Práctica

Estimación puntual

Método de máxima verosimilitud - Método de momentos

1) Suponga que se tiene una muestra aleatoria de tamaño 2n tomada de una población X , que $E(X)=\mu$ y $V(X)=\sigma^2$. Sean

$$\overline{X}_1 = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} X_i \qquad \text{y} \qquad \overline{X}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Dos estimadores de μ . ¿Cuál es el mejor estimador de μ ?. Explique su elección.

2) Sea $X_1, X_2, ..., X_7$ una muestra aleatoria de una población que tiene media μ y varianza σ^2 . Considere los siguientes estimadores de μ :

$$\hat{\Theta}_1 = \frac{X_1 + X_2 + ...+ X_7}{7} \qquad \text{y} \qquad \hat{\Theta}_2 = \frac{3X_1 - X_6 + X_4}{2}$$

a) ¿Alguno de estos estimadores es insesgado?
b) Hallar el ECM de $\hat{\Theta}_1$ y $\hat{\Theta}_2$.
c) ¿Cuál estimador es el "mejor"?. ¿En qué sentido es mejor?

3) Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una muestra aleatoria de tamaño *n.*

a) Demuestre que $\overline{X}^2$ es un estimador sesgado de μ^2 .
b) Determine la magnitud del sesgo de este estimador.
c) ¿Qué sucede con el sesgo a medida que aumenta el tamaño *n* de la muestra?.

4) Considere una muestra aleatoria de una distribución continua con densidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(1+\theta\, x)}{6} & \text{si } -3 < x < 3 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$ donde el parámetro θ es tal que $-1/3 < \theta < 1/3$

a) ¿Es $\hat{\theta} = \dfrac{1}{3}\overline{X}$ un estimador insesgado de θ ?. Explique.

b) Hallar $ECM(\hat{\theta})$. ¿Es $\hat{\theta} = \dfrac{1}{3}\overline{X}$ un estimador consistente de θ ? Explique.

5) El número diario de desconexiones accidentales de un servidor sigue una distribución de Poisson. En cinco días se observan: 2 , 5 , 3 , 3 , 7 desconexiones accidentales.

a) Obtenga el estimador de máxima verosimilitud de λ . Obtenga la estimación de λ a partir de la muestra dada.

b) Encuentre el estimador de máxima verosimilitud de la probabilidad de que ocurrirán 3 o más desconexiones accidentales y encuentre la estimación de dicha probabilidad a partir de los datos.

6)a) Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una muestra aleatoria de una v.a. $B(1, p)$. Hallar un estimador de máxima verosimilitud (E.M.V.) de *p.*

b) Se selecciona una muestra aleatoria de *n* cascos para ciclistas fabricados por cierta compañía.

Sea X = el número entre los n que tienen defectos y p = P(el casco tiene defecto). Supongamos que solo se observa X (el número de cascos con defectos).

b_1) Si $n = 20$ y $x = 3$, ¿cuál es la estimación de p?

b_2) Si $n = 20$ y $x = 3$, ¿cuál es el E.M.V. de la probabilidad $(1-p)^5$, de que ninguno de los siguientes cinco cascos que se examinen tenga defectos?

7) Denotemos por X la proporción de tiempo asignado que un estudiante seleccionado al azar emplea trabajando en cierta prueba de actitud, y supongamos que la f.d.p. de X es:

$$f(x) = \begin{cases} (\theta+1)x^{\theta}, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & c.c \end{cases} \qquad \text{donde } \theta > -1$$

Una muestra aleatoria de diez estudiantes produce la siguiente información:
0.92, 0.79, 0.90, 0.65, 0.86, 0.47, 0.73, 0.97, 0.94, 0.77.

a) Utilice el método de los momentos para obtener un estimador de θ y luego calcule la estimación para esta información.

b) Obtenga el E.M.V. de θ y luego calcule la estimación para la información dada.

8) Sea $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una v.a. $N(\mu, \sigma^2)$.

a) Hallar los estimadores de μ y σ por el método de momentos.

b) Hallar los estimadores de μ y σ por el método de máxima verosimilitud.

c) Se determina la resistencia al corte de cada una de diez soldaduras eléctricas por puntos de prueba, dando los siguientes datos (lb/plg^2):
392, 376, 401, 367, 389, 362, 409, 415, 358, 375.
Si se supone que la resistencia al corte esta normalmente distribuida , estime el verdadero promedio de resistencia al corte y desviación estándar de resistencia al corte usando el método de máxima verosimilitud y el método de momentos.

9) En una prueba 294 de 300 aisladores cerámicos soportaron cierto choque térmico.

a) Obtenga el estimador y la estimación de máxima verosimilitud de la probabilidad de que un aislante cerámico sobrevivirá a un choque térmico.

b) Suponga que un dispositivo contiene tres aislantes cerámicos y todos deben sobrevivir al choque, con la finalidad de que el dispositivo funcione. Encuentre el estimador y la estimación de máxima verosimilitud de la probabilidad de que los tres sobrevivirán a un choque térmico.

10) Se determina la duración en horas de cada una de diez lamparitas eléctricas, dando los siguien tes datos:

49.5, 1015, 1009.4, 173.4, 251.6, 315, 1301.4, 732.8, 660.6, 1456.5

a) Si se supone que la duración en horas de cada lamparita tiene distribución exponencial, estimar el parámetro de la distribución usando el método de máxima verosimilitud.

b) Hallar los estimadores de máxima verosimilitud de la esperanza y la varianza de la duración en horas de la lamparita. ¿Qué propiedad utiliza?. ¿Cuál sería la estimación de la esperanza y la varianza para los datos dados?

c) Supongamos que se decide examinar otra lamparita.

Sea X: “duración en horas de la lamparita”.
Utilizar la información dada en **a)** para obtener el EMV de $P(X \le 1400)$, y hallar la estimación de $P(X \le 1400)$.
(Sugerencia: $P(X < 1400) = 1 - e^{-\lambda\, 1400}$).