Series de potencias

Series de potencias

Dado $z_0 \in \mathbb{C}$, una serie de potencias de $(z - z_0)$ es una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{c_n(z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0)^1 + c_2(z-z_0)^2 + \cdots + c_n(z-z_0)^n + \cdots}$$

donde $\boldsymbol{c_0, c_1, c_2, \ldots}$ es una sucesión de números complejos (que no dependen de z), llamados **coeficientes** de la serie ($\boldsymbol{c_n}$ es el ***n-ésimo*** coeficiente, que acompaña a la potencia $(z - z_0)^n$). El número $\boldsymbol{z_0}$ se llama ***centro*** de la serie de potencias. También se dice que la serie de potencias está **centrada en $\boldsymbol{z_0}$**. Observar que los términos de la serie son funciones de la variable compleja z. Las sumas parciales de al serie de potencias son funciones polinómicas: $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k (z - z_0)^k$.

Ejemplo 1

a) La serie de potencias centrada en $z_0 = -i$ cuyo coeficiente n-ésimo es $c_n = \frac{1}{(2i)^n}$ es la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2i)^n}(z+i)^n = 1 + \frac{1}{2i}(z+i) + \frac{1}{(2i)^2}(z+i)^2 + \frac{1}{(2i)^3}(z+i)^3 + \cdots = 1 - \frac{i}{2}(z+i) - \frac{1}{4}(z+i)^2 + \frac{i}{8}(z+i)^3 + \cdots$$

b) Otro ejemplo de serie de potencias es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} i^n (z+1-i)^{2n} = 1 + i(z+1-i)^2 - (z+1-i)^4 - i(z+1-i)^6 + \cdots$$

La serie está centrada en $z_0 = -1 + i$ .El coeficiente n-ésimo es $c_n = \begin{cases} i^{n/2} & \text{si} \quad n \text{ es par} \\ 0 & \text{si} \quad n \text{ es impar} \end{cases}$

Es decir, para k entero no negativo : $c_{2k} = i^k$, $c_{2k+1} = 0$.

c) Las funciones polinómicas son casos particulares de series de potencias, para las cuales sólo un número finito de coeficientes son no nulos. Por ejemplo:

$$z^3 - 5z + 2 = 2 + (-5)z + 0z^2 + 1z^3 + 0z^4 + 0z^5 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

donde $c_0 = 2$, $c_1 = -5$, $c_2 = 0$, $c_3 = 1$ y $c_n = 0$ para todo $n \geq 4$.

Los términos $c_n(z-z_0)^n$ de una serie de potencias son funciones de la variable compleja z que pueden evaluarse en cualquier $z \in \mathbb{C}$. Entonces, cada vez que en una serie de potencias se reemplaza z por un número complejo particular, se obtiene una serie de números complejos distinta, la que dependiendo del valor z reemplazado podrá resultar convergente o divergente.

Ejemplo 2

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2i)^n}(z+i)^n = 1 - \frac{i}{2}(z+i) - \frac{1}{4}(z+i)^2 + \frac{i}{8}(z+i)^3 + \cdots$$

- Si se reemplaza $z = -i$ se obtiene la serie convergente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2i)^n}(-i+i)^n = 1 - \frac{i}{2}(-i+i) - \frac{1}{4}(-i+i)^2 + \frac{i}{8}(-i+i)^3 + \cdots = 1$$

- Si se reemplaza $z = 0$ se obtiene la siguiente serie geométrica de razón $r = \frac{1}{2}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2i)^n}(0+i)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

  que converge pues $|r| = \frac{1}{2} < 1$.

- Si se reemplaza $z = 3 - i$ se obtiene la siguiente serie geométrica de razón $r = \frac{3}{2i}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2i)^n}(3-i+i)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(2i)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2i}\right)^n$$

  que diverge porque $|r| = \frac{3}{2} > 1$.

- Y así, podríamos continuar particularizando z en cualquier número complejo y analizando la convergencia de la serie numérica obtenida.

Notar que si en una serie de potencias centrada en z_0 se reemplaza z por z_0, la serie obtenida es claramente convergente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_0 - z_0)^n = c_0 + \underbrace{c_1(z_0 - z_0)^1}_{=0} + \underbrace{c_2(z_0 - z_0)^2}_{=0} + \cdots + \underbrace{c_n(z_0 - z_0)^n}_{=0} + \cdots = c_0$$

De hecho, las sumas parciales de esta serie son $S_n = c_0$ para todo n.

Se llama ***región de convergencia*** de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ al conjunto $D_{CV} \subseteq \mathbb{C}$ de los $z \in \mathbb{C}$ que reemplazados en la serie dan lugar a una serie numérica convergente. Es claro que $z_0 \in D_{CV}$ así que para una serie de potencias D_{CV} nunca es vacío.

El ejemplo 2 muestra que $z_0 = -i$ y $z = 0$ pertenecen a la región de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2i)^n}(z + i)^n$ pero $z = 3 - i$ no.

Toda serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ define una <u>función</u> $S: D_{CV} \to \mathbb{C}$, donde $S(z)$ es la suma de la serie numérica obtenida particularizando el valor $z \in D_{CV}$. Se dice que la serie converge a la función $S(z)$, siendo esta última la **suma de la serie**. Se anota:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n = S(z) \text{ si } z \in D_{CV}$$

En general, para hallar la región de convergencia de una serie de potencias se analiza su convergencia absoluta tratando $z \in \mathbb{C}$ en forma genérica y aplicando criterios de convergencia apropiados. Listemos algunos de ellos.

Criterio para series geométricas: Sea $r \in \mathbb{C}$. Si $|r| < 1$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ converge y vale $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$

Si $|r| \geq 1$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ diverge.

Criterio para p-series: Sea $p > 0$. Si $p > 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge. Si $p \leq 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ diverge.

Criterio de comparación: Supongamos que $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y se verifica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

Criterio de comparación en el límite: Supongamos que $a_n > 0$, $b_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ existe y $L > 0$, entonces las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son ambas convergentes o ambas divergentes.

Criterio del cociente: Dada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ con $c_n \neq 0, \forall n$, sea $L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$. Si L existe o $L = \infty$, se verifica:

- Si $L > 1$ o $L = \infty$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ es absolutamente convergente.
- Si $0 \leq L < 1$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ diverge.
- Si $L = 1$, el criterio no es concluyente.

Criterio de la raíz: Dada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ con $c_n, \forall n$, sea $L = \lim_{n\to\infty} |c_n|^{1/n}$. Si L existe o $L = \infty$, se verifica:

- Si $L > 1$ o $L = \infty$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ es absolutamente convergente.
- Si $0 \leq L < 1$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ diverge.
- Si $L = 1$, el criterio no es concluyente.

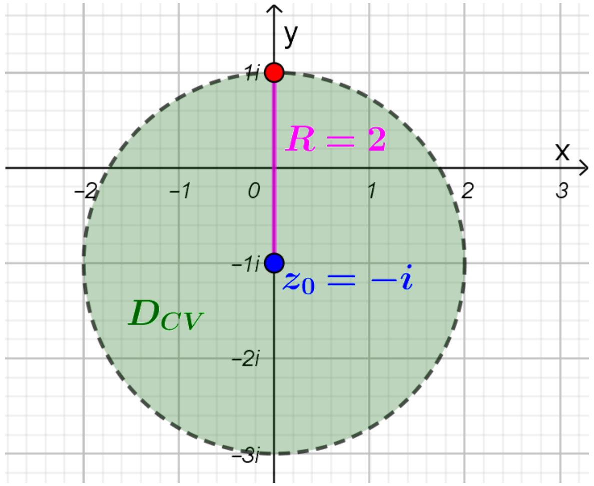
Ejemplo 3 Hallemos la región de convergencia y la suma de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2i)^n}(z+i)^n$

Cualquiera sea $z \in \mathbb{C}$, la serie dada es geométrica de razón $r = \frac{z+i}{2i}$ De la teoría de las serie geométricas sabemos que la serie dada converge si y sólo si $|r| < 1$. Analicemos cuándo ocurre esto:

$$|r| < 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z+i}{2i}\right| < 1 \Leftrightarrow \frac{|z+i|}{2} < 1 \Leftrightarrow |z+i| < 2$$

Entonces, la región de convergencia de la serie dada es el siguiente disco abierto centrado en $z_0 = -i$ de radio $R = 2$:

$$D_{CV} = \{z \in \mathbb{C}: |z+i| < 2\}$$



Notar que el resultado es consistente con lo visto en el ejemplo 2, donde habíamos visto que $z = 0 \in D_{CV}$ pero $z = 3 - i \notin D_{CV}$.

La serie converge a la suma $S(z) = \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{z+i}{2i}} = \frac{2i}{i-z}$ si $|z+i| < 2$. Es decir,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2i)^n}(z+i)^n = \frac{2i}{i-z} \quad \text{si } |z+i| < 2$$

Observación: la función $f(z) = \frac{2i}{i-z}$ es analítica en $D_{\text{Ana}}(f) = \mathbb{C} - \{i\}$. En el disco $D_{CV} = \{z \in \mathbb{C}: |z+i| < 2\}$ dicha función $f(z)$ admite la representación en serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2i)^n}(z+i)^n$ centrada en $z_0 = -i$. El valor $R = 2$ hallado anteriormente coincide con la distancia del centro $z_0 = -i$ al punto más cercano de $z_1 = i$ donde f deja de ser analítica, es decir: $R = |-i - i| = 2$. Más adelante veremos que esto no es casual.

<u>Ejemplo 4</u> Analizar la convergencia de:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{i/n}(z-i)^n$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{3n}}{n^n}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n!}\,(z+1)^n$

<u>Rta</u> En los tres casos estudiamos la convergencia absoluta.

a) ¿Para cuáles $z \in \mathbb{C}$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left|ne^{i/n}(z-i)^n\right|$ converge? Aplicamos el criterio del cociente:

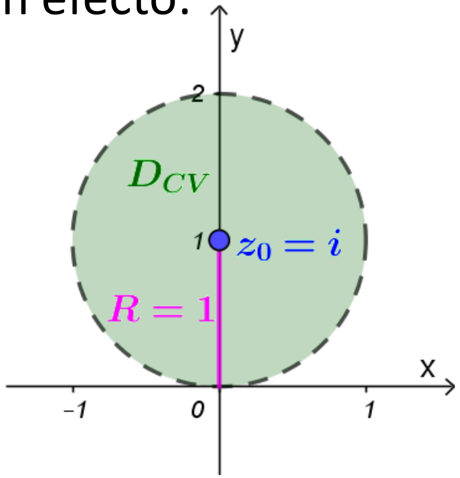
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)e^{i/(n+1)}(z-i)^{n+1}}{ne^{i/n}(z-i)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)|z-i| = |z-i|$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{i/n}(z-i)^n$

- converge (absolutamente) para los $z \in \mathbb{C}$ tales que $|z-i| < 1$.
- diverge cuando $|z-i| > 1$.

Observar que si $|z-i| = 1$ el criterio del cociente no es concluyente. Sin embargo, la serie diverge para tales z puesto que su término general no tiende a cero cuando $n \to \infty$. En efecto:
$\left|ne^{i/n}(z-i)^n\right| = n \to \infty$.

Entonces, $D_{CV} = \{z \in \mathbb{C}: |z-i| < 1\}$ es el disco abierto centrado en $z_0 = i$ de radio $R = 1$.

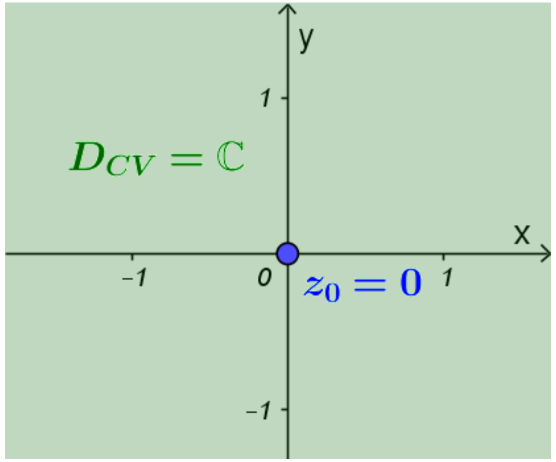


b) ¿Para cuáles $z \in \mathbb{C}$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{z^{3n}}{n^n}\right|$ converge? Podemos aplicar el criterio del cociente (ejercicio), pero en este caso es más sencillo el criterio de la raíz:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{z^{3n}}{n^n}\right|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|^3}{n} = 0 < 1, \forall z \in \mathbb{C}.$$

Entonces, la serie converge (absolutamente) en todo el plano complejo.

La región de convergencia es $D_{CV} = \mathbb{C}$.

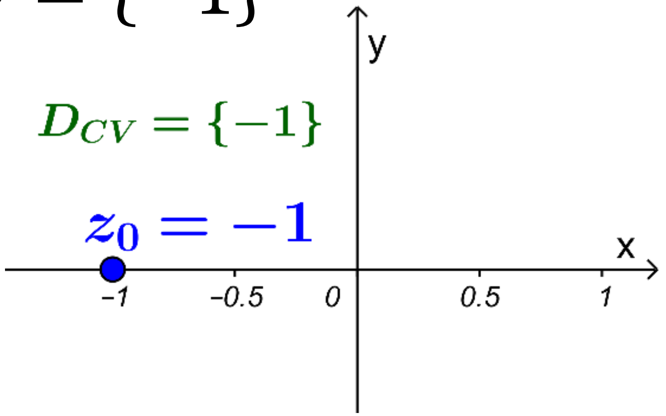


c) ¿ Para cuáles $z \in \mathbb{C}$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\left|\sqrt{n!}\,(z+1)^n\right|$ converge? Aplicamos el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sqrt{(n+1)!}\,(z+1)^{n+1}}{\sqrt{n!}\,(z+1)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{(n+1)!}{n!}}\,|z+1| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n!\,(n+1)}{n!}}\,|z+1| = \lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1}|z+1| = \infty \;\text{ si }\; z \neq -1$$

La serie sólo converge cuando $z = -1$. Es decir, $D_{CV} = \{-1\}$



Lema: Dada una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$

I) Si para algún $z_1 \neq z_0$ la serie converge, entonces converge absolutamente para z tal que $|z-z_0|<|z_1-z_0|$

II) Si para algún z_2 la serie diverge, entonces diverge para z tal que $|z-z_0|>|z_2-z_0|$

Dem

I) Supongamos que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_1-z_0)^n$ converge, con $z_1 \neq z_0$. Por condición necesaria de convergencia es $\lim_{n\to\infty} c_n(z_1-z_0)^n = 0$. En particular esta sucesión está acotada, así que existe $M>0$ tal que

$$|c_n(z_1-z_0)^n| \leq M \text{ , } \forall n \in \mathbb{N}$$

Si z es tal que $|z-z_0|<|z_1-z_0|$, se tiene $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$|c_n(z-z_0)^n| = \left|c_n(z_1-z_0)^n\left(\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right)^n\right| = |c_n(z_1-z_0)^n|\left(\frac{|z-z_0|}{|z_1-z_0|}\right)^n \leq M\left(\frac{|z-z_0|}{|z_1-z_0|}\right)^n$$

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} M\left(\frac{|z-z_0|}{|z_1-z_0|}\right)^n$ converge pues es geométrica de razón $\rho = \frac{|z-z_0|}{|z_1-z_0|} < 1$ ya que $|z-z_0|<|z_1-z_0|$.

Luego, por el criterio de comparación directa podemos afirmar que $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n(z-z_0)^n|$ converge. Así, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ es absolutamente convergente si $|z-z_0|<|z_1-z_0|$.

II) Supongamos que la serie diverge para $z=z_2$. Sea z tal que $|z-z_0|>|z_2-z_0|$. Si la serie convergiera para este z, entonces por I) debería converger para $z=z_2$, produciéndose una contradicción. Por ende, la serie ha de divergir para tales z.

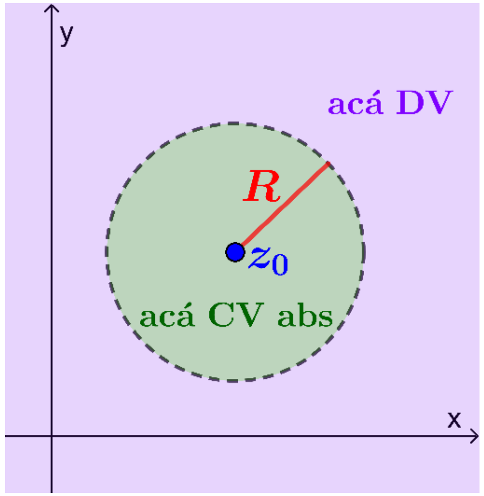
<u>Teorema de convergencia de series de potencias</u>

Dada una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, exactamente una de las siguientes afirmaciones se cumple

(I) La serie converge únicamente cuando $z = z_0$

(II) La serie converge para todo $z \in \mathbb{C}$

(III) Existe un número R, $0 < R < \infty$, tal que la serie converge absolutamente para $|z-z_0| < R$ y diverge para $|z-z_0| > R$.



En el caso III) el número R se llama el **radio de convergencia** de la serie de potencias. El conjunto $\{z \in \mathbb{C}: |z-z_0| < R\}$ es el **disco abierto de convergencia** de la serie.

En el caso I) diremos que $R = 0$ y en el caso II) que $R = \infty$.

<u>Atención</u>: en la literatura se dice que una serie de potencias es convergente si su radio de convergencia es estrictamente positivo ($0 < R \leq \infty$), es decir cuando no converge únicamente en el centro z_0.

<u>Nota</u>: el teorema anterior no afirma nada sobre la convergencia de la serie para puntos z en el borde $|z-z_0| = R$ del disco de convergencia. En general, sobre ese borde puede eventualmente haber puntos donde la serie converge (absoluta o condicionalmente) y otros donde diverge. Ello no afecta la definición del radio de convergencia.

OPTATIVO

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un subconjunto no vacío de la recta real. Supongamos que A está acotado superiormente, de modo que existe al menos una cota superior $K \in \mathbb{R}$. Entonces: $\forall a \in A, a \leq K$. Cualquier $K^* > K$ claramente también es cota superior de A.

Un resultado matemático establece que todo subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente posee una mínima cota superior $S \in \mathbb{R}$. Es decir, entre todas las cotas superiores K de A hay una que es lo más chica posible. Dicha cota superior mínima se denomina el **supremo** del conjunto y se denota "$\sup A$". Cuando el conjunto no es acotado se define $\sup A = \infty$.

Ejemplo:

$$\sup\{a \in \mathbb{R}: a < 1\} = \sup\{a \in \mathbb{R}: a \leq 1\} = \sup\{a \in \mathbb{Q}: a < 1\} = 1$$

Caracterización del supremo

Dado $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente, son equivalentes:

(s1) $S = \sup A$

(s2) $(\forall a \in A, a \leq S) \wedge (\forall \epsilon > 0, \exists a \in A \text{ tal que } S - \epsilon < a)$

Notar que en (s2) la primera condición establece que S es cota superior de A, en tanto la segunda condición dice que todo número menor que S (representado por $S - \epsilon$ con $\epsilon > 0$) no es cota superior.

Demostración del teorema de convergencia de series de potencias

Supongamos que no ocurre ni (I) ni (II). Como (I) es falsa, existe $z_1 \neq z_0$ tal que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_1 - z_0)^n$ converge. Y como (II) es falsa, existe z_2 tal que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_2 - z_0)^n$ diverge.

Sea $A = \{r \geq 0\colon \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n \text{ converge}\}$.

- A no es vacío: por ejemplo $|z_1 - z_0| \in A$.
- A está acotado superiormente. En efecto, $|z_2 - z_0|$ es cota superior de A. Si no lo fuera, habría un $r \in A$ tal que $|z_2 - z_0| < r$. Pero como $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n$ converge (porque $r \in A$) entonces por el lema $\sum_{n=0}^{\infty} c_n |z_2 - z_0|^n$ convergería y por ende también $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_2 - z_0)^n$, lo que es una contradicción con la elección de z_2.

Luego, existe $\sup A = R < \infty$. Además, dado que $|z_1 - z_0| \in A$ y $|z_1 - z_0| > 0$ (pues $z_1 \neq z_0$), entonces $R \geq |z_1 - z| > 0$ (porque R es cota superior de A). Por lo tanto, $0 < R < \infty$.

Veamos que este R verifica lo que afirma el teorema:

- Si $|z - z_0| < R$, por (s2) existe $r \in A$ tal que $|z - z_0| < r$. Y siendo $r \in A$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n$ converge. Luego, por comparación directa $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(z - z_0)^n|$ converge pues $|c_n(z - z_0)^n| \leq |c_n| r^n$. Así, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_1 - z_0)^n$ converge absolutamente.
- Si $|z - z_0| > R$, supongamos que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ convergiera. Entonces por el lema, también convergería $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n$ siendo r cualquiera con $R < r < |z - z_0|$. Pero esto significaría que $r \in A$, lo que es imposible porque $r > R = \sup A$. Por lo tanto, si $|z - z_0| > R$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z -$

<u>Ejemplo 5</u> Hallar el radio de convergencia y graficar el disco abierto de convergencia.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{(n+1)} (z-i)^n$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(1+i\sqrt{3})^n} (z-1-i)^{2n}$

<u>Rta</u>

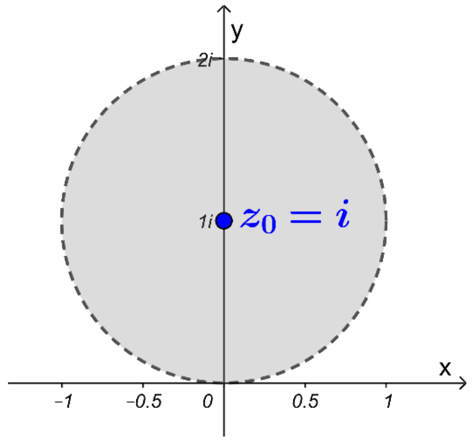
Mediante el criterio del cociente, analicemos como ya lo hemos hecho en ejemplos previos, la convergencia absoluta:

a)
$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{i^{n+1}}{(n+2)}(z-i)^{n+1}}{\frac{i^n}{(n+1)}(z-i)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{i^{n+1}(n+1)\,(z-i)^{n+1}}{i^n(n+2)(z-i)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\frac{2}{n}\right)} |z-i| = |z-i|$$

Luego, la serie converge absolutamente si $|z-i| < 1$ y diverge si $|z-i| > 1$. El radio de convergencia es $R = 1$.

El disco abierto de convergencia es $|z-i| < 1$.

<u>Notar</u>: no es necesario analizar la convergencia para los z tales que $|z-i| < 1$.



b)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{n+1}{(1+i\sqrt{3})^{n+1}}(z-1-i)^{2n+2}}{\dfrac{n}{(1+i\sqrt{3})^{n}}(z-1-i)^{2n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(1+i\sqrt{3})^{n}(n+1)(z-1-i)^{2n+2}}{(1+i\sqrt{3})^{n+1}n(z-1-i)^{2n}}\right| =$$

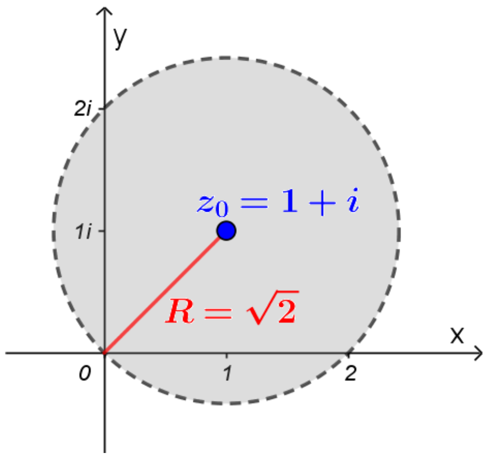
$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{|z-1-i|^2}{\left|(1+i\sqrt{3})\right|} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{|z-1-i|^2}{2} = \frac{|z-1-i|^2}{2}$$

Luego, la serie converge absolutamente si $\frac{|z-1-i|^2}{2} < 1$ y diverge si $\frac{|z-1-i|^2}{2} > 1$. Dado que $\frac{|z-1-i|^2}{2} < 1 \quad \Leftrightarrow |z-1-i| < \sqrt{2}$,

el radio de convergencia es $R = \sqrt{2}$.

El disco abierto de convergencia es

$|z-i| < \sqrt{2}$.



Suma y producto de series de potencias

Suma y producto de polinomios

Como ya observamos anteriormente, las funciones polinómicas son casos particulares de series de potencias, en las que sólo un número finito de coeficientes son distintos de cero.

Sean $f(z)$, $g(z)$ funciones polinómicas, escritas en la forma $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(z-z_0)^n$, donde $c_n = 0$ y $d_n = 0$ excepto para finitos subíndices n. Su suma y su producto pueden obtenerse siguiendo las leyes de la aritmética y agrupando términos semejantes, es decir aquellos correspondientes a una misma potencia $(z-z_0)^n$:

- $f(z) + g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} d_n(z-z_0)^n =$

$$= (c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \cdots + c_n(z-z_0)^n + \cdots) + (d_0 + d_1(z-z_0) + d_2(z-z_0)^2 + \cdots + d_n(z-z_0)^n + \cdots) =$$

$$= (c_0 + d_0) + (c_1 + d_1)(z-z_0) + (c_2 + d_2)(z-z_0)^2 + \cdots + (c_n + d_n)(z-z_0)^n + \cdots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (c_n + d_n)(z-z_0)^n \qquad (*)$$

- $f(z)g(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} d_n(z-z_0)^n\right) =$

$$= (c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \cdots)(d_0 + d_1(z-z_0) + d_2(z-z_0)^2 + \cdots) =$$

$$= (c_0d_0) + (c_0d_1 + c_1d_0)(z-z_0) + (c_0d_2 + c_1d_1 + c_2d_0)(z-z_0)^2 + \cdots + (c_0d_n + c_1d_{n-1} + c_2d_{n-2} + \cdots + c_{n-2}d_2 + c_{n-1}d_1 + c_nd_0)(z-z_0)^n + \cdots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n \quad (**) \text{ donde } b_n = \sum_{k=0}^{n} c_k d_{n-k}$$

Observar que las sumas $(*)$ y $(**)$ tienen un número finito de términos no nulos. Si por ejemplo $f(z)$ es de grado N y $g(z)$ es de grado M, entonces $c_n = 0$ para $n > N$ y $d_n = 0$ para $n > M$. Entonces:

- si $n > \text{máx}\{N, M\}$ resulta $n > N$ y $n > M$, por lo que $c_n = 0$ y $d_n = 0$, así que $(c_n + d_n) = 0$.
- si $n > N + M$ resulta $b_n = \sum_{k=0}^{n} c_k d_{n-k} = 0$ porque sus términos son todos nulos. En efecto, $k + (n-k) = n > N + M$ con lo cual o bien $k > N$ o bien $(n-k) > M$. Entonces, $c_k = 0$ o $d_{n-k} = 0$.

El resultado siguiente muestra que las series de potencias convergentes se suman y multiplican como las funciones polinómicas, dando lugar a nuevas series de potencias convergentes.

Teorema: Sean

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \text{ si } |z - z_0| < R_1$$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z - z_0)^n \text{ si } |z - z_0| < R_2$$

donde $0 < R_1 \leq \infty, 0 < R_2 \leq \infty$. Si $R = \text{mín}\{R_1, R_2\}$ entonces:

I) $f(z) + g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n + d_n)(z - z_0)^n \text{ si } |z - z_0| < R$.

II) $f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n \text{ si } |z - z_0| < R$, donde para todo n es:

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} c_k d_{n-k} = c_0 d_n + c_1 d_{n-1} + c_2 d_{n-2} + \cdots + c_{n-1} d_1 + c_n d_0$$

<u>Ejemplo 6</u> Expresar $z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(z-i)^n$ como series de potencias centrada en $z_0=i$, estableciendo el radio de convergencia.

<u>Rta</u>

$$z=i+(z-i)\ \text{ si }\ \underbrace{|z-i|<\infty}_{\text{o sea }\forall z\in\mathbb{C}}$$

Por otra parte $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(z-i)^n$ converge si $|z-i|<1$. Luego, si $|z-i|<\text{mín}\{1,\infty\}=1$ resulta:

$$z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(z-i)^n=\big(i+(z-i)\big)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(z-i)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i}{n}(z-i)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(z-i)^{n+1}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i}{n}(z-i)^n+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}(z-i)^n=i(z-i)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{i}{n}(z-i)^n+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}(z-i)^n=$$

$$=i(z-i)+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{i}{n}\right)(z-i)^n=$$

$$=i(z-i)+\left(1+\frac{i}{2}\right)(z-i)^2+\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{3}\right)(z-i)^3+\left(\frac{1}{3}+\frac{i}{4}\right)(z-i)^4\ldots\quad\text{si }\ |z-i|<1$$

Ejemplo 7: Mostrar que $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n$, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}z^n$ son convergentes y expresar su suma y su producto como series de potencias, estableciendo el radio de convergencia.

Rta Aplicando el criterio del cociente es sencillo probar que ambas series convergen absolutamente en todo el plano complejo (radios de convergencia $R_1 = R_2 = \infty$), así que también lo harán su suma y su producto (con radio de convergencia $R = \text{mín}\{R_1, R_2\} = \infty$).

Suma:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}z^n = \left(1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \cdots\right) + \left(1 - z + \frac{1}{2!}z^2 - \frac{1}{3!}z^3 + \cdots\right) =$$

$$= (1+1) + \big(1 + (-1)\big)z + \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{2!}\right)z^2 + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{3!}\right)z^3 + \cdots =$$

$$= 2 + \frac{2}{2!}z^2 + \frac{2}{4!}z^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(2n)!}z^{2n} \quad \text{si } |z| < \infty$$

Analíticamente,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!} + \frac{(-1)^n}{n!}\right)z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{n!}z^n = \sum_{\substack{n=0 \\ n\ \text{par}}}^{\infty}\frac{2}{n!}z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(2n)!}z^{2n} \quad \text{si } |z| < \infty$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}z^n\right)=\left(1+z+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\cdots\right)\left(1-z+\frac{1}{2!}z^2-\frac{1}{3!}z^3+\cdots\right)=$$

$$=(1\times 1)+(1\times(-1)+1\times 1)z+\left(1\times\frac{1}{2!}+1\times(-1)+\frac{1}{2!}\times 1\right)z^2+\left(1\times\left(-\frac{1}{3!}\right)+1\times\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!}\times(-1)+\frac{1}{3!}\times 1\right)z^3+\cdots$$

$$=1+0z+0z^2+0z^3+\cdots$$

Analíticamente,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}z^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n \quad \text{si } |z|<\infty$$

donde

$$b_1=1$$

Binomio de Newton: dados $a, b \in \mathbb{C}$ se verifica $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}=(a+b)^n$ donde $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

$$b_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}1^k(-1)^{n-k}=\frac{1}{n!}(1+(-1))^n=0 \text{ si } n\geq 1$$

de modo que

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}z^n\right]=1 \quad \text{si } |z|<\infty$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n\right)^2=\left(1+z+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\cdots\right)^{\mathbf{2}}=\left(1+z+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\cdots\right)\left(1+z+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\cdots\right)=$$

$$=(1\times 1)+((1\times 1)+(1\times 1)z+\left((1\times\frac{1}{2!})+(1\times 1)+(\frac{1}{2!}\times 1)\right)z^2+\left((1\times\frac{1}{3!})+(1\times\frac{1}{2!})+(\frac{1}{2!}\times 1)+(\frac{1}{3!}\times 1)\right)z^3+\cdots=$$

$$=1+2z+2z^2+\frac{4}{3}z^3+\cdots$$

Analíticamente,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n\right)^2=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n \quad \text{si } |z|<\infty$$

Binomio de Newton: dados $a, b \in \mathbb{C}$ se verifica $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}=(a+b)^n$ donde $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

donde

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{1}{(n-k)!}=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}1^k 1^{n-k}=\frac{1}{n!}(1+1)^n=\frac{2^n}{n!}$$

Luego,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n\right)^2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}z^n \quad \text{si } |z|<\infty$$

Ejemplo 8 Establecer una región de convergencia para el producto

$\left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}\right)$ y hallar sus primeros 4 términos como serie de potencias centrada en el origen.

Rta

- $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n$ es una serie geométrica de razón $r = 2z$. Converge absolutamente si $|z| < \frac{1}{2}$ y diverge si $|z| > \frac{1}{2}$ así que su radio de convergencia es $R_1 = \frac{1}{2}$
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}$ es una serie geométrica de razón $r = z/2$. Converge absolutamente si $|z| < 2$ y diverge si $|z| > 2$ así que su radio de convergencia es $R_2 = 2$

Como $\text{mín}\{R_1, R_2\} = \text{mín}\left\{\frac{1}{2}, 2\right\} = \frac{1}{2}$ el producto de ambas series converge si $|z| < \frac{1}{2}$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}\right) = (1 + 2z + 4z^2 + 8z^3 \ldots)\left(1 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{8}z^3 \ldots\right) =$$

$$= (1 \times 1) + \left(\left(1 \times \frac{1}{2}\right) + (2 \times 1)\right)z + \left(\left(1 \times \frac{1}{4}\right) + \left(2 \times \frac{1}{2}\right) + (4 \times 1)\right)z^2 + \left(\left(1 \times \frac{1}{8}\right) + \left(2 \times \frac{1}{4}\right) + \left(4 \times \frac{1}{2}\right) + (8 \times 1)\right)z^2$$

$$+ \left(\left(1 \times \frac{1}{16}\right) + \left(2 \times \frac{1}{8}\right) + \left(4 \times \frac{1}{4}\right) + \left(8 \times \frac{1}{2}\right) + (16 \times 1)\right) + \cdots =$$

$$= 1 + \frac{5}{2}z + \frac{21}{4}z^2 + \frac{85}{8}z^3 + \cdots \quad \text{si } |z| < \frac{1}{2}$$

Ejercicio: mostrar analíticamente que

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{n+1} - 1}{2^n.3} z^n \ \text{ si } |z| < \frac{1}{2}$$

<u>Ejemplo 9</u>: Hallar una serie de potencias de $(z-2)$ que represente a las funciones dadas en un entorno de $z_0 = 2$.

a) $f(z) = \frac{2}{z}$ b) $g(z) = \frac{4}{z+2}$ c) $h(z) = \frac{8}{z^2+2z}$

<u>Rta</u>

a)

$$\frac{2}{z} = \frac{2}{(z-2)+2} = \frac{1}{1+\left(\frac{z-2}{2}\right)} \underbrace{=}_{\substack{serie\ geom: \\ a=1 \\ r=-\frac{(z-2)}{2} \\ CV \Leftrightarrow |r|<1 \Leftrightarrow \left|-\frac{(z-2)}{2}\right|<1 \Leftrightarrow |z-2|<2}} \sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{(z-2)}{2}\right]^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n (z-2)^n \ , |z-2| < 2 = R_1$$

b)

$$\frac{4}{z+2}=\frac{4}{(z-2)+4}=$$

$$=\frac{1}{1+\left(\frac{z-2}{4}\right)}\underbrace{=}_{\substack{serie\ geom:\\ a=1\\ r=-\frac{(z-2)}{4}\\ CV \Leftrightarrow |r|<1 \Leftrightarrow \left|-\frac{(z-2)}{4}\right|<1 \Leftrightarrow |z-2|<4}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{(z-2)}{4}\right]^{n}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n}(z-2)^{n}\ ,|z-2|<4=R_2$$

c)

$$h(z)=\frac{8}{z^2+2z}=\frac{2}{z}\frac{4}{z+2}=f(z)g(z)$$

$$R=\text{mín}\{R_1,R_2\}=\text{mín}\{2,4\}=2$$

Luego, si $|z-2|<2$:

$$h(z)=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n(z-2)^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n(z-2)^n\right]$$
$$=\left[1-\frac{1}{2}(z-2)+\frac{1}{4}(z-2)^2+\cdots\right]\left[1-\frac{1}{4}(z-2)+\frac{1}{16}(z-2)^2+\cdots\right]=$$
$$=1+\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)(z-2)+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\right)(z-2)^2+\cdots=1-\frac{3}{4}(z-2)+\frac{7}{16}(z-2)^2+\cdots$$

No parece sencillo hallar el coeficiente n-ésimo de este producto… Dejamos como ejercicios probar que:

$$h(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2^{n+1}-1)}{4^n}4^n \quad \text{si } |z-2|<2$$

Tal vez le sea útil comprobar que $\sum_{k=0}^{n}4^k=\frac{4^{n+1}-1}{3}$

Podemos evitar el producto de series expresando $h(z)$ como una suma, mediante descomposición en fracciones simples y aprovechar que la suma de series es fácil de obtener.

$$h(z) = \frac{8}{z^2+2z} = \frac{8}{z(z+2)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z+2} = \frac{A(z+2)+Bz}{z(z+2)} = \frac{(A+B)z+2A}{z^2+2z}$$

$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A=8 \end{cases}$ de manera que $A=4$, $B=-4$. Entonces si $|z-2|<2$:

$$h(z) = \frac{8}{z^2+2z} = 2\frac{2}{z} - \frac{4}{z+2} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n (z-2)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n (z-2)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[2\left(-\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{4}\right)^n\right](z-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{4^n}\right)(z-2)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2^{n+1}-1}{4^n}\right)(z-2)^n = \left(\frac{2-1}{1}\right) - \left(\frac{2^2-1}{4^1}\right)(z-2) + \left(\frac{2^3-1}{4^2}\right)(z-2)^2 + \cdots =$$

$$= 1 - \frac{3}{4}(z-2) + \frac{7}{16}(z-2)^2 + \cdots + (-1)^n\left(\frac{2^{n+1}-1}{4^n}\right)(z-2)^n + \cdots \text{ si } |z-2|<2$$

Teorema (Derivación de series de potencias)

Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ tiene radio de convergencia $R > 0$ entonces $f(z)$ es analítica en el disco abierto de convergencia $|z - z_0| < R$ y la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1}$ obtenida derivando término a término la serie dada tiene el mismo radio de convergencia R y se verifica

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1} \quad \text{si } |z - z_0| < R$$

Es decir,

$$\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dz}\left(c_n (z - z_0)^n\right) \quad \text{si } |z - z_0| < R$$

Corolario

Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ para $R > 0$, entonces para todo $p = 0,1,2, \ldots$ vale:

$$f^{(p)}(z) = \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)(n-2)\ldots(n-(p-1))c_n (z - z_0)^{n-p} \quad \text{si } |z - z_0| < R$$

Ejemplo 10 Sea $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(z-i)^n$ si $|z-i| < 1$. Entonces:

$$f'(z) = \frac{d}{dz}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(z-i)^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{n}(z-i)^n\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n}(z-i)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (z-i)^{n-1} \overbrace{=}^{\substack{geom:\, a=1 \\ r=z-i \\ CV \Leftrightarrow |z-i|<1}} \frac{1}{1-(z-i)} =$$

$$= \frac{1}{1+i-z} \quad \text{si } |z-i| < 1$$

Ejemplo 11 Hallar una serie de potencias centrada en $z_0 = -i$ que represente a $g(z) = \frac{i}{z^2}$ en un entorno de z_0.

Rta Consideremos $f(z) = \frac{1}{z}$

Se tiene

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{(z+i)-i} = \frac{i}{1-\left(\frac{z+i}{i}\right)} \overbrace{=}^{\substack{geom:\, a=i \\ r=\frac{z+i}{i} \\ CV \Leftrightarrow |z+i|<1}} \sum_{n=0}^{\infty} i\left(\frac{z+i}{i}\right)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^{n-1}(z+i)^n \ \text{ si } \ |z+i| < 1$$

Entonces,

$$g(z) = \frac{i}{z^2} = -if'(z) = -i\sum_{n=1}^{\infty} n(-i)^{n-1}(z+i)^{n-1} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n(-i)^n(z+i)^{n-1} \text{ si } \ |z+i| < 1$$

Teorema (Integración de series de potencias):

Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ tiene radio de convergencia $R > 0$ entonces se verifica:

- $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(z - z_0)^{n+1}$ posee radio de convergencia R.
- $F(z)$ es un primitiva de $f(z)$ en el disco abierto de convergencia $|z - z_0| < R$.

En particular, la integral $\int f(z)dz$ es independiente del camino en el interior del disco de convergencia $|z - z_0| < R$ y se tiene:

$$\int_{z_0}^{z} \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n \right) dz = \int_{z_0}^{z} f(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{z_0}^{z} c_n(z - z_0)^n dz =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(z - z_0)^{n+1} \quad \text{si} \quad |z - z_0| < R$$

Ejemplo 12 Hallar una serie de potencias de $(z-i)$ que represente a $f(z)=(z-i)^2\mathrm{Ln}(z)$ en un entorno de $z_0=i$

Rta

$$\frac{d}{dz}\mathrm{Ln}(z)=\frac{1}{z}=\frac{1}{(z-i)+i}=\frac{-i}{1+\left(\frac{z-i}{i}\right)}\underbrace{=}_{\substack{geom:\,a=-i\\ r=-(z-i)/i\\ CV\Leftrightarrow|z-i|<1}}\sum_{n=0}^{\infty}(-i)\left[-\left(\frac{z-i}{i}\right)\right]^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-i)(i(z-i))^n=$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}i^{n+1}(z-i)^n \text{ si } |z-i|<1$$

Entonces, para $|z-i|<1$:

$$\mathrm{Ln}(z)-\mathrm{Ln}(i)=\int_i^z\frac{1}{z}dz=\int_i^z\left(-\sum_{n=0}^{\infty}i^{n+1}(z-i)^n\right)dz=-\sum_{n=0}^{\infty}\int_i^z i^{n+1}(z-i)^n dz=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^{n+1}}{n+1}(z-i)^{n+1}$$

Es decir,

$$\mathrm{Ln}(z)=\mathrm{Ln}(i)-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^{n+1}}{n+1}(z-i)^{n+1}=\frac{i\pi}{2}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^{n+1}}{n+1}(z-i)^{n+1} \text{ si } |z-i|<1$$

Por lo tanto:

$$f(z)=(z-i)^2\mathrm{Ln}(z)=\frac{i\pi}{2}(z-i)^2-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^{n+1}}{n+1}(z-i)^{n+3}=$$

$$=\frac{i\pi}{2}(z-i)^2-i(z-i)^3+\frac{1}{2}(z-i)^4+\frac{i}{3}(z-i)^5+\cdots \qquad \text{si } |z-i|<1$$