Ondas electromagnéticas en el vacío

$$\nabla^2\Psi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2\vec{E} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$$

$$\frac{1}{v^2} = \boxed{\mu_0\varepsilon_0} \Longrightarrow \boxed{v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}}$$

Velocidad de propagación de las ondas

$$\mu_0 \equiv 4\pi\cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{m\ kg}}{\mathrm{C}^2} \qquad \varepsilon_0 \simeq 8,85\cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{s^2C^2}}{\mathrm{m^3kg}}$$

$$\boxed{v \equiv c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = 299\,792\,458\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \simeq 3\cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$

Velocidad de la luz EN EL VACÍO

Ecuaciones de Maxwell: rigen los fenómenos ópticos en el vacío y en medios materiales.

Suponemos que el medio material es:

homogéneo: ε = cte , μ = cte en todos puntos; ***Isotrópico :*** ε , μ no dependen dirección propagación; ***no conductor***: J = 0; ***libre de cargas***: ρ = 0

Donde

- μ es la **permeabilidad del medio**
- ε es la **permitividad del medio**

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \vec{B} = \mu\varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

La solución completa para los dos campos en este ejemplo es:

Ondas Planas Armónicas

$$\begin{cases} \vec{E}(x,t) = E_{0y}\,\mathrm{sen}\,(kx-\omega t)\;\check{j} & [\mathrm{N/C}] = [\mathrm{V/m}] \\ \vec{B}(x,t) = \underbrace{\left(\dfrac{E_{0y}}{c}\right)}_{B_{0z}}\;\mathrm{sen}\,\underbrace{(kx-\omega t)}_{\text{Ondas viajeras monocromáticas (una sola } \lambda)}\;\check{k} & [\mathrm{T}] \end{cases}$$

Notación para este caso:

Si $\left\|\vec{E}\right\| = E_{0y}\,\mathrm{sen}\,(kx-\omega t) \Longrightarrow \left\|\vec{E}\right\|_{\text{máx}} = E_{0y}$ (es la amplitud de $\vec{E}$)

Si $\left\|\vec{B}\right\| = B_{0z}\,\mathrm{sen}\,(kx-\omega t) \Longrightarrow \left\|\vec{B}\right\|_{\text{máx}} = B_{0z}$ (es la amplitud de $\vec{B}$)

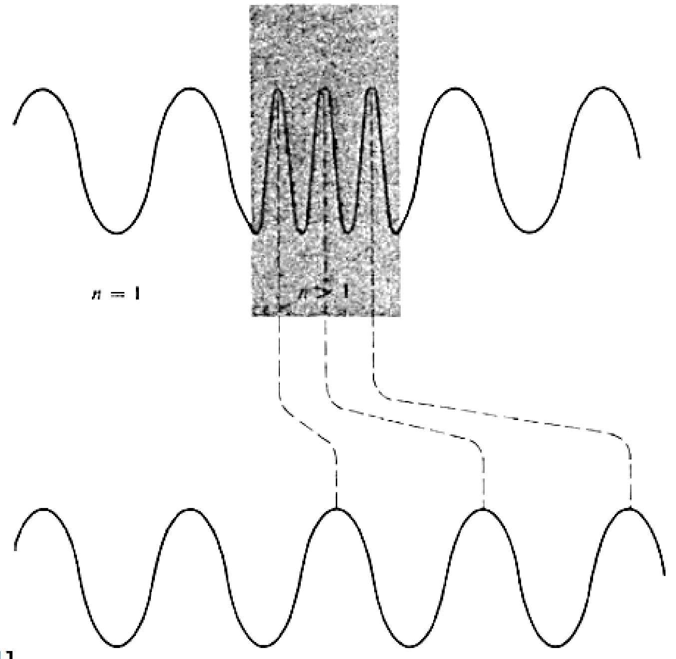
Caracterización óptica del medio: índice de refracción

El efecto neto de introducir un dieléctrico isótropo y homogéneo en una región del espacio libre es cambiar la permitividad ε y la permeabilidad μ. Consecuentemente la velocidad de la luz en el medio es:

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{1}{\mu\varepsilon}}}$$ < c (velocidad de la luz en el vacío)

Por su magnitud, es preferible no trabajar con la velocidad de la onda sino con un parámetro que la representa y es el *índice de refracción* (*n*):

$$\boxed{n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{\mu_0\varepsilon_0}}}$$



[4] Fig. 3.16 Retraso de una onda en un medio más denso.

En un medio ***ópticamente*** más ***denso***, la velocidad de la luz es menor y **n es mayor**.

Caracterización óptica del medio: índice de refracción

Índice de refracción para diferentes sustancias, medido para radiaciones luminosas con longitud de onda en el vacío de 589 nm

Sustancia	Índice de refracción	Sustancia	Índice de refracción
Sólidos a 20° C		**Líquidos a 20° C**	
Circonita cúbica	2,21	Benceno	1,501
Diamante (C)	2,419	Disulfuro de carbono	1,628
Fluorita (CaF_2)	1,434	Tetracloruro de carbono	1,461
Cuarzo fundido (SiO_2)	1,458	Alcohol etílico	1,361
Vidrio crown	1,52	Glicerina	1,473
Vidrio flint	1,66	Jarabe de maíz	2,21
Hielo (H_2O)	1,309	Agua	1,333
Poliestireno	1,49		
Cloruro sódico (NaCl)	1,544	**Gases a 0°C, 1 atm**	
Zirconio	1,923	Aire	1,000293
		Dióxido de carbono	1,0045

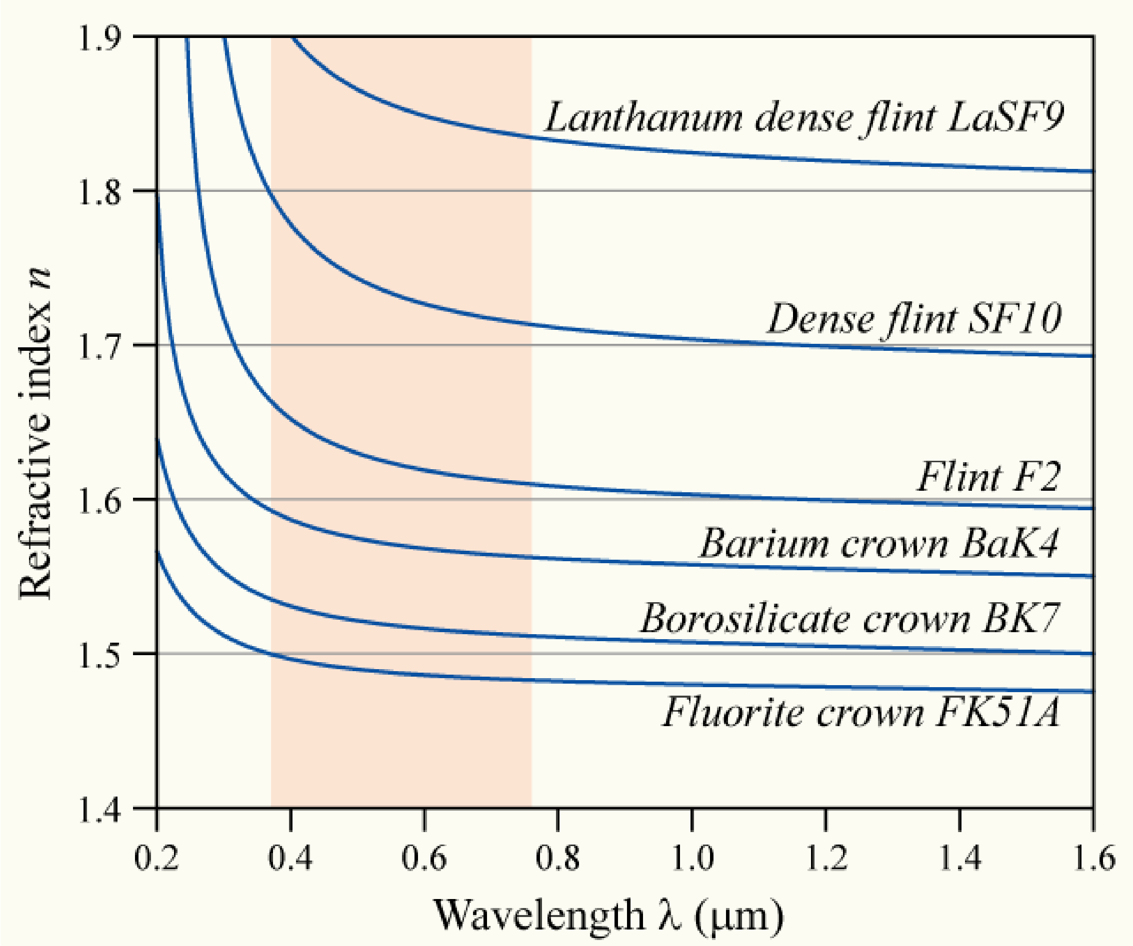
Propiedades del índice de refracción

Los valores de ε y μ dependen en general de λ, por lo tanto *n* también: $n \equiv n(\lambda)$

Aproximación (empírica) de Cauchy para *n* en sustancias transparentes en el visible:

$$n(\lambda) = B + \frac{C}{\lambda^2} + \frac{D}{\lambda^4} + \cdots \approx \boxed{B + \frac{C}{\lambda^2}}$$

Material	B	C (μm^2)
Fused silica	1.4580	0.00354
Borosilicate glass BK7	1.5046	0.00420
Hard crown glass K5	1.5220	0.00459
Barium crown glass BaK4	1.5690	0.00531
Barium flint glass BaF10	1.6700	0.00743
Dense flint glass SF10	1.7280	0.01342

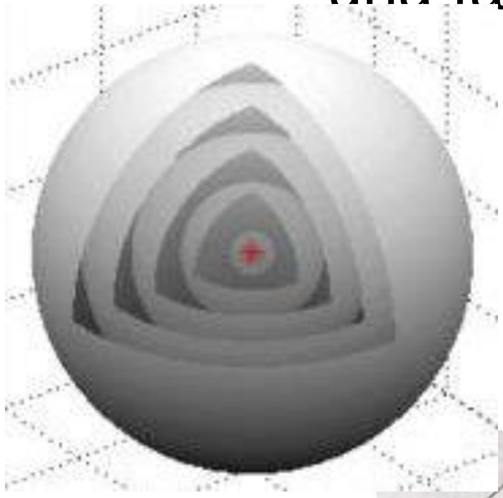


Los colores no viajan a la misma velocidad en un medio transparente (dispersión)

Color	λ media [nm]	n (BK7, Cauchy)	$v = c/n$ [km/s]
Violeta	415	1.528986703	196072.639
Azul	472.5	1.523412463	196790.078
Verde	532.5	1.519411876	197308.223
Amarillo	580	1.517085137	197610.833
Naranja	605	1.516074626	197742.547
Rojo	685	1.51355093	198072.263
Vacío		1	299792.458

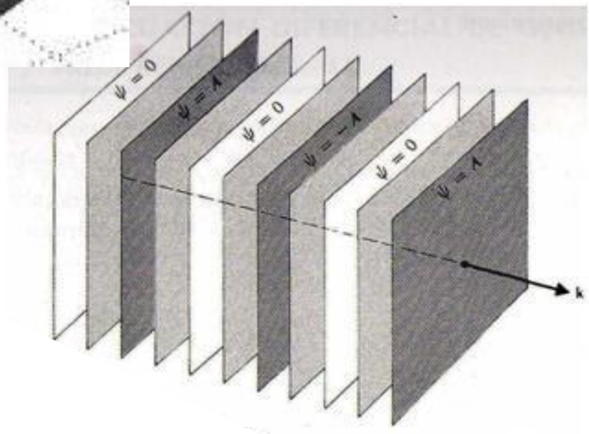
Frentes de onda

El *frente de onda* es una superficie sobre la cual la onda EM tiene una fase constante.



Onda Esférica

La radiación de una fuente luminosa puntual isótropa ideal fluye hacia afuera uniforme en todas direcciones. En este caso los fuentes de onda son esferas concéntricas



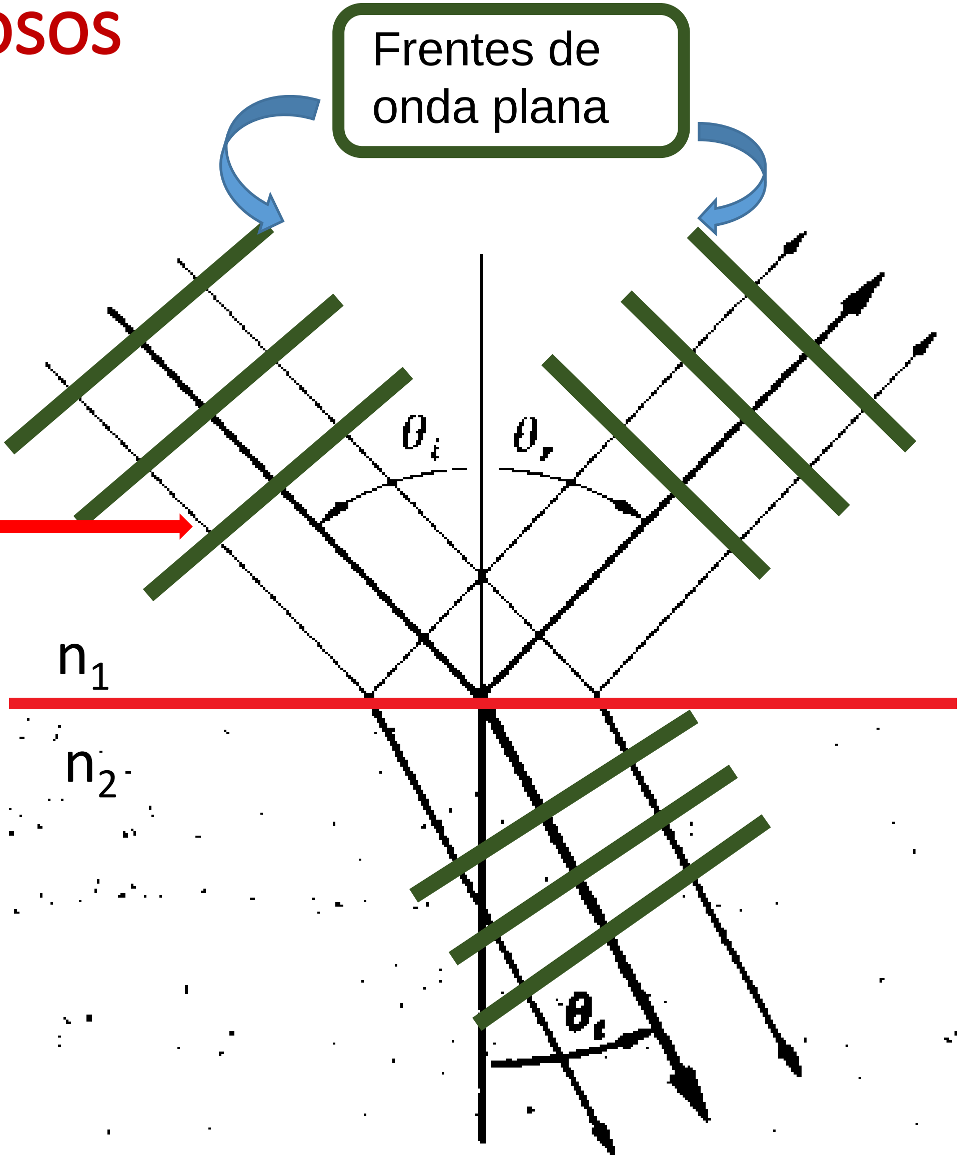
Onda Plana

La superficie sobre las cuales la perturbación tiene una fase constante forma un conjunto de planos, perpendiculares a la dirección propagación (usual en óptica)

A GRANDES distancias de la fuente de una onda esférica el frente es aproximadamente plano.

Concepto de rayos luminosos

Un *rayo luminoso* es una línea en el espacio que corresponde a la dirección del flujo de la energía radiante. En un medio isótropo (propiedades son las mismas en todas direcciones), <u>los rayos son perpendiculares a los frentes de onda.</u>



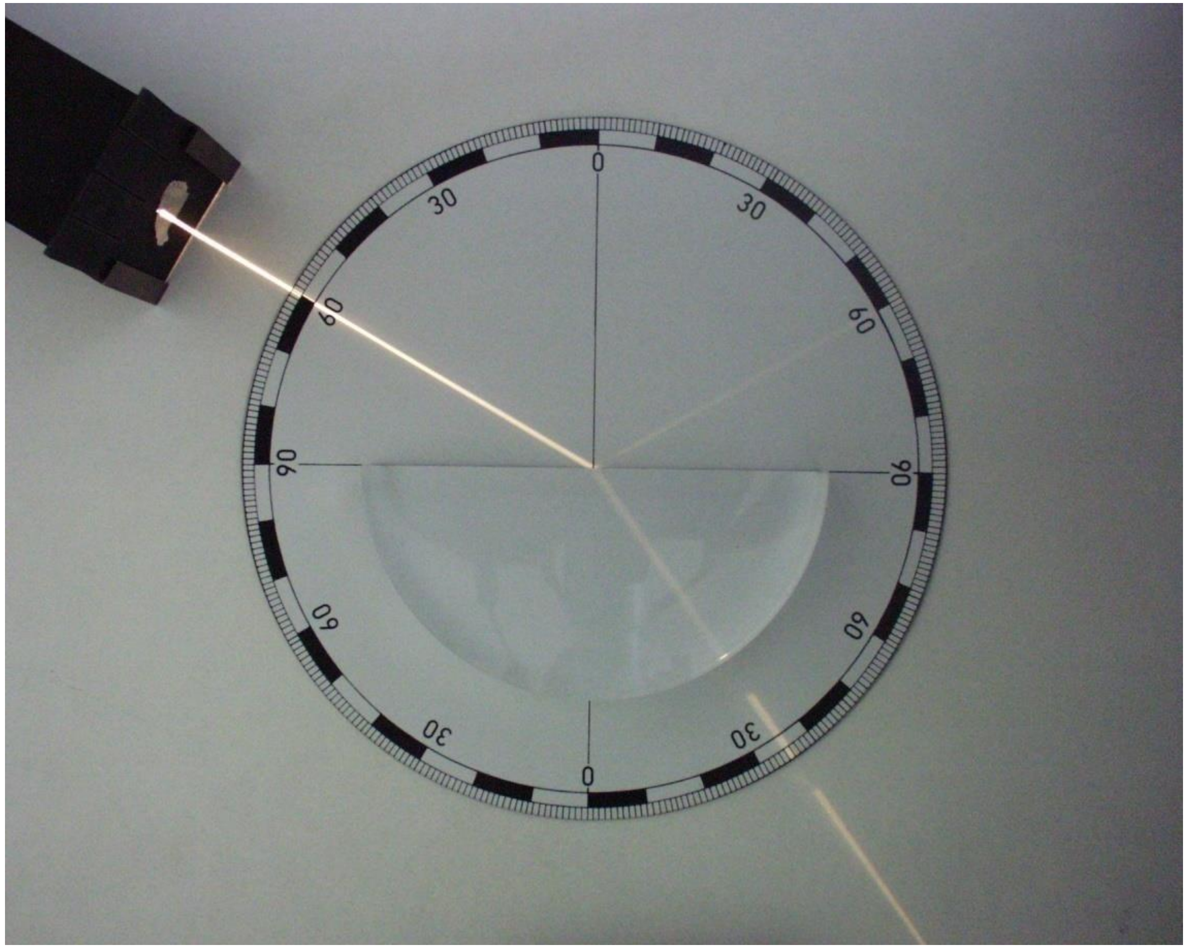
•Cada rayo es paralelo al vector de propagación (vector de Poynting) en ese punto.

•En un medio homogéneo serán líneas rectas, en uno inhomogéneo en gral. no.

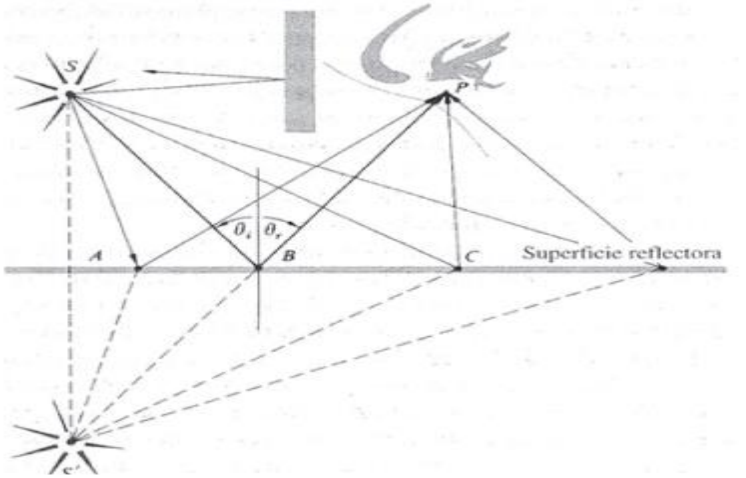
•En una onda esférica son líneas radiales desde la fuente. En una onda plana son líneas paralelas.

Relexión y refracción en la interfaz entre dos medios: Ley de Snell

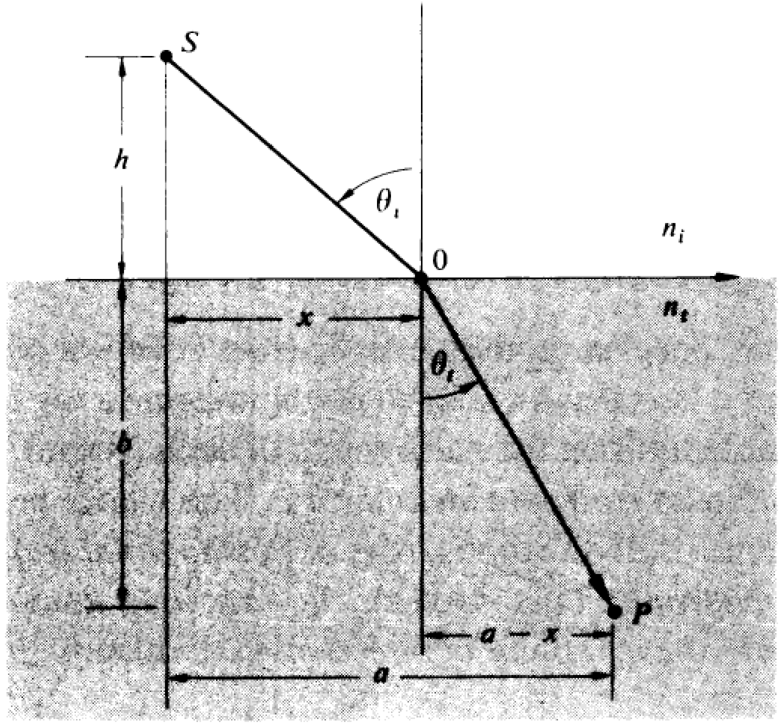
Consideremos un frente de onda plano, de luz monocromática, que incide sobre la superficie de separación entre dos medios transparentes diferentes



Entre todos los caminos posibles, ¿cuál elige la luz?



En 150 A.C. Herón de Alejandría afirma que *la trayectoria recorrida por la luz para ir de un punto S a un punto P a través de una superficie reflectora era la mas corta posible*.

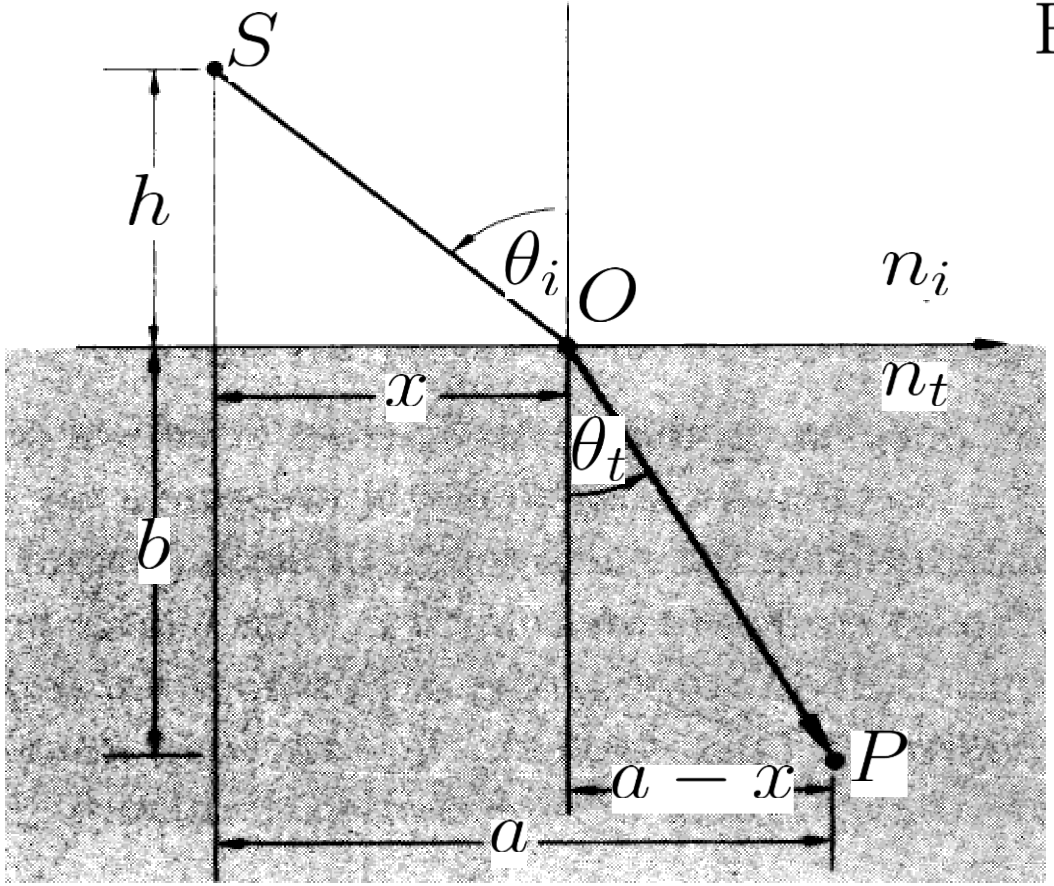


En 1657 Fermat propuso el principio del tiempo mínimo (incluye reflexión y refracción)

"La trayectoria real que adopta la luz entre dos puntos es aquella recorrida en el tiempo mínimo".

Principio de Fermat (o del tiempo mínimo)

Sea t el tiempo de tránsito de S a P.



$$\text{Fermat} \iff \text{minimizar } t$$

$$t = \frac{\overline{SO}}{v_i} + \frac{\overline{OP}}{v_t}$$

$$= \frac{\sqrt{h^2 + x^2}}{v_i} + \frac{\sqrt{b^2 + (a-x)^2}}{v_i}$$

Calculo (verificar el signo de d^2t/dx^2)

$$\frac{dt}{dx} = 0 = \frac{x}{v_i\sqrt{h^2 + x^2}} + \frac{-(a-x)}{v_t\sqrt{b^2 + (a-x)^2}}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(\theta_i)}{v_i} - \frac{\operatorname{sen}(\theta_t)}{v_t} = 0$$

$$\boxed{\frac{\operatorname{sen}(\theta_i)}{v_i} = \frac{\operatorname{sen}(\theta_t)}{v_t}}$$

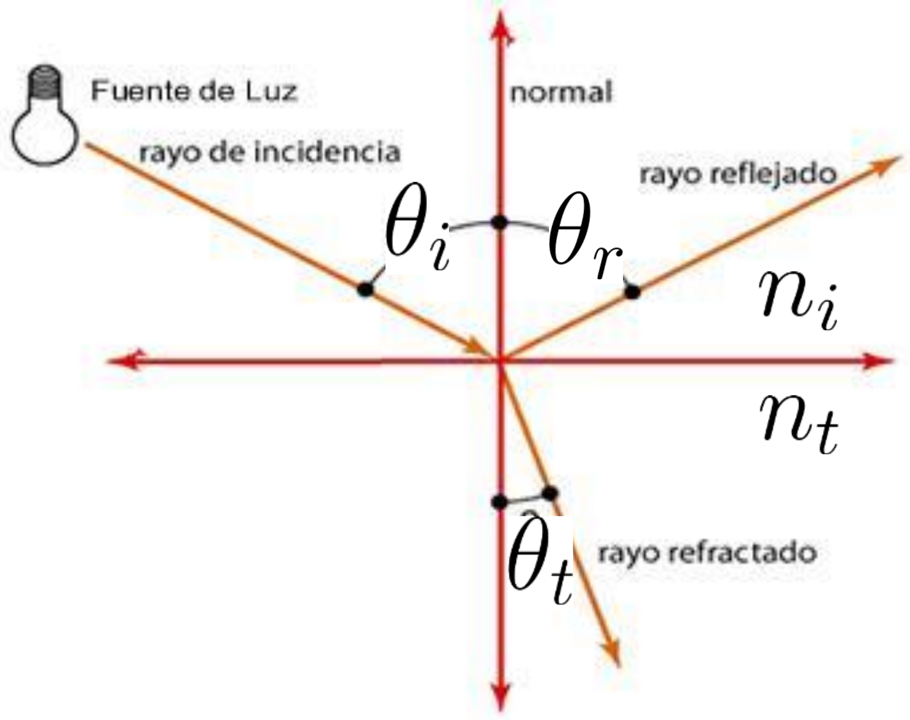
Ley de Snell

Willebrord Snellius (1580–1626)

Ley de Snell en términos de *n*

$$\text{Recordemos que } n = \frac{c}{v} \qquad c \cdot \frac{\operatorname{sen}(\theta_i)}{v_i} = c \cdot \frac{\operatorname{sen}(\theta_t)}{v_t}$$

$$\boxed{n_i \operatorname{sen}(\theta_i) = n_t \operatorname{sen}(\theta_t)} \longrightarrow \textit{Ley de Snell}$$

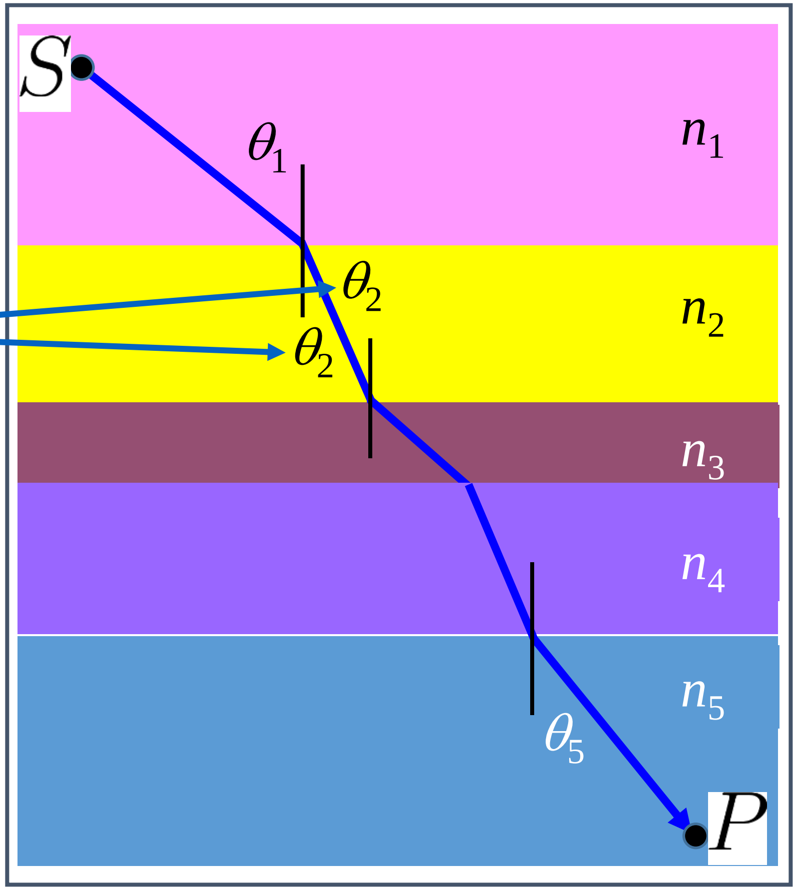


Los ángulos se miden desde la normal a la interfaz en el punto donde los rayos tocan la superficie.

La ecuación es reversible en el sentido de que cualquiera de los dos medios puede ser el de incidencia original (el rayo puede provenir de cualquiera de los dos).

Ley de Snell para muchas capas paralelas

Si las capas son paralelas, los ángulos son siempre iguales.



Podemos pasar por alto las capas intermedias

$$\underline{\underline{n_1 \operatorname{sen}(\theta_1)}} = \overbrace{n_2 \operatorname{sen}(\theta_2) = n_3 \operatorname{sen}(\theta_3) = \cdots}^{} = \underline{\underline{n_m \operatorname{sen}(\theta_m)}}$$

Obtenemos directo el ángulo de salida

Longitud de camino óptico

Definimos una nueva magnitud, la *longitud de camino óptico (LCO)* en contraposición al camino geométrico:

$$LCO = \int_S^P n(s)\, ds$$

La *longitud de camino óptico* corresponde a la distancia en el vacío equivalente a la distancia recorrida en el medio de índice de refracción *n*.

Es decir ambas distancias corresponden al mismo número de longitudes de onda y el mismo cambio de fase a medida que la luz avanza.

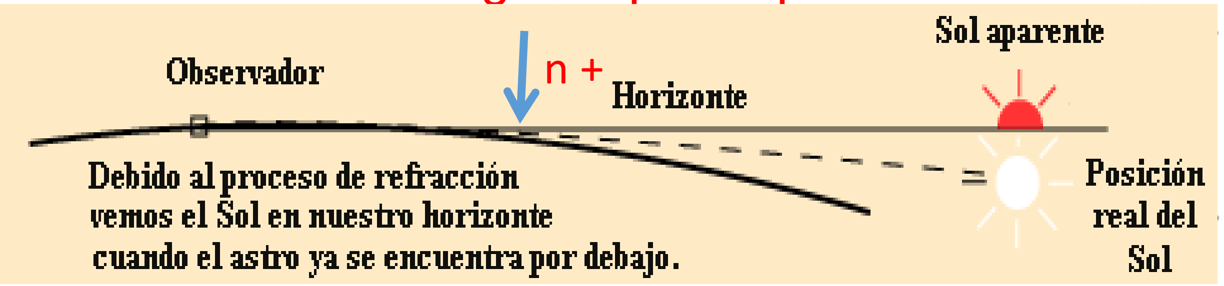
$$\text{Si } n \text{ no depende de la trayectoria,}$$
$$LCO = n \cdot \overline{SP}$$

Fermat reformulado: *Cuando un rayo de luz se transmite de un punto S a un punto P, deberá recorrer una longitud de camino óptico que será estacionaria con respecto a las variaciones de dicho camino.*

La Ley de Snell y los espejismos

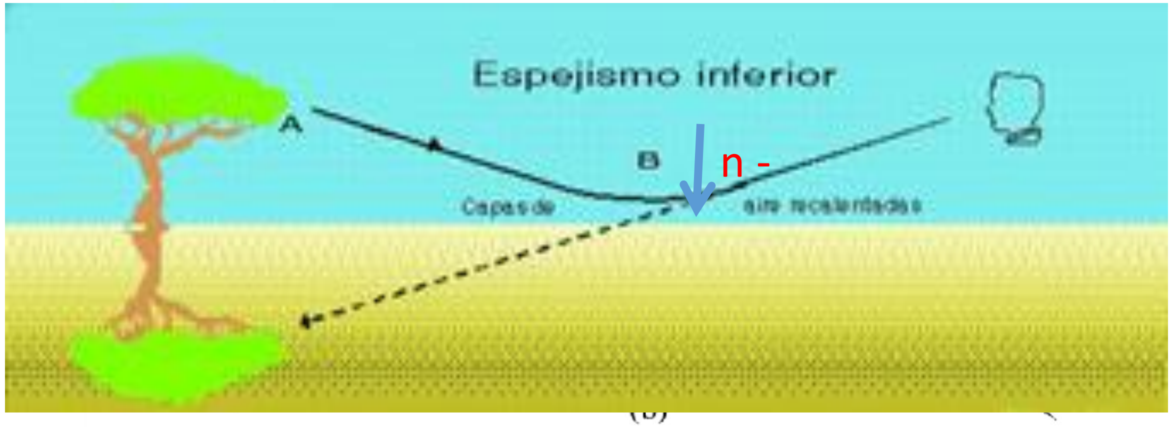
El índice de refracción de aire depende de su densidad, la densidad depende de la temperatura y la presión que podemos considerar constante hasta una altura considerable.

El sol se ve luego de pasar por el horizonte

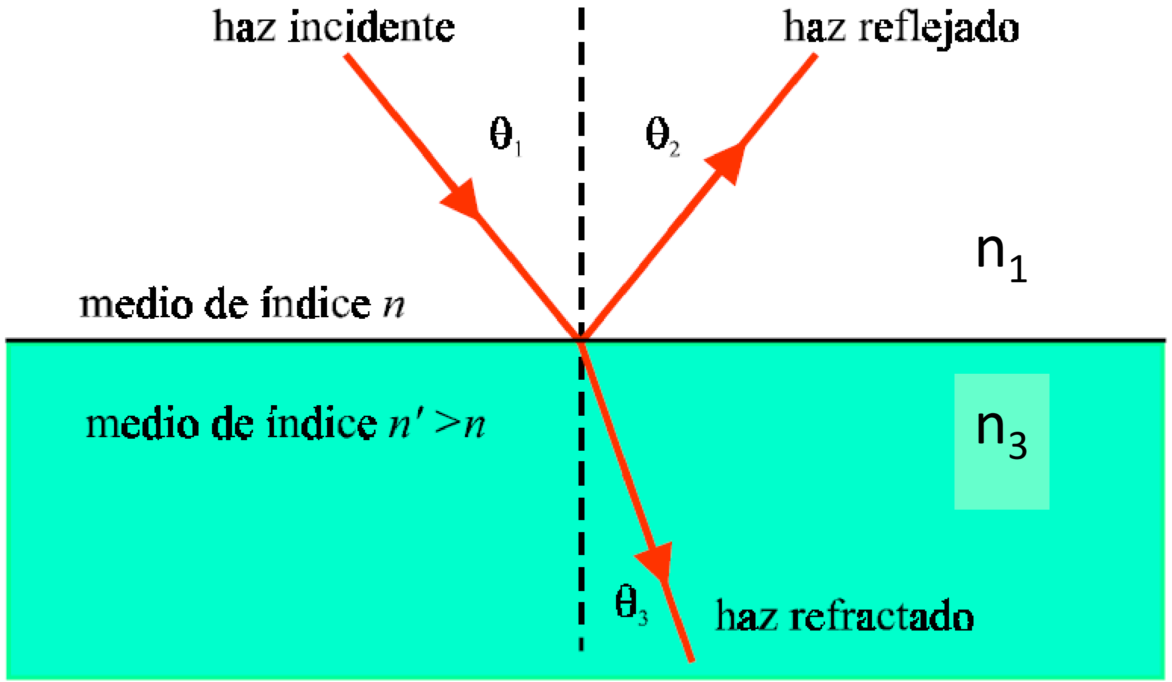


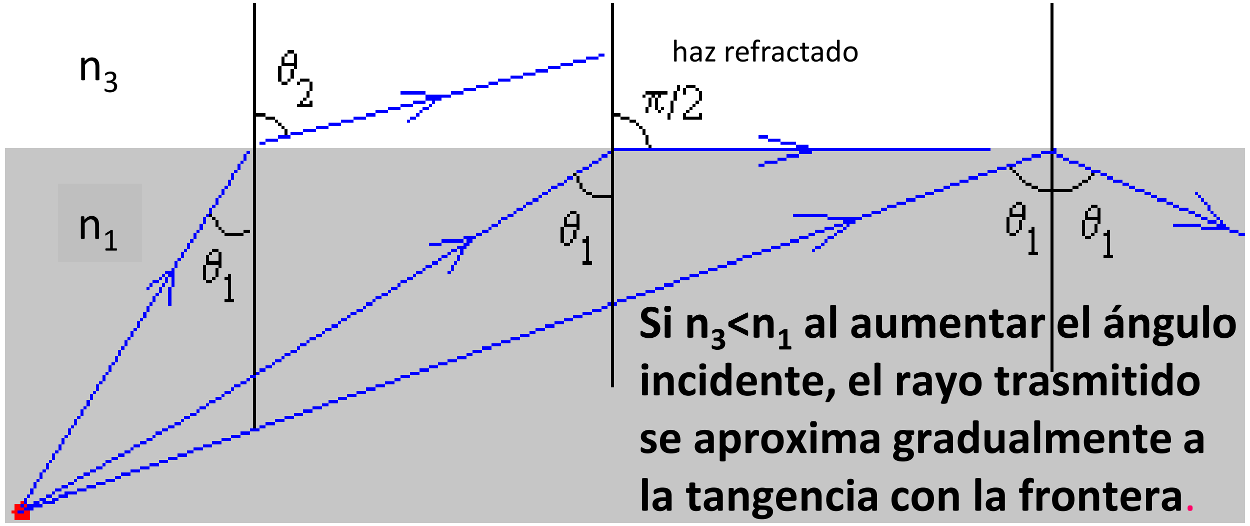
(a)

Los rayos del sol pasan a través atmosfera no homogénea, se desvían para atravesar las regiones inferiores + densas, + n, tan abruptamente como sea posible minimizando LCO).



Espejismos. Un carretera en ángulo. rasante parece reflejar alrededores. **Espejismo inferior** capas cercanas al suelo están + calientes y son menos densas, que las superiores





$$\theta_1 = \theta_2$$

$$n_1 sen\theta_1 = n_3 sen\theta_3$$

$$sen\theta_3 = \frac{n_1}{n_3} sen\theta_1$$

Si $n_3 > n_1$ el rayo se acerca a la normal

$$sen\theta_3 = \frac{n_1}{n_3} sen\theta_1$$

Si $n_3 < n_1$ el rayo se aleja de la normal

$$-1 \leq sen\theta_3 \leq 1$$

en el caso extremo $\theta_3 = 90°$

$$\theta_1 = arcsen\frac{n_3}{n_1}$$

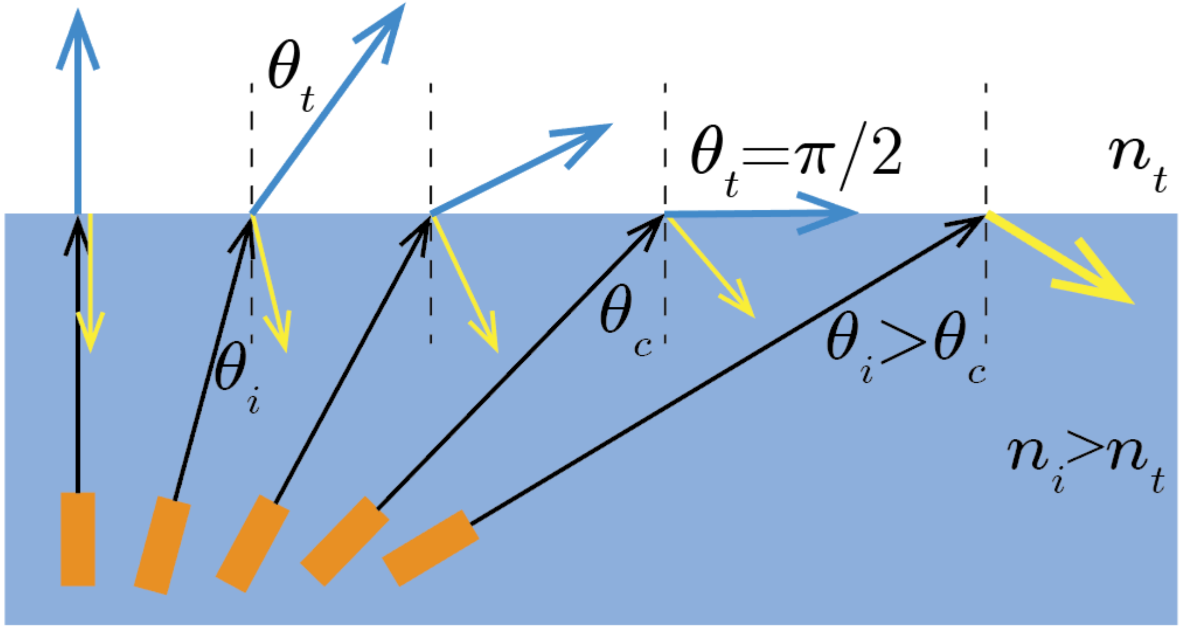
hay "reflexión total interna" y no habrá rayo refractado

Reflexión total interna

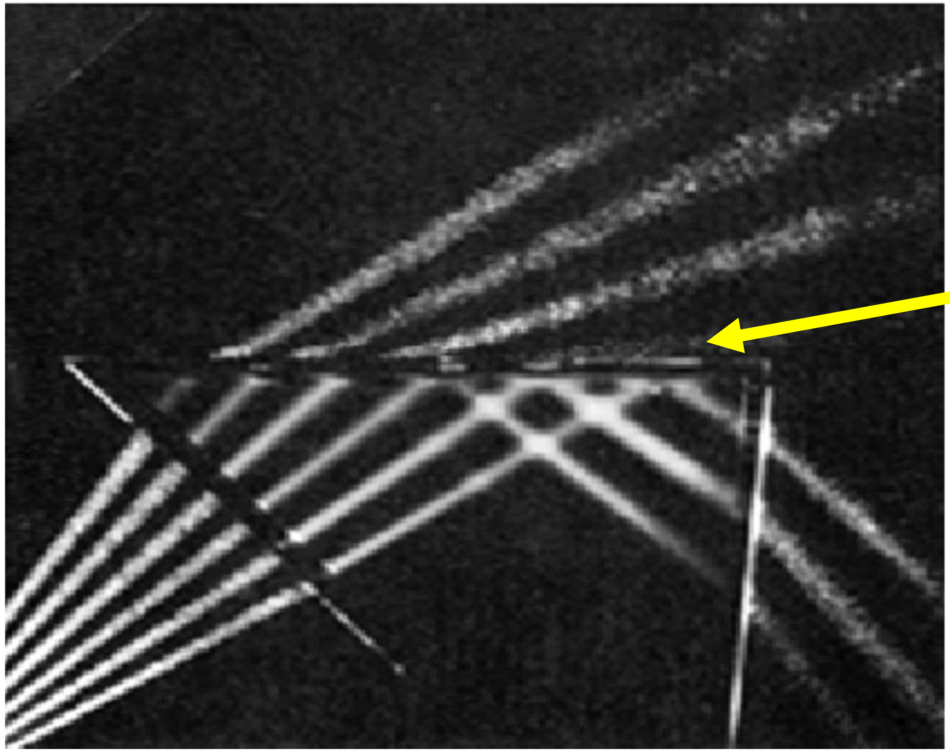
Si $n_i > n_t$ existe $\theta_i = \theta_c$ tal que $\theta_t = \pi/2$ (el rayo transmitido es rasante a la superficie). Por Snell: $n_i \operatorname{sen}(\theta_c) = n_t \operatorname{sen}(\pi/2) = n_t$;

$$\Longrightarrow \boxed{\theta_c = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{n_t}{n_i}\right)}$$

Para incidencias con $\theta_i > \theta_c$ $\operatorname{sen}(\theta_t) > 1$: no hay rayo refractado y **todo el rayo es reflejado** (espejo).



Reflexión total interna ocurre cuando $\sin(\theta_t) > 1$, y no hay haz transmitido

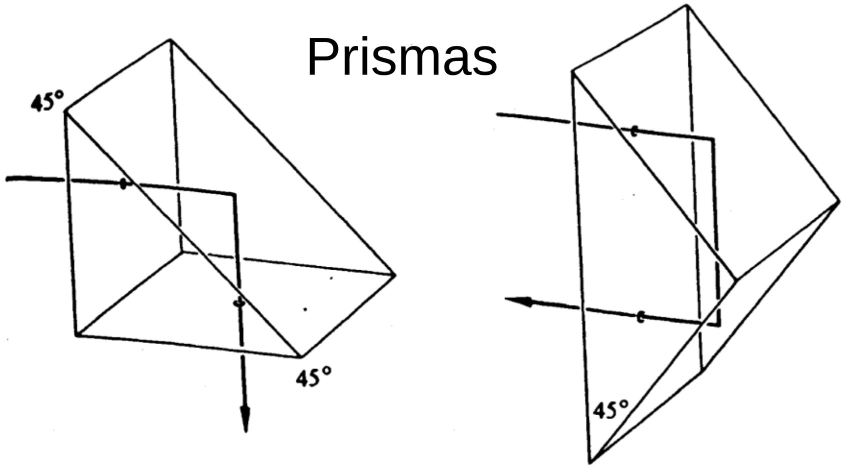


Reflexión total interna

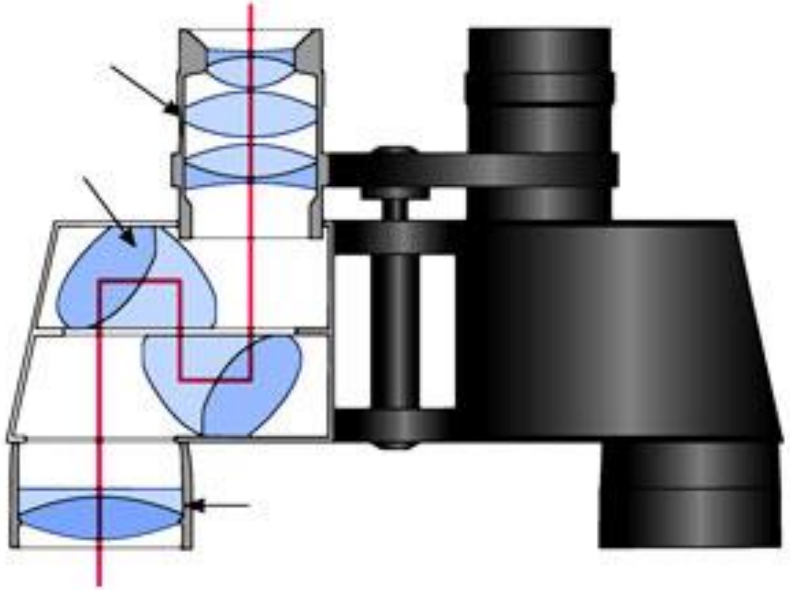
Reflexión interna total es 100% eficiente, es decir, toda la luz se refleja.

Aplicaciones de la reflexión total interna

Prismas

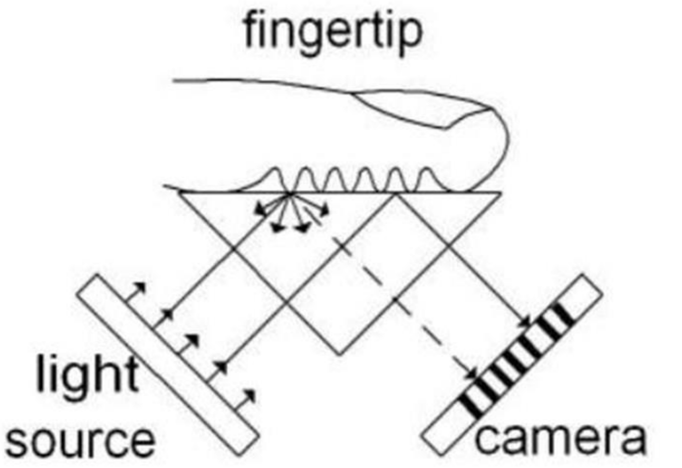


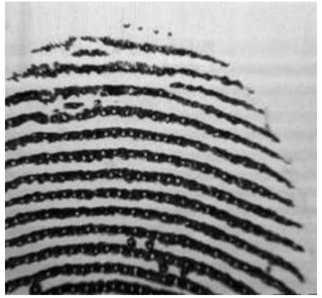
Prismas empleados en binoculares



Reflexión total interna frustada

Se frustra la reflexión de los rayos donde el dedo está en contacto con la superficie de vidrio y eso se ve como zona oscura:

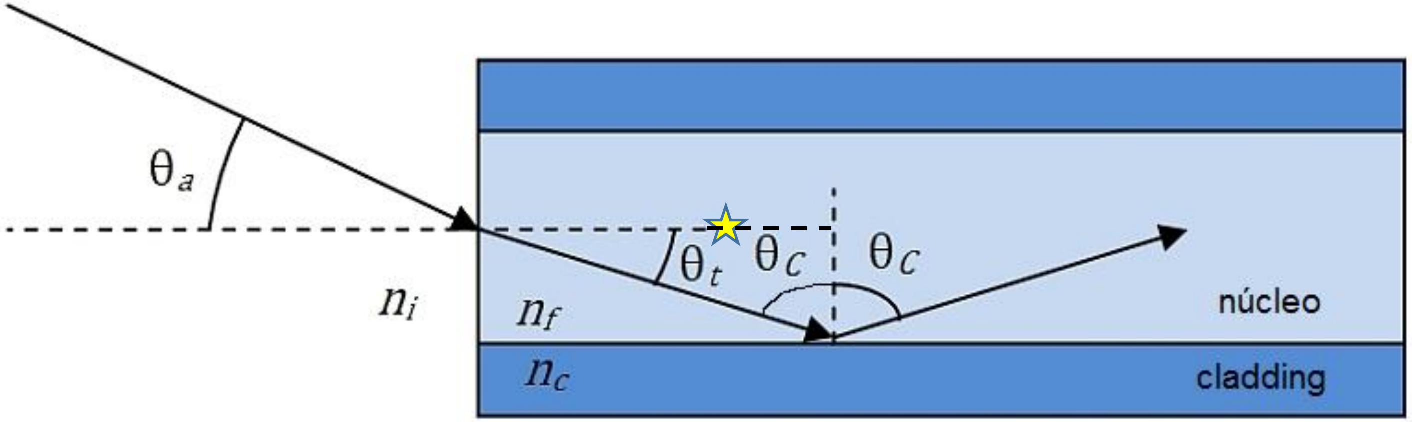




El ángulo de incidencia excede al ángulo crítico θ_c

Fibras ópticas: ángulo de aceptación

El *ángulo de aceptación* (μ_a) de la fibra es el máximo ángulo medido desde el eje de la fibra para el cual los rayos entrantes a la misma se propagan por reflexión total interna (la luz no se dispersa del núcleo). La condición es que la reflexión sea el ángulo crítico θ_c para la interfaz núcleo/cladding es $\operatorname{sen}(\theta_c) = n_c/n_f$



☆ En el triángulo $\theta_c + \theta_t = 90° \implies \theta_t = 90° - \theta_c$

$$\implies \operatorname{sen}(\theta_t) = \operatorname{sen}(90° - \theta_c) = \cos(\theta_c) = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\theta_c)} = \sqrt{1 - (n_c/n_f)^2}$$

Por Ley de Snell, en la interfaz exterior/núcleo: $n_i \operatorname{sen}(\theta_a) = n_f \operatorname{sen}(\theta_t)$

$$\implies \boxed{\operatorname{sen}(\theta_a) = \frac{1}{n_i}\sqrt{{n_f}^2 - {n_c}^2}}$$

Seno del ángulo de aceptación

Fibras ópticas: apertura numérica

La apertura numérica (*AN*) es una medida del poder colector de luz de la fibra:

$$\operatorname{sen}(\theta_a) = \frac{1}{n_i}\sqrt{{n_f}^2 - {n_c}^2} \equiv \frac{1}{n_i} AN$$

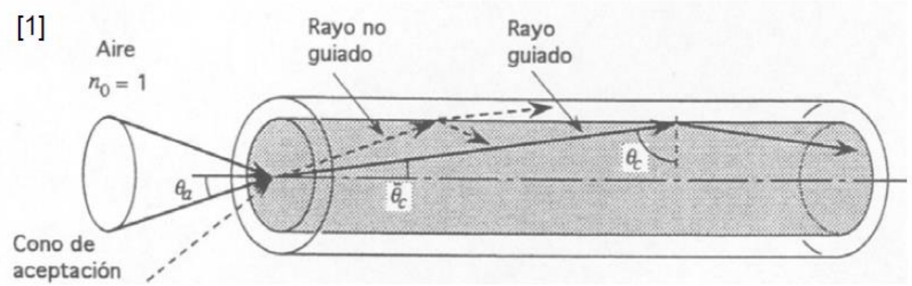
$$\boxed{AN = n_i \operatorname{sen}(\theta_a) = \sqrt{{n_f}^2 - {n_c}^2}}$$

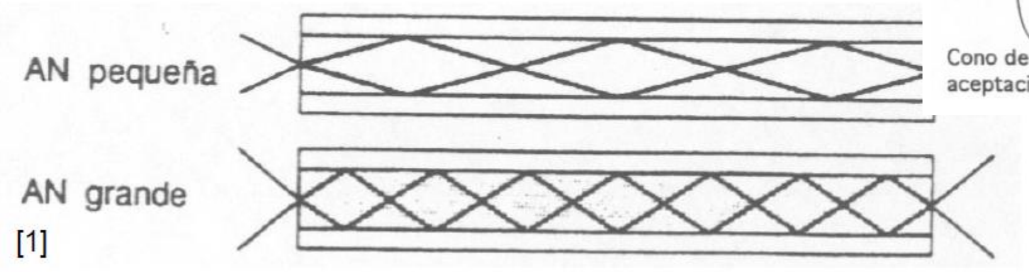
→ θ_a es una medida del poder colector: todos los rayos que incidan con $\theta_1 \leq \theta_a$ experimentan R.T.

→ se definen

θ_a = ángulo (cono) de aceptación

AN = apertura numérica



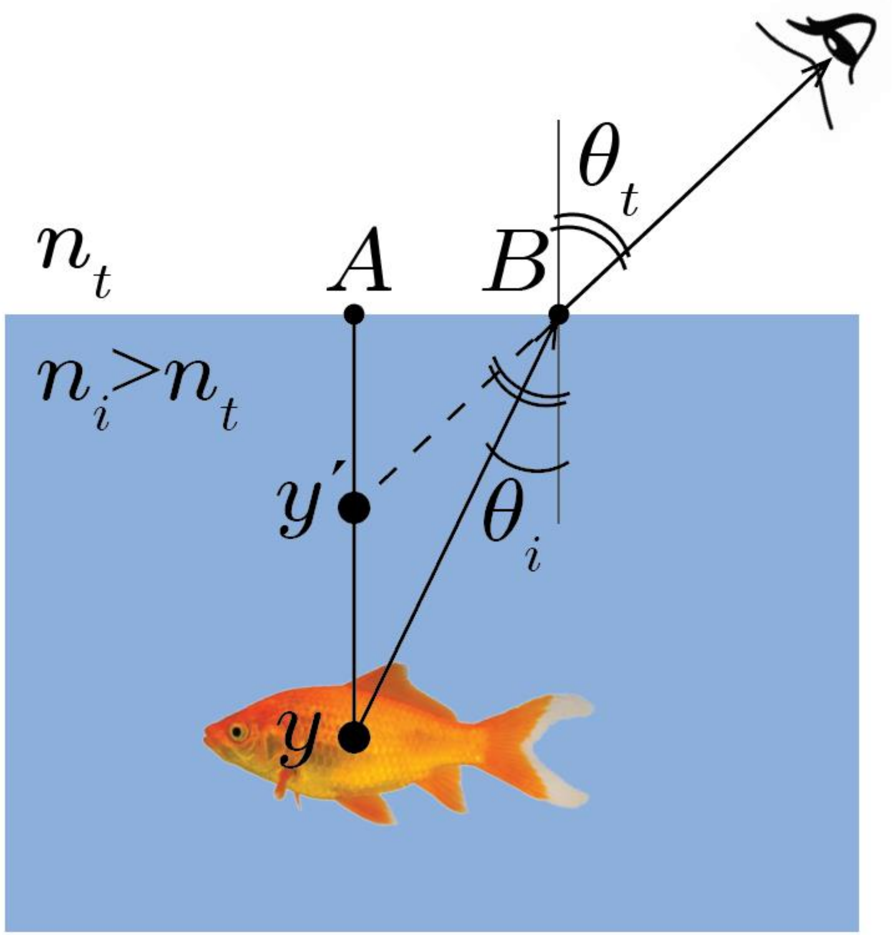


Profundidad aparente (cuasinormal)

y es la profundidad verdadera del objeto (fuente).

$y' < y$ es la *profundidad aparente.*

$$n_i \operatorname{sen}(\theta_i) = n_t \operatorname{sen}(\theta_t)$$



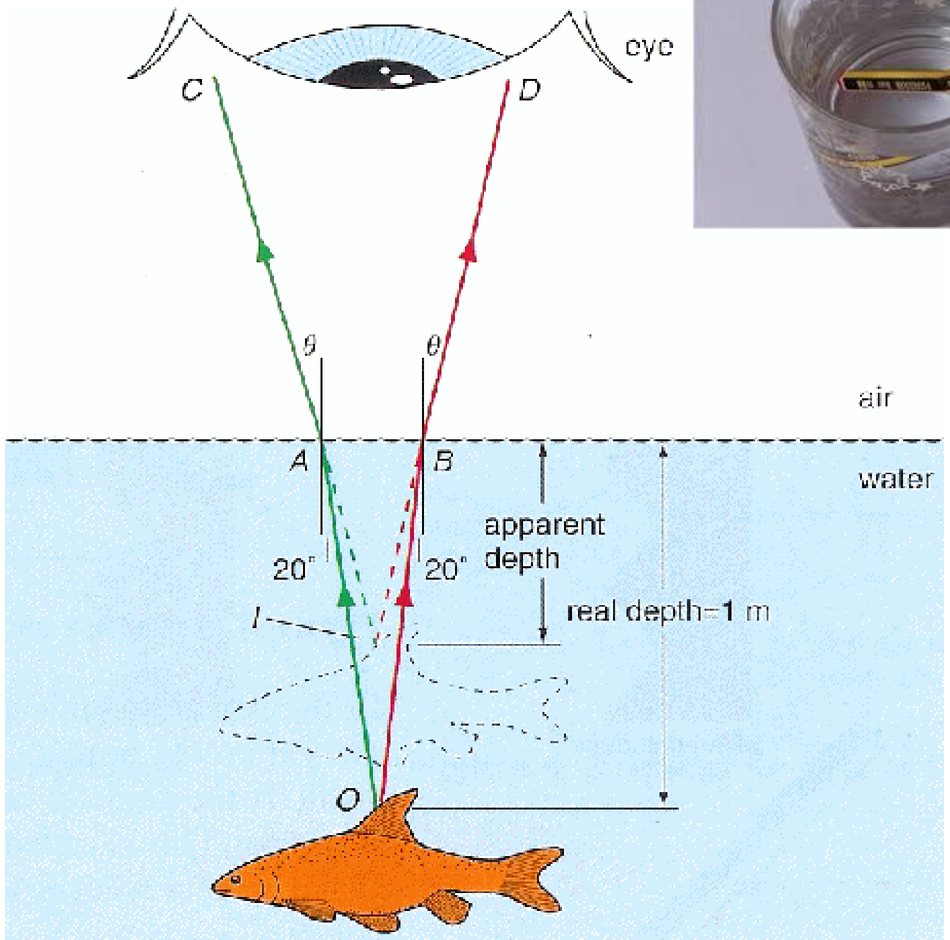
$$\begin{cases} \operatorname{sen}(\theta_i) = \dfrac{\overline{AB}}{\sqrt{\overline{AB}^2 + y^2}} \\ \operatorname{sen}(\theta_t) = \dfrac{\overline{AB}}{\sqrt{\overline{AB}^2 + y'^2}} \end{cases}$$

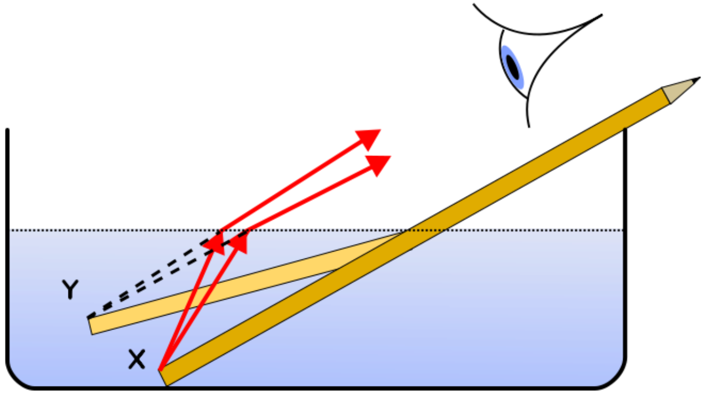
$$\Rightarrow n_i \frac{\cancel{\overline{AB}}}{\sqrt{\overline{AB}^2 + y^2}} = n_t \frac{\cancel{\overline{AB}}}{\sqrt{\overline{AB}^2 + y'^2}}$$

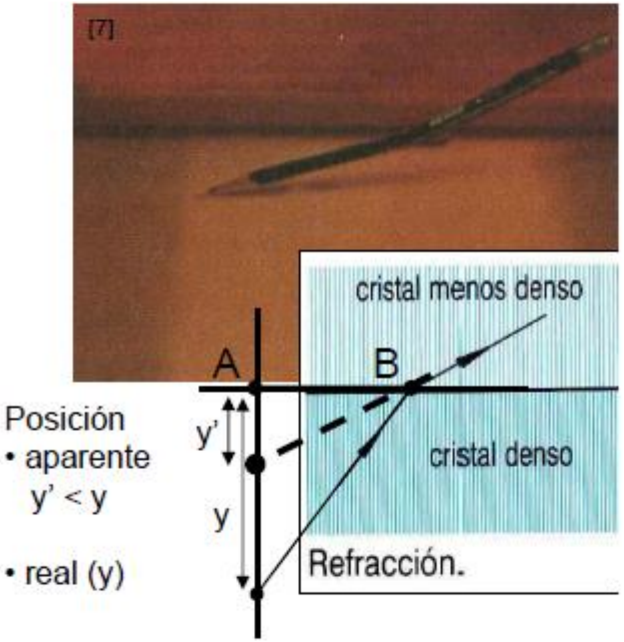
Si $\overline{AB} \simeq 0$ (incidencia cuasinormal)

$$\Rightarrow \frac{n_i}{y} = \frac{n_t}{y'} \qquad \Longrightarrow \boxed{y' = \frac{n_t}{n_i} y}$$

Profundidad aparente







Coeficientes de Fresnel

Óptica geométrica no pueden decir cuánto se refleja y cuanto se transmite en una interfaz. Esto puede ser derivado de las ecuaciones de Maxwell. Estos se describen en términos de los coeficientes de reflexión y de transmisión r y t (R y T), que son, respectivamente, la fracción de la amplitudes (intensidades) incidente a reflejada e incidente a transmitida.

Encontraremos las relaciones de **amplitudes y fase** entre los campos **E** y **B** que representan las ondas incidente **(E_i B_i),** reflejada **(E_r B_r)** y transmitida **(E_t B_t)** entre dos medios dieléctricos homogéneos e isotrópicos de distinto índice de refracción:

n_i: índice refracción medio incidente.

n_t: índice refracción medio transmitido.

Vector de propagación

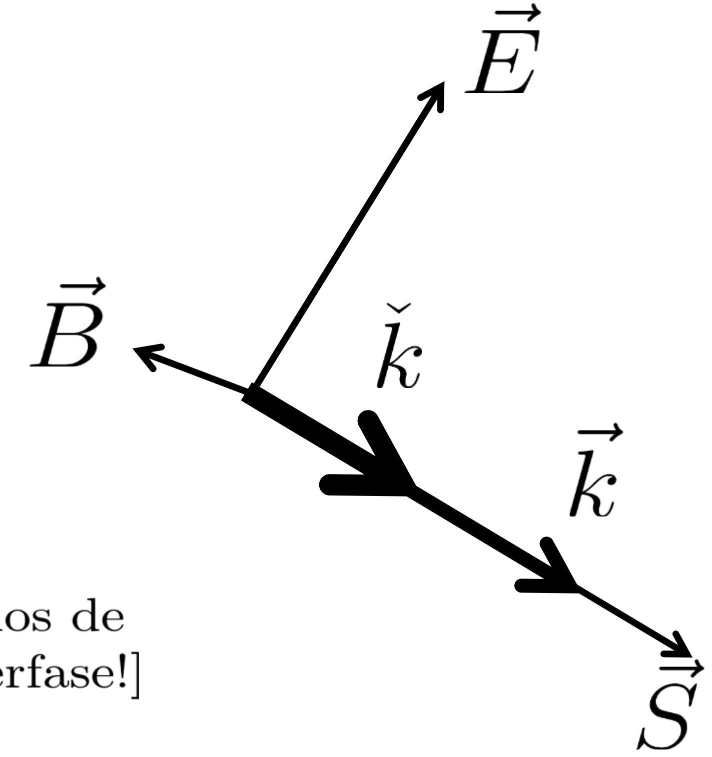
Supongamos que una onda plana monocromática incide sobre la superficie de la interfase entre los dos medios.
Definimos el *vector de propagación* ($\vec{k}$) como un vector paralelo a la dirección de propagación de la onda (Poynting):

$$\vec{k} \,//\, \vec{S} \,//\, \vec{E} \times \vec{B}$$
$$\left\|\vec{k}\right\| = \text{cte} = 2\pi/\lambda$$

$\Rightarrow$Norma para una onda plana: $E\left(\vec{r},t\right) = E_0 \,\text{sen}\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right)$

Por conveniencia también podemos usar el *versor de propagación* $\check{k}$, que apunta en la misma dirección que $\vec{k}$
y tiene la ventaja que $\|\check{k}\| = 1$ (sin unidades).
Así como $\vec{E}$, $\vec{B}$ y $\vec{S}$ formaban una terna oredenada a derecha también será terna ordenada a derecha $\vec{E}$, $\vec{B}$ y $\check{k}$ (o $\vec{k}$);

$$\check{k}\cdot\vec{E} = 0; \qquad \check{k}\times\vec{E} = v\,\vec{B}$$



Condiciones de contorno en una interfase:

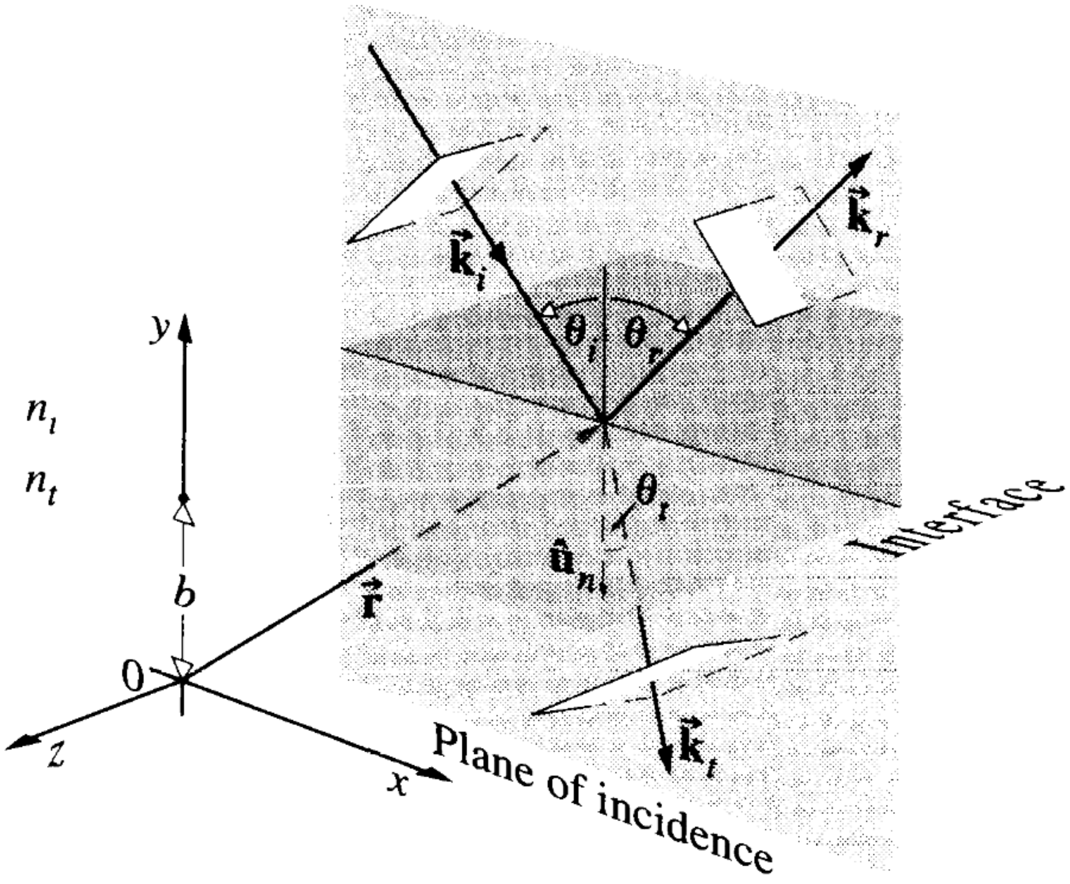
- Las componentes **tangenciales** de $\vec{E}$ se conservan a ambos lados de la interfase [¡Tangenciales a la interfase!]
- Las componentes **normales** de de $\vec{B}$ se conservan a ambos lados de la interfase ¡Normales a la interfase!]

Plano de incidencia

Los rayos incidente (paralelo a $\vec{k}_i$), reflejado (paralelo a $\vec{k}_r$) y transmitido (paralelo a $\vec{k}_t$) están en un mismo plano: el *plano de incidencia*.

Dicho de otra manera:
El plano de incidencia es el plano sobre el que están contenidos $\check{k}_i$, $\check{k}_r$ y $\check{k}_t$.

Como $\vec{E}$, $\vec{B}$ y $\check{k}$ forman una terna ordenada a derecha, basta saber cómo está orientado $\vec{E}$ para tener perfectamente orientados a los tres vectores.



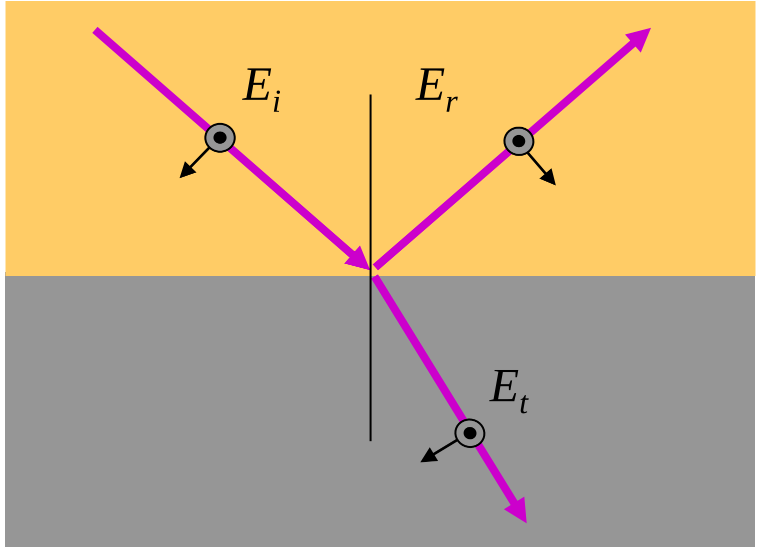
Hay dos posibilidades principales:

1. $\vec{E}$ es perpendicular (normal) al plano de incidencia

2. $\vec{E}$ es paralelo al plano de incidencia

Ecuaciones de Fresnel

Queremos calcular la fracción de una onda de luz reflejada (**r**) y transmitida (**t**) al pasar ésta por una interfase entre dos medios con diferentes índices de refracción.



Si E_{0i}, E_{0r} y E_{0t} son las amplitudes de los campos.

$$\begin{cases} r_\perp = (E_{0r}/E_{0i})_\perp \\ t_\perp = (E_{0t}/E_{0i})_\perp \end{cases}$$

1. $\vec{E}$ es perpendicular (normal) al plano de incidencia

$$\begin{cases} r_\parallel = (E_{0r}/E_{0i})_\parallel \\ t_\parallel = (E_{0t}/E_{0i})_\parallel \end{cases}$$

2. $\vec{E}$ es paralelo al plano de incidencia

- **Consideramos las condiciones límite en la interfase de los campos eléctricos y magnéticos de las ondas de luz.**
- **Dependen del ángulo de incidencia de una manera complicada.**