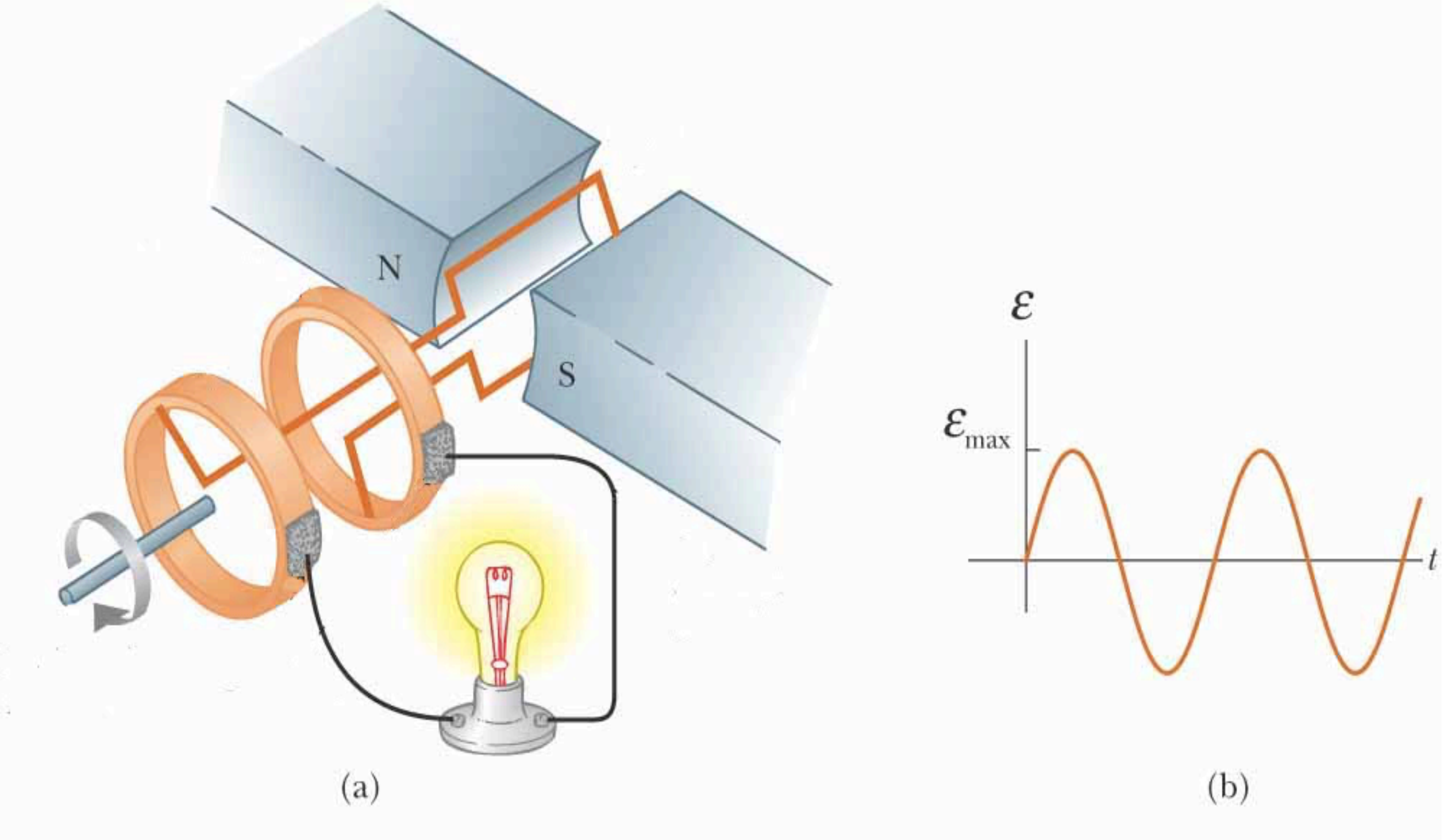
CORRIENTE ALTERNA

Un poco de historia

- A finales del siglo XIX se debatió el uso de corriente continua o alterna para suministrar energía eléctrica a los consumidores en Estados Unidos
- En 1893 se eligió la corriente alterna para iluminar la Exposición Mundial de Chicago
- Ventajas de la corriente alterna:
  - la energía eléctrica puede transportarse grandes distancias a tensiones elevadas y corrientes bajas reduciendo pérdidas por efecto Joule
  - puede transformarse a tensiones bajas

¿Cómo generar corrientes alternas?

La corriente alterna depende del tiempo de forma armónica



Recordando la ley de Faraday-Lenz

Bobina que se mueve con velocidad angular constante en presencia de un campo magnético constante

$$\Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_S B \cos\theta \, dA = B \, A \cos \omega t$$

$$\varepsilon_{ind} = -N \frac{d\Phi_m}{dt} = B \, A \, \omega \, N \sin \omega t$$

$$\varepsilon_{ind} = V_{\max} \sin \omega t$$

Valores máximos, medios y eficaces

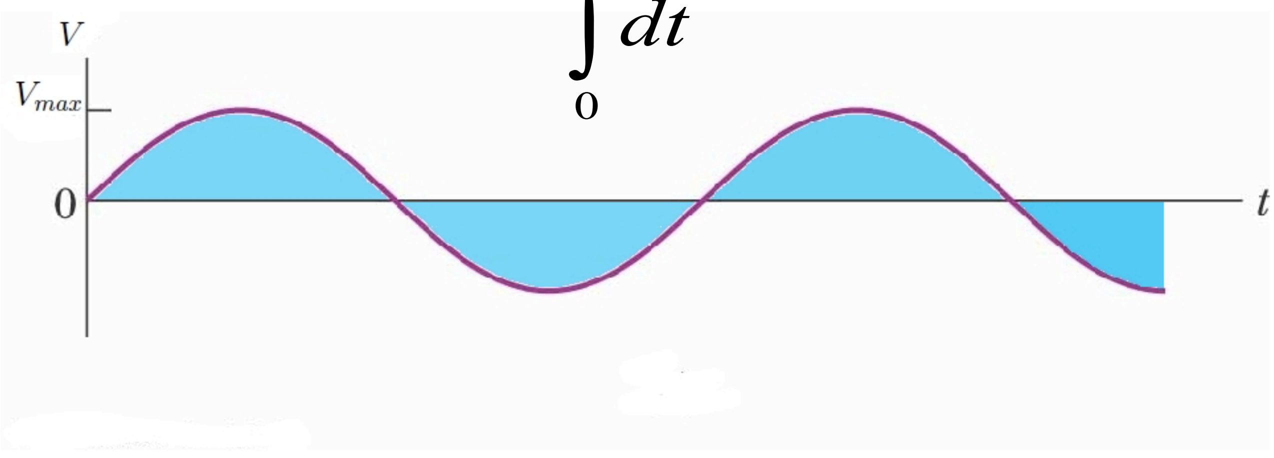
Supongamos una función

$$G(t) = G_{\max} \sin \omega t$$

El valor medio resulta

$$\langle G \rangle = \frac{\int_0^{\tau} G_{\max} \sin \omega t \; dt}{\int_0^{\tau} dt} = 0$$

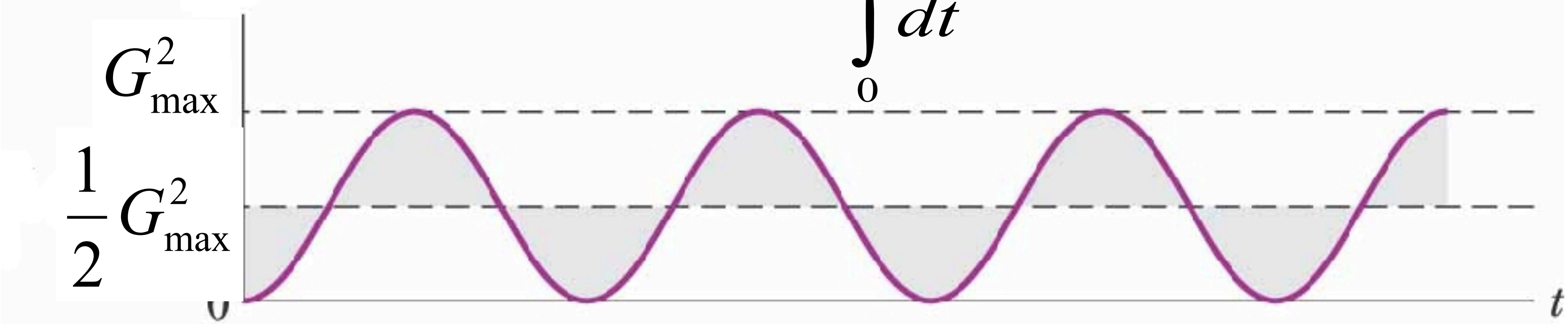
$G_{\max}$



Valores máximos, medios y eficaces

El valor medio cuadrático es

$$\langle G^2 \rangle = \frac{\int_0^\tau G_{\max}^2 \sin^2 \omega t \, dt}{\int_0^\tau dt}$$



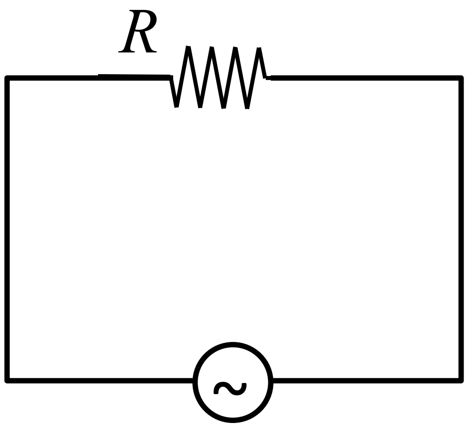
Para calcular la integral se utiliza la identidad

$$\sin^2(\omega t) = \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2}$$

Por lo que se obtiene

$$\langle G^2 \rangle = \frac{1}{2} G_{\max}^2 \quad \Rightarrow \quad G_{ef} = \sqrt{\langle G^2 \rangle} = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$$

Resistencia conectada a un generador de CA



$$V(t) = V_{\max} \sin \omega t$$

Utilizando la ley de las mallas de Kirchhoff

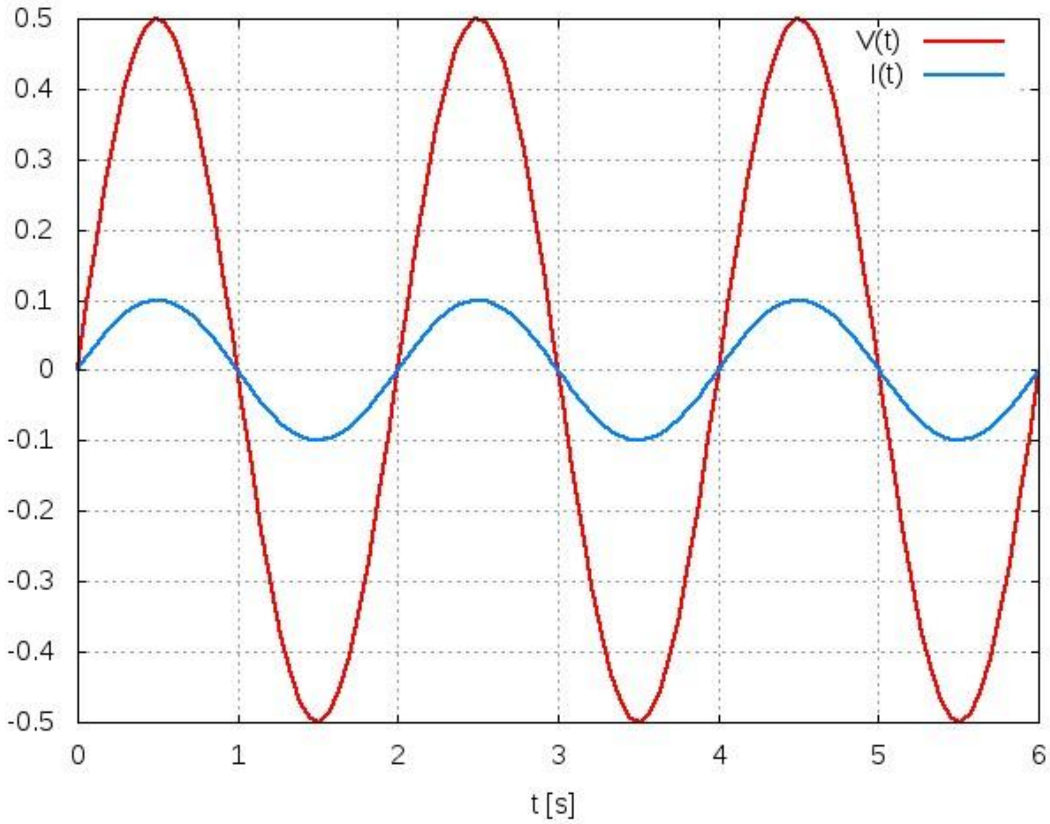
$$V(t) - V_R(t) = 0 \Rightarrow I_R(t) = \frac{V(t)}{R}$$

La corriente resulta

$$I_R(t) = \frac{V_{\max}}{R} \sin(\omega t)$$

En la resistencia, la corriente se encuentra en FASE con la diferencia de potencial

Resistencia conectada a un generador de CA



$$I_R(t) = I_{\max} \sin(\omega t)$$

$$V_R(t) = V_{\max} \sin(\omega t)$$

$$I_{\max} = \frac{V_{\max}}{R}$$

$$I_{ef} = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$$

Potencia disipada en la resistencia

$$I_R(t) = I_{\max} \sin(\omega t)$$

La potencia instantánea es

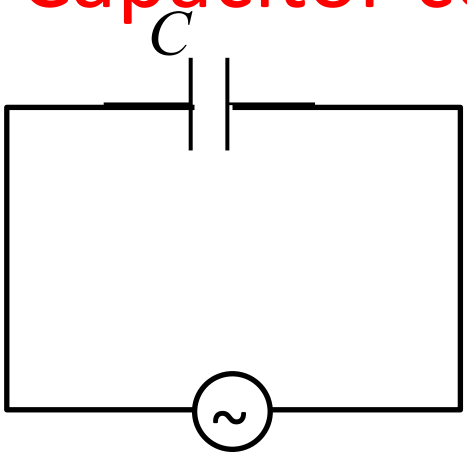
$$P(t) = I_R{}^2(t) R = I_{\max}^2 R \sin^2(\omega t)$$

La potencia media se calcula

$$\langle P(t) \rangle = P_m = \frac{\int_0^\tau I_R^2(t) R\, dt}{\int_0^\tau dt} = \frac{I_{\max}^2 R}{\tau} \int_0^\tau \sin^2(\omega t)\, dt = \frac{I_{\max}^2 R}{2} = I_{ef}^2 R$$

$$\sin^2(\omega t) = \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2}$$

Capacitor conectado a un generador de CA



Utilizando la ley de las mallas de Kirchhoff

$$V(t) - V_C(t) = 0 \Rightarrow Q(t) = CV(t)$$

$$V(t) = V_{\max} \sin \omega t$$

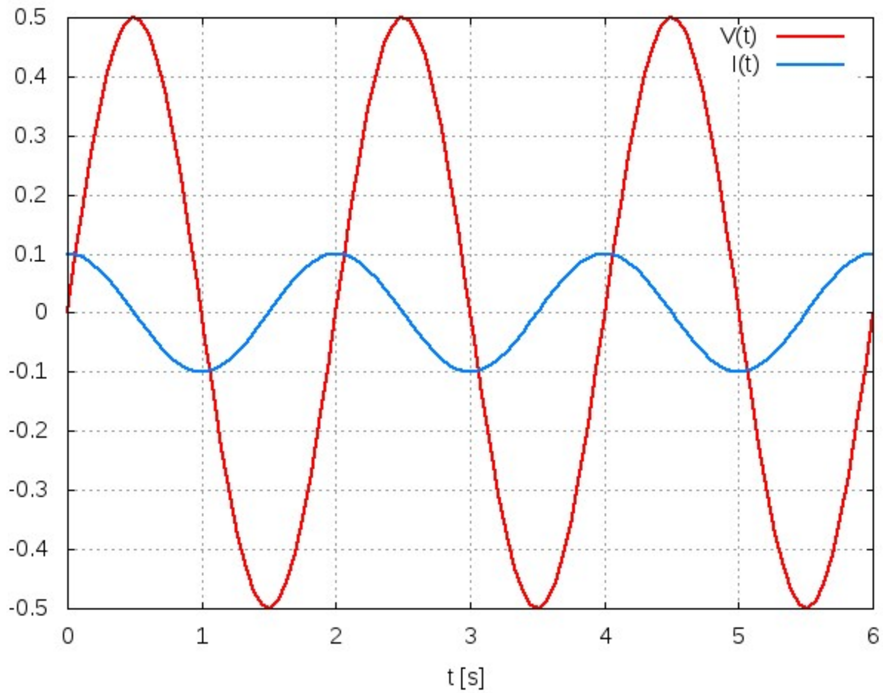
$$\cos \omega t = \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

La corriente resulta

$$I_C(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = CV_{\max} \frac{d \sin \omega t}{dt} = CV_{\max} \omega \cos \omega t = \frac{V_{\max}}{X_C} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

En el capacitor, la corriente ADELANTA a la diferencia de potencial en $\frac{\pi}{2}$

Capacitor conectado a un generador de CA



$$V_C(t) = V_{\max} \sin(\omega t)$$

$$I_C(t) = I_{\max} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Reactancia capacitiva

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

$$I_{\max} = \frac{V_{\max}}{X_C}$$

$$I_{ef} = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$$

Potencia media en el capacitor

$$V_C(t) = V_{\max}\sin(\omega t) \qquad I_C(t) = I_{\max}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

La potencia instantánea es

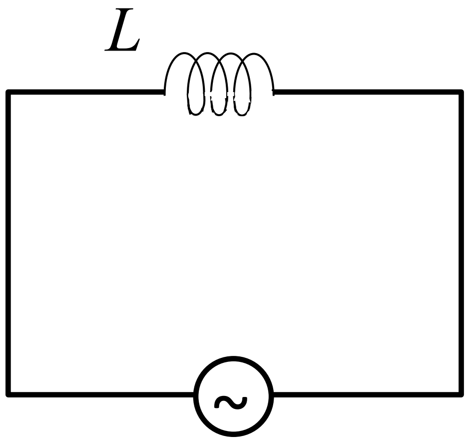
$$P(t) = I_C(t)\ V_C(t) = I_{\max}V_{\max}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\sin(\omega t)$$

$$= I_{\max}V_{\max}\cos(\omega t)\sin(\omega t) = \frac{I_{\max}V_{\max}}{2}\sin(2\omega t)$$

La potencia media se calcula

$$\langle P(t)\rangle = P_m = \frac{\int_0^\tau \frac{I_{\max}V_{\max}}{2}\sin(2\omega t)dt}{\int_0^\tau dt} = 0$$

Bobina conectada a un generador de CA



Utilizando la ley de las mallas de Kirchhoff

$$V(t) - V_L(t) = 0 \Rightarrow \frac{dI_L(t)}{dt} = \frac{V(t)}{L}$$

$$V(t) = V_{\max} \sin \omega t$$

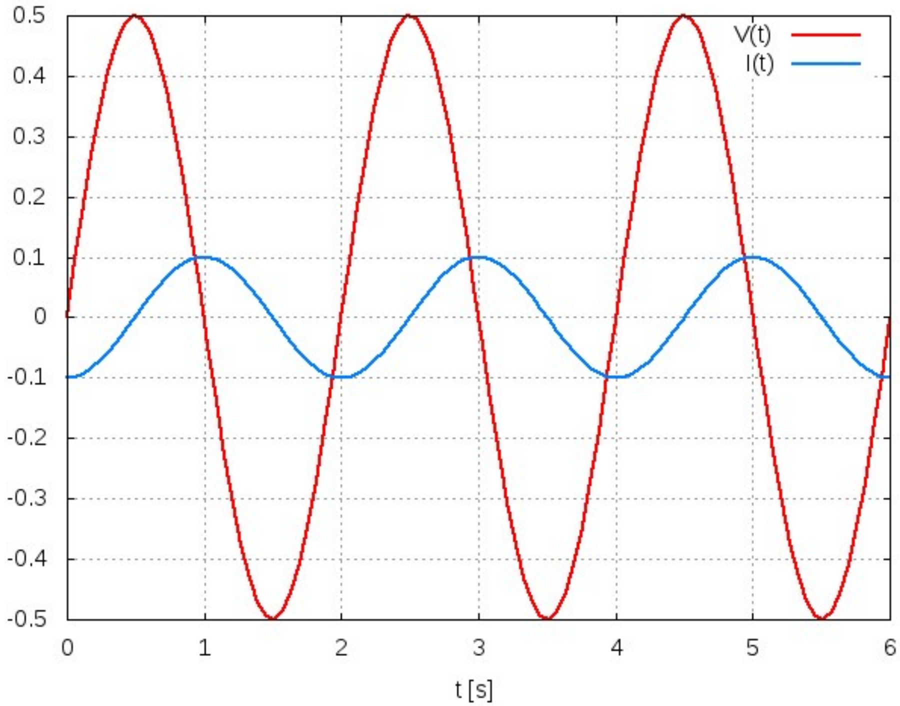
$$-\cos \omega t = \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

La corriente resulta

$$I_L(t) = \int \frac{V_{\max}}{L} \sin \omega t \, dt = -\frac{V_{\max}}{\omega L} \cos \omega t = \frac{V_{\max}}{X_L} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

En la bobina, la corriente ATRASA a la diferencia de potencial en $\frac{\pi}{2}$

Bobina conectada a un generador de CA



$$V_L(t) = V_{\max} \sin(\omega t)$$

$$I_L(t) = I_{\max} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Reactancia inductiva

$$X_L = \omega L$$

$$I_{\max} = \frac{V_{\max}}{X_L}$$

$$I_{ef} = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$$

Potencia media en la bobina

$$V_L(t) = V_{\max}\sin(\omega t) \qquad I_L(t) = I_{\max}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

La potencia instantánea es

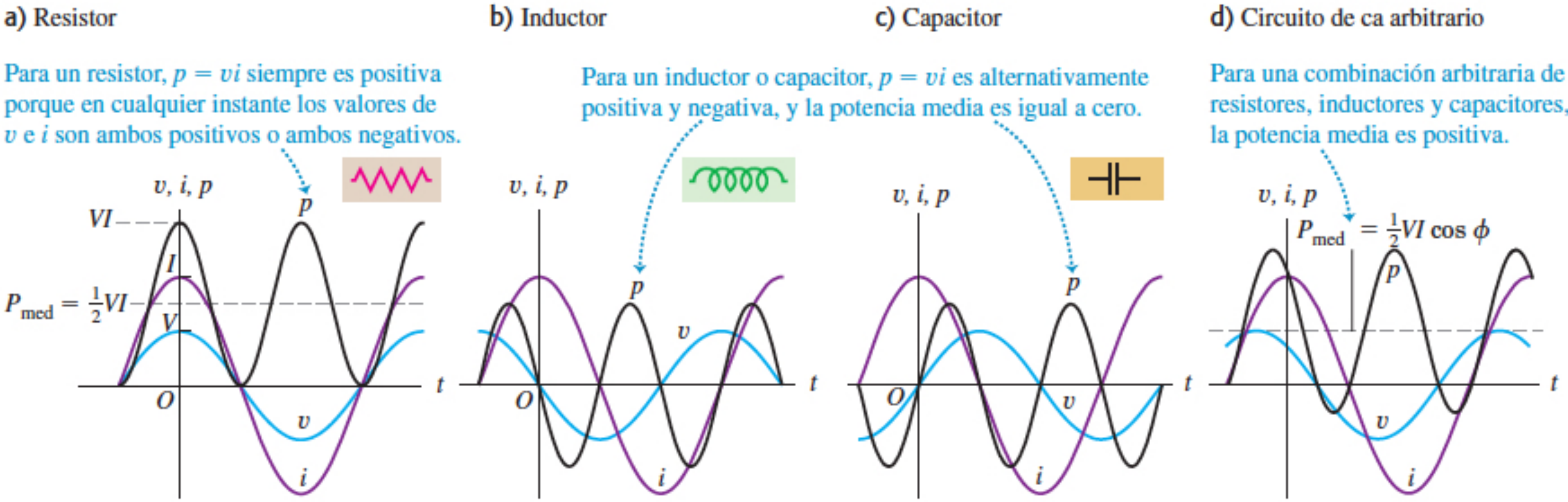
$$P(t) = I_L(t)\ V_L(t) = I_{\max}V_{\max}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)\sin(\omega t)$$

$$= -I_{\max}V_{\max}\cos(\omega t)\sin(\omega t) = -\frac{I_{\max}V_{\max}}{2}\sin(2\omega t)$$

La potencia media se calcula

$$\langle P(t)\rangle = P_m = \frac{\int_0^{\tau} -\frac{I_{\max}V_{\max}}{2}\sin(2\omega t)\,dt}{\int_0^{\tau} dt} = 0$$

31.16 Gráficas de corriente, voltaje y potencia, como funciones del tiempo para **a)** un resistor, **b)** un inductor, **c)** un capacitor y **d)** un circuito de ca arbitrario que puede tener resistencia, inductancia y capacitancia.



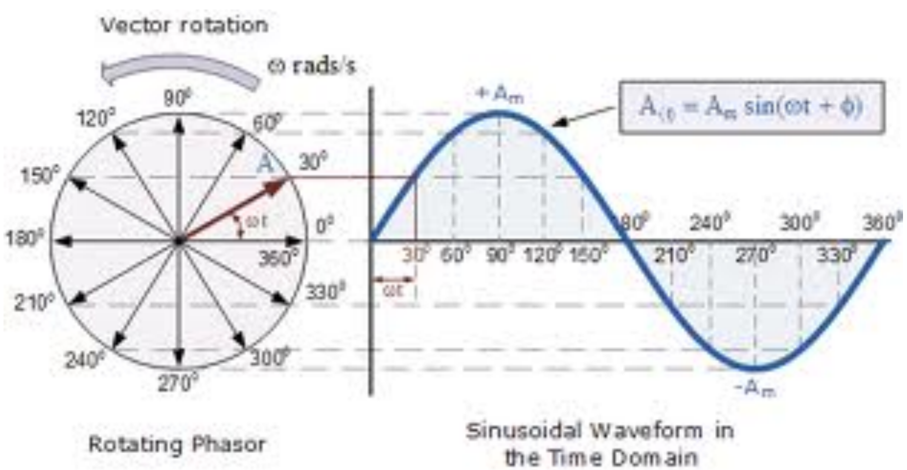
CLAVE: Corriente instantánea, i

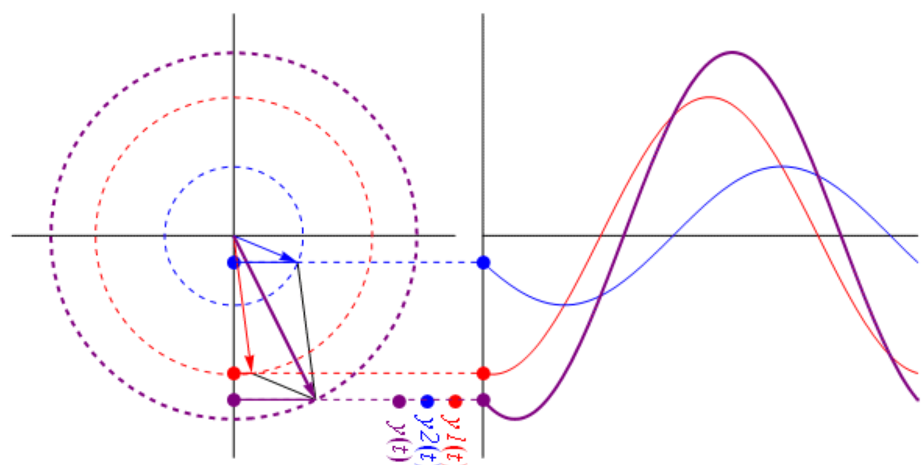
Voltaje instantáneo a través de los extremos del dispositivo, v

Potencia de alimentación instantánea al dispositivo, p

Fasores

- Vectores bidimensionales rotantes
- Cada vector tiene como módulo el valor máximo de la cantidad a representar
- Los fasores, a medida que transcurre el tiempo rotan en sentido antihorario, sin variar las posiciones relativas entre los vectores
- El valor instantáneo de la cantidad representada es igual a la componente y del fasor correspondiente





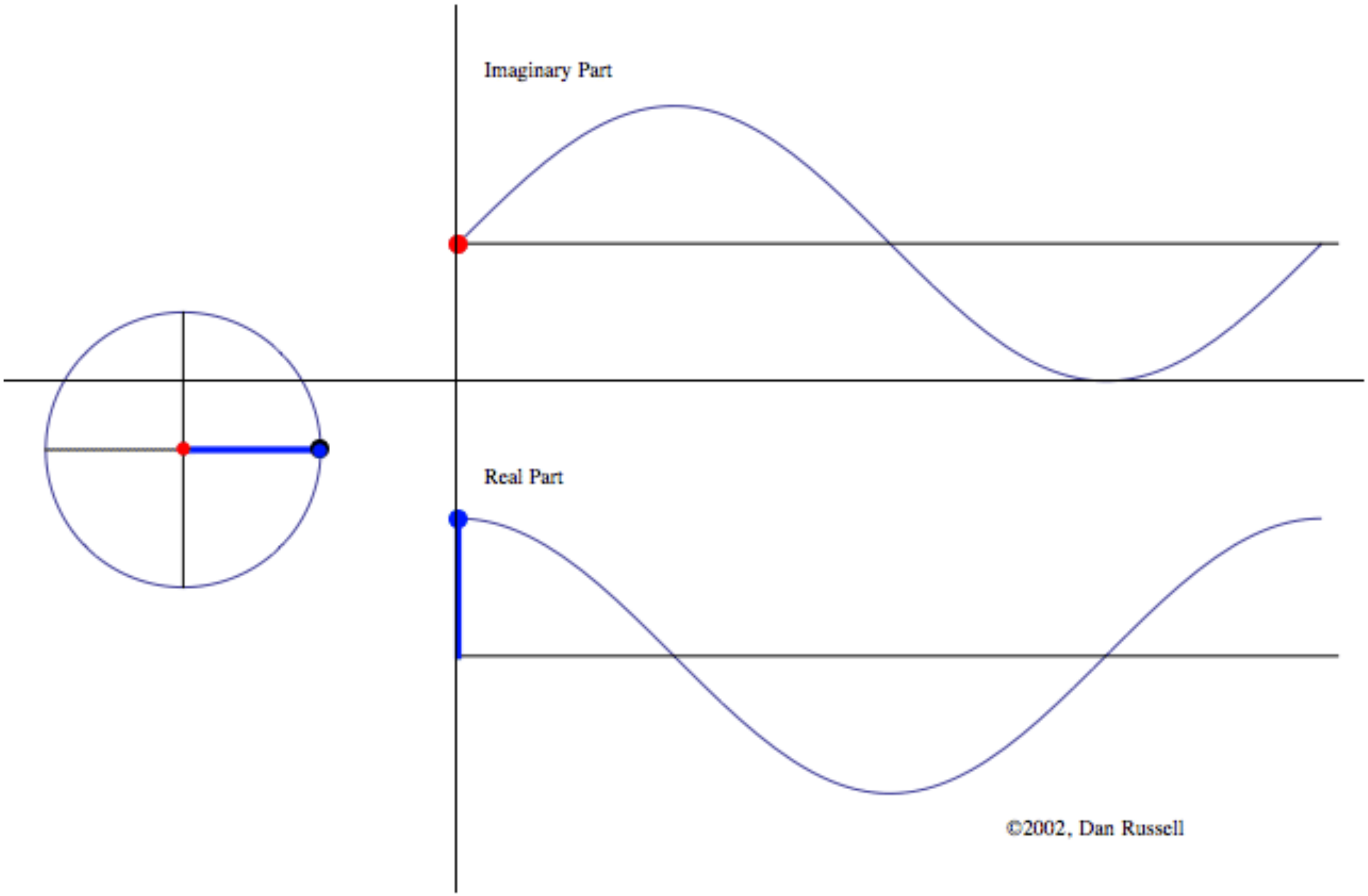
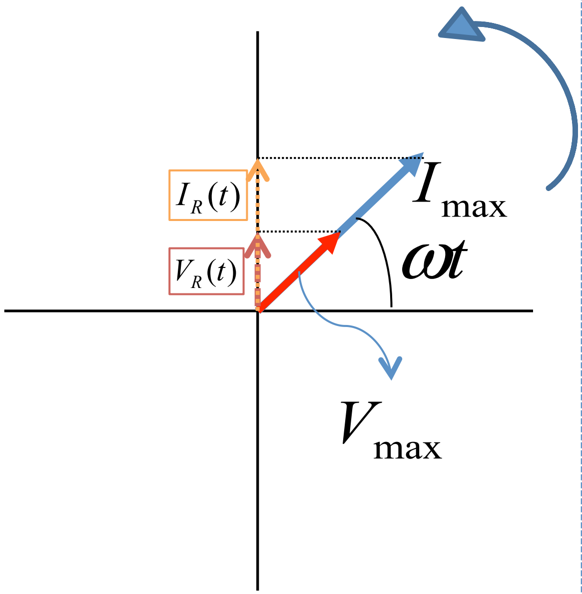

Imaginary Part
Real Part
©2002, Dan Russell

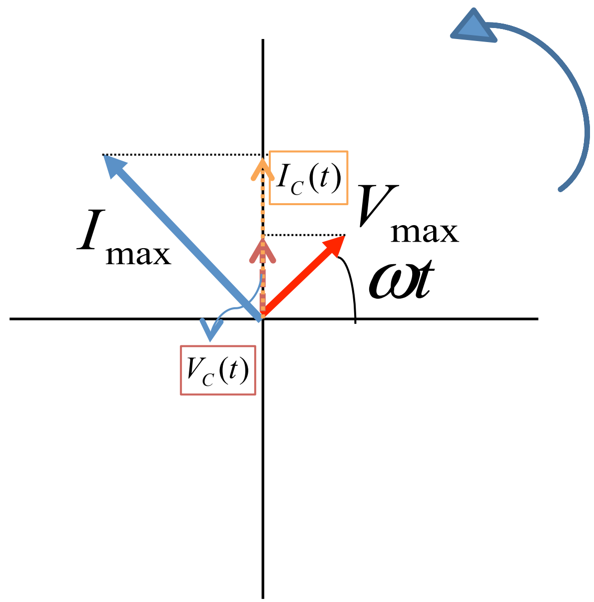
Diagrama de fasores para resistencia, capacitor y bobina

Resistencia



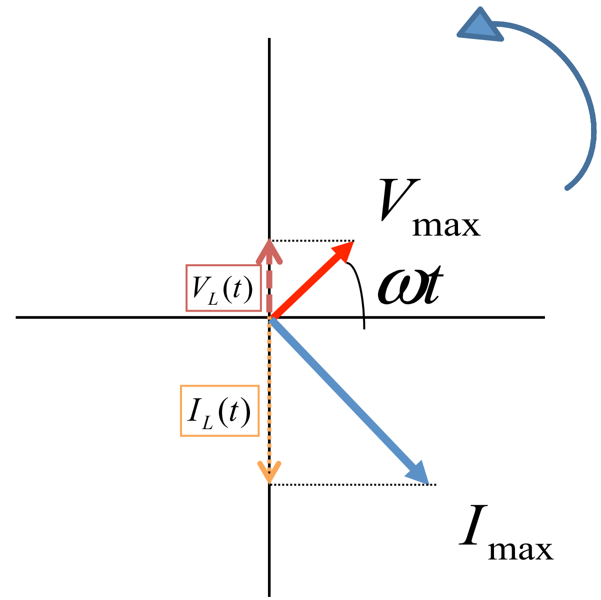
corriente en FASE con la diferencia de potencial

Capacitor



corriente ADELANTA a la diferencia de potencial en $\dfrac{\pi}{2}$

Inductancia

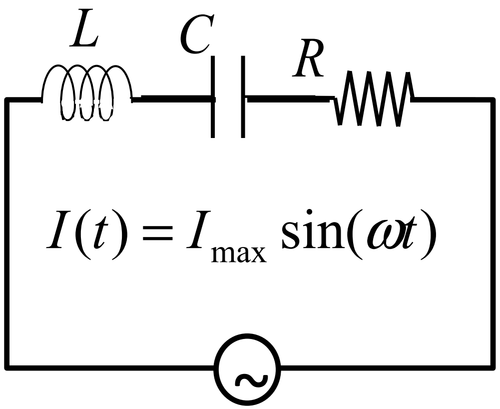


corriente ATRASA a la diferencia de potencial en $\dfrac{\pi}{2}$

Resumen

- Se puede generar corriente alterna al rotar una espira en un campo magnético
- Los valores medios de la diferencia de potencial y la corriente son nulos
- Los valores medios cuadráticos de la diferencia de potencial y de la corriente no son nulos
- Los valores eficaces son los valores que miden la mayoría de los amperímetros y voltímetros
- Analizamos diferentes elementos en un circuito de CA:
  - Resistencia: la corriente está en fase con la diferencia de potencial
  - Capacitor: la corriente se adelanta a la diferencia de potencial, definición de reactancia capacitiva
  - Bobina: la corriente se retrasa a la diferencia de potencial, definición de la reactancia inductiva

Circuito RLC en serie

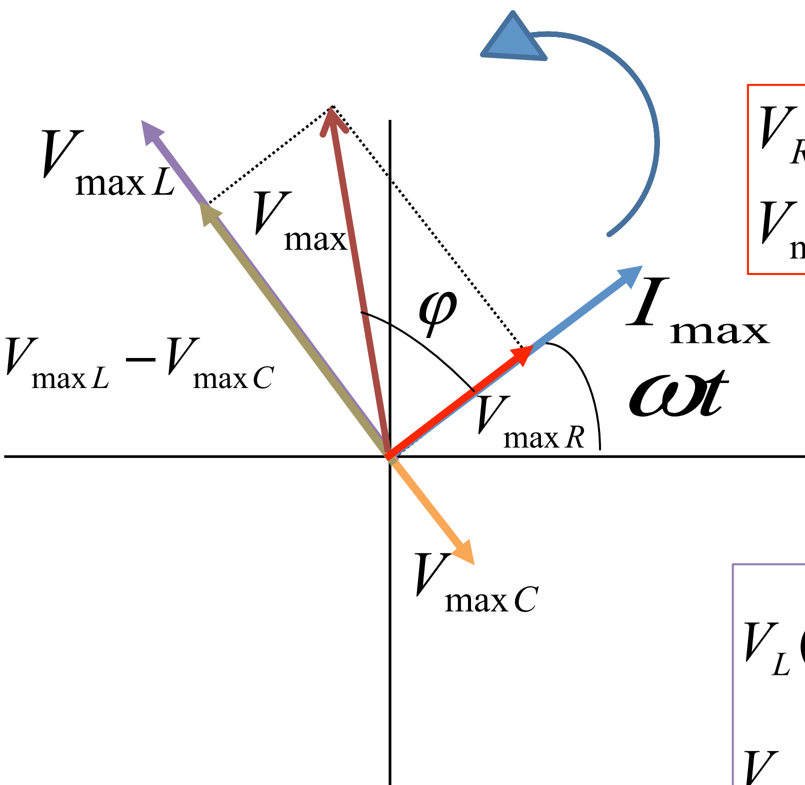


$$V(t) = V_{\max}\sin(\omega t + \varphi)$$

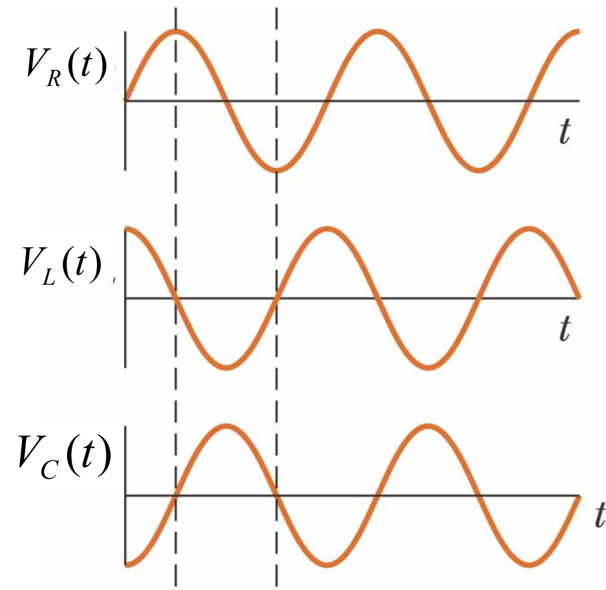
La corriente que circula en cada elemento es la misma

$$I(t) = I_{\max}\sin(\omega t) = I_R(t) = I_C(t) = I_L(t)$$

Las diferencias de potencial en cada elemento tienen diferentes fases

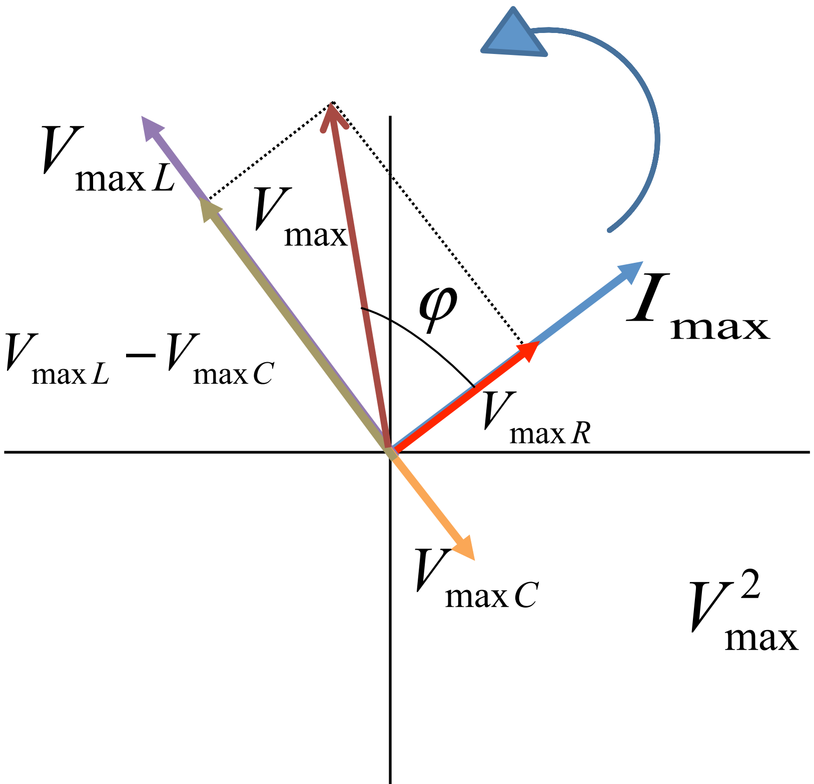


$$V_R(t) = V_{\max R}\sin(\omega t)$$
$$V_{\max R} = I_{\max} R$$



$$V_L(t) = V_{\max L}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$V_{\max L} = I_{\max} X_L$$

$$V_C(t) = V_{\max C}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$
$$V_{\max C} = I_{\max} X_C$$



$$V_{\max}^2 = V_{\max R}^2 + \left(V_{\max L} - V_{\max C}\right)^2$$

Impedancia

$$V_{\max}^2 = I_{\max}^2\left(R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2\right) = I_{\max}^2 Z^2$$

$$\boxed{Z = \sqrt{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2}}$$

$$\boxed{V_{\max} = I_{\max} Z}$$

Diferencia de fase entre la corriente y la diferencia de potencial

$$\boxed{\tan\varphi = \frac{V_{\max L} - V_{\max C}}{V_{0R}} = \frac{X_L - X_C}{R}}$$

Notar que:

- La impedancia depende de la frecuencia
- Si $\varphi > 0$ el circuito se comporta como inductivo
- Si $\varphi < 0$ el circuito se comporta como capacitivo
- Si $\varphi = 0$ el circuito se comporta como resistivo

¿Cuál es el valor mínimo de la impedancia?

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2} \Rightarrow X_L = X_C \Rightarrow \omega L = \frac{1}{\omega C}$$

Frecuencia de resonancia

$$\omega_R = \frac{1}{\sqrt{CL}} \Rightarrow \begin{array}{l} \varphi = 0 \\ Z = R \\ V_{\max} = I_{\max} R \end{array}$$

Potencia

$$V(t) = V_{\max} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$I(t) = I_{\max} \sin(\omega t)$$

Potencia instantánea

$$P(t) = I(t)V(t) = I_{\max} V_{\max} \sin(\omega t + \varphi) \sin(\omega t)$$

$$P(t) = I_{\max} V_{\max} \left(\sin^2(\omega t) \cos(\varphi) + \sin(\varphi) \cos(\omega t) \sin(\omega t) \right)$$

Potencia media

$$\langle P(t) \rangle = P_m = \frac{\int_0^\tau P(t)dt}{\int_0^\tau dt} = \frac{I_{\max} V_{\max}}{\tau} \int_0^\tau \left(\sin^2(\omega t) \cos(\varphi) + \sin(\varphi) \cos(\omega t) \sin(\omega t) \right) dt$$

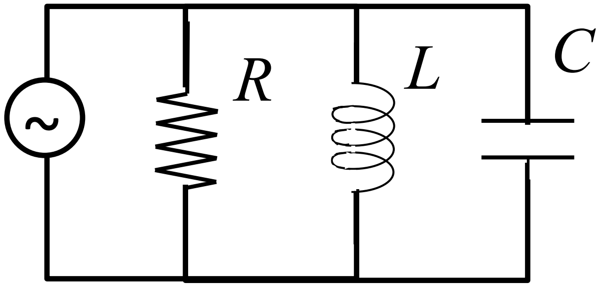
Factor de potencia

$$P_m = \frac{I_{\max} V_{\max}}{2} \cos(\varphi) = I_{ef} V_{ef} \cos(\varphi)$$

$$\cos(\varphi) = \frac{V_{\max R}}{V_{\max}} = \frac{R}{Z}$$

Circuito RLC en paralelo

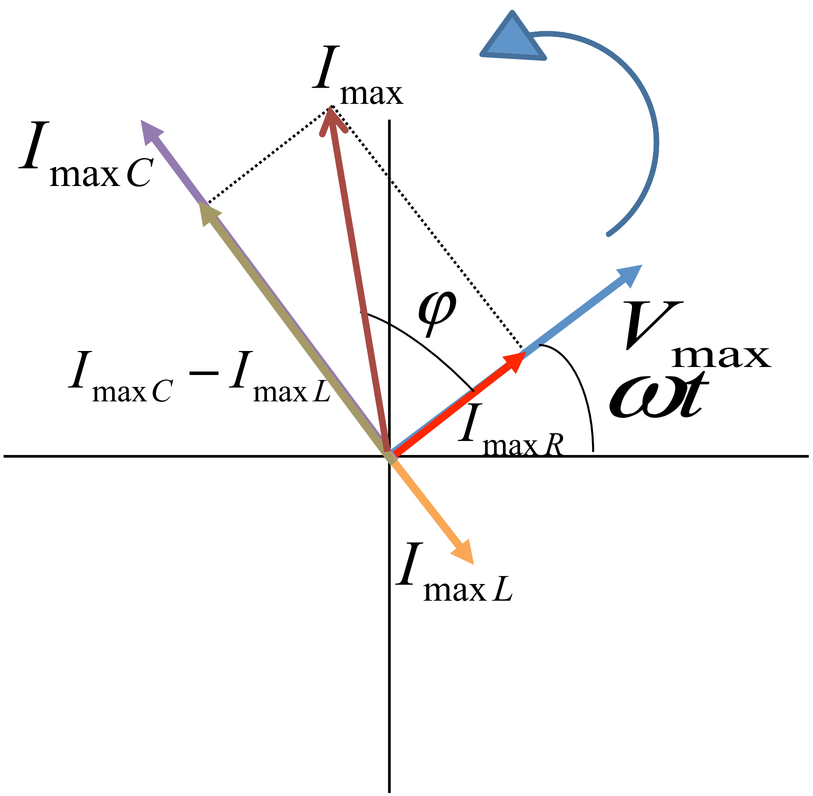
$$I(t) = I_{\max} \sin(\omega t + \varphi)$$



La diferencia de potencial en cada elemento es la misma

$$V(t) = V_{\max} \sin(\omega t) = V_R(t) = V_C(t) = V_L(t)$$

$$V(t) = V_{\max} \sin(\omega t)$$

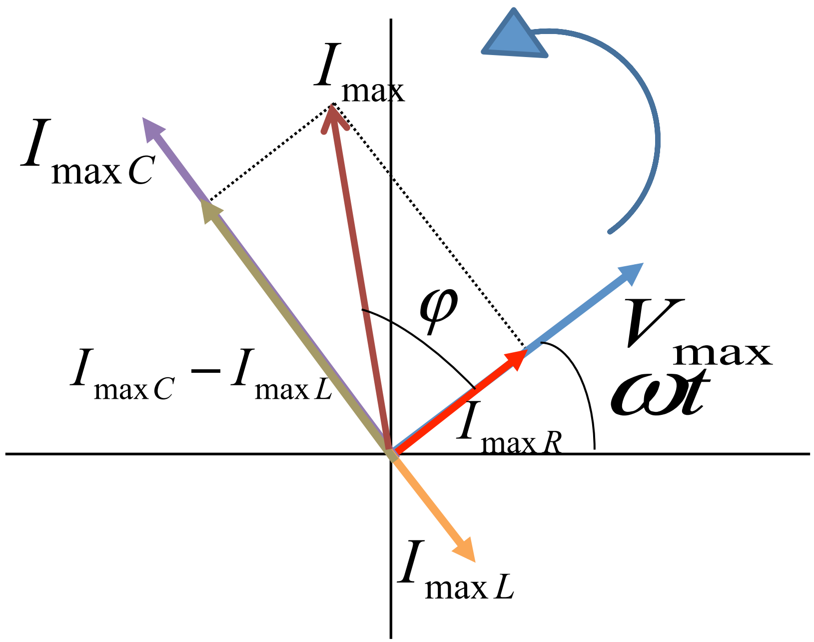


Las corrientes en cada elemento tienen diferentes fases

$$I_R(t) = I_{\max R} \sin(\omega t)$$
$$V_{\max} = I_{\max R} R$$

$$I_C(t) = I_{\max C} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$V_{\max} = I_{\max C} X_C$$

$$I_L(t) = I_{\max L} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$
$$V_{\max} = I_{\max L} X_L$$



$$I_{\max}^2 = I_{\max R}^2 + \left(I_{\max C} - I_{\max L}\right)^2$$

Impedancia

$$I_{\max}^2 = V_{\max}^2\left(\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2\right) = \frac{V_{\max}^2}{Z^2}$$

$$\boxed{\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2}}$$

$$\boxed{V_{\max} = Z\ I_{\max}}$$

Diferencia de fase entre la corriente y la diferencia de potencial

$$\boxed{\tan\varphi = \frac{I_{\max C} - I_{\max L}}{I_{\max R}} = \frac{\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}}{\frac{1}{R}}}$$

Notar que:

- La impedancia depende de la frecuencia
- Si $\varphi > 0$ el circuito se comporta como capacitivo
- Si $\varphi < 0$ el circuito se comporta como inductivo
- Si $\varphi = 0$ el circuito se comporta como resistivo

¿Cuál es el valor máximo de la impedancia?

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2} \Rightarrow X_L = X_C \Rightarrow \omega L = \frac{1}{\omega C}$$

Frecuencia de resonancia

$$\omega_R = \frac{1}{\sqrt{CL}} \Rightarrow \begin{array}{c} \varphi = 0 \\ Z = R \\ V_{\max} = I_{\max} R \end{array}$$

Potencia

$$V(t) = V_{\max} \sin(\omega t) \qquad I(t) = I_{\max} \sin(\omega t + \varphi)$$

Potencia instantánea

$$P(t) = I(t)V(t) = I_{\max} V_{\max} \sin(\omega t + \varphi)\sin(\omega t)$$

$$P(t) = I_{\max} V_{\max} \left(\sin^2(\omega t)\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\cos(\omega t)\sin(\omega t)\right)$$

Potencia media

$$\langle P(t) \rangle = P_m = \frac{\int_0^{\tau} P(t)dt}{\int_0^{\tau} dt} = \frac{I_{\max} V_{\max}}{\tau} \int_0^{\tau} \left(\sin^2(\omega t)\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\cos(\omega t)\sin(\omega t)\right)dt$$

Factor de potencia

$$P_m = \frac{I_{\max} V_{\max}}{2} \cos(\varphi) = I_{ef} V_{ef} \cos(\varphi)$$

$$\cos(\varphi) = \frac{I_{\max R}}{I_{\max}} = \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{Z}}$$