Repaso módulo 2

1. ¿Cuál es el radio de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ si ella representa a la función $f(z) = \dfrac{z}{z^2+3z+2}$ en un entorno del origen? Obtener los coeficientes a_n.

   Rta
   $R = |-1-0| = 1$
   $a_n = (-1)^{n+1}\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$, $n = 0, 1, 2, \cdots$

2. Hallar la región de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n (z-1)^{2n+3}}{3^n(\sqrt{5}+2i)^n}$ y obtener su suma.

   Rta
   $D = \{z : |z-1| < 3\}$
   Suma: $f(z) = \dfrac{27(z-1)^3}{27 - (2 + i\sqrt{5})(z-1)^2}$

3. Sea $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{2^n}(z-1)^n$

   a) Hallar el dominio de analiticidad de $f(z)$.

   b) Integrar término a término la serie dada. ¿Cuál es el dominio de convergencia de la serie así obtenida y cuál es su suma?

   c) Con el resultado del inciso anterior hallar una expresión analítica de $f(z)$.

   Rta
   $D_{Ana}(f) = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| < 2\}$
   $\displaystyle\int_1^z f(z)\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}(z-1)^{n+1} = \frac{2z-2}{z+1}$ si $|z-1| < 2$
   $f(z) = \dfrac{d}{dz}\left(\displaystyle\int_1^z f(z)\,dz\right) = \dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{2z-2}{z+1}\right) = \dfrac{4}{(z+1)^2}$

4. Si $f(z) = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(z-i)^{3n-2}}{(3^n+4^n)^3}$

   a) ¿Cuál es el dominio de analiticidad de $f(z)$?

   b) Hallar: $f^{(12)}(i)$, $f^{(13)}(i)$

   c) Mostrar que $z_0 = i$ es un cero de $f(z)$ y determinar su orden.

   d) Mostrar que $z_0 = i$ es un cero de $g(z) = (z-i)f'(z) - 4f(z)$ y determinar su orden.

Rta
$D_{Ana}(f) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - i| < 4\}$
$f^{(12)}(i) = 0 \ , \ f^{(13)}(i) = \dfrac{(13)!}{(3^5 + 4^5)^3}$
$z_0 = i$ es cero de orden $p = 4$ de $f(z)$
$z_0 = i$ es cero de orden $p = 7$ de $g(z)$

5. Hallar la serie de Taylor de $f(z)$ centrada en z_0. Indicar la región de convergencia.

   a) $f(z) = \text{Ln}\left(2 - \dfrac{1}{z}\right) \ , \ z_0 = 1$
   Rta
   $f(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2^n - 1)}{n} (z-1)^n$ si $|z - 1| < \frac{1}{2}$

   b) $f(z) = \left(\dfrac{z+1}{z}\right)^3 \ , \ z_0 = -1$
   Rta
   $f(z) = \displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{-2 + 3n - n^2}{2} (z+1)^n$ si $|z + 1| < 1$

   c) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 2iz} \ , \ z_0 = -i$
   Rta
   $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z+i)^{2n}$ si $|z + i| < 1$

   d) $f(z) = 2\,\text{sen}(3z)\cos(z) \, , \ z_0 = 0$. Sugerencia: expresar seno y coseno en términos de exponenciales o bien usar la identidad:

   $$2 \,\text{sen}\,\alpha \cos\beta = \text{sen}(\alpha + \beta) + \text{sen}(\alpha - \beta)$$

   Rta
   $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}(2^{2n+1} + 1)}{(2n+1)!} z^{2n+1}$ si $|z| < \infty$

6. Dada $f(z) = 6\,\text{senh}(z^2) - 6z^2 - z^6$

   a) Mostrar que $z_0 = 0$ es un cero de $f(z)$ y determinar su orden.
   b) ¿Cuál es el orden de $z_0 = 0$ como cero de $g(z) = [f(z)]^2$?
   Rta
   a) $z_0 = 0$ es cero de orden $p = 10$ de $f(z)$, como se observa a partir de su serie de Taylor

   $$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{6}{(2n+1)!} z^{4n+2} \ , \ |z| < \infty$$

   dado que en ella el término de potencia más baja con ceoficiente no nulo es el de orden 10.
   b) Por caracterización de ceros de analíticas

   $$f(z) = z^{10} g(z)$$

con $g(z)$ analítica en $z_0 = 0$ tal que $g(0) \neq 0$.
Entonces
$$g(z) = (f(z))^2 = \left(z^{10} g(z)\right)^2 = z^{20} h(z)$$
con $h(z) = (g(z))^{10}$ analítica en $z_0 = 0$ por ser composición de analíticas, y además tal que $h(0) = (g(0))^{10} \neq 0$. Luego, por caracterización de ceros de analíticas se deduce que $z_0 = 0$ es un cero de orden $p = 20$ de $g(z)$.

7. Dada $f(z) = \dfrac{16}{z(z+3)} + 12 + 4z$ mostrar que $z_0 = -1$ es un cero de $f(z)$ y mediante un desarrollo en serie de potencias apropiado determinar su orden.
<u>Rta</u>
$z_0 = -1$ es cero de orden $p = 2$ de $f(z)$ como se ve a partir del desarrollo de Taylor:
$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{16}{3}\right)\left(1 + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right)(z+1)^n \ , \ |z+1| < 1$$
dado que en ella el término de potencia más baja con ceoficiente no nulo es el de orden 2.

8. Hallar el orden de $z_0 = 1$ como cero de $f(z) = \dfrac{z-1}{z^2} - \text{Ln}(z)$

   a) empleando el teorema de caracterización de ceros.

   b) obteniendo una serie de potencias que represente a $f(z)$ en un entorno de $z_0 = 1$.
   <u>Rta</u>
   a) Escribamos $f(z) = \dfrac{1}{z^2} g(z)$ donde $g(z) = 1 - z - z^2 \text{Ln}(z)$
   $z_0 = 1$ es cero de orden $p = 2$ de $g(z)$ pues:
   $$g(0) = g'(0) = 0 \ , \ g''(0) = -3 \neq 0$$
   Entonces por caracterización de ceros de analíticas: $g(z) = (z-1)^2 h(z)$ donde $h(z)$ es analítica en $z_0 = 1$ tal que $h(1) \neq 0$.
   Por lo tanto: $f(z) = f_1(z)(z-1)^2$ con $f_1(z) = \dfrac{h(z)}{z^2}$ analítica en $z_0 = 1$ por cociente de analíticas con denominador no nulo, y además $f_1(1) = h(1) \neq 0$
   Entonces por caracterización de ceros de analíticas $z_0 = 1$ es cero de orden $p = 2$ de $f(z)$.
   b) La serie de Taylor centrada en $z_0 = 1$ es
   $$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(n^2-1)}{n} (z-1)^n$$
   El término no nulo correspondiente a la menor potencia es el de orden 2. Luego, $z_0 = 1$ es cero de orden $p = 2$ de $f(z)$.

9. Hallar todos los desarrollos en serie de Laurent centrados en $z_0 = 2$ de la función $f(z) = \dfrac{8z}{(z^2-4)(z+2)}$ ¿Cuál permite clasificar la singularidad $z_0 = 2$ y hallar el residuo correspondiente?¿Cuál es válido para $z = 4i$?

   Rta

   Hay dos desarrollos en serie de Laurent centrados en $z_0 = 2$

$$f(z) = \frac{1}{z-2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4^{n+1}}(z-2)^n \ , \ 0 < |z-2| < 4$$

   Este desarrollo permite clasificar la singularidad $z_0 = 2$ pues converge en un entorno reducido de la misma. Se deduce que $z_0 = 2$ es un polo simple (orden 1) de $f(z)$ y además $\text{Res}_{z_0=2} f(z) = 1$.

   Por otra parte

$$f(z) = \frac{8}{(z-2)^2} + \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n n 4^{n-1} \frac{1}{(z-2)^n} \ , \ 4 < |z-2| < \infty$$

   es válido cuando $z = 4i$ pues dicho punto pertenece al anillo de convergencia: $|4i-2| = \sqrt{20} > 4$.

10. Clasificar la singularidad z_0 de la función $f(z)$ mediante un desarrollo en serie de Laurent adecuado, indicando su región de convergencia. Obtener a partir de dicho desarrollo el valor del residuo en la singularidad.

    a) $f(z) = \dfrac{6z^2 - 6\,\text{sen}(z^2)}{z^9}$, $z_0 = 0$

    Rta

$$f(z) = \frac{1}{z^3} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}6}{(2n+1)!} z^{4n-7} \ , \ 0 < |z| < \infty$$

    $z_0 = 0$ es polo de orden 3 de $f(z)$ y $\text{Res}_{z_0=0}\, f(z) = 0$

    b) $f(z) = \dfrac{2z\,\text{Ln}(z+2)}{(z+1)^3}$, $z_0 = -1$

    Rta

$$f(z) = -\frac{2}{(z+1)^2} + \frac{3}{z+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2(2n+5)}{(n+2)(n+3)}(z+1)^n \ , \ 0 < |z+1| < 1$$

    $z_0 = -1$ es polo de orden 2 de $f(z)$ y $\text{Res}_{z_0=-1}\, f(z) = 3$

    c) $f(z) = \dfrac{2(z^2-1)}{z}\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{z}\right)$, $z_0 = 0$

    Rta

$$f(z) = 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2\left(\frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{\pi^{2n-1}}{(2n-1)!}\right)\frac{1}{z^{2n}} \ , \ 0 < |z| < \infty$$

    $z_0 = 0$ es singularidad esencial de $f(z)$ y $\text{Res}_{z_0=0}\, f(z) = 0$

d) $f(z)=\dfrac{z+2i}{z^2(z-2i)}$, $z_0=2i$

Rta

$$f(z)=-\frac{i}{z-2i}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+3)i^n}{2^{n+2}}(z-2i)^n \ ,\ 0<|z-2i|<2$$

$z_0=2i$ es un polo simple de $f(z)$ y $\mathrm{Res}_{z_0=2i}\, f(z)=\frac{i}{2}$

e) $f(z)=\dfrac{8}{(z-2)^4(z^2+2z)}$, $z_0=2$

Rta

$$f(z)=\frac{1}{(z-2)^4}-\frac{3}{4}\frac{1}{(z-2)^3}+\frac{7}{16}\frac{1}{(z-2)^2}-\frac{15}{64}\frac{1}{(z-2)}+$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2^{n+5}-1)}{4^{n+4}}(z-2)^n \ ,\ 0<|z-2|<2$$

$z_0=2$ es polo de orden 4 de $f(z)$ y $\mathrm{Res}_{z_0=2}\, f(z)=-\frac{15}{64}$

g) $f(z)=\dfrac{\mathrm{sen}^2(z)}{z^5}$, $z_0=0$

Sugerencia: $2\,\mathrm{sen}^2(w)=1-\cos(2w)$.

11. (OPTATIVO)

Justificar que $f(z)=\dfrac{e^{1/z}}{\mathrm{sen}\, z}$ tiene una singularidad esencial en $z_0=0$.

Sugerencia: suponer que tiene singularidad evitable o polo, emplear caracterización de ceros y polos y deducir que $e^{1/z}$ tendría singularidad evitable o polo, lo que es un absurdo.

12. Calcular las siguientes integrales aplicando el teorema de los residuos, suponiendo orientación antihoraria. Detallar la clasificación de las singularidades del integrando interiores a la curva.

a) $\displaystyle\oint_C \left[(z-i)^3 e^{\frac{3}{(z-i)^2}}-\frac{\mathrm{senh}(3z)}{z\,\mathrm{senh}\, z}\right]dz$, $C:|z-2i|=3$

b) $\displaystyle\oint_C \left[\frac{1}{z\,\mathrm{sen}\, z}+\frac{e^{\mathrm{sen}\, z}-\cos z}{z\,\mathrm{sen}\, z}\right]dz$

C frontera del rectángulo de vértices: $1-i$,$1+4i$,$-1+4i$,$-1-i$.

c) $\displaystyle\oint_C \frac{\mathrm{Ln}(1+z^2)}{z^2\mathrm{Ln}(z+1)}dz$, $C:|z|=\dfrac{1}{2}$

13. Aplicando propiedades convenientes de la transformada de Laplace, calcular:

a) $\mathcal{L}\left\{2t\,\text{sen}^2(t/2)\right\}$

b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-s}(s+3)}{(s-1)(s+1)^2}\right\}$

c) $\mathcal{L}\left\{t^2e^{-t}\cos t\right\}$

d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{(s^2+3s)e^{-\pi s}}{(s^2+9)(s-3)}\right\}$

e) $\mathcal{L}\left\{e^{-t}\displaystyle\int_0^t (t-\tau)\,\text{sen}\,\tau\,d\tau\right\}$

f) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{5}{s^4+3s^2-4}\right)\right\}$

g) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{d^2}{ds^2}\left(\dfrac{e^{-2s}}{s^2+2s}\right)\right\}$

h) $\mathcal{L}\left\{u(t-\pi)\cos(2t)\right\}$

i) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\text{Ln}\left(1+\dfrac{1}{s^2}\right)\right\}$

j) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\text{arctg}\left(\dfrac{1}{s}\right)\right\}$

14. Expresar usando la función escalón unitario y calcular luego su transformada de Laplace aplicando la propiedad de traslación en el tiempo:

$$f(t)=\begin{cases} t & \text{si} \quad 0<t<1 \\ 2-t & \text{si} \quad 1<t<3 \\ t-4 & \text{si} \quad 3<t<4 \\ 0 & \text{si} \quad t>4 \end{cases}$$

15. Hallar $f(t)$ sabiendo que $f''(t)=4t^2u(t-4)$ con $f(0)=2$, $f'(0)=0$.

16. Resolver el siguiente problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} y''(t)+y(t)=u(t-\pi) \\ y(0)=0 \\ y'(0)=1 \end{cases}$$

17. Resolver la siguiente ecuación integro-diferencial con las condiciones iniciales $y(0)=2$, $y'(0)=3$

$$2y'(t)-\int_0^t \left(y''(u)-9y(u)\right)e^{-3(t-u)}\,du=6e^{-3t}$$

18. Dada $f(t)=\begin{cases} -e^t & \text{si} \quad t<0 \\ 3e^{-t} & \text{si} \quad t>0 \end{cases}$

a) verificar las condiciones suficientes para la existencia de la transformada y de la integral de Fourier.

b) Mostrar que $F(s)=\mathcal{F}\left\{f(t)\right\}=\dfrac{2-i4\pi s}{1+4\pi^2s^2}$

c) Escribir la integral de Fourier de $f(t)$ y graficar la función a la cual converge.

d) Aplicando propiedades calcular $\mathcal{F}\left\{F(-2t)e^{i4\pi t}+2f(t-1)\right\}$

19. Graficar $f(t) = \displaystyle\int_0^\infty F(s)\cos(2\pi ts)ds$ si se sabe que $F(s) = \displaystyle\int_0^1 4t\cos(2\pi st)\,dt$.

20. Graficar $f(t) = \displaystyle\int_0^\infty F(s)\,\mathrm{sen}(2\pi ts)ds$ si se sabe que $F(s) = \displaystyle\int_0^1 (4-4t)\,\mathrm{sen}(2\pi st)\,dt$.

21. Sea $f(t)$ tal que $f(-t) = -f(t)$. Si $f(t) = -e^{-t}$ para $t > 0$, aplicar la forma impar de la transformada de Fourier para determinar $F(s) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ y representar f mediante su integral de Fourier. Graficar la función a la que dicha integral converge.