María Valeria Calandra

6)a) Sea $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una v.a. $B(1, p)$. Hallar un estimador de máxima verosimilitud (E.M.V.) de p.

b) Se selecciona una muestra aleatoria de n cascos para ciclistas fabricados por cierta compañía.

Sea X = el número entre los n que tienen defectos y p = P(el casco tiene defecto). Supongamos que solo se observa X (el número de cascos con defectos).

b₁) Si $n = 20$ y $x = 3$, ¿cuál es la estimación de p?

b₂) Si $n = 20$ y $x = 3$, ¿cuál es el E.M.V. de la probabilidad $(1\text{-}p)^5$, de que ninguno de los siguientes cinco cascos que se examinen tenga defectos?

a) $L(X_1 X_2 X_3 \ldots\ldots X_n, p) = \binom{1}{X_1} p^{X_1}(1-p)^{1-X_1} \binom{1}{X_2} p^{X_2}(1-p)^{1-X_2} \ldots\ldots\ldots \binom{1}{X_n} p^{X_n}(1-p)^{1-X_n}$

Donde $X_i = \begin{cases} 1, & si\ el\ iésimo\ ensayo\ es\ un\ éxito \\ 0, & caso\ contrario \end{cases}$

Por lo tanto $L(X_1 X_2 X_3 \ldots\ldots X_n, p) = p^{X_1}(1-p)^{1-X_1} p^{X_2}(1-p)^{1-X_2} \ldots\ldots\ldots p^{X_n}(1-p)^{1-X_n}$

Dado que $\binom{1}{X_i} = 1$ para todo i ya que X_i vale 0 o 1

$$L(X_1 X_2 X_3 \ldots\ldots X_n, p) = p^{X_1+X_2+\cdots\ldots+X_n}\ (1-p)^{n-(X_1+X_2+\cdots\ldots+X_n)}$$

$$\ln\big(L(X_1 X_2 X_3 \ldots\ldots X_n, p)\big) = (X_1 + X_2 \ldots\ldots + X_n)\ln(p) + (n - (X_1 + X_2 \ldots\ldots + X_n))\ln(1-p)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dp}}\ln\big(L(X_1 X_2 X_3 \ldots\ldots X_n, p)\big) = \frac{(X_1 + X_2 \ldots\ldots + X_n)}{p} - \frac{(n - (X_1 + X_2 \ldots\ldots + X_n))}{1-p} = 0$$

$$\frac{(X_1 + X_2 \ldots\ldots + X_n)}{p} = \frac{(n - (X_1 + X_2 \ldots\ldots + X_n))}{1-p}$$

$$\frac{(1-p)}{p} = \frac{(n - (X_1 + X_2 \ldots\ldots + X_n))}{(X_1 + X_2 \ldots\ldots + X_n)}$$

$$\frac{1}{p} - 1 = \frac{n}{X_1 + X_2 \ldots\ldots + X_n} - 1$$

$$\hat{p} = \frac{X_1 + X_2 \ldots\ldots + X_n}{n} = \bar{X}$$

b1)

$$X_i = \begin{cases} 1, & si\ el\ iésimo\ casco\ es\ defectuoso \\ 0, & caso\ contrario \end{cases}$$

Sea $X = X_1 + X_2 \dots \dots + X_{20}$ CON $X = CANTIDAD\ DE\ CASCOS\ DEFECTUSOS\ ENTRE\ LOS\ 20\ CASCOS$

$$\hat{p} = \frac{X_1 + X_2 \dots \dots + X_n}{n} = \bar{X} = \frac{X}{n} = \frac{3}{20}$$

b2) $(\widehat{1-p})^5 = (1-\hat{p})^5 = (1-\bar{X})^5 = (1-\frac{X}{n})^5 = (1-\frac{3}{20})^5$

Por propiedad de invarianza de los ESTIMADORES DE MÁXIMA VEROSIMILITUD