REPASO MÓDULO I: UNIDADES 1,2 y 3

1. Para cada una de las funciones siguientes hallar y graficar el dominio de derivabilidad y calcular la derivada donde exista. ¿Cuál es el dominio de analiticidad? Justificar.

   a) $f(z) = y^2 - i2xy$ b) $f(z) = (x + 3xy^2) + i(3x^2 + 3y^2 + y)$
   c) $f(z) = 3xy^2 + i(3x^2 + y^3)$ d) $f(z) = (2x^2 - y^2) + i(2y^2x + 2y^3 - 3y^2)$
   e) $f(z) = \overline{z}e^{-\operatorname{Im}(z)}$ f) $f(z) = (xy^2 + y) + i(x^2 + y - x)$
   g) $f(z) = 3x^2y - 3y^2 + i(6xy - x^3)$ h) $f(z) = 2x^2y + i(6x^2y - 20x^2)$
   i) $f(z) = (4x^3y + 4xy) - i(x^4 + 2x^2 + 4y^2)$

2. Sean $f(z) = x + i3y$, $g(z) = x - iy$. Justificar que $f(z)$ y $g(z)$ no son derivables en ningún punto pero $f(z) + g(z)$ es derivable en $\mathbb{C}$ y $f(z)g(z)$ es derivable en los puntos del eje real.

3. Mostrar que $u(x, y) = e^y \cos x - 2e^x \operatorname{sen} y$ es armónica en $D = \mathbb{R}^2$. Encontrar sus conjugadas armónicas.

4. Sea $f(z) = 2ie^z + e^{-iz}$

   a) ¿Dónde es f conforme?
   b) Determinar el ángulo de rotación de tangentes en el punto $z_0 = 0$ bajo la transformación $w = f(z)$.
   c) Hallar la ecuación de la recta tangente en $w_0 = f(0)$ a la imagen por $w = f(z)$ de la curva $C: \ y = x$.
   d) ¿Qué ángulo forman en $w_0 = f(0)$ las imágenes por $w = f(z)$ de las curvas $C_1: \ (x-1)^2 + y^2 = 1$, $C_2: \ y = x$? Justificar.

5. Hallar una transformación lineal que envíe:

   a) el rectángulo de lados: $y = x + 4$, $y = x + 8$, $y + x = -4$, $y + x = 4$ en el rectángulo de lados: $u = 7$, $u = 15$, $v = -2$, $v = -6$.
   b) el triángulo de vértices: $-4-6i$, $-4-10i$, $-2-8i$ en el triángulo de vértices: $3 + 2i$, $15 + 2i$, $9 + 8i$.
   c) el conjunto $A = \{z : \ |z + 6 - 4i| \leq 2\}$ en $B = \{w : \ |w - 8 + 6i| \leq 5\}$

6. Hallar una transformación que envíe
   $A = \left\{z : \ |z + 3 - 4i| \leq 2 \, , \operatorname{Im}(z) \geq 4 \, , \operatorname{Im}(z) \leq \sqrt{3}\operatorname{Re}(z) + 4 + 3\sqrt{3}\right\}$
   en $B = \{w : \ |w - 8 + 6i| \geq 4\}$

7. Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x+1)^2 + y^2 \geq 1 \ \wedge \ (x-2)^2 + y^2 \geq 4\}$

   a) Determinar la imagen de A por la transformación $T: w = \dfrac{4}{z}$
   b) Hallar una función $H(x, y)$ armónica en el interior del conjunto A que verifique las siguientes condiciones de contorno:

$$H(x, y) = -3 \ \text{si} \ (x+1)^2 + y^2 = 1$$
$$H(x, y) = 0 \ \text{si} \ (x-2)^2 + y^2 = 4$$

8. Dado $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, x^2 + y^2 \leq 4\}$

   a) Encontrar la imagen de A por $w = \dfrac{1}{z-2}$

   b) Hallar la distribución estacionaria de temperaturas $H(x,y)$ en la placa A suponiendo que $\nabla^2 H = 0$ en el interior de A y se verifica:

$$H(x,y) = 7 \text{ si } x^2 + y^2 = 4\,,\; x > 0\,,\; y > 0$$

$$H(x,y) = 5 \text{ sobre el resto de la frontera de } A$$

9. Sea $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, x^2 + (y-2)^2 \geq 4 \;\wedge\; y \leq 4\}$

   a) Hallar la imagen de A por $w = \dfrac{4}{z-4i}$

   b) Determinar una función $H(x,y)$ armónica en el interior del conjunto A verificando las condiciones de borde:

$$H(x,y) = -3 \text{ si } x^2 + (y-2)^2 = 4$$

$$H(x,y) = 2 \text{ si } y = 4$$

10. Sea $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, x^2 + (y-1)^2 \leq 2 \;\wedge\; x^2 + (y+1)^2 \geq 2\}$

   a) Hallar analíticamente la imagen de A por $w = \dfrac{2}{z-1}$

   b) Resolver el problema de Dirichlet para una función $H(x,y)$ armónica en el interior del conjunto A, sujeta a las condiciones de borde:

$$H(x,y) = 1 \text{ si } x^2 + (y-1)^2 = 2$$

$$H(x,y) = -1 \text{ si } x^2 + (y+1)^2 = 2$$

11. Sea $A = \left\{z \,:\, |z - i\sqrt{3}| \geq 2 \;\wedge\; y \geq 0\right\}$

   a) Hallar la imagen de A por $w = \dfrac{2}{z-1}$

   b) Hallar una función $H(x,y)$ que satisfaga $\dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0$ en el interior del conjunto A y verifique las siguientes condiciones en la frontera:

$$H(x,y) = 1 \text{ si } x^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 4\;,\; y > 0$$

$$H(x,y) = -1 \text{ si } y = 0\;,\; |x| > 1$$

12. Sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x+5)^2 + y^2 \geq 16 \ \wedge \ (x-5)^2 + y^2 \geq 16\}$

a) Hallar $T(D)$ siendo $T : w = f(z)$ donde $f(z) = \dfrac{12}{z-3}$

b) Hallar una solución $H(x, y)$ de la ecuación de Laplace en el interior del conjunto D que verifique las condiciones de borde:

$$H(x,y) = 0 \ \text{ si } \ (x+5)^2 + y^2 = 16$$

$$H(x,y) = 4 \ \text{ si } \ (x-5)^2 + y^2 = 16$$

13. Sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq -4 \ \wedge \ (x-1)^2 + y^2 \geq 9\}$

a) Hallar $f(D)$ siendo $f(z) = 1 + \dfrac{8}{z}$

b) Hallar una solución $H(x, y)$ de la ecuación de Laplace en el interior del conjunto D que verifique las condiciones de borde:

$$H(x,y) = 0 \ \text{ si } \ x = -4$$

$$H(x,y) = 2 \ \text{ si } \ (x-1)^2 + y^2 = 9$$

14. a) Calcular $\displaystyle\int_C \frac{\overline{z}}{\operatorname{Im}(z)}\, dz$ siendo C el segmento dirigido desde $z_1 = 1 + i$ hasta $z_2 = 2 + 2i$.

b) Mostrar que $\displaystyle\oint_C \frac{p(z)}{(z-i)^8}\, dz = 0$ si $p(z)$ es polinómica de grado a lo sumo 6 y C es curva cerrada, simple, suave o suave por tramos, recorrida en sentido antihorario y tal que $i \notin C$.

c) ¿Es la integral $\displaystyle\int_C \left(z - \frac{1}{z}\right)^7 \left(1 + \frac{1}{z^2}\right) dz$ independiente del camino en el dominio $D = \mathbb{C} - \{0\}$? Calcular:

$$\int_1^i \left(z - \frac{1}{z}\right)^7 \left(1 + \frac{1}{z^2}\right) dz$$

15. a) Analizar si la integral $\displaystyle\int_C \left[8z^{15} - 3 + \frac{4}{z+1} + \frac{2}{(z+1)^3}\right] dz$ es independiente del camino en $D = \{z : \operatorname{Re}(z) > -1\}$.

b) Calcular

$$\int_C \left[8z^{15} - 3 + \frac{4}{z+1} + \frac{2}{(z+1)^3}\right] dz$$

siendo C la concatenación de C_1, seguida de C_2, seguida de C_3, donde:
$C_1 : |z + i| = |z - 1|$ desde $z_1 = 0$ hasta $z_2 = 1 - i$
$C_2 : |z - 1| = 1$ antihoraria desde $z_2 = 1 - i$ hasta $z_3 = 2$
$C_3 : |z - 2 - 2i| = |z|$ desde $z_3 = 2$ hasta $z_4 = 2i$

16. Si $C: \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{36} = 1$ con orientación antihoraria, hallar

$$I = \oint_C \left[\frac{e^{\frac{3}{z-8}}}{10 - iz} + \frac{3}{z^5 - 2z^4 + 2z^3} + \operatorname{sen}(4iz^2) \right] dz$$

17. Calcular

$$\int_C \left[4ze^{z^2} + 2 + 3\operatorname{Re}(z) + \frac{1}{(z+4)^3} \right] dz$$

siendo $C: |z + 2i| = 1$ desde $-3i$ hasta $-i$ recorrida en sentido antihorario.

18. Calcular

$$I = \oint_C \frac{z + 6i}{z^6 - 16z^2}\, dz$$

a lo largo de cada uno de las siguientes caminos:

a) $C: |z - 2| = \dfrac{1}{2}$ recorrida en sentido antihorario.

b) $C: |z - 2i| = \dfrac{1}{2}$ recorrida en sentido horario.

c) $C: |z + 2| = \dfrac{1}{2}$ recorrida en sentido antihorario.

d) $C: |z + 2i| = \dfrac{1}{2}$ recorrida en sentido horario.

e) $C: |z| = \dfrac{1}{2}$ recorrida en sentido antihorario.

f) C es la frontera antihoraria del cuadrado de lados $x = \pm 1$, $y = -1$, $y = -3$.

g) $C: |z + 6 + 8i| = 2$ recorrida en sentido antihorario.

h) C es la frontera horaria del rectángulo de lados $x = \pm 3$, $y = \pm 1$.

i) C es la frontera horaria del rectángulo de lados $x = \pm 1$, $y = -1$, $y = 4$.

j) $C: |x| + |y| = 10$ recorrida en sentido antihorario.

19. Calcular

$$\oint_C \left(\frac{\cos(\pi z^2)}{z^2 + 1} + \frac{\operatorname{Ln}(4 - z^2)}{z^2 + 8i} \right) dz$$

siendo $C: |z - i| = 1$ con orientación antihoraria.

20. Calcular

$$\oint_C \left[\frac{2z + 1}{(z^2 + z - 2)^5} + \frac{z + 1}{(z - 1)(z^2 + z - 2)} \right] dz$$

siendo C la frontera antihoraria del rectángulo de vértices: $3+2i$, $-4+2i$, $-4-2i$, $3 - 2i$.