



ELECTROTECNIA Y ELECTRÓNICA

(Mecánica - Electromecánica - Computación)

TRABAJO DE APLICACIÓN Nº 02

Preparado por: Ing. Pablo Morcelle del Valle, Ing. Augusto Cassino, Ing. Guillermo Renzi.

Actualizado por: Ing. Fabián Blasseti, Ing. Gustavo Adgi Romano, Ing. Juan Pablo Cardacce

MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE CIRCUITOS

Análisis de mallas y de nodos. Linealidad. Superposición y dualidad. Circuitos equivalentes de Thevenin y de Norton.

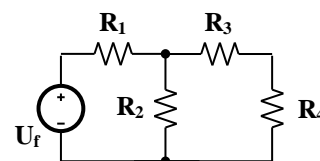
REPASAR: Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales, determinantes y matrices.

EJERCICIO Nº 01:

El circuito de la figura es uno de los dos ejercicios resueltos de la TAP01.

$U_f = 5V$, $R_1 = R_3 = 1\Omega$, $R_2 = R_4 = 2\Omega$.

- a) Determinar la cantidad de: ramas (R), nodos independientes (N_i) y mallas independientes (M_i) del circuito. Explicar cuántas ecuaciones de mallas son necesarias para resolverlo, justificar. Explicar cuántas ecuaciones de nodos son necesarias para resolverlo, justificar.



RESPUESTA: $R=3$, $M_i=2$, $N_i=1$

- b) Explicar en qué consiste la aplicación del análisis de mallas para la resolución de un circuito. Resolver el circuito de la figura mediante el método de mallas y comparar los resultados obtenidos.
c) Repetir el inciso anterior, pero utilizando el análisis de nodos.

RESPUESTA: Corrientes de arriba hacia abajo o de izquierda a derecha. Tensiones con el positivo arriba o a la izquierda: $I_f = 2,27A$; $I_2 = 1,36A$; $I_3 = 0,91A$; $U_1 = 2,27V$; $U_2 = 2,72V$; $U_3 = 0,91V$; $U_4 = 1,81V$;

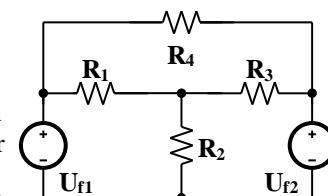
- d) Analizar si uno de los dos análisis es más conveniente que el otro en este caso. Justificar. ¿Es posible generalizarlo para cualquier circuito? Explicar y justificar.

EJERCICIO Nº 02:

El circuito de la figura es otro de los dos ejercicios resueltos de la TAP01.

$R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 30\Omega$, $R_3 = 5\Omega$, $R_4 = 2\Omega$, $U_{f1} = 70V$, $U_{f2} = 15V$.

- a) Plantear las ecuaciones aplicando el análisis de mallas (utilizar los coeficientes en forma literal), luego reemplazar los coeficientes por sus valores y resolver, comparar los resultados con la resolución del TAP1..
b) Plantear las ecuaciones aplicando el análisis de nodos, las mismas indicaciones del inciso a.



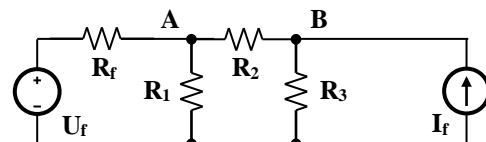
RESPUESTA: Corrientes de arriba hacia abajo o de izquierda a derecha. Tensiones con el positivo arriba o a la izquierda: $I_{f1} = -31,5A$; $I_2 = 30,5A$; $I_1 = 4A$; $I_2 = 1A$; $I_3 = 3A$; $I_4 = 27,5A$; $U_1 = 40V$; $U_2 = 30V$; $U_3 = 15V$; $U_4 = 55V$.

- c) Comparar las ecuaciones resultantes e indicar si algún método es más conveniente.

EJERCICIO Nº 03:

En el circuito de la figura. $U_f = 10V$; $I_f = 5A$; $R_f = 5\Omega$, $R_1 = 50\Omega$, $R_2 = 20\Omega$ y $R_3 = 10\Omega$.

- a) ¿A qué se llama *supernodo* y *supermalla*?
b) Resolver el circuito aplicando el método de mallas explicando los pasos seguidos.
c) Ídem a) pero aplicando el método de nodos.
d) Resolver el circuito transformando fuentes reales y asociando elementos en paralelo. Verificar que los 3 métodos arrojan los mismos resultados.



RESPUESTA: Corrientes de arriba hacia abajo o de izquierda a derecha. Tensiones con el positivo arriba o a la izquierda: $I_f = -0,9A$; $I_1 = 0,3A$; $I_2 = -1,2A$; $I_3 = 3,8A$; $U_{Rf} = -4,5V$; $U_1 = 14,5V$; $U_2 = -23,7V$; $U_3 = 38,2V$.

EJERCICIO Nº 04:

- a) ¿Qué significa que un circuito sea lineal? Explicar.
b) ¿Qué condición deben cumplir los circuitos para que se pueda aplicar superposición? ¿Por qué?
c) Con referencia al circuito del EJERCICIO Nº 03, dibujar los circuitos que resultan luego de anular alternativamente las fuentes y calcular la tensión entre A y B en cada uno de ellos.



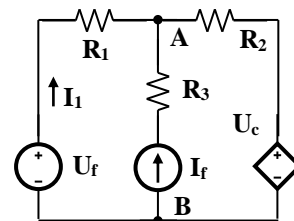
- d) Explicar cómo se efectúa la suma de dichos resultados para obtener el resultado final. Justificar la respuesta. Comparar el resultado final con el valor obtenido en el EJERCICIO N° 03.

EJERCICIO N° 05:

En el circuito de la figura. $U_f = 130V$, $U_c = 8V$, $I_f = 2A$, $R_1 = 150\Omega$, $R_2 = 60\Omega$, $R_3 = 5\Omega$.

- Explicar qué cuidado se debe tener cuando se aplica superposición a circuitos con fuentes controladas.
- Calcular la tensión entre A y B utilizando el método de superposición.
- Verificar los resultados obtenidos resolviendo mediante nodos.

RESPUESTA: $U_{AB} = 122,5V$.

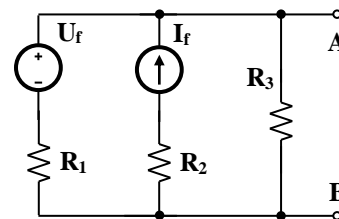


EJERCICIO N° 06:

En el circuito de la figura. $U_f = 20V$, $I_f = 5A$, $R_1 = 20\Omega$, $R_2 = 4\Omega$, $R_3 = 20\Omega$.

- Explicar qué son los circuitos de Thevenin y Norton, estableciendo la equivalencia entre los mismos.
- Calcular la tensión a circuito abierto entre A y B aplicando algún método de resolución de circuitos.
- Calcular la corriente de corto circuito entre A y B aplicando algún método de resolución de circuitos.
- Con los resultados obtenidos obtener el circuito equivalente de Thevenin y Norton. ¿Qué relación existe entre ambos circuitos? Justificar.

RESPUESTA: $U_{Th} = 60V$; $I_N = 6A$; $R_{Th} = 10\Omega$.



EJERCICIO N° 07:

En el circuito de la fig. $U_f = 15V$, $R_1 = 80\Omega$, $R_2 = 5\Omega$, $R_3 = 40\Omega$, $R_4 = 4\Omega$ y $A = 0,5[S]$.

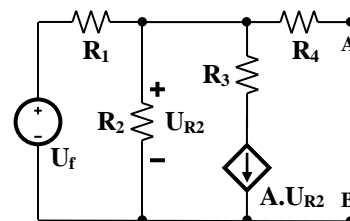
- Obtener el equivalente de Thevenin entre A y B.

RESPUESTA: $U_{Th} = 0,26V$; $I_N = 49mA$; $R_{Th} = 5,4\Omega$.

- Se conecta un resistor de carga de 10Ω . Calcular la tensión en sus bornes y la potencia desarrollada.

RESPUESTA: $U_{Rc} = 170mV$; $P_{Rc} = 2,9mW$.

- ¿Qué ventajas presenta obtener el equivalente de Thevenin o Norton en un circuito?



EJERCICIO N° 08:

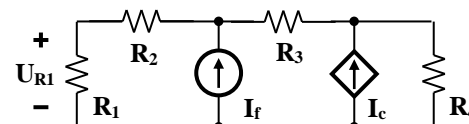
En el circuito de la figura: $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 3\Omega$, $R_3 = 5\Omega$, $R_4 = 1\Omega$, $I_f = 10A$ e $I_c = 0,25 \cdot U_{R1}$.

- En forma general, si el resistor de carga está incluido en el circuito. ¿Cómo se procede para calcular el equivalente de Thevenin y Norton?
- Calcular el equivalente de Thevenin suponiendo que R_4 es la carga.

RESPUESTA: $U_{Th} = 150V$; $I_N = 7,5A$; $R_{Th} = 20\Omega$.

- Determinar la corriente en el resistor de carga.

RESPUESTA: $I_4 = 7,1A$.



EJERCICIOS ADICIONALES

Sugerencia: Resolver todos los ejercicios siguiendo las pautas establecidas para los ejercicios anteriores: No dar por hechos u obvios suposiciones o afirmaciones, nada debe darse por implícito. Plantear, explicar, justificar, respetar la nomenclatura y simbología. En este caso, el hábito hace al monje.

EJERCICIO N° 09:

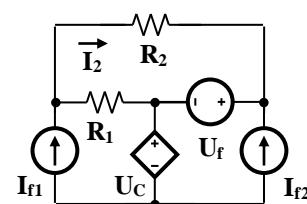
En el circuito de la figura: $I_{f1} = 12A$, $I_{f2} = 10A$, $U_f = 6V$, $U_c = A \cdot I_2$, $R_1 = 4\Omega$, $R_2 = 2\Omega$.

- Aplicar el método de superposición para obtener las tensiones en las fuentes de corriente y fuente controlada y las corrientes en los resistores y fuente de tensión independiente tomando $A = 3[\Omega]$. Indicar que fuentes entregan y cuales reciben energía.

RESPUESTA: $U_{f1} = 41V$, $U_{f2} = 27V$, $U_c = 21V$, $I_{R1} = 5A$, $I_2 = 7A$, $I_f = -17A$.

- Obtener el equivalente de Thevenin en bornes de la resistencia R_1 .

RESPUESTA: $U_{Th} = 30V$, $R_{Th} = 2\Omega$.





c) ¿Qué valor debería tomar U_f para que no entregue ni reciba energía?
RESPUESTA: $U_f = 108V$.

EJERCICIO N° 10:

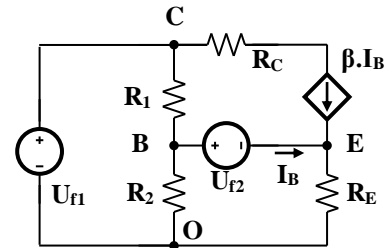
En el circuito de la figura: $U_{f1} = 12V$, $U_{f2} = 1V$, $R_1 = 2000\Omega$, $R_2 = 3000\Omega$, $R_C = 100\Omega$, $R_E = 100\Omega$, $\beta = 100$.

- a) Plantear el análisis de nodos y el de mallas del circuito. Comparar los sistemas de ecuaciones obtenidos indicando cuál es el que requiere la menor cantidad de ecuaciones, fundamentando la respuesta.
b) Calcular todas las corrientes del circuito aplicando ambos análisis.

RESPUESTA: $I_{f1} = 57,7mA$; $I_{R1} = 2,73mA$; $I_{R2} = 2,18mA$; $I_{Rc} = 55mA$; $I_B = 0,55mA$;

$I_{RE} = 55,5mA$; $U_{R1} = 5,46V$; $U_{R2} = 6,54V$; $U_{RC} = 5,5V$; $U_{IC} = 0,93V$; $U_{RE} = 5,57V$. Todas las corrientes de izquierda a derecha y las tensiones con el positivo a la izquierda.

- c) Comparar todos los resultados obtenidos a lo largo de la resolución del ejercicio.



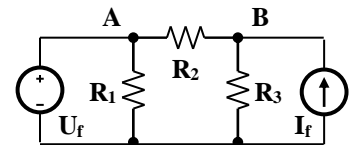
EJERCICIOS RESUELTOS

Aclaración: Debe observarse que en la resolución de estos ejercicios se efectúan planteos, explicaciones, justificaciones, y nada se da por sobreentendido.

EJERCICIO N° 11:

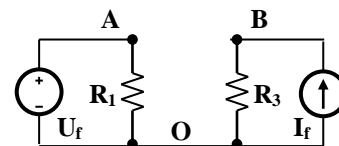
En el circuito de la figura. $U_f = 10V$, $I_f = 5A$, $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 1\Omega$ y $R_3 = 1\Omega$.

- a) Calcular el equivalente Thevenin entre A y B visto desde R_2 (impedancia de carga). A continuación, calcular la tensión en R_2 .
b) Calcular el equivalente de Norton entre A y B suponiendo que R_2 es la impedancia de carga. Calcular la corriente en R_2 .
c) Verificar los cálculos anteriores aplicando superposición.



Resolución:

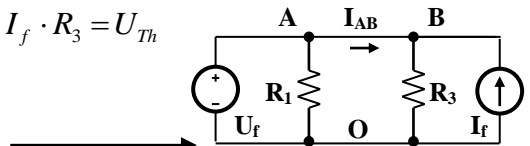
- a) El primer paso consiste en desconectar la carga (reemplazando por un circuito abierto) y dibujar nuevamente el circuito:



El segundo paso consiste en calcular la tensión entre los puntos de interés.

Planteando la segunda Ley de Kirchhoff: $U_{AB} = U_{AO} - U_{BO} = U_f - I_f \cdot R_3 = U_{Th}$

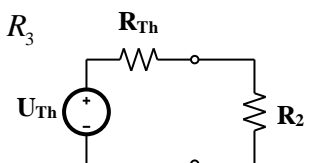
El tercer paso consiste en realizar un cortocircuito entre los puntos de interés y calcular la corriente entre A y B (con dirección AB). Dibujando el circuito nuevamente:



Si se plantea la primera ley de Kirchhoff en el nodo B: $I_{AB} = I_{R3} - I_f = \frac{U_{BO}}{R_3} - I_f = \frac{U_f}{R_3} - I_f = I_N$

4to paso: Cálculo R_{Th} con ley de Ohm: $R_{Th} = \frac{U_{Th}}{I_N} = \frac{U_f - I_f \cdot R_3}{U_f/R_3 - I_f} = R_3 \cdot \frac{U_f - I_f \cdot R_3}{U_f - I_f \cdot R_3} = R_3$

Por lo tanto, el circuito equivalente de Thevenin, con la carga R_2 conectada, resulta:



Debe quedar bien claro que el circuito de Thevenin está conformado estrictamente por U_{Th} en serie con R_{Th} , es decir, el circuito que la resistencia de carga R_2 "ve" entre A y B.

Reemplazando valores y haciendo los cálculos: $U_{Th} = U_f - I_f \cdot R_3 = 10V - 5A \cdot 1\Omega = 5V$; $R_{Th} = R_3 = 1\Omega$

La tensión en R_2 resulta: $U_{R2} = \frac{U_{Th} \cdot R_2}{R_2 + R_{Th}} = \frac{5V \cdot 1\Omega}{1\Omega + 1\Omega} = 2,5V$

- b) El primer paso consiste en desconectar a la carga. Luego se aplica un cortocircuito entre A y B y se calcula la corriente de Norton. Observar que este paso ya se realizó en el inciso anterior.



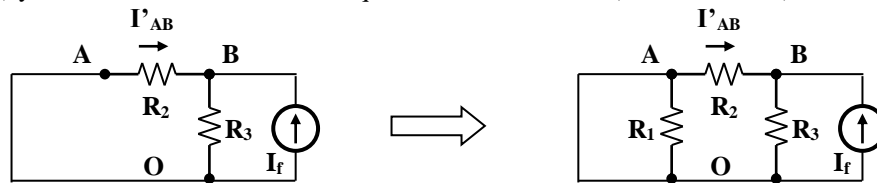
La conductancia de Norton se calcula conociendo la corriente de Norton y la tensión entre **A** y **B** a circuito abierto (tensión de Thevenin) que también se realizó en el punto anterior. Además, la conductancia de Norton es la inversa de la resistencia de Thevenin. Esto surge de la equivalencia de los circuitos de Thevenin y Norton.

$$I_N = U_f / R_3 - I_f = 10V / 1\Omega - 5A = 5A$$

$$G_N = 1/R_{Th} = 1S$$

La corriente en R_2 resulta:
$$I_{R_2} = \frac{I_N \cdot G_2}{G_2 + G_N} = \frac{5A \cdot 1S}{1S + 1S} = 2,5A$$

- c) Primero se anula la fuente de tensión. Aquí vale detenerse para efectuar un comentario importante. Muchas veces se utiliza el término “pasivar” en lugar de “anular”, que deben entenderse como sinónimos; aunque este último resulta más gráfico e intuitivo que el primero, dado que “anular” significa “dar por nulo” o “hacer cero”. Esta idea extrapolada al concepto de fuentes de tensión y corriente significa que una fuente de tensión nula equivale a tensión cero (cortocircuito) y una fuente de corriente nula equivale a corriente cero (circuito abierto).

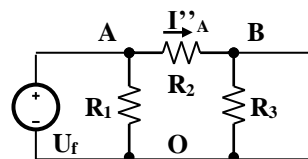


Conviene plantear la corriente en el sentido que pide el ejercicio.

Planteando la división de corrientes:
$$I'_{AB} = - \frac{I_f \cdot G_2}{G_2 + G_3}$$

El signo negativo de la ecuación se debe al planteo de sentido inverso que se propone para el cálculo de la corriente. Recordar que el símbolo ‘ que acompaña a I_{AB} identifica a la componente debida a la fuente de corriente con la fuente de tensión anulada, en este caso.

Se procede a pasivar (anular) la fuente de corriente, de acuerdo a lo comentado más arriba:



Se calcula la corriente entre A y B sin modificar el sentido de corriente:
$$I''_{AB} = \frac{U_f}{R_2 + R_3}$$

Recordar que el símbolo “ que acompaña a I_{AB} identifica a la componente debida a la fuente de tensión con la fuente de corriente anulada, en este caso.

La corriente total consiste en la suma de las corrientes calculadas en cada paso:

$$I_{AB} = I'_{AB} + I''_{AB} = - \frac{I_f \cdot G_2}{G_2 + G_3} + \frac{U_f}{R_2 + R_3}$$

Realizando los cálculos:
$$I_{AB} = - \frac{5A \cdot 1S}{1S + 1S} + \frac{10V}{1\Omega + 1\Omega} = 5A - 2,5A = 2,5A$$

Calculando la tensión: $U_{R_2} = U_{AB} = I_{AB} \cdot R_2 = 2,5V$, con lo cual queda verificado el cálculo.

COMENTARIOS FINALES Y CONCLUSIONES

En el desarrollo de este **TAP** han resultado importantes los siguientes aspectos:

1. El análisis de la topología de un circuito buscando plantear el sistema de ecuaciones más sencillo que permita su resolución (economía de ecuaciones e incógnitas).
2. Con relación a lo anterior, comparar las diferentes alternativas de solución de un circuito, de manera de poder elegir la más eficiente.
3. La definición de circuito lineal.
4. El uso superposición en la resolución de circuitos lineales.
5. La definición y aplicación de dualidad.



6. La aplicación de diferentes métodos de resolución de circuitos para sistematizar el uso de ecuaciones y para simplificar partes de circuitos cuando sólo interesa el comportamiento de esa parte desde el punto de vista de sus bornes y no dentro.
7. La equivalencia de fuentes reales o, también llamada equivalencia de los circuitos de Thevenin y Norton.