Regresión Lineal.

Comisión: Grupo 2 Estadística

JTP: Suarez Virginia

Ejercicio 4:

Un químico está calibrando un espectrómetro que se utilizará para medir la concentración de monóxido de carbono en muestras atmosféricas. Para comprobar la calibración, se miden muestras de concentración conocida.

Las concentraciones verdaderas (x) y las medidas (y) están dadas en la tabla siguiente:

x (ppm)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
y (ppm)	1	11	21	28	37	48	56	68	75	86	96

Para comprobar la calibración se ajusta un modelo lineal $y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$. Idealmente, el valor de β_0 debe ser 0 y el valor de β_1 debe ser 1.

a) Calcule los estimadores de mínimos cuadrados $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$

$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$ $\quad \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \bar{x}\hat{\beta}_1$ $\quad n = 11$

$S_{xx} = \sum_{i=1}^{11} x^2 - 11\bar{x}^2 = 11000$ $\quad S_{xy} = \sum_{i=1}^{11} xy - 11\bar{x}\bar{y} = 10360$

$S_{yy} = \sum_{i=1}^{11} y^2 - 11\bar{y}^2 = 9768.9091$ $\quad \bar{x} = \sum_{i=1}^{11} \frac{x_i}{11} = 50$ $\quad \bar{y} = \sum_{i=1}^{11} \frac{y_i}{11} = 47.9091$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{10360}{11000} = 0.9418 \qquad \hat{\beta}_0 = 47.9091 - 50 \cdot 0.9418 = 0.8191$$

b) ¿Se puede rechazar $H_0: \beta_0 = 0$? Utilice $\alpha = 0.05$

Se debe suponer $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ $\quad i = 1, \dots, 11$

$H_0: \beta_0 = 0$ $\quad$ $H_a: \beta_0 \neq 0$ Test Bilateral.

Estadístico de Prueba $\quad T_0 = \dfrac{\hat{\beta}_0 - 0}{S_r\sqrt{\dfrac{1}{n} + \dfrac{\bar{x}^2}{S_{xx}}}} \sim T(n-2)$ Bajo H_0

Regla de decisión: Rechazar $H_0: \beta_0 = 0$ a favor de $H_a: \beta_0 \neq 0$ cuando $|t_0| > t_{\frac{\alpha}{2}, n-2}$ siendo $t_{\frac{\alpha}{2}, n-2} = t_{0.025, 9} = 2.262$

$\hat{\beta}_0 = 0.8191$ $\quad$ $S_{xx} = 11\,000$

$\bar{x} = 50$ $\quad$ $S_r = \sqrt{\dfrac{S_{rr}}{n-2}} = \sqrt{\dfrac{S_{yy} - \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}}}{n-2}} = 1.1388$

$n = 11$ $\quad$ $S_{rr} = 11.6727$

$$t_0 = \frac{0.8191 - 0}{1.1388\sqrt{\frac{1}{11} + \frac{50^2}{11000}}} = 1.2751 \rightarrow |t_0| = |1.2751| = 1.2751$$

$$|t_0| = 1.2751 \not> 2.262 = t_{\frac{\alpha}{2}, n-2}$$

Conclusión: No se puede rechazar H_0 a nivel $\alpha = 0.05$

Es decir, a nivel $\alpha = 0.05$, no se puede afirmar que la ordenada al origen de la recta de regresión verdadera no sea nula.

c) ¿Se puede rechazar $H_0: \beta_1 = 1$? Utilice $\alpha = 0.05$

Se debe suponer $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ $\; i = 1, \dots, 11$

$H_0: \beta_1 = 1$ $\quad$ $H_a: \beta_1 \neq 1$ Test Bilateral

Estadístico de Prueba $\quad T_1 = \dfrac{\hat{\beta}_1 - 1}{S_r / \sqrt{S_{xx}}} \sim T(n-2)$ Bajo H_0

Regla de decisión: Rechazar $H_0: \beta_1 = 1$ a favor $H_a: \beta_1 \neq 1$ cuando $|t_0| > t_{\frac{\alpha}{2}, n-2}$ Siendo $t_{\frac{\alpha}{2}, n-2} = t_{0.025, 9} = 2.262$

$$t_1 = \frac{0.9418 - 1}{\frac{1.1388}{\sqrt{11000}}} = -5.3601 \Rightarrow |t_1| = |-5.3601| = 5.3601$$

$$|t_1| = 5.3601 > 2.262 = t_{\frac{\alpha}{2}, n-2}$$

Conclusión: Se rechaza H_0 a nivel $\alpha = 0.05$

Es decir, a nivel $\alpha = 0.05$, se puede afirmar que la pendiente de la recta de regresión verdadera es diferente de 1.

d) ¿Los datos proporcionan suficiente evidencia para concluir que la máquina está fuera de calibración?

Sí, se tiene evidencia de que el valor de β_1 <u>no</u> es 1.

La máquina está descalibrada, <u>no</u> se cumple la condición para β_1