Sea $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una v.a. $N(\mu, \sigma^2)$.

a) Hallar los estimadores de μ y σ por el método de momentos.

b) Hallar los estimadores de μ y σ por el método de máxima verosimilitud.

c) Se determina la resistencia al corte de cada una de diez soldaduras eléctricas por puntos de prueba, dando los siguientes datos (lb/plg^2):
392, 376, 401, 367, 389, 362, 409, 415, 358, 375.
Si se supone que la resistencia al corte esta normalmente distribuida , estime el verdadero promedio de resistencia al corte y desviación estándar de resistencia al corte usando el método de máxima verosimilitud y el método de momentos.

a) Por método de los momentos:

3- Sea $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria de una v.a. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.
Encuentra los estimadores de μ y σ por el método de momentos.

Solución:
Planteamos las ecuaciones

$$\begin{cases} \mu_1 = M_1 \\ \mu_2 = M_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = \overline{X} \\ E(X^2) = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \end{cases}$$

pero en general es válido que $V(X) = E(X^2) - \mu^2 \Rightarrow E(X^2) = V(X) + \mu^2$
Entonces las ecuaciones quedan

$$\begin{cases} \mu = \overline{X} \\ \sigma^2 + \mu^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{\mu} = \overline{X} \\ \hat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}^2 \end{cases}$$

b) Por método de máxima verosimilitud:

La variable aleatoria X tiene distribución $N(\mu, \sigma^2)$ con μ y σ^2 ambos parámetros desconocido los cuales se desea encontrar los estimadores máxima verosimilitud. La *fdp* es

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad -\infty < x < \infty,$$

La función de verosimilitud para una muestra aleatoria de tamaño n es

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right)^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right)^2} \cdots \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_n-\mu}{\sigma}\right)^2} =$$

$$= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$\ln L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^2$$

y el sistema de ecuaciones de verosimilitud queda:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \mu, \sigma^2)}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{x_i - \mu}{\sigma}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial \ln L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \mu, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\dfrac{n}{2\sigma^2} + \dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\dfrac{(x_i - \mu)^2}{\sigma^4} = 0 \end{cases}$$

Resolvemos con respecto a μ y σ^2 :

$$\begin{cases} \mu = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x} \\ \sigma^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \end{cases}$$

Entonces los estimadores máxima verosimilitud de μ y σ^2 son

$$\begin{cases} \hat{\mu} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X} \\ \hat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \end{cases}$$

c) Por método de los momentos

Estimación de la media : $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$=384,4

Estimación del desvío:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2} = 18,8584$$

Por método máxima verosimilitud:

Estimación de la media: $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$=384,4

Estimación del desvío:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = 18,8584$$

Observación 1: El estimador para la media también nos dió el mismo con ambos métodos, el promedio muestral $\bar{X}$.

Observación 2: Los resultados de las estimaciones con ambos métodos son iguales, ya que los estimadores que nos dieron con ambos métodos son equivalentes:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$