Coeficientes de Fresnel

La Óptica geométrica no pueden decir cuánto se refleja y cuanto se transmite en una interfaz. Esto puede ser derivado de las ecuaciones de Maxwell. Estos se describen en términos de los coeficientes de reflexión y de transmisión r y t (R y T), que son, respectivamente, la fracción de la amplitudes (intensidades) incidente a reflejada e incidente a transmitida.

Encontraremos las relaciones de **amplitudes y fase** entre los campos **E** y **B** que representan las ondas incidente **(E_i B_i)**, reflejada **(E_r B_r)** y transmitida **(E_t B_t)** entre dos medios dieléctricos homogéneos e isotrópicos de distinto índice de refracción:

n_i: índice refracción medio incidente.

n_t: índice refracción medio transmitido.

Vector de propagación

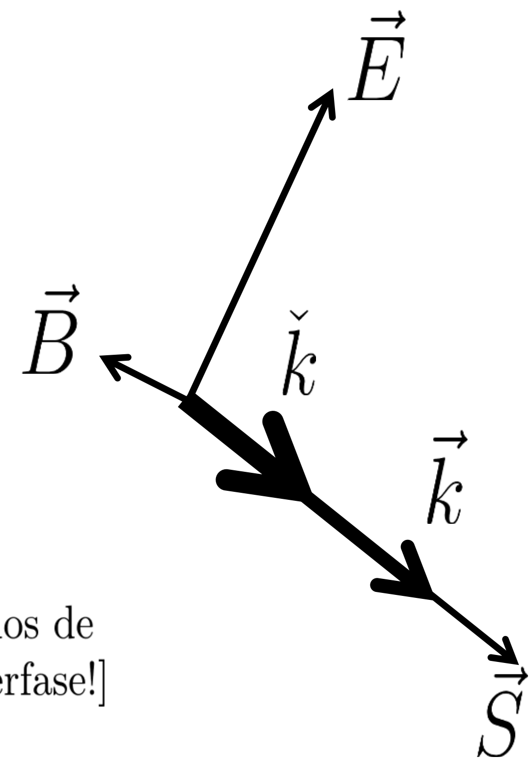
Supongamos que una onda plana monocromática incide sobre la superficie de la interfase entre los dos medios.
Definimos el *vector de propagación* ($\vec{k}$) como un vector paralelo a la dirección de propagación de la onda (Poynting):

$\Rightarrow$Norma para una onda plana: $E(\vec{r},t) = E_0 \operatorname{sen}\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right)$

$$\vec{k} \,//\, \vec{S} \,//\, \vec{E}\times\vec{B}$$
$$\left\|\vec{k}\right\| = \mathrm{cte} = 2\pi/\lambda$$

Por conveniencia también podemos usar el *versor de propagación* $\check{k}$, que apunta en la misma dirección que $\vec{k}$ y tiene la ventaja que $\left\|\check{k}\right\| = 1$ (sin unidades).
Así como $\vec{E}$, $\vec{B}$ y $\vec{S}$ formaban una terna oredenada a derecha también será terna ordenada a derecha $\vec{E}$, $\vec{B}$ y $\check{k}$ (o $\vec{k}$);

$$\check{k}\cdot\vec{E} = 0; \qquad \check{k}\times\vec{E} = v\,\vec{B}$$



Condiciones de contorno en una interfase:

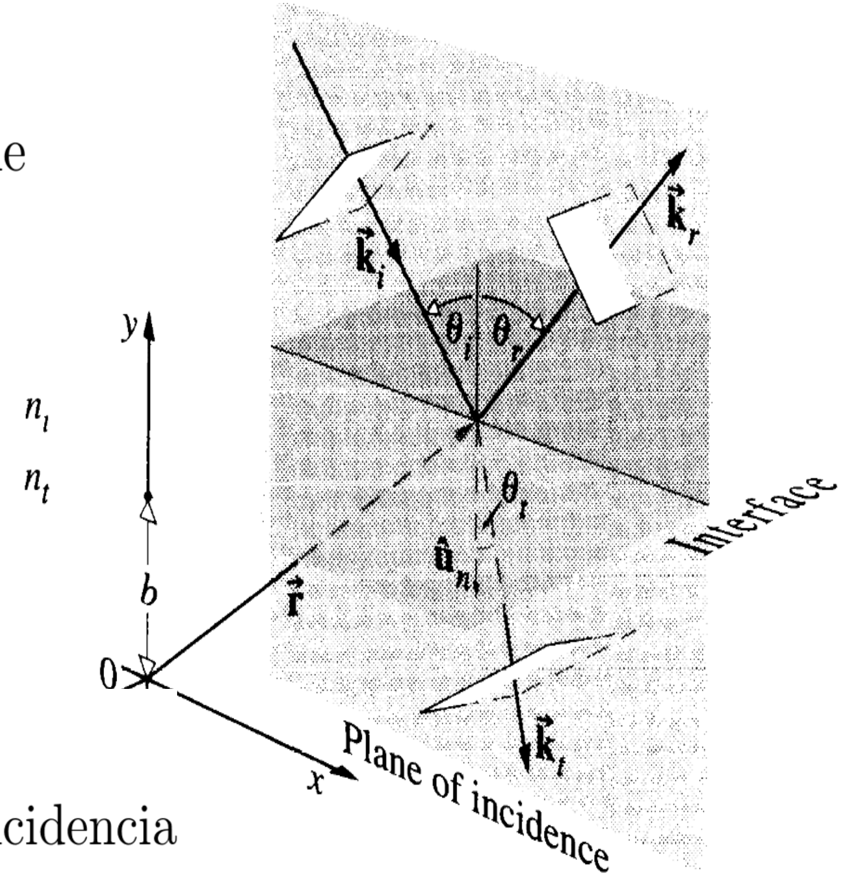
- Las componentes **tangenciales** de $\vec{E}$ se conservan a ambos lados de la interfase [¡Tangenciales a la interfase!]
- Las componentes **normales** de de $\vec{B}$ se conservan a ambos lados de la interfase ¡Normales a la interfase!]

Plano de incidencia

Los rayos incidente (paralelo a $\vec{k}_i$), reflejado (paralelo a $\vec{k}_r$) y transmitido (paralelo a $\vec{k}_t$) están en un mismo plano: el *plano de incidencia*.

Dicho de otra manera:
El plano de incidencia es el plano sobre el que están contenidos $\check{k}_i$, $\check{k}_r$ y $\check{k}_t$.

Como $\vec{E}$, $\vec{B}$ y $\check{k}$ forman una terna ordenada a derecha, basta saber cómo está orientado $\vec{E}$ para tener perfectamente orientados a los tres vectores.

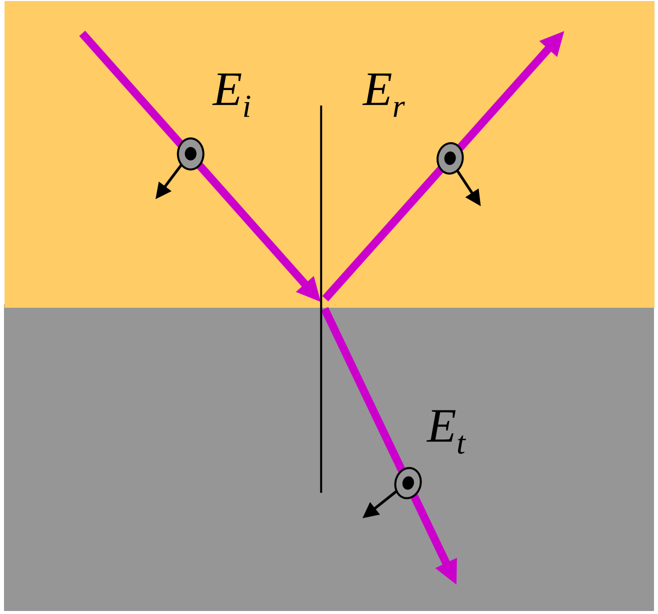


Hay dos posibilidades principales:

1. $\vec{E}$ es perpendicular (normal) al plano de incidencia
2. $\vec{E}$ es paralelo al plano de incidencia

Ecuaciones de Fresnel

Queremos calcular la fracción de una onda de luz reflejada (r) y transmitida (t) al pasar ésta por una interfase entre dos medios con diferentes índices de refracción.



Si E_{0i}, E_{0r} y E_{0t} son las amplitudes de los campos.

$$\begin{cases} r_\perp = (E_{0r}/E_{0i})_\perp \\ t_\perp = (E_{0t}/E_{0i})_\perp \end{cases}$$

1. $\vec{E}$ es perpendicular (normal) al plano de incidencia

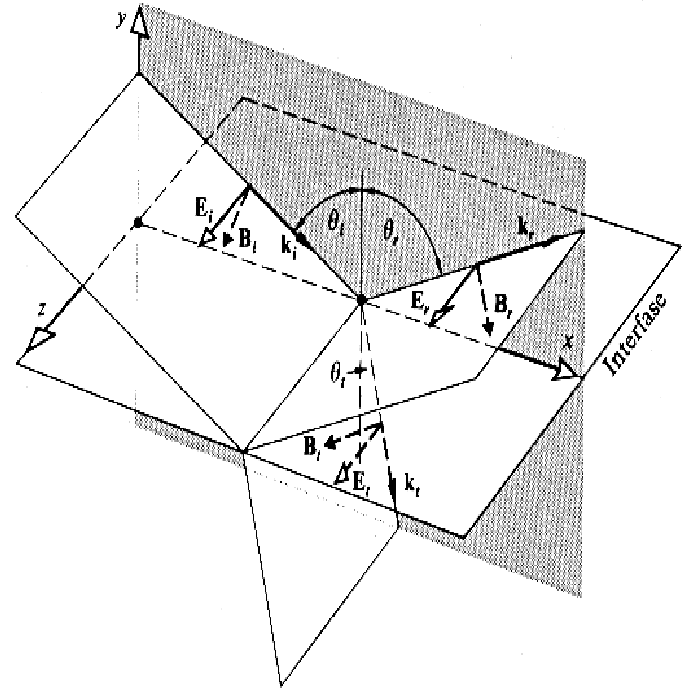
$$\begin{cases} r_\parallel = (E_{0r}/E_{0i})_\parallel \\ t_\parallel = (E_{0t}/E_{0i})_\parallel \end{cases}$$

2. $\vec{E}$ es paralelo al plano de incidencia

- **Consideramos las condiciones límite en la interfase de los campos eléctricos y magnéticos de las ondas de luz.**
- **Dependen del ángulo de incidencia de una manera complicada.**

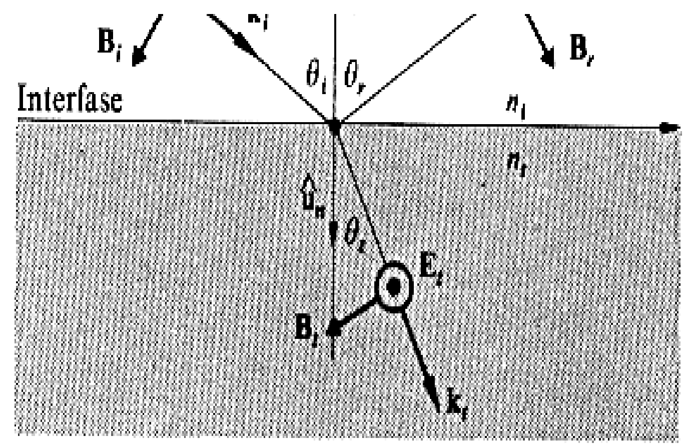
Caso 1. $\vec{E}$ perpendicular al plano de incidencia

Consideramos las amplitudes de las ondas respectivas cuando E es perpendicular (normal) al plano de incidencia:



- $E_i(\vec{r},t) = E_{0i}\,\mathrm{sen}\left(\vec{k}_i\cdot\vec{r}-\omega\,t\right)$ onda incidente
- $E_r(\vec{r},t) = E_{0r}\,\mathrm{sen}\left(\vec{k}_r\cdot\vec{r}-\omega\,t\right)$ onda reflejada
- $E_t(\vec{r},t) = E_{0t}\,\mathrm{sen}\left(\vec{k}_t\cdot\vec{r}-\omega\,t\right)$ onda transmitida

Elegimos la dirección de la onda incidente $E_i(\vec{r},t)$ y *suponemos* que las direcciones de $E_r(\vec{r},t)$ y $E_t(\vec{r},t)$ son como en la figura.



Condiciones de contorno:

Las condiciones se deben cumplir en cualquier lugar de la interfase y para cualquier tiempo. Por lo tanto debemos considerar:

$$\mathrm{sen}\left(\vec{k}_i\cdot\vec{r}-\omega\,t\right) = \mathrm{sen}\left(\vec{k}_r\cdot\vec{r}-\omega\,t\right) = \mathrm{sen}\left(\vec{k}_t\cdot\vec{r}-\omega\,t\right) = 1$$

Caso 1. $\vec{E}$ perpendicular al plano de incidencia

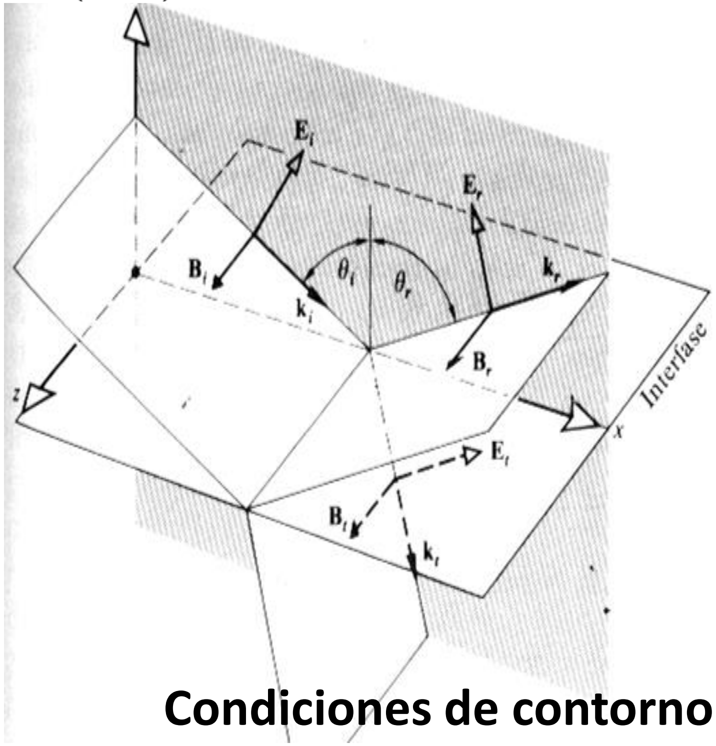
$$\boxed{r_\perp = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_\perp = \frac{n_i\cos(\theta_i) - n_t\cos(\theta_t)}{n_i\cos(\theta_i) + n_t\cos(\theta_t)}}$$

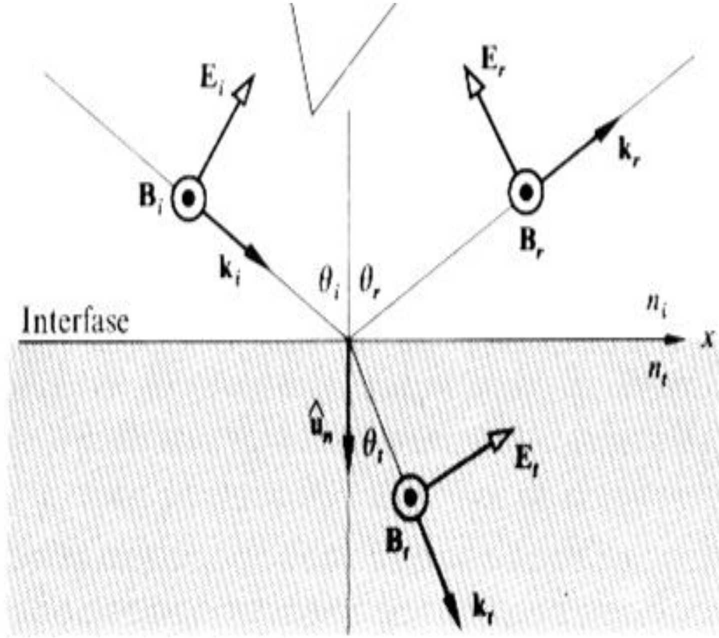
$$\boxed{t_\perp = \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_\perp = \frac{2\,n_i\cos(\theta_i)}{n_i\cos(\theta_i) + n_t\cos(\theta_t)}}$$

Estas ecuaciones que permiten calcular la relación de amplitudes de la onda reflejada y transmitida respecto de la incidente son las ecuaciones de Fresnel para luz polarizada ***perpendicularmente*** al plano de incidencia

Caso 2. $\vec{E}$ paralelo al plano de incidencia

Igual que en el caso 1, elegimos la dirección de la onda incidente $E_i\,(\vec{r},t)$ y *suponemos* que las direcciones de $E_r\,(\vec{r},t)$ y $E_t\,(\vec{r},t)$ son como en la nueva figura.





Condiciones de contorno:

Igual que en el caso 1, las condiciones se deben cumplir en cualquier lugar de la interfase y para cualquier tiempo. Por lo tanto debemos considerar:

$$\operatorname{sen}\left(\vec{k}_i\cdot\vec{r}-\omega\,t\right)=\operatorname{sen}\left(\vec{k}_r\cdot\vec{r}-\omega\,t\right)=\operatorname{sen}\left(\vec{k}_t\cdot\vec{r}-\omega\,t\right)=1$$

Caso 2. $\vec{E}$ paralelo al plano de incidencia

$$\boxed{r_{\parallel} = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_{\parallel} = \frac{n_t \cos(\theta_i) - n_i \cos(\theta_t)}{n_i \cos(\theta_t) + n_t \cos(\theta_i)}}$$

$$\boxed{t_{\parallel} = \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_{\parallel} = \frac{2\, n_i \cos(\theta_i)}{n_i \cos(\theta_t) + n_t \cos(\theta_i)}}$$

Estas ecuaciones que permiten calcular la relación de amplitudes de la onda reflejada y transmitida respecto de la incidente son las ecuaciones de Fresnel para luz polarizada ***paralelamente*** al plano de incidencia

Ecuaciones de Fresnel simplificadas para dieléctricos

Usando la Ley de Snell se puede hacer una simplificación en las Ecuaciones de Fresnel válida para medios dieléctricos.

Caso 1. $\vec{E}$ **perpendicular al plano de incidencia**

$$\boxed{r_\perp = -\frac{\operatorname{sen}(\theta_i - \theta_t)}{\operatorname{sen}(\theta_i + \theta_t)}}$$

$$\boxed{t_\perp = \frac{2\operatorname{sen}(\theta_t)\cos(\theta_i)}{\operatorname{sen}(\theta_i + \theta_t)}}$$

Caso 2. $\vec{E}$ **paralelo al plano de incidencia**

$$\boxed{r_\parallel = +\frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)}}$$

$$\boxed{t_\parallel = \frac{2\operatorname{sen}(\theta_t)\cos(\theta_i)}{\operatorname{sen}(\theta_i + \theta_t)\cos(\theta_i - \theta_t)}}$$

Notar que los signos de los coeficientes de Fresnel son válidos para la elección particular de las direcciones

Ejemplo: el signo negativo del coeficiente $r_\perp$ es porque es incorrecta la dirección del vector $\vec{E}$ reflejado.

Los coeficientes de amplitud de Fresnel en función del ángulo incidente (ej aire –vidrio, $n_i<n_t$)

Si $n_i < n_t$ se cumple que

$$r_\perp = -\frac{\mathrm{sen}(\theta_i - \theta_t)}{\mathrm{sen}(\theta_i + \theta_t)} < 0 \text{ para todo } \theta_i$$

pero

$$r_\parallel = +\frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} \text{ es}$$

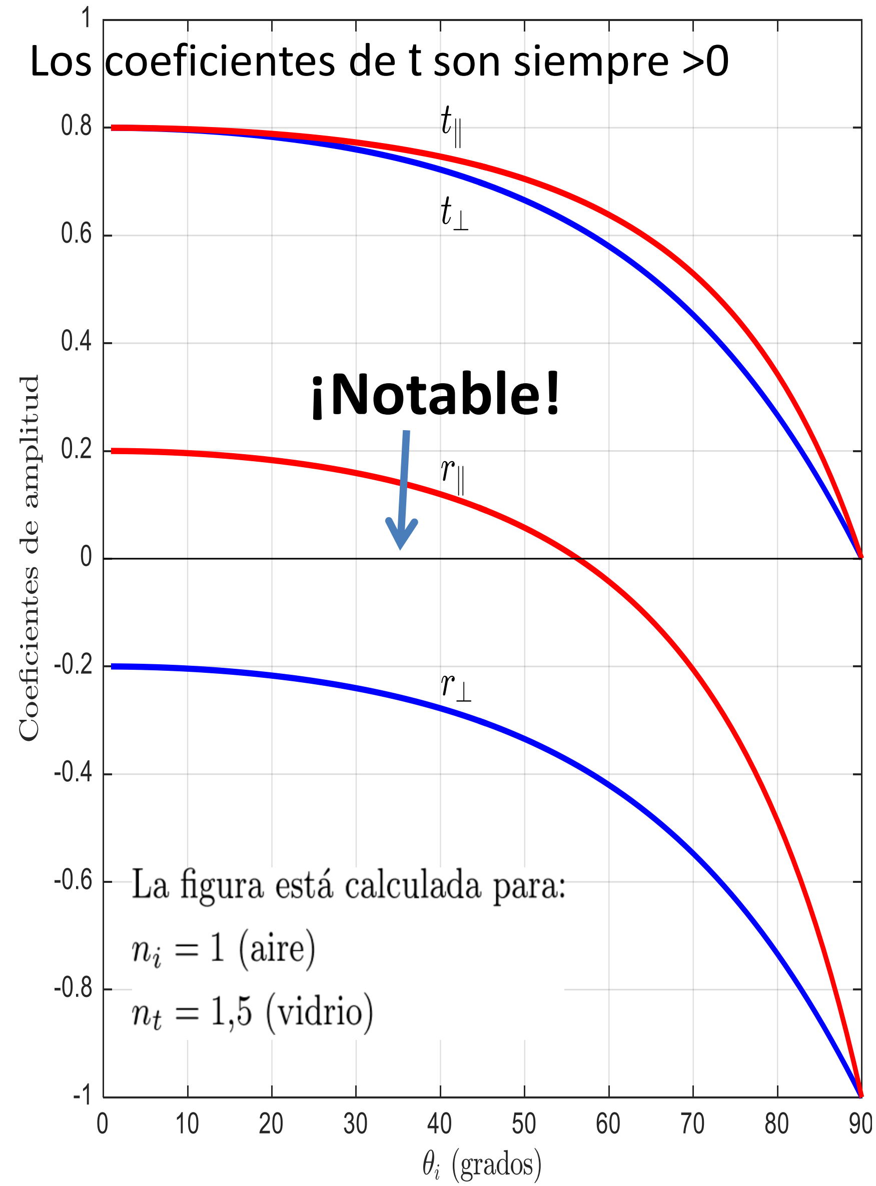
> 0 para $\theta_i = 0$ y decrece

$= 0$ para $\theta_i + \theta_t = \pi/2 \equiv 90^\circ$

< 0 para θ_i mayores

El ángulo de incidencia para el cual se cumple que $r_\parallel = 0$ se llama *ángulo de polarización* ($\theta_i = \theta_p = \theta_B$) o *ángulo de Brewster*.

La luz reflejada a θ_B está SÓLO polarizada **perpendicularmente** al plano de incidencia.



Los coeficientes de amplitud de Fresnel en función del ángulo incidente (ej. vidrio-aire $n_i > n_t$)

Si $n_i > n_t$ se cumple que

$$r_\perp = -\frac{\operatorname{sen}(\theta_i - \theta_t)}{\operatorname{sen}(\theta_i + \theta_t)} > 0 \text{ para todo } \theta_i$$

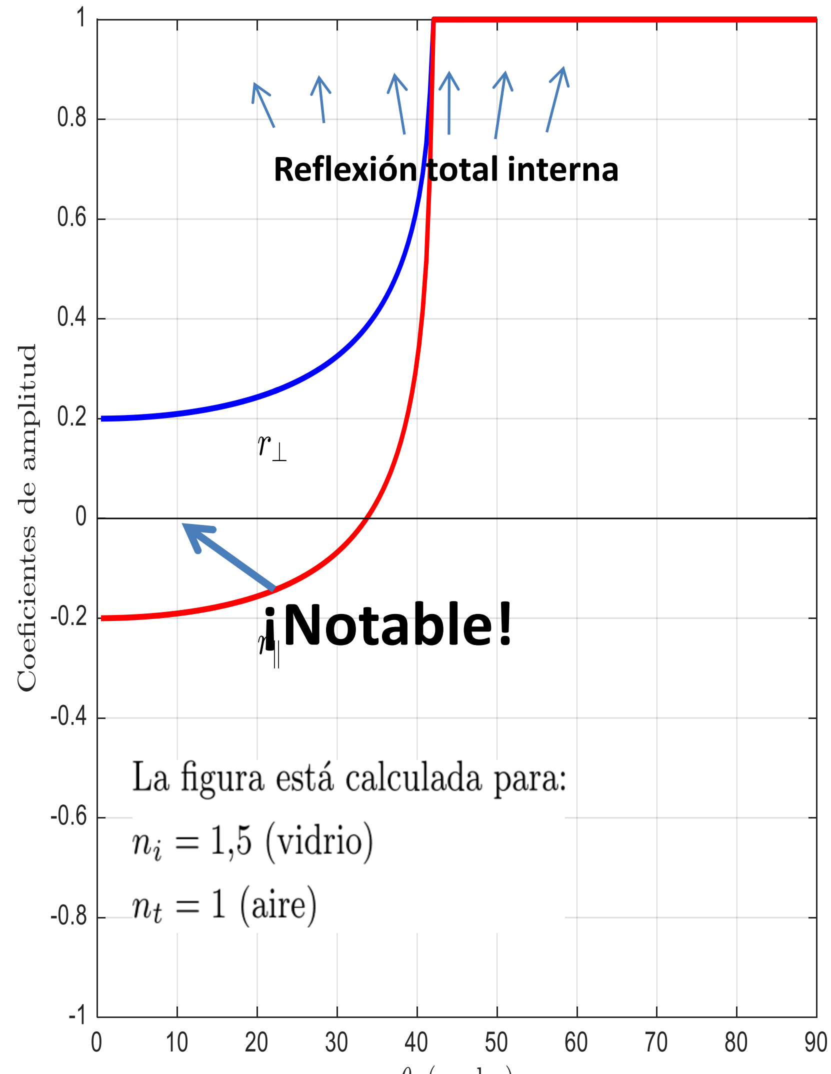
pero

$$r_\parallel = +\frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} \text{ es}$$

< 0 para $\theta_i = 0$ y crece
$= 0$ para $\theta_i = \theta'_B$
> 0 para $\theta_i > \theta'_B$

Además hay reflexión total interna para $\theta_i = \theta_c = \operatorname{sen}^{-1}(n_t/n_i)$

*Para $\theta_i > \theta_c$ decimos que $r_\perp$ y $r_\parallel$ son 1.



Para los coeficientes de transmisión siguen valiendo las ecuaciones anteriores.

Ley de Brewster

Cuando $\theta_i + \theta_t = \pi/2 \equiv 90°$ la luz reflejada a $\theta_i = \theta_B$ está SÓLO polarizada **perpendicularmente** al plano de incidencia ($r_\parallel = 0$). Por Ley de Snell sabemos que $n_i \operatorname{sen}(\theta_i) = n_t \operatorname{sen}(\theta_t)$:

$$\Longrightarrow \underline{n_i \operatorname{sen}(\theta_i)} = n_t \operatorname{sen}(\theta_t) = n_t \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \underline{\theta_i\right) = n_t} \cos(\theta_i)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\tan(\theta_B) = \frac{n_t}{n_i}}$$

Ej: n_i = 1 (aire), n_t = 1.5 (vidrio)

$\theta_B = 56^0$

Coeficientes de amplitud de Fresnel para incidencia cuasinormal

Si la incidencia es cuasinormal $\theta_i \approx 0 \Longrightarrow \operatorname{sen}(\theta_i) \approx \tan(\theta_i) \approx \theta_i$ (¡en radianes!). Ahora hacemos las aproximaciones en los coeficientes de Fresnel y luego de aplicar Snell hallamos:

$$\boxed{-r_\perp(\theta_i \approx 0) = r_\parallel(\theta_i \approx 0) = \frac{n_t \cos(\theta_i) - n_i \cos(\theta_t)}{n_t \cos(\theta_i) + n_i \cos(\theta_t)}}$$

$$\boxed{t_\perp(\theta_i \approx 0) = t_\parallel(\theta_i \approx 0) = \frac{2\, n_i}{n_i + n_t}}$$

Ejemplo: si $n_i = 1$ (aire) y $n_t = 1,5$ (vidrio) y $\theta_i = 0$:

$-r_\perp(\theta_i = 0) = r_\parallel(\theta_i = 0) = 0{,}2$

$t_\perp(\theta_i = 0) = t_\parallel(\theta_i = 0) = 0{,}8$

¡CUIDADO! Se puede demostrar que

- $t_\perp + (-r_\perp) = 1$ **para todo** θ_i
- $t_\parallel + (-r_\parallel) = 1$ **sólo si** $\theta_i = 0$

Reflectancia y transmitancia

En lugar de los cocientes de las amplitudes de campos (coeficientes de Fresnel para la reflexión y la transmisión) se considera el cociente entre la intensidad lumínica que llega a una interfase y la que se refleja o transmite respectivamente:

$$R = \frac{I_r}{I_i}$$ *Reflectancia*

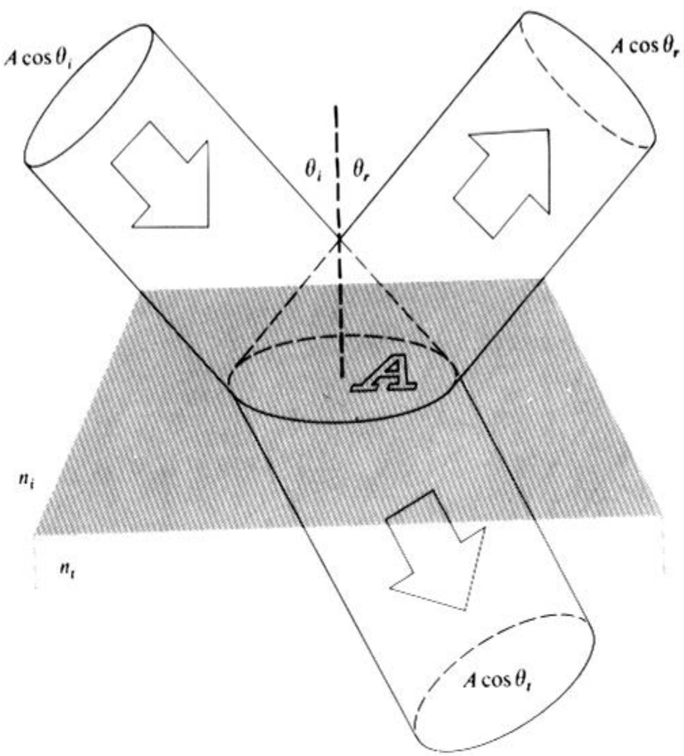
$$T = \frac{I_t}{I_i}$$ *Transmitancia*

Es posible demostrar que $R + T = 1$

Reflectancia y transmitancia

Recordemos el vector de Poynting es la potencia por unidad de área que atraviesa una superficie cuya normal es paralela a él. En el vacío:

$$\boxed{\vec{S} = c^2\varepsilon_0\,\vec{E}\times\vec{B}} \quad I = \left\langle \left\| \vec{S} \right\| \right\rangle = \left\langle \left\| c^2\varepsilon_0\,\vec{E}\times\vec{B} \right\| \right\rangle = \frac{c^2\varepsilon_0}{2}E_0^2$$



Sean

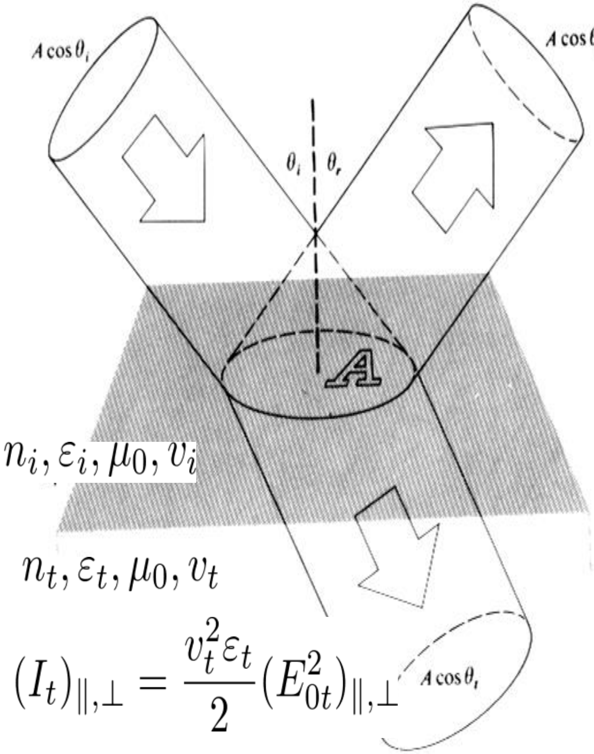
- I_i la intensidad incidente,
- I_r la intensidad reflejada,
- I_t la intensidad transmitida
- A una cierta área sobre la interfase

$A\,\cos(\theta_j)$ es el área transversal en la dirección de θ_j

Reflectancia y transmitancia

$$(I_i)_{\parallel,\perp} = \frac{v_i^2 \varepsilon_i}{2}(E_{0i}^2)_{\parallel,\perp} \quad (I_r)_{\parallel,\perp} = \frac{v_i^2 \varepsilon_i}{2}(E_{0r}^2)_{\parallel,\perp}$$

$$\mu_i = \mu_t = \mu_0$$



$n_i, \varepsilon_i, \mu_0, v_i$

$n_t, \varepsilon_t, \mu_0, v_t$

$$(I_t)_{\parallel,\perp} = \frac{v_t^2 \varepsilon_t}{2}(E_{0t}^2)_{\parallel,\perp}$$

$$\left\{\begin{array}{l} (R)_{\parallel,\perp} = \dfrac{(I_r)_{\parallel,\perp}\, A\, \cos(\theta_r = \theta_i)}{(I_i)_{\parallel,\perp}\, A\, \cos(\theta_i)} = \dfrac{(I_r)_{\parallel,\perp}}{(I_i)_{\parallel,\perp}} \\[2ex] (T)_{\parallel,\perp} = \dfrac{(I_t)_{\parallel,\perp}\, A\, \cos(\theta_t)}{(I_i)_{\parallel,\perp}\, A\, \cos(\theta_i)} = \dfrac{(I_t)_{\parallel,\perp}\, \cos(\theta_t)}{(I_i)_{\parallel,\perp}\, \cos(\theta_i)} \end{array}\right.$$

$$\boxed{(R)_{\parallel,\perp} = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)^2_{\parallel,\perp} = r^2_{\parallel,\perp}}$$

$$\boxed{(T)_{\parallel,\perp} = \frac{n_t \cos(\theta_t)}{n_i \cos(\theta_i)}\left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)^2_{\parallel,\perp} = \left(\frac{n_t \cos(\theta_t)}{n_i \cos(\theta_i)}\right) t^2_{\parallel,\perp}}$$

Se puede probar que por conservación de la energía $\boxed{(R)_{\parallel,\perp} + (T)_{\parallel,\perp} = 1}$

Reflectancia y transmitancia para incidencia normal

Recordemos los coeficientes de Fresnel cuando $\theta_i = \theta_t = 0$ (incidencia normal)

$$-r_\perp(\theta_i = 0) = r_\parallel(\theta_i = 0) = \frac{n_t - n_i}{n_t + n_i} \qquad t_\perp(\theta_i = 0) = t_\parallel(\theta_i = 0) = \frac{2\,n_i}{n_i + n_t}$$

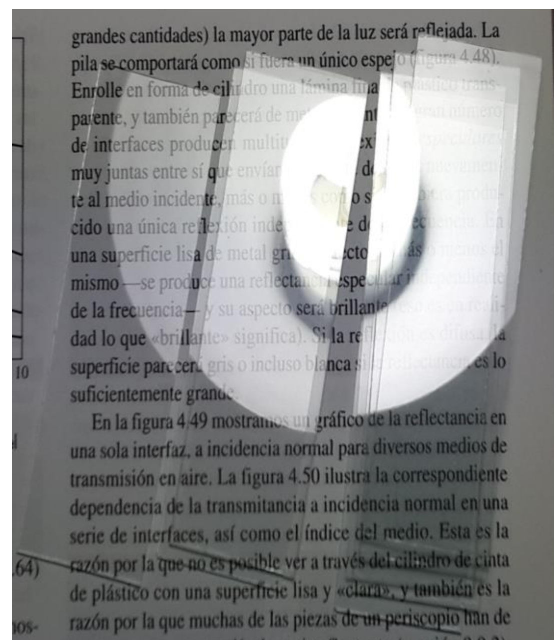
$$\boxed{(R)_{\parallel,\perp} = r_{\parallel,\perp}^2 = \left(\frac{n_t - n_i}{n_t + n_i}\right)^2} \qquad \boxed{(T)_{\parallel,\perp} = \left(\frac{n_t}{n_i}\right) t_{\parallel,\perp}^2 = \frac{4\,n_i\,n_t}{(n_i + n_t)^2}}$$

Ejemplo: si $n_i = 1$ (aire) y $n_t = 1,5$ (vidrio) y $\theta_i = 0$:

$(R)_{\parallel,\perp} = 0{,}04 \equiv 4\%$

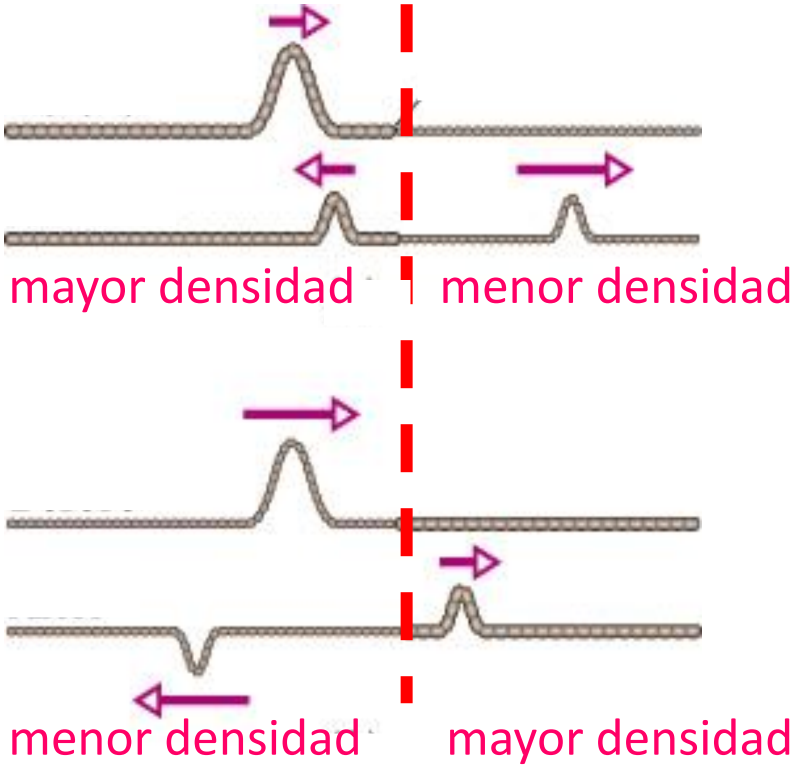
$(T)_{\parallel,\perp} = 0{,}96 \equiv 96\%$

Estos valores son los mismos cualquiera sea la dirección en que viaje la luz.
Este 4% tiene gran importancia en el caso de muchas interfases aire/vidrio, por ejemplo el sistema de lentes en una cámara fotográfica.
En la foto mostramos pilas de distintas cantidades de portaobjetos directamente bajo una lámpara.



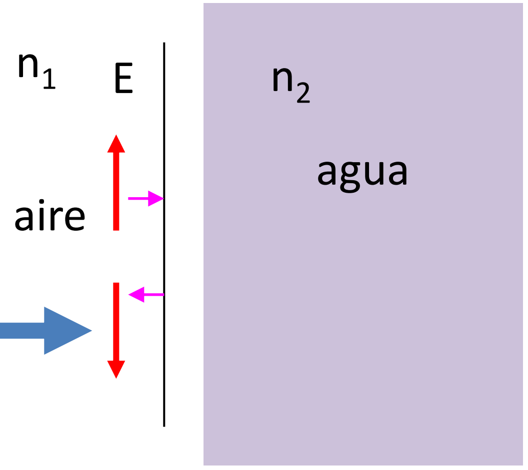
Recordemos: ondas en una cuerda

Recordemos el comportamiento de la onda cuando una onda se transmite a un medio de diferente densidad (mayor o menor)



Lo mismo ocurre con las ondas luminosas:

Onda reflejada está desfazada en 180 grados cuando $n_1 < n_2$



Análisis de la fase reflejada de $E_\perp$ con los coeficientes de Fresnel para incidencia externa ($n_i<n_t$)

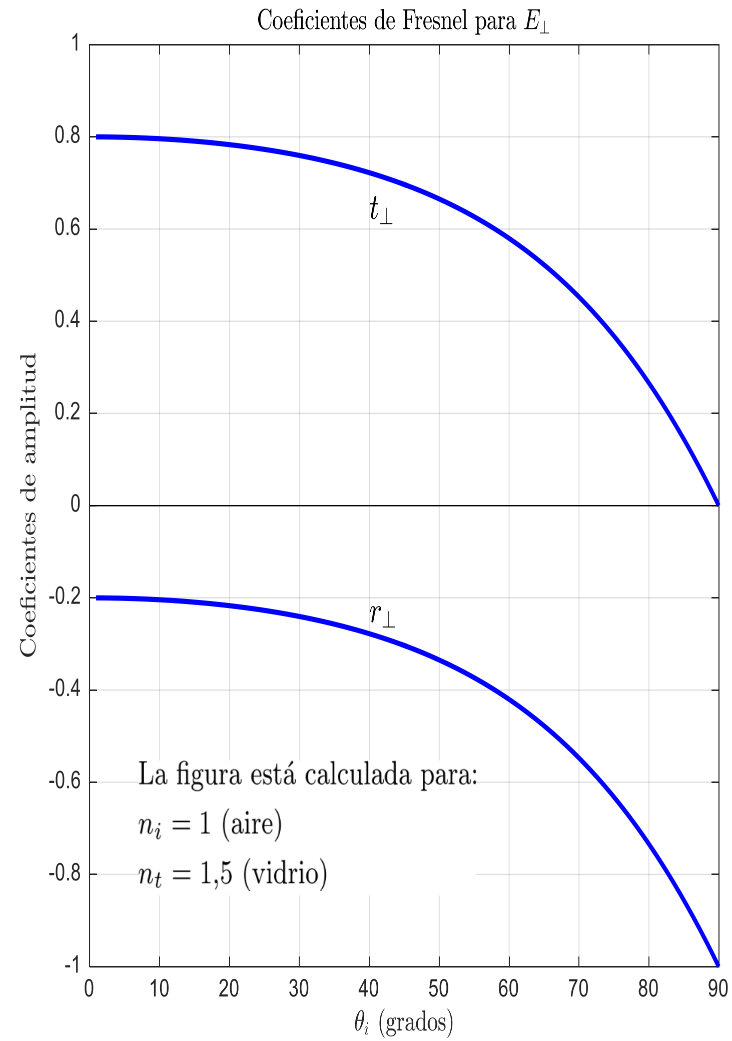
$E_\perp$ es la amplitud del campo perpendicular al plano de incidencia.

$$t_\perp = \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_\perp = \frac{2\,n_i\cos(\theta_i)}{n_i\cos(\theta_i)+n_t\cos(\theta_t)} > 0 \quad \forall\theta_i$$

Que $t_\perp > 0$ siempre implica que $(\vec{E}_{0t})_\perp$ apunta *igual* que $(\vec{E}_{0i})_\perp$.
Esto significa que $(E_{0t})_\perp$ **está en fase** con la amplitud de $(E_{0i})_\perp$ $(\Delta\phi = 0)$.

$$r_\perp = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_\perp = \frac{n_i\cos(\theta_i)-n_t\cos(\theta_t)}{n_i\cos(\theta_i)+n_t\cos(\theta_t)} < 0 \quad \forall\theta_i$$

Que $r_\perp < 0$ siempre implica que $(\vec{E}_{0r})_\perp$ apunta *al revés* que $(\vec{E}_{0i})_\perp$.
Esto significa que hay una **inversión de fase** $\Delta\phi = \pi$ **(rad)** para la amplitud $(E_{0r})_\perp$ respecto de $(E_{0i})_\perp$.



La componente del campo eléctrico perpendicular al plano de incidencia sufre un cambio de fase de ¼ rad (180°) cuando $n_i<n_t$.