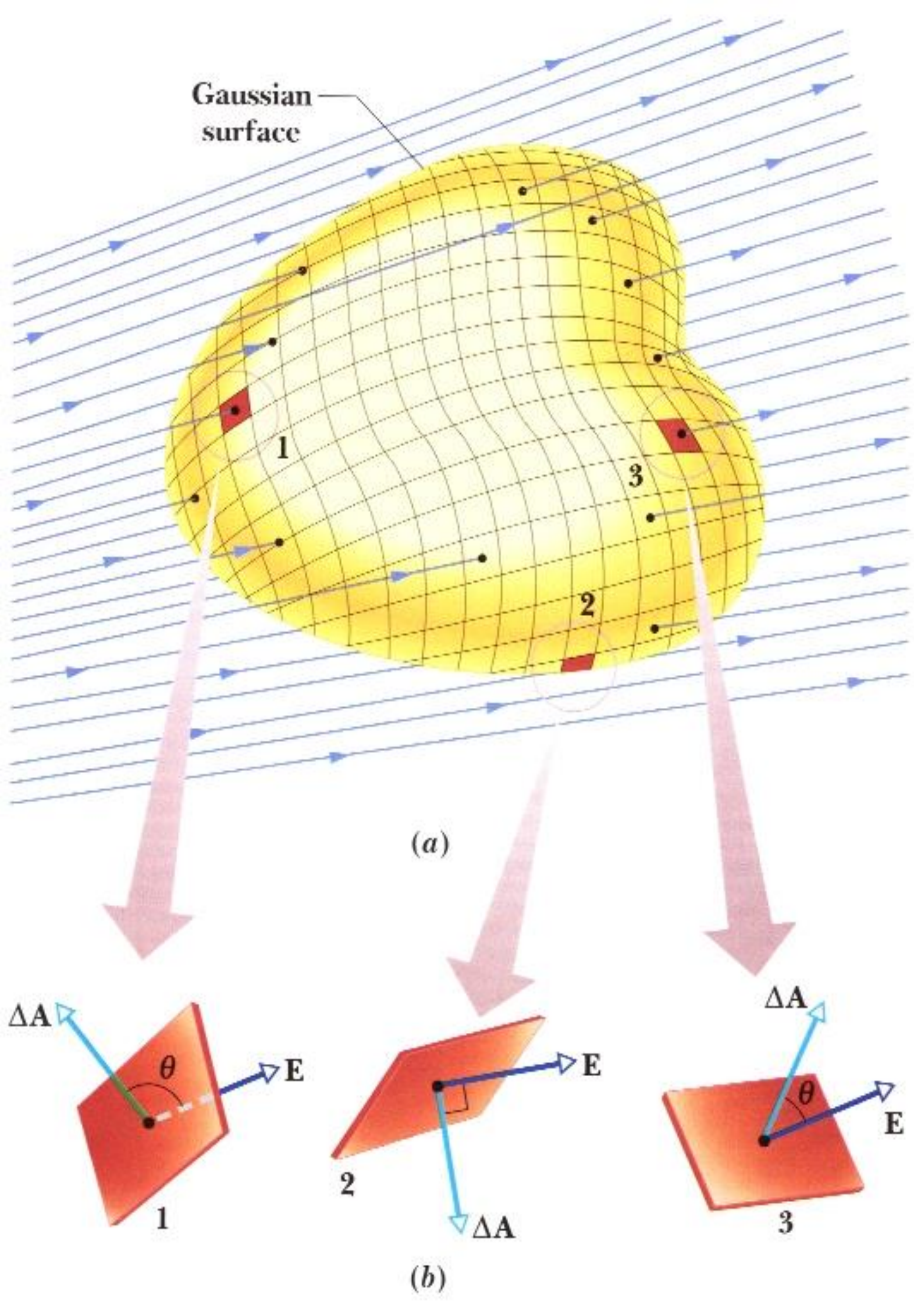
Ecuaciones de Maxwell del Electromagnetismo

Leyes integrales del campo eléctrico y magnético

Vamos a ver cómo se resumen las propiedades integrales del campo eléctrico y del campo magnético y la forman en la que se combinan entre sí para dar las leyes de un campo unificado, llamado electromagnético.

También veremos cómo pasamos de ecuaciones integrales a ecuaciones diferenciales, que son las que se utilizan para resolver problemas concretos



El <u>teorema de Gauss</u> afirma que el flujo del **campo eléctrico** a través de una superficie cerrada es a la carga neta en el interior de dicha superficie

Es una medida del nº total neto de líneas de campo que atraviesan una superficie cerrada arbitraria.

$$\Phi = \oiint_{s} \vec{E} \bullet d\vec{a} = \frac{q_{neta}}{\varepsilon_0}$$

$$\oint\!\!\oint_s \vec{E} \bullet d\vec{a} = \frac{q_{neta}}{\varepsilon_0}$$

$$q_{neta} = \iiint_{Vol} \rho \, dV$$

$\rho =$ densidad volumétrica de carga

Teorema de la divergencia

$$\oint\!\!\oint_s \vec{E} \bullet d\vec{a} = \iiint_{Vol} \left(\vec{\nabla} \bullet \vec{E}\right) dV$$

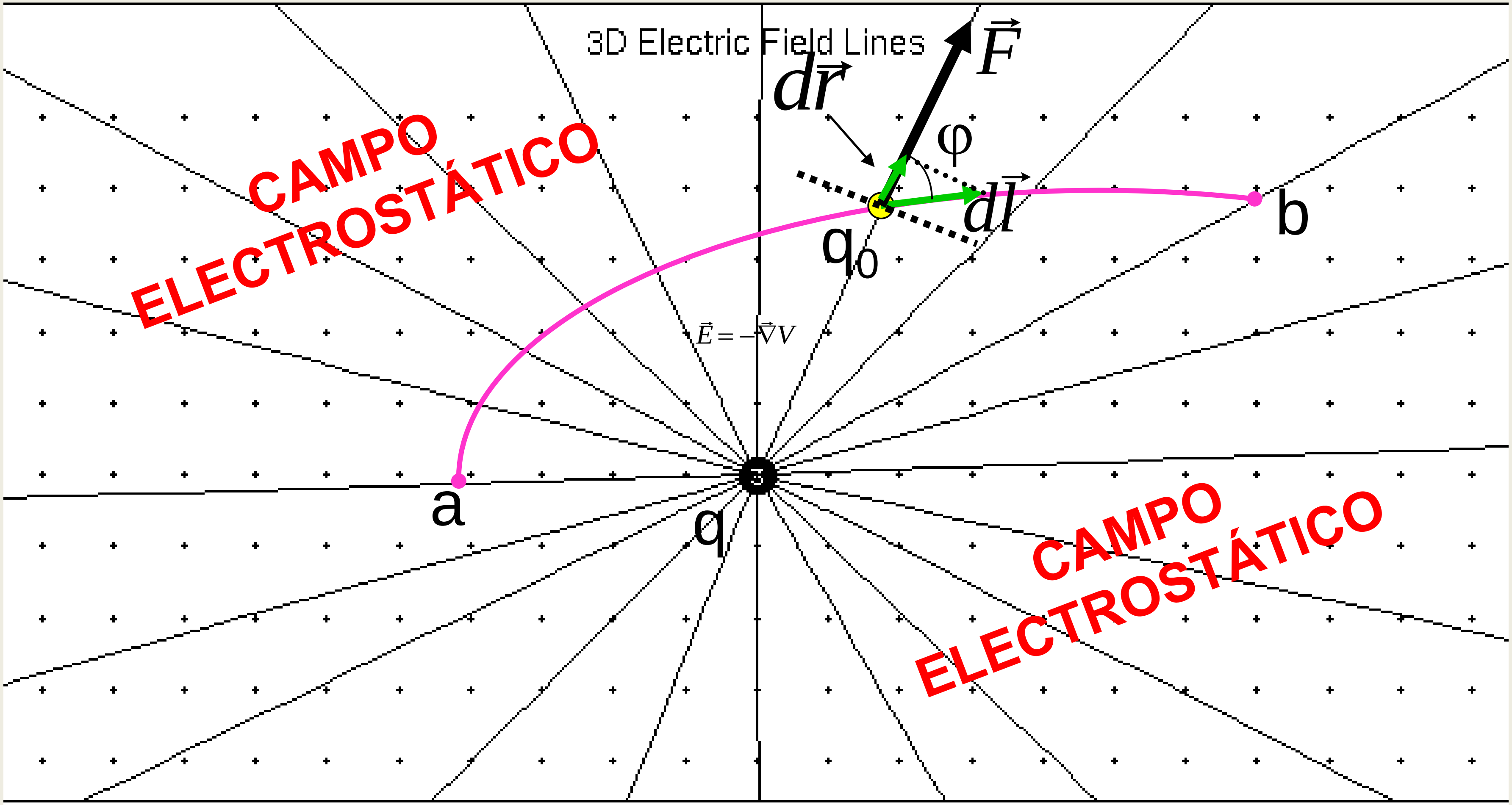
$$\iiint_{Vol} \left(\vec{\nabla} \bullet \vec{E}\right) dV = \iiint_{Vol} \frac{\rho}{\varepsilon_0} dV$$

Como los volúmenes son arbitrarios, la igualdad se debe cumplir entre los integrandos

$$\therefore \quad \boxed{\vec{\nabla} \bullet \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

$$\oint_C \vec{E} \bullet d\vec{l} = 0 \quad \forall\, curva\, C$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$



Electric field is everywhere tangent to field lines.
(Field lines may be drawn inaccurately in regions of very small field.)

$$\oint_C \vec{E}_{\text{electrostát}} \bullet d\vec{l} = 0 = \iint_A \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}_{\text{electrostát}} \right) \bullet d\vec{a}$$

Teorema de Stokes

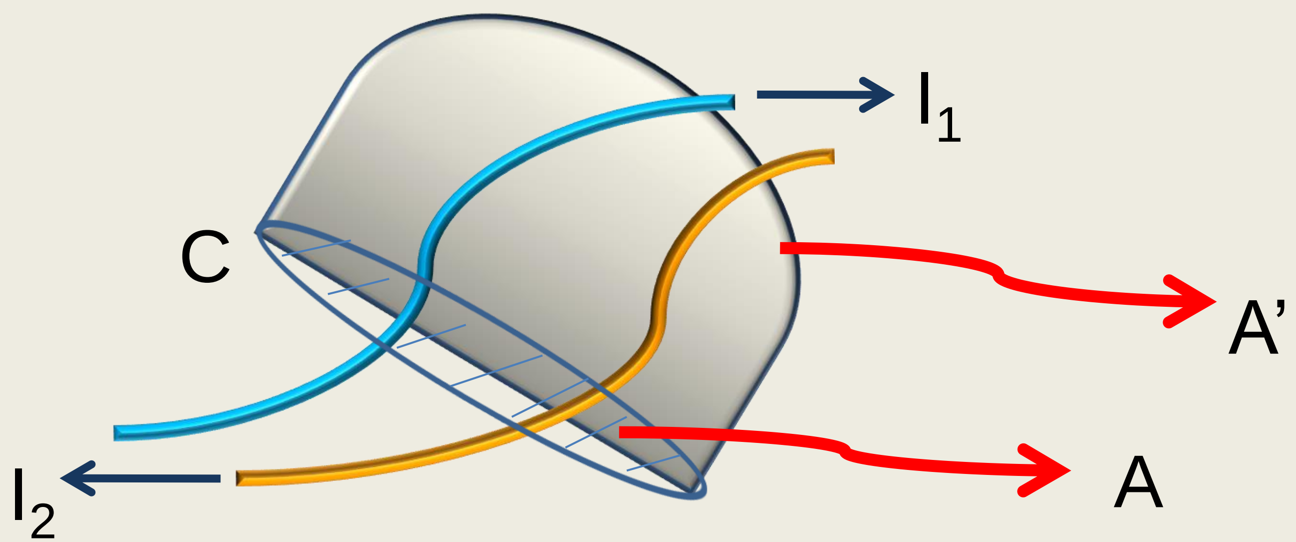
Como C es arbitraria, la segunda igualdad la debe cumplir el integrando

$$\therefore \qquad \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E}_{\text{electrostát}} = 0}$$

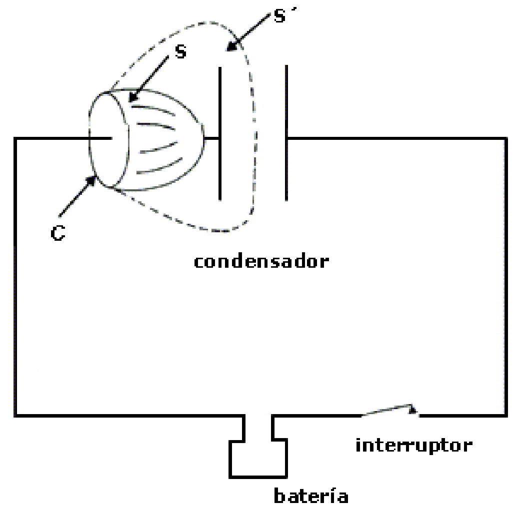
Leyes integrales del campo magnético

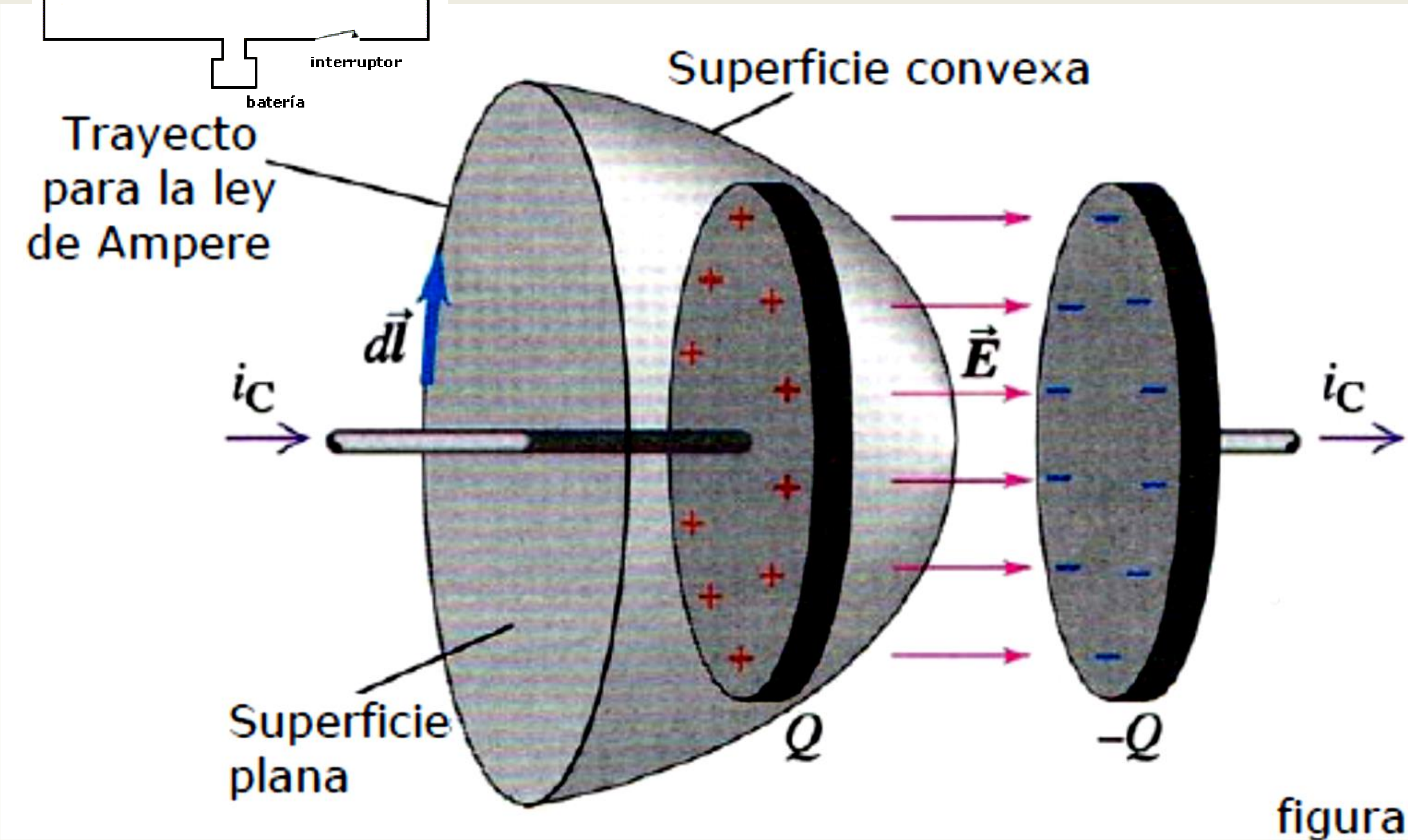
Circulación de B: $$\boxed{\oint_C \vec{B} \bullet d\vec{l} = \mu_0 \; I_{Neta}}$$ Ley de Ampere

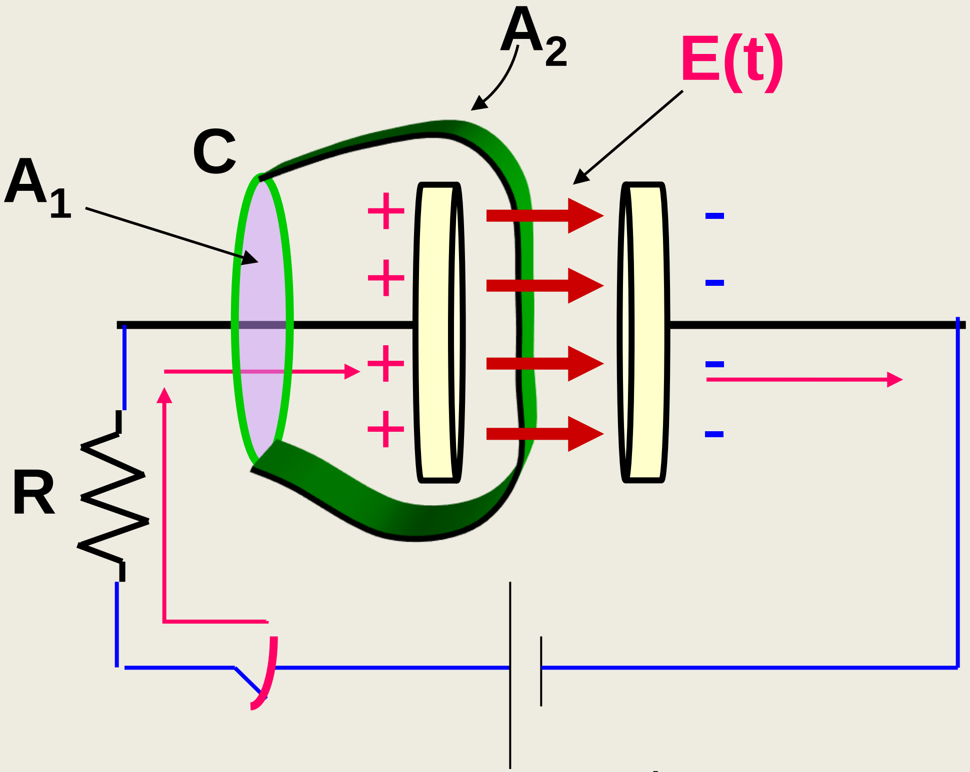
La circulación de B alrededor de cualquier trayectoria cerrada C es proporcional a la corriente neta que pasa a través de cualquier superficie limitada por C



¿Se cumple la Ley de Ampere para cualquier caso? Veamos el ejemplo de un **capacitor en proceso de carga (corriente transitoria)**







¿I = I(t)?

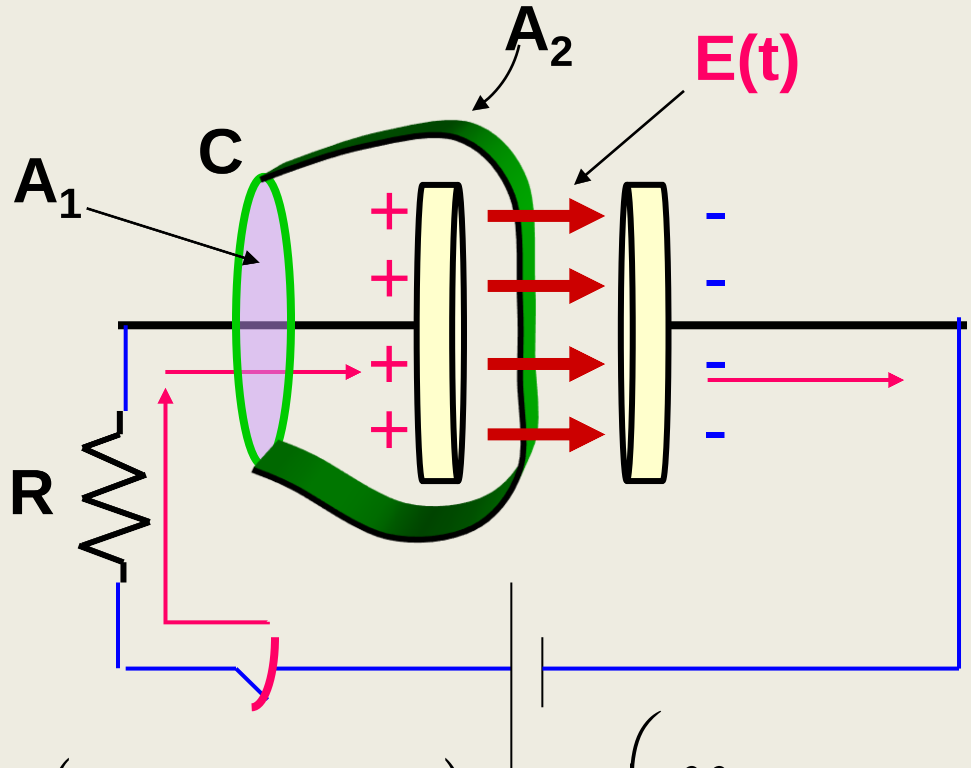
Cuando se cierra S, circula una corriente I(t) que atraviesa el área A_1 pero NO el área A_2. Como el capacitor comienza a cargarse, E = E(t), por lo tanto debe agregarse un término a la Ley de Ampere.

$$q = \varepsilon_0 \, A \, E = \varepsilon_0 \, \phi_E$$

$$I_{\text{cond}} = \frac{dq}{dt} = \boxed{\varepsilon_0 \, \frac{d\phi_E}{dt} \equiv I_{\text{desplazamiento}}}$$

$\therefore$ la ley de Ampere se reescribe como:

$$\boxed{\oint_C \vec{B} \bullet d\vec{l} = \mu_0 \left(I_{\text{cond}} + I_{\text{desplazamiento}} \right) \text{ Ampere - Maxwell}}$$



$$\oint_C \vec{B} \bullet d\vec{l} = \mu_0 \left(I_{\text{cond}} + I_{\text{desplaz}}\right) = \mu_0 \left(\iint_A \vec{J}_{\text{cond}} \bullet d\vec{a} + \iint_A \vec{J}_{\text{desplaz}} \bullet d\vec{a} \right)$$

$$\text{Teorema de Stokes}: \oint_C \vec{B} \bullet d\vec{l} = \iint_A \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) \bullet d\vec{a}$$

$$\therefore \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J}_{\text{cond}} + \vec{J}_{\text{desplaz}}\right)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\left(\vec{J}_{\text{cond}}+\vec{J}_{\text{desplaz}}\right)$$

$$\vec{J}_{\text{cond}}=\sigma\,\vec{E}\ \ (\text{ley de Ohm});\qquad \vec{J}_{\text{desplaz}}=???$$

$$I_{\text{desplaz}}\equiv\varepsilon_0\,\frac{d\phi_E}{dt}=\varepsilon_0\,\frac{d\left(\iint_A\vec{E}\bullet d\vec{a}\right)}{dt}=\varepsilon_0\left(\iint_A\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\bullet d\vec{a}\right)$$

$$I_{\text{desplaz}}\equiv\iint_A\vec{J}_{\text{desplaz}}\bullet d\vec{a}$$

$$\therefore\quad \vec{J}_{\text{desplaz}}=\varepsilon_0\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\qquad\Rightarrow\text{reemplazando en }\vec{\nabla}\times\vec{B}:$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\left(\sigma\,\vec{E}+\varepsilon_0\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

Ley de Gauss para campo magnético

Las líneas de campo magnético forman lazos cerrados.

No comienzan ni terminan en ninguna fuente.

No existen monopolos magnéticos

$$\Phi_{magnético} = \iint_S \vec{B} \bullet d\vec{a}$$

$$\text{Sobre una superficie cerrada:}$$

$$\boxed{\oiint_S \vec{B} \bullet d\vec{a} = 0}$$

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{B} \bullet d\vec{a} = 0 = \iiint_V \left(\vec{\nabla} \bullet \vec{B}\right) dV$$

Teorema de la divergencia

La superficie S limita al volumen V, y como ambos son arbitrarios, <u>la igualdad debe cumplirse para los integrandos</u>

$$\therefore \quad \vec{\nabla} \bullet \vec{B} = 0$$

¡ALGUNAS COSAS PARA TENER EN CUENTA!

$$\varepsilon = - \frac{d\phi_B}{dt}$$

LEY DE INDUCCIÓN DE FARADAY

LEY DE LENZ

La fem inducida existe INDEPENDIENTEMENTE de que haya o no una espira: ésta sólo nos permite medir la corriente inducida

La fem inducida está DISTRIBUÍDA a lo largo de la trayectoria cerrada: NO ESTA UBICADA EN UN LUGAR PARTICULAR

La fem inducida aparece cuando hay una VARIACIÓN TEMPORAL DEL FLUJO DEL CAMPO MAGNÉTICO QUE ATRAVIESA (ENLAZA) EL ÁREA DE LA ESPIRA

$$\oint_C \vec{E}_{IND} \bullet d\vec{l} = \varepsilon_{IND} = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d\left(\iint_A \vec{B} \bullet d\vec{a}\right)}{dt} = -\iint_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \bullet d\vec{a}$$

Ley de inducción de Faraday

Definición de fem: trabajo realizado por unidad de carga = circulación del campo eléctrico.

Si el área no varía en el tiempo, podemos “ingresar” la derivada temporal en el integrando, afectando solo a B como derivada parcial.

$$\oint_C \vec{E}_{IND} \bullet d\vec{l} = \iint_A \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}_{IND}\right) \bullet d\vec{a} = -\iint_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \bullet d\vec{a}$$

La curva cerrada C es arbitraria y limita al área A

Como las áreas A son las mismas y son arbitrarias, entonces la igualdad vale para los integrandos

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{E}_{IND}\right) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{como}\ \vec{E}_{Total} = \vec{E}_{electrost} + \vec{E}_{IND}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}_{TOTAL}\right) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Ecuaciones de Maxwell
(resumen)

Ecuaciones integrales		Ecuaciones diferenciales
$\oiint_{s} \vec{E} \bullet d\vec{a} = \frac{q_{neta}}{\varepsilon_0}$	Ley de Gauss (E)	$\vec{\nabla} \bullet \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$
$\oiint_{S} \vec{B} \bullet d\vec{a} = 0$	Ley de Gauss (B)	$\vec{\nabla} \bullet \vec{B} = 0$
$\oint_{C} \vec{E}_{IND} \bullet d\vec{l} = \varepsilon_{IND} = -\frac{d\phi_B}{dt}$	Ley de Faraday	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
$\oint_{C} \vec{B} \bullet d\vec{l} = \mu_0 \left(I_{\text{cond}} + I_{\text{desplaz}} \right)$	Ley de Ampere-Maxwell	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\sigma \vec{E} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$

Sitios para repasar conceptos e ideas intuitivas de la Divergencia

https://es.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/multivariable-derivatives/divergence-and-curl-articles/a/divergence

https://es.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/multivariable-derivatives/divergence-and-curl-articles/a/intuition-for-divergence-formula

Sitios para repasar conceptos e ideas intuitivas del Rotor

https://es.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/multivariable-derivatives/divergence-and-curl-articles/a/curl-warmup

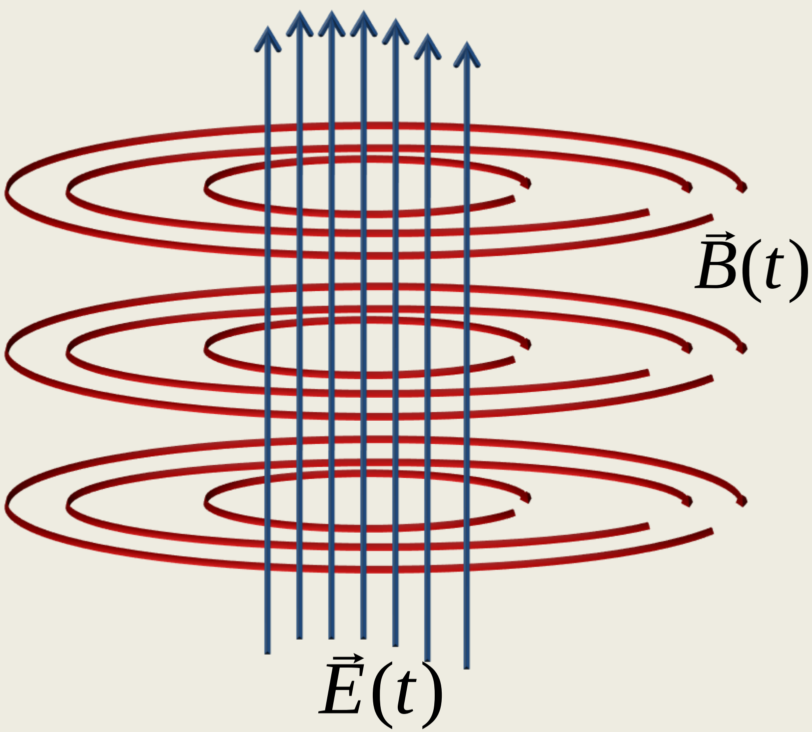
https://es.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/multivariable-derivatives/divergence-and-curl-articles/a/curl

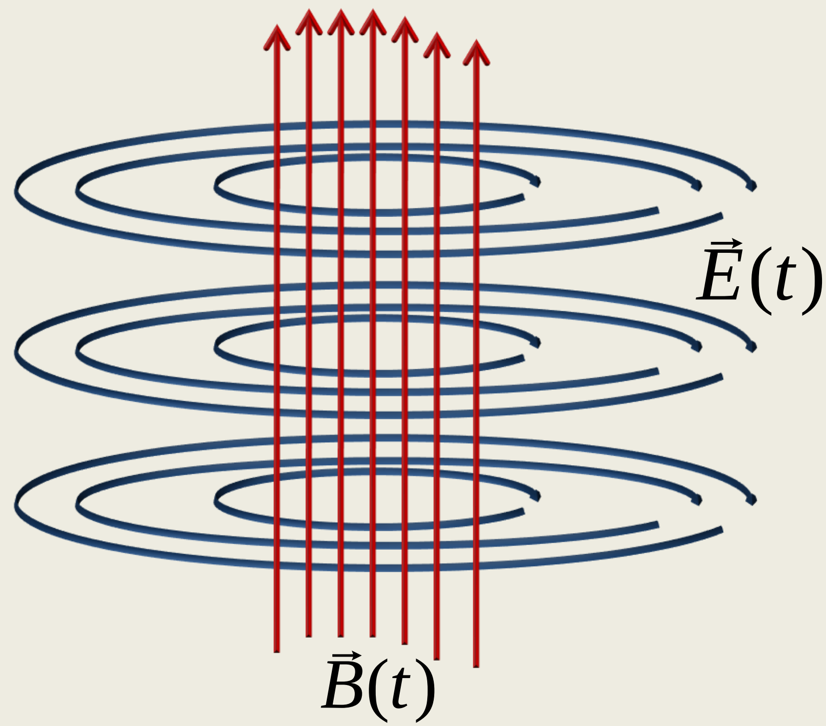
En el vacío, lejos de corrientes de conducción ($\sigma = 0$)
lejos de distribución de cargas ($\rho = 0$)

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{E} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Los campos aparecen en forma simétrica en este sistema de ecuaciones





$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)=-\frac{\partial\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)}{\partial t}=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\left(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)}{\partial t}=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\text{pero:}\quad \vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\quad\right)=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\bullet\quad\right)-\nabla^2$$

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\bullet\vec{E}\right)-\nabla^2\vec{E}=-\nabla^2\vec{E}$$

$$\therefore\quad \boxed{\nabla^2\vec{E}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}}$$

Ecuación de onda
para el campo eléctrico

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)}{\partial t}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)}{\partial t}=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$$

$$\text{pero:}\quad \vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\quad\right)=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\bullet\quad\right)-\nabla^2$$

$$\therefore\ \vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\bullet\vec{B}\right)-\nabla^2\vec{B}=-\nabla^2\vec{B}$$

$$\therefore\quad \boxed{\nabla^2\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}}$$

Ecuación de onda
para el campo magnético