9) En una prueba 294 de 300 aisladores cerámicos soportaron cierto choque térmico.

a) Obtenga el estimador y la estimación de máxima verosimilitud de la probabilidad de que un aislante cerámico sobrevivirá a un choque térmico.

b) Suponga que un dispositivo contiene tres aislantes cerámicos y todos deben sobrevivir al choque, con la finalidad de que el dispositivo funcione. Encuentre el estimador y la estimación de máxima verosimilitud de la probabilidad de que los tres sobrevivirán a un choque térmico.

a) $L(X_1X_2X_3 \dots \dots X_n, p) = \binom{1}{X_1} p^{X_1}(1-p)^{1-X_1} \binom{1}{X_2} p^{X_2}(1-p)^{1-X_2} \dots \dots \dots \binom{1}{X_n} p^{X_n}(1-p)^{1-X_n}$

Donde $X_i = \begin{cases} 1, & si\ el\ iésimo\ aislador\ cerámico\ soporta\ el\ choque\ térmico \\ 0, & caso\ contrario \end{cases}$

Por lo tanto $L(X_1X_2X_3 \dots \dots X_n, p) = p^{X_1}(1-p)^{1-X_1} p^{X_2}(1-p)^{1-X_2} \dots \dots \dots p^{X_n}(1-p)^{1-X_n}$

Dado que $\binom{1}{X_i} = 1$ para todo i ya que X_i vale 0 o 1

$$L(X_1X_2X_3 \dots \dots X_n, p) = p^{X_1+X_2+\dots\dots+X_n}\ (1-p)^{n-(X_1+X_2+\dots\dots+X_n)}$$

$$\ln\big(L(X_1X_2X_3 \dots \dots X_n, p)\big) = (X_1 + X_2 \dots \dots + X_n)\ln(p) + (n - (X_1 + X_2 \dots \dots + X_n))\ln(1-p)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dp}}\ln\big(L(X_1X_2X_3 \dots \dots X_n, p)\big) = \frac{(X_1 + X_2 \dots \dots + X_n)}{p} - \frac{(n - (X_1 + X_2 \dots \dots + X_n))}{1-p} = 0$$

$$\frac{(X_1 + X_2 \dots \dots + X_n)}{p} = \frac{(n - (X_1 + X_2 \dots \dots + X_n))}{1-p}$$

$$\frac{(1-p)}{p} = \frac{(n - (X_1 + X_2 \dots \dots + X_n))}{(X_1 + X_2 \dots \dots + X_n)}$$

$$\frac{1}{p} - 1 = \frac{n}{X_1 + X_2 \dots \dots + X_n} - 1$$

$$\hat{p} = \frac{X_1 + X_2 \dots \dots + X_n}{n} = \bar{X}$$

b)

$$X_i = \begin{cases} 1, & si\ el\ iésimo\ aislador\ soporta\ el\ choque\ térmico \\ 0, & caso\ contrario \end{cases}$$

Sea $X = X_1 + X_2 \dots \dots + X_{20}$ CON

$X = CANTIDAD\ DE\ Aisladores\ cerámicos\ que\ soportan\ el\ choque\ térmico\ entre\ los\ 300$

$$\hat{p} = \frac{X_1 + X_2 \dots \dots + X_n}{n} = \bar{X} = \frac{X}{n} = \frac{294}{300}$$

b2) $P(X = 3) = \binom{3}{3}\ (p)^3 \widehat{(1-}P)^0 = (\hat{p})^3 = (\bar{X})^3 = (\frac{X}{n})^3 = (\frac{294}{300})^3$

Distribución binomial con n=3

Estimador

Estimación

Por propiedad de invarianza de los ESTIMADORES DE MÁXIMA VEROSIMILITUD