Estimación Puntual

Ejercicio 1 :

Suponga que se tiene una muestra aleatoria de tamaño 2n tomada de una población X, que $E(X)=\mu$ y $V(X)=\sigma^2$. Sean

$$\bar{X}_1 = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} X_i \quad y \quad \bar{X}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Dos estimadores de μ. ¿Cuál es el mejor estimador de μ? Explique su elección

$\left[X_1, X_2, \dots, X_{2n} \right.$ m.a. de X
$E(X_i)=\mu$ y $V(X_i)=\sigma^2$ $\forall i, i=1 \_ 2n$

Resolución:

¿Son estimadores insesgados? Es decir: ¿$E(\bar{X}_1)=\mu$? ¿$E(\bar{X}_2)=\mu$?

- $$\underline{E(\bar{X}_1)} = E\left(\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{2n}X_i\right) \overset{\text{Linealidad de esperanza}}{=} \sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{2n}\overbrace{E(X_i)}^{\mu \ \forall i, i=1,-,2n} = \sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{2n}\mu = \cancel{2n}\left(\frac{1}{\cancel{2n}}\mu\right) = \underline{\mu}$$

Como $E(\bar{X}_1)=\mu$, $\bar{X}_1$ es un estimador insesgado de μ.

- $$\underline{E(\bar{X}_2)} = E\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}X_i\right) \overset{\text{Linealidad de esperanza}}{=} \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\underbrace{E(X_i)}_{\mu, \ \forall i, i=1,-,n} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\mu = \cancel{n}\left(\frac{1}{\cancel{n}}\mu\right) = \underline{\mu}$$

Como $E(\bar{X}_2)=\mu$, $\bar{X}_2$ es un estimador insesgado de μ

- $$\underline{V(\bar{X}_1)} = V\left(\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{2n}X_i\right) \underset{\substack{\text{Prop. de Varianza}\\ \text{Independencia}}}{=} \sum_{i=1}^{2n}\left(\frac{1}{2n}\right)^2\underbrace{V(X_i)}_{\sigma^2 \ \forall i, i=1,-,2n} = \sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{4n^2}\sigma^2 = \cancel{2n}\left(\frac{1}{\cancel{4n^2}_{2n}}\sigma^2\right)$$
$$= \underline{\frac{1}{2n}\sigma^2}$$

- $$\underline{V(\bar{X}_2)} = V\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}X_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2\underbrace{V(X_i)}_{\sigma^2 \ \forall i, i=1,-,n} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^2}\sigma^2 = \cancel{n}\left(\frac{1}{\cancel{n^2}}\sigma^2\right)$$
$$= \underline{\frac{1}{n}\sigma^2}$$

$$V(\bar{X}_1) = \frac{\sigma^2}{2n} \quad y \quad V(\bar{X}_2) = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$2n > n$$

n es un número natural.

$$\frac{1}{2n} < \frac{1}{n}$$

$$\frac{\sigma^2}{2n} < \frac{\sigma^2}{n}$$

Por lo tanto $V(\bar{X}_1) < V(\bar{X}_2)$

$\bar{X}_1$ es el mejor estimador para μ.

Justificación: de un conjunto de estimadores insesgados, siempre se elige el de menor varianza.