Ejercicio 5 – TP Regresión lineal

En un experimento para investigar la relación entre el diámetro de un clavo (x) y su fuerza retirada final (y), se colocaron clavos de forma anular enhebrados en madera de abeto de Douglas, y después se midieron sus fuerzas de retirada en N/mm. Se obtuvieron los resultados siguientes para 10 diámetros diferentes (en mm):

X	2.52	2.87	3.05	3.43	3.68	3.76	3.76	4.50	4.50	5.26
Y	54.74	59.01	72.92	50.85	54.99	60.56	69.08	77.03	69.97	90.70

a) Calcule la recta de mínimos cuadrados para predecir la fuerza a partir del diámetro.

b) Determine el intervalo de confianza de nivel 0.95 para la media de la fuerza de retirada de clavos de 4 mm de diámetro.

c) Determine el intervalo de predicción de nivel 0.95 para la fuerza de retirada de clavos de 4 mm de diámetro.

d) ¿Puede concluir que la media de la fuerza de retirada de clavos de 4 mm de diámetro es 60 N/mm con un nivel de significancia de 0.05?

Resolución

Inciso a: Calcule la recta de mínimos cuadrados para predecir la fuerza a partir del diámetro.

Para calcular la recta de mínimos cuadrados de la fuerza en función del diámetro, cargamos los datos en la calculadora, obteniendo:

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}{n} = 145{,}6399 - \frac{1393{,}5289}{10} = 6{,}28701$$

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} y_i)^2}{n} = 44901{,}0685 - \frac{435402{,}0225}{10} = 1360{,}86625$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{i=1}^{n} y_i)}{n} = 2532{,}5166 - \frac{37{,}33 \cdot 659{,}85}{10} = 69{,}29655$$

$$\widehat{\beta_1} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{69{,}29655}{6{,}28701} = 11{,}02218 \cong 11.02$$

$$\widehat{\beta_0} = \bar{y} - \widehat{\beta_1}\bar{x} = 65{,}985 - 11{,}02218 \cdot 3{,}733 = 24{,}83920 \cong 24.84$$

La recta de regresión estimada:

$$\hat{y} = \widehat{\beta_0} + \widehat{\beta_1}x$$

$$\boxed{\hat{y} = 24.84 + 11.02x}$$

Inciso b: Determine el intervalo de confianza de nivel 0.95 para la media de la fuerza de retirada de clavos de 4 mm de diámetro.

En este caso se desea estimar la media $E(Y/x_0 = 4mm)$ mediante un intervalo de confianza.

El estadístico que contiene al parámetro de interés y del cual conocemos la distribución es:

$$\frac{\widehat{\beta_0}+\widehat{\beta_1}x_0-(\beta_0+\beta_1 x)}{\sqrt{\widehat{\sigma^2}\left[\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\bar{x})^2}{S_{xx}}\right]}} \sim t_{n-2}$$

Con lo cual, el intervalo de confianza que utilizaremos es:

$$\left[\widehat{\beta_0}+\widehat{\beta_1}x_0-t_{n-2}\sqrt{\widehat{\sigma^2}\left[\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\bar{x})^2}{S_{xx}}\right]};\widehat{\beta_0}+\widehat{\beta_1}x_0+t_{n-2}\sqrt{\widehat{\sigma^2}\left[\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\bar{x})^2}{S_{xx}}\right]}\right]$$

Para aplicar este intervalo, además de los valores ya calculados, necesitamos $\widehat{\sigma^2}$.

$$\widehat{\sigma^2}=\frac{S_{yy}-\frac{S_{xy}^2}{S_{xx}}}{n-2}=\frac{1360{,}86625-\frac{(69{,}29655)^2}{6{,}28701}}{10-2}\cong 74.63$$

$$t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}=t_{8,0.025}=2.306$$

$$\left[68.92-2.306\sqrt{74.63\left[\frac{1}{10}+\frac{(4-3.733)^2}{6.28701}\right]};68.92+2.306\sqrt{74.63\left[\frac{1}{10}+\frac{(4-3.733)^2}{6.28701}\right]}\right]=$$

$$IC_{0.95}E(Y/x_0=4mm)=[62.27;75.57]$$

Inciso c: Determine el intervalo de predicción de nivel 0.95 para la fuerza de retirada de clavos de 4 mm de diámetro.

Para hallar un intervalo de predicción para Y_0 para $x_0=4mm$, consideramos el estadístico:

$$\frac{Y_0+\widehat{Y_0}-0}{\sqrt{\widehat{\sigma^2}\left[1+\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\bar{x})^2}{S_{xx}}\right]}} \sim t_{n-2}$$

El cual contiene al parámetro de interés y del cual conocemos su distribución.

Con lo cual, el intervalo de confianza que utilizaremos es:

$$\left[\widehat{Y_0}-t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\widehat{\sigma^2}\left[1+\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\bar{x})^2}{S_{xx}}\right]};\widehat{Y_0}+t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\widehat{\sigma^2}\left[1+\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\bar{x})^2}{S_{xx}}\right]}\right]$$

$$\left[68.92-2.306\sqrt{74.63\left[1+\frac{1}{10}+\frac{(4-3.733)^2}{6.28701}\right]};68.92+2.306\sqrt{74.63\left[1+\frac{1}{10}+\frac{(4-3.733)^2}{6.28701}\right]}\right]$$

$$IP_{0.95}(Y_0/x_0=4mm)=[47.92;89.92]$$

Inciso d: ¿Puede concluir que la media de la fuerza de retirada de clavos de 4 mm de diámetro es 60 N/mm con un nivel de significancia de 0.05?

En este caso, dado que tenemos un IC para la media de la fuerza de retirada de clavos de 4mm de diámetro con un nivel de confianza del 95%, lo podemos utilizar para responder la pregunta, analizando si el valor de fuerza de 60N/mm es un valor perteneciente a dicho intervalo.

Como 60 N/mm no es un valor del IC, podemos afirmar que la media de la fuerza de retirada de clavos de 4mm NO es 60 N/mm.