Repaso de algunas definiciones y conceptos sobre campos vectoriales

A modo de refrescar la memoria de lo visto en Matemática B sobre campos vectoriales, vamos a repasar definiciones sacadas del apunte de cátedra de MateB.

A medida que avancemos en el curso, vamos a ir intercalando breves repasos de conceptos matemáticos que usaremos en diferentes clases.

Física II trabaja con conceptos de campos vectoriales eléctricos y magnéticos,, gradientes, integrales de línea, integrales de superficie, integrales de volumen divergencia, rotor, Teorema de la divergencia, Teorema de Stokes y otros.

Esto es lo que muchas veces dificulta el manejo de los problemas y lleva a tener una cursada que puede resultar complicada.

Por este motivo, y particularmente este año, haremos estos breves repasos para mantener frescos los conceptos.

Definición de campo vectorial

Definición 6.1.1 — en $\mathbb{R}^3$. Un *campo vectorial sobre $E \subset \mathbb{R}^3$* es una función $\vec{F} : E \to V_3$ que a cada punto $(x, y, z) \in E$ le asigna un (único) vector de tres componentes $\vec{F}(x, y, z) \in V_3$.

Para cada terna ordenada (x, y, z) del dominio, se tiene asociado un vector tridimensional $\vec{F}(x, y, z)$; luego podemos escribirlo en términos de sus tres componentes, que son funciones escalares de tres variables a las que llamaremos $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ y $R(x, y, z)$. Escribimos en notación vectorial:

$$\vec{F}(x, y, z) = \check{\imath}P(x, y, z) + \check{\jmath}Q(x, y, z) + \check{k}R(x, y, z)$$

o también como terna ordenada:

$$\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) \, .$$

Representaciones gráficas de campos vectoriales

■ **Ejemplo 6.1** El campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = \breve{\imath}z + \breve{\jmath}e^{xyz} + \breve{k}(x^3+z^2)$ asigna al punto (x_0, y_0, z_0) del espacio, el vector con primera componente z_0, segunda componente $e^{x_0y_0z_0}$, y tercera componente $x_0^3 + z_0^2$. Por ejemplo $\vec{F}(\pi, 0, 2) = \breve{\imath}2 + \breve{\jmath}e^{\pi\,0\,2} + \breve{k}(\pi^3 + 2^2) = \breve{\imath}2 + \breve{\jmath} + \breve{k}(\pi^3 + 4) = (2, 1, \pi^3 + 4)$, mientras que $\vec{F}(-\frac{1}{2}, -1, 2) = \breve{\imath}2 + \breve{\jmath}e + \breve{k}(-\frac{1}{8} + 4) = (1,\ e,\ \frac{31}{8})$.

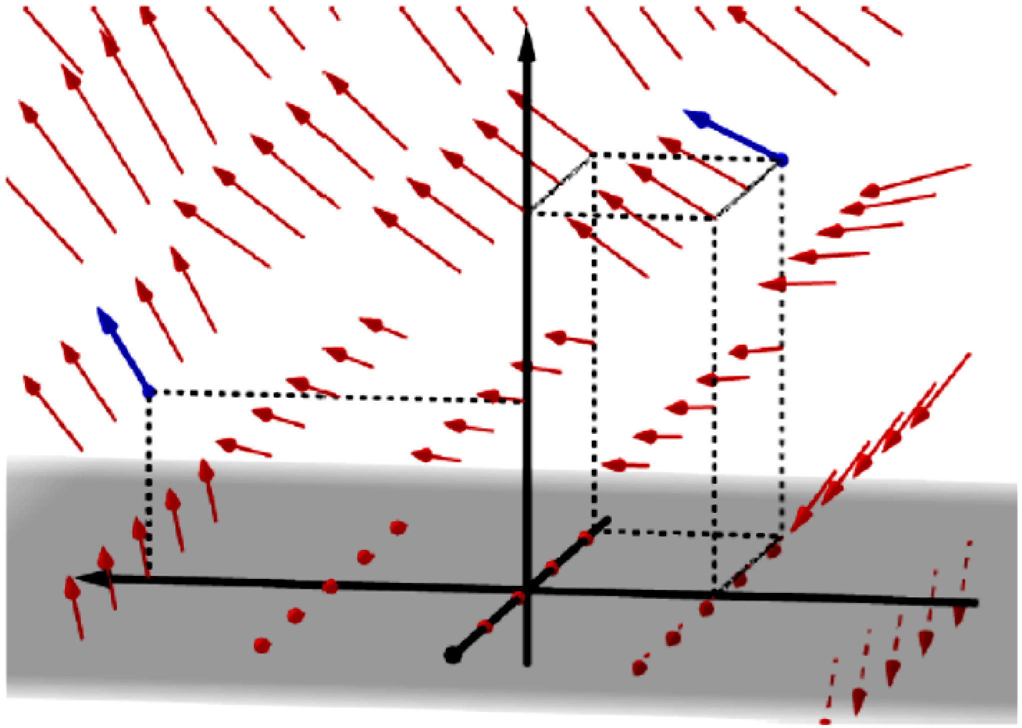


Figura 6.1: Representación gráfica del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = \breve{\imath}z + \breve{\jmath}e^{xyz} + \breve{k}(x^3+z^2)$.

Representaciones gráficas de campos vectoriales

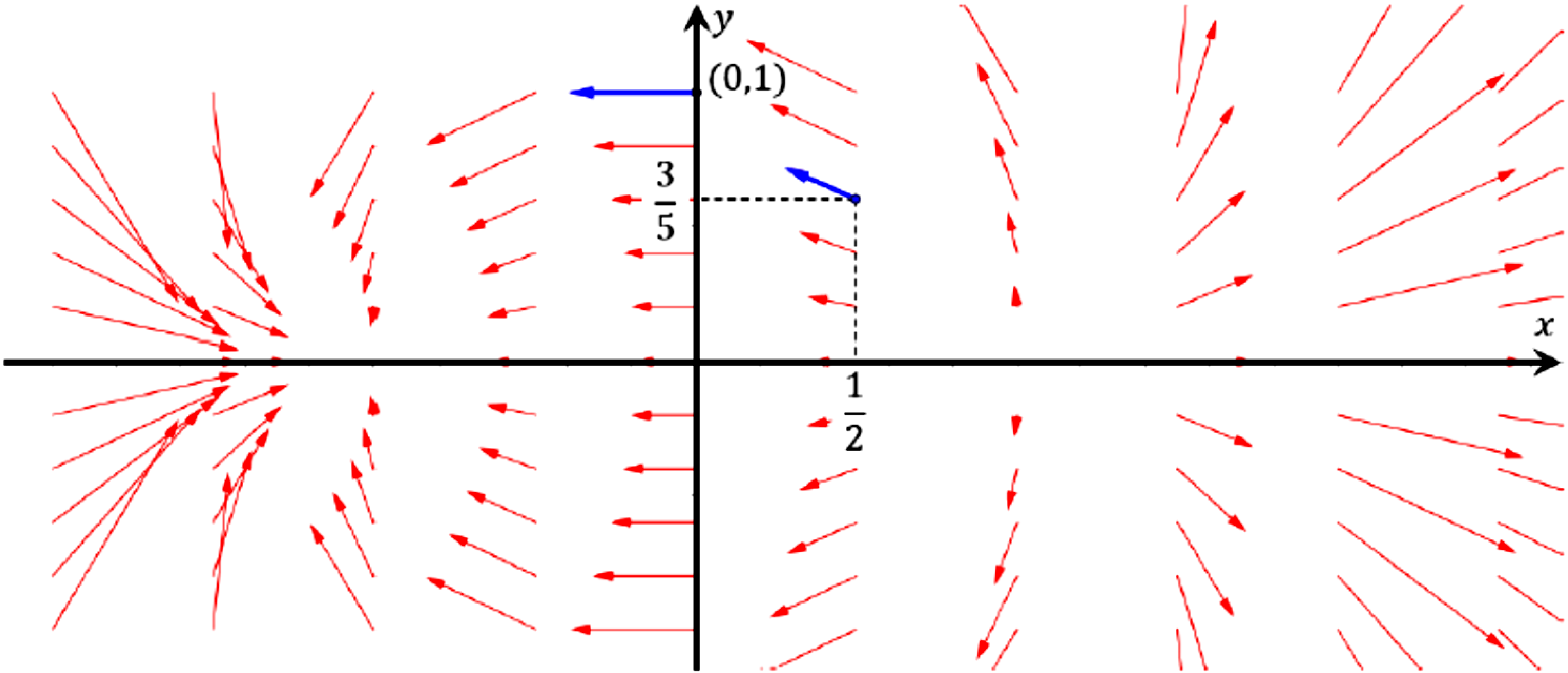
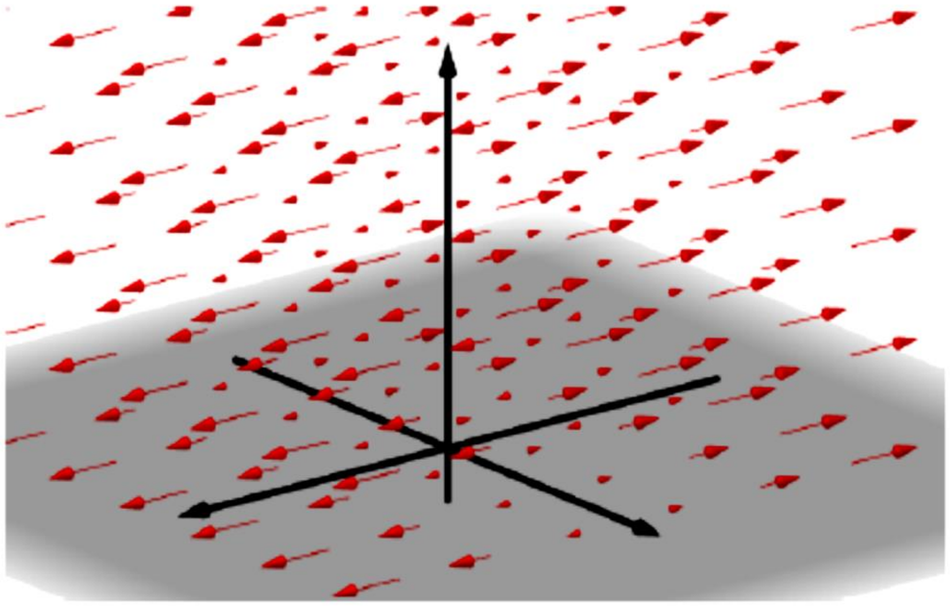


Figura 6.2: Representación gráfica del campo vectorial $\vec{F}(x, y) = \breve{\imath}\frac{1}{2}(x^2 - y^2 - 1) + \breve{\jmath}\,\frac{xy}{2}$.

Representaciones gráficas de campos vectoriales

■ **Ejemplo 6.5** Describa el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (x, 0, 0)$, trazando algunos de los vectores.

Observamos que el campo es siempre un múltiplo escalar del versor $\breve{\imath}$*; efectivamente* $\vec{F}(x, y, z) = x\,(1, 0, 0) = \breve{\imath}x$*. Entonces, se representa mediante flechas paralelas al eje* x*, con sentido alejándose del plano* yz*, de módulo creciente a medida que aumenta* x *en valor absoluto.*
¿Cuándo se anula este campo vectorial? Siempre que la coordenada x *del punto sea cero, o sea* $\vec{F} = \vec{0}$ *para todos los puntos de la forma* $(0, y, z)$*, esto es, para los puntos del plano* yz*.*
Esboce una representación gráfica de este campo. Ver Figura 6.3b.



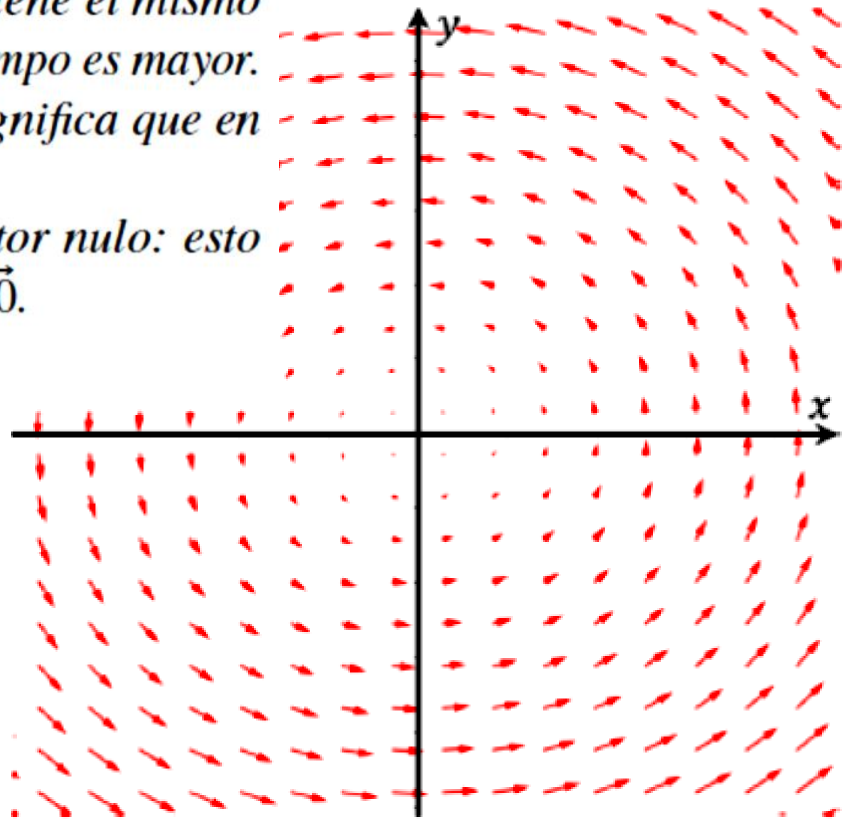
■ **Ejemplo 6.6** Describa el campo vectorial $\vec{F}(x, y) = -\breve{\imath}y + \breve{\jmath}x$, trazando algunos de los vectores.

El dominio natural de este campo vectorial es todo $\mathbb{R}^2$. Evaluemos el campo en algunos puntos del plano, por ejemplo $\vec{F}(1,0) = \breve{\jmath}$, $\vec{F}(0,1) = -\breve{\imath}$, $\vec{F}(-1,0) = -\breve{\jmath}$, $\vec{F}(0,-1) = \breve{\imath}$. Estos vectores tienen módulo 1, y los puntos donde se aplican están a 1 unidad de distancia del origen. Evalúe $\vec{F}$ en $(2,0)$, $(0,2)$, $(-2,0)$, y $(0,-2)$; ¿qué observa?

El módulo de $\vec{F}$ para cualquier punto (x, y) es $|\vec{F}(x,y)| = \sqrt{(-y)^2 + x^2} = |\vec{r}|$, donde $\vec{r}$ denota el vector posición del punto de coordenadas (x, y). Esto significa que, para todos los puntos sobre una circunferencia dada centrada en el origen, el campo tiene el mismo módulo; a medida que aumenta el radio de la circunferencia, el módulo del campo es mayor. Por otro lado, en este ejemplo se tiene $\vec{r} \cdot \vec{F} = (x,y) \cdot (-y,x) = 0$, lo que significa que en cada punto del plano el campo es perpendicular al vector posición.

Podemos analizar también los puntos del plano donde el campo da el vector nulo: esto ocurre si y sólo si $-y = 0$ y $x = 0$, o sea solamente para el origen: $\vec{F}(0,0) = \vec{0}$.

Se muestra una representación gráfica de este campo en la Figura 6.3a.

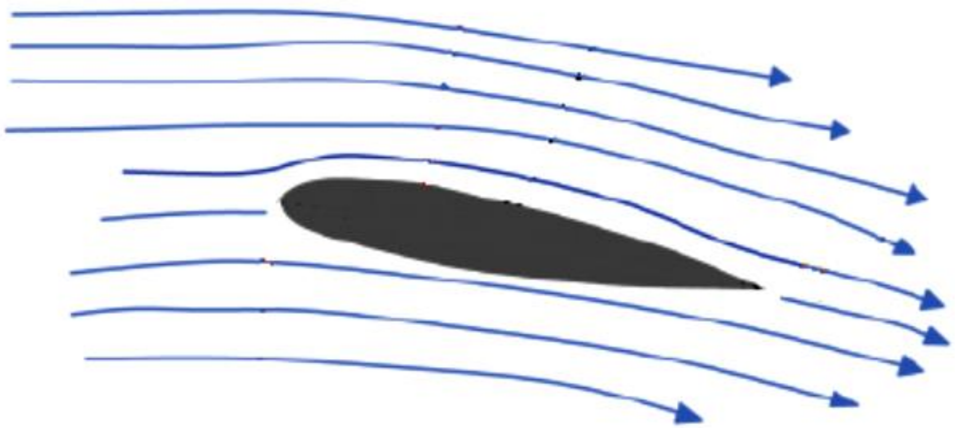


Representaciones gráficas de campos vectoriales por líneas de campo

Campo de velocidades

Cuando se pretende describir un fluido es conveniente indicar la velocidad con que pasa un elemento de fluido por un dado punto del espacio. En el caso de flujo estacionario (no depende del tiempo), se usa un *campo vectorial de velocidades* $\vec{v}(x, y, z)$.

Una *línea de flujo* de un campo de velocidades marca la trayectoria seguida por una partícula del fluido moviéndose en dicho campo, de forma que los vectores que representan el campo de velocidades son tangentes a las líneas de flujo. La representación por medio de líneas de flujo es usada, por ejemplo, para mostrar el movimiento de un fluido alrededor de un objeto (como el ala de un avión); las corrientes oceánicas también se representan mediante líneas de flujo, así como las térmicas que son columnas de aire ascendente que son utilizadas por las aves para planear, y también para vuelos en aladeltas, parapentes y planeadores sin motor.



Definición de Gradiente

Campo gradiente

En el Capítulo 3, sin saberlo, ya hemos usado campos vectoriales: efectivamente dada una función escalar f, su gradiente está definido para cada punto dando como resultado un vector, $\vec{\nabla} f$. Recordemos que definimos el "operador diferencial vectorial" (nabla) como

$$\vec{\nabla} = \breve{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \breve{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \breve{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

Si $f(x, y, z)$ es una función escalar dada en $E \subset \mathbb{R}^3$, que admite derivadas parciales primeras, se define el vector gradiente en cada punto $(x, y, z) \in E$ como

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = \breve{\imath} f_x(x, y, z) + \breve{\jmath} f_y(x, y, z) + \breve{k} f_z(x, y, z)$$

Representación gráfica de un campo gradiente

Discuta el siguiente enunciado:

La representación gráfica de un campo gradiente en el espacio (o en el plano) puede darse por medio de vectores que son perpendiculares a las superficies (o curvas) de nivel de la función escalar f de la cual deriva el campo.

La función f recibe el nombre de *función potencial* y sus superficies (o curvas) de nivel se llaman, precisamente, *superficies (o curvas) equipotenciales*, y brindan una representación gráfica alternativa para el campo vectorial. Si la función es diferencial, su campo vectorial gradiente posee la propiedad, ya vista, de que los vectores serán perpendiculares a las curvas de nivel. El sentido de cada vector estará determinado por las direcciones de crecimiento/decrecimiento de la función f.

En la figura 6.4 se representa en forma simultánea varias curvas de nivel de la función escalar $f(x, y) = -x^2 - y^2$ y también varios vectores correspondientes a su campo vectorial gradiente $\vec{F}(x, y) = -\breve{\imath}2x - \breve{\jmath}2y$.

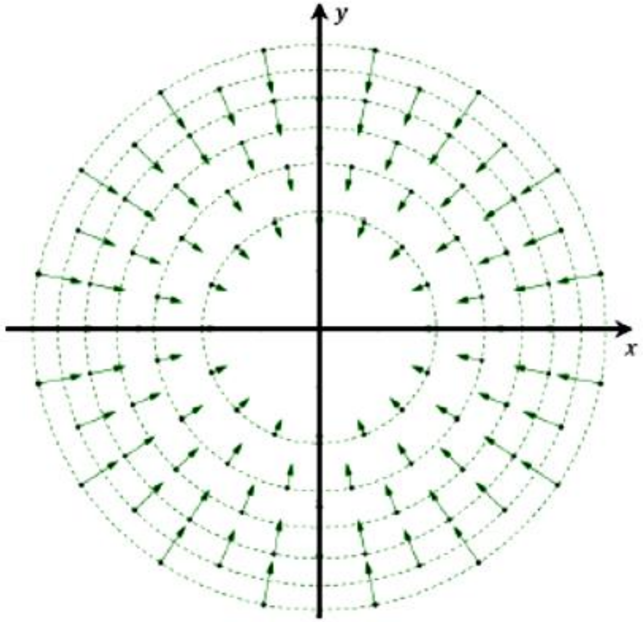


Figura 6.4: Curvas de nivel de la función $f(x, y) = -x^2 - y^2$ y su campo gradiente asociado $\vec{F}(x, y) = -\breve{\imath}2x - \breve{\jmath}2y$.

Definición de Divergencia

Un campo vectorial $\vec{F}(x, y, z)$ en el espacio posee tres funciones componentes, cada una de las cuales depende de tres variables: $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, y $R(x, y, z)$. Si queremos estudiar cambios del campo vectorial, notamos que debemos evaluar la variación de cada una de las funciones componentes respecto de cada una de las variables. En total tenemos nueve derivadas parciales primeras:

Definición 6.2.1 Dado un campo vectorial en el espacio $\vec{F}(x, y, z) = \breve{\imath}P(x, y, z) + \breve{\jmath}Q(x, y, z) + \breve{k}R(x, y, z)$, se define la *divergencia* de $\vec{F}$ como la función escalar de tres variables dada por

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = P_x + Q_y + R_z$$

Usando el operador diferencial vectorial (nabla), se puede escribir la divergencia de un campo vectorial como un "producto escalar entre el operador nabla y el campo". Se denota la divergencia de $\vec{F}$ como:

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \left(\breve{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \breve{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \breve{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (\breve{\imath}P + \breve{\jmath}Q + \breve{k}R) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Definición de Rotor

Definición 6.2.3 — Rotor de un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$. Dado un campo vectorial en el espacio $\vec{F}(x, y, z) = \breve{\imath}P(x, y, z) + \breve{\jmath}Q(x, y, z) + \breve{k}R(x, y, z)$, se define el *rotor* (o rotacional) de $\vec{F}$ como el nuevo campo vectorial en el espacio dado por

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = \breve{\imath}(R_y - Q_z) - \breve{\jmath}(R_x - P_z) + \breve{k}(Q_x - P_y)$$

si las seis derivadas parciales existen.

C Usando el operador diferencial vectorial (nabla), se puede escribir el rotor de un campo vectorial como un "producto vectorial entre el operador nabla y el campo". Se denota el rotor de $\vec{F}$ como:

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = \vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \breve{\imath} & \breve{\jmath} & \breve{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \breve{\imath}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) - \breve{\jmath}\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + \breve{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$