<u>Ley de Gauss</u>

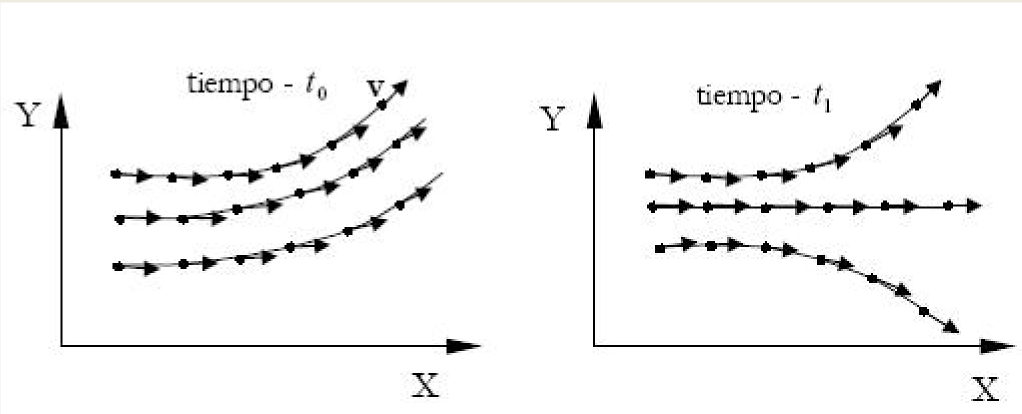
Hemos visto como se puede representar un campo electrostático por medio de vectores de campo.

Ahora veremos las <u>propiedades</u> que tiene el <u>campo electrostático.</u>

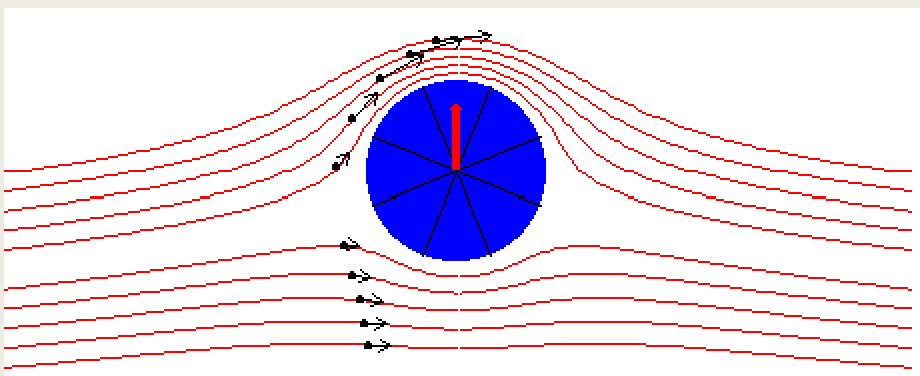
Una de estas propiedades tiene que ver con la <u>dependencia del campo eléctrico de una carga puntual con la inversa del cuadrado de la distancia</u>.

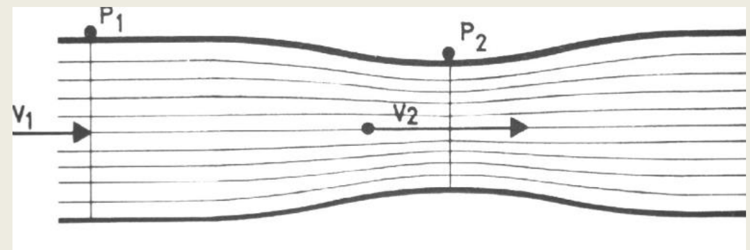
Esta propiedad se visualiza mejor desde el punto de vista del **concepto de líneas de campo**

Recuerdos de Hidrodinámica



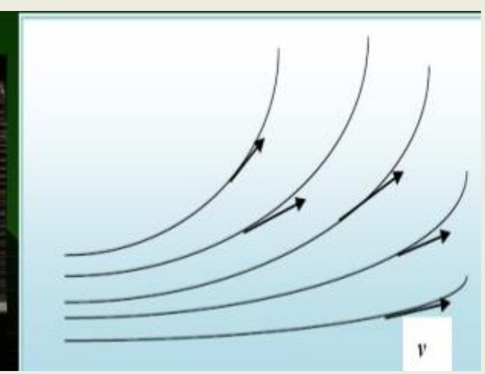
*En Hidrodinámica, **se llama línea de corriente** al lugar geométrico de los **puntos tangentes al vector velocidad de las partículas de fluido** en un instante determinado*





Tubo de Venturi

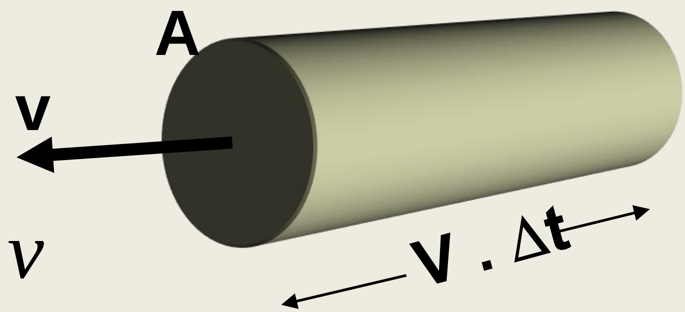
Túnel de viento



Más recuerdos de Hidrodinámica :

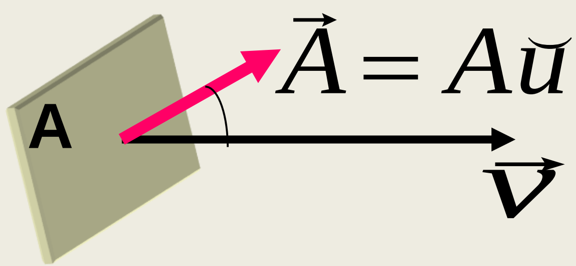
Problemas P1, P2 y C1 Práctica 3

Flujo de volumen, flujo másico (caudal): cantidad de fluido que atraviesa determinada área por unidad de tiempo



$$\Phi = \frac{volumen}{unidad\,de\,tiempo} = \frac{A\,v\,\Delta t}{\Delta t} = A\,v$$

El flujo debe medirse sobre un área perpendicular a la velocidad



$$\vec{A} = A\breve{u}$$

$$\Phi = \vec{v} \bullet \vec{A}$$

$$\Phi = \iint_A \vec{v} \bullet d\vec{a}$$

Cálculo del flujo de un campo vectorial

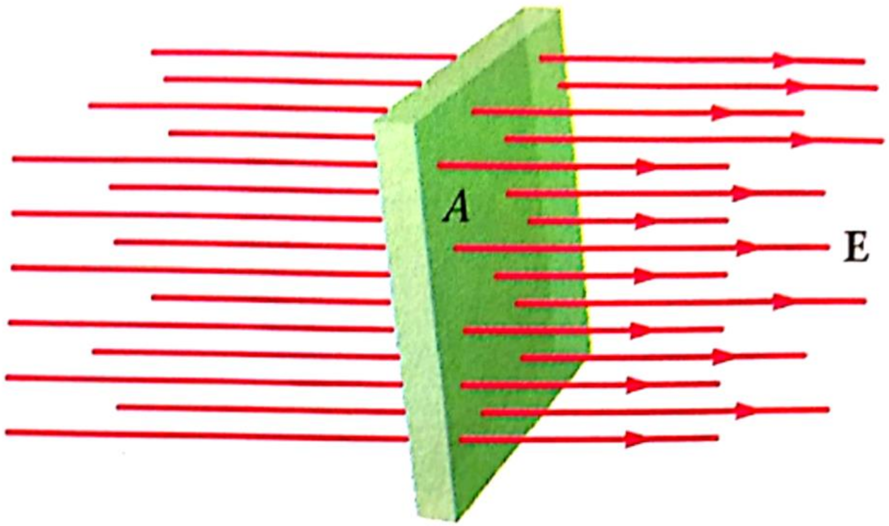


Figura 23.12 Líneas de fuerza correspondientes a un campo eléctrico uniforme E que atraviesa un área A perpendicular al campo. El producto EA es el flujo ϕ a través del área.

Caso particular

Caso general

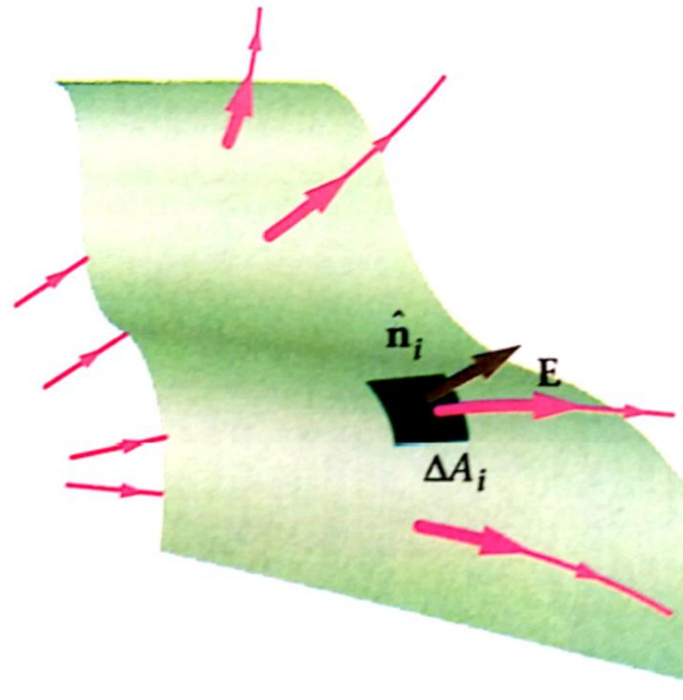


Figura 23.14 Cuando **E** varía en módulo o dirección, el área se divide en elementos de área pequeños ΔA_i. El flujo a través del área se calcula sumando $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\, \Delta A_i$ para todos los elementos.

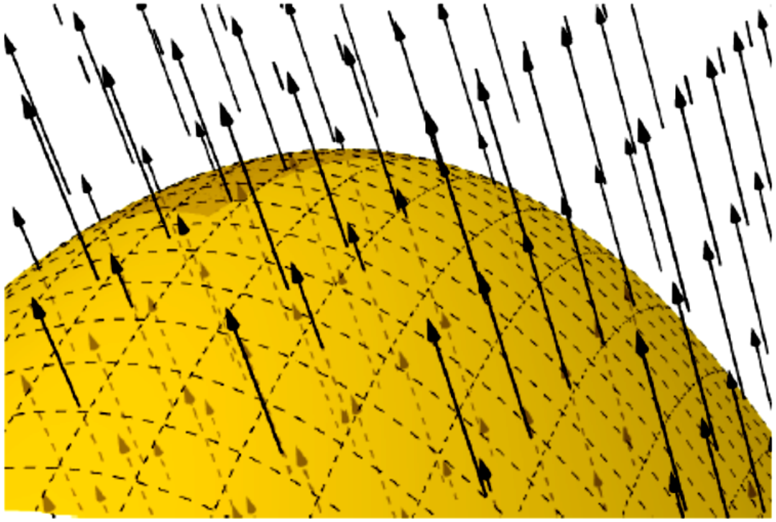
Paul Tipler, “Física para la Ciencia y la Tecnología”, Vol 2, 4ta edición. Editorial Reverté.

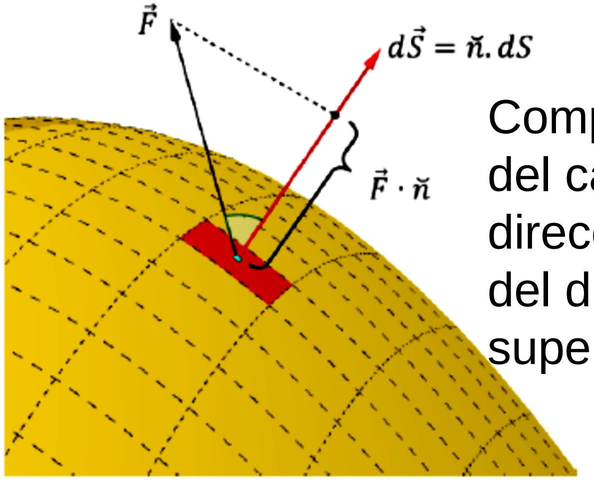
Integral de superficie (Matemática B)

Definición 6.5.1 Sea $\vec{F}(x, y, z)$ un campo vectorial con dominio $E \subset \mathbb{R}^3$, y sea $S \subset E$ una superficie paramétrica en el espacio. Sea $S : \vec{r}(u, v)$, con $(u, v) \in D_{uv}$, una parametrización de la superficie. La *integral de superficie* (o *flujo*) de $\vec{F}$ a través de S está dada por

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{D_{uv}} \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot (\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v))\, du\, dv.$$

En la definición, $d\vec{S} = \breve{n}\, dS$ representa un vector de módulo dS (elemento de superficie) y con dirección perpendicular al mismo dada por el vector normal inducido por la parametrización, $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ (repasar lo visto en la Sección 4.1 del Capítulo 5). Luego, dado que se tiene el producto escalar $\vec{F} \cdot \breve{n}$, podemos interpretar la integral del campo vectorial a través de la superficie como el flujo de la componente del campo que es *normal* a la superficie.[1]



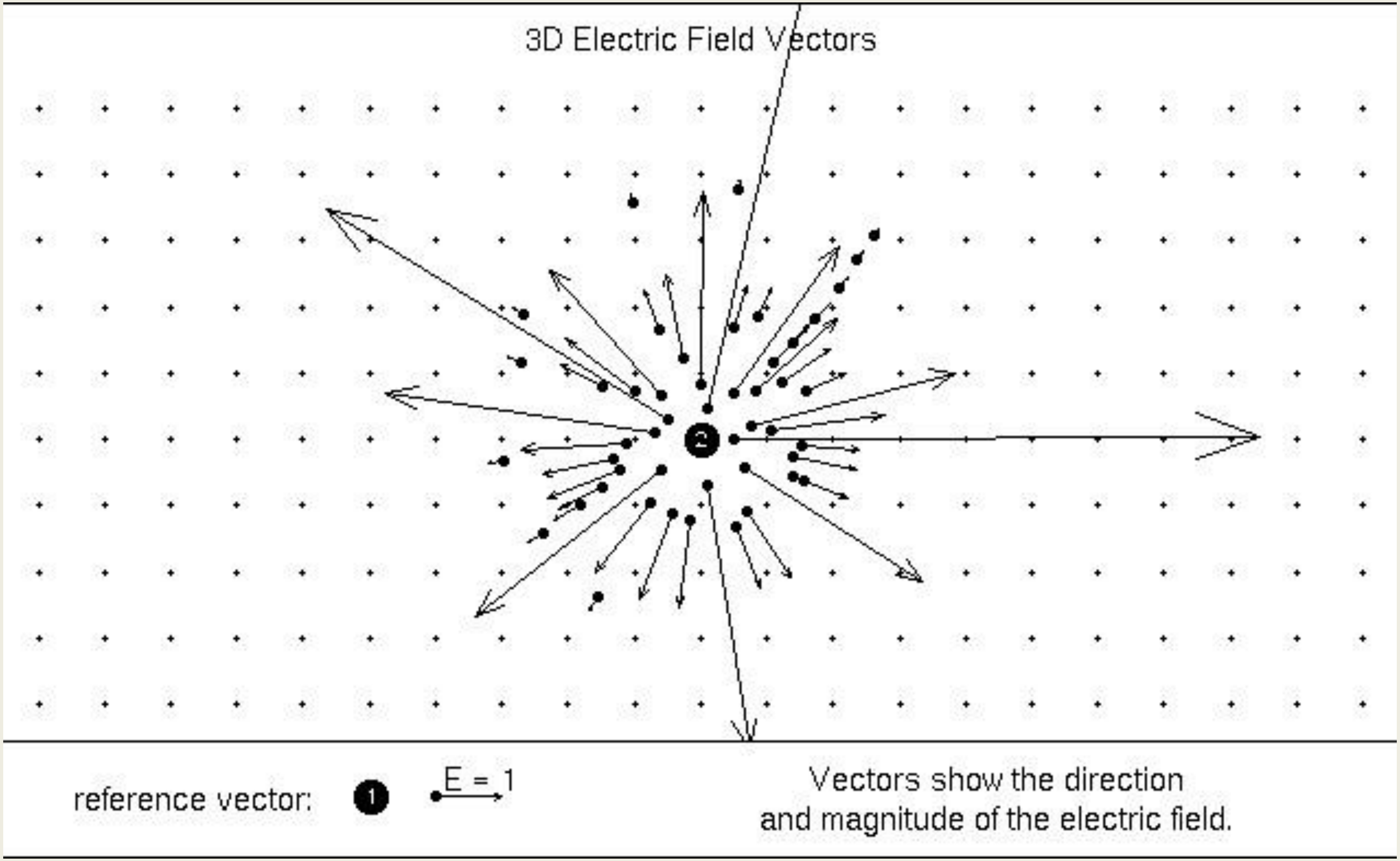


Componente normal del campo, en la dirección del versor del diferencial de superficie dS

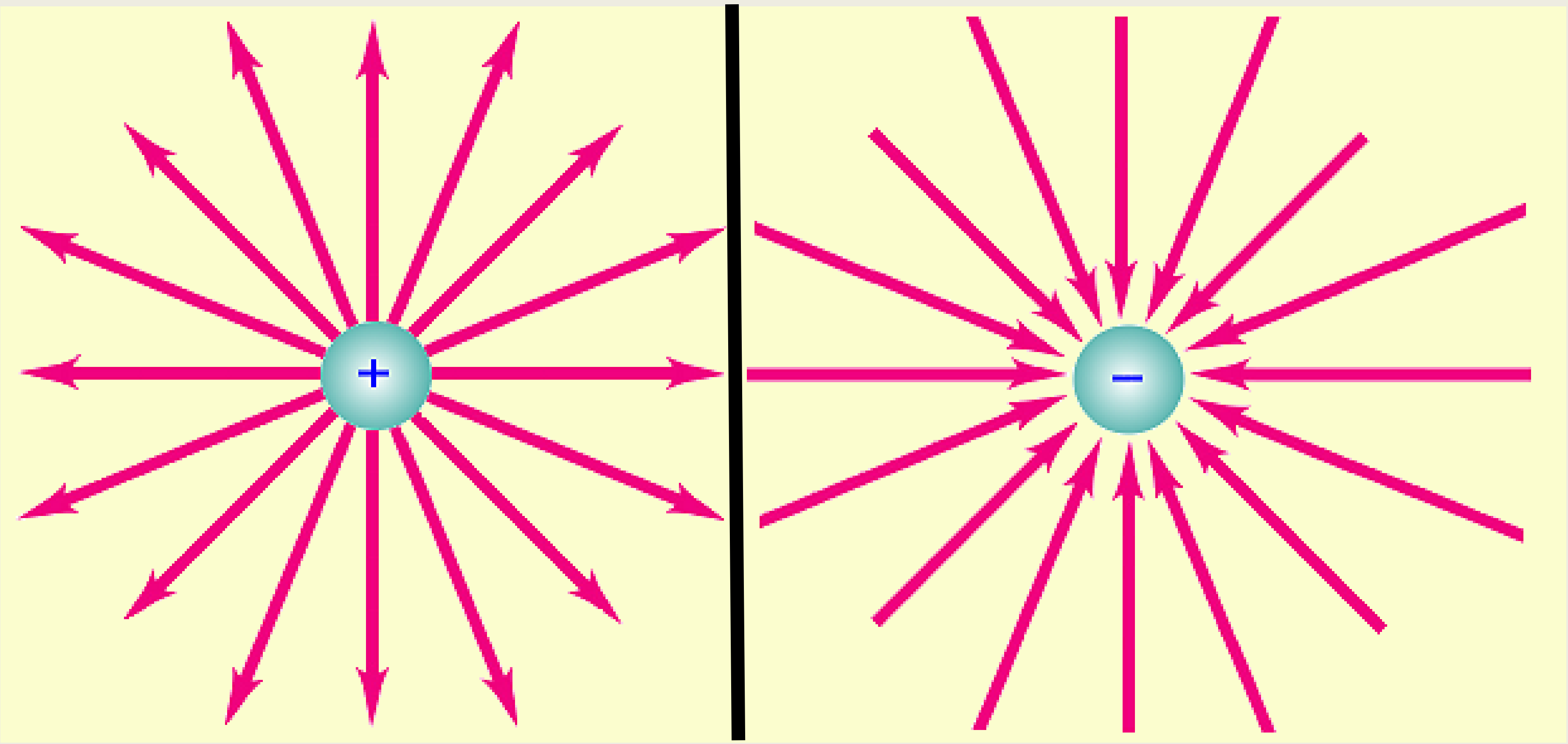
Representación gráfica del campo eléctrico Q puntual

(software: E M Field)

<u>Una forma</u>: dibujar el vector CE para c/punto del espacio



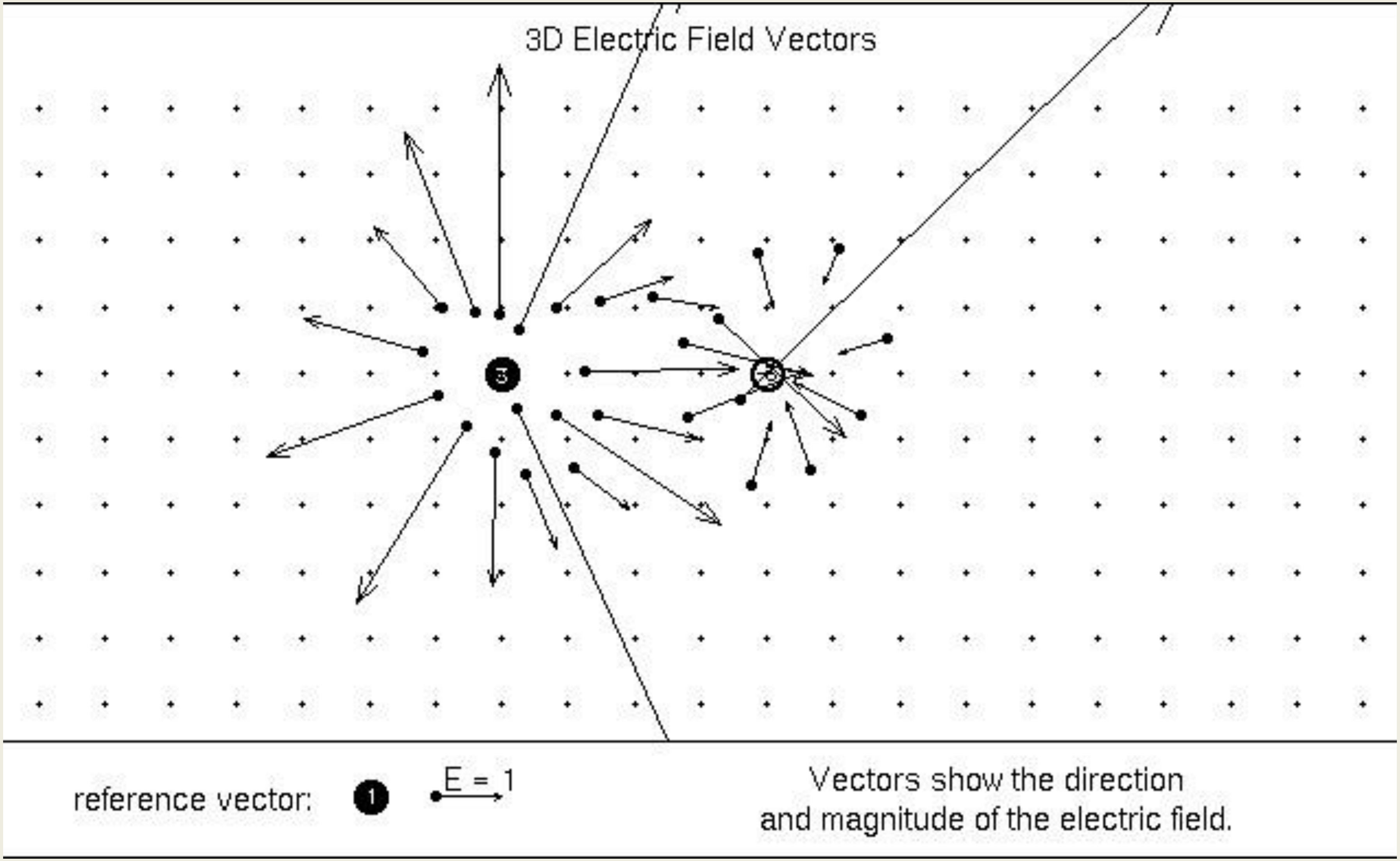
Representación gráfica del campo eléctrico Q puntual por líneas de campo:



Q puntual positiva: las líneas de campo son radiales y salientes de la carga

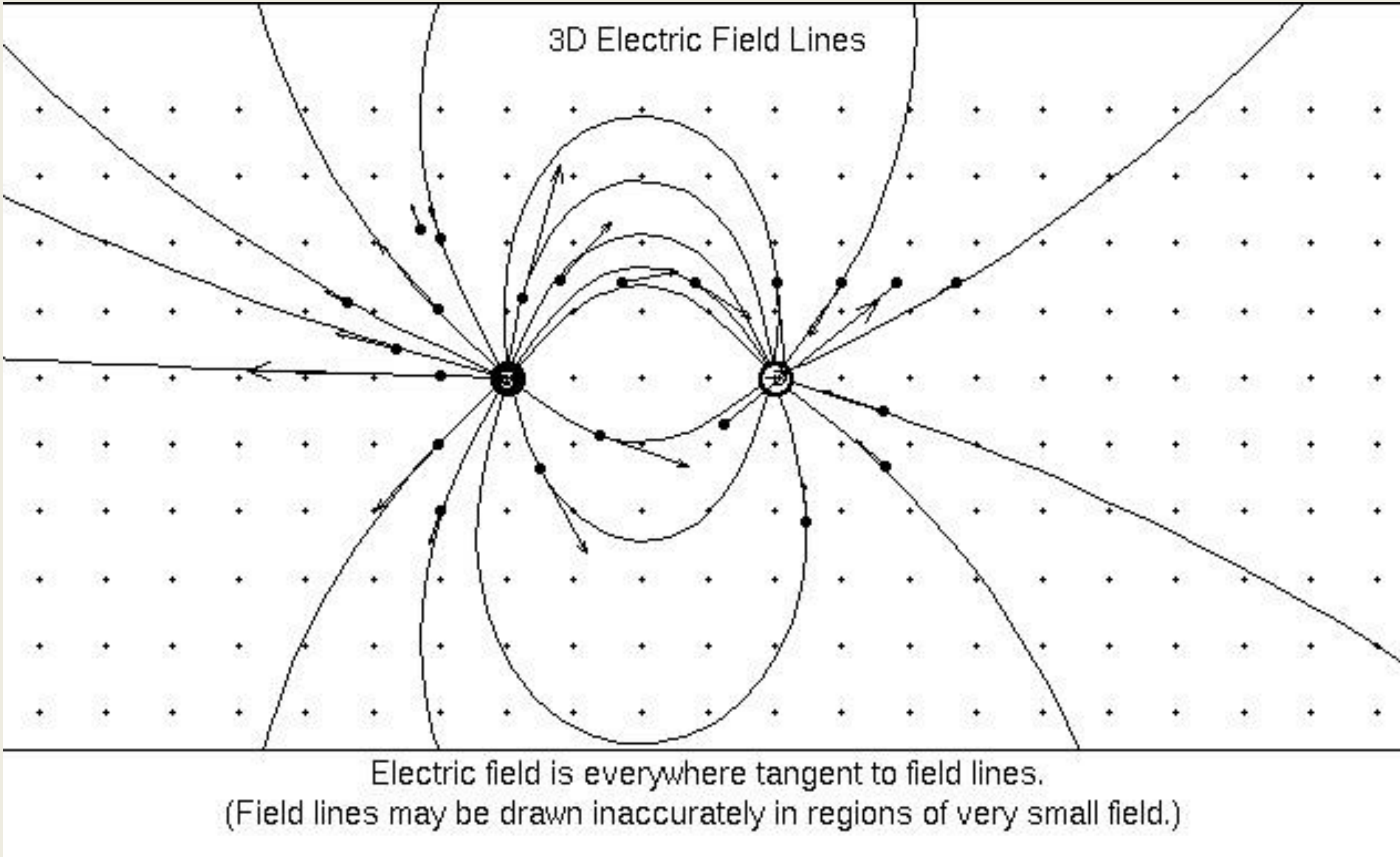
Q puntual negativa: las líneas de campo son radiales y entrantes a la carga

Para distribuciones simples (dipolo: dos cargas puntuales del mismo valor y signo opuesto), la representación vectorial gráfica se complica

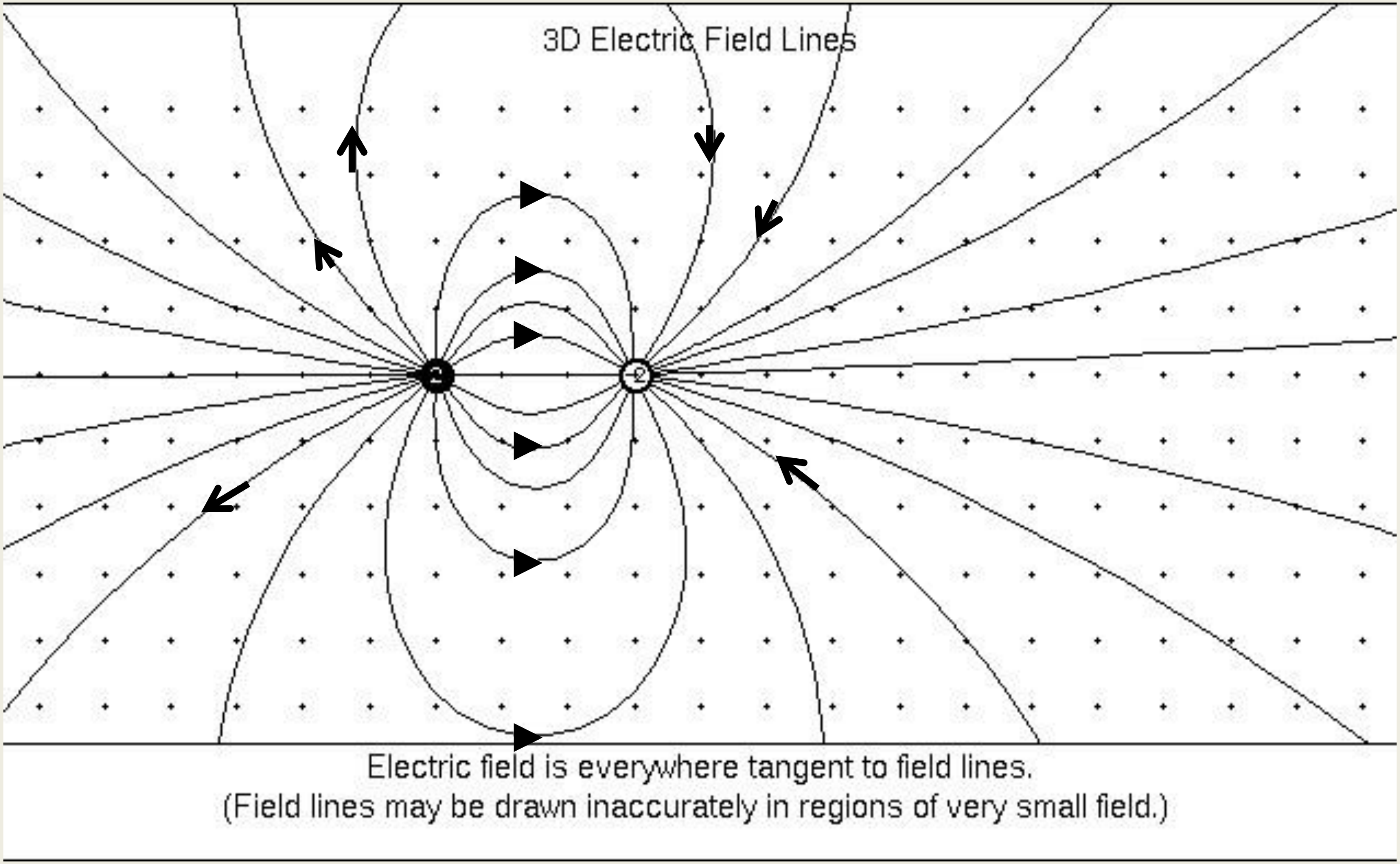


Otra forma: dibujar líneas que en c/ punto sean tangentes al CE calculado en el mismo

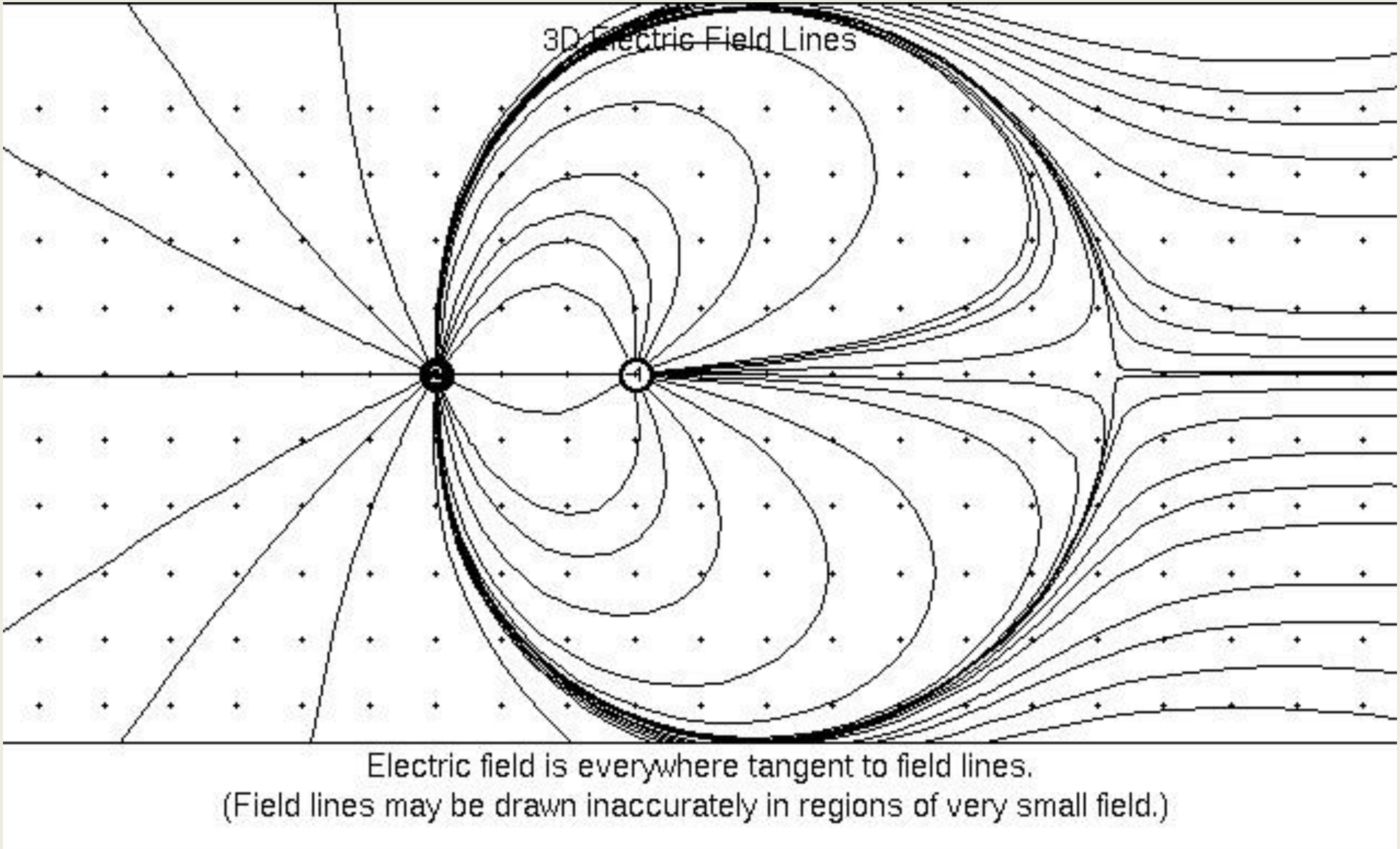
(líneas de campo)



Ejemplo de líneas de campo de un dipolo:
todas las líneas que salen de la carga positiva entran en la negativa



Ejemplo de líneas de campo de un dipolo asimétrico: por cada línea que entra en la carga negativa, salen dos de la positiva



Las líneas de campo son representaciones parciales pero útiles del campo eléctrico

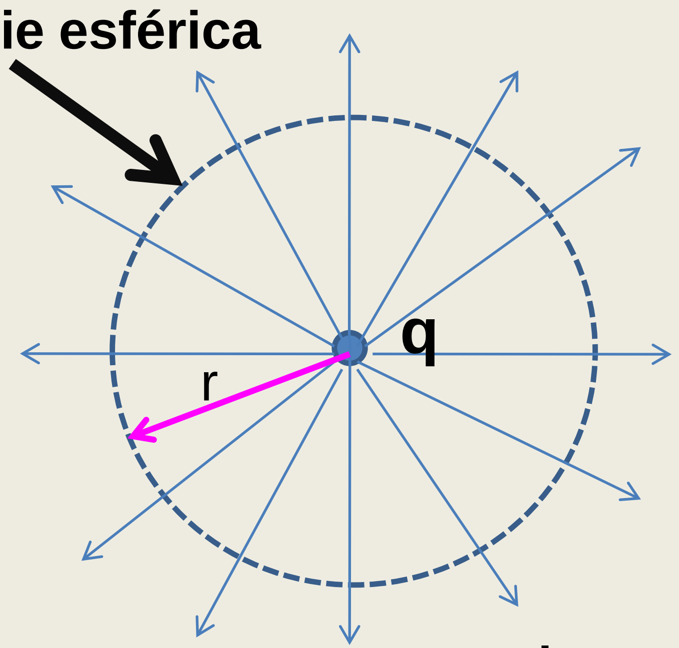
Las líneas de campo se pueden dibujar con las siguientes reglas:

- Las líneas deben empezar en una carga positiva (**fuente**) y terminar en una carga negativa (**sumidero**)

- Las líneas de campo nunca se cruzan (**campo monovaluado**)

- El **número total de líneas** de campo que salen o entran a una carga deben ser **proporcionales al valor de la carga**

Proporcionalidad entre nº total de líneas (N) y valor de la carga $N = \alpha\, q$



$$\eta = \frac{N}{\acute{a}rea} = \frac{N}{4\pi r^2} = \frac{\alpha\, q}{4\pi r^2}$$

Densidad de líneas

Pero el módulo del campo para una carga puntual es:

$$E = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \Rightarrow \eta = \alpha\, \varepsilon_0\, E$$

Si: $\alpha = \dfrac{1}{\varepsilon_0} \Rightarrow \eta = E$

Así, la densidad de líneas es igual a la intensidad del campo: cuanto más "apretadas", mayor es el campo eléctrico en ese punto.

¿Cuántas líneas de campo debemos dibujar por unidad de carga?

$$N = \alpha\, q = \frac{1}{\varepsilon_0}\, q \approx 10^{11}\, q$$

Si q = 1μC N = 10^{5} $\Rightarrow$

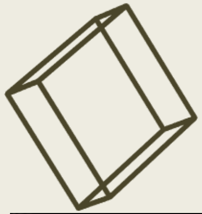
Si q = 1nC N = 10^{2} $\Rightarrow$

Volvemos a electrostática: haciendo un ejercicio de abstracción, podemos definir el flujo del campo electrostático sobre una superficie abierta cualquiera:

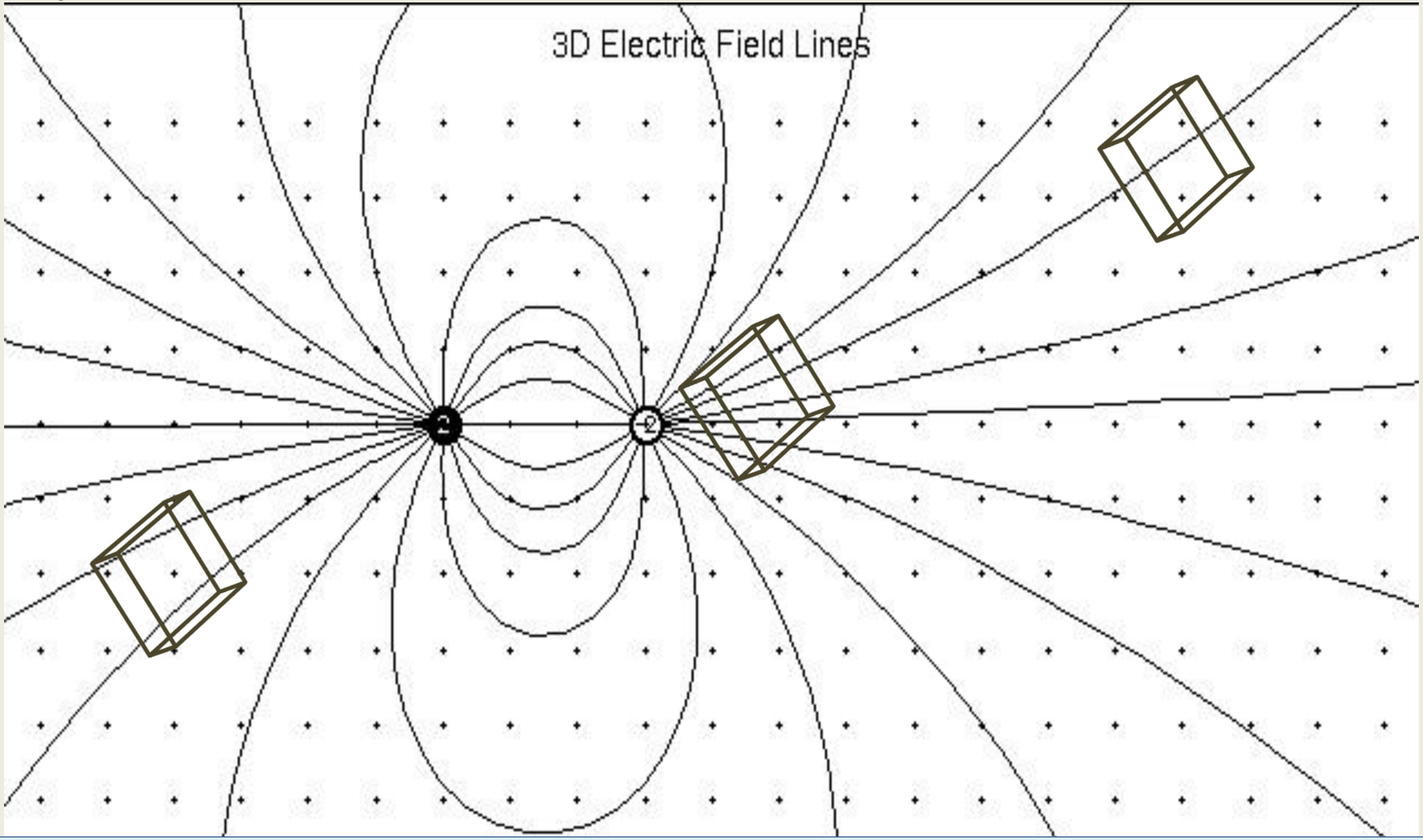
$$\Phi = \iint_A \vec{E} \bullet d\vec{a} = \iint_A E \, da \cos(\theta) = \iint_A \eta \, da'$$

Nº total de líneas que atraviesan la superficie A

Si el flujo del CE cuenta el nº de líneas que atraviesan un área y el nº total de líneas es proporcional a la carga que las origina, ¿existirá alguna relación entre Φ y q?



"medidor" de nº de líneas de campo, de área $A = 1m^2$ (por ejemplo)



Si el área A es pequeña $\rightarrow E \approx cte \rightarrow N = \eta \cdot A = E \cdot A$

Dipolo

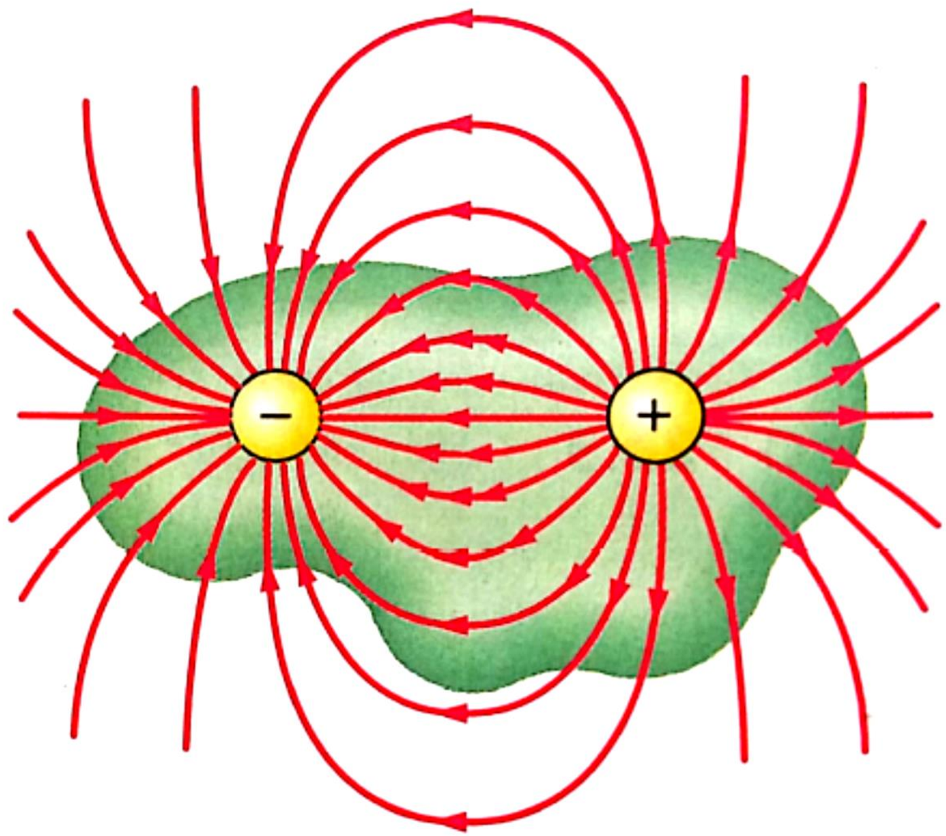
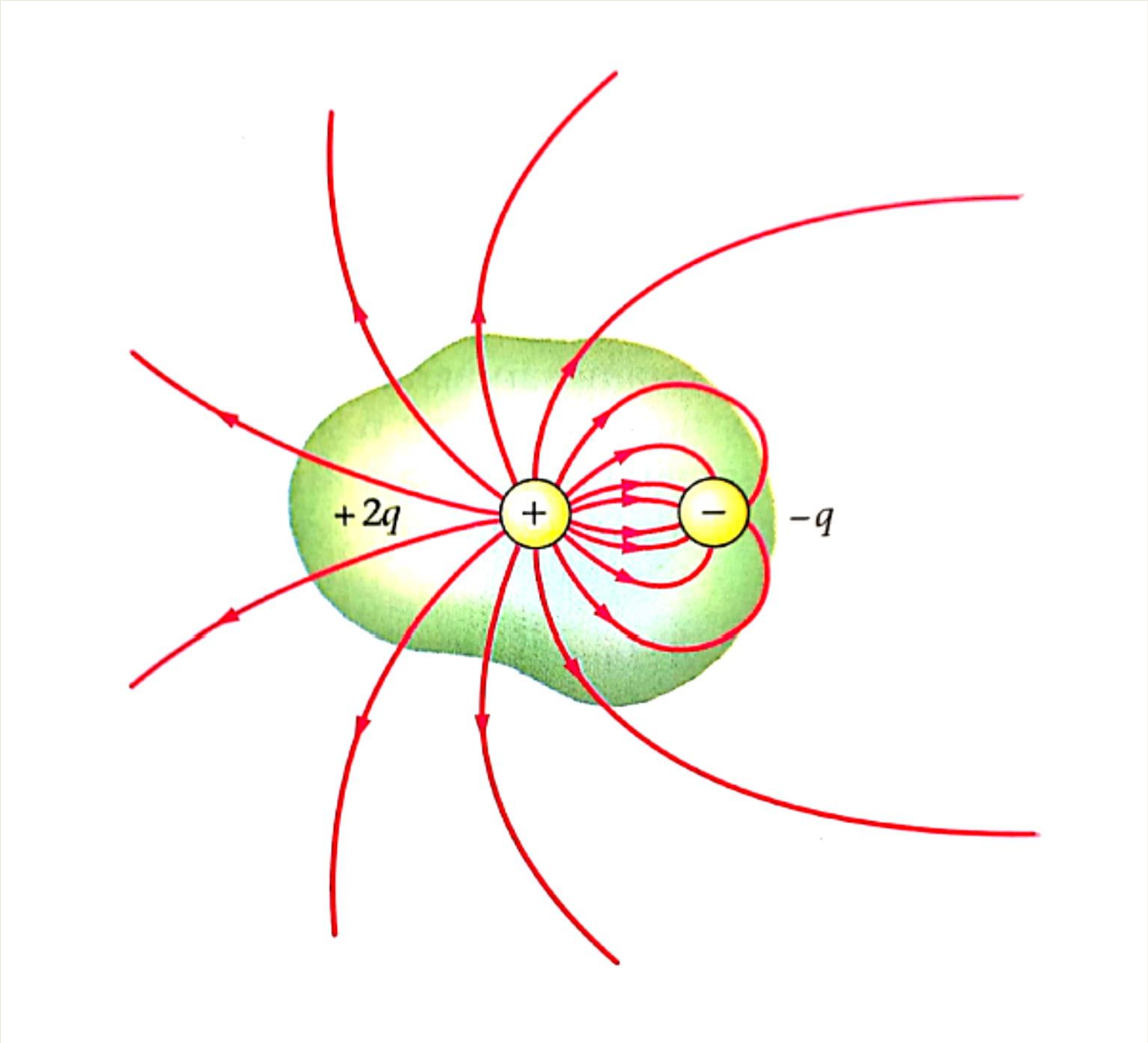


Figura 23.10 Dipolo eléctrico encerrado en una superficie de forma arbitraria. El número de líneas que abandonan la superficie es exactamente igual al número de líneas que entran en ella sin que importe donde se dibuje la superficie, siempre que se encierren dentro de ella ambas cargas.

Todas las líneas de campo eléctrico que salen de la carga positiva , entran en la carga negativa. Si encerramos a AMBAS cargas dentro de una superficie CERRADA CUALQUIERA, el flujo neto será NULO.

Paul Tipler, “Física para la Ciencia y la Tecnología”, Vol 2, 4ta edición. Editorial Reverté.

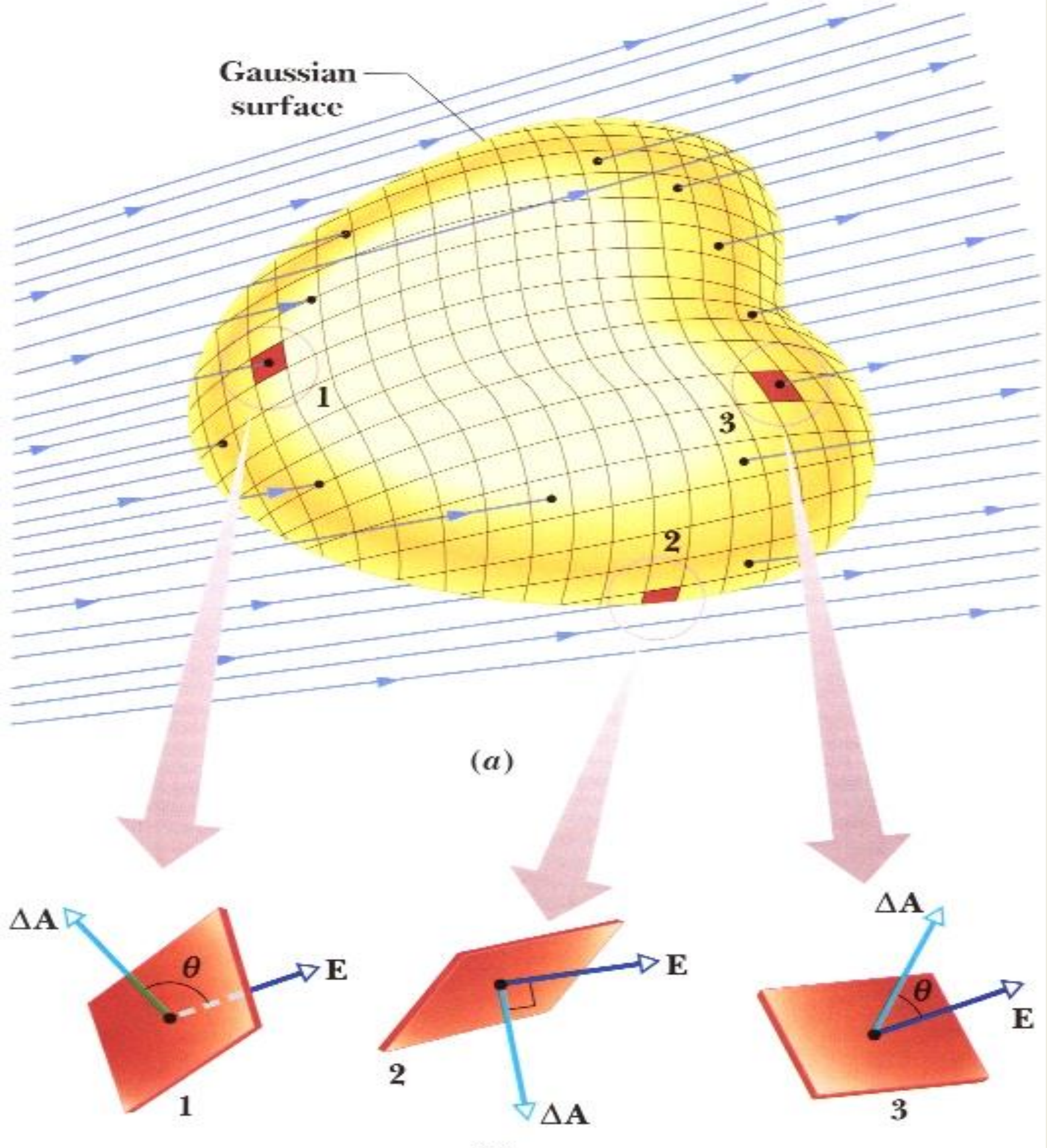
Dipolo asimétrico



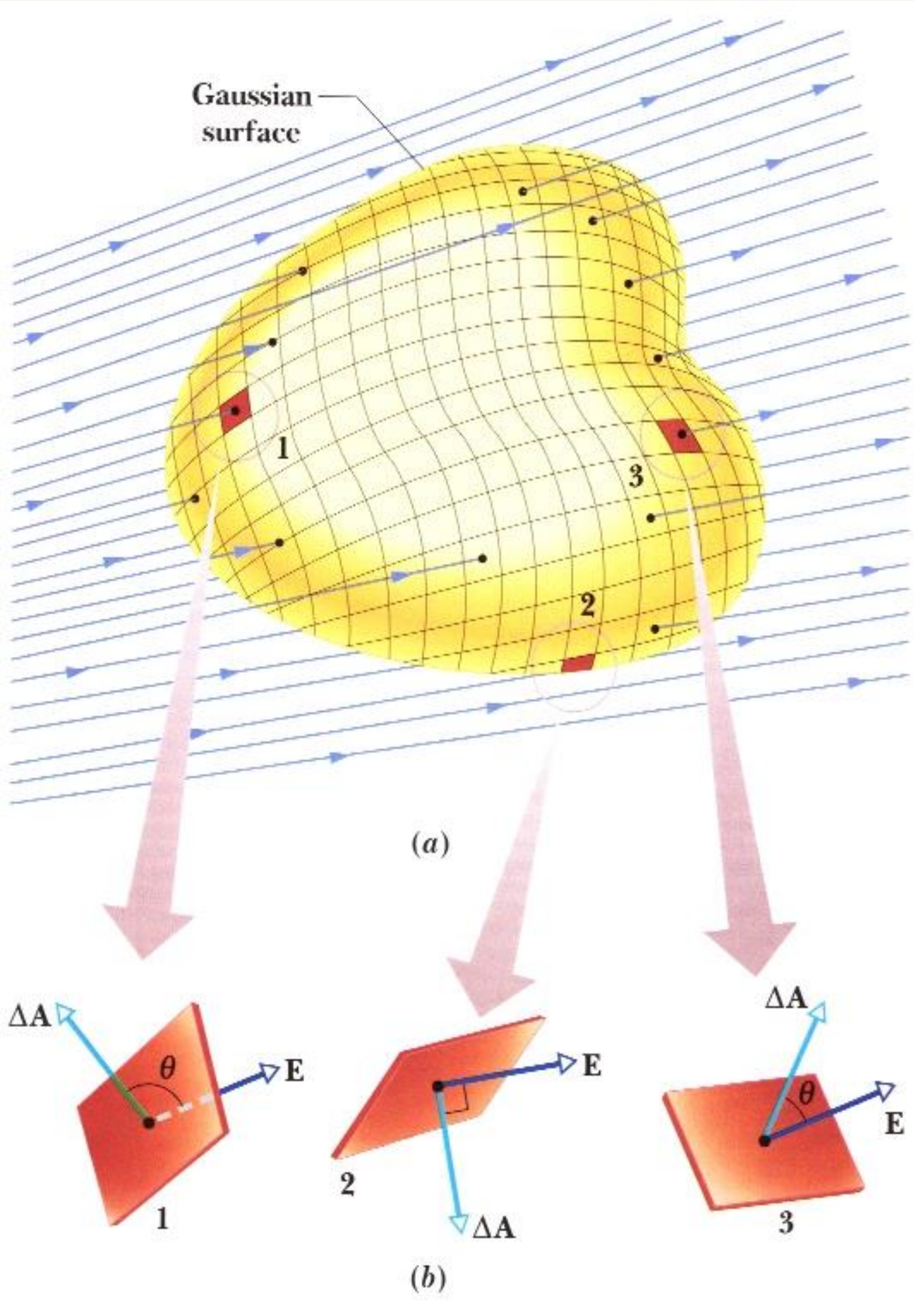
Las líneas de campo eléctrico que terminan en (-q) o bien no salen de la superficie o bien salen y vuelven a entrar.

El número neto de líneas que salen es el que corresponde a una carga neta encerrada de: 2q –q = q

Paul Tipler, “Física para la Ciencia y la Tecnología”, Vol 2, 4ta edición. Editorial Reverté.



(a)
(b)

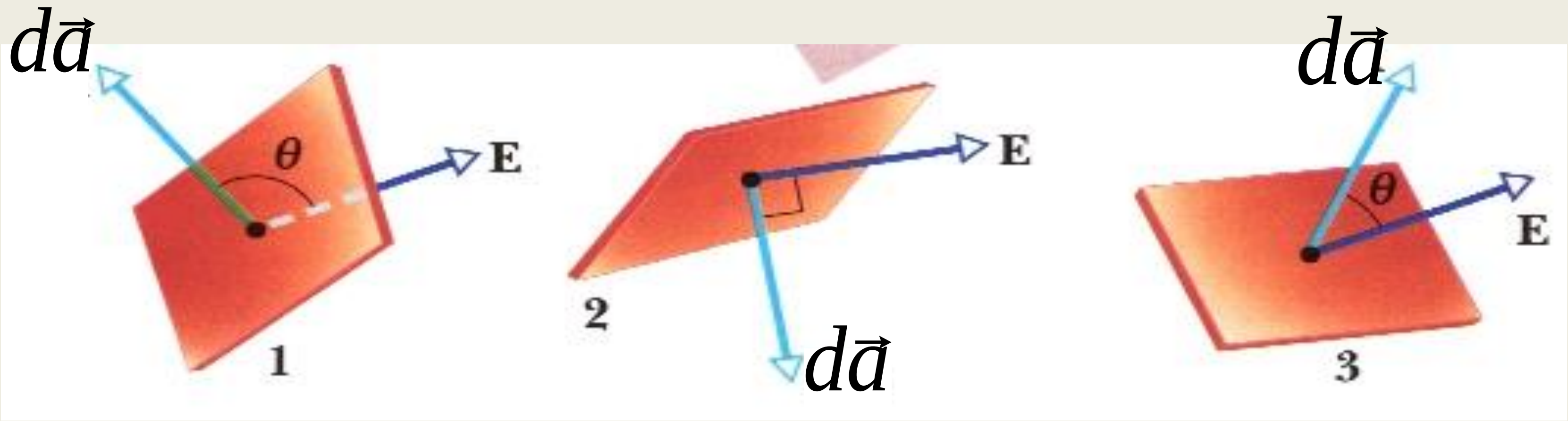


Para medir el nº total de líneas, supongamos una superficie cerrada arbitraria dentro de un campo eléctrico.

El teorema de Gauss afirma que el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada es proporcional a la carga neta en el interior de dicha superficie

$$\Phi = \oint\!\!\oint_{s} \vec{E} \bullet d\vec{a} = \frac{q_{neta}}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{a} = \frac{q_{neta}}{\varepsilon_0}$$



$$\oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{a} = \oiint_S \left|\vec{E}\right| \left|d\vec{a}\right| \cos(\theta)$$

En general, varían para cada $d\vec{a}$

Integral doble sobre la superficie cerrada S

Carga neta dentro de la superficie cerrada S

$$\Phi = \oint\!\!\oint_S \vec{E} \bullet d\vec{a} = \frac{q_{neta}}{\varepsilon_0}$$

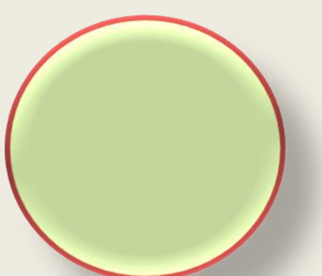
Superficie cerrada S (su forma es arbitraria)

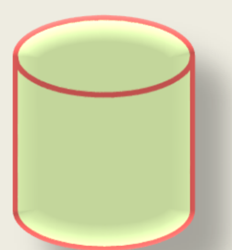
Campo eléctrico total debido a todas las cargas

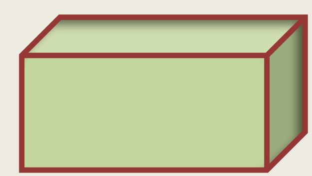
$$\oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{a} = \oiint_S \left|\vec{E}\right| \left|d\vec{a}\right| \cos(\theta)$$

Si el problema tiene alta simetría , podemos elegir S de tal modo que $\left|\vec{E}\right|$ y $\cos(\theta)$ sean constantes para todos los $\left|d\vec{a}\right|$

Simetría esférica	Simetría cilíndrica	Simetría plana
Carga puntual Esfera cargada	Alambre cargado Cilindro cargado	Plano cargado



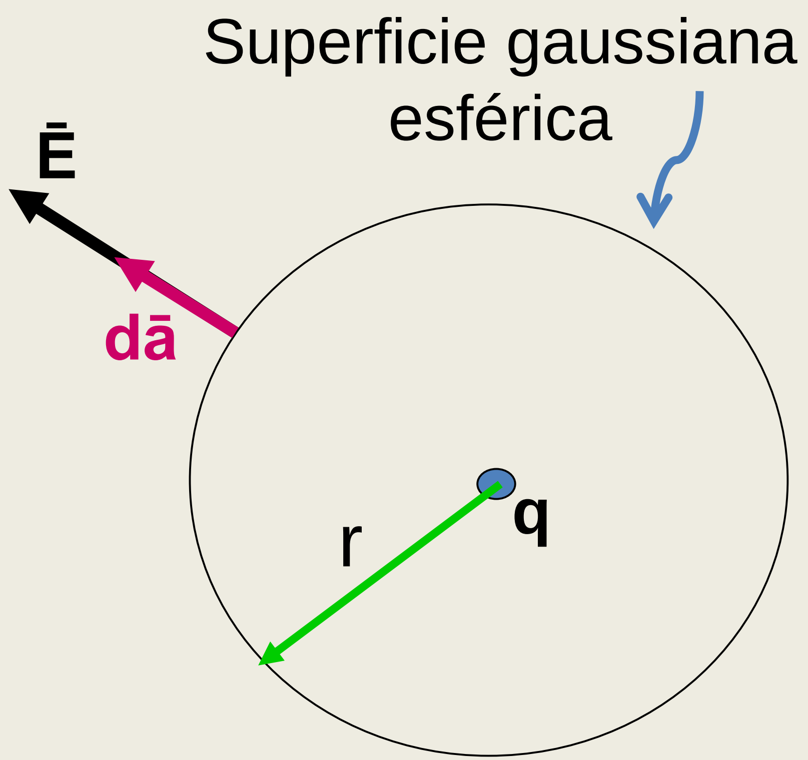




Resto de la Práctica 3

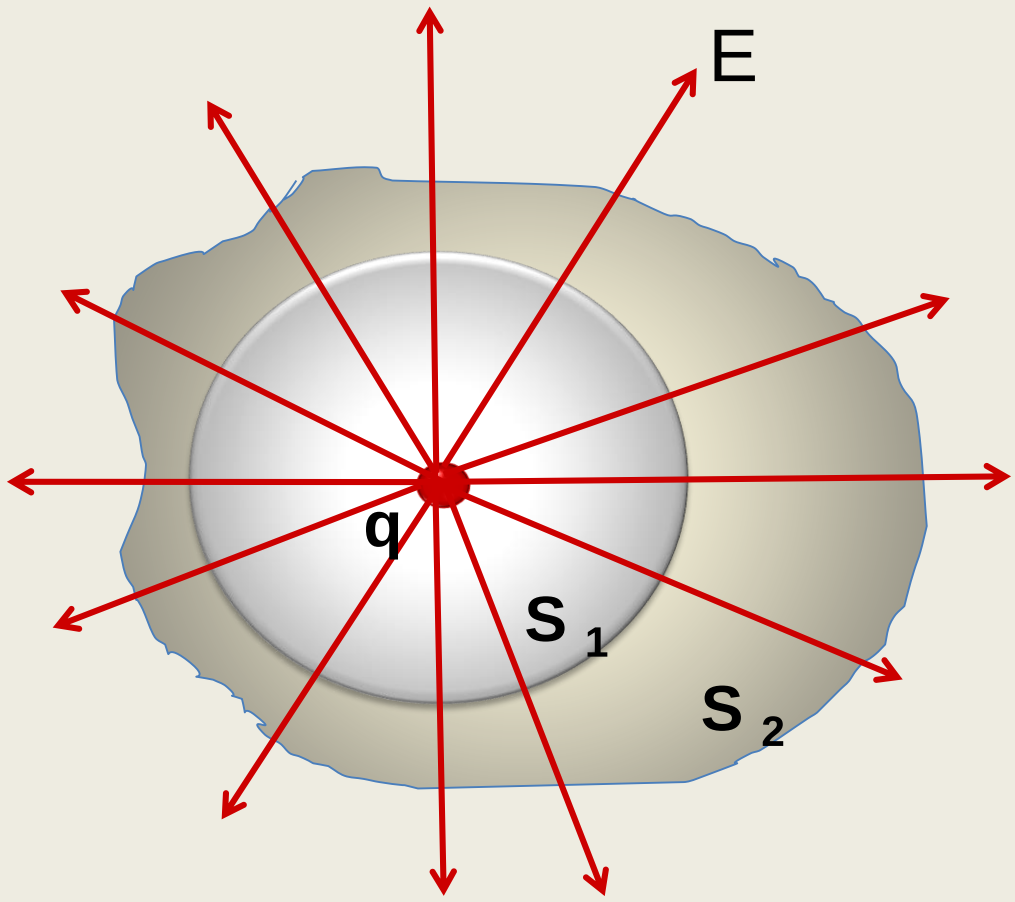
En todos los puntos de la superficie gaussiana, Ē y dā son paralelos, $\theta = 0$

Además, <u>el módulo de E sólo depende de r, por lo que será constante en todos los puntos de la superficie</u> esférica S:



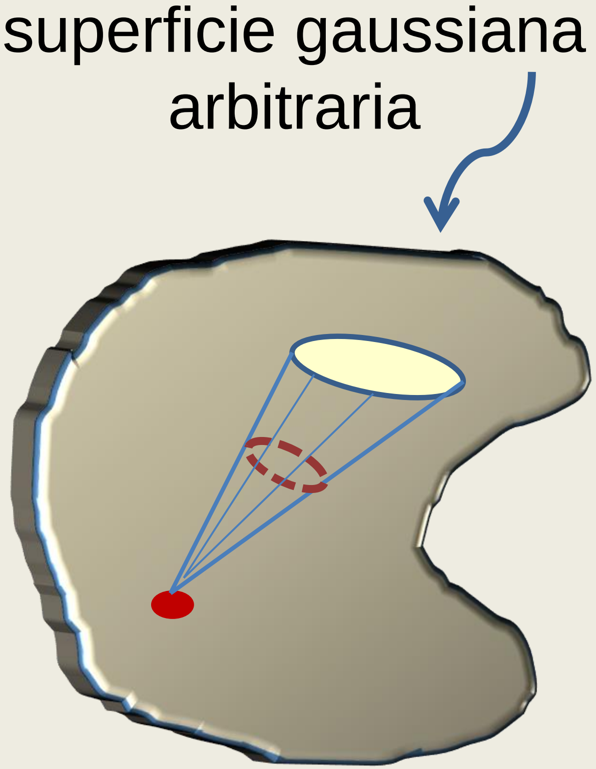
$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{a} = E \oiint_S da = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

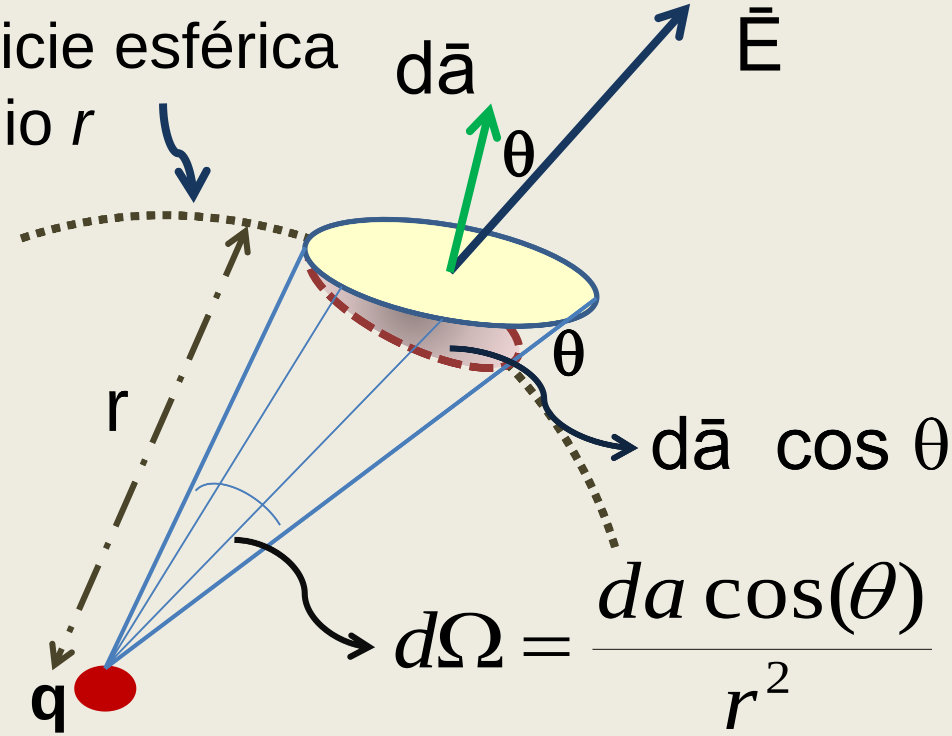
Nº de líneas que atraviesa S_1 : $\Phi_1 = q/\varepsilon_0$



Nº de líneas que atraviesa S_2 = Nº de líneas que atraviesa S_1 = $q/\varepsilon_0 = \Phi_2$

La ley de Gauss vale para cualquier superficie cerrada





$$d\Omega = \frac{da\cos(\theta)}{r^2}$$

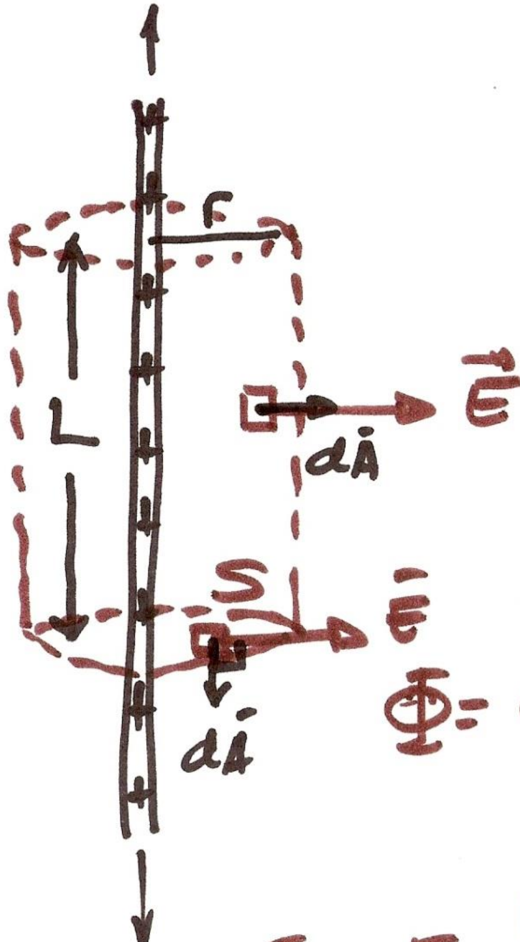
Diferencial de ángulo sólido subtendido por ***da*** **y por** ***da cos(θ)***

$$d\Phi = \vec{E}\bullet d\vec{a} = E\; da\cos(\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}da\cos(\theta) \qquad d\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\;}d\Omega$$

$$= d\Omega$$

$$\Phi = \oiint_S d\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\;}\int_0^{4\pi} d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}4\pi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

CE de una recta de carga x Ley Gauss



λ: densidad lineal de carga.

Por simetría: "cilíndrica": E solo tiene componente radial, módulo cte para r cte

$\therefore$ Sup. Gaussiana: cilindro

$$\Phi = \oint\!\!\!\oint_S \bar{E} . d\vec{A} = \cancel{\underbrace{\iint E \, dA \cos \underbrace{\pi/2}_{=0}}_{Tapas}} + \underbrace{\iint E \, dA \underbrace{\cos 0}_{=1}}_{Lateral}$$

$$\Phi = E \iint_{Lat} dA = E \, 2\pi r L = \frac{q_{neta}}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore \boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0} \frac{1}{r}}$$