INTRODUCCIÓN AL PROCESAMIENTO DE SEÑALES

Práctica 6

Muestreo de señales continuas. Reconstrucción de señales muestreadas.

1. **Muestreando sinusoides**

   a) La señal de variable independiente continua $x(t) = 3\mathrm{sen}(100\pi t)$ es muestreada con una tasa $(1/T_s)$ de 300 muestras por segundo, obteniendo la señal de variable independiente discreta $x[n] = x(nT_s)$.

      I. Grafique la señal $x(t)$ para $0 < t < 30$ ms.

      II. Verifique que $x[n]$ es periódica y halle su período (en cantidad de muestras).

      III. Obtenga los valores de las muestras en un período de $x[n]$, indicándolos en el mismo gráfico de $x(t)$. ¿Cuál es el período de $x[n]$ en milisegundos?

   b) La señal $x(t) = \mathrm{sen}(2\pi f_0 t)$ es muestreada a una tasa de 1200 muestras por segundo, obteniendo $x[n] = \mathrm{sen}(\pi n/6)$. ¿Cuáles son los posibles valores de f_0?

   c) Una sinusoide $x(t)$, de período fundamental T_0, es muestreada cada T_s segundos, obteniendo la señal $x[n]$ (con $x[0] = x(0)$).

      I. Mostrar que $x[n]$ es periódica si la relación entre T_0 y T_s es racional ($T_0/T_s \in \mathbb{Q}$).

      II. Si $x[n]$ es periódica ¿cuál es su período fundamental en segundos?

      III. Suponga ahora que tiene una SVIC periódica, de período fundamental T_0 (una señal general, no necesariamente una sinusoide), y la muestrea cada T_s. ¿En qué condiciones la SVID es también periódica, y cuál es su período fundamental?

2. **Muestreando lo que venga**

   a) Las siguientes señales $x_a(t)$ son muestreadas con un período de muestreo T obteniendo $x[n]$

      I. $x_a(t) = e^{j200\pi t}$, con $T = \dfrac{1}{500}$

      II. $x_a(t) = e^{j200\pi t}$, con $T = \dfrac{1}{75}$

      III. $x_a(t) = \sqcap\left(\frac{t}{9}\right)$, con $T = 1$

      IV. $x_a(t) = 1$, con $T = 1$

      V. $x_a(t) = \mathrm{sinc}(t)$, con $T = 1$

      VI. $x_a(t) = \mathrm{sinc}(t)$, con $T = \dfrac{1}{2}$

      VII. $x_a(t) = e^{-t/5}\ u(t)$, con $T = 1$

   En cada caso obtenga y grafique $x[n]$ y su TFTD $X(e^{j2\pi s})$. También obtenga y grafique la TF de $x_a(t)$, $X_a(f)$.

   b) Trate de reconciliar los resultados anteriores recordando que $X(e^{j2\pi fT}) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\sum_{r=-\infty}^{\infty} X_a(f - \frac{r}{T})$

   c) A partir de los resultados anteriores, ¿en qué casos podrá reconstruirse $x_a(t)$ a partir de $x[n]$?

3. **Ventajas del filtro “anti-aliasing”**

   a) Una SVIC $x(t)$ cuyo espectro es $X(f) = \wedge(f\,T)$ es muestreada cada T s. obteniéndose $x[n]$.

      I. Calcule y grafique $x(t)$ y $x[n]$.

      II. Calcule TFTD$\{x[n]\}$ por definición y/o de acuerdo a la teoría de muestreo.

      III. Limite el ancho de banda de $x(t)$ al máximo posible con un filtro ideal de modo que no haya efecto de replicado ¿Cuál es la frecuencia de corte de ese filtro?

      IV. Llamemos $x_f(t)$ a la señal $x(t)$ filtrada como en III. Dibuje el espectro de $x_f(t)$.

      V. Calcule y dibuje la secuencia $x_f[n]$ que resulta de muestrear $x_f(t)$ cada T s.

      VI. Calcule y dibuje el espectro de $x_f[n]$.

b) En el planteo anterior, el uso del filtro anti-replicado es de utilidad si la porción de espectro rechazada no es relevante, o sea, si nos alcanza con conocer sólo a $x_f(t)$ en lugar de a "toda" $x(t)$. En caso contrario no queda otra opción que aumentar la frecuencia de muestreo. Supongamos que ésta es la situación y que entonces se duplica la frecuencia de muestreo, pero que aparece sumada a esta señal otra (no deseada) cuyo espectro es $Y(f) = \sqcap(fT - 3/2) + \sqcap(fT + 3/2)$.

   Repita los pasos de (a) para la señal de entrada $x(t) + y(t)$ muestreada cada $T/2$ (Grafique sólo en el dominio de la frecuencia). ¿Cuál es la ventaja de utilizar un filtro anti-replicado en este caso?

4. **Reconstruyendo**

   La operación de reconstrucción consiste en obtener una SVIC a partir de una SVID. Diremos que esta operación la lleva a cabo un sistema denominado "reconstructor". Este sistema difiere de los sistemas que hemos estudiado hasta el momento en el hecho de que toma como entrada una señal de variable independiente discreta y presenta a su salida una señal de variable independiente continua. Para salvar este hecho recurriremos a la "señal inventada" y diremos que esta señal inventada (SVIC) es pasada por un sistema SLIT con respuesta impulsional $h(t)$.

   Sea $x(t)$ una señal de banda limitada a B ($|X(f)| = 0$, para $|f| > B$). **Ayuda:** para lo que sigue puede considerar una forma particular de $X(f)$, por ejemplo $X(f) = \wedge(\frac{f}{B})$

   a) Obtenga y grafique esquemáticamente el espectro de la señal $x[n]$ obtenida al muestrear $x(t)$ con una tasa $f_s > 2B$.

   b) Escriba la expresión de señal inventada $x_I(t)$ en términos de la secuencia $x[n]$. ¿Cómo resulta el espectro de la señal inventada (TF)?

   c) Trabajando en el espectro, verifique que al ingresar esta señal a un sistema SLIT con respuesta en frecuencia $H(f) = \frac{1}{f_s} \sqcap(\frac{f}{f_s})$, la señal obtenida $y(t)$ coincide con la señal $x(t)$. A este reconstructor se lo denomina "reconstructor ideal". Escriba la expresión de $y(t)$ en términos de $x[n]$.

   d) ¿Dónde falla lo anterior si se toma $f_s < 2B$?

   e) Obtenga la respuesta al impulso del reconstructor ideal. ¿Es un sistema causal?

   f) Otro tipo de reconstructor es el denominado retenedor de orden cero (ZOH), el cual tiene una respuesta al impulso $h(t) = \sqcap(\frac{t - T_s/2}{T_s})$, $T_s = \frac{1}{f_s}$. Halle la respuesta en frecuencia para este reconstructor. Halle la señal $y(t)$ a la salida del ZOH en términos de $x[n]$. Grafique esquemáticamente.

   g) ¿Cómo resulta el espectro de $y(t)$ a la salida del ZOH?

   h) ¿Qué filtro debería agregarse a continuación del ZOH para que el sistema obtenido sea igual que el reconstructor ideal (tenga la misma respuesta en frecuencia)? Este filtro ¿es causal?

   i) Verifique que si se toma $f_s \gg 2B$ y se pasa $y(t)$ por un filtro pasa-bajos que deje pasar $-B \leq f \leq B$, no necesariamente cajón, el espectro de la señal de salida es $\approx X(f)$

5. **Dos cortitos**

   a) Sea $x(t)$ una señal con espectro de banda limitada a 4 kHz. Esta señal es muestreada generando una secuencia de valores $x[n]$. A partir de $x[n]$ se construye una nueva secuencia $y[n] = x[4n]$.

      Si a partir de $y[n]$ se desea reconstruir $x(t)$, ¿a qué frecuencia se debe muestrear $x(t)$?

   b) Usted muestrea $x(t)$ que es una señal de banda limitada a $|f| \leq 1$kHz cada Tseg produciendo $x[n]$. Luego calcula $y[n] = (x[n])^2$ y reconstruye con un filtro pasabajos ideal con la idea de lograr que $\hat{y}(t) = K(x(t))^2$, para alguna constante K cualquiera.

      ¿Qué valor máximo de T lo lograría?

   En base a estos ejercicios se puede concluir que al momento de elegir la frecuencia de muestreo para una señal, no sólo se debe tener en cuenta su ancho de banda, sino también el procesamiento digital al cual será sometida.

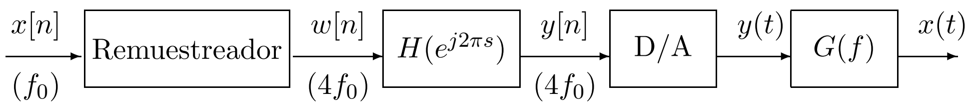
6. **¡Poderoso el CD!**

Un CD de audio porta secuencias $x[n]$ generadas a partir de señales de 20 kHz de ancho de banda, muestreadas a 44 kHz. Suponiendo $X(f) = \sqcap(f/40\text{kHz})$:

a) Dibuje el módulo del espectro de la señal resultante si se reconstruye $x[n]$ utilizando un D/A (ZOH).

b) Especifique el filtro que es necesario aplicar a la señal obtenida en 6*a*) para que la primer réplica del espectro original se encuentre atenuada 90 dB.

c) Repetir 6*b*) si se utiliza un esquema como el que se encuentra en la figura. La secuencia $w[n]$ se genera intercalando tres ceros a las muestras de $x[n]$ ($\omega[n] = x(n/4)$ si es múltiplo de 4 y 0 de otro modo). Esta secuencia es pasada a través de un filtro digital con respuesta en frecuencia $H(e^{j2\pi s}) = \sqcap(4s)$, obteniéndose $y[n]$; finalmente $y[n]$ es reconstruída utilizando un D/A. El esquema se completa con el filtro pasabajos $G(f)$ que Ud. debe especificar.



d) **Opcional:** Repetir 6*c* con la secuencia $\omega[n] = x[\lfloor n/4 \rfloor]$ (el remuestreador repite cuatro veces cada muestra de $x[n]$ en lugar de intercalar ceros).

Ayuda: Si suponemos que el filtro pasa-bajos a diseñar es de tipo *Butterworth*, el módulo cuadrado de su transferencia será:

$$|H(f)|^2 = \frac{{H_0}^2}{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^{2n}}$$

donde f_c es la frecuencia de corte y n es el orden del filtro (a mayor orden más elementos necesito para construirlo). La atenuación del filtro, en dB está dada por:

$$Att[dB] = -10 \log \left(\frac{|H(f)|^2}{{H_0}^2} \right)$$

7. **Un poquito de Octave**

Como hemos visto, en Octave siempre trabajamos con señales de variable independiente discreta, es decir con señales muestreadas. Cuando quisimos analizar una señal de variable independiente continua, lo que hicimos fue aproximarla mediante una señal de variable independiente discreta con un paso suficientemente chico.

a) Las sentencias siguientes permiten verificar los resultados del ejercicio 1 *b*). Trate de interpretarlas, y ejecute variando el valor de k.

```
k = 0; f0 = 100+k*1200; Ts = 1/1200;
n = [0:1:12]; t = [0:Ts/1000:12*Ts];
xa = sin(2*pi*f0*t);
x = sin(2*pi*f0*n*Ts);
x2 = sin(pi*n/6);
figure, plot(t, xa, n*Ts,x ,'o',n*Ts,x2,'.r')
```

Verifique que si en lugar de un seno se tiene un coseno, la respuesta es $f_0 = \pm 100 + 1200k$ Hz. ¿A qué se debe esto? Para responder puede ayudarle ver (de manera analítica) cómo quedan los espectros en cada caso.

b) Analice con los comandos siguientes:

```
Ts = 1/5000; f0 = 500; n = [0:1:100];
x = sin(2*pi*f0*n*Ts);
figure, plot(n, x, '.-')
```

cómo resulta la señal x al tomar valores de $f_0 = 500, 2000, 3000, 4500$. Compare los diferentes casos y explique similitudes y diferencias. ¿Qué sucede si se toma $f_0 = 100\pi, 200\pi, 300\pi$? ¿La señal $x[n]$ es periódica?

c) Los comandos siguientes permiten emular la señal de salida de un reconstructor de orden cero:

```
Ts = 1/5000; f0 = 500; n = [0:1:20];
x = sin(2*pi*f0*n*Ts);
t = [0:Ts/200:Ts*20]; yZOH = zeros(size(t));
figure, hold on, plot(n*Ts,x,'o');
for k = 1:length(n)
   xrp = x(k).*((t>= n(k)*Ts) & (t < (n(k)+1)*Ts));
   plot(t,xrp,'k--');
   yZOH = yZOH+xrp;
end
plot(t,yZOH,'r'), hold off;
```

La función plot, implementa un reconstructor de orden 1:

```
figure, plot(n*Ts,x,'o',n*Ts,x,'r-');
```

Los comandos siguientes permiten emular el comportamiento del reconstructor ideal (interpolación con sincs)

```
yIDEAL = zeros(size(t));
figure, hold on, plot(n*Ts,x,'o')
for k = 1:length(n)
  xrp = x(k).*sinc((t-n(k).*Ts)/Ts);
  plot(t,xrp,'k--');
  yIDEAL = yIDEAL+xrp;
end
plot(t,yIDEAL,'r'), hold off;
```

Y con los comandos siguientes se pueden graficar las señales reconstruidas:

```
y = sin(2*pi*f0*t);
figure, plot(n*Ts,x,'o',t,y,t,yZOH,n*Ts,x,'-',t,yIDEAL)
legend('Muestras','Señal Original','ZOH','Orden 1','Reconstructor Ideal')
```

Compare las señales obtenidas. Analice similitudes y diferencias. ¿Cuál/Cuáles reconstructores pueden implementarse mediante un sistema causal?

Algunos resultados

1. *b*) $f_0 = 100 + 1200k$ Hz, $k \in \mathbb{Z}$

   c) II. $T = p$ con $\frac{T_0}{T_s} = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, fracción irreductible.

5. *a*) $f_s \geq 32$ kHz *b*) $T \leq 0{,}25$ ms .

6. *b*) Orden 56 *c*) Orden 5 *d*) Orden 5