Funciones elementales

Función exponencial compleja

La identidad de Euler establece para todo $\theta \in \mathbb{R}$: $\quad e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$

Queremos darle un significado a e^z para $z = x + iy \in \mathbb{C}$, de modo que se verifique la identidad de Euler y que cuando z sea un número real obtengamos la función exponencial real. A la vez, quisiéramos que para e^z se mantenga la regla del "producto de potencias de igual base". Todo esto se logra con la siguiente definición:

$$\boldsymbol{e^z} = e^{x+iy} \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{e^x}_{\substack{exponencial\\ real}} \cdot e^{iy} = \boldsymbol{e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)}$$

Claramente $f(z) = e^z$ es una función cuyo dominio es $\mathbb{C}$. Sus compone $\mathbb{C}$ ntes $u(x,y) = \operatorname{Re}(e^z) = e^x \cos y$; $v(x,y) = \operatorname{Im}(e^z) = e^x \operatorname{sen} y$ son continuas en $\mathbb{R}^2$. Luego, $D_{cont}(f) =$

<u>Ejemplo</u>:

$$e^{-1+i\pi} = e^{-1}e^{i\pi} = e^{-1}(\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi) = -e^{-1}$$
$$e^{2-i} = e^2 e^{-i} = e^2(\cos(-1) + i \operatorname{sen}(-1)) = e^2(\cos 1 - i \operatorname{sen} 1)$$

La función exponencial compleja es derivable en todo el plano complejo y por lo tanto analítica en $\mathbb{C}$. Basta notar que $u(x,y) = \operatorname{Re}(e^z) = e^x \cos y$; $v(x,y) = \operatorname{Im}(e^z) = e^x \operatorname{sen} y$ tienen derivadas parciales de

primer orden continuas en $\mathbb{R}^2$ y que las ecuaciones CR: $\begin{cases} e^x \cos y = e^x \cos y \\ -e^x \operatorname{sen} y = -e^x \operatorname{sen} y \end{cases}$

se verifican en todo $\mathbb{R}^2$. Además:

$$f'(z) = \frac{d}{dz}(e^z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y = e^z$$

Propiedades elementales

- Si $z = x + iy$ entonces $|e^z| = e^x$, $\arg(e^z) = \{y + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$
- $e^z \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$. En efecto: $|e^z| = e^x > 0$.
- e^z coincide con la exponencial real $\forall z \in \mathbb{R}$. Si $z = x + iy$ con $y \neq 0$ entonces

$$e^z = e^{x+i0} = e^x e^{i0} = e^x(\cos 0 + i\, sen\, 0) = e^x$$

- $e^z e^w = e^{z+w}$; $e^{-w} = \frac{1}{e^w}$; $\frac{e^z}{e^w} = e^{z-w}$; $(e^z)^n = e^{nz}$ si $n \in \mathbb{Z}$.

Por ejemplo, si $b, d \in \mathbb{R}$, ya se probó que al multiplicar complejos se multiplican los módulos y se suman los argumentos. Entonces si $z = a + ib$, $w = c + id$ se tiene $b \in \arg(e^z)$ y $d \in \arg(e^w)$ resulta $e^{ib}e^{id} = e^{i(b+d)}$. Además, por la propiedad de la exponencial real: $e^a e^c = e^{a+c}$.

Luego,

$$e^z e^w = |e^z|e^{ib}|e^w|e^{id} = |e^z||e^w|e^{i(b+d)} = e^a e^c e^{i(b+d)} = e^{a+c}e^{i(b+d)} = e^{z+w}$$

- $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$ pues si $z = x + iy$ entonces

$$e^{\bar{z}} = e^{x-iy} = e^x e^{-iy} = e^x(\cos(-y) + i\,\mathrm{sen}(-y)) = e^x(\cos y - i\,\mathrm{sen}\,y) =$$

$$= e^x \cos y - ie^x \mathrm{sen}\,y = \overline{e^x \cos y + ie^x \mathrm{sen}\,y} = \overline{e^x(\cos y + i\,\mathrm{sen}\,y)} = \overline{e^z}$$

- e^z es periódica de período $2\pi i$ pues $e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z$ ya que $e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i\,\mathrm{sen} 2\pi = 1 + i0 = 1$

Ejemplo: Hallar $D_{ana}(f)$. Calcular la derivada donde exista.

a) $f(z) = \frac{e^z}{e^{iz}+1}$ b) $f(z) = \frac{1}{e^z+ie^{-z}}$ c) $f(z) = e^{\bar{z}}$ d) $f(z) = \bar{z}e^z$ e) $f(z) = ze^{\bar{z}}$ f) $f(z) = \frac{e^{1/z}}{e^z-4e^{-z}+3}$

Rta

a) $f(z) = \frac{e^z}{e^{iz}+1}$

Las funciones $N(z) = e^z, T(z) = e^{iz} + 1$ son analíticas en $\mathbb{C}$, la primera por ser polinómica y la segunda porque es suma de la constante 1 (analítica en $\mathbb{C}$) con la función e^{iz} (analítica en $\mathbb{C}$ por ser composición de e^z con iz, ambas analíticas en $\mathbb{C}$).

Como $f(z) = \frac{N(z)}{T(z)}$ es cociente de analíticas, resulta analítica en $D_{ana}(f) = \mathbb{C} - \{z: T(z) = 0\}$

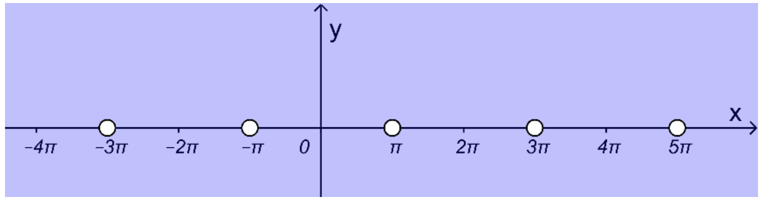
Se tiene:

$$T(z) = 0 \Leftrightarrow e^{iz} + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{iz} = -1 \Leftrightarrow e^{i(x+iy)} = -1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^{-y+ix} = -1 \Leftrightarrow \left|e^{-y+ix}\right| = |-1| \ \wedge \ \arg\left(e^{-y+ix}\right) = \arg(-1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^{-y} = 1 \ \wedge \ x \in \arg(-1) \Leftrightarrow y = 0 \ \wedge \ x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow z = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Entonces,

$$D_{ana}(f) = \mathbb{C} - \{(2k+1)\pi: \ k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{C} - \{\pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \dots\}$$

Para $z \in D_{ana}(f)$:



$$f'(z) = \frac{e^z\left(e^{iz}+1\right) - e^z e^{iz} i}{(e^{iz}+1)^2} = \frac{(1-i)e^{(1+i)z} + e^z}{(e^{iz}+1)^2}$$

b) $f(z) = \frac{1}{e^z + ie^{-z}}$

La función f es cociente de analíticas en $\mathbb{C}$, el numerador una constante y el denominador $T(z) = e^z + ie^{-z}$ es suma de analíticas.

Además:

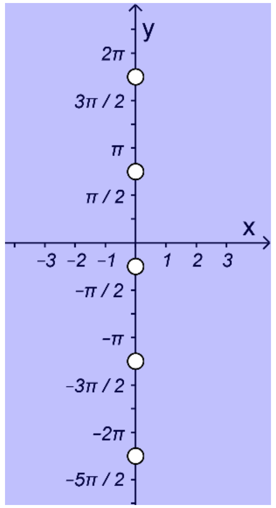
$$T(z) = 0 \Leftrightarrow e^z + ie^{-z} = 0 \Leftrightarrow e^z(e^z + ie^{-z}) = 0 \Leftrightarrow e^{2z} + i = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{2x+i2y} = -i \Leftrightarrow \left|e^{2x+i2y}\right| = |-i| \wedge \ 2y \in \arg(-i) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} = 1 \ \wedge \ 2y = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \ \wedge y = (4k-1)\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = i(4k-1)\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$



Entonces,

$$D_{ana}(f) = \mathbb{C} - \left\{i(4k-1)\frac{\pi}{4} : \ k \in \mathbb{Z}\right\} = \mathbb{C} - \left\{-\frac{i\pi}{4}, \frac{i3\pi}{4}, -\frac{i5\pi}{4}, \frac{i7\pi}{4}, \dots\right\}$$

Para $z \in D_{ana}(f)$:

$$f'(z) = -\frac{e^z - ie^{-z}}{(e^z + ie^{-z})^2}$$

c) $f(z) = e^{\bar{z}}$ es una función continua en $\mathbb{C}$ que no admite derivada en ningún punto. En efecto:

$$f(z) = e^{\bar{z}} = e^{x-iy} = e^{x}e^{-iy} = e^{x}(\cos(-y) + i \operatorname{sen}(-y)) =$$
$$= e^{x}\cos y - ie^{x}\operatorname{sen} y$$

Sus partes real e imaginaria son:

$$u(x,y) = e^{x}\cos y \qquad v(x,y) = -e^{x}\operatorname{sen} y$$

cuyas derivadas parciales están dadas por:

$$u_x(x,y) = e^{x}\cos y \qquad v_x(x,y) = -e^{x}\operatorname{sen} y$$
$$u_y(x,y) = -e^{x}\operatorname{sen} y \qquad v_y(x,y) = -e^{x}\cos y$$

Condiciones de Cauchy-Riemann (CR):

$$\begin{cases} u_x & = & v_y \\ u_y & = & -v_x \end{cases} \equiv \begin{cases} e^{x}\cos y & = & -e^{x}\cos y \\ -e^{x}\operatorname{sen} y & = & e^{x}\operatorname{sen} y \end{cases} \equiv \begin{cases} 2\cos y & = & 0 \\ 2\operatorname{sen} y & = & 0 \end{cases}$$

Este sistema carece de soluciones. Luego, por la condición necesaria de derivabilidad resulta $D_{der}(f) = \emptyset$. En consecuencia, $D_{ana}(f) = \emptyset$.

d) $f(z) = \bar{z}e^z$

Si $f(z)$ fuera derivable para algún $z \in \mathbb{C}$,

Entonces

$$\bar{z} = \frac{f(z)}{e^z}$$

también lo sería (como cociente de tales, siendo que $e^z \neq 0$ siempre).

Pero ya hemos visto que $\bar{z}$ no es derivable en ningún punto.

Luego, $f(z)$ no puede ser derivable en ningún punto.

Es decir, $D_{der}(f) = \emptyset$ de modo que $D_{ana}(f) = \emptyset$

e) $f(z) = ze^{\bar{z}}$

Si $f(z)$ fuera derivable para algún $z \neq 0$, entonces $e^{\bar{z}} = \frac{f(z)}{z}$ también lo sería (como cociente de tales). Pero en c) vimos que $e^{\bar{z}}$ no es derivable en ningún punto.

Luego, $f(z)$ sólo podría ser derivable en el origen. ¿Lo es?

Una manera sencilla de analizarlo es por definición:

$$f'(0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(0 + \Delta z) - f(0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(\Delta z)}{\Delta z} =$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z \, e^{\overline{\Delta z}}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \, e^{\overline{\Delta z}} = 1$$

Luego, $D_{der}(f) = \{1\}$ de modo que $D_{ana}(f) = \emptyset$

f) $f(z) = \frac{e^{1/(z-1)}}{e^z+3-4e^{-z}}$

El numerador $N(z) = e^{1/(z-1)}$es analítica en $\mathbb{C} - \{1\}$ por ser composición de analíticas.

El denominador $T(z) = e^z + 3 - 4e^{-z}$ es analítico en $\mathbb{C}$ (suma de analíticas).

Luego,

$$D_{ana}(f) = \mathbb{C} - (\{1\} \cup \{z: T(z) = 0\})$$

Planteamos,

$$T(z) = 0 \Leftrightarrow e^z + 3 - 4e^{-z} = 0 \Leftrightarrow e^z(e^z + 3 - 4e^{-z}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (e^z)^2 + 3e^z - 4 = 0 \Leftrightarrow e^z = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} \Leftrightarrow e^z = \frac{-3 \pm 5}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^z = -4 \;\vee\; e^z = 1$$

$$e^z = -4 \Leftrightarrow e^x = 4 \;\wedge\; y \in \arg(-4) \Leftrightarrow x = \ln 4 \wedge \; y = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$$

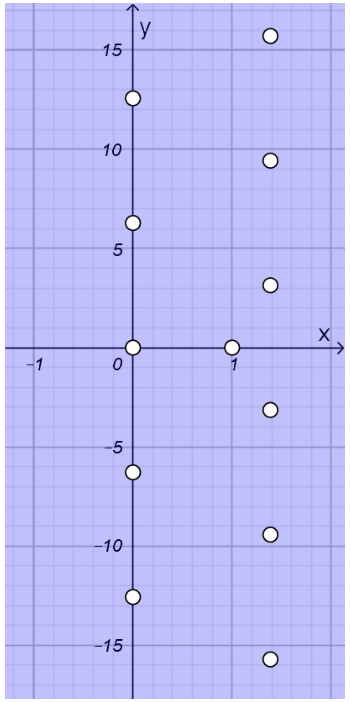
$$\Leftrightarrow z = \ln 4 + i(2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$e^z = 1 \Leftrightarrow e^x = 1 \;\wedge\; y \in \arg(1) \Leftrightarrow x = 0 \wedge \; y = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow z = i2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Luego,

$$D_{ana}(f) = \mathbb{C} - (\{1\} \cup \{\ln 4 + i(2k+1)\pi: k \in \mathbb{Z}\} \cup \{i2k\pi: k \in \mathbb{Z}\})$$



Logaritmos complejos. Función logaritmo principal

Dados $z, w \in \mathbb{C}$, w se dice un logaritmo complejo de z si se verifica $e^{w} = z$.

Es claro que esta ecuación no tiene solución para w si $z = 0$ (pues la exponencial compleja no se anula nunca).

Veamos que cada $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$, posee infinitos logaritmos complejos. Si $z = re^{i\theta}$, (donde $r = |z|$, $\theta \in \arg(z)$) y $w = u + iv$:

$$e^{w} = z \quad \Leftrightarrow \quad e^{u+iv} = re^{i\theta} \Leftrightarrow e^{u}e^{iv} = re^{i\theta} \Leftrightarrow e^{u} = r \;\wedge\; v = \theta + 2k\pi \,, k \in \mathbb{Z} \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow u = \ln r \;\wedge\; v = \theta + 2k\pi \,, k \in \mathbb{Z}$$

Entonces,

$$w = u + iv = \ln r + i(\theta + 2k\pi) \,, k \in \mathbb{Z}$$

Anotaremos $\ln(z)$ al **conjunto de los logaritmos de z** $\in \mathbb{C}, z \neq 0$. Así,

Logaritmo real

Conjunto de los argumentos de z

$$\mathbf{ln}(z) = \{\ln r + i(\theta + 2k\pi) : \; k \in \mathbb{Z}\} = \mathbf{ln}\, \boldsymbol{r} + \boldsymbol{i}\, \mathbf{arg}(\boldsymbol{z}) = \mathbf{ln}|\boldsymbol{z}| + \boldsymbol{i}\, \boldsymbol{arg}(\boldsymbol{z})$$

Notar que $\ln(z)$ no es una función porque para cada $z \neq 0$ no da un único resultado.

Uno de los logaritmos complejos de $z \neq 0$ se obtiene restringiendo $\arg(z)$ a tomar valores en el intervalo $(-\pi, \pi]$. Se obtiene así un único valor, llamado el **logaritmo principal de z**, que denotamos:

Logaritmo real

Argumento principal de z

$$\mathbf{Ln}(\boldsymbol{z}) = \mathbf{ln}\, \boldsymbol{r} + \boldsymbol{i}\, \mathbf{Arg}(\boldsymbol{z}) = \mathbf{ln}\, |\boldsymbol{z}| + \boldsymbol{i}\, \mathbf{Arg}(\boldsymbol{z})$$

Si a cada $z \neq 0$ le asignamos su logaritmo principal, obtenemos la función logaritmo principal $f(z) = \mathrm{Ln}(z)$, cuyo dominio es $\mathbb{C} - \{0\}$.

Ejemplo:

$$\ln(-1+i) = \ln|-1+i| + i\arg(-1+i) = \ln(\sqrt{2}) + i\left(\frac{3}{4}\pi + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$$

$$\mathrm{Ln}(-1+i) = \ln(\sqrt{2}) + i\frac{3}{4}\pi$$

$$\ln(-i) = \ln|-i| + i\arg(-i) = \ln(1) + i\left(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right) = i\left(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$$

$$\mathrm{Ln}(-i) = -i\frac{\pi}{2}$$

Observar

Es sencillo probar que:

$$\ln(z_1 z_2) = \ln(z_1) + \ln(z_2)$$

$$\ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \ln(z_1) - \ln(z_2)$$

Por ejemplo:

$$\ln((-1)(-1)) = \ln 1 = i2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\ln(-1) + \ln(-1) = \{i(2k+1)\pi + i(2h+1)\pi : k, h \in \mathbb{Z}\} = \{i2l\pi : l \in \mathbb{Z}\} = \ln((-1)(-1))$$

Sin embargo, en general para $n \in \mathbb{Z}$:

$$\ln(z^n) \neq n \ln z$$

Por ejemplo:

$$\ln\left((-1)^2\right) = \ln 1 = \{i2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} = \{0, \pm i2\pi, \pm i4\pi, \pm i6\pi, \pm i8\pi, \dots\}$$

$$2\ln(-1) = \{i2(2k+1)\pi \neq : k \in \mathbb{Z}\} = \{\pm i2\pi, \pm i6\pi, \pm i10\pi, \dots\} \neq \ln\left((-1)^2\right)$$

En general:

$$\mathrm{Ln}(z_1 z_2) \neq \mathrm{Ln}(z_1) + \mathrm{Ln}(z_2)$$

$$\mathrm{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \neq \mathrm{Ln}(z_1) - \mathrm{Ln}(z_2)$$

$$\mathrm{Ln}(z^n) \neq n\,\mathrm{Ln}\,z$$

<u>Ejemplo</u>:

$$\mathrm{Ln}((-1)(-1)) = \mathrm{Ln}\,1 = 0 \qquad \mathrm{Ln}(-1) + \mathrm{Ln}(-1) = i\pi + i\pi = 2i\pi \neq \mathrm{Ln}((-1)(-1))$$

$$\mathrm{Ln}\left(\frac{1+i}{i}\right) = \mathrm{Ln}(1-i) = \ln|1-i| + i\,\mathrm{Arg}(1-i) = \ln\sqrt{2} - \frac{i\pi}{4}$$

$$\mathrm{Ln}(1+i) - \mathrm{Ln}(i) = \ln|1-i| + i\,\mathrm{Arg}(1-i) - (\ln|i| + i\,\mathrm{Arg}(i)) = \ln\sqrt{2} - \frac{i3\pi}{4} \neq \mathrm{Ln}\left(\frac{1+i}{i}\right)$$

$$\mathrm{Ln}\left((-1)^2\right) = \mathrm{Ln}\,1 = 0 \qquad 2\mathrm{Ln}(-1) = i2\pi \neq \mathrm{Ln}\left((-1)^2\right)$$

Ejemplo: Hallemos las soluciones de

a) $2\,\mathrm{Ln}(iz) = -i\pi$ b) $\mathrm{Ln}(2z - 5i) = i\pi + \mathrm{Ln}(iz)$

Rta

a) $2\,\mathrm{Ln}(iz) = -i\pi \iff \mathrm{Ln}(iz) = -\frac{i\pi}{2} \iff iz = e^{-\frac{i\pi}{2}} \iff iz = -i \iff z = -1$

b) $\mathrm{Ln}(2z - 5i) = i\pi + \mathrm{Ln}(iz) \Rightarrow e^{\mathrm{Ln}(2z-5i)} = e^{i\pi + \mathrm{Ln}(iz)} \Rightarrow 2z - 5i = -iz \Rightarrow$

$$\Rightarrow (2+i)z = 5i \Rightarrow z = \frac{5i}{2+i} \Rightarrow z = \frac{5i(2-i)}{(2+i)(2-i)} \Rightarrow z = 1 + 2i$$

Sin embargo, $z = 1 + 2i$ no es solución de la ecuación dada. En efecto:

$$\mathrm{Ln}(2z - 5i)\Big|_{z=1+2i} = \mathrm{Ln}(2(1+2i) - 5i) = \mathrm{Ln}(2 - i) = \ln\sqrt{5} + i\,\mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$i\pi + \mathrm{Ln}(iz)\Big|_{z=1+2i} = i\pi + \mathrm{Ln}(i(1+2i)) = i\pi + \mathrm{Ln}(-2+i)$$

$$= i\pi + \ln\sqrt{5} + i\left(\pi + \mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 2i\pi + \ln\sqrt{5} + i\,\mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

Así que la ecuación $\mathrm{Ln}(2z - 5i) = i\pi + \mathrm{Ln}(iz)$ no tiene soluciones.

Propiedades de los logaritmos complejos

logaritmo real   exponencial real

- $\boxed{w \in \ln z \iff e^{w} = z}$
- Si $z \neq 0$: $\quad e^{\ln z} = z \quad ; \quad e^{\operatorname{Ln} z} = z$
- $\ln(e^{z}) = z + i2k\pi\,, k \in \mathbb{Z}$ pues $\ln(e^{z}) = \ln|e^{z}| + \mathrm{i}\arg(e^{z}) = \underbrace{\ln(e^{x})}_{x} + i(y + 2k\pi) =$

$$= \underbrace{x + iy}_{z} + i2k\pi = z + i2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

- $\operatorname{Ln}(e^{z}) = z \iff -\pi < \operatorname{Im}(z) \leq \pi$
- El dominio de definición de la función $f(z) = \operatorname{Ln} z$ es $D_{def}(f) = \mathbb{C} - \{0\}$
- $f(z) = \operatorname{Ln} z$ extiende a la función real $\ln x$. Es decir, si $y = Im(z) = 0$ y $x = Re(z) > 0$, entonces $\operatorname{Ln} z = \ln x$
- Hemos visto en general que $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ es continua en $z = x + iy$ si y sólo si $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son continuas en (x,y).

  Para $f(z) = \operatorname{Ln}(z) = \ln|z| + i\operatorname{Arg}(z)$ se tiene

  $u(x,y) = \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$ es continua en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

  $v(x,y) = \operatorname{Arg}(z)$ es continua en $\mathbb{R}^2 - \{(x,y): y = 0 \ \wedge \ x \leq 0\}$

  Entonces, $f(z) = \operatorname{Ln}(z)$ es continua en $\mathbb{C} - \{x + iy:\ y = 0 \ \wedge \ x \leq 0\}$.

  Siendo discontinua en $\{x + iy \in \mathbb{C} :\ y = 0 \ \wedge \ x \leq 0\}$, no puede ser derivable allí.

Ejemplo: aplicando logaritmos complejos resolver las siguientes ecuaciones.

a) $e^{iz}+1=0$ b) $e^{z}+ie^{-z}=0$ c) $e^{z}+3-4e^{-z}=0$

Rta

a)

$$e^{iz}+1=0 \iff e^{iz}=-1 \iff iz\in\ln(-1) \iff iz\in\ln|-1|+i\arg(-1) \iff$$
$$\iff iz=\ln 1+i\,(2k+1)\pi, k\in\mathbb{Z} \iff$$
$$\iff iz=i\,(2k+1)\pi, k\in\mathbb{Z} \iff z=(2k+1)\pi, k\in\mathbb{Z}$$

b)

$$e^{z}+ie^{-z}=0 \iff e^{z}(e^{z}+ie^{-z})=0 \iff e^{2z}+i=0 \iff e^{2z}=-i \iff 2z\in\ln(-i) \iff$$
$$\iff 2z\in\ln|-i|+i\arg(-i) \iff$$
$$\iff 2z=\ln 1+i\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right), k\in\mathbb{Z} \iff$$
$$\iff 2z=i(4k-1)\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z} \iff z=i(4k-1)\frac{\pi}{4}, k\in\mathbb{Z}$$

c)

$$e^{z}+3-4e^{-z}=0 \iff e^{z}(e^{z}+3-4e^{-z})=0 \iff (e^{z})^2+3e^{z}-4=0 \iff e^{z}=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{2} \iff$$
$$\iff e^{z}=1 \lor e^{z}=-4$$

$$e^{z}=1 \iff z\in\ln(1) \iff z\in\ln|1|+i\arg(1) \iff z=i2k\pi, k\in\mathbb{Z}$$
$$e^{z}=-4 \iff z\in\ln(-4) \iff z\in\ln|-4|+i\arg(-4) \iff z=\ln 4+i(2k+1)\pi, k\in\mathbb{Z}$$

Condiciones suficientes de derivabilidad en coordenadas polares

Sea $f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$ donde $z = x + iy \neq 0.$ Empleando coordenadas polares para z:

$$z = re^{i\theta}, r = |z| > 0, -\pi < \theta = Arg(z) \leq \pi$$

Sean

$$U(r, \theta) = u(r \cos\theta\,, r \operatorname{sen}\theta) \;\; ; \;\; V(r, \theta) = v(r \cos\theta\,, r \operatorname{sen}\theta)$$

Si $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ con $r_0 = |z_0| > 0, -\pi < \theta_0 < \pi,$ y si las derivadas parciales $U_r, U_\theta, V_r, V_\theta$ existen en un entorno de (r_0, θ_0) y son continuas en (r_0, θ_0) y verifican allí las "condiciones de Cauchy-Riemann en polares":

$$\begin{cases} U_r(r_0, \theta_0) & = & \dfrac{1}{r} V_\theta(r_0, \theta_0) \\ V_r(r_0, \theta_0) & = & -\dfrac{1}{r} U_\theta(r_0, \theta_0) \end{cases}$$

entonces $f(z)$ es derivable en z_0 y se verifica:

$$f'(z_0) = e^{-i\theta_0}\big(U_r(r_0, \theta_0) + iV_r(r_0, \theta_0)\big)$$

Ejemplo: Veamos que $D_{\text{der}}(\text{Ln}) = \mathbb{C} - \{x + iy : y = 0 \ \wedge \ \ x \leq 0\}$

Como $f(z) = \text{Ln}(z)$ es discontinua en el origen (por no tener valor allí) y en el semieje real negativo (porque su parte imaginaria $\text{Arg}(z)$ es discontinua allí), en esos puntos no es derivable.

En cualquier otro punto se tiene:

$$f(z) = \text{Ln}(z) = \underbrace{\ln r}_{U(r,\theta)} + i \underbrace{\theta}_{U(r,\theta)} \quad \text{donde } r = |z|, \theta = \text{Arg}(z)$$

$$U_r(r,\theta) = \frac{1}{r} \qquad U_\theta(r,\theta) = 0$$

$$V_r(r,\theta) = 0 \qquad V_\theta(r,\theta) = 1$$

Estas derivadas parciales son continuas en $D = \{\, (r,\theta) : -\pi < \theta < \pi \ \wedge \ \ r > 0\}$. Además, satisfacen las condiciones CR en polares:

$$\begin{cases} U_r(r,\theta) & = \dfrac{1}{r} = & \dfrac{1}{r} V_\theta(r,\theta) \\ V_r(r,\theta) & = 0 = & -\dfrac{1}{r} U_\theta(r,\theta) \end{cases}$$

Por lo tanto, $f(z)$ es derivable en D y se tiene:

$$f'(z) = e^{-i\theta}\big(U_r(r,\theta) + iV_r(r,\theta)\big) = e^{-i\theta}\,\frac{1}{r} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{z}$$

<u>Observar</u>: $f(z) = \text{Ln}(z)$ es analítica en $D_{\text{ana}}(\text{Ln}) = \mathbb{C} - \{x + iy : y = 0 \ \wedge \ \ x \leq 0\}$

Ejemplo: Dada $f(z) = \mathrm{Ln}\,(1 - iz)$ hallar el dominio más amplio $D_{def}(f)$, $D_{ana}(f)$ y calcular la derivada $f'(z)$ donde exista.

Rta

$z \in D_{def}(f)$ sii $1 - iz \neq 0$ sii $z \neq -i$. Entonces, $D_{def}(f) = \mathbb{C} - \{-i\}$

La función $g(z) = 1 - iz$ es analítica en $\mathbb{C}$ y tiene inversa $g^{-1}(w) = \frac{1-w}{i} = -i + iw$ analítica en $\mathbb{C}$. Sea $g(z_0) = w_0$

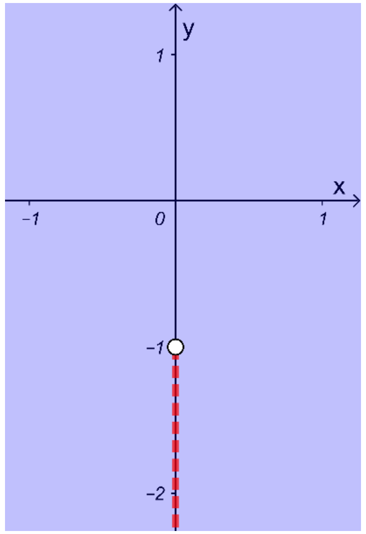
- Si $f \circ g^{-1}$ es analítica en w_0 entonces como g es analítica en z_0, la composición $(f \circ g^{-1}) \circ g = f$ es analítica en z_0.
- Si f es analítica en z_0 entonces como g^{-1} es analítica en w_0, la composición $f \circ g^{-1}$ es analítica en w_0.

Es decir: f es analítica en z_0 si y sólo si $f \circ g^{-1}$ es analítica en $w_0 = g(z_0)$

Observemos que: $f \circ g^{-1} = (\mathrm{Ln} \circ g) \circ g^{-1} = \mathrm{Ln} \circ (g \circ g^{-1}) = \mathrm{Ln}$

Por lo tanto,

$$f \text{ es analítica en } z_0 \text{ si y sólo si } \mathrm{Ln} \text{ es analítica en } w_0 = g(z_0) = 1 - iz_0$$



Así, para hallar el dominio de analiticidad de $f(z) = \mathrm{Ln}\,(1 - iz)$ hay que plantear que $g(z) = 1 - iz$ caiga en el dominio de analiticidad del logaritmo principal Ln.

Dado que: $1 - iz = 1 - i(x + iy) = 1 - ix + y = (1 + y) + i(-x)$

los z para los cuales eso ocurre son los que cumplen: $\mathrm{Im}(1 - iz) = 0 \;\wedge\; \mathrm{Re}(1 - iz) \leq 0$.

Es decir: $-x = 0 \;\wedge\; 1 + y \leq 0$. O sea: $x = 0 \;\wedge\; y \leq -1$. Luego, $D_{ana}(f) = \mathbb{C} - \{x + iy : x = 0\,,\; y \leq -1\}$

Aplicando la regla de la cadena: $\frac{d}{dz}(\mathrm{Ln}\,(1 - iz)) = \frac{1}{1-iz}(-i) = -\frac{i}{1-iz}$

Ejemplo: Dada $f(z) = \frac{1}{2i\ \mathrm{Ln}\,(z) - \pi}$ hallar el dominio más amplio $D_{def}(f)$, $D_{ana}(f)$ y calcular la derivada $f'(z)$ donde exista.

Rta

$$2i\ \mathrm{Ln}\,(z) - \pi = 0 \iff \mathrm{Ln}\,(z) = \frac{\pi}{2i} \iff \mathrm{Ln}\,(z) = -\frac{i\pi}{2} \iff z = e^{-\frac{i\pi}{2}} \iff z = -i$$

Entonces,

$$D_{def}(f) = \mathbb{C} - \{0, -i\}$$

La función $f(z)$ es cociente con numerador analítico en $\mathbb{C}$ (constante).

Si $z \notin \{x + iy : y = 0\,, x \leq 0\}$ entonces $\mathrm{Ln}\,(z)$ es analítica allí. Luego, también lo es el denominador $T(z) = 2i\ \mathrm{Ln}\,(z) - \pi$.

Por ende, $f(z)$ es analítica en $\mathbb{C} - (\{-i\} \cup \{x + iy : y = 0\,, x \leq 0\})$ mientras que no lo es en el resto de puntos. En efecto:

- $f(z)$ es discontinua en $z = i$ porque no está definida en ese punto.
- Sea $z = x + iy$ con $y = 0\,, x \leq 0$. Si $f(z)$ fuera analítica allí, entonces $2i\ \mathrm{Ln}\,(z) - \pi = \frac{1}{f(z)}$ también lo sería (porque $f(z)$ nunca se anula) y por ende también $\mathrm{Ln}\,(z) = \frac{1}{2i}\left(\pi + \frac{1}{f(z)}\right)$. Pero sabemos que $\mathrm{Ln}\,(z)$ no es derivable en tales puntos. Entonces $f(z)$ tampoco lo es.

Así,

$$D_{ana}(f) = \mathbb{C} - (\{-i\} \cup \{x + iy : y = 0\,, x \leq 0\})$$

La derivada es

$$f'(z) = -\frac{2i}{z(2i\ \mathrm{Ln}\,(z) - \pi)^2}$$

Funciones trigonométricas complejas

Identidad de Euler: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$, $\forall\theta \in \mathbb{R}$.

Entonces, $e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\,\mathrm{sen}(-\theta) = \cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta$, $\forall\theta \in \mathbb{R}$.

- Sumando ambas expresiones: $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$
- Restando ambas expresiones: $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\,\mathrm{sen}\,\theta$

Despejando, se obtienen las siguiente identidades $\forall\theta \in \mathbb{R}$:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \mathrm{sen}\,\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Puesto que contamos con la exponencial compleja, resulta natural la definición siguiente, para $\theta \in \mathbb{C}$:

$$\boldsymbol{\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}} \qquad \boldsymbol{\mathrm{sen}\, z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}}$$

Notar que $\cos z$, $\mathrm{sen}\, z$ pasan a ser funciones que extienden al coseno y al seno reales.

Ejemplo:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + i\right) = \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{2}+i\right)} + e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+i\right)}}{2} = \frac{e^{\frac{i\pi}{2}-1} + e^{-\frac{i\pi}{2}+1}}{2} = \frac{e^{\frac{i\pi}{2}}e^{-1} + e^{-\frac{i\pi}{2}}e^{1}}{2} = \frac{ie^{-1} - ie^{1}}{2} = -i\,\mathrm{senh}(1)$$

$$\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4} - i\right) = \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{4}-i\right)} - e^{-i\left(\frac{\pi}{4}-i\right)}}{2i} = \frac{e^{i\pi/4}e - e^{-i\pi/4}e^{-1}}{2i} = -\frac{\sqrt{2}}{4}i\big((1+i)e - (1-i)e^{-1}\big) =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}i\big(\mathrm{senh}(1) + i\cosh(1)\big) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cosh(1) - i\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{senh}(1)$$

Las funciones $\operatorname{sen}(z)$ y $\cos(z)$ son analíticas en todo el plano complejo. Para calcular sus derivadas basta aplicar reglas de derivación.

$$\frac{d}{dz}(\operatorname{sen}(z)) = \cos(z) \qquad \frac{d}{dz}(\cos(z)) = -\operatorname{sen}(z)$$

Por ejemplo:

$$\frac{d}{dz}(\operatorname{sen}(z)) = \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right) = \frac{ie^{iz}-(-i)e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \cos z$$

Propiedades

- $\operatorname{sen}(z) = \operatorname{sen}(x)\cosh(y) + i\cos(x)\operatorname{senh}(y)$
- $\cos(z) = \cos(x)\cosh(y) - i\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(y)$

Por ejemplo:

$$\operatorname{sen}(z) = \frac{e^{-y+ix}-e^{y-ix}}{2i} = \frac{e^{-y}e^{ix}-e^{y}e^{-ix}}{2i} = \frac{e^{-y}(\cos x + i\operatorname{sen} x) - e^{y}(\cos x - i\operatorname{sen} x)}{2i} =$$

$$= \frac{e^{-y}\cos x + ie^{-y}\operatorname{sen} x - e^{y}\cos x + ie^{y}\operatorname{sen} x}{2i} = \frac{(e^{-y}-e^{y})\cos x + i(e^{-y}+e^{y})\operatorname{sen} x}{2i} =$$

$$= \frac{-\left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)\cos x + i\left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right)\operatorname{sen} x}{i} = \frac{-\operatorname{senh}(y)\cos(x) + i\cosh(y)\operatorname{sen}(x)}{i} = i\operatorname{senh}(y)\cos(x) + \cosh(y)\operatorname{sen}(x)$$

- $|\operatorname{sen}(z)| = \sqrt{\operatorname{sen}^2(x)\cosh^2(y) + \cos^2(x)\operatorname{senh}^2(y)} = \sqrt{\operatorname{sen}^2(x)\left(1+\operatorname{senh}^2(y)\right) + (1-\operatorname{sen}^2(x))\operatorname{senh}^2(y)} = \sqrt{\operatorname{sen}^2(x) + \operatorname{senh}^2(y)} \geq |\operatorname{senh}(y)|$

- $|\cos(z)| = \sqrt{\cos^2(x)\cosh^2(y) + \operatorname{sen}^2(x)\operatorname{senh}^2(y)} = \sqrt{\cos^2(x)\left(1+\operatorname{senh}^2(y)\right) + (1-\cos^2(x))\operatorname{senh}^2(y)} = \sqrt{\cos^2(x) + \operatorname{senh}^2(y)} \geq |\operatorname{senh}(y)|$

En particular, $\operatorname{sen}(z)$ y $\cos(z)$ no están acotadas en el plano complejo (pues $|\operatorname{senh}(y)| \to \infty$ cuando $y \to \infty$)

Propiedad: Sea $t \in \mathbb{R}$ tal que $-1 \leq t \leq 1$.

a) Las soluciones complejas de la ecuación $\operatorname{sen}(z) = t$ son reales (por lo tanto son las mismas soluciones que en variable real).

b) Las soluciones complejas de la ecuación $\cos(z) = t$ son reales (por lo tanto son las mismas soluciones que en variable real).

Dem

a) Sea $t \in \mathbb{R}$ tal que $-1 \leq t \leq 1$.

$$\operatorname{sen}(z) = t \iff \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = t \iff e^{iz} - e^{-iz} = 2it \iff$$

$$\iff e^{iz} - 2it - e^{-iz} = 0 \iff e^{iz}\left(e^{iz} - 2it - e^{-iz}\right) = 0 \iff$$

$$\iff \left(e^{iz}\right)^2 - 2it\left(e^{iz}\right) - 1 = 0 \iff e^{iz} = \frac{2it \pm \sqrt{-4t^2 + 4}}{2} \iff$$

$$\iff e^{iz} = it \pm \sqrt{1 - t^2} \iff iz \in \ln\left(\pm\sqrt{1 - t^2} + it\right)$$

Pero $\left|\pm\sqrt{1 - t^2} + it\right| = \sqrt{\left(\pm\sqrt{1 - t^2}\right)^2 + t^2} = \sqrt{1 - t^2 + t^2} = 1$

Entonces,

$$\ln\left(\pm\sqrt{1 - t^2} + it\right) = \overbrace{\ln\left|\pm\sqrt{1 - t^2} + it\right|}^{\ln 1 = 0} + i \arg\left(\pm\sqrt{1 - t^2} + it\right)$$

Luego,

$$iz \in \ln\left(\pm\sqrt{1 - t^2} + it\right) \iff iz \in i \arg\left(\pm\sqrt{1 - t^2} + it\right) \iff z \in \arg\left(\pm\sqrt{1 - t^2} + it\right)$$

Como $\arg\left(\pm\sqrt{1 - t^2} + it\right)$ siempre es un número real, resulta que las soluciones z de la ecuación $\operatorname{sen}(z) = t$ son reales.

Propiedad: Sea $t \in \mathbb{R}$ tal que $-1 \leq t \leq 1$.

a) Las soluciones complejas de la ecuación $\operatorname{sen}(z) = t$ son reales (por lo tanto son las mismas soluciones que en variable real).

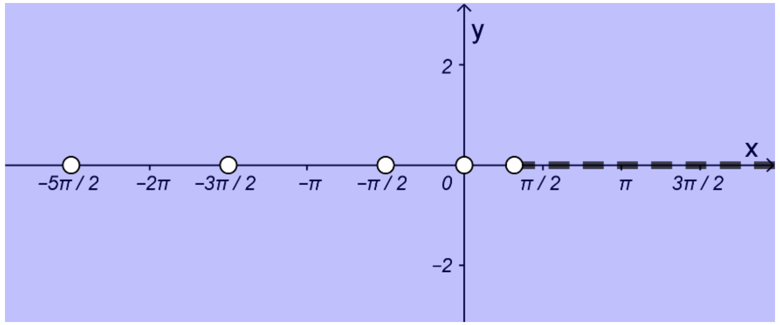
b) Las soluciones complejas de la ecuación $\cos(z) = t$ son reales (por lo tanto son las mismas soluciones que en variable real).

Ejemplo: Hallar el dominio de analiticidad de la función

1) $f(z) = \frac{\operatorname{Ln}(1-z)}{\mathrm{z}\cos(z)}$ 2) $f(z) = \frac{1}{1+\operatorname{sen} z}$ 3) $f(z) = \frac{1}{2i+cos(z)}$

Rta

1) $f(z) = \frac{\operatorname{Ln}(1-z)}{\mathrm{z}\cos(z)}$



$z = x + iy$; $1 - z = (1 - x) + i(-y)$

$N(z) = \operatorname{Ln}(1 - z)$ es analítica excepto si $\operatorname{Im}(1 - z) = 0 \;\wedge\; \operatorname{Re}(1 - z) \leq 0$,

es decir salvo si $-y = 0 \;\wedge\; 1 - x \leq 0$

Luego,$N(z)$ es analítica en $\mathbb{C} - \{x + iy : y = 0 \;\wedge\; x \geq 1\}$.

$D(z) = \mathrm{z}\cos(z)$ es analítica en $\mathbb{C}$ (producto de analíticas).

Además:

$$D(z) = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{z}\cos(z) = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{z} = 0 \;\vee\; \cos(z) = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \mathrm{z} = 0 \;\vee\; z = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Luego, $D_{\text{ana}}(f) = \mathbb{C} - \left(\{x + iy : y = 0 \;\wedge\; x \geq 1\} \cup \{0\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : \; k \in \mathbb{Z}\right\}\right)$

2) $f(z)=\frac{1}{1+\operatorname{sen}(z)}$

$D(z)=1+\operatorname{sen}(z)$ es analítica en $\mathbb{C}$.

Siendo cociente de analíticas, $f(z)$ es analítica excepto donde se anula $D(z)$.

$$D(z)=0 \;\Leftrightarrow\; 1+\operatorname{sen}(z)=0 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{sen}(z)=-1 \Leftrightarrow\; z=-\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

Luego, $D_{\text{ana}}(f)=\mathbb{C}-\left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi:\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

3) $f(z)=\frac{1}{2i+cos(z)}$

La función es cociente de analíticas así que es analítica excepto donde se anule su denominador:

$$D(z)=0 \;\Leftrightarrow\; 2i+cos(z)=0 \;\Leftrightarrow\; \cos(z)=-2i \;\Leftrightarrow\; \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=-2i \;\Leftrightarrow\; e^{iz}+e^{-iz}=-4i$$

$$\Leftrightarrow\; e^{iz}+4i+e^{-iz}=0 \Leftrightarrow e^{iz}\left(e^{iz}+4i+e^{-iz}\right)=0 \;\Leftrightarrow \left(e^{iz}\right)^2+4ie^{iz}+1=0 \Leftrightarrow$$

$$e^{iz}=\frac{-4i\pm\sqrt{-16-4}}{2} \;\Leftrightarrow\; e^{iz}=\left(-2\pm\sqrt{5}\right)i \;\Leftrightarrow\; iz\in\ln\left(\left(-2+\sqrt{5}\right)i\right) \;\vee\; iz\in\ln\left(\left(-2-\sqrt{5}\right)i\right) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; z\in -i\ln\left(\left(-2+\sqrt{5}\right)i\right) \;\vee\; z\in -i\ln\left(\left(-2-\sqrt{5}\right)i\right)$$

$$z\in -i\ln\left(\left(-2+\sqrt{5}\right)i\right) \;\Leftrightarrow\; z=-i\left(\ln\left(\sqrt{5}-2\right)+i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right) \;\Leftrightarrow\; z=\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)-i\ln\left(\sqrt{5}-2\right)\ ,k\in\mathbb{Z}$$

$$z\in -i\ln\left(\left(-2-\sqrt{5}\right)i\right) \;\Leftrightarrow\; z=-i\left(\ln\left(\sqrt{5}+2\right)+i\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right) \;\Leftrightarrow\; z=\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)-i\ln\left(\sqrt{5}+2\right)\ ,k\in\mathbb{Z}$$

Luego,

$$D_{\text{ana}}(f)=\mathbb{C}-\left(\left\{\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)-i\ln\left(\sqrt{5}-2\right):\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)-i\ln\left(\sqrt{5}+2\right):\ k\in\mathbb{Z}\right\}\right)$$

Algunas identidades trigonométricas útiles

$$\cos^2(z) + \operatorname{sen}^2(z) = 1$$

$$\operatorname{sen}(z \pm w) = \operatorname{sen}(z)\cos(w) \pm \cos(z)\operatorname{sen}(w)$$

$$\cos(z \pm w) = \cos(z)\cos(w) - \operatorname{sen}(z)\operatorname{sen}(w)$$

$$\cos(2z) = \cos^2(z) - \operatorname{sen}^2(z)$$

$$\operatorname{sen}(2z) = 2\operatorname{sen}(z)\cos(z)$$

$$\operatorname{sen}^2(z) = \frac{1 - \cos(2z)}{2} \qquad \cos^2(z) = \frac{1 + \cos(2z)}{2}$$

Funciones hiperbólicas complejas

Si queremos extender las funciones hiperbólicas reales al campo complejos, podemos definirlas a partir de la exponencial compleja del modo siguiente:

$$\boldsymbol{\cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}} \qquad \boldsymbol{\operatorname{senh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}}$$

Evidentemente ambas son analíticas en todo en plano complejo y vale:

$$\frac{d}{dz}(\mathrm{sen}h(z)) = \cosh(z) \qquad \frac{d}{dz}(\cosh(z)) = \operatorname{senh}(z)$$

Notar:

$$\cos(iz) = \frac{e^{-z} + e^{z}}{2} = \cosh(z) \qquad \operatorname{sen}(iz) = \frac{e^{-z} - e^{z}}{2i} = i\operatorname{senh}(z)$$

A partir de esta observación se deduce que si en una identidad trigonométrica se reemplaza $\cos(z)$ por $\cosh(z)$ y a la vez $\operatorname{sen}(z)$ por $i\operatorname{senh}(z)$, se obtiene una identidad hiperbólica. Por ejemplo:

$$\cos^2(z) + \operatorname{sen}^2(z) = 1$$
$$(\cosh(z))^2 + (i\operatorname{senh}(z))^2 = 1$$
$$\cosh^2(z) - \operatorname{senh}^2(z) = 1$$

Ejemplo: Hallar el dominio de analiticidad de $f(z) = \frac{1}{2\,\mathrm{senh}(z) - ie^z}$

La función es cociente de analíticas en $\mathbb{C}$, así que $f(z)$ es analítica excepto donde se anula

$$D(z) = 2\,\mathrm{senh}(z) - ie^z$$

$$D(z) = 0 \iff 2\,\mathrm{senh}(z) - ie^z = 0 \iff e^z - e^{-z} - ie^z = 0 \iff$$

$$\iff e^z(e^z - e^{-z} - ie^z) = 0 \iff (1-i)e^{2z} = 1 \iff e^{2z} = \frac{1}{1-i} \iff$$

$$\iff e^{2z} = \frac{1+i}{2} \iff 2z \in \ln\left(\frac{1+i}{2}\right) \iff 2z = \ln\left|\frac{1+i}{2}\right| + i\arg\left(\frac{1+i}{2}\right) \iff$$

$$\iff 2z = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + i(\mathrm{arctg}(1) + 2k\pi), k \in \mathbb{Z} \iff$$

$$2z = -\frac{\ln(2)}{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z} \iff z = -\frac{\ln(2)}{4} + i\left(\frac{\pi}{8} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$$

Luego, $D_{\mathrm{ana}}(f) = \mathbb{C} - \left\{-\frac{\ln(2)}{4} + i\left(\frac{\pi}{8} + k\pi\right) :\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

Exponenciación compleja general

Dados $\alpha, z \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$, definimos:

$$\alpha^{z} \overset{\text{def}}{=} e^{z\ln(\alpha)}$$

Como $\ln(\alpha)$ es multivaluado, entonces α^{z} no define una función de z.

Función exponencial generalizada: $f(z) = \alpha^{z} \overset{\text{def}}{=} e^{z\,\mathrm{Ln}(\alpha)}$

Ejemplo:

$$(1+i)^{i} = e^{i\ln(1+i)} = e^{i(\ln|1+i| + i\arg(1+i))} = e^{i\left(\ln(\sqrt{2}) + i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)} =$$

$$= e^{-\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)+i\ln(\sqrt{2})} = e^{-\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}e^{i\ln\sqrt{2}} =$$

$$= e^{-\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}\left(\cos\left(\ln(\sqrt{2})\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\ln(\sqrt{2})\right)\right), k \in \mathbb{Z}$$

$$(1+i)^{i} \underbrace{=}_{\substack{como\\ función}} e^{i\,\mathrm{Ln}(1+i)} = e^{i(\ln|1+i| + i\,\mathrm{Arg}(1+i))} = e^{i\left(\ln(\sqrt{2}) + \frac{i\pi}{4}\right)} =$$

$$= e^{-\frac{\pi}{4}+i\ln\left(\sqrt{2}\right)} = e^{-\frac{\pi}{4}}e^{i\ln(\sqrt{2})} = e^{-\frac{\pi}{4}}\left(\cos\left(\ln(\sqrt{2})\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\ln(\sqrt{2})\right)\right)$$