quad \text{si } n \text{ es par}$$

SERIE DE FOURIER

Ejercicio: *Encontrar la serie de Fourier que representa a la siguiente forma de onda:*



Y la serie se escribe $\Rightarrow u(t) = \frac{4U}{\pi} sen(\omega t) + \frac{4U}{3\pi} sen(3\omega t) + \frac{4U}{5\pi} sen(5\omega t) + ...$

Resolver para el caso en que el eje se ubique en (**)

SEÑALES POLIARMÓNICAS

BIBLIOGRAFÍA

* *Circuitos Eléctricos. Parte 2* – Morcelle-Deorsola

* *Circuitos Eléctricos* - Spinadel

* *Principios de Electrotecnia, Tomo 2* - Netushil-Strajov

* *Apuntes de Electrotecnia General* - Faradje-Kahn

* *Circuitos en Ingeniería Eléctrica* - Skilling

* *Circuitos Eléctricos* - Dorf

* *Análisis Básico de Circuitos Eléctricos* - Johnson-Hilburn-Jonhson