INTRODUCCIÓN AL PROCESAMIENTO DE SEÑALES
Práctica 7
Transformada Discreta de Fourier (TDF). Algoritmo rápido de la TDF (FFT).

1. **TDF y sus propiedades**

   a) Calcule la TDF de N puntos de siguientes señales definidas en $0 \leq n \leq N-1$:

   I. $x[n] = \delta[n-n_0]$, con $0 \leq n_0 \leq N-1$

   II. $x[n] = a^n$

   III. $x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0 & c.c. \end{cases}$ con $L \leq N$

   IV. $x[n] = e^{j\frac{2\pi k_0 n}{N}}$

   V. $x[n] = \cos(\frac{2\pi k_0 n}{N})$

   b) Para los incisos I y III verifique sus resultados utilizando el hecho de que $X[k] = \text{TDF}\{x[n]\}[k] = \text{TFTD}\{x[n]\}(e^{j2\pi s})|_{s=\frac{k}{N}}$. ¿Qué recaudos debería tomar para utilizar esto mismo en los incisos II, IV y V?

   c) Explique la relación entre la TDF de una secuencia de N puntos $x[n]$, con $n = 0, ..., N-1$ y la SDF de la secuencia obtenida por repetición periódica de la anterior, $\tilde{x}[n]$. ¿Cómo se relacionan la TFTD de $\tilde{x}[n]$ y la TDF de $x[n]$?

   d) Los primeros 5 puntos de la TDF de 8 puntos de una secuencia real son: $\{6;\ 3,5-10j;\ 0{,}5-j;\ -0,5j;\ 0\}$. Halle los tres valores faltantes.

   e) Sea $x[n] = \{0, 1, 2, 3, 4, 0\}$, con TDF $X[k]$. Halle dos secuencias de seis puntos $y[n]$ y $z[n]$ sabiendo que $\text{TDF}\{y[n]\} = \text{Re}\{X[k]\}$, y que $\text{TDF}\{z[n]\} = j\text{Im}\{X[k]\}$.

   f) Dada $X[k]$ la TDF de $x[n] = \{1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0\}$ (cuenta que ya hizo en el inciso *a*)III), obtenga las TDFs de $y[n] = \{1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1\}$ y de $z[n] = \{0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0\}$.

2. **¡Que Octave haga las cuentas!**

   Para hacer las cuentas en Octave utilizaremos el comando `fft`, el cual calcula la TDF, utilizando el algoritmo conocido como FFT (*Fast Fourier Transform*). Este algoritmo es una forma inteligente de realizar las cuentas involucradas en la TDF de manera de economizar el número de operaciones (**No es una aproximación a la TDF, es la misma cuenta**). Para calcular la TDF inversa utilizaremos el comando `ifft`

   a) Verifique mediante Octave los resultados obtenidos "a mano" en el ejercicio anterior.

   b) Las sentencias siguientes permiten calcular y graficar (en módulo) la TDF de N puntos de la secuencia $x[n] = \cos(2\pi n/10)$:

```
N = 50; n = [0:1:N-1]; k = [0:1:N-1];
x = cos(2*pi*n/10); X = fft(x);
figure, plot(k,abs(X),'.');
```

   Compare los resultados obtenidos tomando los valores de $N = 49,\ 50,$ y 51. Explique las diferencias encontradas.

   c) En la práctica 5 vimos cómo calcular la TFTD de diferentes señales. Trate de interpretar los resultados a partir de la vinculación entre la TFTD y la TDF de la señal $x[n]$.

   d) Se puede interpretar a la secuencia anterior como proveniente de muestrear la SVIC $x(t) = \cos(2\pi t)$ con período de muestreo $T_s = \frac{1}{10}$. Los comandos siguientes permiten interpretar las gráficas anteriores en términos de frecuencia:

```
Ts = 1/10; f = [0:(1/N)*(1/Ts):((N-1)/N)*(1/Ts)];
figure, plot(f,abs(X),'.')
```

Analice las gráficas obtenidas. Compare los resultados obtenidos tomando los valores de $N = 49,\ 50,\ \text{y } 51$.

e) Si quiero ver el espectro "al derecho", puedo utilizar el comando `fftshift` (¿qué operación realiza este comando?). Tenemos que tener en cuenta que se debe redefinir el vector f, y que el mismo dependerá de si N es par o impar.

```
if(mod(N,2)==0)
   % Si N es par
   f = [-1/(2*Ts) : (1/N)*(1/Ts) : ((N-1)/N)*(1/(2*Ts))];
else
   % Si N es impar
   f = [((N-1)/N)*(-1/(2*Ts)) : (1/N)*(1/Ts) : ((N-1)/N)*(1/(2*Ts))];
end
figure, plot(f,abs(fftshift(X)),'.')
```

Una forma más abreviada de definir el vector f podría ser

```
f = [(1-(1/N)*mod(N,2))*(-1/(2*Ts)):(1/N)*(1/Ts):((N-1)/N) * (1/(2*Ts))];
```

3. **Re-solución**

La SVIC $x(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t) + A_2 \cos(2\pi f_2 t)$, con $A_1 = 1$, $A_2 = 0{,}5$ es muestreada con frecuencia de muestreo f_s, dando lugar a la SVID $x[n]$, de la cual se toman N valores (n de 0 a $N-1$). Analizando la TDF de la misma (en módulo), se tratan de determinar los valores de f_1 y f_2.

a) Para el caso $f_1 = 1{,}3$, $f_2 = 3{,}3$, $N = 50$ y $f_s = 10$ calcule la TDF utilizando las sentencias empleadas en el ejercicio anterior y analice si pueden determinarse f_1 y f_2 (aproximadamente).

b) Grafique la señal $x[n]$ en el tiempo ¿pueden distinguirse las frecuencias f_1 y f_2?

c) Extienda la señal a $N_{zp} = 100$ muestras agregándole ceros a $x[n]$. Calcule y grafique la TDF de esta nueva señal $x_{zp}[n]$. Pueden serle de utilidad los comandos siguientes

```
nzp = [0:1:Nzp-1]; kzp = [0:1:Nzp-1]; xzp = [x, zeros(1,Nzp-N)];
fzp = [(1-(1/Nzp) * mod(Nzp,2)) * (-1/(2*Ts)) : (1/Nzp) * (1/Ts) : ...
      ((Nzp-1)/Nzp) * (1/(2*Ts))];
Xzp = fft(xzp); figure, plot(fzp,abs(fftshift(Xzp)),'.');
```

¿Presenta más "información" esta nueva TDF? Piense qué tipo de información se "agrega" a $x[n]$. Analice qué sucede con otros valores de N_{zp}

d) Para el caso $f_1 = 1{,}32$, $f_2 = 1{,}38$ obtenga y grafique la TDF. ¿Es posible determinar los valores de f_1 y f_2? ¿Son "distinguibles" las frecuencias? Analice cuál es la separación entre dos muestras de la TDF en términos de frecuencia.

e) ¿Cambia algo si se agregan ceros a la secuencia?

f) Analice qué sucede si se toma la frecuencia de muestreo $f_s = 50$ y $N = 250$ (de manera de conservar la duración de la señal). ¿Esto agrega información para el rango de frecuencias ± 5? Analice cuál es la separación entre dos muestras de la TDF en términos de frecuencia.

g) Analice qué sucede si se toma la frecuencia de muestreo $f_s = 10$ y $N = 500$. Analice cuál es la separación entre dos muestras de la TDF en términos de frecuencia. Puede mejorar la visualización tomando $N_{zp} = 5000$.

4. **Convolución circular y lineal**

a) Calcule la convolución circular de 8 puntos de las secuencias (con $n = 0, ..., 7$):

I. $x[n] = \sqcap_3[n-1]$ e $y[n] = \text{sen}(3\pi n/4)$

II. $x[n] = \text{sen}(3\pi n/4)$ e $y[n] = \cos(\pi n/4)$

Calcule las TDFs de las secuencias anteriores en Octave y con ellas verifique sus resultados.

b) Considere las secuencias $x[n] = \{1, 1, 0, 1\}$ e $y[n] = \{3, 2, 1, 2\}$, $n = 0, \ldots, 3$

I. Calcule su convolución circular.

II. Extienda las secuencias a $x_e[n]$ e $y_e[n]$ con el mínimo número de ceros necesarios para poder calcular la convolución lineal $z[n] = \{x * y\}[n]$ a partir de la circular.

III. Calcule TDF$\{x_e[n]\}$ y TDF$\{y_e[n]\}$. Multiplíquelas y antitransforme para verificar II.

c) Considere la secuencia $x[n] = \{1, 1, 1, 0\}$

I. Calcule el módulo al cuadrado de la TDF de $x[n]$ para $N = 4$.

II. Calcule la TFTD de $x[n]$ extendida con ceros y calcule su módulo al cuadrado.

III. ¿Deben coincidir I y II en $s = k/N, k = 0, \ldots, N-1$? ¿Por qué?

IV. Antitransforme $|X[k]|^2$ y $|X(e^{j2\pi s})|^2$. Grafique ambos resultados.

V. Explique qué calculó en IV y por qué razones no coinciden los resultados en $n = 0, 1, 2, 3$.

VI. ¿En qué casos se puede esperar que las antitransformadas de IV coincidan?

Algunos resultados

1. *a*) Para $0 \leq k \leq N-1$

I. $X[k] = e^{-j2\pi n_0 k/N}$

II. $X[k] = \dfrac{1-a^N}{1-a\ e^{-j2\pi k/N}}$

III. $X[k] = \dfrac{\text{sen}(\pi k L/N)}{\text{sen}(\pi k/N)}\ e^{-j\pi k(L-1)/N}$

IV. $X[k] = N\delta[(k-k_0)_N]$

V. $X[k] = \dfrac{N}{2}\delta[(k-k_0)_N] + \dfrac{N}{2}\delta[(k+k_0)_N]$

d) $x[n] = \{6;\ 3,5-10j;\ 0{,}5-j;\ -0,5j;\ 0;\ 0,5j;\ 0{,}5+j;\ 3,5+10j\}$

e) $y[n] = \{0;\ 0,5;\ 3;\ 3;\ 3;\ 0,5\}$, $z[n] = \{0;\ 0{,}5;\ -1;\ 0;\ 1;\ -0{,}5\}$

f) $Y[k] = e^{-j2\pi 5k/N}X[k]$, $Z[k] = e^{-j2\pi 2k/N}X[k]$