

Campo magnético de corrientes

Hasta 1819 se sabía que la fuente del campo magnético eran los materiales naturalmente “imantados” (piedra imán).

Se lo detectaba por la desviación de la aguja de una brújula ubicada en las cercanías del imán (cualitativo).

Los imanes naturales poseen dos “polos” llamados NORTE y SUR que ejercen fuerzas entre si:

Polos iguales de repelen



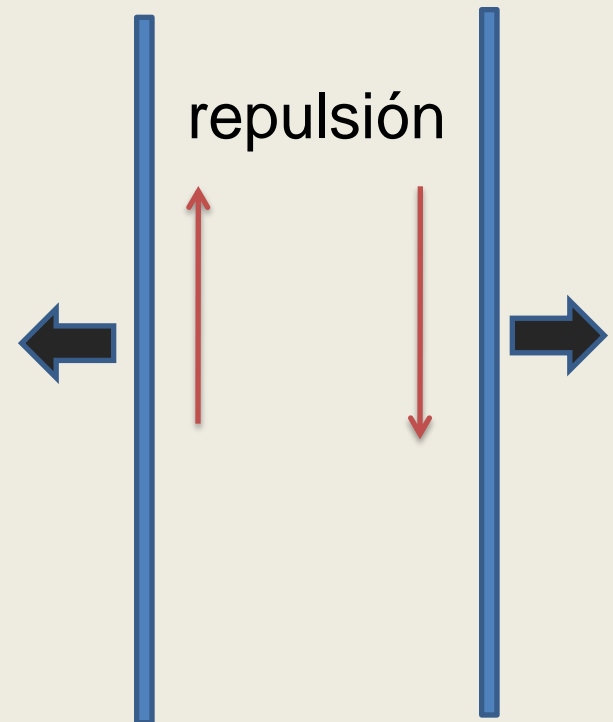
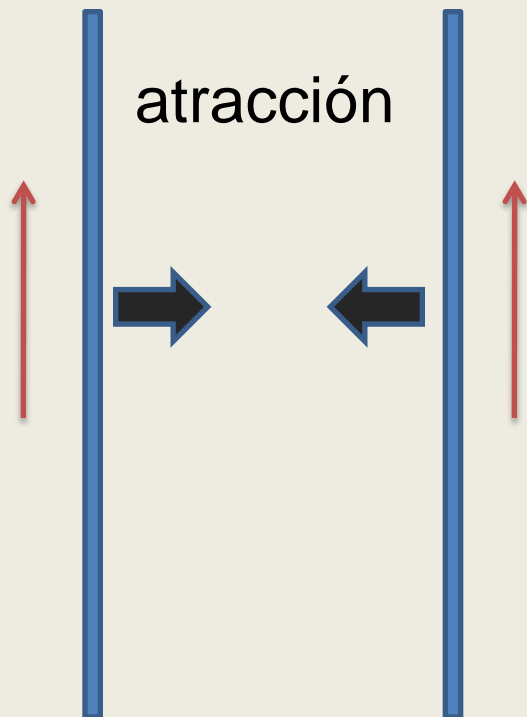
Polos distintos se atraen.



No es posible obtener un polo aislado: cada vez que se parte un imán, se vuelven a observar dos polos.

En 1819, Hans Oersted descubre que la **aguja de una brújula se desvía en presencia de un conductor que lleva una corriente eléctrica** (cualitativo).

Realiza experiencias sobre la fuerza mutua (➡) que se ejercen dos conductores rectilíneos largos en función de la corriente que llevan (—→):



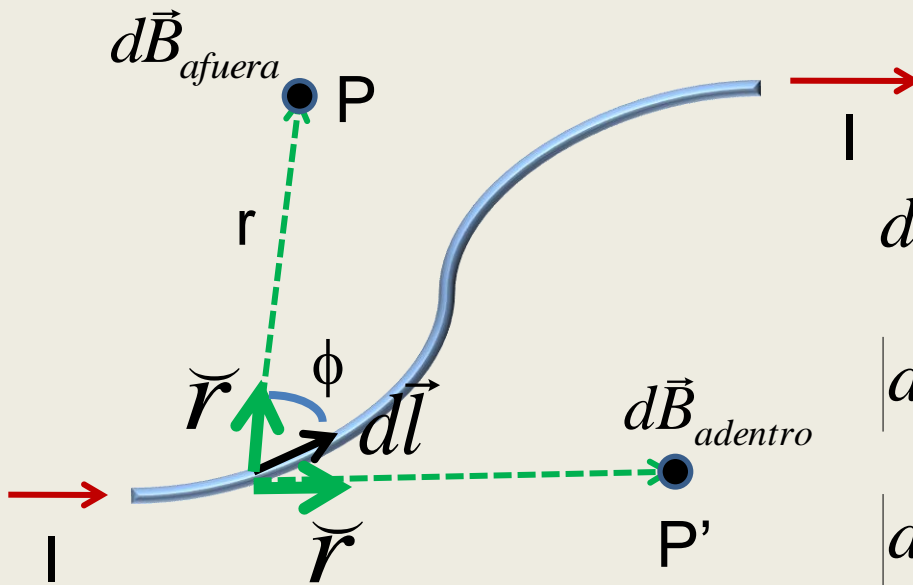
Ley de Biot-Savart

Fuente del campo magnético: **cargas en movimiento**
corriente eléctrica

¿Cómo depende el campo magnético (**B**) de parámetros tales como corriente, distancia, etc?

1820: Jean-Baptiste Biot y Félix Savart realizaron experimentos cuantitativos para relacionar la fuerza ejercida por una corriente sobre un imán “de prueba”.

Como el **campo magnético** se mide por la **fuerza** que ejerce sobre un objeto de prueba, le asignaremos **carácter vectorial**: $\vec{B}(\vec{r})$



$d\vec{B}$ perpendicular a $d\vec{l}$ y a \vec{r}

$$|d\vec{B}| \propto \frac{1}{r^2}$$

$$|d\vec{B}| \propto \text{elemento de corriente } I dl$$

$$|d\vec{B}| \propto \text{sen}(\phi)$$

Resumiendo: Ley de Biot - Savart

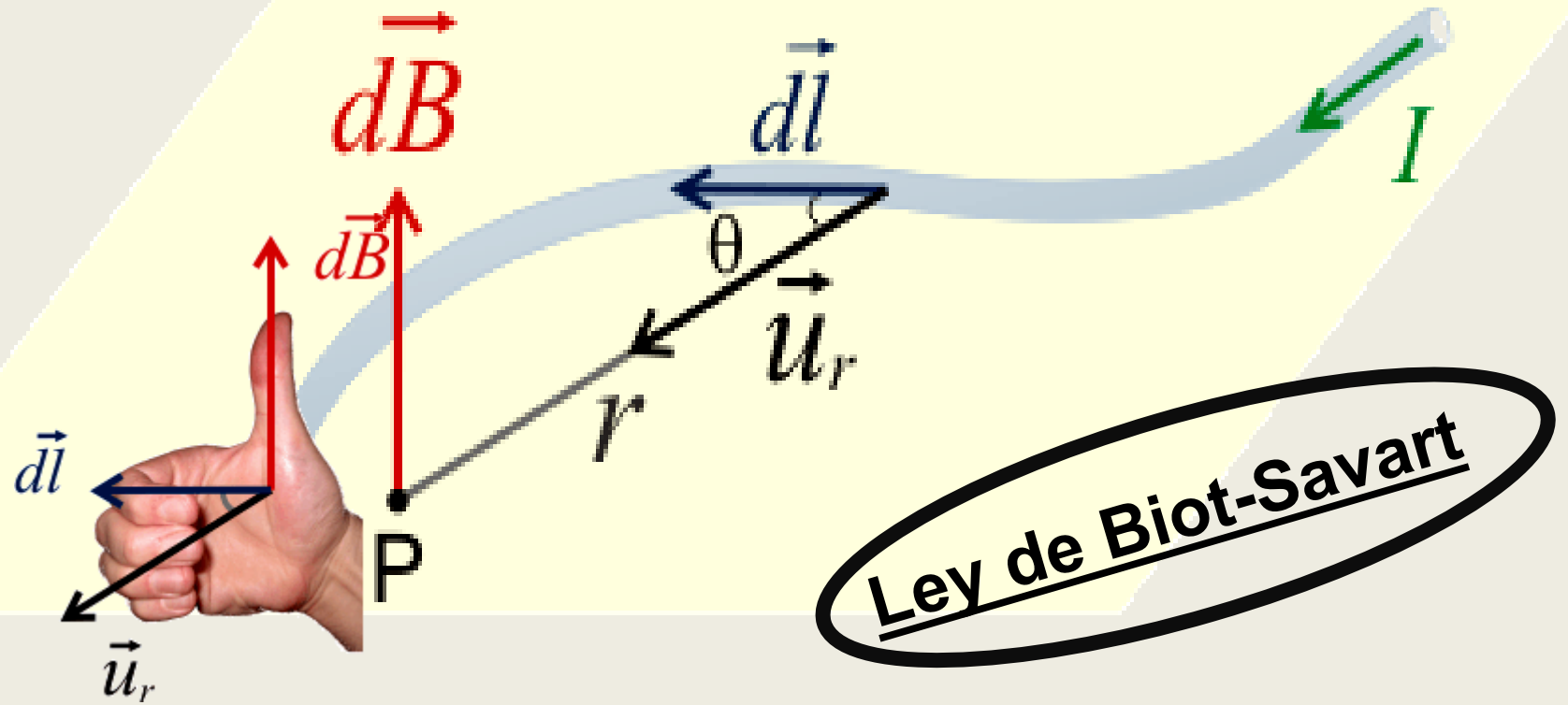
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^2} \quad [\text{Tesla}];$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A}$$

Permeabilidad magnética

$d\vec{B}$ es el campo generado por un elemento de corriente en un punto P. Para conocer B_{total} debemos integrar:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{circuito}} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^2}$$



Ley de Biot-Savart

$$|d\vec{B}| = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin\theta}{r^2}$$

Módulo del diferencial de campo magnético

Campo magnético total
en el punto P

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{l} \times \vec{u}_r}{r^2}$$

Valores típicos

	Campo magnético
Enana blanca	10 kT
Aceleradores de partículas	10 T
Resonancia magnética	1,5 T
Manchas solares	1T
Imán	0,01 T
Superficie de la Tierra	50 μ T
Junto a un teléfono móvil	100 μ T
Cerebro humano	10^{-13} T

Analogías y diferencias entre campo eléctrico y campo magnético

Analogías

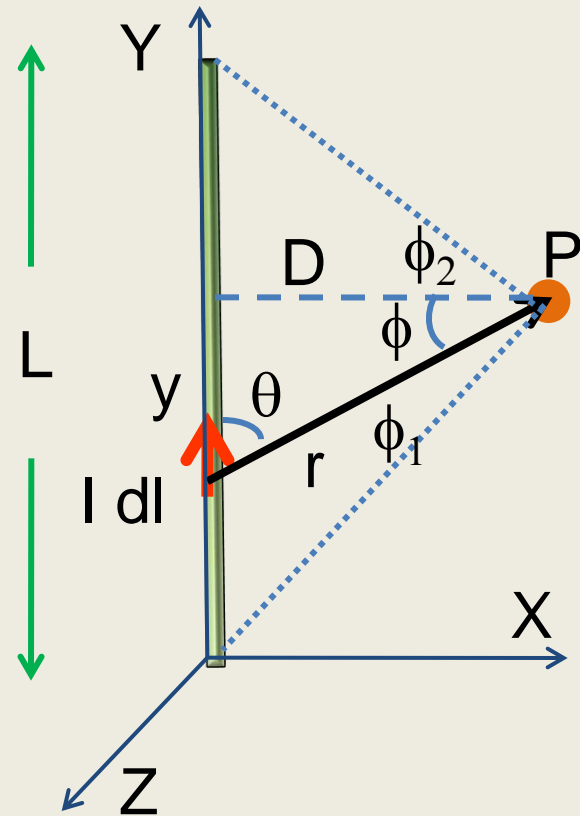
- ☀ Ambos decrecen con el cuadrado de la distancia.
- ☀ Tienen una constante de proporcionalidad definida.

Diferencias

- ☀ La dirección de \vec{E} es radial, mientras que la de \vec{B} es perpendicular al plano que contiene a $I d\vec{l}$ y \vec{r}
- ☀ Existe la carga puntual aislada, pero no el elemento de corriente aislado.

Cálculo de B debido a una corriente rectilínea de longitud L

El problema tiene simetría cilíndrica alrededor del conductor, entonces calculamos \mathbf{B} para un punto arbitrario del plano XY



Aplicamos Biot-Savart: **todos los elementos de corriente $I d\mathbf{l}$ generan un $d\mathbf{B} \perp XY$ en P**

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \sin(\theta)}{r^2}$$

$$d\mathbf{l} = dy; \quad \sin(\theta) = \cos(\phi)$$

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dy \cos(\phi)}{r^2} \quad \text{hay que reducir a una variable}$$

$$y = D \tan(\phi); \quad dy = D \sec^2(\phi) d\phi; \quad r^2 = \frac{D^2}{\cos^2(\phi)}$$

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I D \sec^2(\phi) d\phi \cos(\phi) \cos^2(\phi)}{D^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi D} \cos(\phi) d\phi$$

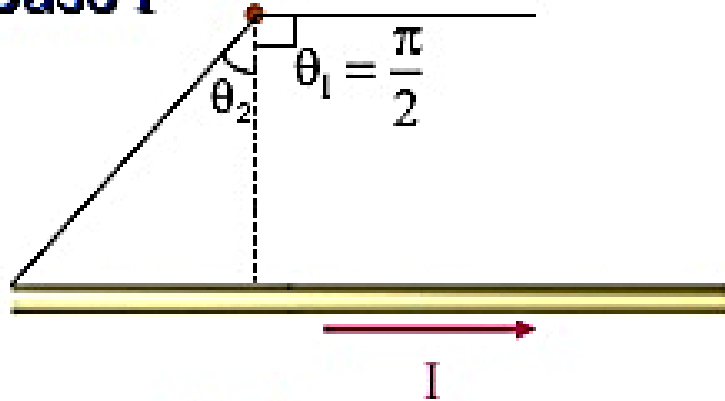
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi D} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \cos(\phi) d\phi = \boxed{\frac{\mu_0 I}{4\pi D} [\sin(\phi_1) + \sin(\phi_2)]}$$

Cálculo de campos magnéticos debidos a segmentos semiinfinitos

Expresión general

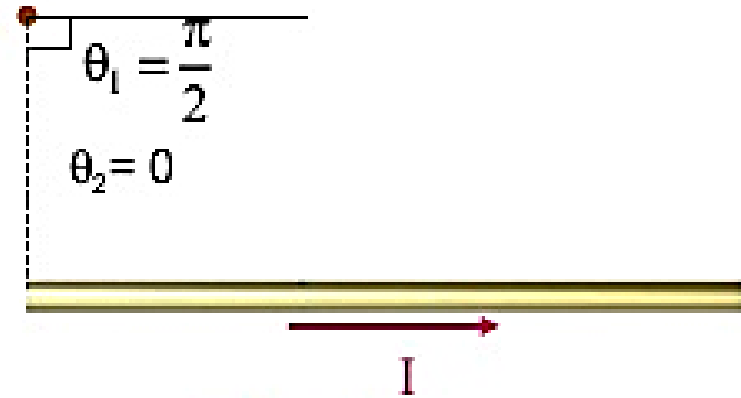
$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{y} (\sin\theta_1 + \sin\theta_2)$$

Caso I



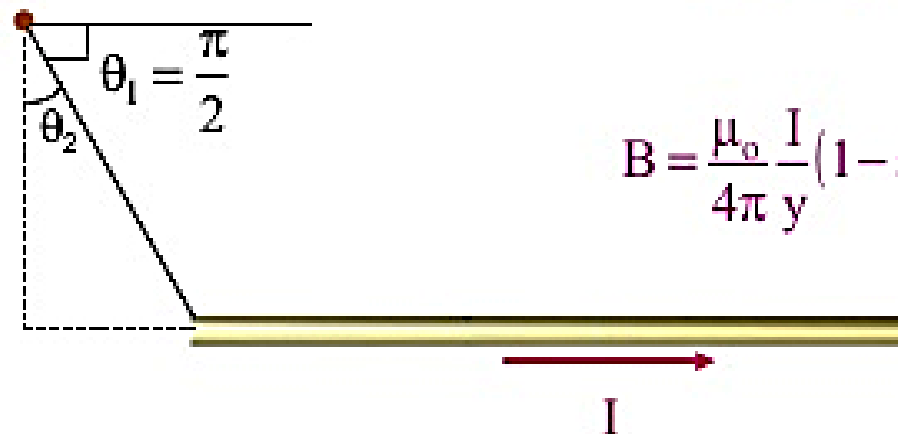
$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{y} (1 + \sin\theta_2)$$

Caso II



$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{y} = \frac{1}{2} B_{\text{Hilo Infinito}}$$

Caso III



$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{y} (1 - \sin\theta_2)$$

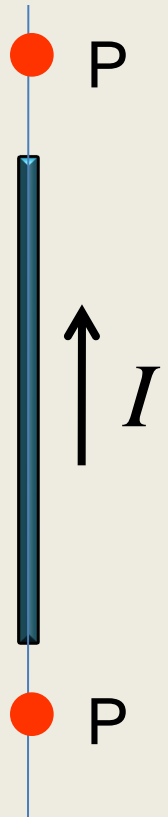
¿Y si el punto P está sobre la recta que contiene al elemento rectilíneo de corriente?

En este caso: $\phi_1 = \phi_2 = 0$, $\sin(\phi_1) = \sin(\phi_2) = 0$

Por lo tanto: $\mathbf{B} = 0$: los segmentos rectilíneos de corriente NO contribuyen al campo magnético en la recta que los contiene.

¿Y si tenemos varios segmentos rectilíneos de corriente ubicados en diferentes posiciones en el plano XY?

Utilizar el Principio de Superposición: calcular el campo magnético producido por cada segmento en el punto XY elegido y sumar vectorialmente los campos magnéticos calculados.



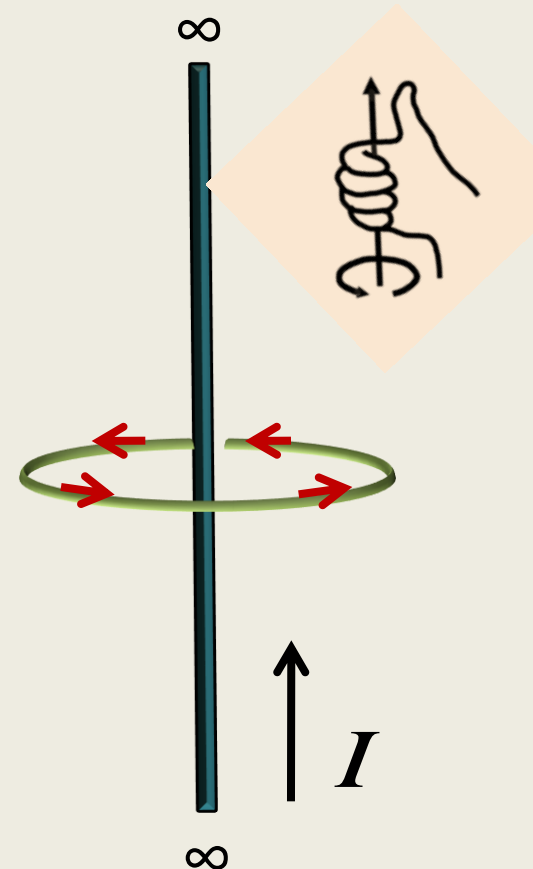
Para escribirlo en forma vectorial: sabemos que todas las contribuciones a \mathbf{B} apuntan en el sentido negativo del eje Z :

$$\vec{B} = - \frac{\mu_0 I}{4\pi D} [\text{sen}(\phi_1) + \text{sen}(\phi_2)] \vec{k}$$

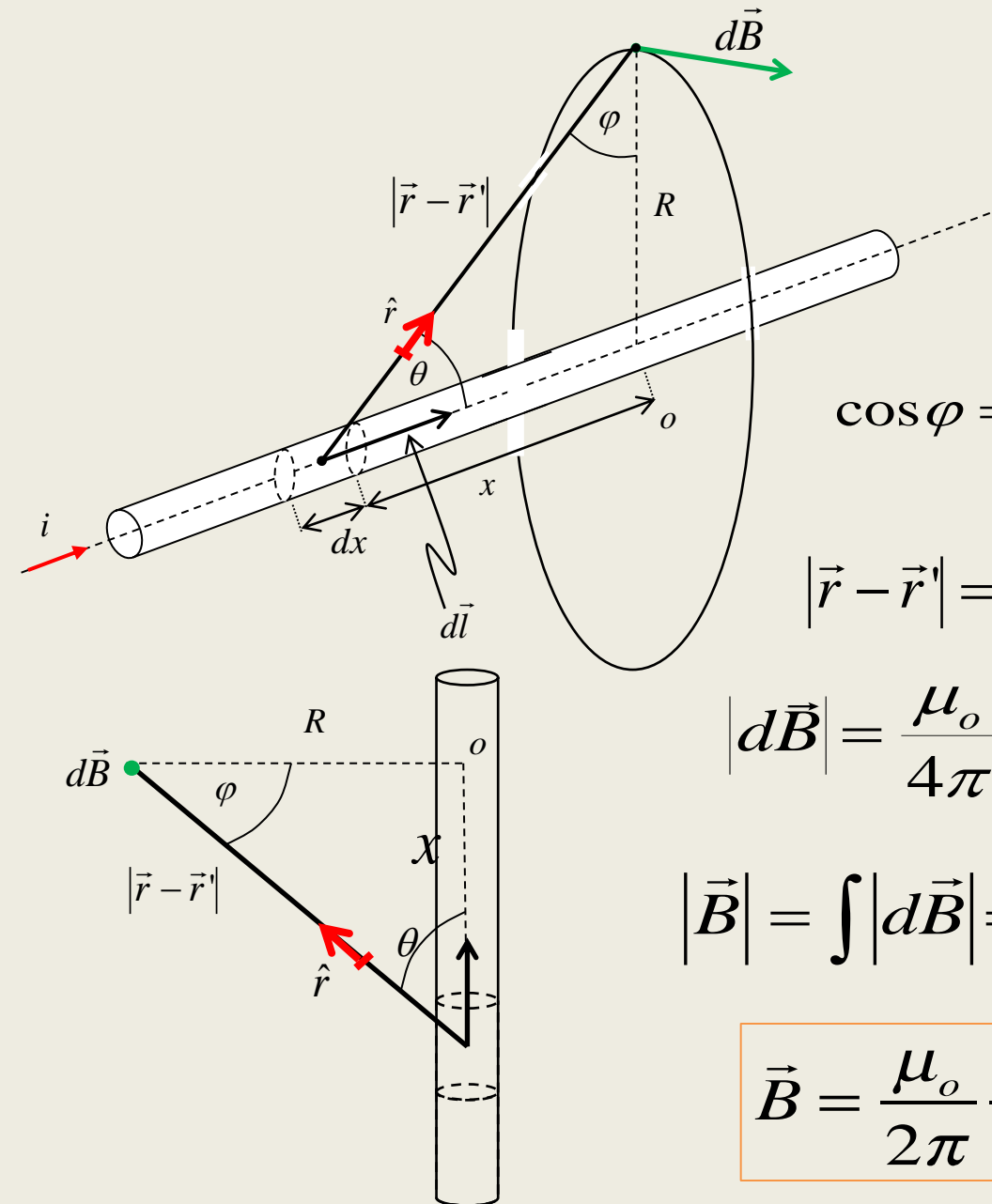
Si $L \rightarrow \infty, \Rightarrow \phi_1 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ y $\phi_2 \rightarrow \frac{\pi}{2}$

$$\therefore \vec{B} = - \frac{\mu_0 I}{4\pi D} [1+1] \vec{k} = - \frac{\mu_0 I}{2\pi D} \vec{k}$$

Las líneas de campo magnético creado por una corriente rectilínea muy larga son circunferencias concéntricas alrededor del conductor. La dirección se determina a partir de la regla de la mano derecha.



Campo magnético generado por un hilo infinito



$$d\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{i (d\vec{l} \times \hat{r})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}$$

$$|d\vec{l} \times \hat{r}| = |d\vec{l}| |\hat{r}| \sin \theta = dx \cos \phi$$

$$\cos \phi = \frac{R}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\tan \phi = \frac{x}{R}$$

$$\frac{R}{\cos^2 \phi} d\phi = dx$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = (x^2 + R^2)^{1/2}$$

$$|d\vec{B}| = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{i \cos \phi dx}{(x^2 + R^2)} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{i \cos \phi d\phi}{R}$$

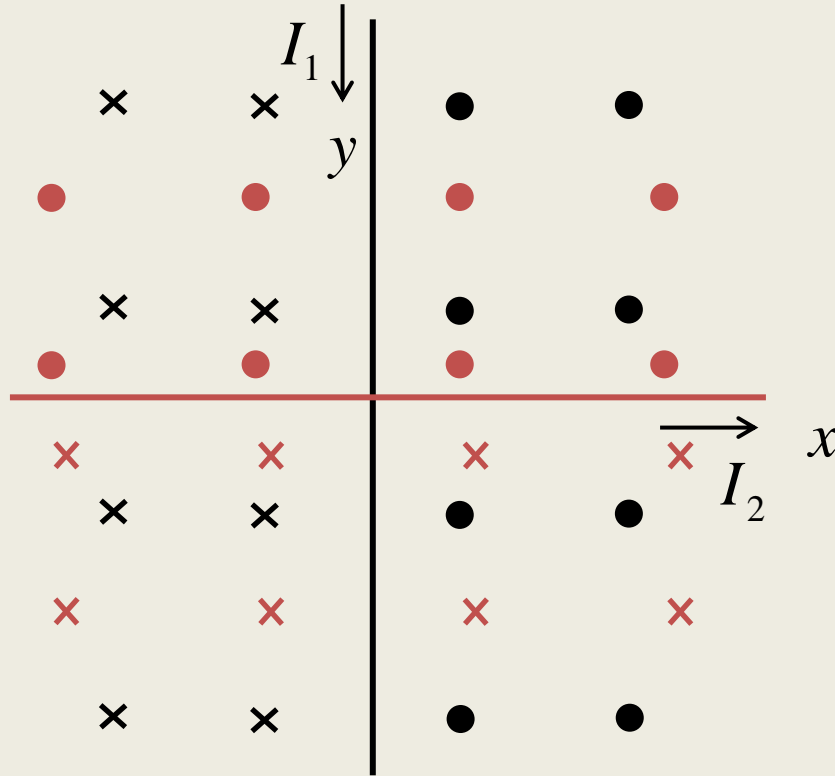
$$|\vec{B}| = \int |d\vec{B}| = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{i \cos \phi d\phi}{R}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_o}{2\pi} \frac{i}{R} \hat{\phi}$$

Líneas de campo magnético B de un conductor rectilíneo largo por el que circula una corriente I ejemplificadas con limaduras de hierro



Campo de dos hilos conductores cruzados



$$|\vec{B}_1| = \frac{\mu_o I_1}{2\pi |x|}$$

$$|\vec{B}_2| = \frac{\mu_o I_2}{2\pi |y|}$$

Primer

cuadrante

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_o}{2\pi} \left(\frac{I_1}{|x|} + \frac{I_2}{|y|} \right) \hat{k}$$

Segundo

cuadrante

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_o}{2\pi} \left(-\frac{I_1}{|x|} + \frac{I_2}{|y|} \right) \hat{k}$$

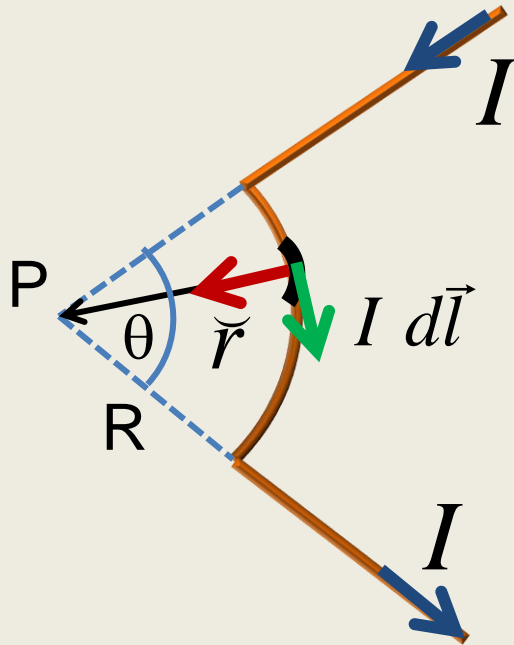
Tercer cuadrante

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = -\frac{\mu_o}{2\pi} \left(\frac{I_1}{|x|} + \frac{I_2}{|y|} \right) \hat{k}$$

Cuarto cuadrante

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_o}{2\pi} \left(\frac{I_1}{|x|} - \frac{I_2}{|y|} \right) \hat{k}$$

Campo magnético debido a un segmento de corriente en arco de circunferencia



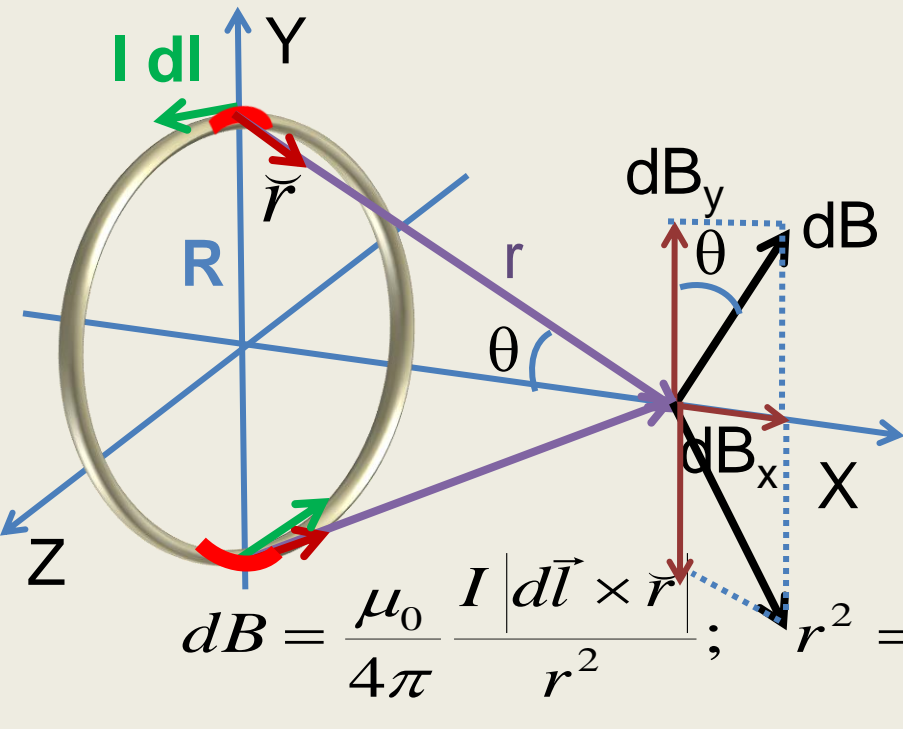
El punto **P** se encuentra en la intersección de las rectas que contienen a los segmentos de corriente rectilíneos. Por lo visto antes, éstos NO contribuyen al campo magnético en **P**

Para el segmento de corriente en arco de circunferencia: $I d\vec{l} \perp \vec{r}$ en todo el segmento $\Rightarrow \sin(\phi) = 1$.

Por regla de producto vectorial, la contribución de cada dB en P es en $-\vec{k}$

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} dl; \therefore B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \int_{\text{arco}} dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} R\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \theta$$

Cálculo del campo magnético en el eje de una espira circular



$d\vec{B} \perp$ al plano formado por $I d\vec{l}$ y \vec{r}

Al sumar para todos los elementos de corriente, la componente dB_y se anula: sólo debemos integrar para dB_x

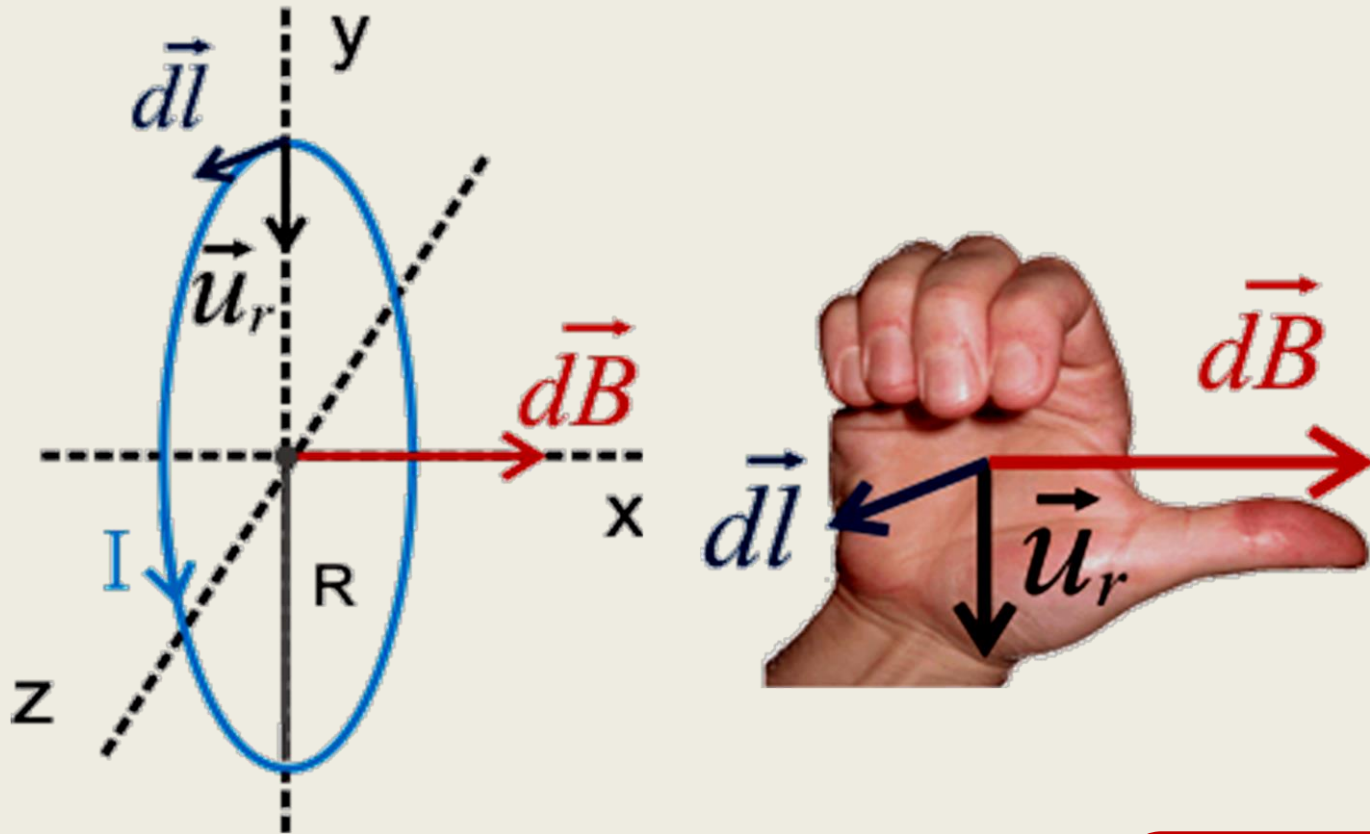
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I |d\vec{l} \times \vec{r}|}{r^2}; \quad r^2 = x^2 + R^2; \quad \text{sen}(\theta) = \frac{R}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$

$$dB_x = d\vec{B} \text{ sen}(\theta) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{x^2 + R^2} \frac{R}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$

$$B_x = \int_{\text{espira}} dB_x = \int_{\text{espira}} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{x^2 + R^2} \frac{R}{\sqrt{x^2 + R^2}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I R}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \int_{\text{espira}} dl$$

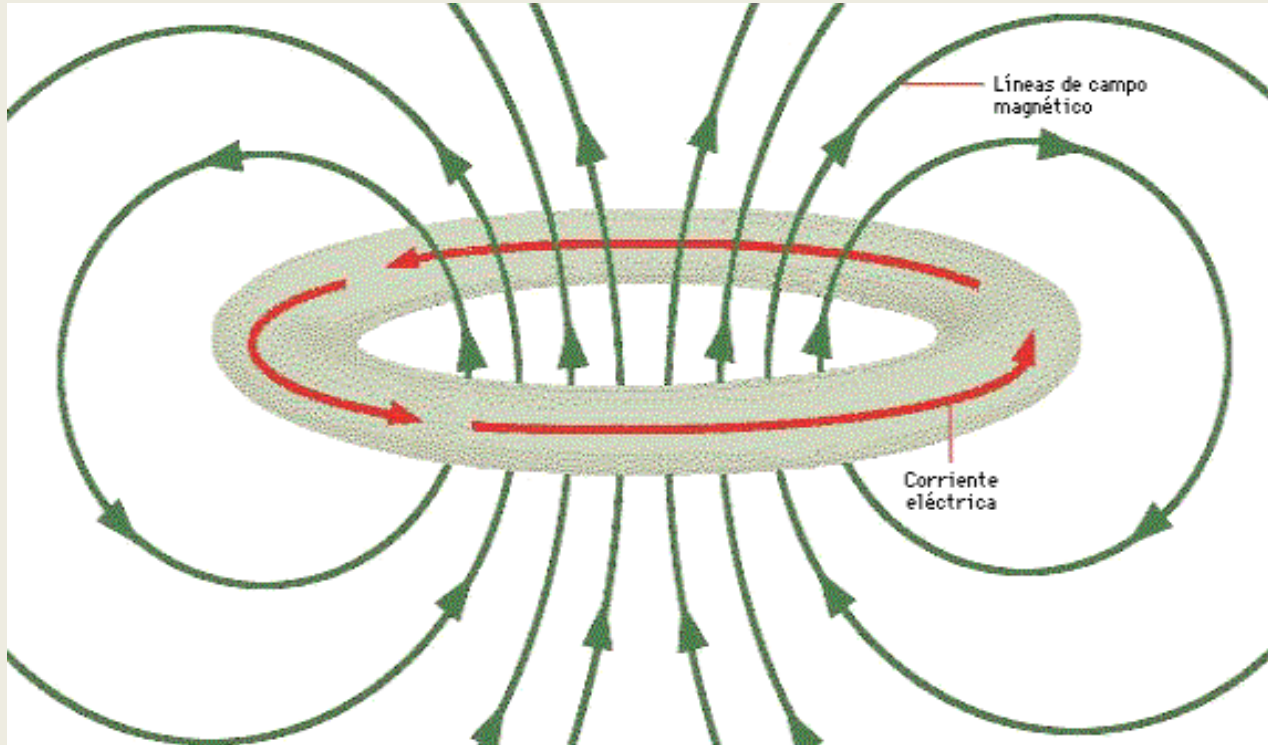
$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I 2\pi R^2}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Cálculo del campo magnético en el eje de una espira circular



Hasta aquí: Prob P1
a P7, Biot-Savart
Práctica 7

Líneas de campo magnético de una espira circular



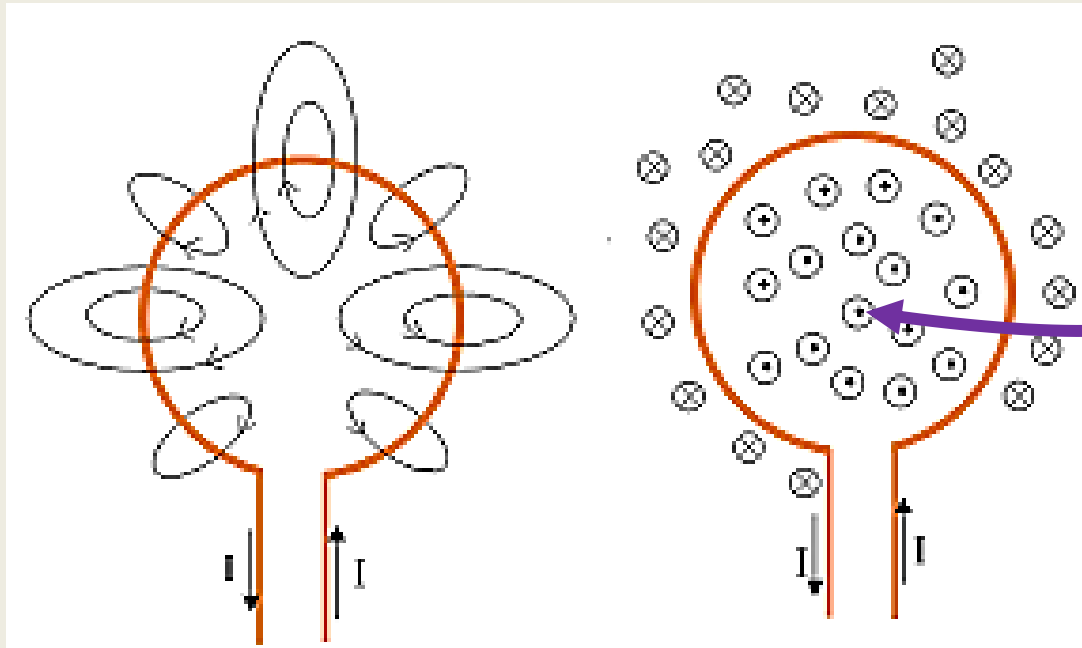
Si tenemos N espiras muy cercanas, el campo B en un punto de su eje se calcula usando el Principio de Superposición, multiplicando por N el resultado para una espira:

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{N I 2\pi R^2}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

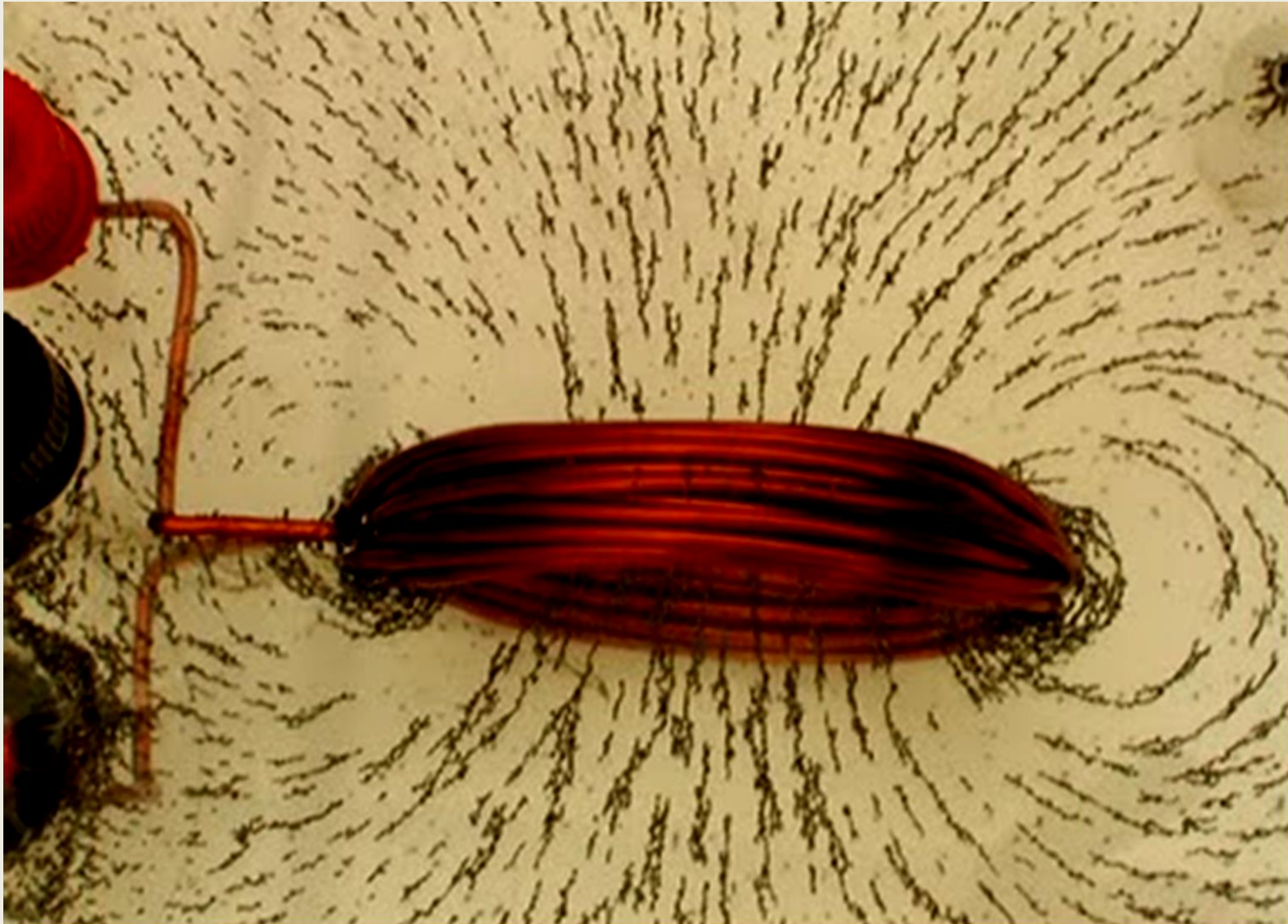
Líneas del campo magnético creado por una espira recorrida por una corriente eléctrica. Aunque la espira tenga forma curvilínea, podemos tomar pequeños trozos del conductor, asimilándolos a conductores muy pequeños casi rectilíneos. Aplicando este razonamiento se han representado en el dibujo de la izquierda las líneas del campo creado por una espira circular de radio R , mientras que en el dibujo de la derecha se representa dicho campo simbólicamente en el plano de la espira, mediante puntos (campo saliente) y cruces (campo entrante).

Así, la cara de la espira que mira hacia nosotros correspondería al polo norte de un imán, mientras que la cara opuesta (detrás) correspondería al polo sur del imán. El valor de la inducción magnética es diferente en cada punto que rodea a la espira y en el punto medio de ella se calcula con la expresión:

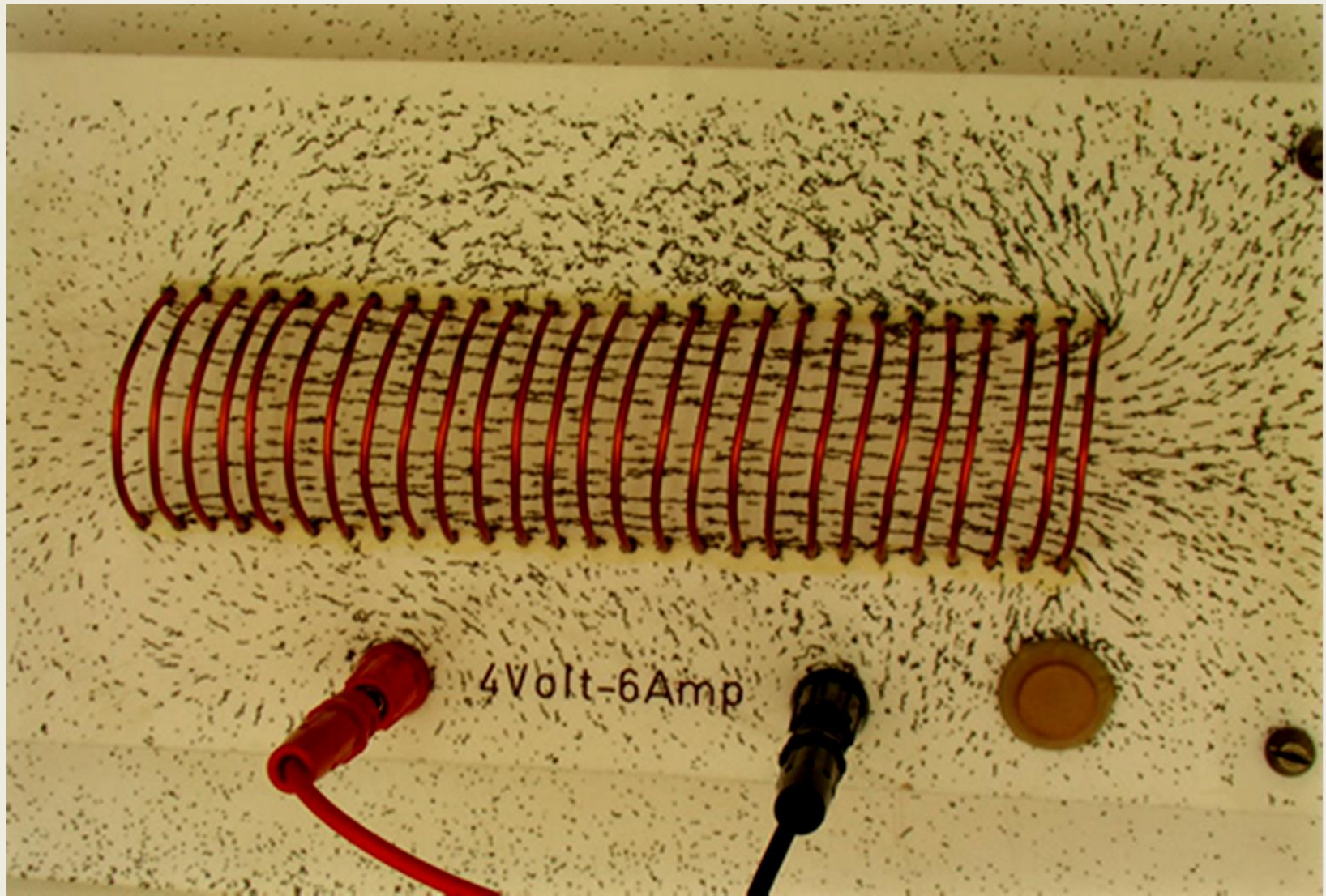
$$B = \frac{\mu \cdot I}{2 \cdot R}$$

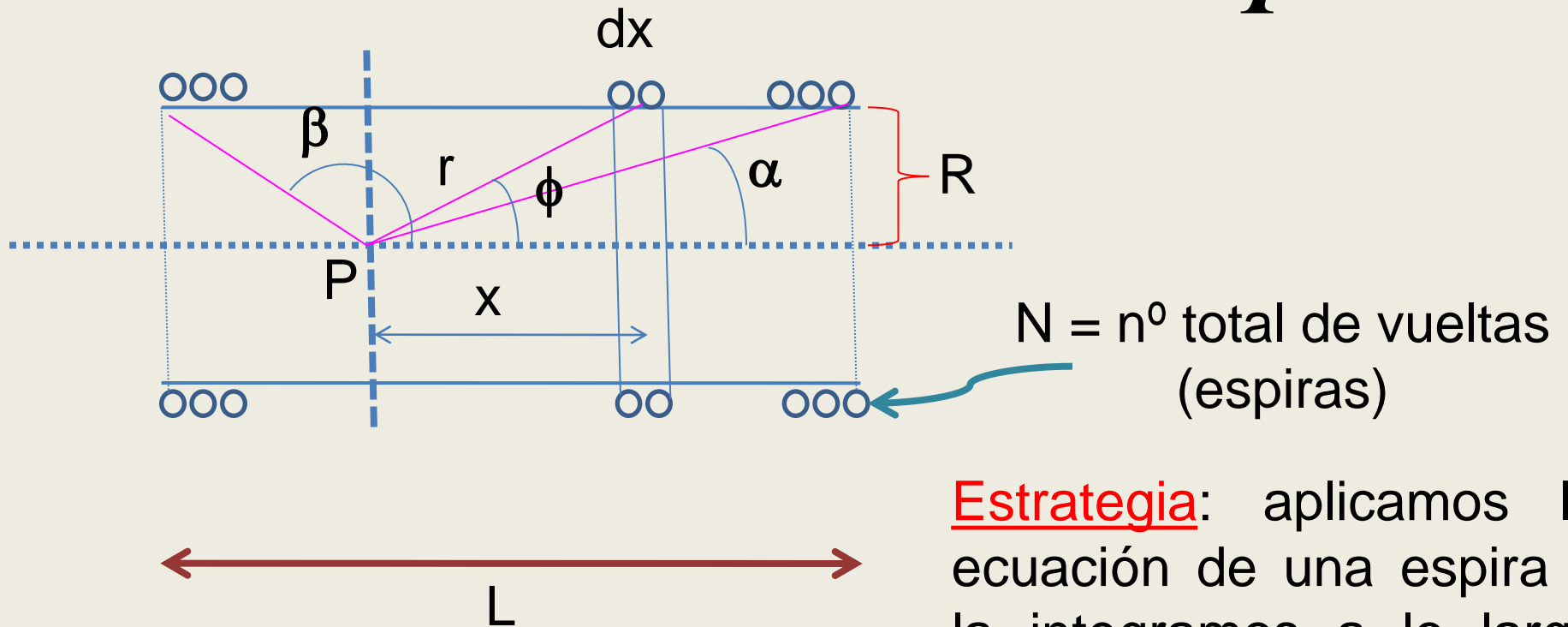
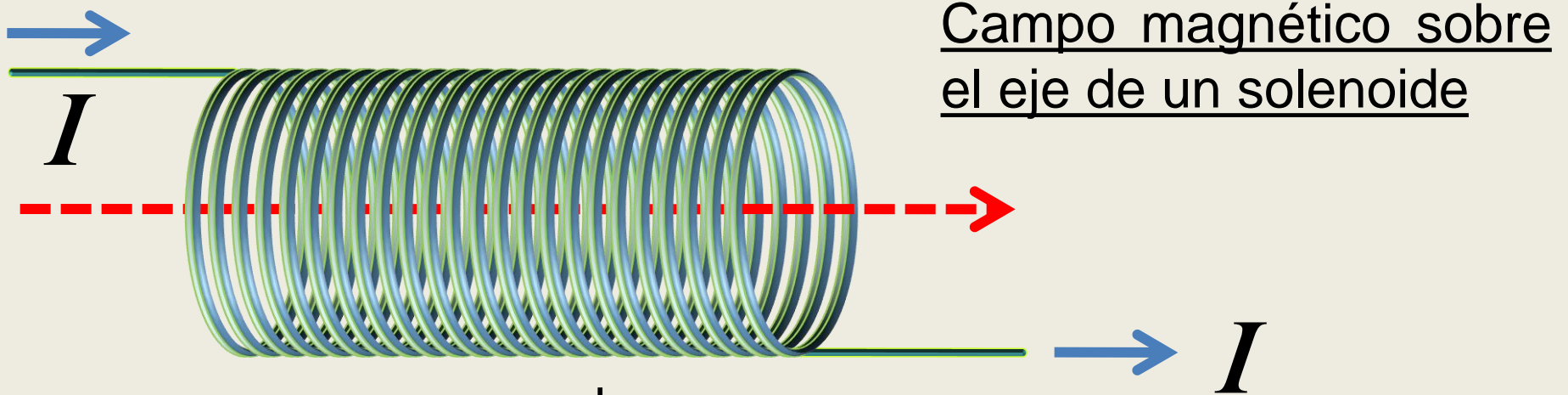


Líneas de campo magnético B de un conjunto de espiras circulares por las que circula una corriente I ejemplificadas con limaduras de hierro

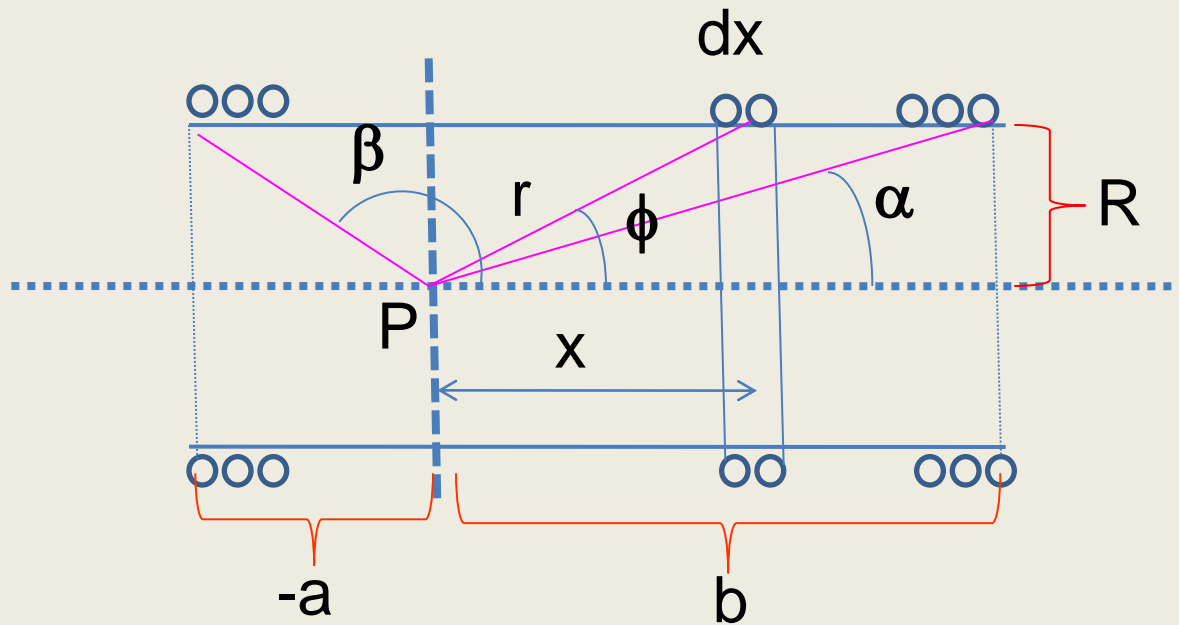


Líneas de campo magnético B de un solenoide por el que circula una corriente I ejemplificadas con limaduras de hierro





Estrategia: aplicamos la ecuación de una espira y la integramos a lo largo del solenoide

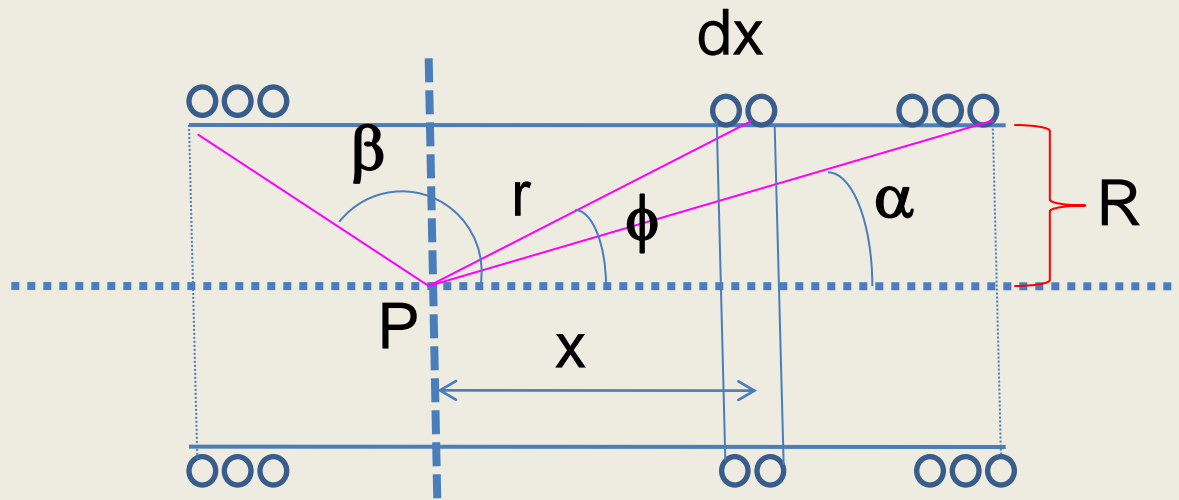


$$\text{N}^\circ \text{ de espiras en } dx: \frac{N}{L} dx$$

$$\therefore dB_x = \frac{\mu_0}{2} \frac{N I}{L} \frac{R^2}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} dx$$

integramos la variable x , desde $x = -a$ hasta $x = b$

$$B_x = \frac{\mu_0}{2} \frac{N I}{L} \int_{-a}^b \frac{R^2}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{\mu_0}{2} \frac{N I}{L} \left[\frac{b}{\sqrt{(b^2 + R^2)}} + \frac{a}{\sqrt{(a^2 + R^2)}} \right]$$



$$\text{N}^\circ \text{ de espiras en } dx: \frac{N}{L} dx$$

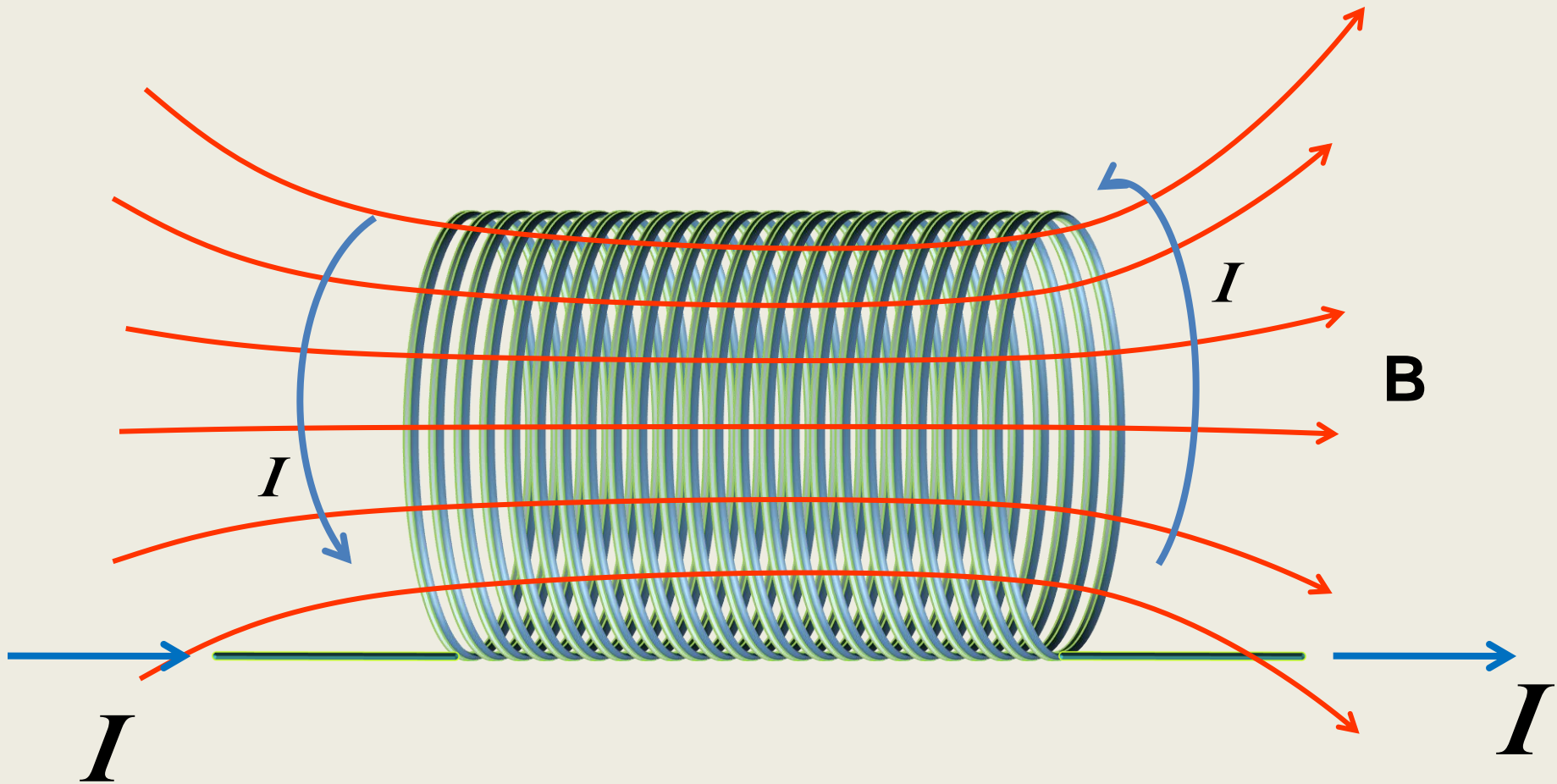
$$\therefore dB_x = \frac{\mu_0}{2} \frac{N I}{L} \frac{R^2}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} dx$$

podemos integrar usando el ángulo ϕ como variable

$x = R \cot g(\phi); \quad dx = -R \operatorname{cosec}^2(\phi) d\phi$ ¡hacer los reemplazos!

$$B_x = -\frac{\mu_0}{2} \frac{N I}{L} \int_{\beta}^{\alpha} \operatorname{sen}(\phi) d\phi = \boxed{\frac{\mu_0}{2} \frac{N I}{L} [\cos(\alpha) - \cos(\beta)]}$$

Líneas de campo magnético B de un solenoide por el que circula una corriente I



En un solenoide cuya longitud es mucho mayor que su diámetro, el campo magnético tiende a ser uniforme en su interior.

Las líneas de campo divergen en los extremos, mientras que afuera el campo tiende a ser débil.

