Matemática B

Apéndice - 2022

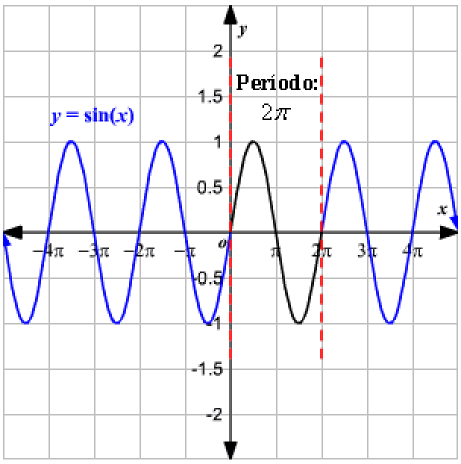
Funciones periódicas, pares e impares. Definición y algunas propiedades

1. Función periódica

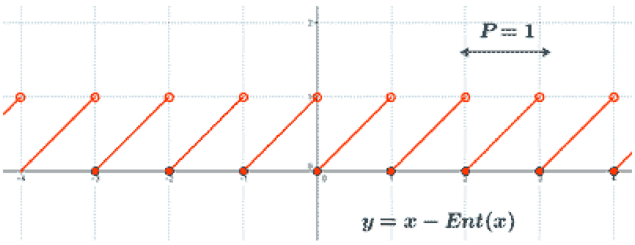
Una función numérica $\boldsymbol{f(x)}$ **es periódica** si existe un número real T tal que $f(x) = f(x+T)$, para todos los valores de x en su dominio. Es decir, que es una función que repite el mismo valor a intervalos regulares de la variable. Al menor número real T se lo llama período y se denomina frecuencia "f" a la inversa del período: $f = 1 / T$.

Los ejemplos más comunes de funciones periódicas son las funciones trigonométricas (o funciones circulares), que en combinaciones adecuadas se emplean en el análisis armónico. Sin embargo, existen otras como, por ejemplo, la función mantisa.

Función seno



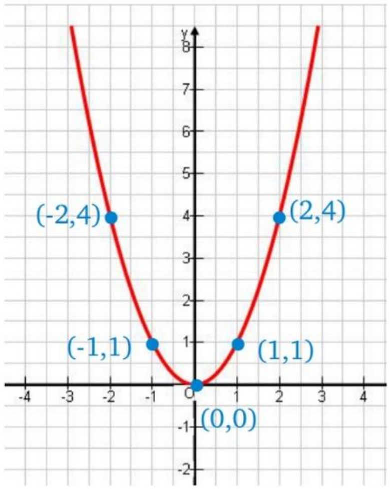
Función mantisa



2. Función par e impar

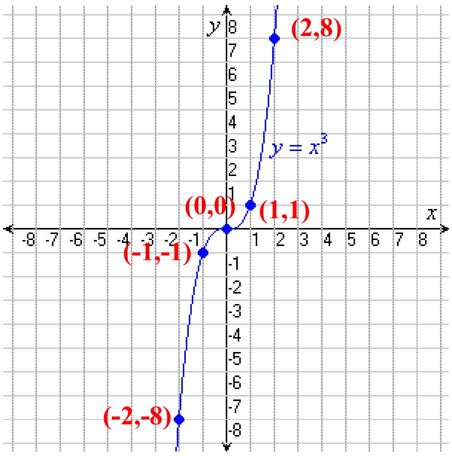
Una función numérica $\boldsymbol{f(x)}$ **es par** cuando cumple que $f(x) = f(-x)$, para todos los valores del dominio. Es decir, las imágenes de valores opuestos coinciden. De esta manera, la gráfica de una función par es simétrica respecto del eje de las ordenadas.

Por ejemplo, $f(x) = x^2$ es una función par, cuya gráfica es:



Una función numérica $\boldsymbol{f(x)}$ **es impar** si cumple que $f(x) = -f(-x)$, para todos los valores del dominio. A valores opuestos de x corresponden imágenes opuestas. De esta manera, la gráfica de una función impar es simétrica respecto al origen de coordenadas.

Por ejemplo, $f(x) = x^3$ es una función impar, cuya gráfica es:



3. Algunas propiedades de las funciones periódicas, pares e impares

Las funciones periódicas, pares e impares tienen múltiples propiedades que son útiles para la resolución matemática de un modo mucho más sencillo, de diversos problemas.

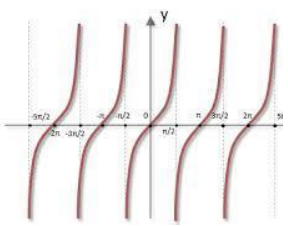
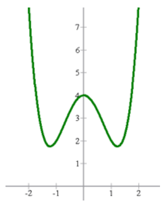
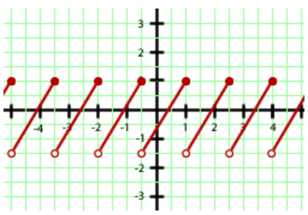
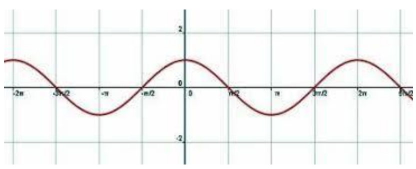
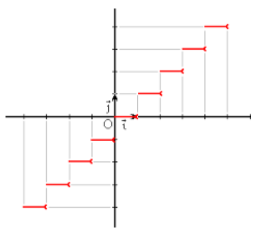
Algunas de estas propiedades son:

- Toda función continua se puede descomponer en la suma de una función par y de una impar.
- La única función que es tanto par e impar es la función nula.
- La suma de una función par y una impar no es ni par ni impar, a menos de que una de las funciones sea la nula.
- La suma de dos funciones pares es una función par y la suma de dos funciones impares es una función impar. Es decir que el conjunto de funciones pares (o impares) con la operación suma verifican la propiedad de cierre o de clausura.

- El producto de dos funciones pares es una función par, de dos funciones impares es una función par, de una función par y una función impar es una función impar.
- Si una función es par y existe su derivada, ésta es impar y si una función es impar, su derivada de existir, es par. Es decir que el conocimiento de la paridad de una función permite conocer el comportamiento de cualquiera de sus derivadas.
- Si $f(x)$ es impar, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.
- Si $f(x)$ es par, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$.
- La suma y producto de funciones periódicas de un mismo período es también periódica con el mismo período.
- Si una función es periódica y existe su derivada, ésta es también periódica.
- Si $f(x)$ es periódica, entonces $\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{b}^{b+T} f(x)dx$, para a y b en el dominio de f.

Algunos ejercicios:

1) Probar que si $f(x)$ es impar, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.
2) Probar que si $f(x)$ es par, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$.
3) Dar ejemplos de funciones de una variable que sean pares o impares o periódicas, y graficarlas.
4) Dadas las siguientes funciones, indicar en cada caso si son pares, impares y/o periódicas.

a-	b-	c-
		f(x)= x- sen(x)
d-	e-	f-
		
g-	h-	i-
$f(x) = \frac{1}{1-x^2}$	$f(x) = sen(x)$	$h(x) = xcos(x)$

5) Usando los conceptos de paridad, dar los valores de las integrales siguientes sin realizar cálculos:

a- $\int_{-a}^{a} x cos(x) dx =$……………………………………..

b- $\int_{-1}^{1} x - sen(x) dx =$……………………………….

c- $\int_{-2}^{2} \frac{x}{e^{x^2}} dx =$………………………………………………..