

Pruebas de hipótesis

Prueba de hipótesis

Uno de los objetivos de la estadística es hacer inferencias acerca de parámetros desconocidos de una población con base en información obtenida en una muestra aleatoria. Estas inferencias pueden hacerse de dos forma: por medio de estimaciones de los parámetros o por medio de pruebas de hipótesis para verificar si una cierta afirmación acerca del parámetro puede considerarse como válida basándose en los resultados de una muestra.

Prueba de hipótesis

Para el propósito de importación de cierto tipo de motocicletas, la entidad ambiental del país importador necesita verificar que el nivel de contaminantes producidos por estas motocicletas cumple con las normas del país. En particular la emisión de monóxido de carbono (CO), representadas por el promedio (μ), no deben superar $5,5g/Km$

En este caso sólo se está interesado en verificar si la afirmación $\mu \leq 5,5g/Km$ puede considerarse como válida o no.

Prueba de hipótesis

Definición:

Procedimiento estadístico que, a través del estudio de una muestra aleatoria, permite determinar el cumplimiento de una hipótesis planteada sobre alguna característica de la población.

En forma general, la hipótesis planteada involucra algún parámetro (por ejemplo μ o σ^2)

Planteamiento de una prueba de hipótesis

Pasos para realizar una prueba de hipótesis:

- 1 Planteamiento de las hipótesis estadísticas.
- 2 Seleccionar un nivel de significancia.
- 3 Cálculo del estadístico de prueba.
- 4 Formular la regla de decisión.
- 5 A partir de una muestra aleatoria tomar una decisión.

Planteamiento de una hipótesis

Una hipótesis estadística es una afirmación sobre la población, por lo tanto se expresa en términos de los parámetro poblacionales

En el ejemplo anterior se pueden plantear las siguientes hipótesis:

$$H_0 : \mu \leq 5,5 \quad H_1 : \mu > 5,5$$

La hipótesis que se desea contrastar se denomina *Hipótesis nula* (H_0), mientras que la hipótesis que se acepta cuando la evidencia muestral está claramente en contra de ésta se denomina *Hipótesis Alternativa* (H_1) (Hipótesis de investigación o de interés)

Planteamiento de una hipótesis

Una hipótesis estadística es una afirmación sobre la población, por lo tanto se expresa en términos de los parámetros poblacionales

En el ejemplo anterior se pueden plantear las siguientes hipótesis:

$$H_0: \mu \leq 5,5 \quad H_1: \mu > 5,5$$

Debe tenerse en cuenta que el no rechazo de la Hipótesis Nula no supone ninguna garantía de la certeza de ésta, sino la falta de evidencia en la muestra en contra de su veracidad

Planteamiento de una hipótesis

Según la estructura de las hipótesis se distinguen dos tipos de pruebas:

Pruebas bilaterales: En ellos se propone un valor puntual para el parámetro bajo estudio, de forma que se rechazará bien porque la evidencia muestral lleve a decidir que el valor es mayor o menor al propuesto.

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad H_1 : \theta \neq \theta_0$$

Pruebas unilaterales: En ellos se propone que el valor del parámetro se encuentre por debajo del propuesto o en otros casos, por encima de ese valor.

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad H_1 : \theta > \theta_0$$

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad H_1 : \theta < \theta_0$$

H_0 siempre se debe estar el símbolo de igualdad, esto debido a como se realiza la prueba.

Posibilidades en una prueba de hipótesis

La siguiente tabla resume las diferentes decisiones que se pueden tomar cuando se realiza una prueba de hipótesis

		Decisión Estadística	
		No rechazar H_0	Rechazar H_0
Estado	H_0 es cierta	Correcta	Error Tipo I
Real	H_0 es falsa	Error Tipo II	Correcta

Posibilidades en una prueba de hipótesis

La siguiente tabla resume las diferentes decisiones que se pueden tomar cuando se realiza una prueba de hipótesis

		Decisión Estadística	
		No rechazar H_0	Rechazar H_0
Estado	H_0 es cierta	Correcta	Error Tipo I
Real	H_0 es falsa	Error Tipo II	Correcta

En términos de probabilidades:

$$P(\text{Rechazar } H_0 | H_0 \text{ cierta}) = \alpha (\text{Nivel de significancia})$$

$$P(\text{No rechazar } H_0 | H_0 \text{ cierta}) = 1 - \alpha (\text{Nivel de confianza})$$

$$P(\text{Rechazar } H_0 | H_0 \text{ falsa}) = 1 - \beta (\text{Potencia de la prueba})$$

$$P(\text{No rechazar } H_0 | H_0 \text{ falsa}) = \beta (\text{probabilidad del error tipo II})$$

Posibilidades en una prueba de hipótesis

La siguiente tabla resume las diferentes decisiones que se pueden tomar cuando se realiza una prueba de hipótesis

		Decisión Estadística	
		No rechazar H_0	Rechazar H_0
Estado	H_0 es cierta	Correcta	Error Tipo I
Real	H_0 es falsa	Error Tipo II	Correcta

Lo ideal es que α y β sean lo más pequeño posible, sin embargo esto no es posible de manera simultanea (sin aumentar n). Dado que solo se tiene control sobre el error tipo I, una solución es plantear las hipótesis de tal forma que el error tipo I sea más grave que el error tipo II, y garantizar que α sea pequeño (entre 0.1 y 0.01).

Planteamiento de las hipótesis

Si se considera que la emisión de CO de cierto tipo de motocicletas no debe superar a $5.5g/Km$. La entidad ambiental responsable selecciona una muestra de motocicletas para efectuar las pruebas correspondientes. Si el sistema de hipótesis que se plantea es:

$$H_0 : \mu = < 5,5 \quad H_1 : \mu > 5,5$$

¿Que implica cada error?

Planteamiento de las hipótesis

Si se considera que la emisión de CO de cierto tipo de motocicletas no debe superar a $5.5g/Km$. La entidad ambiental responsable selecciona una muestra de motocicletas para efectuar las pruebas correspondientes. Si el sistema de hipótesis que se plantea es:

$$H_0 : \mu = <5,5 \quad H_1 : \mu > 5,5$$

¿Que implica cada error?

- Error tipo I: Rechazar $\mu \leq 5,5$ cuando realmente $\mu \leq 5,5$, esto es, las motocicletas que están emitiendo una cantidad permitida de CO no pasan la prueba y no pueden ser importadas (perdida económica).
- Error tipo II: No rechazar $\mu = 5,5$ cuando realmente $\mu \geq 5,5$, esto implica que las motocicletas que emiten gran cantidad de CO pasan la prueba y pueden ser importadas (contaminación ambiental).

Estadístico de prueba

Hipótesis sobre μ :

Sea x_1, \dots, x_n una muestra aleatoria de una población normal con media desconocida y varianza σ^2 conocida. Si se tiene que $H_0 : \mu = \mu_0$ Entonces el estadístico de prueba queda definido como:

$$z_c = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \text{Normal}(0, 1)$$

En caso que se desconozca la varianza y tenga que ser estimada:

$$t_c = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{(n-1)}$$

Estadístico de prueba

Hipótesis sobre μ :

Sea x_1, \dots, x_n una muestra aleatoria de una población **no normal** con media desconocida y varianza σ^2 conocida. Si se tiene que $H_0: \mu = \mu_0$ Entonces el estadístico de prueba queda definido como:

$$z_c = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \text{ tiene distribución aproximadamente Normal}(0, 1) \text{ por Teorema Central del Límite siempre que el tamaño de la muestra sea 30 o más}$$

En caso que se desconozca la varianza y tenga que ser estimada se sustituye sigma por S en el denominador de la fórmula anterior

Región de rechazo

Un concepto importante en una prueba de hipótesis es la región de rechazo asociada a una regla de decisión, y se define como el conjunto conformado por todos los valores de la estadística prueba que conducen a la decisión de rechazar H_0 . Según el tipo de hipótesis que se tenga, el estadístico de prueba y en nivel de significancia, se puede obtener una región de rechazo.

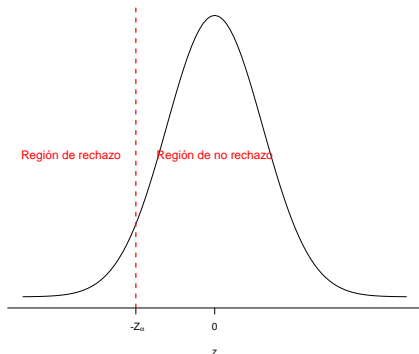
Para el ejemplo del nivel de contaminación por CO se plantea la siguiente hipótesis:

$$H_0: \mu \geq 5,5 \quad H_1: \mu < 5,5$$

Si luego de tomar una muestra se observa que luego de tomar una muestra de 20 motocicletas se encuentra que $\bar{x} = 5,3$, ¿podemos determinar que las motocicletas cumplen con la reglamentación ambiental? ¿y si encuentra que $\bar{x} = 3$?

Región de rechazo

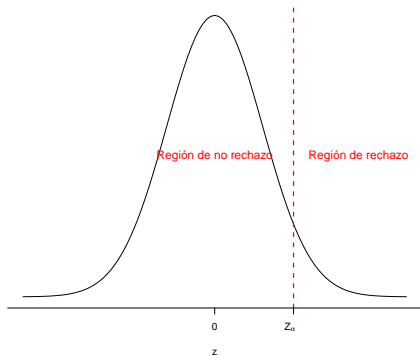
Si $H_0: \mu \geq \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$ entonces $z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$.



z_α , llamado valor crítico, es el punto de división entre la región en que se rechaza H_0 y la región donde no se rechaza ($P(z < -z_\alpha) = \alpha$)

Región de rechazo

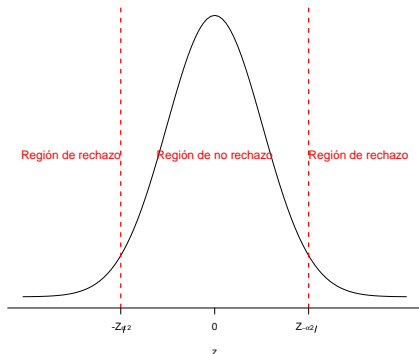
Si $H_0: \mu \leq \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$ entonces $z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$.



$z_{1-\alpha}$ es el valor crítico
 $(P(z > z_\alpha) = \alpha)$

Región de rechazo

Si $H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$ entonces $z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$.



los valores $z_{\alpha/2}$ y $z_{1-\alpha/2}$
son los valores críticos
($P(z < -z_{\alpha/2})$ o $P(z > z_{\alpha/2}) = \alpha$)

Ejemplo

Un científico está probando el efecto de una droga en el tiempo de respuesta para 100 ratas inyectadas con una unidad de dosis de la droga, luego cada una de las ratas es estimulada y se registra el tiempo de respuesta. El científico sabe que el tiempo de respuesta medio para las ratas, sin ser inyectadas, es de 1.2 segundos. El tiempo de respuesta promedio para las ratas inyectadas fue de 1.05. Si se sabe que la desviación estándar poblacional es de 0.5 segundos. Hay evidencia suficiente para determinar que la droga tuvo un efecto en el tiempo de respuesta?

Ejemplo

Un científico está probando el efecto de una droga en el tiempo de respuesta para 100 ratas inyectadas con una unidad de dosis de la droga, luego cada una de las ratas es estimulada y se registra el tiempo de respuesta. El científico sabe que el tiempo de respuesta medio para las ratas, sin ser inyectadas, es de 1.2 segundos. El tiempo de respuesta promedio para las ratas inyectadas fue de 1.05. Si se sabe que la desviación estándar verdadera de la población es de 0.5 segundos. Hay evidencia suficiente para determinar que la droga tuvo un efecto en el tiempo de respuesta?

$H_0 : \mu = 1,2$ La droga no tuvo efecto

$H_1 : \mu \neq 1,2$ La droga tuvo efecto

Estadístico de prueba:

$$z_c = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

Regla de decisión:

Rechazo H_0 si $z_c < -z_{\alpha/2}$ o $z_c > z_{\alpha/2}$ o si valor absoluto de Z_c es mayor que $Z_{\alpha/2}$

Ejemplo

Un científico está probando el efecto de una droga en el tiempo de respuesta para 50 ratas inyectadas con una unidad de dosis de la droga, luego cada una de las ratas es estimulada y se registra el tiempo de respuesta. El científico sabe que el tiempo de respuesta medio para las ratas, sin ser inyectadas, es de 1.2 segundos. El tiempo de respuesta promedio para las ratas inyectadas fue de 1.05. Si se sabe que la desviación estándar es de 0.5 segundos. Hay evidencia suficiente para determinar que la droga tuvo un efecto en el tiempo de respuesta? usar un nivel de significación del 5%

$$H_0 : \mu = 1,2 \quad H_1 : \mu \neq 1,2$$

Estadístico de prueba:

$$z_c = \frac{1,05 - 1,2}{0,5/\sqrt{50}} = -2,12$$

Regla de decisión (con un $\alpha = 0,05$):

Dado que $z_c = -2,12 < -z_{\alpha/2} = -1,96$ Se rechaza H_0 . Con un nivel de significación de 5 %, hay evidencia suficiente para determinar que la media de las ratas inyectadas es diferente de 1.2 segundos.

Ejemplo

De acuerdo a la afirmación de un fabricante de una marca de cigarrillos, el contenido medio de nicotina de cada cigarrillo es igual a 3.5mg . Un organismo de control está interesado en determinar si el contenido de nicotina de esos cigarrillos excede lo que el fabricante afirma. De acuerdo a esto, ¿Cuál debería ser el sistema de hipótesis? realizar una prueba con alfa 0,05

Ejemplo

De acuerdo a la afirmación de un fabricante de una marca de cigarrillos, el contenido medio de nicotina de cada cigarrillo es igual a $3.5mg$. Un organismo de control está interesado en determinar si el contenido de nicotina de esos cigarrillos no excede lo que el fabricante afirma. De acuerdo a esto, ¿Cuál debería ser el sistema de hipótesis?

$$H_0 = 3,5 \quad H_1 > 3,5$$

para esto toma una muestra de 15 cigarrillos y encuentra los siguientes resultados:(suponer que el contenido de nicotina de los cigarrillos tiene distribución Normal)

$$\bar{x} = 4,2mg \quad S = 1,4mg$$

De acuerdo con estos resultados muestrales, ¿Está de acuerdo con la afirmación del fabricante?

Ejemplo

De acuerdo a la afirmación de un fabricante de una marca de cigarrillos, el contenido medio de nicotina de sus cigarrillos es igual a $3.5mg$. Un organismo de control está interesado en determinar si el contenido de nicotina de esos cigarrillos no excede lo que el fabricante afirma. De acuerdo a esto, ¿Cuál debería ser el sistema de hipótesis?

$$H_0 = 3,5 \quad H_1 > 3,5$$

$$t_c = \frac{4,2 - 3,5}{1,4/\sqrt{15}} = 1,936$$

Dado que $1,936 > t_{0,05,14} = 1,76$, se puede concluir que, con un nivel de significancia del 5 %, hay evidencia suficiente para determinar que el contenido medio de nicotina de los cigarrillos es superior a $3.5mg$.

valor p

Una forma de informar los resultados es mediante α y la decisión tomada sobre H_0 (rechazo o no rechazo). Si α es pequeño la decisión de rechazar H_0 es muy convincente, pero si α es grande le resta fuerza a la prueba si la decisión adoptada es la de rechazar H_0 . Por otro lado, para α muy pequeño, el hecho de no rechazar H_0 no se interpretará como un apoyo indiscutible a esta hipótesis.

valor p

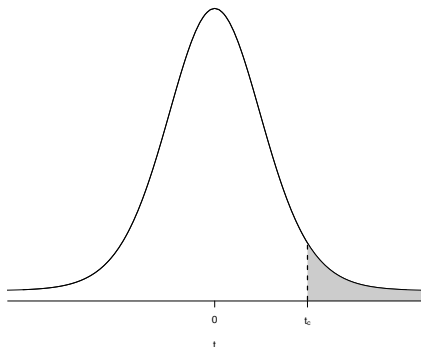
Una forma de informar los resultados es mediante α y la decisión tomada sobre H_0 (rechazo o no rechazo). Si α es pequeño la decisión de rechazar H_0 es muy convincente, pero si α es grande le resta fuerza a la prueba si la decisión adoptada es la de rechazar H_0 . Por otro lado, para α muy pequeño, el hecho de no rechazar H_0 no se interpretará como un apoyo indiscutible a esta hipótesis.

Una forma alternativa de presentar resultados es por medio del valor p, definido como *el menor de los valores α para los cuáles se rechazaría la hipótesis nula* . Este valor depende de los datos muestrales.

A partir del valor p se puede tomar la decisión de rechazar H_0 si este valor es pequeño.

valor p

Probabilidad, calculada suponiendo que H_0 sea cierta, de que el resultado tomó un valor al menos tan extremo como el observado.



Para el ejemplo del contenido de cigarrillo:


$$P(\bar{x} > 4,2 | \mu = 3,5)$$

$P(t > t_c) = P(t > 1,936)$
por lo tanto el p-valor
está entre 0,025 y 0,05
según tabla t-student

valor p

En el ejemplo de la respuesta de las ratas donde las hipótesis son:

$$H_0: \mu = 1,2 \quad H_1: \mu \neq 1,2 \text{ y se}$$

encontró que $\bar{x} = 1,05$ y $\sigma = 0,05$. z_c  $1,2$

¿Como se determina el valor p?

valor p

En el ejemplo de la respuesta de las ratas donde las hipótesis son:

$$H_0: \mu = 1,2 \quad H_1: \mu \neq 1,2 \text{ y se}$$

encontró que $\bar{x} = 1,05$ y $\sigma = 0,05$. $z_c = 2,12$

¿Como se determina el valor p?

$$P(z > 2,12 \text{ o } z < -2,12) = 2P(z < -2,12)$$

$$2P(z < -2,12) = 0,033 = \text{Valor p}$$

valor p

En el ejemplo de la respuesta de las ratas donde las hipótesis son:

$$H_0 : \mu = 1,2 \quad H_1 : \mu \neq 1,2$$

y se encontró que $\bar{x} = 1,05$ y $\sigma = 0,05$. $z_c = -2,12$

¿Como se determina el valor p?

$$P(z > 2,12 \text{ o } z < -2,12) = 2P(z < -2,12)$$

$$2P(z < -2,12) = 0,033 = \text{Valor p}$$

Si el valor p es menor o igual que 0,05, entonces se rechaza la hipótesis nula. Si por el contrario es mayor que 0,05, la hipótesis nula no se rechaza. (el valor 0,05 se pone como referencia en todas las publicaciones)

Test para una proporción

Hipótesis sobre P :

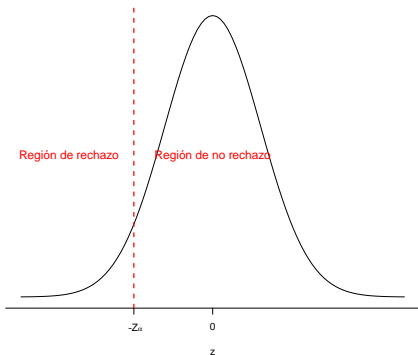
En el caso que $H_0 : P = P_0$ y el tamaño de muestra sea suficientemente grande:

$$z_c = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \sim \text{Normal}(0, 1)$$

Prueba de hipótesis para una proporción

Si $H_0 : P = P_0$ $H_1 : P < P_0$ Si n es grande, entonces

$$z = \frac{P - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}} \sim N(0, 1)$$

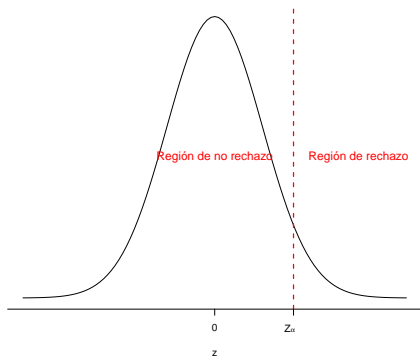


Rechazo si $z < -z_\alpha$

Prueba de hipótesis para una proporción

Si $H_0 : P = P_0$ $H_1 : P > P_0$ Si n es grande, entonces

$$z = \frac{P - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}} \sim N(0, 1)$$

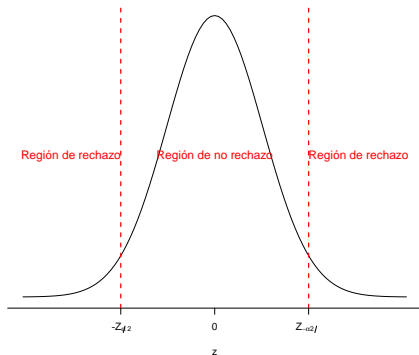


Rechazo si $z > z_{\alpha}$

Prueba de hipótesis para una proporción

Si $H_0 : P = P_0$ $H_1 : P \neq P_0$ Si n es grande, entonces

$$z = \frac{P - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}} \sim N(0, 1)$$



Rechazo si

$$z < -z_{\alpha/2} \text{ o } z > z_{\alpha/2}$$

Ejemplo

El gerente de una empresa de producción asegura que su proceso genera una proporción de unidades defectuosas menor al 5 %, al tomar una muestra de su producto se obtiene que de 200 unidades revisadas, un total de 15 unidades fueron defectuosas. Realizar una prueba de hipótesis con nivel de significación 0,1 ¿Los datos corroboran la afirmación del productor?

$$H_0: P = 0,05 \quad H_1: P < 0,05$$

Estadístico de prueba:

$$z_c = \frac{p - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}}$$

Regla de decisión:

Rechazo H_0 si $z_c < -z_\alpha$