Serie de Taylor

Sea $f(z)$ analítica en z_0. Ya sabemos que ella y sus derivadas de cualquier orden existen en z_0 (de hecho, son analíticas en z_0). Denotaremos la derivada de orden $n = 0,1,2 \dots$ de $f(z)$ evaluada en el punto z_0 mediante $f^{(n)}(z_0)$, donde $f^{(0)}(z_0)$ se interpreta como $f(z_0)$. La **serie de Taylor de $\boldsymbol{f(z)}$ centrada en $\boldsymbol{z_0}$** es la siguiente serie de potencias:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

Por ejemplo: la serie de Taylor de $f(z) = e^z$ centrada en $z_0 = 0$ es $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$

El siguiente resultado establece que si una serie de potencias centrada en z_0 representa a la función $f(z)$ en un entorno de dicho punto, entonces necesariamente es la serie de Taylor de $f(z)$ centrada en z_0.

<u>Teorema (Unicidad de la representación en serie de potencias)</u>

Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \, (z - z_0)^n$ para $|z - z_0| < R$, con $R > 0$, entonces $c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ $\;(n = 0,1,2, \dots)$

Dem

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(z-z_0)^n \text{ si } |z-z_0|<R \quad (*). \text{ En particular: } f(z_0)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(z_0-z_0)^n=c_0=0!\,c_0 \quad \therefore \quad c_0=\frac{f^{(0)}(z_0)}{0!}$$

Por el teorema de derivación de series de potencias, podemos derivar la serie $(*)$ término a término en el interior del disco de convergencia: $f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n\,(z-z_0)^{n-1}$ si $|z-z_0|<R \quad (**)$. En particular:

$$f'(z_0)=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z_0-z_0)^n=1c_1=1!\,c_1 \quad \therefore \quad c_1=\frac{f^{(1)}(z_0)}{1!}$$

Nuevamente, la serie de potencias $(**)$ también es derivable término a término en el interior del disco de convergencia: $f''(z)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n\,(z-z_0)^{n-2}$ si $|z-z_0|<R \quad (***)$. En particular:

$$f''(z_0)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n\,(z_0-z_0)^{n-2}=(2\times 1)c_2=2!\,c_2 \quad \therefore \quad c_2=\frac{f^{(2)}(z_0)}{2!}$$

Análogamente, la serie de potencias $(***)$ también es derivable término a término en el interior del disco de convergencia: $f'''(z)=\sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)c_n\,(z-z_0)^{n-3}$ si $|z-z_0|<R.$. En particular:

$$f'''(z_0)=\sum_{n3}^{\infty} n(n-1)(n-2)c_n\,(z_0-z_0)^{n-3}=(3\times 2\times 1)c_3=3!\,c_3 \quad \therefore \quad c_3=\frac{f^{(3)}(z_0)}{3!}$$

De este modo vemos que $c_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ (la prueba se formaliza aplicando inducción completa).

Ejemplo 1 Dada $f(z) = \frac{z^5}{1-z}$

a) Aplicando reglas de derivación, ¿le parece sencillo calcular $f^{(6)}(0)$?

b) Hallar la serie de MacLaurin de $f(z) = \frac{z^5}{1-z}$

c) Emplear el resultado de a) para hallar $f^{(6)}(0)$.

Rta a) el cálculo previamente necesario de $f^{(6)}(z)$ mediante reglas de derivación es tedioso …

b) $f(z)$ puede interpretarse como la suma de la serie geométrica de primer término $a = z^5$ y razón $r = z$. Entonces,

$$f(z) = \frac{z^5}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+5} = z^5 + z^6 + z^7 + \cdots \text{ si } |z| < 1$$

Esta serie de potencias está centrada en el origen, tiene radio de convergencia $R = 1 > 0$ y representa a la función $f(z)$ en un entorno del origen. Luego, por el teorema de unicidad dicha serie es la serie de MacLaurin de $f(z)$.

Notar que si quisiéramos obtenerla aplicando la definición, deberíamos hallar $f^{(n)}(0)$ para n genérico, lo que no parece sencillo.

c) Por lo visto en a) vale

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{n+5} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \quad \text{si } |z| < 1$$

Comparando coeficientes a ambos lados de la igualdad:

$$f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(4)}(0) = 0$$

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 1 \text{ si } n \geq 5$$

En particular:

$$f^{(6)}(z_0) = 6! = 720$$

Hemos visto que toda serie de potencias centrada en z_0 cuyo radio de convergencia es positivo, representa una función analítica en z_0 (de hecho, en el disco abierto de convergencia).

¿Toda función analítica en z_0 puede representarse mediante una serie de potencias centrada en z_0? De acuerdo al teorema de unicidad, si dicha representación es posible, la serie habrá de ser la de Taylor centrada en z_0. El teorema siguiente afirma que efectivamente la de Taylor centrada en z_0 cumple el objetivo.

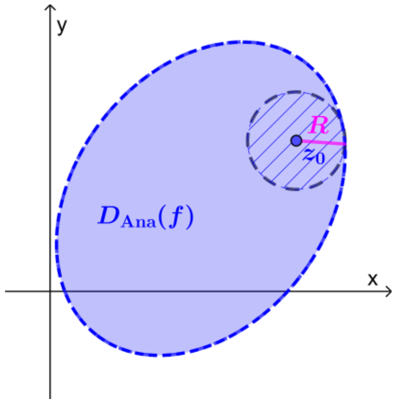
<u>Teorema de la serie de Taylor</u>

Sea $f(z)$ analítica en z_0 y sea R $(0 < R \leq \infty)$ el radio del mayor disco abierto centrado en z_0 en cuyo interior $f(z)$ es analítica.

Entonces,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n =$$

$$= f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \cdots \quad \text{si } |z-z_0| < R$$



<u>Nota</u>: notar la gran diferencia con el teorema de Taylor en variable real, donde aún existiendo la serie de Taylor ésta puede no representar a la función en un entorno del punto.

Dem (OPTATIVO)

Sin pérdida de generalidad podemos suponer $z_0 = 0$.

Es claro que cuando $z = 0$ la serie de Taylor converge a $f(0)$. Consideremos z (genérico) tal que $0 < |z| < R$. Sea r_0 tal que $|z| < r_0 < R$, así que el disco $|z| \leq r_0$ está incluido en $|z| < R$. Aplicando la fórmula integral de Cauchy:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}_0} \frac{f(w)}{w-z}dw = f(z)$$

donde $\mathcal{C}_0$ es la circunferencia de radio r_0 centrada en el origen, con orientación antihoraria.

En general, para todo $s \in \mathbb{C}$, $s \neq 1$: $\quad (1-s)(1+s+s^2+\cdots+s^{N-1}) + s^N = 1$. Así que: $\quad \frac{1}{1-s} = 1 + s + s^2 + \cdots + s^{N-1} + \frac{s^N}{1-s}$

Entonces si $w \in \mathcal{C}_0$, tomando $s = \frac{z}{w}$ se tiene:

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w}\frac{1}{1-\frac{z}{w}} = \frac{1}{w}\left(1 + \frac{z}{w} + \left(\frac{z}{w}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{z}{w}\right)^{N-1} + \frac{\left(\frac{z}{w}\right)^N}{1-s}\right) = \frac{1}{w}\left(1 + \frac{z}{w} + \left(\frac{z}{w}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{z}{w}\right)^{N-1} + \frac{z^N}{w^N(1-s)}\right) = \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2} + \frac{z^2}{w^3} + \cdots + \frac{z^{N-1}}{w^N} + \frac{z^N}{w^{N+1}(1-s)} 0$$
$$= \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2} + \frac{z^2}{w^3} + \cdots + \frac{z^{N-1}}{w^N} + \frac{z^N}{w^N w\left(1-\frac{z}{w}\right)} = \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2} + \frac{z^2}{w^3} + \cdots + \frac{z^{N-1}}{w^N} + \frac{z^N}{w^N(w-z)} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f(w)}{w^{n+1}} z^n + \frac{f(w)}{w^N(w-z)} z^N$$

Luego:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}_0} \frac{f(w)}{w-z}dw = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}_0} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \frac{f(w)}{w^{n+1}} z^n + \frac{f(w)}{w^N(w-z)} z^N\right) dw =$$
$$= \overbrace{\left(\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}_0} \frac{f(w)}{w^{n+1}}dw\right)}^{\frac{f^{(n)}(0)}{n!}} z^n + \left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}_0} \frac{f(w)}{w^N(w-z)}dw\right) z^N \overset{(*)}{=} \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n}_{S_N(z)} + \frac{z^N}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}_0} \frac{f(w)}{w^N(w-z)}dw$$

Denotemos $|z| = r$. Entonces, si $w \in \mathcal{C}_0$:

$$|w - z| \geq \big||w| - |z|\big| = |r_0 - r| = r_0 - r$$

Sea $M = \max_{w \in \mathcal{C}_0} |f(w)|$, que existe porque $|f|$ es continua en $\mathcal{C}_0$ y $\mathcal{C}_0$ es un conjunto cerrado y acotado. Aplicando la desigualdad ML se tiene:

$$\left| \frac{z^N}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_0} \frac{f(w)}{w^N(w - z)} dw \right| \leq \frac{|z|^N}{2\pi} \frac{M(2\pi r_0)}{{r_0}^N(r_0 - r)} = \frac{r^N}{2\pi} \frac{M}{{r_0}^N(r_0 - r)} = \frac{M r_0}{r_0 - r} \left(\frac{r}{r_0} \right)^N$$

Y dado que $\frac{r}{r_0} < 1$ puesto que $r = |z| < r_0$, se obtiene

$$\lim_{N \to \infty} \frac{M r_0}{r_0 - r} \left(\frac{r}{r_0} \right)^N = 0$$

Entonces necesariamente

$$\lim_{N \to \infty} \frac{z^N}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_0} \frac{f(w)}{w^N(w - z)} dw = 0$$

Luego, para todo z tal que $|z| < R$ resulta finalmente:

$$f(z) = \lim_{N \to \infty} \left(S_N(z) + \frac{z^N}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_0} \frac{f(w)}{w^N(w - z)} dw \right) = \lim_{N \to \infty} S_N(z) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

Ejemplo 2: Aplicando la definición de serie de Taylor, representar las siguientes funciones mediante su serie de Taylor alrededor del punto indicado, estableciendo la región de convergencia.

a) $f(z) = e^z\ ,\ z_0 = 0$

b) $f(z) = \operatorname{sen} z\ ,\ z_0 = 0$

c) $f(z) = \operatorname{Ln} z\ ,\ z_0 = 1$

Rta

a) $f(z) = e^z, D_{\text{Ana}}(f) = \mathbb{C}$. El mayor disco centrado en el origen e incluido en $D_{\text{Ana}}(f)$ es pues todo el plano. Así, el radio de convergencia es $R = \infty$.

$f^{(n)}(z) = e^z, \forall n \geq 0.$

$f^{(n)}(z_0) = f^{(n)}(0) = e^0 = 1.$

Reemplazando en $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ se obtiene

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = 1 + z + \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{3!} z^3 + \cdots \quad \text{si } |z| < \infty$$

b) $f(z) = \text{sen } z$, $D_{\text{Ana}}(f) = \mathbb{C}$. El mayor disco centrado en el origen e incluido en $D_{\text{Ana}}(f)$ es todo el plano. Entonces el radio de convergencia es $R = \infty$.

$f^{(2n)}(z) = (-1)^n \text{sen } z$ así que $f^{(2n)}(0) = 0, \forall n \geq 0$.

$f^{(2n+1)}(z) = (-1)^n \cos z$ así que $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n, \forall n \geq 0$.

Luego,

$$\text{sen } z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots \quad \text{si } |z| < \infty$$

c) $f(z) = \text{Ln } z$, $D_{\text{Ana}}(f) = \mathbb{C} - \{z : \text{Im}(z) = 0 \ \wedge \text{Re}(z) \leq 0\}$. El mayor disco abierto centrado en $z_0 = 1$ en el cual $f(z)$ es analítica es $|z - 1| < 1$. Luego, el radio de convergencia de la serie de Taylor es $R = 1$.

$f(z) = \text{Ln } z$ de modo que $f(1) = \text{Ln } 1 = 0$

$$f'(z) = \frac{1}{z}, f''(z) = -\frac{1}{z^2}, f^{(3)}(z) = \frac{2.1}{z^3}, f^{(4)}(z) = -\frac{3.2.1}{z^4}$$

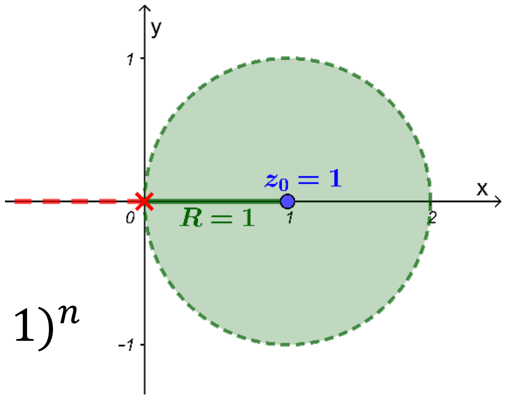
En general, para $n \geq 1$: $f^{(n)}(z) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{z^n}$

Entonces, $f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}(n-1)!$

La serie de Taylor centrada en $z_0 = 1$ es pues

$$\text{Ln } z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!} (z-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$$

$$= (z-1) - \frac{1}{2}(z-1)^2 + \frac{1}{3}(z-1)^3 + \ \ldots \quad \text{si } |z - 1| < 1$$



Ejercicio: Justificar las siguientes.

a) $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} + \cdots \quad , \ |z| < \infty$

b) $\operatorname{senh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \cdots , \quad |z| < \infty$

c) $\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} + \cdots \quad , \ |z| < \infty$

Ejemplo 3: Mostremos cómo aplicar el teorema de unicidad para representar $f(z)$ mediante una serie de potencias centrada en z_0, a partir de otros desarrollos previamente hallados.

a) $f(z) = \operatorname{sen}(z)\ ;\ z_0 = 0$

b) $f(z) = \cos(z)\ ;\ z_0 = 0$

c) $f(z) = \operatorname{sen}(z)\ ;\ z_0 = \pi$

d) $f(z) = 1 - ze^{i\pi z};\ z_0 = 1$

e) $f(z) = \left(\frac{z+i}{z}\right)^2;\ z_0 = -i$. Calcular $f^{(5)}(-i)$ a partir del desarrollo obtenido.

f) $f(z) = z\,\operatorname{Ln}\left(\frac{z}{2} - 1\right);\ z_0 = 4$

g) $f(z) = \frac{4}{z^3+2z^2}\ ;\ z_0 = 2$

Rta

a) $f(z) = \operatorname{sen}(z)$; $z_0 = 0$. Como $D_{Ana}(f) = \mathbb{C}$, entonces de acuerdo con el teorema de Taylor f está representada por su serie de McLaurin en todo el plano complejo. El siguiente desarrollo es elemental (ya lo obtuvimos antes):

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \ , |z| < \infty$$

Como esta igualdad es válida para todo z, lo es para iz y para $-iz$, dando lugar a las siguientes representaciones:

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(iz)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} z^n \, , |z| < \infty \qquad e^{-iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-iz)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} z^n \, , |z| < \infty$$

Sumando series de potencias obtenemos un desarrollo centrado en $z_0 = 0$ que representa a $f(z)$ en todo el plano:

$$\operatorname{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-z}}{2i} = \frac{1}{2i} e^{iz} - \frac{1}{2i} e^{-iz} = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} z^n - \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2i} \frac{i^n - (-i)^n}{n!} z^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{2i} \frac{1 - (-1)^n}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{n-1}}{n!} \frac{1 - (-1)^n}{2} z^n \underbrace{=}_{\substack{l \text{ impar} \\ l = 2n+1}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{i^{2l}}{(2l+1)!} z^{2l+1} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l+1)!} z^{2l+1} =$$

$$= z - \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{5!} z^5 - \frac{1}{7!} z^7 + \cdots \quad , \qquad |z| < \infty$$

La serie obtenida representa a la función $\operatorname{sen}(z)$ en un entorno del origen (de hecho, en todo el plano). Apelando al teorema de unicidad para series de potencias podemos afirmar que esta es la serie de Taylor de $f(z) = \operatorname{sen}(z)$ centrada en el origen. Notar que para obtenerla no hemos recurrido a la definición de la serie de Taylor (no calculamos las sucesivas derivadas de la función).

b) $f(z) = \cos(z)$; $z_0 = 0$.

Como $D_{Ana}(f) = \mathbb{C}$, entonces de acuerdo con el teorema de Taylor f está representada por su serie de McLaurin en todo el plano complejo, es decir que el radio de convergencia de la serie de Taylor es $R = \infty$. Para obtener dicha serie podríamos proceder como en a) empleando el desarrollo de MacLaurin de la exponencial. Alternativamente, podemos derivar término a término la serie obtenida en a), lo que sabemos no altera la región de convergencia:

$$\operatorname{sen}(z) = z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \frac{1}{7!}z^7 + \cdots \quad \text{si } |z| < \infty$$

Entonces,

$$\cos(z) = \frac{d}{dz}\operatorname{sen}(z) = \frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{d}{dz}(z^{2n+1})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)}{(2n+1)!}z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)}{(2n)!\,(2n+1)}z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 - \frac{1}{6!}z^6 + \cdots \quad si \ |z| < \infty$$

El teorema de unicidad para series de potencias permite afirmar que esta serie es la de Taylor del coseno centrada en el origen, a pesar de no haberla obtenido derivando sucesivamente el coseno.

c) $f(z) = \operatorname{sen}(z)$; $z_0 = \pi$.

Como $D_{Ana}(f) = \mathbb{C}$. Entonces el radio de convergencia de la serie de Taylor centrada en $z_0 = \pi$ es $R = \infty$.

Basándonos en el desarrollo obtenido en a):

$$f(z) = \operatorname{sen}(z) \overbrace{=}^{(1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \quad ,|z| < \infty$$

podemos obtener una representación centrada en $z_0 = \pi$ del modo siguiente:

$$f(z) = \operatorname{sen}(z) = \operatorname{sen}\big((z-\pi)+\pi\big) = \operatorname{sen}(z-\pi)\cos(\pi) - \cos(z-\pi)\operatorname{sen}(\pi) = -\operatorname{sen}(z-\pi)$$

Si en (1), que vale para todo z, reemplazamos z por $(z-\pi)$, obtenemos:

$$\operatorname{sen}(z-\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z-\pi)^{2n+1} \quad ,|z-\pi| < \infty$$

Entonces,

$$f(z) = \operatorname{sen}(z) = -\operatorname{sen}(z-\pi) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z-\pi)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}(z-\pi)^{2n+1}$$

$$= -(z-\pi) + \frac{1}{3!}(z-\pi)^3 - \frac{1}{5!}(z-\pi)^5 + \cdots \quad \text{si } |z-\pi| < \infty$$

El teorema de unicidad garantiza que esta serie de potencias es la serie de Taylor de $f(z)$ centrada en $z_0 = \pi$.

d) $f(z) = 1 - ze^{i\pi z}$; $z_0 = 1$.

Como $D_{Ana}(f) = \mathbb{C}$. Entonces el radio de convergencia de la serie de Taylor centrada en $z_0 = \pi$ es $R = \infty$.

Podemos obtenerla del modo siguiente:

Reemplazando z por $i\pi(z-1)$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \ , |z| < \infty$$

Entonces,

$$e^{i\pi z} = e^{i\pi(1+z-1)} = e^{i\pi} e^{i\pi(z-1)} = -e^{i\pi(z-1)} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(i\pi(z-1))^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)(i\pi)^n}{n!}(z-1)^n , |z-1| < \infty$$

Luego,

$$1 - ze^{i\pi z} = 1 - \big(1 + (z-1)\big)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)(i\pi)^n}{n!}(z-1)^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)(i\pi)^n}{n!}(z-1)^n - (z-1)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)(i\pi)^n}{n!}(z-1)^n$$

$$= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\pi)^n}{n!}(z-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\pi)^n}{n!}(z-1)^{n+1} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\pi)^n}{n!}(z-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\pi)^{n-1}}{(n-1)!}(z-1)^n$$

$$= 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(i\pi)^n}{n!} + \frac{(i\pi)^{n-1}}{(n-1)!}\right](z-1)^n = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\pi)^{n-1}(n+i\pi)}{n!}(z-1)^n =$$

$$= 2 + (1+i\pi)(z-1) - \frac{\pi(\pi-2i)}{2}(z-1)^2 - \frac{\pi^2(3+i\pi)}{6}(z-1)^3 + \cdots \ \text{si} \ |z-1| < \infty$$

e) $f(z)=\left(\frac{z+i}{z}\right)^2$; $z_0=-i$

$D_{Ana}(f)=\mathbb{C}-\{0\}$. El punto de no analiticidad de f más cercano a $z_0=-i$ es $z=0$. Entonces el radio de convergencia de la serie de Taylor centrada en $z_0=-i$ es la distancia $R=|0-(-i)|=1$. El disco abierto de convergencia es pues $|z+i|<1$. Para hallar la serie de Taylor (sin recurrir a su definición) podemos proceder como sigue:

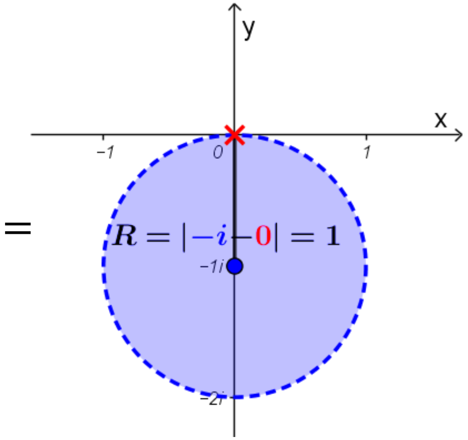
$$\frac{1}{z}=\frac{1}{(z+i)-i}=\frac{i}{1-\left(\frac{z+i}{i}\right)}\overset{\substack{geom:\, a=i\\ r=(z+i)/i\\ CV\,\Leftrightarrow |z+i|<1}}{\overbrace{=}}\sum_{n=0}^{\infty} i\left(\frac{z+i}{i}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^{n-1}(z+i)^n\,,|z+i|<1$$

Derivando respecto de z y cambiando signo,

$$\frac{1}{z^2}=-\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z}\right)=-\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^{n-1}(z+i)^n=-\sum_{n=1}^{\infty}n(-i)^{n-1}(z+i)^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-n)(-i)^{n-1}(z+i)^{n-1}\,,|z+i|<1$$

Entonces la serie de Taylor resulta:

$$f(z)=\left(\frac{z+i}{z}\right)^2=(z+i)^2\frac{1}{z^2}=(z+i)^2\sum_{n=1}^{\infty}(-n)(-i)^{n-1}(z+i)^{n-1}=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-n)(-i)^{n-1}(z+i)^{n+1}\,,|z+i|<1$$



f) $f(z) = \operatorname{Ln}\left(\frac{z}{2} - 1\right)$; $z_0 = 4$

$D_{Ana}(f) = \mathbb{C} - \{x + iy : y = 0 \ \wedge x \leq 2\}$. El punto más cercano a $z_0 = 4$ donde f no es analítica es $z = 2$. Luego, el radio de convergencia de la serie de Taylor es $R = |2 - 4| = 2$

El disco abierto de convergencia es $|z - 4| < 2$. Para obtener la serie de Taylor podemos proceder así:

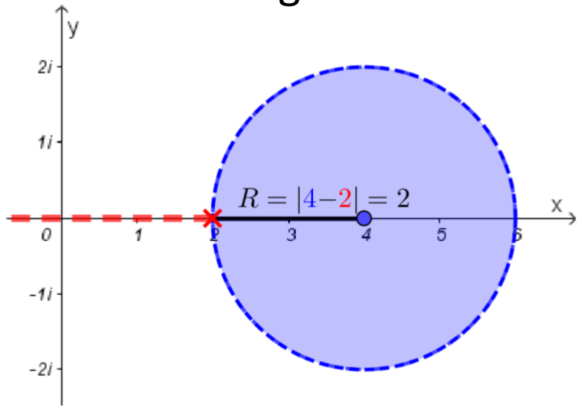
$$\frac{d}{dz}\left(\operatorname{Ln}\left(\frac{z}{2} - 1\right)\right) = \frac{1}{\left(\frac{z}{2} - 1\right)}\frac{1}{2} = \frac{1}{z - 2} = \frac{1}{(z - 4) + 2} = \frac{1/2}{1 + \left(\frac{z - 4}{2}\right)} \underbrace{=}_{\substack{geom:\ a=1/2 \\ r=-(z-4)/2 \\ CV \Leftrightarrow |z-4|<2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left(-\frac{z - 4}{2}\right)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z - 4)^n, |z - 4| < 2$$

La serie de Taylor pedida se obtiene integrando término a término dentro del disco abierto de convergencia:

$$\operatorname{Ln}\left(\frac{z}{2} - 1\right) = \int_4^z \frac{1}{z - 2}\,dz = \int_4^z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z - 4)^n\,dz =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n + 1)2^{n+1}}(z - 4)^{n+1}, |z - 4| < 2$$



g) $f(z)=\frac{4}{z^3+2z^2}$; $z_0=2$ $\qquad D_{Ana}(f)=\mathbb{C}-\{-2,0\}$. El punto más cercano a $z_0=2$ donde f no es analítica es $R=\text{mín}\{|-2-2|,|0-2|\}=2$.

La serie de Taylor centrada en $z_0=2$ representa a f en el disco $|z-2|<2$. Para hallar dicha serie conviene la siguiente descomposición en fracciones simples (ejercicio):

$$f(z)=\frac{4}{z^3+2z^2}=\frac{1}{z+2}-\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}$$

Entonces:

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{(z-2)+4}=\frac{1/4}{1+\left(\frac{z-2}{4}\right)}\overset{\substack{geom:\, a=\frac{1}{4}\,;\, r=-\left(\frac{z-2}{2}\right)\\ CV\Leftrightarrow|z-2|<4}}{\cong}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}(z-2)^n\,,|z-2|<4$$

$$-\frac{1}{z}=\frac{-1}{(z-2)+2}=\frac{-\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{z-2}{2}\right)}\overset{\substack{geom:\, a=-\frac{1}{2}\,;\, r=-\left(\frac{z-2}{2}\right)\\ CV\Leftrightarrow|z-2|<2}}{\cong}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\left(\frac{z-2}{2}\right)\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}(z-2)^n\ \text{ si }\ |z-2|<2$$

Derivando término a término:

$$\frac{1}{z^2}=\frac{d}{dz}\left(-\frac{1}{z}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}(z-2)^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(-1)^{n+2}}{2^{n+2}}(z-2)^n\ \text{ si }\ |z-2|<2$$

Luego,

$$f(z)=\frac{4}{z^3+2z^2}=\frac{1}{z+2}-\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}(z-2)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}(z-2)^n+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(-1)^{n+2}}{2^{n+2}}(z-2)^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}+\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}+\frac{(n+1)(-1)^{n+2}}{2^{n+1}}\right)(z-2)^n=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{2n+2}}-\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{n+1}{2^{n+1}}\right)(z-2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(1+n2^{n+1})}{2^{2n+2}}(z-2)^n=\frac{1}{4}-\frac{5}{16}(z-2)+\frac{17}{64}(z-2)^n+\cdots\quad \text{si}\ \ |z-2|<2$$

Ceros de funciones analíticas

Recordemos que una raíz de un polinomio $p(z)$ es un número complejo z_0 tal que $p(z_0) = 0$. Hemos visto además que las funciones analíticas en un punto z_0 son las que se expresan mediante una serie de potencias de

$(z - z_0)$. En este sentido podemos decir que generalizan a las funciones polinómicas a un número infinito de términos. El concepto que introducimos a continuación generaliza, para funciones analíticas, la noción de raíz de un polinomio.

Si $f(z)$ es analítica en z_0,

se dice que z_0 es un **cero de $\boldsymbol{f(z)}$** si $f(z_0) = 0$.

Ejemplo 4: Hallemos los ceros de $f(z) = (z^3 - z^2)\mathrm{sen}(\pi z)$

$$f(z) = 0 \Leftrightarrow (z^3 - z^2)\mathrm{sen}(\pi z) = 0 \Leftrightarrow z^2(z-1)\mathrm{sen}(\pi z) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \ \vee z = 1 \ \vee \pi z = k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow z \in \mathbb{Z}$$

La función posee infinitos ceros, dados por $z = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Orden de un cero de una función analítica

Dada $f(z)$ analítica en z_0 y $p \in \mathbb{N}$, se dice que z_0 es un **cero de orden p de $f(z)$** si se verifica:

$$f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(p-1)}(z_0) = 0 \quad \wedge f^{(p)}(z_0) \neq 0$$

Además, se dice que z_0 es un **cero de orden $p = 0$ de $f(z)$** si $f(z_0) \neq 0$, es decir, si z_0 NO es cero de $f(z)$

Nota: En el caso que $f(z)$ sea polinómica, la noción de orden del cero se corresponde con la de orden de multiplicidad de una raíz. Por ejemplo: las raíces de $p(z) = z^3 - 2z^2 + z = z(z^2 - 2z + 1) = z(z-1)^2$ son $z = 0$ (raíz simple, multiplicidad 1) y $z = 1$ (raíz doble, multiplicidad 2). Por otra parte,

$$p'(z) = 3z^2 - 4z + 1 \quad \therefore \quad p'(0) = 1 \neq 0 \ \text{ así que } z = 0 \text{ es un cero de orden } p = 1 \text{ de } p(z).$$

$$p'(1) = 3 - 4 + 1 = 0$$

$$p''(z) = 6z - 4 \ \therefore \ p''(1) = 6 - 4 = 2 \neq 0 \ \text{ así que } z = 1 \text{ es un cero de orden } p = 2 \text{ de } p(z).$$

Ejemplo 5: $f(z) = z\,\mathrm{sen}(\pi z)$

Ceros:

$$f(z) = 0 \Leftrightarrow z\,\mathrm{sen}(\pi z) = 0 \ \Leftrightarrow \ z = 0 \ \vee \ \pi z = k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \ z \in \mathbb{Z}$$

- $z_0 = 0$ es cero de orden $p = 2$ de $f(z)$ pues:

$$f(z) = z\,\mathrm{sen}(\pi z) \therefore f(0) = 0$$
$$f'(z) = \mathrm{sen}(\pi z) + \pi z \cos(\pi z) \therefore f'(0) = 0$$
$$f''(z) = 2\pi \cos(\pi z) - \pi^2 z\,\mathrm{sen}(\pi z) \therefore f^{(2)}(0) = 2\pi \neq 0$$

- $z_0 = k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ son ceros de orden $p = 1$ de $f(z)$ pues:

$$f(z) = z\,\mathrm{sen}(\pi z) \therefore f(k) = 0$$
$$f'(z) = \mathrm{sen}(\pi z) + \pi z \cos(\pi z) \therefore f^{(1)}(k) = (-1)^k k\pi \neq 0 \ , \qquad k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

<u>Observación</u>: Sea $f(z)$ analítica en z_0. Su serie de Taylor centrada en z_0 es

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{si } |z - z_0| < R \qquad \text{donde } \; a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad (n = 0,1,2,\dots)$$

Si z_0 es un cero de orden p de $f(z)$ entonces $f^{(n)}(z_0) = 0$ para $n < p$ pero $f^{(p)}(z_0) \neq 0$. Entonces

$a_n = 0$ para $n < p$ pero $a_p \neq 0$. Luego, la serie de Taylor tiene el siguiente aspecto:

$$f(z) = \sum_{n=p}^{\infty} a_n (z - z_0)^n =$$

$$= \underbrace{a_p}_{\neq 0} (z - z_0)^p + a_{p+1}(z - z_0)^{p+1} + a_{p+2}(z - z_0)^{p+2} + \cdots \quad \text{si } |z - z_0| < R$$

Es decir que podemos identificar el orden p de z_0 como el orden de la potencia más baja de $(z - z_0)$ que está presente (con coeficiente no nulo) en dicha serie de potencias.

Ejemplo 6: $f(z) = z^3 e^{z^2} - z^3 - sen(z^5)$. Comprobar que $z_0 = 0$ es un cero de $f(z)$ y determinar su orden.

$$f(0) = 0^3 e^{0^2} - 0^3 - sen(0^5) = 0$$

Sabemos que:

$$e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} w^n \ \text{ si } |w| < \infty \quad ; \quad \text{sen}(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} w^{2n+1} \ \text{ si } |w| < \infty$$

Entonces,

$$e^{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{2n} \ \text{ si } |z| < \infty \ ; \ \text{sen}(z^5) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (z^5)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{10n+5} \ \text{ si } |z| < \infty$$

Por lo tanto,

$$f(z) = z^3 e^{z^2} - z^3 - sen(z^5) = z^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{2n} - z^3 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{10n+5} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{2n+3} - z^3 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{10n+5} =$$

$$= z^3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{2n+3} - z^3 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{10n+5} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{2n+3} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{10n+5} =$$

$$= z^5 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{2n+3} - z^5 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{10n+5} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{2n+3} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{10n+5} = \frac{1}{2} z^7 + \frac{1}{6} z^{15} + \cdots \ \text{ si } |z| < \infty$$

Como la menor potencia presente en este desarrollo es $p = 7$, se deduce que $z_0 = 0$ es un cero de orden $p = 7$ de $f(z)$.

Teorema de caracterización de ceros de funciones analíticas

Teorema (**caracterización de ceros de funciones analíticas**):

Sea $f(z)$ analítica en z_0 y $p \in \mathbb{N}$. Son equivalentes:

I) z_0 es cero de orden p de $f(z)$

II) Existe una función $f_1(z)$ analítica y no nula en z_0 tal que en un entorno de z_0 vale:

$$\boldsymbol{f(z) = (z - z_0)^p f_1(z)}$$

Dem

I)⇒II) Supongamos que z_0 es cero de orden p de $f(z)$, así que $f^{(n)}(z_0) = 0$ si $n < p$ pero $f^{(p)}(z_0) \neq 0$. Esto muestra que el n-ésimo coeficiente de la serie de Taylor de $f(z)$ centrada en z_0 es $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = 0$ si $n < p$ pero $a_p \neq 0$. Entonces,

$$f(z) = \sum_{n=p}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_p (z - z_0)^p + a_{p+1} (z - z_0)^{p+1} + \cdots$$

$$= (z - z_0)^p \left[a_p + a_{p+1}(z - z_0) + a_{p+2}(z - z_0)^2 + \cdots \right] \text{ si } |z - z_0| < R$$

La serie entre corchetes es una serie de potencias que converge si $|z - z_0| < R$, por lo cual su suma $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{p+n}(z - z_0)^n$ es una función analítica en ese disco. Además, $f_1(z_0) = a_p \neq 0$. Es claro que $f(z) = (z - z_0)^p f_1(z)$ para $z \in E(z_0; R)$

II)⇒I) Supongamos que para $|z - z_0| < R$ se tiene: $f(z) = (z - z_0)^p f_1(z)$
donde $f_1(z)$ es analítica en ese entorno y $f_1(z_0) \neq 0$. Si la serie de Taylor de $f_1(z)$ centrada en z_0 es

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \ \text{si} \ |z - z_0| < R$$

Entonces $a_0 = f_1(z_0) \neq 0$. Luego, la serie de Taylor de $f(z)$ centrada en z_0 es

$$f(z) = (z - z_0)^p f_1(z) = (z - z_0)^p \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{p+n}$$

$$= a_0 (z - z_0)^p + a_1 (z - z_0)^{p+1} + \cdots \ \text{si} \ |z - z_0| < R$$

Las potencias de orden menor que p no están presentes, lo que significa que $\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = 0$ para todo $n < p$, así que $f^{(n)}(z_0) = 0$ para todo $n < p$. Por otra parte, $\frac{f^{(p)}(z_0)}{p!} = a_0 \neq 0$, así que $f^{(p)}(z_0) \neq 0$. Es decir:

$$f^{(0)}(z_0) = f^{(1)}(z_0) = \cdots = f^{(p-1)}(z_0)$$
$$f^{(p)}(z_0) \neq 0$$

Luego, z_0 es un cero de orden p de $f(z)$.

Ejemplo 7: Hallar el orden de los ceros de $f(z) = (z^4 - z^3)sen(\pi z)$

Rta

Los ceros de $f(z)$ son $z = k \in \mathbb{Z}$.

- $\boldsymbol{z_0 = 0}$ es cero de orden 1 de $g(z) = \operatorname{sen}(\pi z)$ pues

$g(0) = 0$, $g'(z) = \pi \cos(\pi z)$ $\therefore g'(0) = \pi \neq 0$. Entonces, por el teorema anterior,

$$g(z) = zg_1(z) \text{ para cierta } g_1(z) \text{ analítica en } z_0 \text{ y tal que } g_1(0) \neq 0$$

Luego,

$$f(z) = (z^4 - z^3)\operatorname{sen}(\pi z) = (z^4 - z^3)zg_1(z) = z^4(z-1)g_1(z)$$

Definiendo $f_1(z) = (z-1)g_1(z)$, función analítica en z_0, se tiene

$f_1(0) = -g_1(0) \neq 0$ y además $f(z) = z^4 f_1(z) = (z-0)^4 f_1(z)$.

Nuevamente apelando al teorema anterior, se deduce que $z_0 = 0$ es un cero de orden $p = 4$ de $f(z)$.

- $\boldsymbol{z_0 = 1}$ es cero de orden 1 de $g(z) = \operatorname{sen}(\pi z)$ pues $g(1) = 0$, $g'(z) = \pi \cos(\pi z) \;\therefore\; g'(1) = -\pi \neq 0$. Entonces, por el teorema anterior,

$g(z) = (z-1)g_1(z)$ para cierta $g_1(z)$ analítica en $z_0 = 1$ y tal que $g_1(1) \neq 0$

Luego,

$$f(z) = (z^4 - z^3)\operatorname{sen}(\pi z) = z^3(z-1)g(z) = z^3(z-1)^2 g_1(z)$$
$$= (z-1)^2 z^3 g_1(z)$$

La función $f_1(z) = z^3 g_1(z)$ es analítica en $z_0 = 1$ y se tiene:

$$f(z) = (z-1)^2 f_1(z)$$
$$f_1(1) = g_1(1) \neq 0$$

Entonces, por caracterización de ceros podemos afirmar que $z_0 = 1$ es un cero de orden $p = 2$ de $f(z)$.

- $\boldsymbol{z_0 = k \in \mathbb{Z} - \{0, 1\}}$ es cero de orden 1 de $g(z) = \operatorname{sen}(\pi z)$ pues $g(k) = 0$, $g'(z) = \pi \cos(\pi z) \;\therefore\; g'(k) = (-1)^k \pi \neq 0$. Entonces, por el teorema anterior,

$g(z) = (z - k)g_1(z)$ para cierta $g_1(z)$ analítica en $z_0 = k$ y tal que $g_1(k) \neq 0$

Luego,

$$\begin{aligned} f(z) &= (z^4 - z^3)\operatorname{sen}(\pi z) = (z^4 - z^3)(z - k)g_1(z) \\ &= (z - k)^1 (z^4 - z^3) g_1(z) \end{aligned}$$

La función $f_1(z) = (z^4 - z^3)g_1(z)$ es analítica en $z_0 = k$ y se tiene

$$f_1(k) = (k^4 - k^3)g_1(k) = k^3(k - 1)g_1(k) \neq 0$$

Como $f(z) = (z - k)^1 f_1(z)$, por caracterización de ceros podemos afirmar que $z_0 = k \in \mathbb{Z} - \{0,1\}$ es un cero de orden $p = 1$ de $f(z)$.