Sucesiones y series de números complejos

<u>Sucesiones de números complejos</u>

Una ***sucesión de números complejos***, o sucesión en $\mathbb{C}$, es una lista infinita de números complejos, denominados "***términos***" de la sucesión, dispuestos en forma secuencial, de manera que:

- cada término tiene un término sucesor inmediato (por lo tanto la sucesión consta de infinitos términos).
- hay un primer término (el único término que no es sucesor de otro).

Así, hay un primer término, su sucesor inmediato es el segundo término, el sucesor inmediato de éste es el tercer término, etc. Notar que "primero", "segundo", etc, hacen referencia a la posición que ocupa el término en la sucesión.

Si por ejemplo denotamos la sucesión con la letra c, es usual y conveniente indicar la posición de sus términos mediante un subíndice. Entonces c_1 denota el primer término de la sucesión c, c_2 el segundo, etc. Es claro que el orden de los términos se refiere al subíndice. La sucesión es:

$$c_1, c_2, c_3, \dots, c_n, \dots$$

En esta lista, si no están presentes los subíndices se conviene en leer los términos en el orden natural de izquierda a derecha. Por ejemplo:

$$1, i, \frac{1}{2}, i, \frac{1}{3}, i, \frac{1}{4}, i, \dots \qquad (*)$$

Tiene primer término 1, segundo término i, tercer término $\frac{1}{2}$, cuarto término i, etc.

Si $n \in \mathbb{N}$ es una "variable discreta" (varía en un conjunto que <u>no</u> contiene intervalos (a, b) de números reales), el término c_n se llama ***término general*** (también término n-ésimo, aunque la letra utilizada para designar el subíndice es "muda"). La sucesión se simboliza por su término general encerrado entre llaves:

$$\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \ , \{c_n\}_{n=1}^{\infty} \, , \{c_n\}_{n\geq 1}$$

Por ejemplo, la sucesión (*), si bien no queda unívocamente determinada por los términos explicitados, se pensó definida por

$\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ donde $c_n = \begin{cases} 1/(n-1) & \text{si} \quad n \text{ impar} \\ i & \text{si} \quad n \text{ par} \end{cases}$

Definición: una sucesión en $\mathbb{C}$ es una función $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}, n \mapsto c_n = f(n)$.

Tal función asigna a cada "posición" n el número complejo $c_n = f(n)$ que ocupa ese lugar en la sucesión.

La peculiaridad de la función que define una sucesión es que la variable n es "discreta" (sólo toma valores enteros). Entonces, no tiene sentido por ejemplo hablar de la derivada de f respecto de n. Tampoco tiene sentido la noción de monotonía para sucesiones complejas (no podemos decir que una sucesión compleja es creciente o decreciente! A menos que sea una sucesión real, puesto que sus términos siendo números complejos no pueden compararse mediante desigualdades).

Representación gráfica de sucesiones complejas

Siendo una sucesión compleja $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una función $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, es posible representarla graficando los puntos c_n del plano complejo (o los vectores que los representan).

Sin embargo, es necesario rotularlos para explicitar la posición n de cada uno de ellos. Sin dichos rótulos se obtiene el conjunto imagen de la sucesión pero se pierde la noción de orden secuencial (no pudiendo distinguir cuál de los puntos representa el primer término, cuál el segundo, etc). Y ese orden es esencial en la noción de límite que definiremos más adelante.

<u>Ejemplo 1</u>: Consideremos la sucesión $\left\{\frac{1+in}{n+1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$

Su término general es $c_n = \frac{1+in}{n+1}$

Sus cuatro primeros términos son:

$$c_1 = \frac{1+i1}{1+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \ , c_2 = \frac{1+i2}{2+1} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i \ ,$$

$$c_3 = \frac{1+i3}{3+1} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}i \ , c_4 = \frac{1+i4}{4+1} = \frac{1}{5} + \frac{4}{5}i$$

El vigésimo término es $c_{20} = \frac{1+i20}{20+1} = \frac{1}{21} + i\,\frac{20}{21}$

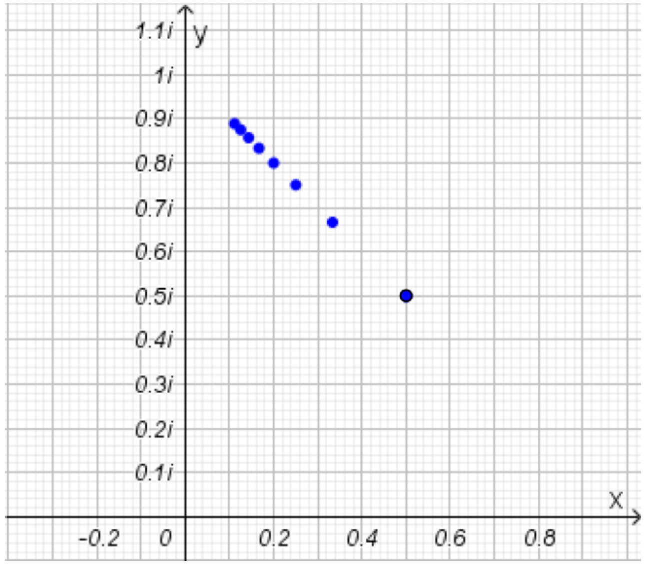
¿Siguiente del término c_n? Es el término $(n+1)$-ésimo, obtenido reemplazando n por $(n+1)$ en la expresión de c_n, es decir

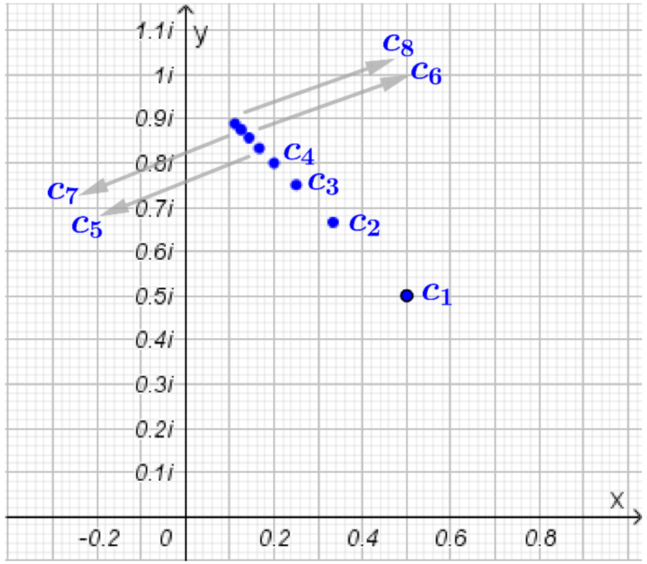
$$c_{n+1} = \frac{1+i(n+1)}{(n+1)+1} = \frac{1+i(n+1)}{n+2}$$

<u>Atención</u>: no confundir c_{n+1} con $c_n + 1 = \frac{1+in}{n+1} + 1$

¿Términos que ocupan posiciones pares? $c_{2n} = \frac{1+i2n}{2n+1}$

En ambos gráficos se muestran los 8 primeros términos.
A la izquierda se omiten los subíndices, de modo que no se puede determinar cuál de ellos es el primero, cuál el segundo, etc.
A la derecha, cada punto está rotulado de modo que el subíndice permite especificar de qué término se trata.





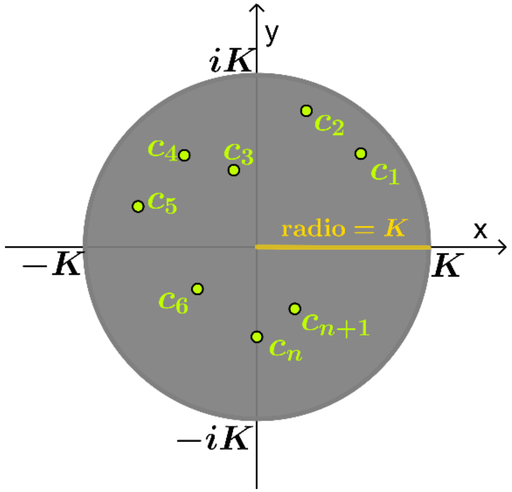
Sucesiones acotadas

La sucesión compleja $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se dice ***acotada*** si la sucesión de los módulos está acotada, es decir si existe una constante $K > 0$ (que no depende de n) tal que: $|c_n| \leq K$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $(*)$.

Cualquier $K > 0$ que satisfaga (*) se dice una ***cota de la sucesión*** $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y de hecho es cota superior de la sucesión real de los módulos $\{|c_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Es claro que si una tal cota existe, toda constante mayor a ella también será también cota de la sucesión.

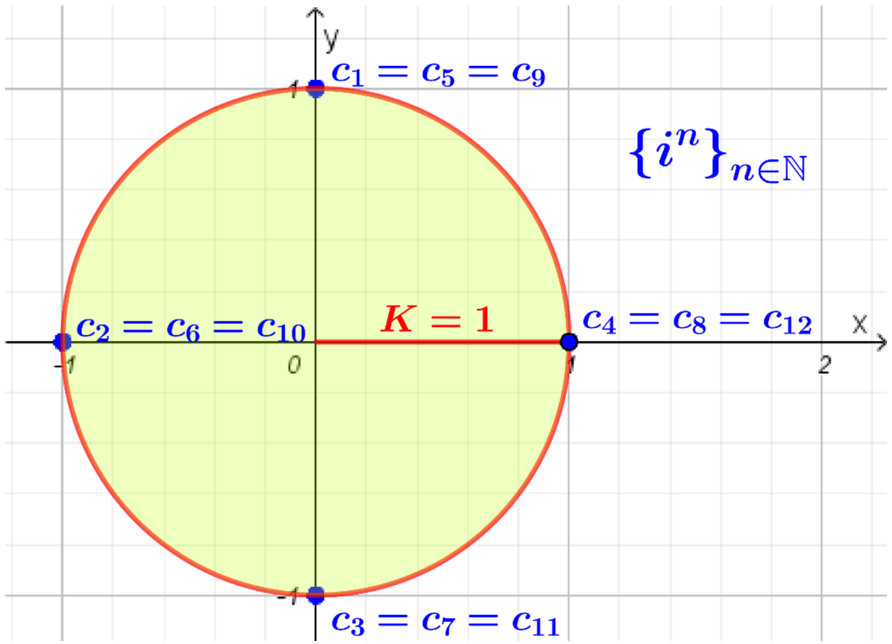
Gráficamente K puede interpretarse como el radio de un disco $\{z \in \mathbb{C}: |z| \leq K\}$ centrado en el origen que contiene a todos los términos de la sucesión.

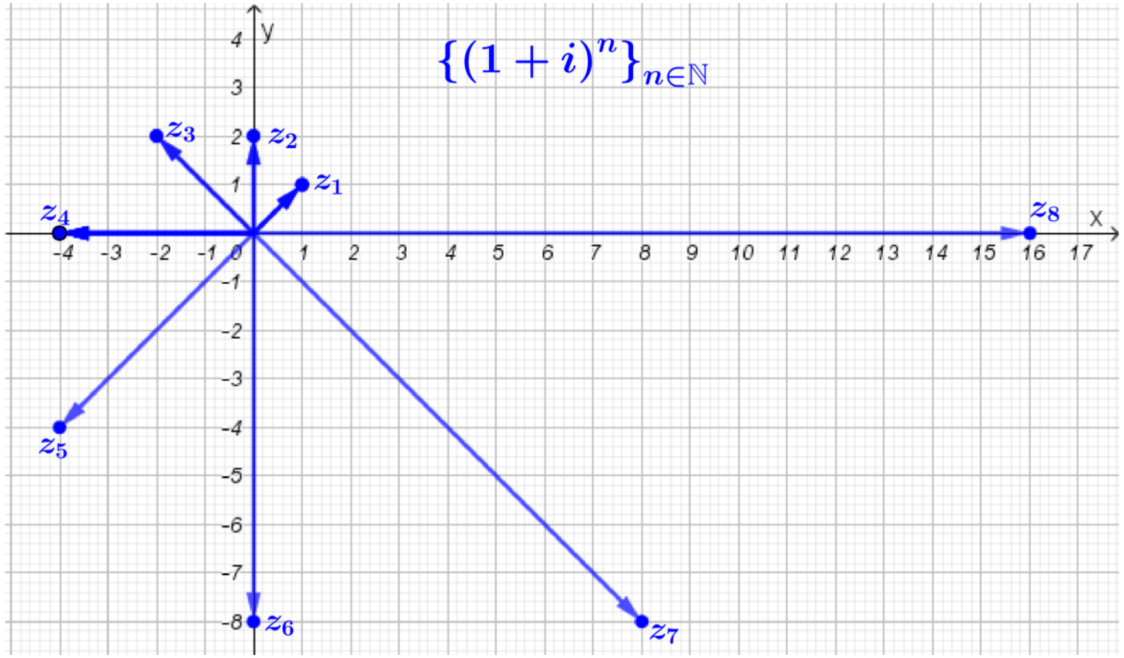


Si <u>todos</u> los términos c_n están en el disco gris centrado en el origen y de radio K, entonces K es cota de la sucesión de término general c_n.

Ejemplo 2:

a) La sucesión $\{i^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada. Como $|i^n| = 1$, cualquier real $K \geq 1$ es cota de la sucesión. En particular $K = 1$ es la cota mínima. En la figura de la izquierda se muestran los 12 primeros términos.





b) La sucesión $\{(1+i)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no está acotada pues $|(1+i)^n| = 2^{n/2} \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

Por grande que sea $K > 0$, siempre habrá infinitos términos que caen fuera del disco $\{z \in \mathbb{C}: |z| \leq K\}$.

En la figura de la derecha se muestran los 8 primeros términos.

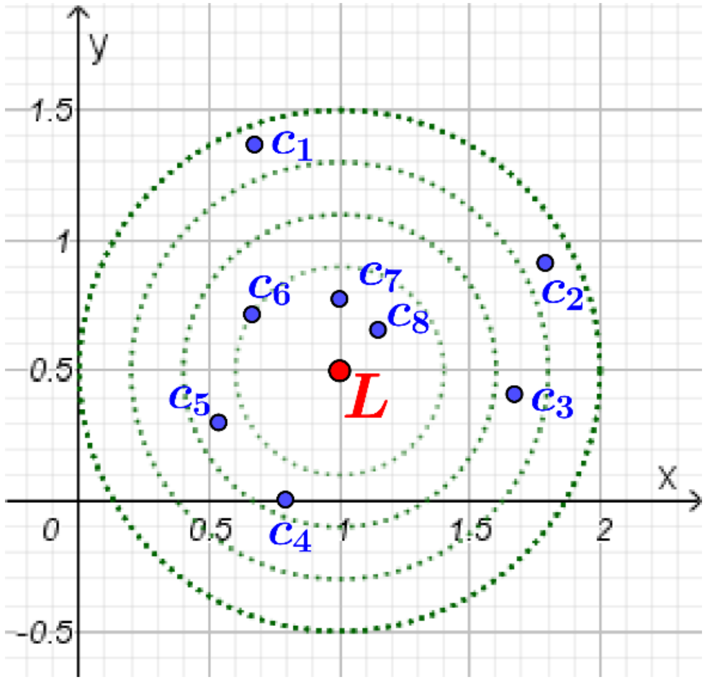
Convergencia de sucesiones de números complejos

Una sucesión compleja $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se dice **convergente** si existe un número $L \in \mathbb{C}$ tal que los términos c_n se aproximan a L tanto como se quiera, si se toman valores de n suficientemente grandes. Esto es, por pequeño que se tome el número $\varepsilon > 0$, ha de existir un índice $N \in \mathbb{N}$ de modo que para cualquier $n \geq N$ se cumpla $|c_n - L| < \varepsilon$ (**).

Formalmente:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } c_n \in E(L, \varepsilon), \forall n \geq N$$

donde $E(L, \varepsilon)$ es el entorno de L de radio ε. Es decir, por pequeño que sea el entorno de L (por pequeño que sea su radio ε), los términos c_n caen dentro de él a partir del N-ésimo en adelante. Equivalentemente, fuera de cada entorno de L sólo hay un número finito de términos c_n, es decir que $\{n \in \mathbb{N}: |c_n - L| < \varepsilon\}$ es un conjunto finito. En la figura se muestran en línea de puntos algunas circunferencias de centro L correspondientes a distintos valores de ε.



De lo anterior es claro que si una sucesión converge, sólo un $L \in \mathbb{C}$ puede satisfacer la condición (**). Dicho L se llama el **límite de la sucesión**.

Notación: $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} c_n = L}$ o $c_n \to L$ cuando $n \to \infty$.

Si tal L no existe, la sucesión se dice **divergente** (carece de límite).

En particular, si $\lim_{n\to\infty} |c_n| = \infty$ la sucesión $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ diverge y lo anotamos

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$$

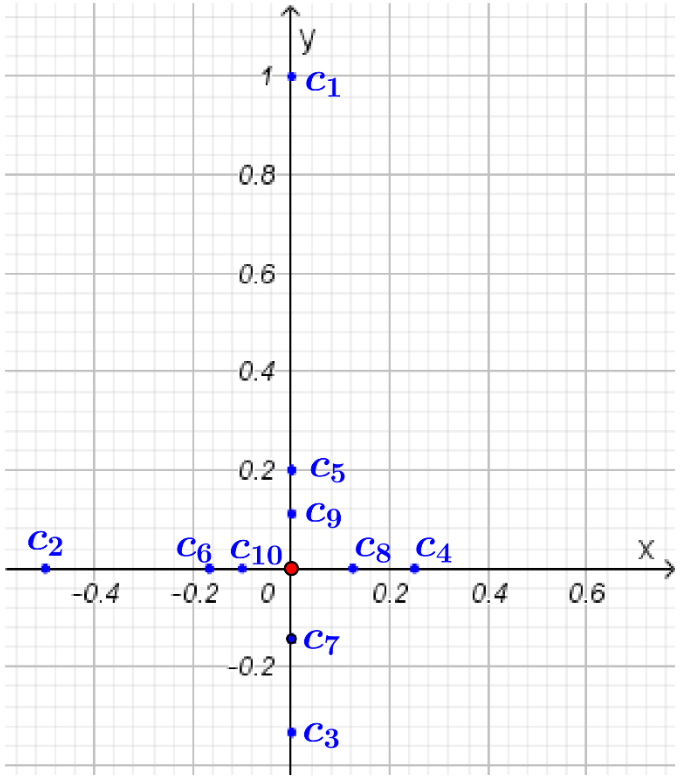
Observación: cuando $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es sucesión de términos reales, la noción de convergencia que acabamos de introducir equivale a la noción de convergencia ya vista para sucesiones reales.

Ejemplo 3: Analizar la convergencia de: $\{i^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\left\{\frac{i^n}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$

- los términos de $\{i^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ oscilan cíclicamente entre los cuatro valores $i, -1, -i, 1$. La sucesión carece de límite. Es divergente.
- Para la sucesión $\left\{\frac{i^n}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, el número $L = 0$ verifica

$$|c_n - L| = \left|\frac{i^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

que es arbitrariamente pequeño para n suficientemente grande. La sucesión converge al límite $L = 0$.



Observaciones

- La convergencia de una sucesión no se altera si se modifican, suprimen o añaden un número finito de términos. En caso de converger, dichas operaciones no alteran su límite. Por ejemplo, $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ donde $c_n = \begin{cases} \frac{i^n}{n} & \text{si} \quad n \geq 2 \\ 1+i & \text{si} \quad n = 1 \end{cases}$ tiene el mismo límite $L = 0$ que $\left\{\frac{i^n}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ puesto que ambas difieren sólo en un término (el primero).
- Toda sucesión convergente es acotada. Entonces, si $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es acotada, no puede converger.

  Por ejemplo: $\{(1+i)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es divergente pues $|(1+i)^n| = \left(\sqrt{2}\right)^n = 2^{n/2}$ no está acotada.

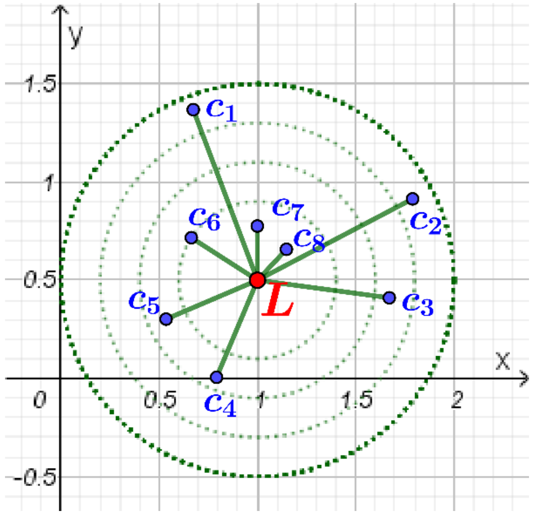
  Sin embargo, la acotación no es condición suficiente para la convergencia. Por ejemplo $\{i^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada pero diverge.
- Si una sucesión es convergente, como sus términos se acercan a un límite L cuando n se hace arbitrariamente grande, los términos correspondientes a subíndices suficientemente grandes se acercan arbitrariamente unos a otros. Entonces si n, m son suficientemente grandes la distancia $|c_n - c_m|$ debe hacerse arbitrariamente pequeña. Esto se conoce como condición de Cauchy y es equivalente a la convergencia. Por otra parte, no requiere conocer el límite L.

  Por ejemplo, $\left\{e^{in}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ diverge porque para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica:

$$|c_n - c_{n+1}| = \left|e^{in} - e^{i(n+1)}\right| = \left|e^{in}\left(1 - e^{i}\right)\right| = \left|1 - e^{i}\right| = |1 - (\cos 1 + i \operatorname{sen} 1)| =$$
$$= \sqrt{(1-\cos 1)^2 + \operatorname{sen}^2 1} = \sqrt{1 - 2\cos 1 + \cos^2 1 + \operatorname{sen}^2 1} = \sqrt{2 - 2\cos 1} \cong 0.92$$

cantidad que no puede hacerse arbitrariamente pequeña por grande que sea n.

El resultado siguiente es evidente. En la figura: los términos (puntos azules) tienden a L (punto rojo) si y sólo si las longitudes de los segmentos verdes tienden a cero. Es decir:



$$\lim_{n\to\infty} c_n = L \iff \lim_{n\to\infty} |c_n - L| = 0$$

En particular, para $L = 0$:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0 \iff \lim_{n\to\infty} |c_n| = 0$$

Ejemplo 4:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 e^{in}}{(i+n)^4} = 0 \quad \text{pues} \quad \left|\frac{n^3 e^{in}}{(i+n)^4}\right| = \frac{n^3 |e^{in}|}{|(i+n)^4|} = \frac{n^3}{|i+n|^4} = \frac{n^3}{(n^2+1)^2} =$$

$$= \frac{n^3}{n^4\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^2} = \frac{1}{n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^2} \to 0 \quad \text{si} \quad n\to\infty$$

Atención: $\lim_{n\to\infty} |c_n| = |L| \neq 0$ **no** implica que $\lim_{n\to\infty} c_n = L$.

Por ejemplo: $\lim_{n\to\infty} |i^n| = 1 \neq 0$. Sin embargo $\{i^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

La convergencia de sucesiones complejas también puede caracterizarse mediante la de sus partes real e imaginaria.

Teorema: Si $a_n = \mathrm{Re}(c_n)$, $b_n = \mathrm{Im}(c_n)$, $L_1 = \mathrm{Re}(L)$, $L_2 = \mathrm{Im}(L)$, entonces:

$$c_n = a_n + ib_n \to L = L_1 + iL_2 \Leftrightarrow \quad a_n \to L_1 \;\; \wedge \;\; b_n \to L_2$$

Dem: ⇒) Supongamos $c_n \to L$. Entonces $|c_n - L| \to 0$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica:

$$0 \leq |a_n - L_1| \leq |c_n - L| \to 0$$
$$0 \leq |b_n - L_2| \leq |c_n - L| \to 0$$

Luego, $|a_n - L_1| \to 0$ y $|b_n - L_2| \to 0$. Pero esto significa que $a_n \to L_1 \;\; \wedge \;\; b_n \to L_2$.

⇐) Supongamos que $a_n \to L_1 \;\; \wedge \;\; b_n \to L_2$, así que $|a_n - L_1| \to 0$ y $|b_n - L_2| \to 0$.

Entonces: $0 \leq |c_n - L| \leq |a_n - L_1| + |b_n - L_2| \to 0$. Luego, $c_n \to L$.

Linealidad:

a) $\{c_n\}$ sucesión compleja, $\alpha \epsilon \mathbb{C}$ una constante (no depende de n), $\alpha \neq 0$. Vale: $\{c_n\}$ $\text{converge} \Leftrightarrow \{\alpha c_n\}$ converge. Además, si $\lim_{n\to\infty} c_n = L$ entonces $\lim_{n\to\infty} \alpha c_n = \alpha L$

b) Si $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ son sucesiones complejas convergentes, entonces las sucesiones $\{c_n + d_n\}$ y $\{c_n - d_n\}$ son convergentes.

Corolario:

Sean $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ son sucesiones complejas. Si una de ellas converge y la otra diverge, entonces las sucesiones $\{c_n + d_n\}$ y $\{c_n - d_n\}$ son divergentes.

<u>Ejemplo 5</u>: Aplicando el teorema anterior analizar la convergencia de $\left\{\frac{n^2+i\,n}{n^3+1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{n^2+i\,n^3}{n^3+1}\right)=\frac{n^2}{n^3+1}=\frac{n^2}{n^3\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}=\frac{1}{n\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}$$

$$\mathrm{Im}\left(\frac{n^2+i\,n^3}{n^3+1}\right)=\frac{n^3}{n^3+1}=\frac{n^3}{n^3\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}=\frac{1}{1+\frac{1}{n^3}}$$

Entonces:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+i\,n^3}{n^3+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}+i\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n^3}}=0+1.i=i$$

Los teoremas de cálculo de límites de sumas, restas, productos, cocientes y composiciones para sucesiones reales, continúan válidos para las sucesiones complejas.

Ejemplo 6: Analizar la convergencia de $\left\{\frac{n^3+i}{(n-i)^3}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$

En este caso hallar las partes real e imaginaria del término general resultaría tedioso. Por otra parte, no es necesario. Una forma más directa de razonar en este caso es la siguiente:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+i}{(n-i)^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(1+\frac{i}{n^3}\right)}{\left(n\left(1-\frac{i}{n}\right)\right)^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(1+\frac{i}{n^3}\right)}{n^3\left(1-\frac{i}{n}\right)^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{i}{n^3}}{\left(1-\frac{i}{n}\right)^3}=1$$

siendo claro que:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i}{n^3}\right)=1 \quad \text{pues} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{i}{n^3}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{i}{n}\right)^3=1 \quad \text{pues} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{i}{n}=0$$

Es conveniente recordar algunos órdenes de magnitud en el infinito para sucesiones reales.

Dadas sucesiones reales $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $c_n \to \infty$ y $d_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$, se dice que el ***orden de magnitud*** de d_n es ***superior*** al de c_n para $n \to \infty$ si se verifica:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{d_n} = 0$$

Cuando esto ocurre anotamos $c_n \ll d_n$ para $n \to \infty$ o simplemente $c_n \ll d_n$. Observar que la definición no hace referencia a ninguna desigualdad.

Se puede probar que si $p > 0$, $q > 0$, $l > 0$, $a > 1$, entonces para $n \to \infty$ se verifica:

$$\boxed{\begin{gathered} \ln^p(n) \ll n^q \ll a^n \ll (n!)^l \\ n! \ll n^n \end{gathered}}$$

Ello resume sintéticamente los siguientes límites:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln^p(n)}{n^q} = 0 \quad , \lim_{n\to\infty} \frac{n^q}{a^n} = 0 \quad , \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{(n!)^l} = 0 \quad , \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

<u>**Ejemplo 7**</u>: Analizar la convergencia de la sucesión $\left\{\frac{n^4+1}{(n+i\ln^2 n)^4}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$

Se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^4+1}{(n+i\ln^2 n)^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4\left(1+\frac{1}{n^4}\right)}{n^4\left(1+i\frac{\ln^2 n}{n}\right)^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n^4}}{\left(1+i\frac{\ln^2 n}{n}\right)^4} = 1$$

En efecto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln^2 n}{n} = 0 \quad \text{puesto que } \ln^2 n \ll n \text{ cuando } n \to \infty$$

Sucesiones geométricas

Una sucesión compleja $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se dice geométrica si existe un número $r \in \mathbb{C}$ (que no depende de n) tal que

$$c_{n+1} = r.c_n \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

El número complejo r se denomina "razón" de la sucesión geométrica. Notar que si $c_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, la razón queda caracterizada por el cociente $r = \frac{c_{n+1}}{c_n}$, el cual no depende de n.

Si denotamos el primer término por $a \in \mathbb{C}$, entonces: $c_2 = ar$, $c_3 = ar^2$, $c_4 = cr^3, \dots, c_n = ar^{n-1}, \dots$

Es decir, la sucesión geométrica es $\{ar^{n-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ o equivalentemente $\{ar^n\}_{n=0}^{\infty}$

Por ejemplo,

- $\left\{\frac{(2-2i)\,(1+i)^{n-1}}{(2i)^n}\right\}_{n=2}^{\infty}$ es sucesión geométrica pues si $c_n = \frac{(2-2i)(1+i)^{n-1}}{(2i)^n}$ se tiene:

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\frac{(2-2i)(1+i)^n}{(2i)^{n+1}}}{\frac{(2-2i)(1+i)^{n-1}}{(2i)^n}} = \frac{(2i)^n(1+i)^n}{(2i)^{n+1}(1+i)^{n-1}} = \frac{1+i}{2i} \text{ no depende de } n$$

  La razón es $r = \frac{1+i}{2i}$ y el primer término es $a = \frac{(2-2i)\,(1+i)^{2-1}}{(2i)^2} = -1$

- $\{ni^n\}_{n=1}^{\infty}$ no es sucesión geométrica pues si $c_n = ni^n$ se tiene:

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{(n+1)i^{n+1}}{ni^n} = \frac{(n+1)i}{n} \text{ depende de } n$$

Convergencia de sucesiones geométricas

Consideremos una sucesión geométrica $\{ar^{n-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de razón r. Si $a = 0$ la sucesión claramente converge a $L = 0$. Veamos qué ocurre cuando $a \neq 0$:

- Si $|r| < 1$, la sucesión de módulos $\{|a||r|^{n-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente a 0 pues es geométrica de razón $|r| < 1$. Entonces, según la propiedad 4.1.5 $\{ar^{n-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $L = 0$.
- Si $|r| > 1$, la sucesión de módulos $\{|a||r|^{n-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ diverge pues $\lim_{n\to\infty} |a|\,|r|^{n-1} = \infty$. Luego, $\{ar^{n-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ diverge puesto que no está acotada.
- Si $r = 1$ la sucesión $\{ar^{n-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es: a , a , a , … que converge al límite $L = a$.
- Si $|r| = 1$ y $r \neq 1$ entonces $r = e^{i\alpha}$ donde $\alpha = \operatorname{Arg}(r) \neq 0$. La sucesión geométrica es $\left\{ae^{i(n-1)\alpha}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

  Si fuera convergente, resultaría: $\lim_{n\to\infty} |c_{n+1} - c_n| = \left|\lim_{n\to\infty} c_{n+1} - \lim_{n\to\infty} c_n\right| = 0$. Pero esto no ocurre pues

$$|c_{n+1} - c_n| = \left|ae^{in\alpha} - ae^{i(n-1)\alpha}\right| = \left|ae^{i(n-1)\alpha}\left(e^{i\alpha} - 1\right)\right| = |a|\left|e^{i\alpha} - 1\right| = |a|\sqrt{2 - 2\cos\alpha} > 0$$

  no tiende a cero cuando $n \to \infty$.

En resumen,

> Una sucesión geométrica de razón r y primer término $a \neq 0$ es convergente si y sólo si $|r| < 1$. Además, si $|r| < 1$ la sucesión converge a $L = 0$.

<u>Ejemplo 8</u>: Analizar la convergencia de (a) $\left\{\frac{(1+i\sqrt{3})^n}{2^{n/2}(1-i\sqrt{5})^{n-1}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ (b) $\left\{\frac{(1-2i)^{3n}}{5^n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$

<u>Rta</u>

(a) Término general:

$$c_n = \frac{(1+i\sqrt{3})^n}{2^{n/2}(1-i\sqrt{5})^{n-1}}$$

Se tiene:

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\dfrac{(1+i\sqrt{3})^{n+1}}{2^{(n+1)/2}(1-i\sqrt{5})^n}}{\dfrac{(1+i\sqrt{3})^n}{2^{n/2}(1-i\sqrt{5})^{n-1}}} = \frac{2^{n/2}(1+i\sqrt{3})^{n+1}(1-i\sqrt{5})^{n-1}}{2^{(n+1)/2}(1+i\sqrt{3})^n(1-i\sqrt{5})^n} = \frac{(1+i\sqrt{3})}{\sqrt{2}(1-i\sqrt{5})}$$

Como este cociente no depende de n, la sucesión $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es geométrica de razón: $r = \frac{(1+i\sqrt{3})}{\sqrt{2}(1-i\sqrt{5})}$

La sucesión converge a $L = 0$ pues

$$|r| = \left|\frac{(1+i\sqrt{3})}{\sqrt{2}(1-i\sqrt{5})}\right| = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$$

(b)

$$c_n = \frac{(1-2i)^{3n}}{5^n}$$

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\frac{(1-2i)^{3(n+1)}}{5^{n+1}}}{\frac{(1-2i)^{3n}}{5^n}} = \frac{(1-2i)^{3n+3}5^n}{(1-2i)^{3n}5^{n+1}} = \frac{(1-2i)^3}{5}$$

La sucesión es geométrica de razón $r = \frac{(1-2i)^3}{5}$

Es divergente puesto que:

$$|r| = \left|\frac{(1-2i)^3}{5}\right| = \frac{|1-2i|^3}{5} = \frac{\left(\sqrt{5}\right)^3}{5} = \sqrt{5} > 1$$

SERIES DE NÚMEROS COMPLEJOS

A partir de una sucesión $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de números complejos, consideremos la "suma formal" de infinitos términos llamada **serie de término general $\boldsymbol{c_n}$**:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n + \cdots$$

Para analizar si existe algún número complejo que "represente" esta suma infinita, formamos una nueva secuencia de números complejos $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, llamada sucesión de **sumas parciales**, cuyo término general (llamado suma parcial n–ésima) está dado por la suma de los primeros n términos de la sucesión dada:

$$S_n = c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n$$

Si $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente al límite $S \in \mathbb{C}$, de modo que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge a la **suma** S y se anota:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = S \quad \text{o también} \quad c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n + \cdots = S$$

Si $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es divergente, se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ diverge, en cuyo caso no tiene suma.

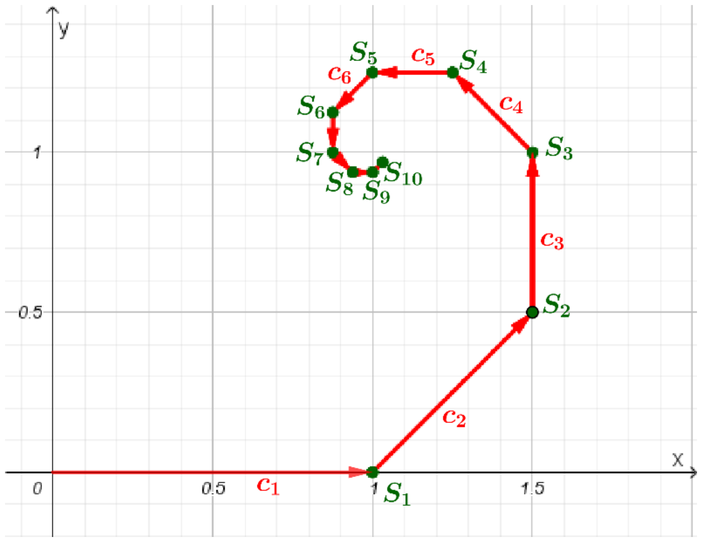
Observación: cuando a una serie de números reales se le aplica la definición anterior de convergencia se obtiene el mismo resultado que analizándola como serie de términos reales.

Ejemplo 9: Analizar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+i}{2}\right)^{n-1}$

Se tiene:

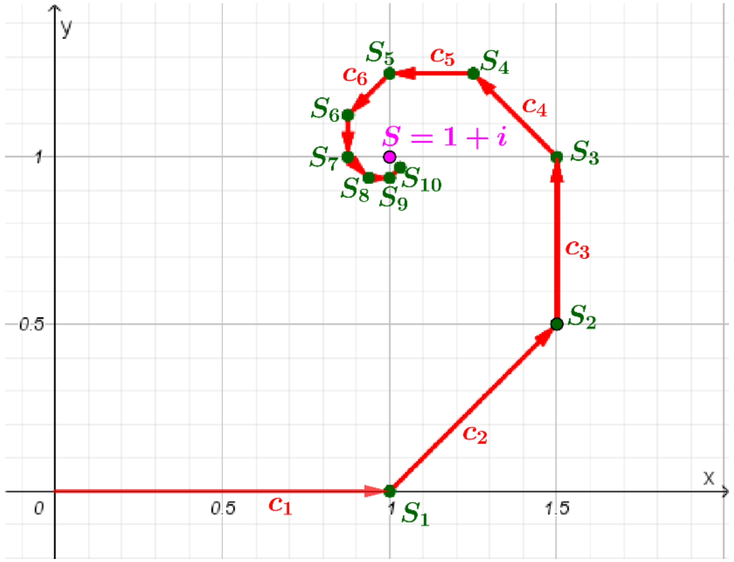
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+i}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1+i}{2}\right)^{0}+\left(\frac{1+i}{2}\right)^{1}+\left(\frac{1+i}{2}\right)^{2}+\cdots$$

En la figura se observan en rojo los términos (representados por vectores), situados en forma concatenada uno a continuación del siguiente para facilitar su suma y en verde los puntos que representan las sumas parciales. Estas últimas parecen tender a un valor S aunque el gráfico no permite afirmarlo ni sugerir cuál sería S eventualmente.



Analíticamente:

$$S_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^0 + \left(\frac{1+i}{2}\right)^1 + \cdots + \left(\frac{1+i}{2}\right)^{n-1}$$
$$\left(\frac{1+i}{2}\right) S_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^1 + \cdots + \left(\frac{1+i}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1+i}{2}\right)^n$$



Restando la segunda de la primera:

$$S_n - \left(\frac{1+i}{2}\right) S_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^0 - \left(\frac{1+i}{2}\right)^n = 1 - \left(\frac{1+i}{2}\right)^n$$

Es decir,

$$\left(1 - \frac{1+i}{2}\right) S_n = 1 - \left(\frac{1+i}{2}\right)^n$$

Así que,

$$S_n = \frac{1 - \left(\frac{1+i}{2}\right)^n}{\left(1 - \frac{1+i}{2}\right)}$$

Entonces:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \left(\frac{1+i}{2}\right)^n}{\left(1 - \frac{1+i}{2}\right)} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1+i}{2}\right)} = \frac{2}{1-i} = 1 + i = S$$

donde hemos tenido en cuenta que $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+i}{2}\right)^n$ puesto que $\left|\frac{1+i}{2}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$.

Luego, la serie dada es convergente y su suma es $S = 1 + i$, es decir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+i}{2}\right)^{n-1} = 1 + i$$

Teorema (Condición necesaria de convergencia)

Si la serie de términos complejos $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ es convergente entonces $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$

Dem

Supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge a la suma S. Entonces:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}\big((c_1 + c_2 + \cdots + c_n) - (c_1 + c_2 + \cdots + c_{n-1})\big) = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1})$$
$$= \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

Atención: en general $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ no brinda por sí sola información acerca de la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$.

Corolario (Condición suficiente de divergencia) Si $\lim_{n\to\infty} c_n \neq 0$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ es divergente.

Ejemplo 10: $\sum_{n=1}^{\infty} i^{n-1}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1-in}$ son divergentes. En efecto:

- $\lim_{n\to\infty} i^{n-1}$ no existe.
- $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{1-in} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\left(\frac{1}{n}-i\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n}-i} = i \neq 0$

Series geométricas

Una serie se dice geométrica si su término general es el de una sucesión geométrica, es decir cuando existen constantes $a, r \in \mathbb{C}$ tales que la serie puede escribirse como:

$$a \;+ a\,r + a\,r^2 + a\,r^3 + \cdots$$

En notación de sumatoria:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a\,r^{n-1} \quad \text{o equivalentemente} \sum_{n=0}^{\infty} a\,r^{n}$$

El número complejo a es el primer término de la serie y el número complejo r se llama "razón" de la misma. Notar que si los términos c_n de la geométrica son no nulos, se tiene:

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ es serie geométrica si y sólo si $\dfrac{c_{n+1}}{c_n}$ no depende de n.

Cuando esto es así, el valor común de este cociente es la razón de la serie geométrica.

La n-ésima suma parcial es $S_n = a \;+ a\,r + a\,r^2 + \cdots + a\,r^{n-1}$.

Observar que:

$$(1-r)S_n = (1-r)(a \;+ a\,r + a\,r^2 + \cdots + a\,r^{n-1}) =$$
$$= (a \;+ a\,r + a\,r^2 + \cdots + a\,r^{n-1}) - r(a \;+ a\,r + a\,r^2 + \cdots + a\,r^{n-1})$$
$$= (a \;+ a\,r + a\,r^2 + \cdots + a\,r^{n-1}) - (a\,r + a\,r^2 + \cdots + a\,r^{n-1} + ar^n) = a - ar^n$$

Analicemos la convergencia de la serie geométrica: $\sum_{n=1}^{\infty} a\, r^{n-1} = a\ + a\, r + a\, r^2 + a\, r^3 + \cdots$

Cuando $a = 0$ la serie converge trivialmente a la suma $S = 0$ pues es: $0 + 0 + 0 + \cdots = 0$

Analicemos el caso $a \neq 0$.

- Si $r = 1$: $S_n = na \ \to\ \infty$ cuando $n\ \to\ \infty$, así que la serie diverge.
- Si $r \neq 1$:

$$(1-r)S_n = a\ - a\, r^n$$

Entonces,

$$S_n = \frac{a - ar^n}{1-r}$$

Para $r \neq 1$ sabemos que $\lim\limits_{n\to\infty} r^n$ existe si y sólo si $|r| < 1$ y en ese caso vale 0.

Por lo tanto: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ existe si y sólo si $|r| < 1$ y en ese caso vale $S = \frac{a}{1-r}$

Conclusión:

La serie geométrica de primer término $a \neq 0$ y razón r es convergente si y sólo si $|r| < 1$. Además:

$$a\ + a\, r + a\, r^2 + a\, r^3 + \cdots = \frac{a}{1-r}$$
$$= \frac{1^{\text{er}}\ \text{término}}{1 - \text{razón}} \quad \text{si} \quad |r| < 1$$

Ejemplo 11: La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(3+4i)^n}{(1+i\sqrt{3})^{2n}}}_{c_n}$ es geométrica pues:

Término general: $c_n = \frac{(3+4i)^n}{(1+i\sqrt{3})^{2n}}$ así que

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\frac{(3+4i)^{n+1}}{(1+i\sqrt{3})^{2(n+1)}}}{\frac{(3+4i)^n}{(1+i\sqrt{3})^{2n}}} = \frac{(3+4i)^{n+1}(1+i\sqrt{3})^{2n}}{(3+4i)^n(1+i\sqrt{3})^{2n+2}} = \frac{3+4i}{(1+i\sqrt{3})^2}$$

no depende de n. Este número complejo es la razón: $r = \frac{3+4i}{(1+i\sqrt{3})^2} = \frac{3+4i}{-2+2i\sqrt{3}}$

Se tiene:

$$|r| = \left|\frac{3+4i}{-2+2i\sqrt{3}}\right| = \frac{|3+4i|}{|-2+2i\sqrt{3}|} = \frac{5}{4} > 1$$

Por lo tanto, esta serie geométrica es divergente (no posee suma).

<u>Ejemplo 12</u>: Mostrar que la siguiente serie es convergente y hallar su suma

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2-i)(1-i)^{n-1}}{(2+i)^n}$$

<u>Rta</u> Término general de la serie $c_n = \frac{(2-i)(1-i)^{n-1}}{(2+i)^n}$

La serie es geométrica pues

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\frac{(2-i)(1-i)^n}{(2+i)^{n+1}}}{\frac{(2-i)(1-i)^{n-1}}{(2+i)^n}} = \frac{(1-i)^n(2+i)^n}{(1-i)^{n-1}(2+i)^{n+1}} = \frac{1-i}{2+i} = r$$

no depende de n. Además,

$$|r| = \left|\frac{1-i}{2+i}\right| = \frac{|1-i|}{|2+i|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} < 1$$

así que la serie converge. Su suma está dada por:

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{(2-i)(1-i)^{2-1}}{(2+i)^2}}{1-\frac{1-i}{2+i}} = \frac{(2-i)(1-i)}{(2+i)^2 - (2+i)(1-i)} = \frac{1-3i}{5i} = -\frac{3}{5} - \frac{1}{5}i = -0.6 - 0.2i$$

Luego,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2-i)(1-i)^{n-1}}{(2+i)^n} = -\frac{3}{5} - \frac{1}{5}i$$

Propiedades de las series

Propiedad: Si se suprimen, añaden o modifican un número finito de términos de una serie, no cambia el carácter de dicha serie (si era CV, permanece CV; si era DV, permanece DV).

Nota: en caso de converger, la suma puede cambiar ante las modificaciones hechas.

Ejemplo 13:

$$-2+i+\frac{3}{2}-\frac{3i}{4}-\frac{3}{8}+\frac{3i}{16}-\frac{3i}{32}-\frac{3i}{64}+\cdots=$$

$$=-2+i+\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}3i\left(-\frac{i}{2}\right)^{n}}_{\substack{\text{geométrica}\\ r=-\frac{i}{2}}}\overset{|r|=\left|-\frac{i}{2}\right|=\frac{1}{2}<1}{\overbrace{=}^{CV}}-2+i+\frac{\frac{3}{2}}{1-\left(-\frac{i}{2}\right)}=$$

$$=-2+i+\frac{3}{2+i}=-\frac{4}{5}+\frac{2}{5}i$$

Linealidad: Si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ son contantes y $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$ y $\sum_{n=1}^{\infty} w_n = T$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha z_n + \beta w_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} z_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} w_n = \alpha S + \beta T$$

Ejemplo 14: Analizar la convergencia de las series a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{n}$; b) $\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{(1-i)^n} - \frac{5}{(2i)^{n+1}}\right]$

a) Si la serie dada fuera convergente, por linealidad también lo sería la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-i)\frac{i}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ pero este no es el caso, siendo esta última la conocida serie armónica (divergente).

Luego, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{n}$ es divergente.

b)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-i)^n} \text{ es CV por ser geométrica con } |r| = \left|\frac{1}{1-i}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{(2i)^{n+1}} \text{ es CV por ser geométrica con } |r| = \left|\frac{1}{2i}\right| = \frac{1}{2} < 1$$

Además:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(1-i)^n} - \frac{5}{(2i)^{n+1}}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-i)^n} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{5}{(2i)^{n+1}} = \frac{1}{1-(1-i)} - \frac{\frac{5}{2i}}{1-\frac{1}{2i}} = -i - \frac{5}{2i-1} = -i + (1+2i) = 1+i$$

Teorema: Sean $x_n = \mathrm{Re}(z_n)$, $y_n = \mathrm{Im}(z_n)$. Se verifica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} x_n = \mathrm{Re}(S) \;\; \wedge \sum_{n=1}^{\infty} y_n = \mathrm{Im}(S)$$

En particular, $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ son ambas convergentes.

Dem: Basta relacionar las respectivas sucesiones de sumas parciales.

Ejemplo 15: Estudiar la convergencia de las series a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n-i}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+i3^n}{5^n}$

a)

$$z_n = \frac{n+i}{n^2+1} \text{ así que } x_n = \mathrm{Re}(z_n) = \frac{n}{n^2+1} \quad , \; y_n = \mathrm{Im}(z_n) = \frac{1}{n^2+1}$$

Pero $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ diverge, como puede verse comparando en el límite con la serie armónica (divergente):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n^2+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} = 1$$

Luego, como $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ diverge entonces $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n-i}$ también diverge.

b)

$$z_n = \frac{2^n + i3^n}{5^n} \text{ así que } x_n = \mathrm{Re}(z_n) = \frac{2^n}{5^n} \;,\; y_n = \mathrm{Im}(z_n) = \frac{3^n}{5^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n} \overset{\substack{\text{s.geom:}a=2/5;\, r=2/5 \\ |r|=\frac{2}{5}<1 \\ CV}}{\overbrace{=}} \frac{2/5}{1-(2/5)} = \frac{2}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^n} \overset{\substack{\text{s.geom:}a=3/5;\, r=3/5 \\ |r|=\frac{3}{5}<1 \\ CV}}{\overbrace{=}} \frac{3/5}{1-(3/5)} = \frac{3}{2}$$

Entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + i3^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n} + \mathrm{i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^n} = \frac{2}{3} + i\,\frac{3}{2}$$

Convergencia absoluta

La serie de números complejos $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ se dice **absolutamente convergente** si la serie de los módulos $\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|$ es convergente.

Ejemplo 16: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(3+4i)^n}$ es una serie absolutamente convergente pues la serie de los módulos es

$$\sum_{n=1}^{\infty}|c_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{n^3}{(3+4i)^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{|3+4i|^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{5^n}$$

que es convergente como puede verse aplicando el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^3}{5^{n+1}}}{\frac{n^3}{5^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3 = \frac{1}{5} < 1$$

Teorema (de la convergencia absoluta):
Si $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge absolutamente entonces converge y se verifica:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} c_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$$

Dem
Sea $c_n = a_n + ib_n$
Supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|$ converge. Puesto que para todo n:

$$|a_n| \leq |c_n| \quad \wedge \quad |b_n| \leq |c_n|$$

Se deduce del criterio de comparación que $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ e $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ convergen. Entonces, por el teorema de convergencia absoluta para series de términos reales, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergen (absolutamente). Luego, la serie dada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ es convergente.

Ejemplo 17: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(3+4i)^n}$ es absolutamente convergente (ejemplo 16). Por lo tanto converge.

Ejemplo 18: analizar la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2e^{i/n}(3i)^{n+1}}{(2+i)^{2n}}$ es absolutamente convergente

Rta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{2e^{i/n}(3i)^{n+1}}{(2+i)^{2n}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2|3i|^{n+1}}{|2+i|^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2.3^{n+1}}{(\sqrt{5})^{2n}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2.\,3^{n+1}}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 6\left(\frac{3}{5}\right)^n = \frac{\frac{18}{5}}{1-\frac{3}{5}} = 9 \text{ es convergente.}$$

Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2e^{i/n}(3i)^{n+1}}{(2+i)^{2n}}$ es absolutamente convergente.

Además,

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2e^{i/n}(3i)^{n+1}}{(2+i)^{2n}} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{2e^{i/n}(3i)^{n+1}}{(2+i)^{2n}} \right| = 9$$

Ejemplo 19: Estudiar la convergencia de $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(4i)^n\ln(n)}{(1+i)^{2n}n!}$

Se tiene:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{(4i)^n\ln(n)}{(1+i)^n n!}\right| = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{4^n\ln(n)}{n!\,2^{n/2}}$$

Aplicando criterio del cociente a esta serie de módulos:

$$L = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4^{n+1}\ln(n+1)}{(n+1)!\,2^{(n+1)/2}}}{\frac{4^n\ln(n)}{n!\,2^{n/2}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}n!\,2^{n/2}\ln(n+1)}{4^n(n+1)!\,2^{(n+1)/2}\ln(n)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4.\,n!\ln(n+1)}{n!\,(n+1)\sqrt{2}\ln(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{2}.\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{(n+1)\ln(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{2}\left[\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]}{(n+1)\ln(n)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{2}\ln(n)\left[1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right]}{(n+1)\ln(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{2}\left[1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right]}{n+1} = 0$$

Por lo tanto, como $L<1$ la serie de los módulos es convergente. Luego, la serie dada es absolutamente covergente.

Ejemplo 20: Estudiar la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n^2+i)^2}$

Se tiene:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+1}$$

Aplicando criterio de comparación a esta serie de módulos:

$$n^4 + 1 \geq n^4 \quad \text{entonces} \quad \frac{n^2}{n^4+1} \leq \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2}$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente por ser p -serie con $p = 2 > 1$, entonces la serie de los módulos $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+1}$ es convergente. Por lo tanto, la serie dada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n^2+i)^2}$ es absolutamente convergente.

Ejemplo 21: La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+i}$ es condicionalmente convergente.

En efecto, aplicando linealidad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+i} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n-i)}{(n+i)(n-i)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n-i)}{n^2+1} == \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1} - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} \text{ converge pues}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1} \quad , \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} \text{ convergen (criterio de Leibniz)}$$

Pero la serie de los módulos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n+i} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \text{ es divergente}$$

como resulta de compararla en el límite con la serie armónica (divergente):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1 \neq 0$$