CÁLCULO VECTORIAL

TERCERA EDICIÓN

JERROLD E. MARSDEN
CORNELL UNIVERSITY Y UNIVERSITY OF CALIFORNIA, BERKELEY

ANTHONY J. TROMBA
UNIVERSITY OF CALIFORNIA, SANTA CRUZ

Versión en español de
Manuel López Mateos
Universidad Nacional Autónoma de México

Con la colaboración de
Sergio Adarve D.
Universidad de los Andes
Bogotá, Colombia

ADDISON-WESLEY IBEROAMERICANA

Argentina • Brasil • Chile • Colombia • Ecuador • España
Estados Unidos • México • Perú • Puerto Rico • Venezuela

Versión en español de la obra titulada *Vector calculus, Third edition,* de Jerrold E. Marsden y Anthony J. Tromba, publicada originalmente en inglés por W. H. Freeman and Company, Nueva York © 1976, 1981 y 1988 por W. H. Freeman and Company

Esta edición en español es la única autorizada.

© 1991 por **ADDISON-WESLEY IBEROAMERICANA, S.A.**
Wilmington, Delaware, E.U.A.

Impreso en los Estados Unidos de América. *Printed in U.S.A.*

ISBN 0-201-62935-6

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10–AL–96 95 94 93 92 91

La política es para el momento.
Una ecuación es para la eternidad.

A. EINSTEIN

Algunos trucos de cálculo son bastante fáciles,
otros son muy difíciles. Los tontos
que escriben los libros de matemáticas
avanzadas pocas veces se toman la molestia de
mostrar cuán fáciles son los cálculos fáciles.

SILVANUS P. THOMPSON *Calculus Made Easy*, Macmillan (1910)

página en blanco

ÍNDICE GENERAL

PREFACIO ix

1 LA GEOMETRÍA DEL ESPACIO EUCLIDIANO 1

1.1 Vectores en el espacio tridimensional 1
1.2 El producto interno 21
1.3 El producto cruz 30
1.4 Coordenadas esféricas y cilíndricas 47
1.5 Espacio euclidiano *n*-dimensional 57
Ejercicios de repaso del capítulo 1 68

2 DIFERENCIACIÓN 75

2.1 Geometría de las funciones con valores reales 76
2.2 Límites y continuidad 95
2.3 Diferenciación 118
2.4 Propiedades de la derivada 131
2.5 Gradientes y derivadas direccionales 145
2.6 Derivadas parciales iteradas 157
***2.7 Algunos teoremas técnicos de diferenciación** 168
Ejercicios de repaso del capítulo 2 180

3 FUNCIONES CON VALORES VECTORIALES 189

3.1 Trayectorias y velocidad 189
3.2 Longitud de arco 201
3.3 Campos vectoriales 211
3.4 Divergencia y rotacional de un campo vectorial 220
3.5 Cálculo diferencial vectorial 231
Ejercicios de repaso del capítulo 3 238

4 DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR; MÁXIMOS Y MÍNIMOS 241

4.1 Teorema de Taylor 242
4.2 Extremos de funciones con valores reales 248
4.3 Extremos restringidos y multiplicadores de Lagrange 265
***4.4 Teorema de la función implícita** 280
4.5 Algunas aplicaciones 291
Ejercicios de repaso del capítulo 4 298

5 INTEGRALES DOBLES 303

5.1 Introducción 303
5.2 Integral doble sobre un rectángulo 314
5.3 Integral doble sobre regiones más generales 329
5.4 Cambio en el orden de integración 336
***5.5 Algunos teoremas técnicos de integración** 342
Ejercicios de repaso del capítulo 5 352

6 INTEGRAL TRIPLE, FÓRMULA DE CAMBIO DE VARIABLES Y APLICACIONES 355

6.1 Integral triple 355
6.2 Geometría de las funciones de R^2 a R^2 364
6.3 Teorema del cambio de variables 371
6.4 Aplicaciones de las integrales dobles y triples 389
***6.5 Integrales impropias** 401
Ejercicios de repaso del capítulo 6 408

7 INTEGRALES SOBRE TRAYECTORIAS Y SUPERFICIES 413

7.1 La integral de trayectoria 414
7.2 Integrales de línea 419
7.3 Superficies parametrizadas 440
7.4 Área de una superficie 449
7.5 Integrales de funciones escalares sobre superficies 463
7.6 Integrales de superficie de funciones vectoriales 472
Ejercicios de repaso del capítulo 7 486

8 TEOREMAS INTEGRALES DEL ANÁLISIS VECTORIAL 490

8.1 Teorema de Green 490
8.2 Teorema de Stokes 504
8.3 Campos conservativos 517
8.4 Teorema de Gauss 528
***8.5 Aplicaciones a la física y ecuaciones diferenciales** 544
***8.6 Formas diferenciales** 566
Ejercicios de repaso del capítulo 8 582

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS CON NUMERACIÓN IMPAR 585

TABLAS 647

ÍNDICE DE MATERIAS 655

página en blanco

PREFACIO

Este texto se ideó para un curso de un semestre de cálculo de funciones de varias variables y análisis vectorial, en el nivel de segundo año de universidad. En ciertas ocasiones el curso es precedido por un curso introductorio de álgebra lineal, pero esto no es un requisito esencial. Sólo se requieren de los rudimientos más simples del álgebra matricial, y los conceptos necesarios son presentados en el libro. Sin embargo, suponemos que se conocen los principios del cálculo de una variable —diferenciación e integración de las funciones comunes.

En el libro se incluye la mayor parte de la teoría básica, así como muchos ejemplos concretos y problemas. La experiencia docente en este nivel indica que es deseable omitir la mayoría de las demostraciones técnicas; son difíciles para los principiantes y se incluyen más bien como referencia o lectura suplementaria. En particular, algunas de las demostraciones técnicas de los teoremas en los capítulos 2 y 5 se presentan en las secciones optativas 2.7 y 5.5. La sección 2.2 sobre límites y continuidad ha sido diseñada para estudiarse superficialmente y es deliberadamente breve. Se han omitido temas teóricos más sofisticados, como compacidad y demostraciones delicadas de teoría de integración, pues en general pertenecen a cursos más avanzados, y son mejor explicados en éstos.

En este nivel es importante tener habilidad para calcular y comprensión intuitiva; hemos procurado satisfacer esta necesidad haciendo el libro tan concreto y orientado al estudiante como nos fue posible. Por ejemplo, aunque hemos formulado correctamente la definición de derivada, lo hicimos usando matrices de derivadas parciales en lugar de transformaciones lineales. Este recurso por sí solo puede ahorrar una o dos semanas de lecciones y evitar dolores de cabeza a los estudiantes cuyos conocimientos de álgebra lineal no estén en su mejor forma. Además incluimos un gran número de ilustraciones físicas. En particular, hemos incluido ejemplos de áreas de la física como mecánica de fluidos, gravitación y teoría electromagnética, y también de economía, aunque no se supone un conocimiento previo de dichos temas.

Una característica especial del libro es la pronta introducción de campos vectoriales, divergencia y rotacional en el capítulo 3, antes de integración. En un curso de este tipo el análisis vectorial se resiente; el presente arreglo fue diseñado para compensar esta tendencia. Avanzando en esta dirección, podría considerarse exponer el capítulo 4 (teorema de Taylor, máximos y mínimos, multiplicadores de Lagrange) después del capítulo 8 (análisis vectorial).

Esta tercera edición conserva el balance entre teoría, aplicaciones, material optativo y notas históricas presente en la segunda edición. Los cambios en esta tercera edición son los siguientes: Fred Soon y Karen Pao han revisado los ejercicios y han publicado una Guía de estudio (*Study Guide*). Esta guía contiene soluciones completas a ejercicios seleccionados del libro (los números o letras de estos ejercicios han sido encuadrados para su fácil identificación) así como sugerencias para estudio y ejemplos de exámenes.

Los ejercicios se han colocado en una progresión más adecuada, de acuerdo con su nivel de dificultad y cubren una mayor amplitud de temas. Los teoremas técnicos optativos sobre diferenciación y los teoremas sobre integración se han cambiado de los apéndices a los capítulos 2 y 5, y están impresos en tipo más pequeño. El largo capítulo sobre teoría de integración ha sido dividido en dos añadiéndose una nueva sección sobre aplicaciones de integrales múltiples. Se ha incluido material adicional sobre coordenadas cilíndricas y esféricas y se ha simplificado la sección sobre el significado geométrico de la divergencia y el rotacional. A lo largo del libro se han hecho otros cambios y correcciones que mejoran la exposición. Muchos de éstos han sido sugeridos por lectores de la segunda edición y estamos en deuda con todos ellos por haber mejorado el libro para beneficio del estudiante.

REQUISITOS PREVIOS Y NOTACIÓN

Suponemos que los alumnos han estudiado cálculo de funciones de una variable real, incluida la geometría analítica en el plano. Algunos estudiantes quizá también hayan estudiado matrices, aunque lo que vamos a necesitar se presenta en las secciones 1.3 y 1.5.

También suponemos que los alumnos están familiarizados con funciones del cálculo elemental, como $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, e^x y $\log x$ (escribimos $\log x$ para el logaritmo natural, que a veces se denota por $\ln x$ o $\log_e x$). Se espera que los alumnos conozcan, o repasen conforme transcurre el curso, las reglas básicas de diferenciación e integración para funciones de una variable, como la regla de la cadena, la regla del cociente, integración por partes y demás.

Ahora resumiremos las notaciones que se van a usar, a veces sin mención explícita. Los alumnos pueden leerlas rápidamente y después recurrir a ellas, si fuese necesario.

La colección de los números reales se denota por $\mathbf{R}$. Así, $\mathbf{R}$ incluye los *enteros*, $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$; los *números racionales* p/q, donde p y q son

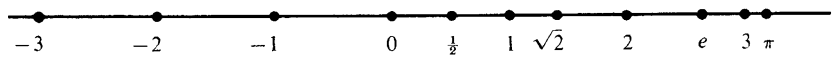


Figura 0.1 Representación geométrica de puntos sobre la recta numérica real.

enteros ($q \neq 0$); y los *números irracionales,* como $\sqrt{2}$, π y e. Los elementos de $\mathbf{R}$ se pueden visualizar como puntos sobre la recta numérica real, según se muestra en la figura 0.1.

Cuando escribimos $a \in \mathbf{R}$ queremos decir que a es un elemento del conjunto $\mathbf{R}$; en otras palabras, que a es un número real. Dados dos números reales a y b con $a < b$ (esto es, con a menor que b), podemos formar el *intervalo cerrado* $[a, b]$ formado por todos los x tales que $a \leq x \leq b$, y el *intervalo abierto* (a, b) formado por todos los x tales que $a < x < b$. De manera análoga, podemos formar intervalos semiabiertos $(a, b]$ y $[a, b)$ (figura 0.2).

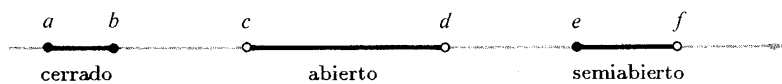


Figura 0.2 Representación geométrica de los intervalos $[a, b]$, (c, d) y $[e, f]$.

El *valor absoluto* de un número $a \in \mathbf{R}$ se escribe $|a|$ y se define como

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{si} \quad a < 0. \end{cases}$$

Por ejemplo, $|3| = 3$, $|-3| = 3$, $|0| = 0$ y $|-6| = 6$. La desigualdad $|a+b| \leq |a|+|b|$ siempre se cumple. La *distancia de* a *a* b está dada por $|a - b|$. Así, la distancia de 6 a 10 es 4 y de -6 a 3 es 9.

Si escribimos $A \subset \mathbf{R}$, queremos decir que A es un *subconjunto* de $\mathbf{R}$. Por ejemplo, A podría ser igual al conjunto de los enteros $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Otro ejemplo de subconjunto de $\mathbf{R}$ es el conjunto $\mathbf{Q}$ de números racionales. En general, para dos colecciones de objetos (esto es, conjuntos) A y B, $A \subset B$ significa que A es un subconjunto de B; esto es, todo elemento de A también es un elemento de B.

El símbolo $A \cup B$ significa la *unión* de A y B, la colección cuyos elementos son elementos de A o B. Así

$$\{\ldots, -3, -2, -1, 0\} \cup \{-1, 0, 1, 2, \ldots\} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}.$$

De manera análoga, $A \cap B$ significa la *intersección* de A y B; esto es, este conjunto está formado por aquellos elementos de A y B que están tanto en A como en B. Así, la intersección de los dos conjuntos anteriores es $\{-1, 0\}$.

Escribiremos $A \setminus B$ para denotar los elementos de A que no están en B. Así,

$$\{\ldots, -3, -2, -1, 0\} \setminus \{-1, 0, 1, 2, \ldots\} = \{\ldots, -3, -2\}.$$

También podemos especificar conjuntos como en los ejemplos siguientes:

$$\{a \in \mathbf{R} |\ a \text{ es un entero}\} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

$$\{a \in \mathbf{R} |\ a \text{ es un entero par}\} = \{\ldots, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$$

$$\{x \in \mathbf{R} | a \leq x \leq b\} = [a, b].$$

Una *función* $f: A \to B$ es una regla que asigna a cada $a \in A$ un elemento específico $f(a)$ de B. El hecho de que la función f mande a a $f(a)$ se denota simbólicamente por $a \mapsto f(a)$. Por ejemplo $f(x) = x^3/(1-x)$ asigna el número $x^3/(1-x)$ a cada $x \neq 1$ en $\mathbf{R}$. Podemos especificar una función f dando la regla para $f(x)$. Así, la función f anterior se puede definir por la regla $x \mapsto x^3/(1-x)$.

Si $A \subset \mathbf{R}$, $f: A \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ significa que f asigna un valor en $\mathbf{R}$, $f(x)$, a cada $x \in A$. El conjunto A se llama *dominio* de f, y decimos que f tiene *contradominio* $\mathbf{R}$, pues es ahí donde se toman los valores de f. La *gráfica* de f consiste de los puntos $(x, f(x))$ en el plano (figura 0.3). Generalmente una *asociación* (= función = transformación = asociación) $f: A \to B$, donde A y B son conjuntos, es una regla que asigna a cada $x \in A$ un punto específico $f(x) \in B$.

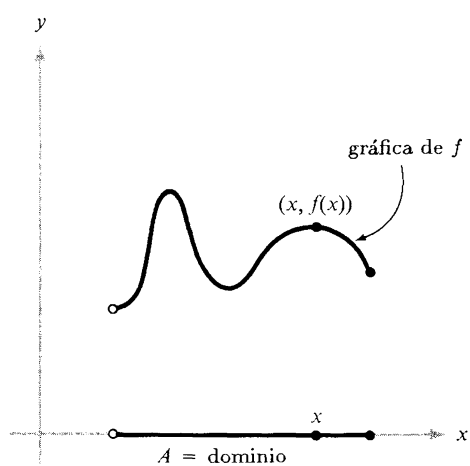


Figura 0.3 Gráfica de una función con el intervalo semiabierto A como dominio.

La notación $\sum_{i=1}^{n} a_i$ significa $a_1 + \cdots + a_n$ donde $a_1, \ldots, a_n$ son números dados. La suma de los primeros n enteros es

$$1 + 2 + \cdots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

La *derivada* de una función $f(x)$ se denota por $f'(x)$ o

$$\frac{df}{dx},$$

y la *integral indefinida* se escribe

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Si hacemos $y = f(x)$, la derivada también se denota por

$$\frac{dy}{dx}.$$

Se supone que los lectores conocen la regla de la cadena, la integración por partes y otras reglas que gobiernan al cálculo de funciones de una variable. En particular, deberán saber cómo diferenciar e integrar funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas. Al final del libro hay una breve tabla de derivadas e integrales, adecuadas para las necesidades de este libro.

Las siguientes notaciones se usan como sinónimos: $e^x = \exp x$, $\ln x = \log x$ y $\operatorname{sen}^{-1} x = \operatorname{arcsen} x$.

El final de una demostración se denota por el símbolo ■, mientras que el final de un ejemplo u observación se denota por el símbolo ▲. El material opcional más teórico o los ejercicios más difíciles están precedidos por una estrella: *.

AGRADECIMIENTOS

Multitud de colegas y estudiantes de la comunidad matemática han hecho valiosas aportaciones y sugerencias desde que se inició este libro. Un primer borrador se escribió en colaboración con Ralph Abraham. Le agradecemos que nos permitiera usar su trabajo. Es imposible nombrar a todos los que han ayudado en este libro, pero queremos agradecer de manera especial a Michael Hoffman y Joanne Seitz por su ayuda en las ediciones anteriores. También recibimos comentarios valiosos de Mary Anderson, John Ball, Frank Gerrish, Jenny Harrison, David Knudson, Richard Koch, Andrew Lenard, Gordon McLean, David Merriell, Jeanette Nelson, Dan Norman, Keith Phillips, Anne Perleman, Kenneth Ross, Ray Sachs, Diane Sauvageot, Joel Smoller, Melvyn Tews, Ralph y Bob Tromba, Steve Wan, Alan Weinstein y John Wilker.

Agradecemos a los siguientes instructores sus revisiones detalladas del manuscrito de esta edición: David Bao, de la University of Houston; Stanley M. Lukawecki, de la Clemson University; John F. Pierce, de la West Virginia University y Herb Walum, de The Ohio State University.

Una palabra final de agradecimiento para quienes ayudaron a la preparación del manuscrito y la producción del libro en inglés. Agradecemos en forma especial a Connie Calica, Nora Lee, Marnie McElhiney, Rosemarie Stampful, Ruth Suzuki, Ikuko Workman y Esther Zack por su excelente mecanografiado de diferentes versiones y revisiones del manuscrito; Herb Holden de la Gonzaga University y Jerry Kazdan de la University of Pennsylvania por sugerir y preparar la figuras generadas por computadora; Jerry Lyons por su trabajo como nuestro editor en matemáticas; Richard K. Mickey por su magnífica corrección de estilo y Philip McCaffrey por su supervisión editorial.

Mantendremos una lista actualizada de correcciones y sugerencias acerca de esta tercera edición. Con gusto enviaremos dicha lista a cualquier usuario del texto. Favor de solicitarla a Jerrold Marsden, Department of Mathematics, Cornell University, Ithaca, NY 14853-7901, o a Anthony Tromba, Department of Mathematics, University of California, Santa Cruz, CA 95064.

Jerrold E. Marsden

Anthony J. Tromba

1 LA GEOMETRÍA DEL ESPACIO EUCLIDIANO

> Los cuaterniones vienen de Hamilton ... y han sido maldición pura para quien, de alguna forma, los ha tocado. El vector es un sobreviviente inútil ... y jamás ha sido de la más mínima utilidad para ningún ser viviente.
>
> Lord Kelvin

En este capítulo consideramos las operaciones básicas de los vectores en el espacio tridimensional: la suma vectorial, la multiplicación por un escalar y los productos punto y cruz. En la sección 1.5 generalizamos algunos de estos conceptos al n-espacio y revisamos las propiedades de las matrices que necesitaremos en los capítulos 2 y 3.

1.1 VECTORES EN EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL

Los puntos P en el plano se representan mediante pares ordenados de números reales (a, b); los números a y b se llaman *coordenadas cartesianas de* P. Tracemos dos rectas perpendiculares, llamémosles ejes x y y, y bajemos perpendiculares de P a los ejes, como en la figura 1.1.1. Después de designar la intersección de los ejes x y y como origen, y de escoger unidades en estos ejes, producimos dos distancias dirigidas a y b, como se muestra en la figura; a se llama la *componente* x de P, y b se llama la *componente* y.

Los puntos en el espacio se pueden representar de manera análoga mediante ternas ordenadas de números reales. Para construir dicha representación escogemos tres rectas perpendiculares entre sí que se crucen en un punto en el espacio.

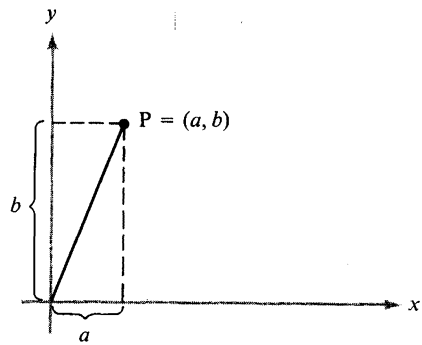


Figura 1.1.1 Coordenadas cartesianas en el plano.

Estas rectas se llaman: eje x, eje y y eje z, y el punto en el que se cruzan se llama *origen* (es nuestro punto de referencia). Escogemos una escala sobre estos ejes. Es común referirse al conjunto de ejes como *sistema de coordenadas*, y se trazan como se muestra en la figura 1.1.2.

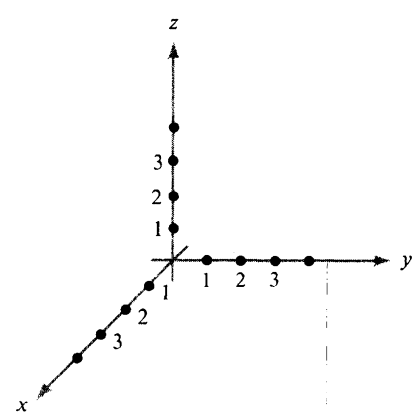


Figura 1.1.2 Coordenadas cartesianas en el espacio.

Podemos asignar a cada punto P en el espacio una terna (ordenada) única de números reales (a, b, c); y, recíprocamente, a cada terna podemos asignar un punto único en el espacio, tal y como lo hicimos para los puntos en el plano. Al origen del sistema de coordenadas le corresponde la terna $(0, 0, 0)$, y las flechas en los ejes indican las direcciones positivas. Así, por ejemplo, la terna $(2, 4, 4)$ representa un punto a 2 unidades del origen en dirección positiva a lo largo del eje x, a 4 unidades en dirección positiva a lo largo del eje y, y a 4 unidades en dirección positiva a lo largo del eje z (figura 1.1.3).

Debido a la posibilidad de asociar de esta manera los puntos del espacio con las ternas ordenadas, es común usar la expresión "punto (a, b, c)" en lugar de la

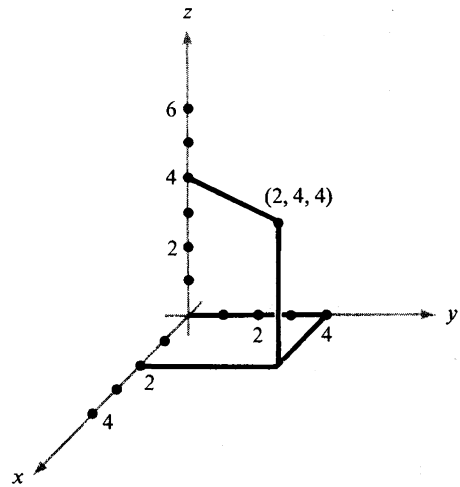


Figura 1.1.3 Representación geométrica del punto $(2, 4, 4)$ en coordenadas cartesianas.

frase más larga "punto P que corresponde a la terna (a, b, c)." Si la terna (a, b, c) corresponde a P, decimos que a es la coordenada x (o la primera coordenada), b es la coordenada y (o segunda coordenada), y c es la coordenada z (o tercera coordenada) de P. Teniendo en mente este método para representar puntos, vemos que el eje x está formado por los puntos de la forma $(a, 0, 0)$, donde a es cualquier número real; el eje y está formado por los puntos $(0, a, 0)$; y el eje z está formado por los puntos $(0, 0, a)$. También se suele denotar a los puntos en el espacio con las letras x, y y z en lugar de a, b y c. Así, la terna (x, y, z) representa un punto cuya primera coordenada es x, la segunda coordenada es y, y la tercera coordenada es z.

Empleamos la notación siguiente para la recta, el plano y el espacio tridimensional.

(i) La recta real se denota por $\mathbf{R}^1$ (así, es lo mismo $\mathbf{R}$ que $\mathbf{R}^1$).
(ii) El conjunto de todos los pares ordenados (x, y) de números reales se denota por $\mathbf{R}^2$.
(iii) El conjunto de todas las ternas ordenadas (x, y, z) de números reales se denota por $\mathbf{R}^3$.

Cuando se habla en conjunto de $\mathbf{R}^1$, $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$, se escribe $\mathbf{R}^n$, $n = 1, 2$ o 3; o $\mathbf{R}^m$, $m = 1, 2, 3$.

La operación de suma se puede extender de $\mathbf{R}$ a $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$. Para $\mathbf{R}^3$ se procede de la manera siguiente. Dadas dos ternas (x, y, z) y (x', y', z'), definimos su *suma* mediante

$$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z').$$

EJEMPLO 1

$$(1,1,1)+(2,-3,4)=(3,-2,5)$$
$$(x,y,z)+(0,0,0)=(x,y,z)$$
$$(1,7,3)+(2,0,6)=(3,7,9). \quad \blacktriangle$$

El elemento $(0,0,0)$ se llama *elemento cero* (o sólo *cero*) de $\mathbf{R}^3$. El elemento $(-x,-y,-z)$ se llama *inverso aditivo* (o *negativo*) de (x,y,z), y se escribe $(x,y,z)-(x',y',z')$ en lugar de $(x,y,z)+(-x',-y',-z')$.

Hay operaciones de producto que son importantes en $\mathbf{R}^3$. Una de ellas, llamada *producto interno*, asigna un número real a cada pareja de elementos de $\mathbf{R}^3$. En la sección 1.2. estudiaremos con detalle el producto interno. Otra operación de producto para $\mathbf{R}^3$ se llama *producto por un escalar* (la palabra "escalar" es sinónimo de "número real"). Este producto combina escalares (números reales) y elementos de $\mathbf{R}^3$ (ternas ordenadas) para producir elementos de $\mathbf{R}^3$ de la manera siguiente: dado un escalar α y una terna (x,y,z), definimos el *múltiplo escalar* o *producto por un escalar* mediante

$$\alpha(x,y,z)=(\alpha x,\alpha y,\alpha z).$$

EJEMPLO 2

$$\begin{aligned}
2(4,e,1)&=(2\cdot 4,2\cdot e,2\cdot 1)=(8,2e,2)\\
6(1,1,1)&=(6,6,6)\\
1(x,y,z)&=(x,y,z)\\
0(x,y,z)&=(0,0,0)\\
(\alpha+\beta)(x,y,z)&=((\alpha+\beta)x,(\alpha+\beta)y,(\alpha+\beta)z)\\
&=(\alpha x+\beta x,\alpha y+\beta y,\alpha z+\beta z)\\
&=\alpha(x,y,z)+\beta(x,y,z). \quad \blacktriangle
\end{aligned}$$

Como consecuencia de las definiciones, la suma y el producto por un escalar para $\mathbf{R}^3$ satisfacen las siguientes identidades:

(i) $(\alpha\beta)(x,y,z)=\alpha[\beta(x,y,z)]$ (asociatividad)

(ii) $(\alpha+\beta)(x,y,z)=\alpha(x,y,z)+\beta(x,y,z)$

(iii) $\alpha[(x,y,z)+(x',y',z')]=\alpha(x,y,z)+\alpha(x',y',z')$

(distributividad)

(iv) $\alpha(0,0,0)=(0,0,0)$

(v) $0(x,y,z)=(0,0,0)$

(propiedades del elemento cero)

(vi) $1(x,y,z)=(x,y,z)$ (propiedad del elemento identidad)

Para $\mathbf{R}^2$ se define la suma de la misma manera que para $\mathbf{R}^3$, mediante

$$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y'),$$

y el producto por un escalar se define como

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y).$$

Volvamos a la geometría de nuestro modelo. Una de las herramientas más poderosas de las matemáticas y sus aplicaciones ha sido el concepto de *vector*. Se define (geométricamente) un vector como un segmento de recta dirigido que comienza en el origen, esto es, un segmento de recta con magnitud y dirección especificados, con punto inicial en el origen. ¿Han oído decir a los pilotos "Estamos en el radio vector de la pista de aterrizaje"? Se refieren al vector que da la dirección y la distancia a que se encuentra el aeroplano de la pista de aterrizaje. Es inútil señalar lo importantes que son en este caso la dirección y la distancia. La figura 1.1.4 muestra varios vectores. Así, los vectores se pueden concebir como flechas que comienzan en el origen. Generalmente se imprimen en letras negritas: $\mathbf{v}$.

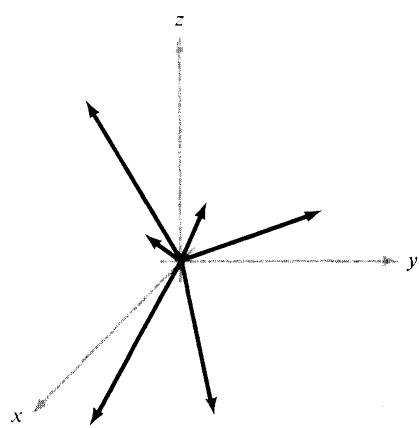


Figura 1.1.4 Los vectores se pueden concebir, geométricamente, como flechas saliendo del origen.

Usando esta definición de vector, podemos asociar con cada vector $\mathbf{v}$ el punto (x, y, z) en el espacio, donde termina $\mathbf{v}$, y, recíprocamente, a cada punto (x, y, z) en el espacio podemos asociar un vector $\mathbf{v}$. Así, identificaremos $\mathbf{v}$ con (x, y, z) y escribiremos $\mathbf{v} = (x, y, z)$. Por esta razón, los elementos de $\mathbf{R}^3$ no son sólo ternas ordenadas de números reales, sino que también se llaman vectores. La terna $(0, 0, 0)$ se denota por $\mathbf{0}$.

Decimos que dos vectores son ***iguales*** *si, y sólo si, tienen la misma dirección y la misma magnitud.* Esta condición se puede expresar de manera algebraica diciendo que si $\mathbf{v}_1 = (x, y, z)$ y $\mathbf{v}_2 = (x', y'z')$, entonces

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 \qquad \text{si, y sólo si,} \qquad x = x',\ y = y',\ z = z'.$$

Geométricamente definimos el vector suma como sigue. En el plano que contiene a los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ (ver la figura 1.1.5), formemos el paralelogramo que

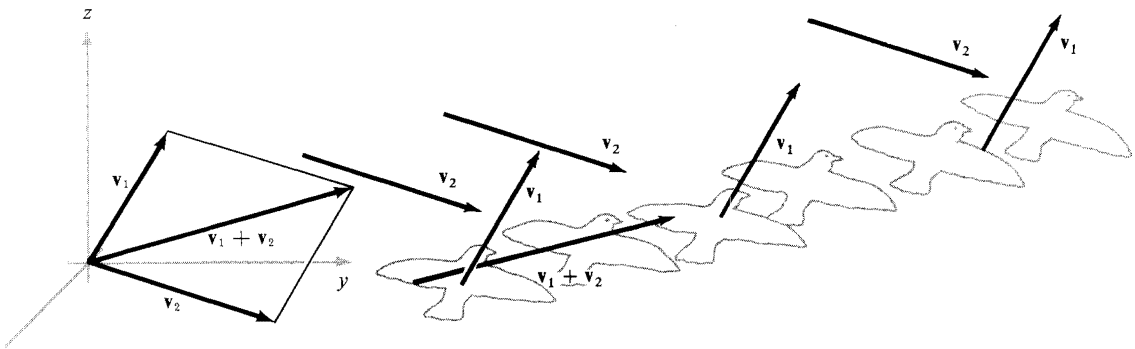


Figura 1.1.5 Geometría de la suma de vectores.

tiene como un lado a $\mathbf{v}_1$, y como lado adyacente a $\mathbf{v}_2$. Entonces la suma $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ es el segmento de recta dirigido a lo largo de la diagonal del paralelogramo. Esta consideración geométrica de la suma de vectores es útil en muchas situaciones físicas, como veremos más adelante. Para visualizar fácilmente esto mediante un ejemplo, consideren un ave o un aeroplano volando con velocidad $\mathbf{v}_1$, con un viento con velocidad $\mathbf{v}_2$. Lo que se ve es la velocidad resultante $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$.

Para mostrar que la definición geométrica de la suma es consistente con la definición algebraica, debemos demostrar que $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = (x + x', y + y', z + z')$. Probaremos este resultado en el plano y dejaremos que el lector enuncie la proposición para el espacio tridimensional. Así, queremos mostrar que si $\mathbf{v}_1 = (x, y)$ y $\mathbf{v}_2 = (x', y')$, entonces $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = (x + x', y + y')$.

En la figura 1.1.6, sea $\mathbf{v}_1 = (x, y)$ el vector que termina en el punto A, y sea $\mathbf{v}_2 = (x', y')$ el vector que termina en el punto B. Por definición, el vector $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ termina en el vértice C del paralelogramo OBCA. Entonces, para verificar que

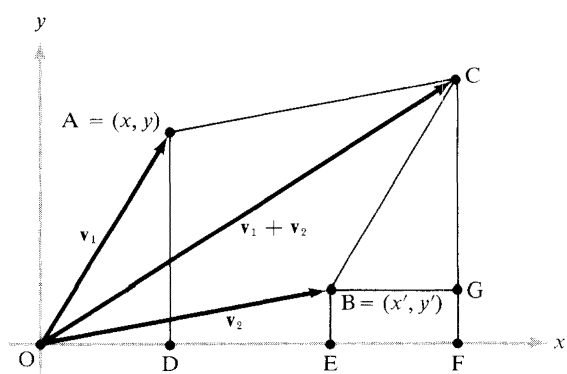


Figura 1.1.6 Construcción para la demostración de que $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$.

$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = (x + x', y + y')$, es suficiente mostrar que las coordenadas de C son $(x + x', y + y')$.

En la figura 1.1.6, los lados de los triángulos OAD y BCG son paralelos y los lados OA y BC tienen igual longitud, lo cual escribiremos como OA = BC. Por lo tanto, BG = OD; y como BGFE es un rectángulo, tenemos que EF = BG. Más aún, OD = x y OE = x'. De aquí que EF = BG = OD = x. Como OF = EF + OE, se sigue que OF = $x + x'$. Esto muestra que la coordenada x de C es $x + x'$. La demostración para la coordenada y es análoga. Con un argumento similar para los otros cuadrantes, vemos que la definición geométrica de la suma de vectores es equivalente a la definición algebraica en términos de coordenadas.

En la figura 1.1.7(a) se ilustra otra manera de considerar la suma vectorial: en términos de triángulos, en lugar de paralelogramos. Esto es, trasladamos (sin rotación) el segmento de recta dirigido que representa al vector $\mathbf{v}_2$, de modo que comience al final del vector $\mathbf{v}_1$. El punto final del segmento dirigido resultante es el punto final del vector $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$. Notamos que cuando $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son colineales, el triángulo se colapsa. Se ilustra esta situación en la figura 1.1.7(b).

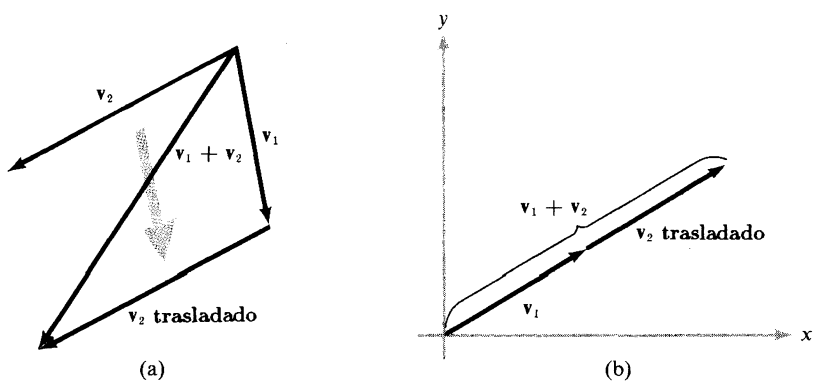


Figura 1.1.7 (a) Se puede visualizar la suma vectorial en términos de triángulos así como de paralelogramos. Sin embargo, el triángulo se colapsa cuando $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son colineales (b).

Los múltiplos escalares de los vectores tienen interpretaciones geométricas similares. Si α es una escalar y $\mathbf{v}$ es un vector, definimos $\alpha\mathbf{v}$ como el vector que tiene α veces la longitud de $\mathbf{v}$, con la misma dirección que $\mathbf{v}$ si $\alpha > 0$, pero con dirección opuesta si $\alpha < 0$. La figura 1.1.8 ilustra varios ejemplos.

Al usar un razonamiento que depende de triángulos semejantes, podemos probar que si $\mathbf{v} = (x, y, z)$, entonces

$$\alpha\mathbf{v} = (\alpha x, \alpha y, \alpha z).$$

Esto es, la definición geométrica coincide con la algebraica.

¿Cómo representamos geométricamente al vector $\mathbf{b} - \mathbf{a}$? Como $\mathbf{a} + (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \mathbf{b}$, $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ es el vector que al sumarlo a $\mathbf{a}$ da $\mathbf{b}$. En vista de esto, podemos concluir

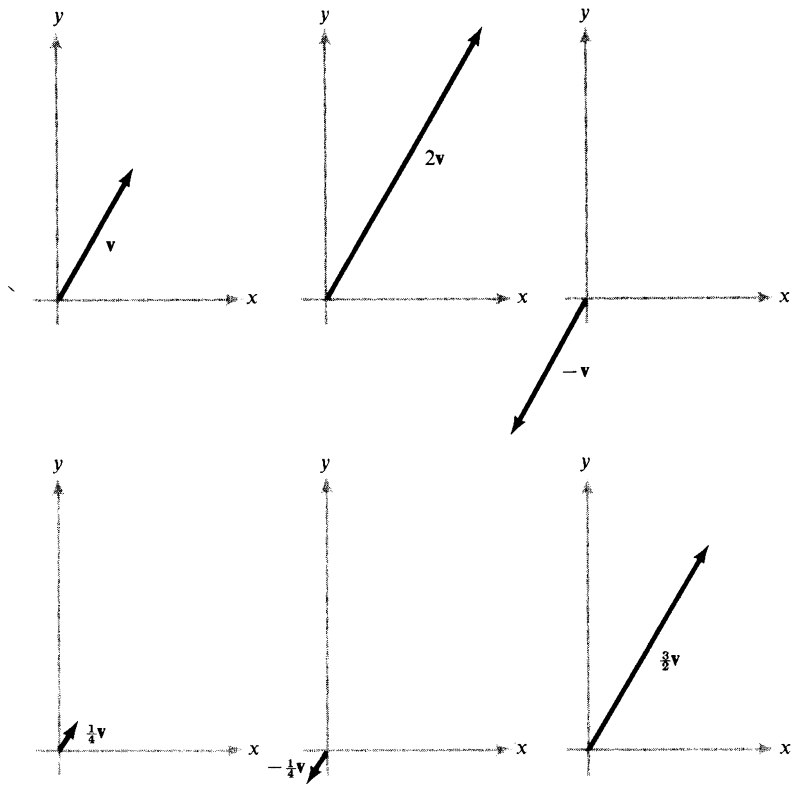


Figura 1.1.8 Algunos múltiplos escalares de un vector **v**.

que **b** − **a** es el vector paralelo a, y con la misma magnitud que, el segmento de recta dirigido que comienza en el punto final de **a** y termina en el punto final de **b** (ver la figura 1.1.9).

Denotemos por **i** al vector que termina en $(1, 0, 0)$, por **j** al vector que termina en $(0, 1, 0)$ y por **k** al vector que termina en $(0, 0, 1)$. Por la definición de suma

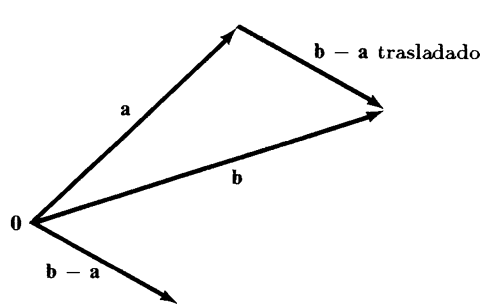


Figura 1.1.9 Geometría de la resta vectorial.

vectorial y la multiplicación por un escalar, hallamos que si $\mathbf{v} = (x, y, z)$, entonces

$$\mathbf{v} = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Por lo tanto, podemos representar cualquier vector en el espacio tridimensional en términos de los vectores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$. Es por esto que a los vectores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ se les llama *vectores de la base canónica* para $\mathbf{R}^3$.

EJEMPLO 3 El vector que termina en $(2,3,2)$ es $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, y el vector que termina en $(0,-1,4)$ es $-\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. La figura 1.1.10 muestra a $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$; el lector deberá trazar el vector $-\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. ▲

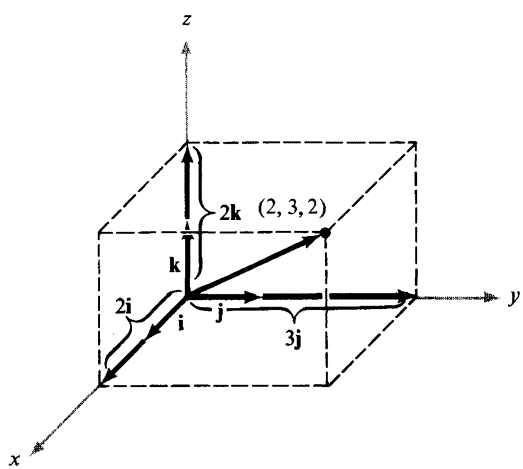


Figura 1.1.10 Representación de $(2,3,2)$ en términos de los vectores de la base canónica, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$.

La suma y la multiplicación por un escalar se pueden escribir en términos de los vectores de la base canónica como sigue:

$$(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) + (x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}) = (x + x')\mathbf{i} + (y + y')\mathbf{j} + (z + z')\mathbf{k}$$

y

$$\alpha(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = (\alpha x)\mathbf{i} + (\alpha y)\mathbf{j} + (\alpha z)\mathbf{k}.$$

Debido a la correspondencia entre puntos y vectores, a veces nos referimos al *punto* $\mathbf{a}$ en circunstancias en que se definió $\mathbf{a}$ como vector. El lector sobreentenderá que nos referimos al *punto final* del vector $\mathbf{a}$.

EJEMPLO 4 *Describir los puntos que están dentro del paralelogramo cuyos lados adyacentes son los vectores* **a** *y* **b**.

SOLUCIÓN Considerar la figura 1.1.11. Supongamos que P es cualquier punto dentro del paralelogramo dado y construimos las rectas l_1 y l_2 que pasan por P y son paralelas a los vectores **a** y **b**, respectivamente; vemos que l_1 interseca el lado del paralelogramo determinado por el vector **b** en algún punto $t\mathbf{b}$, donde $0 \leq t \leq 1$. Asimismo, l_2 interseca al lado determinado por el vector **a** en algún punto $s\mathbf{a}$, donde $0 \leq s \leq 1$.

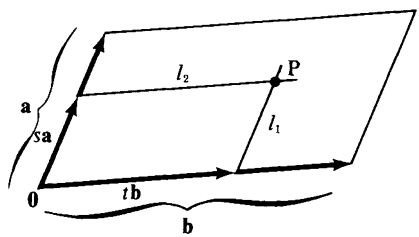


Figura 1.1.11 Descripción de los puntos dentro del paralelogramo formado por los vectores **a** y **b**.

Notar que P es el punto final de la diagonal de un paralelogramo con lados adyacentes $s\mathbf{a}$ y $t\mathbf{b}$; por lo tanto, si **v** denota al vector que termina en P, vemos que $\mathbf{v} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$. Así, todos los puntos en el paralelogramo dado son puntos finales de vectores de la forma $s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ para $0 \leq s \leq 1$ y $0 \leq t \leq 1$. Regresando sobre nuestros pasos vemos que todos los vectores de esta forma terminan dentro del paralelogramo. ▲

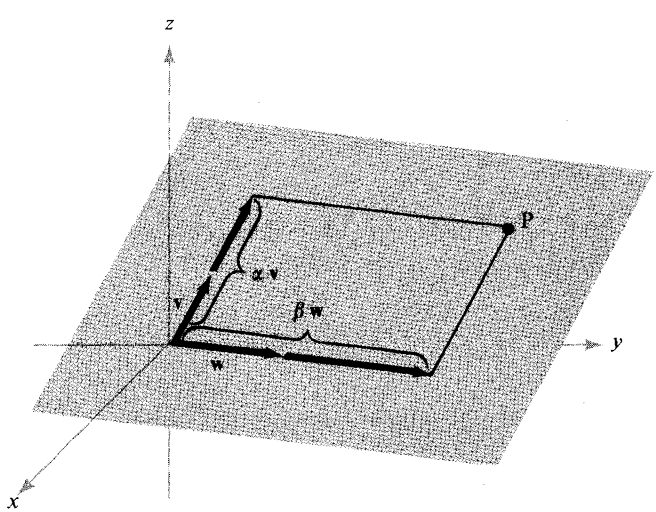


Figura 1.1.12 Descripción de los puntos P en el plano formado por los vectores **v** y **w**.

Como dos rectas que pasan por el origen determinan un plano que pasa por el origen, lo mismo sucede con dos vectores no paralelos. Si aplicamos el mismo razonamiento del ejemplo 4, vemos que el plano formado por dos vectores no paralelos $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ consta de todos los puntos de la forma $\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}$, donde α y β varían sobre los números reales. Noten que cualquier punto P en el plano formado por los dos vectores será el vértice opuesto del paralelogramo determinado por $\alpha\mathbf{v}$ y $\beta\mathbf{w}$, donde α y β son algunos escalares, como en la figura 1.1.12.

El plano determinado por $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ se llama plano *generado por* $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$. Cuando $\mathbf{v}$ es un múltiplo escalar de $\mathbf{w}$ y $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son paralelos y el plano degenera en una recta. Cuando $\mathbf{v} = \mathbf{w} = \mathbf{0}$ (esto es, cuando ambos son el vector cero), obtenemos un solo punto.

Hay tres planos particulares que surgen de manera natural en un sistema coordenado y que usaremos más adelante. Al plano generado por los vectores $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ se le llama plano xy, al plano generado por $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$, plano yz, y al plano generado por $\mathbf{i}$ y $\mathbf{k}$, plano xz. Se ilustran estos planos en la figura 1.1.13.

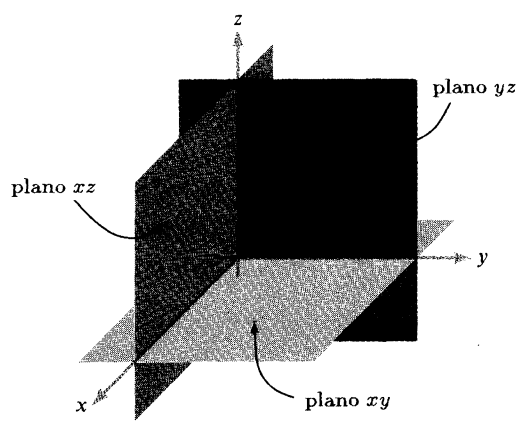


Figura 1.1.13 Los tres planos coordenados.

Los planos y las rectas son objetos geométricos que se pueden representar mediante ecuaciones. Pospondremos hasta la sección 1.3 el estudio de las ecuaciones que representan planos. Sin embargo, usando la interpretación geométrica de la suma vectorial y de la multiplicación por un escalar, podemos hallar la *ecuación de una recta l que pase por el punto final o extremo del vector* $\mathbf{a}$, *con la dirección de un vector* $\mathbf{v}$ (ver la figura 1.1.14). Conforme t varía por todos los números reales, los puntos de la forma $t\mathbf{v}$ son todos los múltiplos escalares del vector $\mathbf{v}$, y por lo tanto, agotan los puntos de la recta que pasa por el origen en la dirección de $\mathbf{v}$. Como todo punto sobre l es el extremo de la diagonal de un paralelogramo con lados $\mathbf{a}$ y $t\mathbf{v}$ para algún valor real de t, vemos que todos los puntos sobre l son de la forma $\mathbf{a} + t\mathbf{v}$. Así, la recta l se puede expresar mediante la ecuación $\mathbf{l}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$. Decimos que l está expresada de manera *paramétrica*, con el parámetro t. En $t = 0$, $\mathbf{l}(t) = \mathbf{a}$. Cuando t crece, el punto $\mathbf{l}(t)$ se mueve

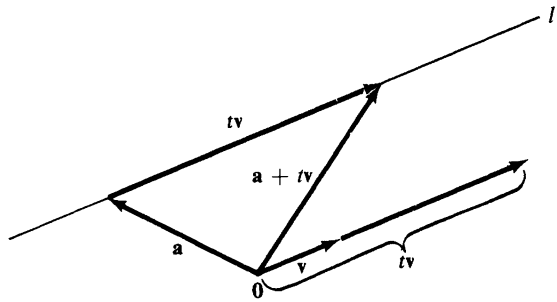


Figura 1.1.14 La recta l, dada en forma paramétrica por $\mathbf{l}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$, está en dirección de $\mathbf{v}$ y pasa por la punta de $\mathbf{a}$.

alejándose de $\mathbf{a}$ en la dirección de $\mathbf{v}$. Conforme t decrece desde $t = 0$ por los valores negativos, $\mathbf{l}(t)$ se mueve alejándose de $\mathbf{a}$ en la dirección de $-\mathbf{v}$.

Puede haber varias *parametrizaciones* de la misma recta. Se pueden obtener escogiendo, en lugar de $\mathbf{a}$, un punto diferente sobre la recta dada, y formando la ecuación paramétrica de la recta comenzando en ese punto y en dirección de $\mathbf{v}$. Por ejemplo, el extremo de $\mathbf{a} + \mathbf{v}$ está sobre la recta $\mathbf{l}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$, y así, $\mathbf{l}_1(t) = (\mathbf{a} + \mathbf{v}) + t\mathbf{v}$ representa la misma recta. Incluso se pueden obtener otras parametrizaciones observando que si $\alpha \neq 0$, el vector $\alpha\mathbf{v}$ tiene la misma dirección que $\mathbf{v}$ (o la opuesta). Así, $\mathbf{l}_2(t) = \mathbf{a}+t\alpha\mathbf{v}$ es otra parametrización de $\mathbf{l}(t) = \mathbf{a}+t\mathbf{v}$.

EJEMPLO 5 *Determinar la ecuación de la recta que pasa por* $(1, 0, 0)$ *en dirección de* $\mathbf{j}$.

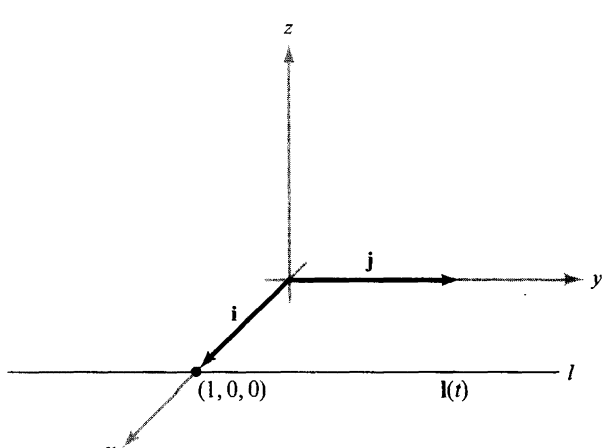


Figura 1.1.15 La recta l pasa por la punta de $\mathbf{i}$ en la dirección $\mathbf{j}$.

SOLUCIÓN La recta deseada se puede expresar en forma paramétrica como $\mathbf{l}(t) = \mathbf{i} + t\mathbf{j}$ (figura 1.1.15). En términos de coordenadas tenemos

$$\mathbf{l}(t) = (1, 0, 0) + t(0, 1, 0) = (1, t, 0). \quad \blacktriangle$$

Vamos a deducir *la ecuación de una recta que pasa por los puntos finales de dos vectores dados* **a** *y* **b**. Como el vector $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ es paralelo al segmento de recta dirigido que va de **a** a **b**, lo que deseamos es calcular la ecuación paramétrica de la recta que pasa por **a** en dirección de $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ (figura 1.1.16). Así,

$$\mathbf{l}(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}); \qquad \text{esto es,} \qquad \mathbf{l}(t) = (1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}.$$

Conforme t crece de 0 a 1, sucede que $t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ comienza como el vector cero y crece en longitud (manteniéndose en la dirección de $\mathbf{b} - \mathbf{a}$) hasta que en $t = 1$ es el vector $\mathbf{b} - \mathbf{a}$. Así, para $\mathbf{l}(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$, conforme t crece de 0 a 1, el vector $\mathbf{l}(t)$ sé mueve de la punta de **a** a la punta de **b** a lo largo del segmento de recta dirigido de **a** a **b**.

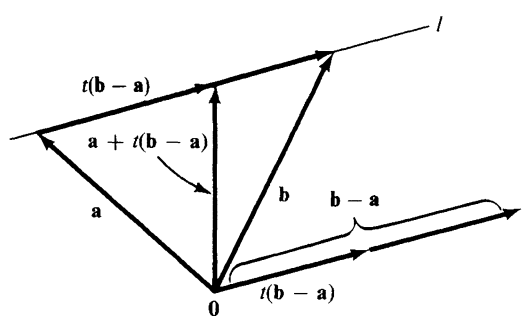


Figura 1.1.16 La recta l, dada en forma paramétrica por $\mathbf{l}(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$, pasa por las puntas de **a** y **b**.

EJEMPLO 6 *Hallar la ecuación de la recta que pasa por* $(-1, 1, 0)$ *y* $(0, 0, 1)$ *(ver la figura 1.1.17).*

SOLUCIÓN Representemos los puntos dados por $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{k}$; tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{l}(t) &= (1 - t)(-\mathbf{i} + \mathbf{j}) + t\mathbf{k} \\ &= -(1 - t)\mathbf{i} + (1 - t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}. \end{aligned}$$

La ecuación de esta recta se puede escribir entonces como

$$\mathbf{l}(t) = (t - 1)\mathbf{i} + (1 - t)\mathbf{j} + t\mathbf{k},$$

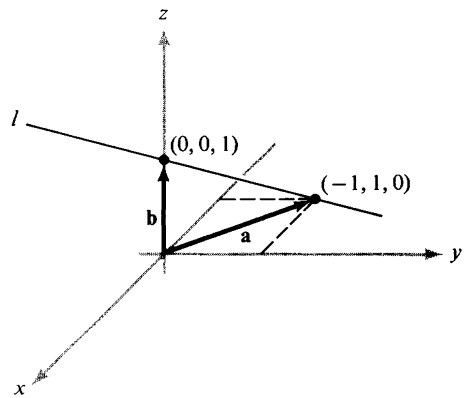


Figura 1.1.17 Caso especial de la figura anterior, donde $\mathbf{a} = (-1, 1, 0)$ y $\mathbf{b} = (0, 0, 1)$.

o, de manera equivalente, si $\mathbf{l}(t) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$,

$$x = t - 1, \qquad y = 1 - t, \qquad z = t. \qquad \blacktriangle$$

En términos de componentes, *la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos* (x_1, y_1, z_1) *y* (x_2, y_2, z_2) *es*

$$x = x_1 + t(x_2 - x_1), \qquad y = y_1 + t(y_2 - y_1), \qquad z = z_1 + t(z_2 - z_1)$$

Eliminando t es posible escribir esto como

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Notamos que cualquier vector de la forma $\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$, donde $\lambda + \mu = 1$, está sobre la *recta que pasa por los extremos de* $\mathbf{a}$ *y* $\mathbf{b}$. Para verlo, observar que $\mathbf{c} = (1 - \mu)\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} = \mathbf{a} + \mu(\mathbf{b} - \mathbf{a})$.

EJEMPLO 7 *Usar métodos vectoriales para probar que las diagonales de un paralelogramo se bisecan entre sí.*

SOLUCIÓN Representemos los lados adyacentes del paralelogramo por los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, como se muestra en la figura 1.1.18. Primero calculamos el vector que va al punto medio del segmento de recta PQ. Como $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ es paralelo e igual en longitud al segmento dirigido de P a Q, $(\mathbf{b} - \mathbf{a})/2$ es paralelo e igual en longitud al segmento de recta dirigido de P al punto medio de PQ. Así, el vector $\mathbf{a} + (\mathbf{b} - \mathbf{a})/2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b})/2$ termina en el punto medio de PQ.

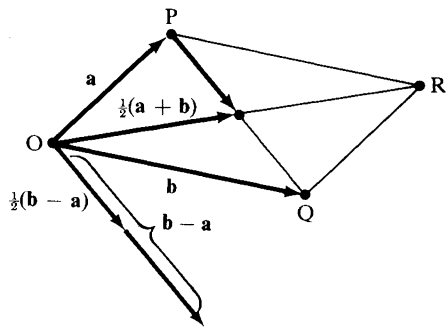


Figura 1.1.18 Construcciones usadas para demostrar que las diagonales de un paralelogramo se bisecan entre sí.

A continuación calculamos el vector que va al punto medio de OR. Sabemos que $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ termina en R, de modo que $(\mathbf{a}+\mathbf{b})/2$ termina en el punto medio de OR. En vista de que ya probamos que el vector $(\mathbf{a}+\mathbf{b})/2$ termina en el punto medio de OR y en el punto medio de PQ, se sigue que OR y PQ se bisecan entre sí. ▲

Consideremos ahora algunas aplicaciones físicas de los vectores. Un ejemplo sencillo de cantidad física que se representa mediante un vector es un desplazamiento. Suponer que en una parte de la superficie terrestre lo suficientemente pequeña para considerarse plana, introducimos coordenadas de modo que el eje x apunte al este, el eje y apunte al norte, y la unidad de longitud sea el kilómetro. Si estamos en un punto P y queremos ir a un punto Q, el *vector de desplazamiento* $\mathbf{d}$ que une a P con Q nos indica la dirección y la distancia que tenemos que viajar. Si x y y son las componentes de este vector, el desplazamiento de P a Q es "x kilómetros al este, y kilómetros al norte".

EJEMPLO 8 *Supongan que dos navegantes que no se pueden ver entre sí, pero que se pueden comunicar por radio, quieren determinar la posición relativa de sus barcos. Explicar cómo pueden hacerlo si cada uno tiene la capacidad de determinar su vector de desplazamiento al mismo faro.*

SOLUCIÓN Sean P_1 y P_2 las posiciones de los barcos, y sea Q la posición del faro. El desplazamiento del i-ésimo barco al faro es el vector $\mathbf{d}_i$ que une a P_i con Q. El desplazamiento del primer barco al segundo es el vector $\mathbf{d}$ que une a P_1 con P_2. Tenemos que $\mathbf{d}+\mathbf{d}_2=\mathbf{d}_1$ (figura 1.1.19), de modo que $\mathbf{d}=\mathbf{d}_1-\mathbf{d}_2$. Esto es, el desplazamiento de un barco hasta el otro es la diferencia entre los desplazamientos desde los barcos hasta el faro. ▲

También podemos representar como vector la velocidad de un objeto en movimiento. Por el momento, sólo consideraremos objetos moviéndose con rapidez

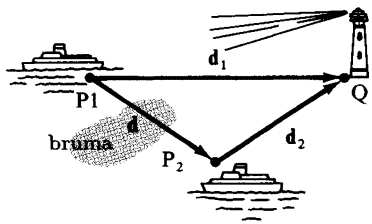


Figura 1.1.19 Se pueden usar métodos vectoriales para localizar objetos.

uniforme a lo largo de rectas. Supongan, por ejemplo, que un bote de vapor cruza un lago navegando a 10 kilómetros por hora (km/h) en dirección noreste. Después de 1 hora de viaje, el desplazamiento es $(10/\sqrt{2}, 10/\sqrt{2}) \approx (7.07, 7.07)$; ver la figura 1.1.20.

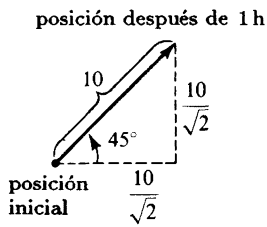


Figura 1.1.20 Si un objeto se mueve hacia el nordeste a 10 km/h, su vector velocidad tiene componentes $(10/\sqrt{2}, 10/\sqrt{2})$.

El vector cuyas componentes son $(10/\sqrt{2}, 10/\sqrt{2})$ se llama *vector velocidad* del bote. En general, si un objeto se mueve uniformemente a lo largo de una recta, *su vector velocidad es el vector desplazamiento desde la posición en cualquier momento hasta la posición en el momento* 1 *unidad de tiempo después.* Si aparece una corriente en el lago moviéndose hacia el este a 2 km/h, y el bote continúa apuntando hacia la misma dirección con el motor funcionando a la misma razón, su desplazamiento después de 1 hora tendrá las componentes dadas por

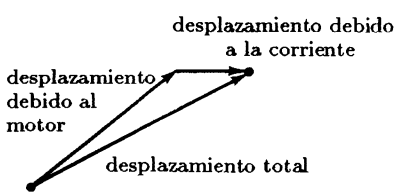


Figura 1.1.21 El desplazamiento total es la suma de los desplazamientos debidos al motor y a la corriente.

$(10/\sqrt{2}+2, 10/\sqrt{2})$; ver la figura 1.1.21. Por lo tanto el nuevo vector velocidad tiene componentes $(10/\sqrt{2}+2, 10/\sqrt{2})$. Notamos que ésta es la suma del vector velocidad original $(10/\sqrt{2}, 10/\sqrt{2})$ del bote y el vector velocidad $(2,0)$ de la corriente.

Si un objeto tiene vector velocidad (constante) $\mathbf{v}$, entonces en t segundos su vector desplazamiento resultante es $\mathbf{d} = t\mathbf{v}$; ver la figura 1.1.22.

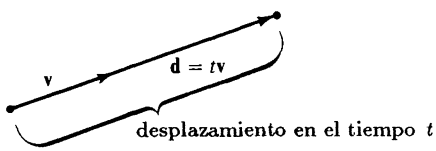


Figura 1.1.22 Desplazamiento = tiempo × velocidad.

EJEMPLO 9 *Un ave va volando en línea recta con vector velocidad* $10\mathbf{i}+6\mathbf{j}+\mathbf{k}$ *(en kilómetros por hora). Suponer que* (x,y) *son sus coordenadas en tierra y que* z *es su altura.*

(a) *Si en cierto momento el ave está en la posición* $(1,2,3)$, *¿dónde estará una hora después? ¿Y un minuto después?*

(b) *¿Cuántos segundos tarda el ave en subir* 10 *metros?*

SOLUCIÓN (a) El vector desplazamiento desde $(1,2,3)$ después de 1 hora es $10\mathbf{i}+6\mathbf{j}+\mathbf{k}$, de modo que la nueva posición es $(1,2,3)+(10,6,1)=(11,8,4)$. Después de 1 minuto, el vector desplazamiento desde $(1,2,3)$ es $\frac{1}{60}(10\mathbf{i}+6\mathbf{j}+\mathbf{k}) = \frac{1}{6}\mathbf{i}+\frac{1}{10}\mathbf{j}+\frac{1}{60}\mathbf{k}$, de modo que la nueva posición es $(1,2,3)+(\frac{1}{6},\frac{1}{10},\frac{1}{60}) = (\frac{7}{6},\frac{21}{10},\frac{181}{60})$.

(b) Después de t segundos ($= t/3600\,\mathrm{h}$), el vector desplazamiento desde $(1,2,3)$ es $(t/3600)(10\mathbf{i}+6\mathbf{j}+\mathbf{k}) = (t/360)\mathbf{i}+(t/600)\mathbf{j}+(t/3600)\mathbf{k}$. El incremento en altura es la componente z $t/3600$. Esto es igual a $10\,\mathrm{m}$ $(=\frac{1}{100}\,\mathrm{km})$ cuando $t/3600 = \frac{1}{100}$ —esto es, cuando $t = 36\,\mathrm{s}$. ▲

EJEMPLO 10 *Las fuerzas físicas tienen magnitud y dirección, de modo que pueden representarse mediante vectores. Si actúan simultáneamente varias fuerzas sobre un objeto, la fuerza resultante está representada por la suma de los vectores de fuerza individuales. Suponer que las fuerzas* $\mathbf{i}+\mathbf{k}$ *y* $\mathbf{j}+\mathbf{k}$ *actúan sobre un cuerpo. ¿Qué tercera fuerza debemos imponer para contrarrestar a las dos —esto es, para hacer que la fuerza total sea igual a cero?*

SOLUCIÓN La fuerza $\mathbf{F}$ deberá escogerse de manera que $(\mathbf{i}+\mathbf{k})+(\mathbf{j}+\mathbf{k})+\mathbf{v}=\mathbf{0}$; esto es, $\mathbf{v} = -(\mathbf{i}+\mathbf{k})-(\mathbf{j}+\mathbf{k}) = -\mathbf{i}-\mathbf{j}-2\mathbf{k}$. (Recordar que $\mathbf{0}$ es el *vector cero*, el vector cuyas componentes son todas cero.) ▲

NOTA HISTÓRICA

Aproximadamente hasta el año de 1900 muchos científicos se resistieron a usar vectores, en favor de la teoría más complicada de los cuaterniones. El libro que popularizó los métodos vectoriales fue *Vector Analysis,* de E. B. Wilson (reimpreso por Dover en 1960), basado en los cursos impartidos por J. W. Gibbs en Yale en 1899 y 1900. Wilson se resistía a tomar el curso de Gibbs, pues había llevado en Harvard un curso de un año con J. M. Pierce, campeón en métodos con cuaterniones, pero un jefe de departamento lo obligó a añadir el curso a su programa. (Para más detalles ver *A History of Vector Analysis,* de M. J. Crowe, University of Notre Dame Press, Notre Dame, Ind., 1967.)

EJERCICIOS

(Los ejercicios que tienen números y letras dentro de un cuadro están resueltos en la Guía de estudio.)

Completar los cálculos en los ejercicios del 1 *al* 6.

1. $(-21, 23) - (?, 6) = (-25, ?)$

2. $3(133, -0.33, 0) + (-399, 0.99, 0) = (?, ?, ?)$

3. $(8a, -2b, 13c) = (52, 12, 11) + \frac{1}{2}(?, ?, ?)$

4. $(2, 3, 5) - 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} = (?, ?, ?)$

5. $800(0.03, 0, 0) = ?\mathbf{i} + ?\mathbf{j} + ?\mathbf{k}$

6. $(3, 4, 5) + (6, 2, -6) = (?, ?, ?)$

7. ¿Qué restricciones se deben tener sobre x, y y z de modo que la terna (x, y, z) represente un punto sobre el eje y? ¿Y sobre el eje z? ¿En el plano xz? ¿En el plano yz?

8. Trazar los vectores $\mathbf{v} = (2, 3, -6)$ y $\mathbf{w} = (-1, 1, 1)$. En esa figura, trazar $-\mathbf{v}$, $\mathbf{v}+\mathbf{w}$, $2\mathbf{v}$, y $\mathbf{v} - \mathbf{w}$.

9. (a) Generalizar la construcción geométrica en la figura 1.1.6 para mostrar que si $\mathbf{v}_1 = (x, y, z)$ y $\mathbf{v}_2 = (x', y', z')$ entonces $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = (x + x', y + y', z + z')$.

(b) Usando un argumento basado en triángulos semejantes, probar que $\alpha\mathbf{v} = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$ cuando $\mathbf{v} = (x, y, z)$.

10. Repetir el ejercicio 8 usando $\mathbf{v} = (2, 1, 3)$ y $\mathbf{w} = (-2, 0, -1)$.

En los ejercicios del 11 al 17, usar notación de conjuntos o vectorial, o ambas, para describir los puntos que están en las configuraciones dadas, como lo hicimos en los ejemplos 4, 5 y 6.

11. El plano generado por $\mathbf{v}_1 = (2, 7, 0)$ y $\mathbf{v}_2 = (0, 2, 7)$.

12. El plano generado por $\mathbf{v}_1 = (3, -1, 1)$ y $\mathbf{v}_2 = (0, 3, 4)$.

13. La recta que pasa por $(-1, -1, -1)$ en la dirección de $\mathbf{j}$.

14. La recta que pasa por $(0, 2, 1)$ en la dirección de $2\mathbf{i} - \mathbf{k}$.

15. La recta que pasa por $(-1, -1, -1)$ y $(1, -1, 2)$.

16. La recta que pasa por $(-5, 0, 4)$ y $(6, -3, 2)$.

17. El paralelogramo cuyos lados adyacentes son los vectores $\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$ y $-2\mathbf{j}$.

18. Hallar los puntos de intersección de la recta $x = 3 + 2t$, $y = 7 + 8t$, $z = -2 + t$, esto es, $\mathbf{l}(t) = (3 + 2t, 7 + 8t, -2 + t)$, con los planos coordenados.

19. Mostrar que no hay puntos (x, y, z) que satisfagan $2x - 3y + z - 2 = 0$ y que estén sobre la recta $\mathbf{v} = (2, -2, -1) + t(1, 1, 1)$.

20. Mostrar que todo punto sobre la recta $\mathbf{v} = (1, -1, 2) + t(2, 3, 1)$ satisface $5x - 3y - z - 6 = 0$.

21. Mostrar que las medianas de un triángulo se intersecan en un punto, y que este punto divide a cada mediana con una razón $2 : 1$.

En los ejercicios del 22 al 24, usar métodos vectoriales para describir las configuraciones dadas.

22. El paralelepípedo que tiene como aristas a los vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$. (La región que tenemos en mente está en la figura 1.3.5.)

23. Los puntos dentro del paralelogramo con una esquina en (x_0, y_o, z_0) tal que los lados que salen de esa esquina son iguales en magnitud y dirección a los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

24. El plano determinado por los tres puntos (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2).

25. Un barco situado en la posición $(1, 0)$ en una carta de navegación (con el norte en la dirección y positiva) divisa una roca en la posición $(2, 4)$. ¿Cuál es el vector que une al barco con la roca? ¿Qué ángulo θ forma este vector con la dirección norte? (Se le llama la *orientación* de la roca desde el barco.)

26. Supongan que el barco del ejercicio 25 apunta al rumbo norte y viaja con una rapidez de 4 nudos respecto al agua. Hay una corriente que fluye con dirección este a 1 nudo; las unidades de la carta son millas náuticas; 1 nudo = 1 milla náutica por hora.

(a) Si no hubiera corriente, ¿qué vector **u** representaría la velocidad del barco respecto al fondo del mar?

(b) Si el barco siguiera la corriente, ¿qué vector **v** representaría su velocidad respecto al fondo del mar?

(c) ¿Qué vector **w** representa la velocidad total del barco?

(d) ¿Dónde estará el barco después de una hora?

(e) ¿Deberá cambiar el rumbo el capitán?

(f) ¿Qué pasaría si la roca fuera un iceberg?

27. Un aeroplano está situado en la posición $(3, 4, 5)$ al mediodía, y viaja con velocidad $400\mathbf{i} + 500\mathbf{j} - \mathbf{k}$ kilómetros por hora. El piloto sabe que hay un aeropuerto en la posición $(23, 29, 0)$.

(a) ¿A qué hora pasará el avión directamente sobre el aeropuerto? (Suponer que la Tierra es plana y que el vector **k** apunta hacia arriba.)

(b) ¿Cuál será la altura del avión cuando pase?

28. La velocidad $\mathbf{v}_1$ del viento es de 40 millas por hora (mi/h) de este a oeste, mientras que un aeroplano viaja con velocidad en el aire $\mathbf{v}_2$ de 100 mi/h con rumbo norte. La rapidez del aeroplano respecto a la Tierra es el vector suma $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$.

(a) Hallar $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$.

(b) Trazar una figura a escala.

29. Una fuerza de 50 lb se dirige a 50° sobre la horizontal, apuntando a la derecha. Determinar sus componentes horizontal y vertical. Mostrar los resultados en una figura.

30. Dos personas jalan horizontalmente de cuerdas atadas a un poste; el ángulo entre las cuerdas es de 60°. A jala con una fuerza de 150 lb, mientras que B jala con una fuerza de 110 lb.

(a) La fuerza resultante es la suma vectorial de las dos fuerzas en un sistema coordenado escogido de manera conveniente. Trazar una figura a escala que represente gráficamente a las tres fuerzas.

(b) Usando trigonometría, determinar fórmulas para las componentes vectoriales de las dos fuerzas en un sistema coordenado escogido de manera conveniente. Efectuar la suma algebraica y hallar el ángulo que la fuerza resultante hace con A.

31. 1 kilogramo (kg) masa situado en el origen se cuelga de cuerdas fijadas en los puntos $(1, 1, 1)$ y $(-1, -1, 1)$. Si la fuerza de gravedad apunta en la direccción del vector $-\mathbf{k}$, ¿cuál es el vector que describe la fuerza a lo largo de cada cuerda? [IDEA: Usar la simetría del problema. 1 kg masa pesa 9.8 newtons (N).]

32. Escribir la ecuación química $CO + H_2O = H_2 + CO_2$ como una ecuación en ternas ordenadas (C, O, H), e ilustrarla mediante un diagrama vectorial en el espacio.

33. (a) Escribir la ecuación química $pC_3H_4O_3 + qO_2 = rCO_2 + sH_2O$ como una ecuación en ternas ordenadas con coeficientes desconocidos p, q, r y s.

(b) Hallar la menor solución entera positiva posible para p, q, r y s,

(c) Ilustrar la solución mediante un diagrama vectorial en el espacio.

***34.** Hallar una recta que esté en el conjunto definido por la ecuación $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

1.2 EL PRODUCTO INTERNO

En ésta y en la sección siguiente estudiaremos dos productos de vectores: el producto interno y el producto cruz. Son muy útiles en aplicaciones físicas y tienen interpretaciones geométricas interesantes. El primer producto que vamos a considerar se llama *producto interno*. Con frecuencia se le llama también *producto punto*.

Supongamos que tenemos dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ en $\mathbf{R}^3$ (figura 1.2.1) y queremos determinar el ángulo entre ellos, esto es, el menor ángulo subtendido por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ en el plano que generan. El producto interno nos permite hacerlo. Primero desarrollamos formalmente el concepto y después probamos que este producto hace lo que aseguramos. Sea $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$. Definimos el *producto interno* de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, que se escribe como $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, como el número real

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Noten que el producto interno de dos vectores es una cantidad escalar. A veces se denota al producto interno por $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$. Es frecuente hacerlo por razones tipográficas. *Así,* $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ *y* $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ *significan exactamente lo mismo.*

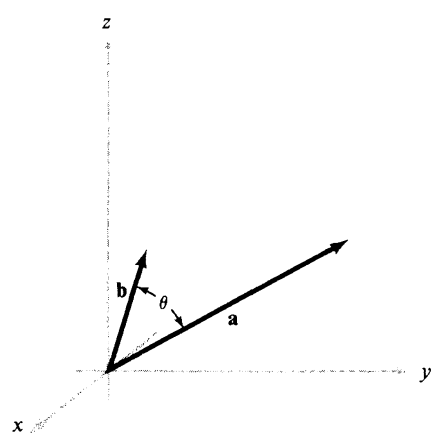


Figura 1.2.1 θ es el ángulo entre los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

A partir de la definición se siguen ciertas propiedades del producto interno. Si $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ son vectores en $\mathbf{R}^3$ y α y β son números reales, entonces

(i) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$;
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$ si, y sólo si, $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

(ii) $\alpha\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ y $\mathbf{a} \cdot \beta\mathbf{b} = \beta(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$.

(iii) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ y $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$.

(iv) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$.

Para probar la primera de estas propiedades, observen que si $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, entonces $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$. Como a_1, a_2 y a_3 son números reales, sabemos que $a_1^2 \geq 0$, $a_2^2 \geq 0$, $a_3^2 \geq 0$. Así, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} \geq 0$. Más aún, si $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0$, entonces $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, por lo tanto $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ (el vector cero). Las demostraciones de las otras propiedades del producto interno también se obtienen fácilmente.

Se sigue del teorema de Pitágoras que la *longitud* del vector $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$ es $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ (ver la figura 1.2.2). La longitud del vector $\mathbf{a}$ se denota por $||\mathbf{a}||$. Es frecuente llamar a esta cantidad la *norma* de $\mathbf{a}$. Como $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = a_1^2+a_2^2+a_3^2$, se sigue que

$$||\mathbf{a}|| = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})^{1/2}.$$

Los vectores que tienen norma 1 se llaman *vectores unitarios*. Por ejemplo, los vectores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ son vectores unitarios. Observar que para cualquier vector distinto de cero $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}/||\mathbf{a}||$ es un vector unitario; cuando dividimos $\mathbf{a}$ entre $||\mathbf{a}||$, decimos que hemos *normalizado* $\mathbf{a}$.

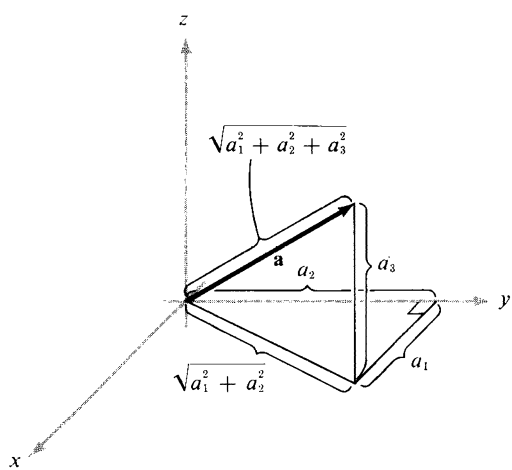


Figura 1.2.2 La longitud del vector $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ está dada por la fórmula pitagórica: $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

En el plano, definir el vector $\mathbf{i}_\theta = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\operatorname{sen}\theta)\mathbf{j}$, que es el vector unitario que forma un ángulo θ con el eje x (ver la figura 1.2.3). Claramente,

$$||\mathbf{i}_\theta|| = (\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta)^{1/2} = 1.$$

Si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son vectores, hemos visto que el vector $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ es paralelo a, y tiene la misma magnitud que el segmento de recta dirigido que va del extremo de $\mathbf{a}$ al extremo de $\mathbf{b}$. Se sigue que la distancia del extremo de $\mathbf{a}$ al extremo de $\mathbf{b}$ es $||\mathbf{b} - \mathbf{a}||$ (ver la figura 1.2.4).

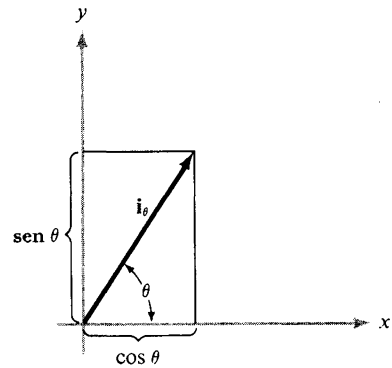


Figura 1.2.3 Las coordenadas de $\mathbf{i}_\theta$ son $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$.

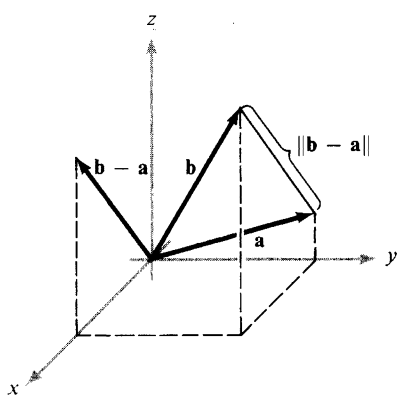


Figura 1.2.4 La distancia entre las puntas de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ es $\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|$.

EJEMPLO 1 *Hallar la distancia del extremo del vector* $\mathbf{i}$, *esto es, del punto* $(1, 0, 0)$ *al extremo del vector* $\mathbf{j}$, $(0, 1, 0)$.

SOLUCIÓN $\|\mathbf{j} - \mathbf{i}\| = \sqrt{(0-1)^2 + (1-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{2}.$ ▲

Mostremos ahora que el producto interno en efecto mide el ángulo entre dos vectores.

TEOREMA 1 *Sean* $\mathbf{a}$ *y* $\mathbf{b}$ *dos vectores en* $\mathbf{R}^3$ *y sea* θ, $0 \leq \theta \leq \pi$, *el ángulo entre ellos (figura 1.2.5). Entonces*

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \cos\theta.$$

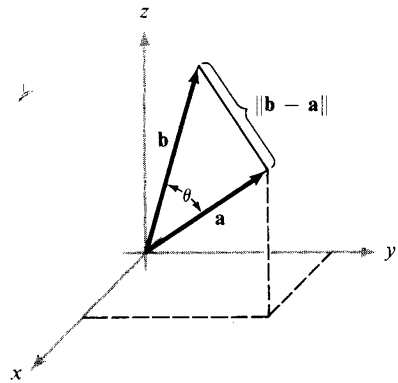


Figura 1.2.5 Los vectores **a**, **b** y el ángulo θ entre ellos; geometría del teorema 1 y su demostración.

De modo que podemos expresar el ángulo entre **a** *y* **b** *como*

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|}\right)$$

si **a** *y* **b** *son vectores distintos de cero.*

DEMOSTRACIÓN Si aplicamos la ley de los cosenos, aprendida en trigonometría, al triángulo con un vértice en el origen y lados adyacentes determinados por los vectores **a** y **b**, se sigue que

$$\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\cos\theta.$$

Como $\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|^2 = (\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})$, $\|\mathbf{a}\|^2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$, y $\|\mathbf{b}\|^2 = \mathbf{b}\cdot\mathbf{b}$, podemos reescribir la ecuación anterior como

$$(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - 2\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\cos\theta.$$

Ahora,

$$\begin{aligned}(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a}) &= \mathbf{b}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a}) - \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})\\ &= \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}\\ &= \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}.\end{aligned}$$

Así,

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - 2\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\cos\theta.$$

Esto es,

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\cos\theta. \qquad \blacksquare$$

Este resultado muestra que el producto interno de dos vectores es el producto de sus longitudes por el coseno del ángulo entre ellos. Esta relación es útil con frecuencia en problemas de naturaleza geométrica.

COROLARIO (DESIGUALDAD DE CAUCHY-SCHWARZ) *Para cualesquiera dos vectores* **a** *y* **b**, *tenemos*

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\|$$

con la igualdad si y sólo si **a** *es un múltiplo escalar de* **b**, *o uno de ellos es* **0**.

DEMOSTRACIÓN Si **a** no es un múltiplo escalar de **b**, entonces $|\cos\theta| < 1$ y se cumple la desigualdad. Cuando **a** es un múltiplo escalar de **b**, entonces $\theta = 0$ o π y $|\cos\theta| = 1$. ■

EJEMPLO 2 *Hallar el ángulo entre los vectores* $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ *e* $\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ *(figura 1.2.6).*

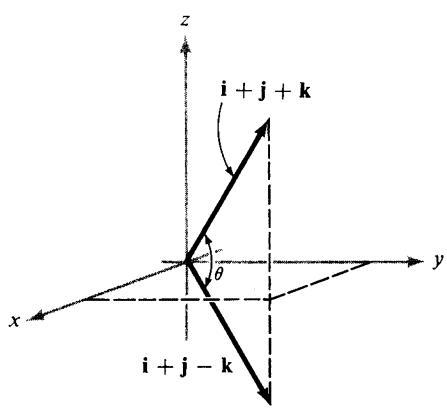


Figura 1.2.6 Búsqueda del ángulo entre $\mathbf{a} = \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$.

SOLUCIÓN Usando el teorema 1, tenemos

$$(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}) = \|\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}\| \, \|\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}\| \cos\theta$$

de modo que

$$1 + 1 - 1 = (\sqrt{3})(\sqrt{3}) \cos\theta.$$

De donde

$$\cos\theta = \tfrac{1}{3}.$$

Esto es,

$$\theta = \cos^{-1}(\tfrac{1}{3}) \approx 1.23 \text{ radianes } (71°). \qquad \blacktriangle$$

Si **a** y **b** son vectores distintos de cero en $\mathbf{R}^3$ y θ es el ángulo entre ellos, vemos que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ si y sólo si $\cos\theta = 0$. Así, *el producto interno de dos vectores distintos de cero es cero si y sólo si los vectores son perpendiculares.* Por lo tanto el producto interno nos proporciona un buen método para determinar si dos vectores son perpendiculares. Se suele decir que los vectores perpendiculares son *ortogonales.* Los vectores de la base canónica, **i**, **j** y **k** son ortogonales entre sí, y tienen longitud 1; dichos sistemas se llaman *ortonormales.* Adoptaremos la convención de que el vector cero es ortogonal a todos los vectores.

EJEMPLO 3 *Los vectores* $\mathbf{i}_\theta = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\operatorname{sen}\theta)\mathbf{j}$ *y* $j_\theta = -(\operatorname{sen}\theta)\mathbf{i} + (\cos\theta)\mathbf{j}$ *son ortogonales, pues*

$$\mathbf{i}_\theta \cdot \mathbf{j}_\theta = -\cos\theta \operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta = 0$$

(ver la figura 1.2.7). $\blacktriangle$

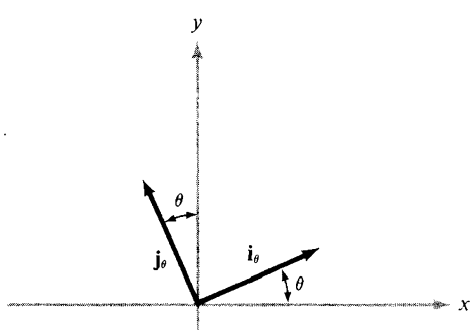


Figura 1.2.7 Los vectores $\mathbf{i}_\theta$ y $\mathbf{j}_\theta$ son ortogonales.

EJEMPLO 4 *Sean* **a** *y* **b** *dos vectores ortogonales distintos de cero. Si* **c** *es un vector en el plano generado por* **a** *y* **b**, *entonces hay escalares* α *y* β *tales que* $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$. *Usar el producto interno para determinar* α *y* β *(ver la figura 1.2.8).*

SOLUCIÓN Tomando el producto interno de **a** y **c**, tenemos

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \beta\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.$$

Como **a** y **b** son ortogonales, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, de modo que,

$$\alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}}{\|\mathbf{a}\|^2}.$$

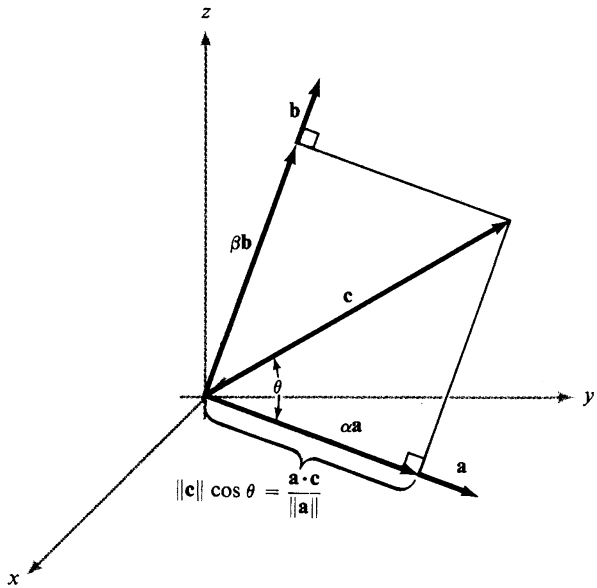


Figura 1.2.8 La geometría para la búsqueda de α y β donde $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$, como en el ejemplo 4.

De manera análoga,

$$\beta = \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}}{\|\mathbf{b}\|^2}. \qquad \blacktriangle$$

En este ejemplo, el vector $\alpha\mathbf{a}$ se llama la *proyección* de $\mathbf{c}$ a lo largo de $\mathbf{a}$, y $\beta\mathbf{b}$ es su *proyección* a lo largo de $\mathbf{b}$.

El resultado del ejemplo 4 también se puede obtener usando la interpretación geométrica del producto interno. Sea l la distancia medida a lo largo de la recta determinada al extender $\mathbf{a}$, del origen al punto donde la perpendicular desde $\mathbf{c}$ interseca a la extensión de $\mathbf{a}$. Se sigue que

$$l = \|\mathbf{c}\| \cos\theta$$

donde θ es el ángulo entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{c}$. Más aún, $l = \alpha\|\mathbf{a}\|$. Juntando estos resultados tenemos

$$\alpha\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{c}\|\cos\theta, \qquad \text{o} \qquad \alpha = \frac{\|\mathbf{c}\|\cos\theta}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{\|\mathbf{c}\|}{\|\mathbf{a}\|}\left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}}{\|\mathbf{c}\|\,\|\mathbf{a}\|}\right) = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}.$$

Así, *la proyección de* $\mathbf{c}$ *sobre* $\mathbf{a}$ *está dada por*

$$\frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a}.$$

Notar que la longitud de la proyección de un vector **c** sobre un vector **a**, donde θ es el ángulo entre **a** y **c**, está dada por

$$\|\mathbf{c}\|\,|\cos\theta| = \frac{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}|}{\|\mathbf{a}\|}$$

(ver la figura 1.2.9).

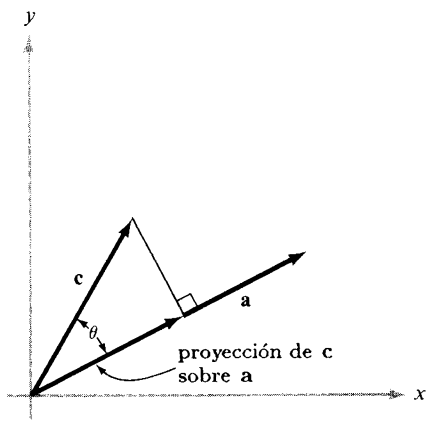


Figura 1.2.9 La proyección de **c** sobre **a** es $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}/\|\mathbf{a}\|^2)\mathbf{a}$.

EJERCICIOS

1. (a) Probar las propiedades (ii) y (iii) del producto interno.
(b) Probar que $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$.

2. Calcular $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ donde $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 12\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$.

3. Hallar el ángulo entre $7\mathbf{j} + 19\mathbf{k}$ y $-2\mathbf{i} - \mathbf{j}$ (al grado más cercano).

4. Calcular $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$, donde $\mathbf{u} = \sqrt{3}\mathbf{i} - 315\mathbf{j} + 22\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|$.

5. ¿Es igual a cero $\|8\mathbf{i} - 12\mathbf{k}\|\cdot\|6\mathbf{j} + \mathbf{k}\| - |(8\mathbf{i} - 12\mathbf{k})\cdot(6\mathbf{j} + \mathbf{k})|$? Explicar.

En los ejercicios del 6 al 11, calcular $\|\mathbf{u}\|$, $\|\mathbf{v}\|$ *y* $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ *para los vectores dados en* $\mathbf{R}^3$.

6. $\mathbf{u} = 15\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \pi\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$

7. $\mathbf{u} = 2\mathbf{j} - \mathbf{i}$, $\mathbf{v} = -\mathbf{j} + \mathbf{i}$

8. $\mathbf{u} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

9. $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$

10. $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 4\mathbf{j}$

11. $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

12. Normalizar los vectores en los ejercicios del 6 al 8.

13. Hallar el ángulo entre los vectores en los ejercicios del 9 al 11. De ser necesario, expresar la respuesta en términos de $\cos^{-1}$.

14. Hallar la proyección de $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ sobre $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.

15. Hallar la proyección de $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ sobre $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

16. ¿Qué restricciones se deben tener sobre b para que el vector $2\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ sea ortogonal a (a) $-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y (b) $\mathbf{k}$?

17. Hallar dos vectores no paralelos, ambos ortogonales a $(1, 1, 1)$.

18. Hallar la recta que pasa por $(3, 1, -2)$ que interseca y es perpendicular a la recta $x = -1 + t$, $y = -2 + t$, $z = -1 + t$. [IDEA: Si (x_0, y_0, z_0) es el punto de intersección, hallar sus coordenadas.]

19. Suponer que una fuerza $\mathbf{F}$ (por ejemplo, la gravedad) actúa verticalmente hacia abajo sobre un objeto situado en un plano inclinado en un ángulo de 45° respecto a la horizontal. Expresar esta fuerza como suma de una fuerza que actúe paralela al plano y una que actúe perpendicular a él.

20. Suponer que un objeto moviéndose en la dirección de $\mathbf{i}+\mathbf{j}$ está bajo la acción de una fuerza dada por el vector $2\mathbf{i} + \mathbf{j}$. Expresar esta fuerza como una suma de una fuerza en la dirección del movimiento y una fuerza perpendicular a la dirección del movimiento.

21. Una fuerza de 6 N (newtons) forma un ángulo de $\pi/4$ radianes con el eje y, apuntando a la derecha. La fuerza actúa en contra del movimiento de un objeto a lo largo de la recta que une $(1, 2)$ con $(5, 4)$.

(a) Hallar una fórmula para el vector de fuerza $\mathbf{F}$.

(b) Hallar el ángulo θ entre la dirección del desplazamiento $\mathbf{D} = (5-1)\mathbf{i}+(4-2)\mathbf{j}$ y la dirección de la fuerza $\mathbf{F}$.

(c) El *trabajo* realizado es $\mathbf{F}\cdot\mathbf{D}$, o de manera equivalente, $\|\mathbf{F}\|\,\|\mathbf{D}\|\cos\theta$. Calcular el trabajo con ambas fórmulas y comparar los resultados.

***22.** Un fluido fluye a través de una superficie plana con vector de velocidad uniforme $\mathbf{v}$. Sea $\mathbf{n}$ una normal unitaria a la superficie del plano. Mostrar que $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$ es el volumen del fluido que pasa por una unidad de área del plano en una unidad de tiempo.

1.3 EL PRODUCTO CRUZ

En la sección 1.2 hemos definido un producto de vectores que daba como resultado un escalar. En esta sección definiremos un producto de vectores que da como resultado un vector; esto es, mostraremos cómo dados dos vectores **a** y **b**, podemos producir un tercer vector $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, llamado el *producto cruz* de **a** y **b**. Este nuevo vector tendrá la muy agradable propiedad geométrica de ser perpendicular al plano generado (determinado) por **a** y **b**. La definición del producto cruz está basada en los conceptos de matriz y determinante que desarrollamos primero. Una vez hecho esto podremos estudiar las implicaciones geométricas de la estructura matemática construida.

Definimos una *matriz* de 2×2 como un arreglo

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

donde a_{11}, a_{12}, a_{21} y a_{22} son cuatro escalares. Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 13 & 7 \\ 6 & 11 \end{bmatrix}$$

son matrices de 2×2. El *determinante*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

de dicha matriz es el número real definido por la ecuación

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1}$$

EJEMPLO 1

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2; \quad \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 40 - 42 = -2. \qquad \blacktriangle$$

Una matriz de 3×3 es un arreglo

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

donde, de nuevo, cada a_{ij} es un escalar; a_{ij} denota el registro o posición en el arreglo que está en el i-ésimo renglón y la j-ésima columna. Definimos el

determinante de una matriz de 3×3 por la regla

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Sería difícil memorizar la fórmula (2) sin algún recurso mnemotécnico. La regla que hay que aprender es que nos movemos a lo largo del primer renglón, multiplicando a_{1j} por el determinante de la matriz de 2×2 obtenida al eliminar el primer renglón y la j-ésima columna, y después sumando todo esto, pero recordando poner un signo de resta antes del término a_{12}. Por ejemplo, el determinante multiplicado por el término de enmedio en la fórmula (2), a saber

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

se obtiene al eliminar el primer renglón y la segunda columna de la matriz dada de 3×3:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

EJEMPLO 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3 + 12 - 9 = 0. \qquad \blacktriangle$$

Una importante propiedad de los determinantes es que al intercambiar dos renglones o dos columnas se cambia su signo. Para determinantes de 2×2, esto es una consecuencia de la definición. Para renglones tenemos

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \\ &= -(a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22}) = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

y para columnas,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}) = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}.$$

Dejamos al lector verificar esta propiedad para el caso de 3×3. (Ver el ejercicio 1 al final de la sección.)

Una segunda propiedad fundamental de los determinantes es que podemos sacar como factor común a escalares de cualquier renglón o columna. Para determinantes de 2×2 esto significa

$$\begin{vmatrix} \alpha a_{11} & a_{12} \\ \alpha a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \alpha a_{12} \\ a_{21} & \alpha a_{22} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{vmatrix}.$$

De manera análoga, para determinantes de 3×3 tenemos

$$\begin{vmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \alpha a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \alpha a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \alpha a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

y así sucesivamente. Estos resultados se siguen de las definiciones. En particular, si cualquier renglón o columna está formado(a) por ceros, entonces el valor del determinante es cero.

Un tercer hecho fundamental acerca de los determinantes es el siguiente: si cambiamos un renglón (o columna) mediante la suma de otro renglón (o, respectivamente, columna), no cambia el valor del determinante. Para el caso de 2×2 esto significa que

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 + a_1 & b_2 + a_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 + a_2 & a_2 \\ b_1 + b_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 + a_2 \\ b_1 & b_1 + b_2 \end{vmatrix}.$$

Para el caso de 3×3, esto significa que

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & a_3 + b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + a_2 & a_2 & a_3 \\ b_1 + b_2 & b_2 & b_3 \\ c_1 + c_2 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

y así sucesivamente. De nuevo, se puede probar esta propiedad usando la definición de determinante (ver el ejercicio 35).

EJEMPLO 3 *Suponer*

$$\mathbf{a} = \alpha\mathbf{b} + \beta\mathbf{c}; \text{ i.e., } \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) = \alpha(b_1, b_2, b_3) + \beta(c_1, c_2, c_3)$$

Mostrar que

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

SOLUCIÓN Probaremos el caso $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$. El caso $\alpha = 0 = \beta$ es trivial, y el caso en que exactamente uno de α, β es cero, es una modificación sencilla del caso que probamos. Usando las propiedades fundamentales de los determinantes, el determinante en cuestión es

$$\begin{vmatrix} \alpha b_1 + \beta c_1 & \alpha b_2 + \beta c_2 & \alpha b_3 + \beta c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{\alpha} \begin{vmatrix} \alpha b_1 + \beta c_1 & \alpha b_2 + \beta c_2 & \alpha b_3 + \beta c_3 \\ -\alpha b_1 & -\alpha b_2 & -\alpha b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

(factorizando $-1/\alpha$ en el segundo renglón)

$$= \left(-\frac{1}{\alpha}\right)\left(-\frac{1}{\beta}\right) \begin{vmatrix} \alpha b_1 + \beta c_1 & \alpha b_2 + \beta c_2 & \alpha b_3 + \beta c_3 \\ -\alpha b_1 & -\alpha b_2 & -\alpha b_3 \\ -\beta c_1 & -\beta c_2 & -\beta c_3 \end{vmatrix}$$

(factorizando $-1/\beta$ en el tercer renglón)

$$= \frac{1}{\alpha\beta} \begin{vmatrix} \beta c_1 & \beta c_2 & \beta c_3 \\ -\alpha b_1 & -\alpha b_2 & -\alpha b_3 \\ -\beta c_1 & -\beta c_2 & -\beta c_3 \end{vmatrix} \quad \text{(sumando el segundo renglón al primero)}$$

$$= \frac{1}{\alpha\beta} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\alpha b_1 & -\alpha b_2 & -\alpha b_3 \\ -\beta c_1 & -\beta c_2 & -\beta c_3 \end{vmatrix} \quad \text{(sumando el tercer renglón al primero)}$$

$$= 0. \quad \blacktriangle$$

NOTA HISTÓRICA

Parece que en 1693 Leibniz inventó y usó los determinantes por primera vez, en relación con soluciones de ecuaciones lineales. Maclaurin y Cramer desarrollaron sus propiedades entre 1729 y 1750; en particular, mostraron que la solución del sistema de ecuaciones

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

es

$$x_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad x_2 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

y

$$x_3 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

donde

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

hecho conocido como la *regla de Cramer*. Posteriormente, Vandermonde (1772) y Cauchy (1812), al tratar los determinantes como un tema aparte que merecía atención especial, desarrollaron el campo de manera más sistemática, con contribuciones de Laplace, Jacobi, y otros. A Lagrange (1775) se deben fórmulas para volúmenes de paralelepípedos en términos de determinantes. Las estudiaremos más adelante en esta sección. No obstante que durante el siglo diecinueve los matemáticos estudiaron matrices y determinantes, los temas se consideraban por separado. Para conocer toda la historia hasta 1900, ver T. Muir, *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development*, reimpreso por Dover, New York, 1960.

Ahora que hemos enunciado las propiedades necesarias de los determinantes y estudiado su historia, estamos listos para proceder con el producto cruz de vectores. Sean $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ vectores en $\mathbf{R}^3$. El *producto cruz* de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, denotado por $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, está definido como el vector

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{k},$$

o, simbólicamente,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Aunque sólo definimos los determinantes para arreglos de números *reales*, esta expresión formal que incluye *vectores* es una ayuda útil para recordar el producto cruz.

Notar que el producto cruz de dos vectores es otro vector; a veces se le llama *producto vectorial.*

EJEMPLO 4 *Hallar* $(3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k})$.

SOLUCIÓN

$$(3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}. \qquad \blacktriangle$$

Ciertas propiedades algebraicas del producto cruz se deducen de la definición. Si $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ son vectores y α, β y γ son escalares, entonces

(i) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$

(ii) $\mathbf{a} \times (\beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}) = \beta(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \gamma(\mathbf{a} \times \mathbf{c})$
$(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + \beta(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

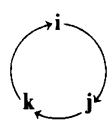
Notar que $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{a})$, por la propiedad (i). Así, $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$. En particular,

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = 0, \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{j} = 0, \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0.$$

Además

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j},$$

lo cual se puede recordar al permutar cíclicamente $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ así:



Nuestro siguiente objetivo es proporcionar una interpretación geométrica del producto cruz. Para hacerlo, introducimos primero el triple producto. Dados tres vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$, el número real

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

se llama el *triple producto* de $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ (en ese orden). Para obtener una fórmula sean $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \cdot \left(\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \right) \\ &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Esto se puede escribir de manera más concisa como

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Supongan ahora que $\mathbf{a}$ es un vector en el plano generado por los vectores $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$. Esto significa que el primer renglón en la expresión como determinante de $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ es de la forma $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{b} + \beta\mathbf{c}$, y por lo tanto $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0$, por el

ejemplo 3. En otras palabras, el vector $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ es ortogonal a cualquier vector en el plano generado por $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$, en particular tanto a $\mathbf{b}$ como a $\mathbf{c}$.

A continuación calculamos la magnitud de $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$. Noten que

$$\begin{aligned}\|\mathbf{b} \times \mathbf{c}\|^2 &= \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}^2 \\ &= (b_2c_3 - b_3c_2)^2 + (b_1c_3 - c_1b_3)^2 + (b_1c_2 - c_1b_2)^2.\end{aligned}$$

Desarrollando esta última expresión, vemos que es igual a

$$\begin{aligned}&(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) - (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)^2 \\ &\quad = \|\mathbf{b}\|^2\,\|\mathbf{c}\|^2 - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})^2 = \|\mathbf{b}\|^2\,\|\mathbf{c}\|^2 - \|\mathbf{b}\|^2\,\|\mathbf{c}\|^2\cos^2\theta \\ &\quad = \|\mathbf{b}\|^2\,\|\mathbf{c}\|^2\operatorname{sen}^2\theta\end{aligned}$$

donde θ es el ángulo entre $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$, $0 \le \theta \le \pi$.

Combinando nuestros resultados concluimos que $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ *es un vector perpendicular al plano generado por* $\mathbf{b}$ *y* $\mathbf{c}$, *con longitud* $\|\mathbf{b}\|\,\|\mathbf{c}\|\,|\operatorname{sen}\theta|$. Sin embargo, hay dos vectores que pueden satisfacer estas condiciones, pues se pueden escoger dos direcciones que sean perpendiculares (o normales) al plano P generado por $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$. Esto se ve claro en la figura 1.3.1, que muestra las dos posibilidades $\mathbf{n}_1$ y $-\mathbf{n}_1$ perpendiculares a P, con $\|\mathbf{n}_1\| = \|-\mathbf{n}_1\| = \|\mathbf{b}\|\,\|\mathbf{c}\|\,|\operatorname{sen}\theta|$.

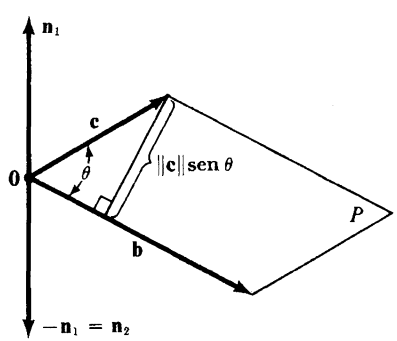


Figura 1.3.1 $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ son los dos posibles vectores ortogonales a $\mathbf{b}$ y a $\mathbf{c}$, ambos con norma $\|\mathbf{b}\|\,\|\mathbf{c}\|\,|\operatorname{sen}\theta|$.

¿Cuál es el vector que representa a $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$?, ¿$\mathbf{n}_1$ o $-\mathbf{n}_1$? La respuesta es $\mathbf{n}_1 = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$. Resuelvan algunos casos, como $\mathbf{k} = \mathbf{i} \times \mathbf{j}$, para verificarlo. La siguiente "regla de la mano derecha" determina la dirección de $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$: Si colocan la palma de su mano derecha de manera que sus dedos se curven desde $\mathbf{b}$ en la dirección de $\mathbf{c}$ en un ángulo θ, el dedo pulgar apuntará en la dirección de $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ (figura 1.3.2).

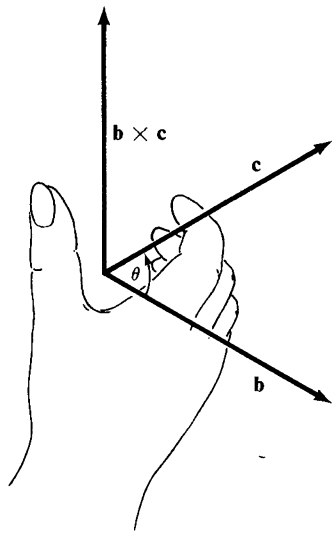


Figura 1.3.2 Regla de la mano derecha para determinar en cuál de las dos direcciones posibles apunta $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$.

Si $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ son colineales, $\operatorname{sen}\theta = 0$, de modo que $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{0}$. Si $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ no son colineales, entonces generan un plano y $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ es un vector perpendicular a este plano. *La longitud de* $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$, $\|\mathbf{b}\|\,\|\mathbf{c}\|\,|\operatorname{sen}\theta|$, *es simplemente el área del paralelogramo que tiene como lados adyacentes a los vectores* $\mathbf{b}$ *y* $\mathbf{c}$ (figura 1.3.3).

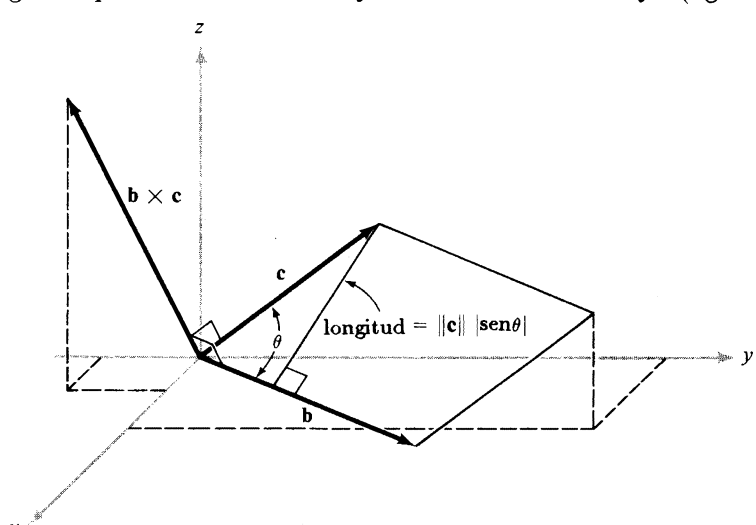


Figura 1.3.3 La longitud de $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ es igual al área del paralelogramo formado por $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$.

EJEMPLO 5 *Hallar un vector unitario ortogonal a los vectores* $\mathbf{i}+\mathbf{j}$ *y* $\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

SOLUCIÓN Un vector perpendicular a $\mathbf{i}+\mathbf{j}$ y a $\mathbf{j}+\mathbf{k}$ es el vector

$$(\mathbf{i}+\mathbf{j})\times(\mathbf{j}+\mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}.$$

Como $\|\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}\| = \sqrt{3}$, el vector

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})$$

es un vector unitario perpendicular a $\mathbf{i}+\mathbf{j}$ y $\mathbf{j}+\mathbf{k}$. ▲

Usando el producto cruz podemos obtener la interpretación geométrica básica de los determinantes de 2×2 y, más adelante, de 3×3. Sean $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}$ y $\mathbf{c} = c_1\mathbf{i}+c_2\mathbf{j}$ dos vectores en el plano. Si θ denota el ángulo entre $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$, hemos visto que $\|\mathbf{b}\times\mathbf{c}\| = \|\mathbf{b}\|\,\|\mathbf{c}\|\,|\operatorname{sen}\theta|$. Como ya se dijo, $\|\mathbf{b}\|\,\|\mathbf{c}\|\,|\operatorname{sen}\theta|$ es el área del paralelogramo con lados adyacentes $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ (ver la figura 1.3.3). Usando la definición del producto cruz,

$$\mathbf{b}\times\mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_1 & b_2 & 0 \\ c_1 & c_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}.$$

Así, $\|\mathbf{b}\times\mathbf{c}\|$ es el valor absoluto del determinante

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = b_1c_2 - b_2c_1.$$

De aquí se sigue que *el valor absoluto del determinante anterior es el área del paralelogramo que tiene como lados adyacentes a los vectores* $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}$ *y* $\mathbf{c} = c_1\mathbf{i}+c_2\mathbf{j}$.

EJEMPLO 6 *Hallar el área del triángulo con vértices en los puntos* $(1,1)$, $(0,2)$, *y* $(3,2)$ (figura 1.3.4).

SOLUCIÓN Sean $\mathbf{a} = \mathbf{i}+\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{j}$ y $\mathbf{c} = 3\mathbf{i}+2\mathbf{j}$. Es claro que el triángulo cuyos vértices son los extremos de los vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ tiene la misma área que el triángulo con vértices en $\mathbf{0}$, $\mathbf{b}-\mathbf{a}$ y $\mathbf{c}-\mathbf{a}$ (figura 1.3.4). En efecto, este último es sólo una traslación del triángulo anterior. Como el área de este triángulo trasladado es la mitad del área del paralelogramo con lados adyacentes $\mathbf{b}-\mathbf{a} = -\mathbf{i}+\mathbf{j}$ y $\mathbf{c}-\mathbf{a} = 2\mathbf{i}+\mathbf{j}$, hallamos que el área del triángulo con vértices $(1,1)$,

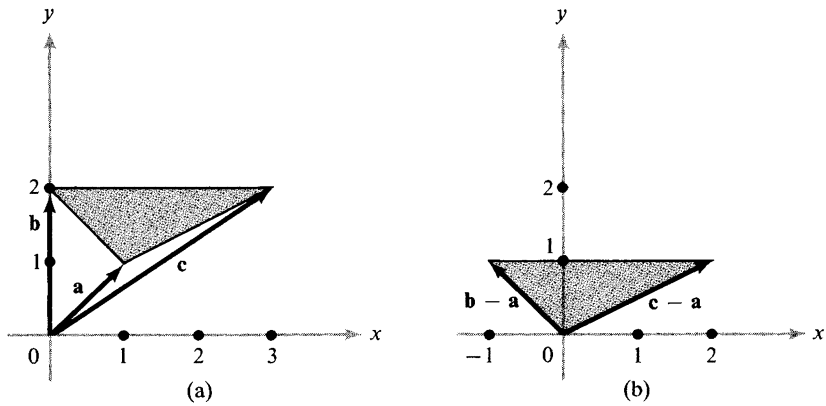


Figura 1.3.4 Problema (a): Hallar el área A del triángulo sombreado. Solución: Expresar los lados como diferencias de vectores (b) para obtener $A = \frac{1}{2}\|(\mathbf{b}-\mathbf{a}) \times (\mathbf{c}-\mathbf{a})\|$.

$(0,2)$ y $(3,2)$ es el valor absoluto de

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{3}{2},$$

esto es, $\frac{3}{2}$. ▲

Hay una interpretación de los determinantes de matrices de 3×3 como volúmenes, que es análoga a la interpretación de los determinantes de matrices de 2×2 como áreas. Sean $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$, vectores en $\mathbf{R}^3$. Mostraremos que *el volumen del paralelepípedo con aristas adyacentes* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *y* $\mathbf{c}$ (figura 1.3.5) *es el valor absoluto del determinante*

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Sabemos que $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ es el área del paralelogramo con lados adyacentes $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. Más aún, $|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}| = \|\mathbf{c}\|\,\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| \cos\psi$, donde ψ es el ángulo agudo que forma $\mathbf{c}$ con la normal al plano generado por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. Como el volumen del paralelepípedo con aristas adyacentes $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ es el producto del área de la base $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ por la altura $\|\mathbf{c}\| \cos\psi$, se sigue que el volumen es $|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$. Vimos en la pág. 35 que $D = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$. Al intercambiar renglones vemos que $D = -\mathbf{c} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$; por lo tanto, el valor absoluto de D es el volumen del paralelepípedo con aristas adyacentes $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$.

Para concluir esta sección, usaremos métodos vectoriales para determinar la ecuación de un plano en el espacio. Sean P un plano en el espacio, $\mathbf{a}$ un vector que termina en el plano, y $\mathbf{n}$ un vector normal al plano (ver la figura 1.3.6).

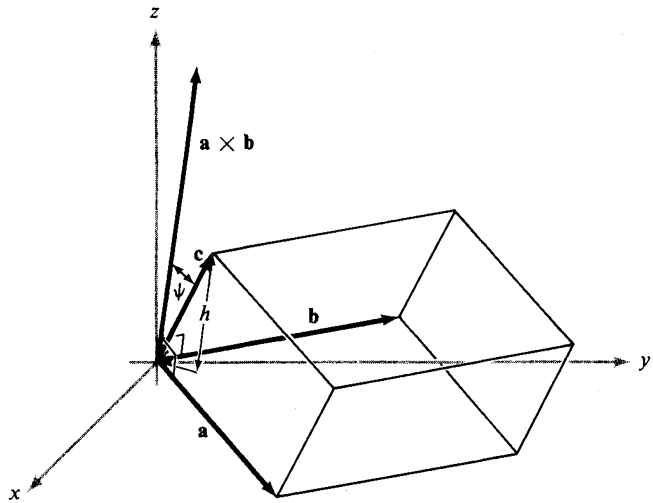


Figura 1.3.5 El volumen del paralelepípedo formado por **a**, **b**, **c** es el valor absoluto del determinante de la matriz de 3×3 con renglones **a**, **b** y **c**.

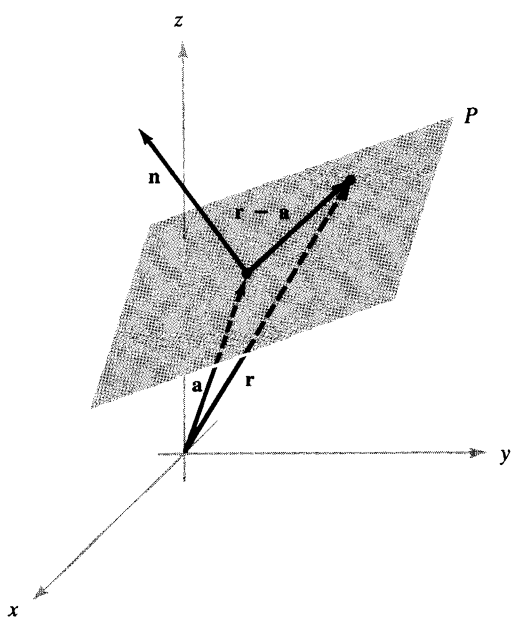


Figura 1.3.6 Los puntos **r** del plano que pasa por **a** y es perpendicular a **n** satisfacen la ecuación $(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n} = 0$.

Si $\mathbf{r}$ es un vector en $\mathbf{R}^3$, entonces el extremo de $\mathbf{r}$ está en el plano P si, y sólo si, $\mathbf{r}-\mathbf{a}$ es paralelo a P y, por lo tanto, si, y sólo si, $(\mathbf{r}-\mathbf{a})\cdot\mathbf{n} = 0$ ($\mathbf{n}$ es perpendicular a cualquier vector paralelo a P —ver la figura 1.3.6—). Como el producto interno es distributivo, esta última condición es equivalente a $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}$. Por lo tanto, si hacemos $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, $\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ y $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, se sigue que el extremo de $\mathbf{r}$ está en P si, y sólo si,

$$Ax + By + Cz = \mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{n} = Aa_1 + Ba_2 + Ca_3. \tag{3}$$

Como $\mathbf{n}$ y $\mathbf{a}$ se tomaron fijos, el lado derecho de la ecuación (3) es una constante, digamos, $-D$. Entonces una ecuación que determina el plano P es

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{4}$$

donde $A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ es normal a P; recíprocamente, si A, B y C no son cero simultáneamente, el conjunto de puntos (x, y, z) que satisface la ecuación (4) es un plano con normal $A\mathbf{i}+B\mathbf{j}+C\mathbf{k}$. La ecuación (4) es lineal en las tres variables x, y, z y así corresponde geométricamente a una superficie lineal, esto es, un plano, en $\mathbf{R}^3$.

Los cuatro números A, B, C, D no están determinados de manera única por P. Para verlo, noten que (x, y, z) satisface la ecuación (4) si, y sólo si, además satisface la relación

$$(\lambda A)x + (\lambda B)y + (\lambda C)z + (\lambda D) = 0$$

para cualquier constante $\lambda \neq 0$. Si A, B, C, D y A', B', C', D' determinan el mismo plano P, entonces $A = \lambda A'$, $B = \lambda B'$, $C = \lambda C'$, $D = \lambda D'$ para un escalar λ. Decimos que *A, B, C, D están determinadas por P salvo un múltiplo escalar.* Recíprocamente, dados A, B, C, D y A', B', C', D', determinan el mismo plano si $A = \lambda A'$, $B = \lambda B'$, $C = \lambda C'$, $D = \lambda D'$ para algún escalar λ. Este hecho se aclarará en el ejemplo 8.

El plano con normal $A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$, que pasa por un punto $R = (x_0, y_0, z_0)$ es

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \tag{5}$$

(notar que $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ satisface la ecuación (5), y entonces, en este caso, $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$.

EJEMPLO 7 *Determinar la ecuación del plano perpendicular al vector $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$, que contiene al punto $(1, 0, 0)$.*

SOLUCIÓN De la ecuación (5), el plano es $1(x - 1) + 1(y - 0) + 1(z - 0) = 0$; esto es, $x + y + z = 1$. ▲

EJEMPLO 8 *Hallar la ecuación del plano que contiene a los puntos* $(1,1,1)$, $(2,0,0)$ *y* $(1,1,0)$.

SOLUCIÓN *Método 1.* Cualquier ecuación del plano es de la forma $Ax+By+Cz+D=0$. Como los puntos $(1,1,1)$ y $(2,0,0)$ y $(1,1,0)$ están en el plano, tenemos

$$\begin{aligned} A+B+C+D&=0\\ 2A\qquad\quad +D&=0\\ A+B\qquad +D&=0 \end{aligned}$$

Mediante eliminación, reducimos este sistema de ecuaciones a la forma

$$\begin{aligned} 2A+D&=0 && \text{(segunda ecuación)}\\ 2B+D&=0 && (2\times\text{tercera}-\text{segunda})\\ C&=0 && \text{(primera}-\text{tercera)} \end{aligned}$$

Como los números A, B C y D están determinados salvo un múltiplo escalar, podemos fijar el valor de uno y así los otros quedarán determinados de manera única. Si hacemos $D=-2$, entonces $A=+1$, $B=+1$, $C=0$. Así, la ecuación del plano que contiene a los puntos dados es $x+y-2=0$.

Método 2. Sean $\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=2\mathbf{i}$ y $\mathbf{c}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$. Cualquier vector normal al plano debe ser ortogonal a los vectores $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}-\mathbf{b}$, que son paralelos al plano, ya que sus extremos están en el plano. Así, $\mathbf{n}=(\mathbf{a}-\mathbf{b})\times(\mathbf{c}-\mathbf{b})$ es normal al plano. Al calcular el producto cruz tenemos,

$$\mathbf{n}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-\mathbf{i}-\mathbf{j}.$$

Así, cualquier ecuación del plano es de la forma $-x-y+D=0$ (salvo un múltiplo escalar). Como $(2,0,0)$ está en el plano, $D=+2$. Después de sustituir, obtenemos $x+y-2=0$. ▲

EJEMPLO 9 *Determinar la distancia del punto* $\mathrm{E}=(x_1,y_1,z_1)$ *al plano con ecuación* $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=Ax+By+Cz+D=0$.

SOLUCIÓN Considerar al vector

$$\mathbf{n}=\frac{A\mathbf{i}+B\mathbf{j}+C\mathbf{k}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

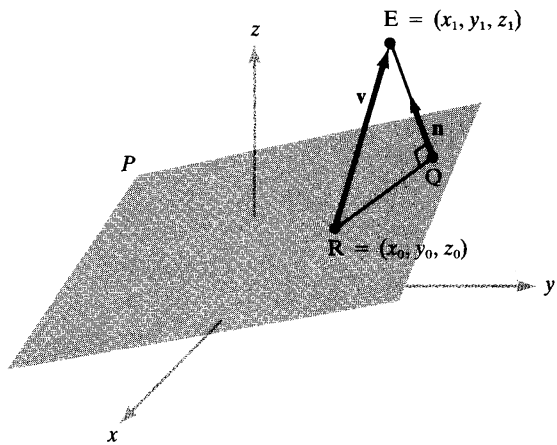


Figura 1.3.7 La geometría para determinar la distancia del punto E al plano P.

que es un vector unitario normal al plano. Bajar una perpendicular de E al plano y construir el triángulo REQ mostrado en la figura 1.3.7. La distancia $d = |\mathrm{EQ}|$ es la longitud de la proyección de $\mathbf{v} = \overrightarrow{\mathrm{RE}}$ (el vector de R a E) sobre $\mathbf{n}$; así,

$$\begin{aligned}\text{distancia} = |\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}| &= |[(x_1 - x_0)\mathbf{i} + (y_1 - y_0)\mathbf{j} + (z_1 - z_0)\mathbf{k}]\cdot\mathbf{n}| \\ &= \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.\end{aligned}$$

Si el plano está dado en la forma $Ax + By + Cz + D = 0$, escogemos un punto (x_0, y_0, z_0) sobre él y notamos que $D = -(Ax_o + By_0 + Cz_0)$. Al sustituir en la fórmula anterior da

$$\text{distancia} = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad \blacktriangle$$

EJERCICIOS

1. Verificar que al intercambiar dos renglones o dos columnas del determinante de 3×3

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

se cambia el signo del determinante (escoger cualesquiera dos renglones o cualesquiera dos columnas).

2. Evaluar

(a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ $\boxed{\text{(b)}}$ $\begin{vmatrix} 36 & 18 & 17 \\ 45 & 24 & 20 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 4 & 9 & 16 \\ 9 & 16 & 25 \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \\ 17 & 19 & 23 \end{vmatrix}$

3. Calcular $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, donde $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

4. Calcular $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$, donde $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son como en el ejercicio 3 y $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

$\boxed{\textbf{5.}}$ Hallar el área del paralelogramo que tiene como lados a los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ dados en el ejercicio 3.

6. Un triángulo tiene vértices $(0,0,0)$, $(1,1,1)$ y $(0,-2,3)$. Hallar su área.

7. ¿Cuál es el volumen del paralelepípedo con aristas $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $5\mathbf{i} - 3\mathbf{k}$ e $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$?

$\boxed{\textbf{8.}}$ ¿Cuál es el volumen del paralelepípedo con aristas $\mathbf{i}$, $3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ y $4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$?

En los ejercicios del 9 al 12, describir todos los vectores unitarios ortogonales a los vectores dados.

9. $\mathbf{i}, \mathbf{j}$

10. $-5\mathbf{i} + 9\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $7\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$

$\boxed{\textbf{11.}}$ $-5\mathbf{i} - 9\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $7\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$, $\mathbf{0}$

12. $2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $-4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$

13. Calcular $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, $\|\mathbf{u}\|$, $\|\mathbf{v}\|$ y $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ donde $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

14. Repetir el ejercicio 13 para $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

15. Hallar una ecuación para el plano que
$\boxed{\text{(a)}}$ es perpendicular a $\mathbf{v} = (1,1,1)$ y pasa por $(1,0,0)$.
(b) es perpendicular a $\mathbf{v} = (1,2,3)$ y pasa por $(1,1,1)$.
(c) es perpendicular a la recta $\mathbf{l}(t) = (5,0,2)t + (3,-1,1)$ y pasa por $(5,-1,0)$.
$\boxed{\text{(d)}}$ es perpendicular a la recta $\mathbf{l}(t) = (-1,-2,3)t + (0,7,1)$ y pasa por $(2,4,-1)$.

16. Hallar una ecuación para el plano que pasa por (a) $(0,0,0)$, $(2,0,-1)$ y $(0,4,-3)$; $\boxed{\text{(b)}}$ $(1,2,0)$, $(0,1,-2)$ y $(4,0,1)$; y (c) $(2,-1,3)$, $(0,0,5)$ y $(5,7,-1)$.

17. (a) Probar las identidades del triple producto vectorial $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{A}$ y $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$.

(b) Probar $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ si, y sólo si $(\mathbf{u} \times \mathbf{w}) \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

(c) Probar $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} + (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \times \mathbf{u} + (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ (la *identidad de Jacobi*).

18. (a) Probar sin recursos geométricos, que

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = -\mathbf{u} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{v}) \\ &= -\mathbf{w} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{u}) = -\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) \end{aligned}$$

(b) Probar

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u}' \times \mathbf{v}') = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}')(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}') - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}')(\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' & \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}' \\ \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v} & \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' \end{vmatrix}$$

[IDEA: Usar la parte (a) y el ejercicio 17(a).]

19. Verificar la regla de Cramer presentada en la nota histórica de la página 33.

20. Hallar una ecuación para el plano que pasa por $(2, -1, 3)$ y es perpendicular a $\mathbf{v} = (1, -2, 2) + t(3, -2, 4)$.

21. Hallar una ecuación para el plano que pasa por $(1, 2, -3)$ y es perpendicular a $\mathbf{v} = (0, -2, 1) + t(1, -2, 3)$.

22. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(1, -2, -3)$ y es perpendicular al plano $3x - y - 2z + 4 = 0$.

23. Hallar una ecuación para el plano que contiene a las dos rectas

$$\mathbf{v}_1 = (0, 1, -2) + t(2, 3, -1) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{v}_2 = (2, -1, 0) + t(2, 3, -1).$$

24. Hallar la distancia de $(2, 1, -1)$ al plano $x - 2y + 2z + 5 = 0$.

25. Hallar una ecuación del plano que contiene a la recta $\mathbf{v} = (-1, 1, 2) + t(3, 2, 4)$ y es perpendicular al plano $2x + y - 3z + 4 = 0$.

26. Hallar una ecuación del plano que pasa por $(3, 2, -1)$ y $(1, -1, 2)$ y es paralelo a la recta $\mathbf{v} = (1, -1, 0) + t(3, 2, -2)$.

27. Rehacer los ejercicios 19 y 20 de la sección 1.1 usando el producto punto y los conocimientos adquiridos acerca de normales y planos.

28. Dados los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, ¿es cierto que las ecuaciones $\mathbf{x} \times \mathbf{a} = \mathbf{b}$ y $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|$ determinan sólo un vector $\mathbf{x}$? Dar argumentos geométricos y analíticos.

29. Determinar la distancia del plano $12x + 13y + 5z + 2 = 0$ al punto $(1, 1, -5)$.

30. Hallar la distancia al punto $(6, 1, 0)$ del plano que pasa por el origen y es perpendicular a $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

31. En mecánica se define el *momento M de una fuerza* $\mathbf{F}$ *alrededor de un punto O* como la magnitud de $\mathbf{F}$ por la distancia perpendicular d de O a la linea de acción de $\mathbf{F}$. (Recordemos del ejemplo 10, sección 1.1, que las fuerzas se pueden considerar vectores.) El *momento vector* $\mathbf{M}$ es el vector de magnitud M cuya dirección es perpendicular al plano de O y $\mathbf{F}$, determinado por la regla de la mano derecha. Mostrar que $\mathbf{M} = \mathbf{R} \times \mathbf{F}$, donde $\mathbf{R}$ es cualquier vector que va de O a la línea de acción de $\mathbf{F}$ (ver la figura 1.3.8.).

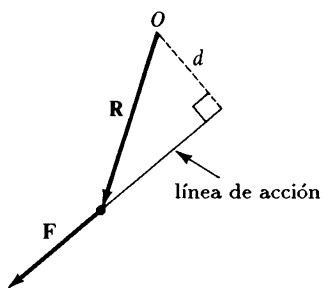


Figura 1.3.8 Momento de una fuerza.

32. La *velocidad angular* de rotación $\boldsymbol{\omega}$, de un cuerpo rígido tiene la misma dirección que el eje de rotación y magnitud igual a la tasa de giro en radianes por segundo. El sentido de $\boldsymbol{\omega}$ se determina por la regla de la mano derecha.

(a) Sea $\mathbf{r}$ un vector que va del eje a un punto P del cuerpo rígido. Mostrar que el vector $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ es la velocidad de P, como en la figura 1.3.9, con $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{v}_1$ y $\mathbf{r} = \mathbf{v}_2$.

(b) Interpretar el resultado para la rotación de un carrusel alrededor de su eje, donde P es un punto en la circunferencia.

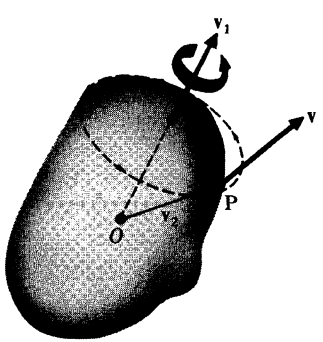


Figura 1.3.9 El punto P tiene vector velocidad $\mathbf{v}$.

33. Dos medios físicos con índices de refracción n_1 y n_2 están separados por una superficie plana perpendicular al vector unitario $\mathbf{N}$. Sean $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ vectores unitarios a lo largo de los rayos incidente y refractado, respectivamente, sus direcciones son las de dichos rayos de luz. Mostrar que $n_1(\mathbf{N} \times \mathbf{a}) = n_2(\mathbf{N} \times \mathbf{b})$, usando la *ley de Snell*, $\operatorname{sen}\theta_1 / \operatorname{sen}\theta_2 = n_2/n_1$, donde θ_1 y θ_2 son los ángulos de incidencia y refracción, repectivamente (ver la figura 1.3.10.)

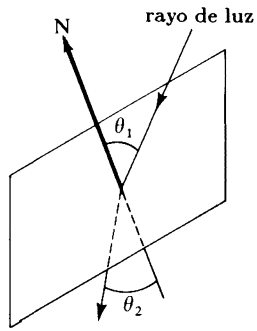


Figura 1.3.10 Ley de Snell.

***34.** Justificar los pasos en los siguientes cálculos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -11 \end{vmatrix} = 33 - 36 = -3.$$

***35.** Mostrar que, en una matriz, al sumar un múltiplo del primer renglón el segundo no se altera el determinante, esto es,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + \lambda a_1 & b_2 + \lambda b_1 & c_2 + \lambda c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

[De hecho, al sumar en una matriz un múltiplo de cualquier renglón (columna) a otro renglón (columna), no se altera el determinante.]

1.4 COORDENADAS ESFÉRICAS Y CILÍNDRICAS

La manera usual de representar un punto en el plano $\mathbf{R}^2$ es mediante las coordenadas rectangulares (x, y). Sin embargo, como ya seguramente lo aprendió el lector en cálculo elemental, las coordenadas polares en el plano pueden ser muy útiles. Como se muestra en la figura 1.4.1, las coordenadas (r, θ) están relacionadas con (x, y) mediante las fórmulas

$$x = r\cos\theta \qquad \text{y} \qquad y = r\operatorname{sen}\theta,$$

donde usualmente tomamos $r \geq 0$ y $0 \leq \theta < 2\pi$.

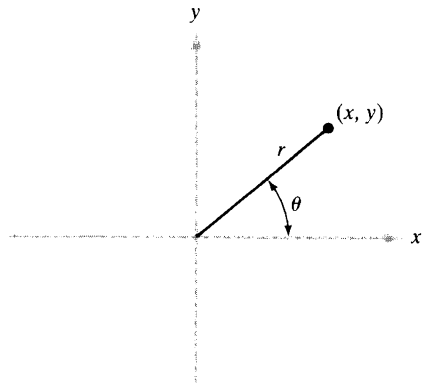


Figura 1.4.1 Las coordenadas polares de (x, y) son (r, θ).

A los lectores no familiarizados con las coordenadas polares se les recomienda estudiar las secciones respectivas en su libro de cálculo. Ahora vamos a exponer dos maneras de representar puntos en el espacio, además de las coordenadas cartesianas rectangulares (x, y, z). Estos sistemas coordenados alternativos son particularmente adecuados para ciertos tipos de problemas, como por ejemplo, la evaluación de integrales (ver la sección 6.3).

DEFINICIÓN *(ver la figura 1.4.2). Las* ***coordenadas cilíndricas*** (r, θ, z) *de un punto* (x, y, z) *están definidas por*

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta, \qquad z = z \tag{1}$$

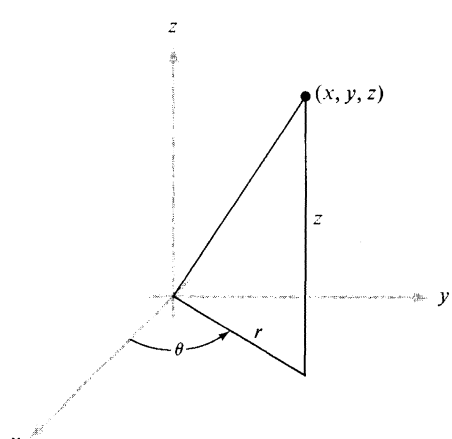


Figura 1.4.2 Representación de un punto (x, y, z) en términos de sus coordenadas cilíndricas r, θ y z.

o, explícitamente,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad z = z, \qquad \theta = \begin{cases} \tan^{-1}(y/x) \text{ si } x > 0 \text{ y } y \geq 0 \\ \pi + \tan^{-1}(y/x) \text{ si } x < 0 \\ 2\pi + \tan^{-1}(y/x) \text{ si } x > 0 \text{ y } y < 0 \end{cases}$$

donde $\tan^{-1}(y/x)$ *está entre* $-\pi/2$ *y* $\pi/2$. *Si* $x = 0$, *entonces* $\theta = \pi/2$ *para* $y > 0$ *y* $3\pi/2$ *para* $y < 0$. *Si* $x = y = 0$, θ *no está definido.*

En otras palabras, para cada punto (x, y, z) representamos la primera y segunda coordenadas en términos de coordenadas polares y no alteramos la tercera. La fórmula (1) muestra que, dados (r, θ, z), la terna (x, y, z) está completamente determinada y, viceversa, si restringimos θ al intervalo $[0, 2\pi)$ (a veces es conveniente la extensión $(-\pi, \pi]$) y requerimos que $r > 0$.

Para ver por qué usamos el término "coordenadas cilíndricas", nótese que si $0 \leq \theta < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$ y $r = a$ es una constante positiva, entonces el lugar geométrico de estos puntos es un cilindro de radio a (ver la figura 1.4.3).

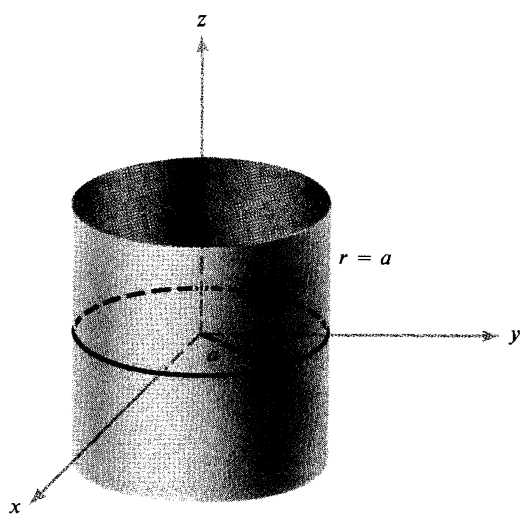


Figura 1.4.3 La gráfica de los puntos cuyas coordenadas cilíndricas satisfacen $r = a$ es un cilindro.

EJEMPLO 1 (a) *Hallar las coordenadas cilíndricas de* $(6, 6, 8)$ *y localizar el punto.* (b) *Si un punto tiene coordenadas cilíndricas* $(8, 2\pi/3, -3)$, *¿cuáles son sus coordenadas cartesianas? Localizarlo.*

SOLUCIÓN Para la parte (a), tenemos $r = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$ y $\theta = \tan^{-1}(6/6) = \tan^{-1}(1) = \pi/4$. Así, las coordenadas cilíndricas son $(6\sqrt{2}, \pi/4, 8)$. Éste es el

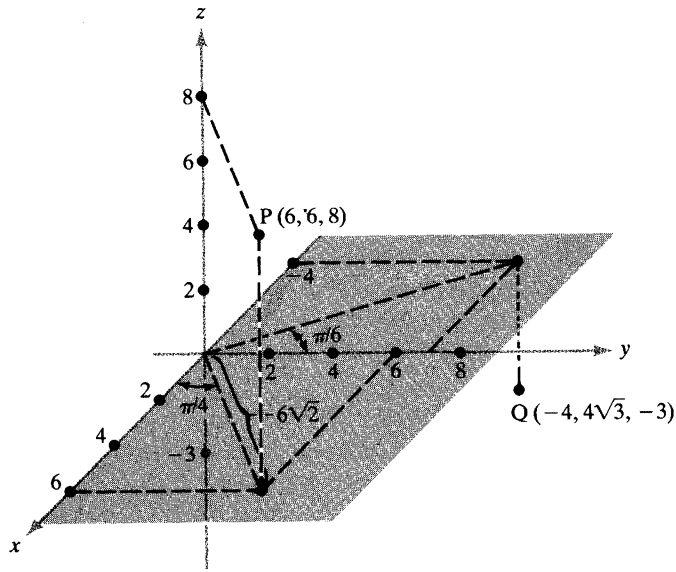


Figura 1.4.4 Ejemplos de conversión entre coordenadas cartesianas y cilíndricas.

punto P de la figura 1.4.4. Para la parte (b), tenemos

$$x = r\cos\theta = 8\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{8}{2} = -4$$

y

$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta = 8\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3} = 8\frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}.$$

Así, las coordenadas cartesianas son $(-4, 4\sqrt{3}, -3)$. Éste es el punto Q de la figura. ▲

Las coordenadas cilíndricas no son las únicas generalizaciones posibles de las coordenadas polares a tres dimensiones. Recuerden que en dos dimensiones la magnitud del vector $x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$ (esto es, $\sqrt{x^2+y^2}$) es la r en el sistema de coordenadas polares. Para las coordenadas cilíndricas, la longitud del vector $x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$, a saber,

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

no es una de las coordenadas del sistema (usamos sólo la magnitud $r = \sqrt{x^2+y^2}$, el ángulo θ y la "altura" z.)

Ahora modificaremos esto introduciendo el sistema de *coordenadas esféricas*, que usa a ρ como coordenada. Las coordenadas esféricas suelen ser útiles para resolver problemas donde hay simetría esférica (simetría alrededor de un punto), mientras que las coordenadas cilíndricas se pueden aplicar donde haya simetría cilíndrica (simetría alrededor de una recta).

Dado un punto $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, sea

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

y representemos x y y mediante coordenadas polares en el plano xy:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \tag{2}$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y θ está dada por la fórmula (1). La coordenada z está dada por

$$z = \rho\cos\phi,$$

donde ϕ es el ángulo (entre 0 y π, inclusive) que forma el radio vector $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ con el eje z, en el plano que contiene al vector $\mathbf{v}$ y al eje z (ver la figura 1.4.5). Usando el producto punto podemos expresar ϕ como sigue:

$$\cos\phi = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{k}}{\|\mathbf{v}\|}, \qquad \text{i.e.,} \qquad \phi = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{k}}{\|\mathbf{v}\|}\right).$$

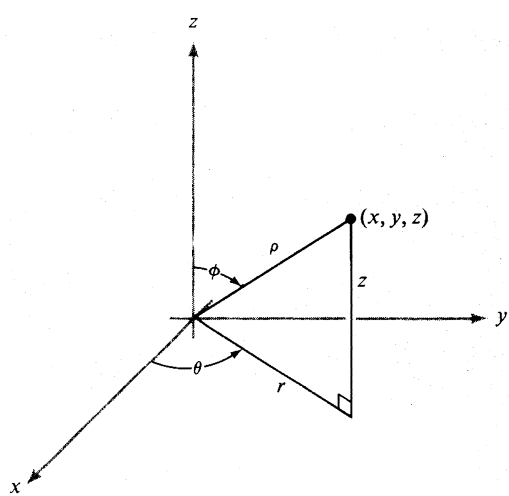


Figura 1.4.5 Coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ); la gráfica de los puntos que satisfacen $\rho = a$ es una esfera.

Tomamos como coordenadas las cantidades ρ, θ, ϕ. Como

$$r = \rho \operatorname{sen} \phi$$

podemos usar la fórmula (2) para expresar x, y y z en términos de coordenadas esféricas ρ, θ, ϕ.

DEFINICIÓN *Las* ***coordenadas esféricas*** *de* (x, y, z) *se definen como sigue:*

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \qquad y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \qquad z = \rho \cos \phi \tag{3}$$

donde

$$\rho \geq 0, \qquad 0 \leq \theta < 2\pi, \qquad 0 \leq \phi \leq \pi.$$

Nótese que las coordenadas esféricas θ y ϕ se parecen a las coordenadas geográficas de longitud y latitud si consideramos al eje de la Tierra como el eje z. Sin embargo, hay diferencias: la longitud geográfica es $|\theta|$ y se llama longitud este u oeste, dependiendo de si θ es positivo o negativo; la latitud geográfica es $|\pi/2 - \phi|$ y se llama latitud norte o sur, dependiendo de si $\pi/2 - \theta$ es positivo o negativo.

Nótese que en coordenadas esféricas la ecuación de la esfera de radio a con centro en el origen toma la forma particularmente sencilla

$$\rho = a.$$

EJEMPLO 2

(a) *Hallar las coordenadas esféricas de* $(1, -1, 1)$ *y localizarlo.*

(b) *Hallar las coordenadas cartesianas de* $(3, \pi/6, \pi/4)$ *y localizarlo.*

(c) *Sea un punto con coordenadas cartesianas* $(2, -3, 6)$. *Hallar sus coordenadas esféricas y localizarlo.*

(d) *Sea un punto con coordenadas esféricas* $(1, -\pi/2, \pi/4)$. *Hallar sus coordenadas cartesianas y localizarlo.*

SOLUCIÓN

(a) $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$,

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{1}\right) = -\frac{\pi}{4},$$

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\rho}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 0.955 \approx 54.74°.$$

Ver la figura 1.4.6(a).

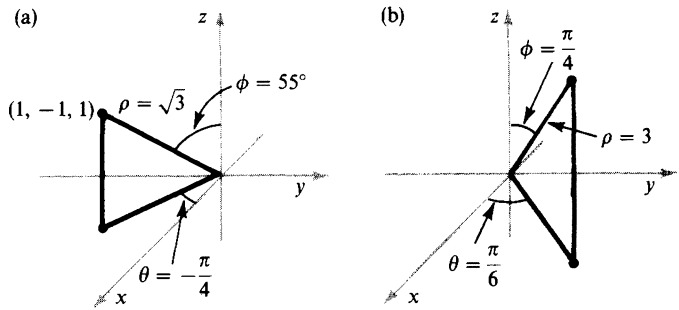


Figura 1.4.6 Búsqueda de (a) las coordenadas esféricas del punto $(1, -1, 1)$ y (b) las coordenadas cartesianas de $(3, \pi/6, \pi/4)$.

(b) $$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta = 3 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},$$

$$y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta = 3 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2\sqrt{2}},$$

$$z = \rho \cos \phi = 3 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Ver la figura 1.4.6(b).

(c) $$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7,$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-3}{2}\right) \approx -0.983 \approx -56.31°,$$

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\rho}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{6}{7}\right) \approx 0.541 \approx 31.0°.$$

Ver la figura 1.4.7(a).

(d) $$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta = 1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot 0 = 0,$$

$$y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta = 1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{-\pi}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(-1) = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$z = \rho \cos \phi = 1 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ver la figura 1.4.7(b). ▲

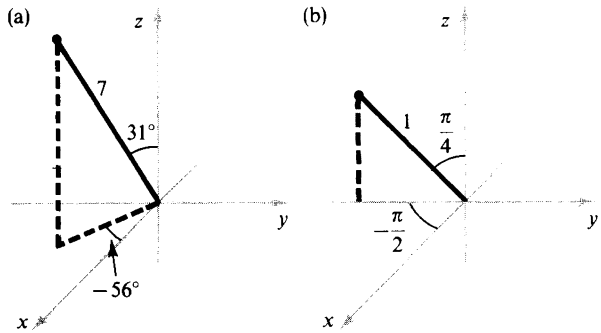


Figura 1.4.7 Búsqueda de (a) las coordenadas esféricas de $(2, -3, 6)$ y (b) las coordenadas cartesianas de $(1, -\pi/2, \pi/4)$.

EJEMPLO 3 *Expresar* (a) *la superficie* $xz = 1$ *y* (b) *la superficie* $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ *en coordenadas esféricas.*

SOLUCIÓN De la fórmula (3), $x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta$, $z = \rho \cos \phi$, y, por lo tanto, la superficie (a) está formada por todos los (ρ, θ, ϕ) tales que

$$\rho^2 \operatorname{sen} \phi \cos \theta \cos \phi = 1, \qquad \text{i.e.,} \qquad \rho^2 \operatorname{sen} 2\phi \cos \theta = 2.$$

Para la parte (b) podemos escribir

$$x^2 + y^2 - z^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2z^2 = \rho^2 - 2\rho^2 \cos^2 \phi,$$

de manera que la superficie es $\rho^2(1 - 2\cos^2 \phi) = 1$, o bien $-\rho^2 \cos(2\phi) = 1$. ▲

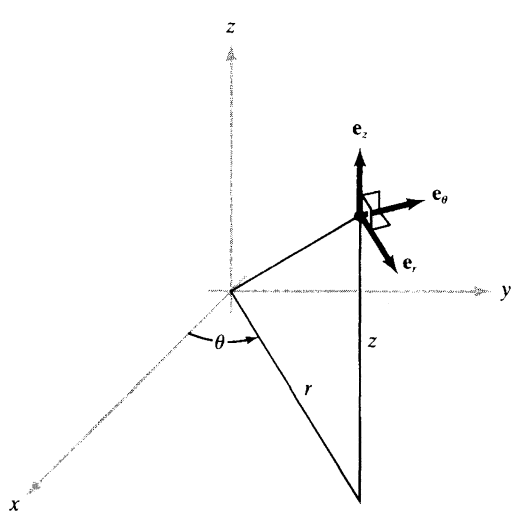


Figura 1.4.8 Vectores ortonormales $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ y $\mathbf{e}_z$ asociados con las coordenadas cilíndricas. El vector $\mathbf{e}_r$ es paralelo a la recta denominada r.

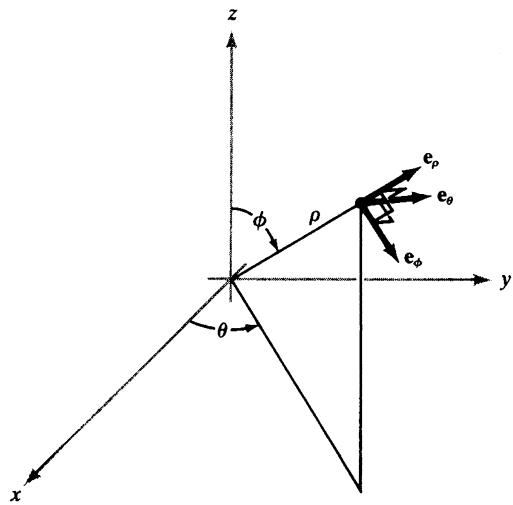


Figura 1.4.9 Vectores ortonormales $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\theta$ y $\mathbf{e}_\phi$ asociados con las coordenadas esféricas.

Hay vectores unitarios asociados con las coordenadas cilíndricas y esféricas, que son la contraparte de $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ para las coordenadas rectangulares. Se muestran en las figuras 1.4.8 y 1.4.9. Por ejemplo, $\mathbf{e}_r$ es el vector unitario paralelo al plano xy, en dirección radial, de manera que $\mathbf{e}_r = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\operatorname{sen}\theta)\mathbf{j}$. De manera análoga, en coordenadas esféricas $\mathbf{e}_\phi$ es el vector unitario tangente a la curva parametrizada por la variable ϕ, manteniendo fijas las variables ρ y θ. Usaremos estos vectores unitarios más adelante, cuando en cálculos vectoriales se utilicen coordenadas cilíndricas y esféricas (ver la sección 3.5).

EJERCICIOS

1. (a) Los puntos siguientes están dados en coordenadas cilíndricas; expresar cada uno en coordenadas rectangulares y coordenadas esféricas: $(1, 45°, 1)$, $(2, \pi/2, -4)$, $(0, 45°, 10)$, $(3, \pi/6, 4)$, $(1, -\pi/6, 0)$, $(2, 3\pi/4, -2)$. (Sólo el primer punto se resuelve en la Guía de estudio.)

(b) Cambiar los puntos siguientes de coordenadas rectangulares a coordenadas esféricas y a coordenadas cilíndricas: $(2, 1, -2)$, $(0, 3, 4)$, $(\sqrt{2}, 1, 1)$, $(-2\sqrt{3}, -2, 3)$. (Sólo el primer punto se resuelve en la Guía de estudio.)

2. Describir el significado geométrico de las siguientes asociaciones en coordenadas cilíndricas:

(a) $(r, \theta, z) \mapsto (r, \theta, -z)$

(b) $(r, \theta, z) \mapsto (r, \theta + \pi, -z)$

(c) $(r, \theta, z) \mapsto (-r, \theta - \pi/4, z)$

3. Describir el significado geométrico de las siguientes asociaciones en coordenadas esféricas:

(a) $(\rho, \theta, \phi) \mapsto (\rho, \theta + \pi, \phi)$
(b) $(\rho, \theta, \phi) \mapsto (\rho, \theta, \pi - \phi)$
(c) $(\rho, \theta, \phi) \mapsto (2\rho, \theta + \pi/2, \phi)$

4. (a) Describir las superficies $r =$ constante, $\theta =$ constante y $z =$ constante en el sistema de coordenadas cilíndricas.

(b) Describir las superficies $\rho =$ constante, $\theta =$ constante y $\phi =$ constante en el sistema de coordenadas esféricas.

5. Mostrar que para representar cada punto en $\mathbf{R}^3$ por medio de coordenadas esféricas es necesario tomar sólo valores de θ entre 0 y 2π, valores de ϕ entre 0 y π, y valores de $\rho \geq 0$. ¿Serían únicas estas coordenadas si permitimos que $\rho \leq 0$?

6. Usando coordenadas cilíndricas y los vectores ortonormales (ortogonales normalizados) $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ y $\mathbf{e}_z$ (ver la figura 1.4.8),

(a) expresar cada uno de los vectores $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ y $\mathbf{e}_z$ en términos de $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ y (x, y, z); y
(b) calcular $\mathbf{e}_\theta \times \mathbf{j}$ de manera analítica, usando la parte (a), y geométrica.

7. Usando coordenadas esféricas y los vectores ortonormales (ortogonales normalizados) $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\theta$ y $\mathbf{e}_\phi$ (ver la figura 1.4.9),

(a) expresar cada uno de los vectores $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\theta$ y $\mathbf{e}_\phi$ en términos de $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ y (x, y, z); y
(b) calcular $\mathbf{e}_\theta \times \mathbf{j}$ y $\mathbf{e}_\phi \times \mathbf{j}$ de manera analítica y geométrica.

8. Expresar el plano $z = x$ en coordenadas (a) cilíndricas y (b) esféricas.

9. Mostrar que en coordenadas esféricas:

(a) ρ es la longitud de $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.
(b) $\phi = \cos^{-1}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}/\|\mathbf{v}\|)$, donde $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.
(c) $\theta = \cos^{-1}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{i}/\|\mathbf{u}\|)$, donde $\mathbf{u} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$.

10. Dos superficies se describen en coordenadas esféricas mediante las ecuaciones $\rho = f(\theta, \phi)$ y $\rho = -2f(\theta, \phi)$, donde $f(\theta, \phi)$ es una función de dos variables. ¿Cómo se obtiene geométricamente la segunda superficie a partir de la primera?

11. Una membrana circular en el espacio está sobre la región $x^2 + y^2 \leq a^2$. La componente z máxima de los puntos de la membrana es b. Suponer que (x, y, z) es un punto en la membrana torcida. Mostrar que el punto correspondiente (r, θ, z) en coordenadas cilíndricas satisface las condiciones $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $|z| \leq b$.

12. Un tanque con forma de cilindro circular recto, con radio de 3 m y altura de 5 m contiene la mitad de líquido y reposa de lado. Describir el espacio ocupado por el aire dentro del tanque mediante la elección adecuada de coordenadas cilíndricas.

13. Se va a diseñar un vibrómetro que soporte los efectos del calentamiento de su cubierta esférica de diámetro d, la cual está enterrada a profundidad de $d/3$; el Sol calienta la parte superior (suponer que la Tierra es plana). El análisis de la conducción de calor requiere una descripción de la parte enterrada de la cubierta, en coordenadas esféricas. Hallarla.

14. Un cartucho de filtro de aceite es un cilindro poroso, circular, recto, por el cual fluye el aceite desde el eje hacia la superficie curvada exterior. Describir el cartucho en coordenadas cilíndricas, si el diámetro del filtro es de 4.5 pulg, la altura es de 5.6 pulg y el centro del cartucho está taladrado (a todo lo largo) desde arriba para permitir la entrada de un perno de $\frac{5}{8}$ de pulg.

***15.** Describir la superficie dada en coordenadas esféricas por $\rho = \cos 2\theta$.

1.5 ESPACIO EUCLIDIANO n-DIMENSIONAL

En las secciones 1.1 y 1.2 estudiamos los espacios $\mathbf{R} = \mathbf{R}^1$, $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ y dimos sus interpretaciones geométricas. Por ejemplo, un punto (x, y, z) en $\mathbf{R}^3$ se puede pensar como un objeto geométrico, a saber, el segmento de recta dirigido, o vector, que sale del origen y termina en el punto (x, y, z). Entonces podemos pensar $\mathbf{R}^3$ de cualquiera de estas dos maneras:

(i) Algebraicamente, como un conjunto de ternas (x, y, z) donde x, y y z son números reales

(ii) Geométricamente, como un conjunto de segmentos dirigidos

Estas dos maneras de considerar $\mathbf{R}^3$ son equivalentes. La definición (i) es más conveniente para generalizar. Específicamente, podemos definir $\mathbf{R}^n$, donde n es un entero positivo (quizá mayor que 3), como el conjunto de todas las n-adas ordenadas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ donde los x_i son números reales. Por ejemplo, $(1, \sqrt{5}, 2, \sqrt{3}) \in \mathbf{R}^4$.

El conjunto $\mathbf{R}^n$ definido anteriormente se conoce como *n-espacio euclidiano*, y sus elementos $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se conocen como *vectores* o *n-vectores*. Al hacer $n = 1$, 2 o 3, recuperamos la recta, el plano y el espacio tridimensional, respectivamente.

Comenzamos nuestro estudio del n-espacio euclidiano introduciendo varias operaciones algebraicas. Éstas son análogas a las introducidas en la sección 1.1 para $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$. Las primeras dos, suma y multiplicación por un escalar, se definen como sigue:

(i) $(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$;

y

(ii) para cualquier número real α,

$$\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n).$$

La importancia geométrica de estas operaciones para $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ se analizó en la sección 1.1.

Los n vectores $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $\mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots 0, 1)$ se llaman *vectores de la base usual* de $\mathbf{R}^n$, y generalizan los tres vectores unitarios ortogonales entre sí, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ de $\mathbf{R}^3$. El vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se puede escribir como $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$.

Para dos vectores $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ y $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ en $\mathbf{R}^3$, definimos el *producto punto* o *producto interno* $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ como el número real $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$. Esta definición se extiende fácilmente a $\mathbf{R}^n$; específicamente, para $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, definimos $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$. En $\mathbf{R}^n$ se suele usar la notación $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ en lugar de $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$, para el producto interior. Continuando con la analogía con $\mathbf{R}^3$, ahora tenemos que definir el concepto abstracto de *longitud* o *norma* de un vector $\mathbf{x}$ mediante la fórmula

$$\text{longitud de } \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son dos vectores en el plano ($\mathbf{R}^2$) o en el espacio ($\mathbf{R}^3$), sabemos que el ángulo θ entre ellos está dado por la fórmula

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|}.$$

El lado derecho de esta ecuación está definido tanto para $\mathbf{R}^n$ como para $\mathbf{R}^2$. Aún representa el coseno del ángulo entre $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$; este ángulo está bien definido pues $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ están en un subespacio bidimensional de $\mathbf{R}^n$ (el plano determinado por $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$). El producto punto es una poderosa herramienta matemática; una razón es que incorpora el concepto geométrico de ángulo entre dos vectores.

Será útil disponer de algunas propiedades algebraicas del producto interior. Se resumen en el siguiente teorema (ver las propiedades (i), (ii), (iii) y (iv) de la sección 1.2)

TEOREMA 2 *Para* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ *y* $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^n$ *y* α *y* β *números reales, tenemos*

(i) $(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \alpha(\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}) + \beta(\mathbf{y} \cdot \mathbf{z})$.

(ii) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$.

(iii) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0$.

(iv) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$ *si, y sólo si,* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

DEMOSTRACIÓN Cada una de las cuatro afirmaciones se puede probar mediante un sencillo cálculo. Por ejemplo, para probar la propiedad (i) escribimos

$$\begin{aligned}
(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} &= (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \ldots, \alpha x_n + \beta y_n) \cdot (z_1, z_2, \ldots, z_n) \\
&= (\alpha x_1 + \beta y_1)z_1 + (\alpha x_2 + \beta y_2)z_2 + \cdots + (\alpha x_n + \beta y_n)z_n \\
&= \alpha x_1 z_1 + \beta y_1 z_1 + \alpha x_2 z_2 + \beta y_2 z_2 + \cdots + \alpha x_n z_n + \beta y_n z_n \\
&= \alpha(\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}) + \beta(\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}).
\end{aligned}$$

La otra demostración es similar. ■

En la sección 1.2 probamos una propiedad mucho más interesante de los productos punto, llamada la desigualdad de Cauchy-Schwarz (a veces se le llama desigualdad de Cauchy-Bunyakovskii-Schwarz, o simplemente desigualdad CBS, porque se descubrió de manera independiente en casos particulares por el matemático francés Cauchy, el matemático ruso Bunyakovskii y el matemático alemán Schwarz). Para $\mathbf{R}^2$ la demostración requirió de la ley de los cosenos. Podríamos escoger este método para $\mathbf{R}^n$, restringiendo nuestra atención a un plano en $\mathbf{R}^n$. Sin embargo, podemos dar una demostración directa, completamente algebraica.

TEOREMA 3 (DESIGUALDAD DE CAUCHY-SCHWARZ) *Sean* $\mathbf{x}$ *y* $\mathbf{y}$ *vectores en* $\mathbf{R}^n$. *Entonces*

$$|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|.$$

DEMOSTRACIÓN Sea $a = \mathbf{y}\cdot\mathbf{y}$ y $b = -\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$. Si $a = 0$ el teorema es claramente válido, pues entonces $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ y ambos lados de la desigualdad se reducen a 0. Así, podemos suponer que $a \neq 0$. Por el teorema 2 tenemos

$$\begin{aligned} 0 \leq (a\mathbf{x} + b\mathbf{y})\cdot(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) &= a^2\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} + 2ab\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + b^2\mathbf{y}\cdot\mathbf{y} \\ &= (\mathbf{y}\cdot\mathbf{y})^2\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} - (\mathbf{y}\cdot\mathbf{y})(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2. \end{aligned}$$

Al dividir entre $\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}$ se tiene

$$0 \leq (\mathbf{y}\cdot\mathbf{y})(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}) - (\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2$$

o

$$(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2 \leq (\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})(\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2$$

Al extraer raíz cuadrada en ambos lados de esta desigualdad se obtiene la regla deseada. ■

Hay una consecuencia muy útil de la desigualdad de Cauchy-Schwarz en términos de longitudes. La desigualdad del triángulo es geométricamente clara en $\mathbf{R}^3$. En la figura 1.5.1, $\|\mathrm{OQ}\| = \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|$, $\|\mathrm{OP}\| = \|\mathbf{x}\| = \|\mathrm{RQ}\|$ y $\|\mathrm{OR}\| = \|\mathbf{y}\|$. Como la suma de las longitudes de dos lados de un triángulo es mayor o igual que la longitud del tercero, tenemos $\|\mathrm{OQ}\| \leq \|\mathrm{OR}\| + \|\mathrm{RQ}\|$, esto es $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq$

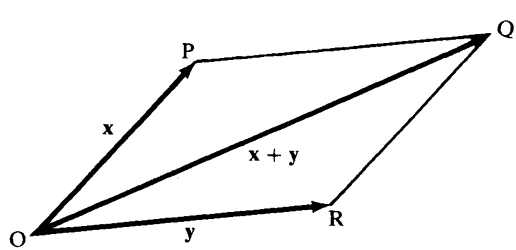


Figura 1.5.1 Esta situación geométrica muestra que $\|\mathrm{OQ}\| \leq \|\mathrm{OR}\| + \|\mathrm{RQ}\|$, o, en notación vectorial, que $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$, lo cual es la desigualdad del triángulo.

$||\mathbf{x}||+||\mathbf{y}||$. El caso para $\mathbf{R}^n$ no es tan obvio, de modo que daremos la demostración analítica.

COROLARIO *Sean* $\mathbf{x}$ *y* $\mathbf{y}$ *vectores en* $\mathbf{R}^n$. *Entonces*

$$||\mathbf{x}+\mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}|| \qquad \textit{(desigualdad del triángulo).}$$

DEMOSTRACIÓN Por el teorema 3, $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} \leq |\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}| \leq ||\mathbf{x}||\,||\mathbf{y}||$, de modo que

$$||\mathbf{x}+\mathbf{y}||^2 = ||\mathbf{x}||^2 + 2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + ||\mathbf{y}||^2 \leq ||\mathbf{x}||^2 + 2||\mathbf{x}||\,||\mathbf{y}|| + ||\mathbf{y}||^2.$$

De aquí obtenemos $||\mathbf{x}+\mathbf{y}||^2 \leq (||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||)^2$; al extraer raíz cuadrada se tiene el resultado. ■

Si el teorema 3 y su corolario se desarrollaran algebraicamente, se convertirían en las siguientes útiles desigualdades:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2};$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}$$

EJEMPLO 1 *Sea* $\mathbf{x} = (1, 2, 0, -1)$ *y* $\mathbf{y} = (-1, 1, 1, 0)$. *Verificar el teorema 3 y su corolario para este caso:*

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
||\mathbf{x}|| &= \sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{6} \\
||\mathbf{y}|| &= \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{3} \\
\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} &= 1(-1) + 2\cdot 1 + 0\cdot 1 + (-1)0 = 1 \\
\mathbf{x}+\mathbf{y} &= (0, 3, 1, -1) \\
||\mathbf{x}+\mathbf{y}|| &= \sqrt{0^2 + 3^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{11}.
\end{aligned}$$

Calculamos $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = 1 \leq 4.24 \approx \sqrt{6}\sqrt{3} = ||\mathbf{x}||\,||\mathbf{y}||$, lo cual verifica el teorema 3. De manera análoga podemos verificar su corolario:

$$\begin{aligned}
||\mathbf{x}+\mathbf{y}|| &= \sqrt{11} \approx 3.32 \leq 4.18 \\
&= 2.45 + 1.73 \approx \sqrt{6} + \sqrt{3} = ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||. \qquad ▲
\end{aligned}$$

Por analogía con $\mathbf{R}^3$, podemos definir el concepto de distancia en $\mathbf{R}^n$; a saber, si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son puntos en $\mathbf{R}^n$, la *distancia entre* $\mathbf{x}$ *y* $\mathbf{y}$ se define como $||\mathbf{x}-\mathbf{y}||$, o la longitud del vector $\mathbf{x}-\mathbf{y}$. Insistimos en que *no hay producto cruz* definido en $\mathbf{R}^n$, excepto para $n = 3$. Sólo se generaliza el producto punto.

Generalizando las matrices de 2×2 y de 3×3 (ver la sección 1.3), podemos considerar matrices de $m \times n$, arreglos de mn números:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

También escribiremos A como $[a_{ij}]$. Definimos suma y multiplicación por un escalar por componentes, tal y como se hizo para vectores. Dadas dos matrices de $m \times n$ A y B, podemos sumarlas (restarlas) para obtener una nueva matriz de $m \times n$, $C = A + B$ ($C = A - B$), cuyo ij-ésimo registro c_{ij} es la suma (diferencia) de a_{ij} y b_{ij}. Es claro que $A + B = B + A$.

EJEMPLO 2

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$

(b) $[1 \quad 2] + [0 \quad -1] = [1 \quad 1].$

(c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$ ▲

Dado un escalar λ y una matriz A de $m \times n$, podemos multiplicar A por λ para obtener una nueva matriz $m \times n$ $\lambda A = C$, cuyo ij-ésimo registro c_{ij} es el producto λa_{ij}.

EJEMPLO 3

$$3\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & 15 \\ 3 & 0 & 9 \end{bmatrix}. \quad ▲$$

A continuación pasamos a la multiplicación de matrices. Si $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, entonces $AB = C$ tiene registros dados por

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj},$$

que es el producto punto del i-ésimo renglón de A y la j-ésima columna de B:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}.$$

EJEMPLO 4 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad BA = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad \blacktriangle$$

De manera análoga, mediante la misma regla podemos multiplicar una matriz de $n \times m$ (n renglones, m columnas) por una matriz de $m \times p$ (m renglones, p columnas) para obtener una matriz de $n \times p$ (n renglones, p columnas). Nótese que para que esté definida AB, el número de columnas de A debe ser igual al número de renglones de B.

EJEMPLO 5 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix},$$

y BA no está definida. $\blacktriangle$

EJEMPLO 6 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = [\,2 \quad 2 \quad 1 \quad 2\,].$$

Entonces

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 6 & 3 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad BA = [13]. \quad \blacktriangle$$

Cualquier matriz A de $m \times n$ determina una asociación de $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^m$ de la manera siguiente: Sea $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$; considerar la matriz columna de

$n \times 1$ asociada con $\mathbf{x}$, que denotaremos *temporalmente* por $\mathbf{x}^T$:

$$\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

y multiplicar A por $\mathbf{x}^T$ (considerada como una matriz de $n \times 1$) para obtener una nueva matriz de $m \times 1$:

$$A\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}.$$

Entonces obtenemos un vector $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m)$. Para usar una matriz A que sirva para obtener una asociación de los vectores $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ a vectores $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m)$ de acuerdo con la ecuación anterior, hemos de escribir los vectores en forma de columna $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ en lugar de la forma de renglón $(x_1, \ldots, x_n)$. Este cambio repentino de escribir $\mathbf{x}$ como renglón a escribirlo como columna es necesario debido a las convenciones sobre multiplicación.* Así, aunque cause alguna confusión, escribiremos $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ y $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m)$ como vectores columna $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$ cuando se trate de multiplicaciones de matrices; esto es, *identificaremos* estas dos formas de escribir vectores. Así, suprimiremos la T en $\mathbf{x}^T$ y consideraremos iguales a $\mathbf{x}^T$ y a $\mathbf{x}$; esto es, $\mathbf{x} = \mathbf{x}^T$.

Así, $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ significará "en realidad" lo siguiente: Escríbase $\mathbf{x}$ como vector columna, multiplíquese por A, y sea $\mathbf{y}$ el vector cuyas componentes son las del vector columna resultante de la multiplicación. La regla $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ define, por lo tanto, una asociación de $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^m$. Esta asociación es lineal; esto es, satisface

$$A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y}$$
$$A(\alpha\mathbf{x}) = \alpha(A\mathbf{x}), \qquad \alpha \text{ un escalar},$$

como puede verificarse fácilmente. En un curso de álgebra lineal se aprende que, recíprocamente, cualquier transformación lineal de $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^m$ se puede representar mediante una matriz de $m \times n$.

Si $A = [a_{ij}]$ es una matriz de $m \times n$ y $\mathbf{e}_j$ es el j-ésimo vector de la base usual de $\mathbf{R}^n$, entonces $A\mathbf{e}_j$ es un vector en $\mathbf{R}^m$ con componentes iguales a las de la j-ésima columna de A. Esto es, la i-ésima componente de $A\mathbf{e}_j$ es a_{ij}. En símbolos, $(A\mathbf{e}_j)_i = a_{ij}$.

---

*Si los matemáticos hubieran elegido la convención de escribir $\mathbf{x}A$ en lugar de $A\mathbf{x}$, o hubiera diferentes reglas para la multiplicación de matrices, se podría conservar a $\mathbf{x}$ como renglón.

EJEMPLO 7 Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

entonces $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ de $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^4$ es la asociación definida por

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1 + 3x_3 \\ -x_1 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \end{bmatrix}. \quad \blacktriangle$$

EJEMPLO 8 A continuación se ilustra lo que sucede a un punto particular cuando se manda mediante una matriz de 4×3:

$$A\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 9 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \text{segunda columna de } A. \quad \blacktriangle$$

La multiplicación de matrices no es, en general, *conmutativa:* si A y B son matrices de $n \times n$, entonces por lo general

$$AB \neq BA$$

(ver los ejemplos 4, 5 y 6).

Se dice que una matriz de $n \times n$ es *invertible* si existe alguna matriz B tal que

$$AB = BA = I_n,$$

donde

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

es la matriz identidad de $n \times n$: I_n tiene la propiedad de que $I_nC = CI_n = C$ para cualquier matriz C de $n \times n$. Denotamos B por A^{-1} y la llamamos la *inversa* de A. La inversa, cuando existe, es única.

EJEMPLO 9 Si

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \text{entonces} \qquad A^{-1} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ -6 & 12 & 4 \end{bmatrix},$$

pues $AA^{-1} = I_3 = A^{-1}A$, como puede verificarse al efectuarse las multiplicaciones de las matrices. ▲

En álgebra lineal se aprenden métodos para calcular inversas; en este libro no se requieren esos métodos. Si A es invertible, es posible resolver la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ para el vector $\mathbf{x}$ multiplicando ambos lados por A^{-1} y obtener $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{y}$.

En la sección 1.3 definimos el determinante de una matriz de 3×3. Esto se puede generalizar por inducción a determinantes de $n \times n$. Ilustramos aquí cómo escribir el determinante de una matriz de 4×4 en términos de los determinantes de matrices de 3×3:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

(ver la fórmula (2) de la sección 1.3; los signos se alternan: $+, -, +, -, \ldots$).

Las propiedades básicas de los determinantes de 3×3 que se revisaron en la sección 1.3, mantienen su validez para determinantes de $n \times n$. En particular, nótese el hecho de que si A es una matriz de $n \times n$ y B es la matriz formada al sumar un múltiplo escalar del k-ésimo renglón (o columna) de A al l-ésimo renglón (o, respectivamente, columna) de A, entonces el determinante de A es igual al determinante de B (ver el ejemplo 10 a continuación).

Un teorema básico del álgebra lineal afirma que una matriz A, de $n \times n$ es invertible si y sólo si el determinante de A no es cero. Otra propiedad básica es que $\det(AB) = (\det A)(\det B)$. En este libro no usaremos muchos detalles de álgebra lineal, de modo que dejaremos estas afirmaciones sin demostración.

EJEMPLO 10 *Sea*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Hallar $\det A$. *¿Tiene A inversa?*

SOLUCIÓN Al sumar $(-1) \times$ la primera columna a la tercera columna, obtenemos

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Al sumar $(-1) \times$ la primera columna a la tercera columna de este determinante de 3×3, obtenemos

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

Así, $\det A = -2 \neq 0$, de modo que A tiene inversa. ▲

Si tenemos tres matrices A, B y C tales que los productos AB y BC están definidos, entonces los productos $(AB)C$ y $A(BC)$ estarán definidos y serán iguales (esto es, la multiplicación de matrices es asociativa). Llamamos a esto *triple producto* de matrices y lo denotamos por ABC.

EJEMPLO 11 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad B = [1 \quad 1], \qquad \text{y} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$ABC = A(BC) = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} [3] = \begin{bmatrix} 9 \\ 15 \end{bmatrix}. \quad ▲$$

EJEMPLO 12

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad ▲$$

EJERCICIOS

1. Probar las propiedades (ii) a (iv) expresadas en el teorema 2.

2. Mostrar en $\mathbf{R}^n$ que

(a) $2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2$ (Esto se conoce como la ley del paralelogramo).

(b) $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|\,\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$

(c) $4\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2$ (A esto se le llama la identidad de polarización.)

Interpretar estos resultados geométricamente en términos del paralelogramo formado por $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$.

Verificar que se cumplen las desigualdades CBS y del triángulo, para los vectores en los ejercicios 3, 4 y 5:

3. $\mathbf{x} = (2, 0, -1)$, $\mathbf{y} = (4, 0, -2)$
4. $\mathbf{x} = (1, 0, 2, 6)$, $\mathbf{y} = (3, 8, 4, 1)$
5. $\mathbf{x} = (1, -1, 1, -1, 1)$, $\mathbf{y} = (3, 0, 0, 0, 2)$

6. Verificar que si A es una matriz de $n \times n$, la asociación $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ de $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^n$ es lineal.

7. Calcular AB, $\det A$, $\det B$, $\det(AB)$ y $\det(A + B)$ para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

8. Calcular AB, $\det A$, $\det B$, $\det(AB)$ y $\det(A + B)$ para

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

9. Usar inducción en k para probar que si $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbf{R}^n$, entonces

$$\|\mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_k\| \leq \|\mathbf{x}_1\| + \cdots + \|\mathbf{x}_k\|.$$

10. Probar mediante álgebra lineal, la *identidad de Lagrange*: Para números reales $x_1, \ldots x_n$ y $y_1, \ldots, y_n$,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) - \sum_{i<j} (x_i y_j - x_j y_i)^2.$$

Usar esto para dar otra demostración de la desigualdad de Cauchy-Schwarz en $\mathbf{R}^n$.

***11.** Probar que si A es una matriz de $n \times n$, entonces
(a) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$; y
(b) si B es una matriz obtenida a partir de A al multiplicar cualquier renglón o columna por un escalar λ, entonces $\det B = \lambda \det A$.

En los ejercicios 12, 13 y 14, A, B y C denotan matrices de $n \times n$.

12. ¿Es cierto que $\det(A + B) = \det A + \det B$? Dar una demostración o un contraejemplo.

13. ¿Es cierto que $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$?

14. Suponiendo cierta la ley $\det(AB) = (\det A)(\det B)$, probar que $\det(ABC) = (\det A)(\det B)(\det C)$.

***15.** (Este ejercicio supone conocimiento de integración de funciones continuas de una variable.) Nótese que la demostración de la desigualdad CBS (teorema 3) depende sólo de las propiedades del producto interno listadas en el teorema 2. Usar esta observación para establecer la siguiente desigualdad para funciones continuas f, g: $[0,1] \to \mathbf{R}$:

$$\left|\int_0^1 f(x)g(x)\,dx\right| \leq \sqrt{\int_0^1 [f(x)]^2\,dx}\sqrt{\int_0^1 [g(x)]^2\,dx}.$$

Hacer esto

(a) verificando que el espacio de funciones continuas de $[0,1]$ a $\mathbf{R}$ forman un espacio vectorial; esto es, podemos pensar las funciones f y g de manera abstracta como "vectores" que pueden sumarse entre sí, y multiplicarse por escalares.

(b) introduciendo el producto interno de funciones

$$f \cdot g = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$$

y verificando que satisfaga las condiciones (i) a (iv) del teorema 2.

***16.** Definir la transpuesta A^T de una matriz A de $n \times n$ como sigue: el ij-ésimo elemento de A^T es a_{ji} donde a_{ij} es el ij-ésimo registro de A. Mostrar que A^T está caracterizada por la siguiente propiedad: Para todo $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ en $\mathbf{R}^n$,

$$(A^T\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (A\mathbf{y}).$$

17. Verificar que la inversa de

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{es} \quad \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

18. Usar la respuesta al ejercicio 17 para mostrar que la solución del sistema

$$ax + by = e$$
$$cx + dy = f$$

es

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-dc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}.$$

19. Suponiendo cierta la ley $\det(AB) = (\det A)(\det B)$, verificar que $(\det A)(\det A^{-1}) = 1$ y concluir que si A tiene inversa, entonces $\det A \neq 0$.

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 1

1. Sea $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ y $\mathbf{w} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Calcular $\mathbf{v} + \mathbf{w}$, $3\mathbf{v}$, $6\mathbf{v} + 8\mathbf{w}$, $-2\mathbf{v}$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$, $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$. Interpretar cada operación geométricamente graficando los vectores.

2. Repetir el ejercicio 1 con $\mathbf{v} = 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{w} = -\mathbf{i} - \mathbf{k}$.

3. (a) Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(-1, 2, -1)$ en la dirección de $\mathbf{j}$.
(b) Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(0, 2, -1)$ y $(-3, 1, 0)$.
(c) Hallar la ecuación del plano perpendicular a $(-2, 1, 2)$ que pasa por $(-1, 1, 3)$.

4. (a) Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(0, 1, 0)$ en la dirección de $3\mathbf{i} + \mathbf{k}$.
(b) Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(0, 1, 1)$ y $(0, 1, 0)$.
(c) Hallar la ecuación para el plano perpendicular a $(-1, 1, -1)$ que pasa por $(1, 1, 1)$.

5. Calcular $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ para el siguiente conjunto de vectores:
(a) $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$; $\mathbf{w} = \mathbf{k}$.
(b) $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$; $\mathbf{w} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$.
(c) $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$; $\mathbf{w} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

6. Calcular $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ para los vectores del ejercicio 5. (Sólo la parte (b) está resuelta en la Guía de estudio.)

7. Hallar el coseno del ángulo entre los vectores en el ejercicio 5. (Sólo la parte (b) está resuelta en la Guía de estudio.)

8. Hallar el área del paralelogramo generado por los vectores del ejercicio 5. (Sólo la parte (b) está resuelta en la Guía de estudio.)

9. Usar notación vectorial para describir el triángulo en el espacio cuyos vértices son el origen y los extremos de los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

10. Mostrar que los tres vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ están en el mismo plano que pasa por el origen si y sólo si existen tres escalares α, β y γ, no todos iguales a cero, tales que $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = \mathbf{0}$.

11. Para los números reales a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y b_3, mostrar que

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2).$$

12. Sean $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ vectores unitarios que son ortogonales entre sí. Si $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w}$, mostrar que

$$\alpha = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}, \qquad \beta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}, \qquad \gamma = \mathbf{a} \cdot \mathbf{w}.$$

Interpretar geométricamente los resultados.

13. Sean $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ dos vectores en el plano, $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, y sea λ un número real. Mostrar que el área del paralelogramo determinado por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b} + \lambda\mathbf{a}$ es la misma que la del determinado por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. Esbozar. Relacionar este resultado con una conocida propiedad de los determinantes.

14. Hallar el volumen del paralelepípedo determinado por los vértices $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(0, 2, 0)$ y $(3, 1, 2)$.

15. Dados vectores distintos de cero $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ en $\mathbf{R}^3$, mostrar que el vector $\mathbf{v} = \|\mathbf{a}\|\mathbf{b} + \|\mathbf{b}\|\mathbf{a}$ biseca el ángulo entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

16. Usar métodos vectoriales para probar que la distancia del punto (x_1, y_1) a la recta $ax + by = c$ es

$$\frac{|ax_1 + by_1 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

17. Verificar que la dirección de $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ está dada por la regla de la mano derecha, escogiendo dos vectores $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ de entre $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$.

18. (a) Suponer que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}$ para todo $\mathbf{b}$. Mostrar que $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$.
(b) Suponer que $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a}' \times \mathbf{b}$ para todo $\mathbf{b}$. ¿Es cierto que $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$?

19. (a) Usando métodos vectoriales mostrar que la distancia entre dos rectas no paralelas l_1 y l_2 está dada por

$$d = \frac{|(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)\cdot(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)|}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|},$$

donde $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son dos puntos cualesquiera sobre l_1 y l_2, respectivamente, y $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ son las direcciones de l_1 y l_2. [IDEA: Considerar el plano que pasa por l_2 y es paralelo a l_1. Mostrar que $(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)/\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|$ es una normal unitaria para este plano; ahora, proyectar $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ sobre esta dirección normal.]

(b) Hallar la distancia entre la recta l_1 determinada por los puntos $(-1, -1, 1)$ y $(0, 0, 0)$, y la recta l_2 determinada por los puntos $(0, -2, 0)$ y $(2, 0, 5)$.

20. Mostrar que dos planos, dados por las ecuaciones $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ y $Ax + By + Cz + D_2 = 0$, son paralelos, y que la distancia entre ellos es

$$\frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

21. (a) Probar que el área del triángulo en el plano con vértices (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3), es el valor absoluto de

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

(b) Hallar el área del triángulo con vértices $(1, 2)$, $(0, 1)$ y $(-1, 1)$.

22. Convertir los siguientes puntos de coordenadas cartesianas a cilíndricas y esféricas. Localizar:

(a) $(0, 3, 4)$ (b) $(-\sqrt{2}, 1, 0)$
(c) $(0, 0, 0)$ (d) $(-1, 0, 1)$
(e) $(-2\sqrt{3}, -2, 3)$

23. Convertir los siguientes puntos de coordenadas cilíndricas a cartesianas y esféricas. Localizar:

(a) $(1, \pi/4, 1)$ (b) $(3, \pi/6, -4)$
(c) $(0, \pi/4, 1)$ (d) $(2, -\pi/2, 1)$
(e) $(-2, -\pi/2, 1)$

24. Convertir los siguientes puntos de coordenadas esféricas a cartesianas y cilíndricas. Localizar:

(a) $(1, \pi/2, \pi)$ (b) $(2, -\pi/2, \pi/6)$
(c) $(0, \pi/8, \pi/35)$ (d) $(2, -\pi/2, -\pi)$
(e) $(-1, \pi, \pi/6)$

25. Reescribir la ecuación $z = x^2 - y^2$ usando coordenadas cilíndricas y esféricas.

26. Usando coordenadas esféricas, mostrar que

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{k}}{\|\mathbf{u}\|}\right)$$

donde $\mathbf{u} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Interpretar geométricamente.

27. Verificar las desigualdades de Cauchy-Schwarz y del triángulo para

$$\mathbf{x} = (3, 2, 1, 0) \quad \text{y} \quad \mathbf{y} = (1, 1, 1, 2).$$

28. Multiplicar las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

¿Es cierto que $AB = BA$?

29. (a) Mostrar que para dos matrices A y B, de $n \times n$, y $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$,

$$(AB)\mathbf{x} = A(B\mathbf{x}).$$

(b) ¿Qué implica la igualdad de la parte (a) respecto a la relación entre la composición de las asociaciones $\mathbf{x} \mapsto B\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \mapsto A\mathbf{y}$ y la multiplicación de matrices?

30. Hallar el volumen del paralelepípedo generado por los vectores

$$(1, 0, 1), \quad (1, 1, 1), \quad \text{y} \quad (-3, 2, 0).$$

31. Verificar que cualquier asociación lineal de $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^n$ está determinada por una matriz de $n \times n$; esto es, proviene de una matriz de $n \times n$ de la manera explicada en la pág. 62.

32. Hallar una ecuación para el plano que contiene $(3, -1, 2)$ y la recta $\mathbf{v} = (2, -1, 0) + t(2, 3, 0)$.

33. El trabajo W realizado al mover un objeto de $(0,0)$ a $(7,2)$ sujeto a una fuerza $\mathbf{F}$ es $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}$ donde $\mathbf{r}$ es el vector con cabeza en $(7,2)$ y cola en $(0,0)$. Las unidades son metros y kilos.

(a) Suponer que la fuerza $\mathbf{F} = 10\cos\theta\mathbf{i} + 10\,\mathrm{sen}\,\theta\mathbf{j}$. Hallar W en términos de θ.

(b) Suponer que la fuerza $\mathbf{F}$ tiene magnitud de 6 kg y forma un ángulo de $\pi/6$ rad con la horizontal, apuntando a la derecha. Hallar W en metros-kilos.

34. Si una partícula con masa m se mueve a una velocidad $\mathbf{v}$, su *momento* es $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. En un juego de canicas, se tira una canica con masa de 2 gramos (g) con una velocidad de 2 metros por segundo (m/s), la cual choca con dos canicas con masa de 1 g cada una, y se para. Una de las canicas sale con una velocidad de 3 m/s formando un ángulo de 45° con la dirección de incidencia de la canica grande, como en la figura 1.R.1. Suponiendo que el momento total antes y después de la colisión es el mismo (de acuerdo con la ley de conservación del momento), ¿a qué ángulo y velocidad se movió la segunda canica?

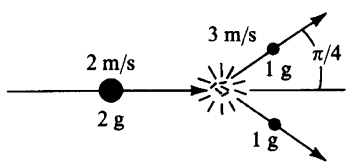


Figura 1.R.1 Momento y canicas.

35. Mostrar que para todo x, y y z,

$$\begin{vmatrix} x+2 & y & z \\ z & y+1 & 10 \\ 5 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} y & x+2 & z \\ 1 & z-x-2 & 10-z \\ 5 & 5 & 2 \end{vmatrix}.$$

36. Mostrar que

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} \neq 0$$

si x, y y z son todos diferentes.

37. Mostrar que

$$\begin{vmatrix} 66 & 628 & 246 \\ 88 & 435 & 24 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 68 & 627 & 247 \\ 86 & 436 & 23 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

38. Mostrar que

$$\begin{vmatrix} n & n+1 & n+2 \\ n+3 & n+4 & n+5 \\ n+6 & n+7 & n+8 \end{vmatrix}$$

tiene el mismo valor, sin importar cuánto sea n. ¿Cuál es ese valor?

39. El volumen de un tetraedro con aristas concurrentes $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ está dado por $V = \frac{1}{6}\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$.

(a) Expresar el volumen como un determinante.

(b) Evaluar V cuando $\mathbf{a} = \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i}+\mathbf{j}$.

Usar la siguiente definición para los problemas 40 y 41: Sean $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n$ *vectores de* O *a las masas* $m_1, \ldots, m_n$. *El* ***centro de masa*** *es el vector*

$$\mathbf{c} = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{r}_i\right) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right).$$

40. Un tetraedro está dado en coordenadas xyz con un vértice en $(0,0,0)$ y las tres aristas concurrentes a $(0,0,0)$ coinciden con los vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$.

(a) Trazar una figura y rotular las cabezas de los vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.

(b) Hallar el centro de masa de cada uno de las cuatro caras triangulares del tetraedro si se coloca una unidad de masa en cada vértice.

41. Mostrar que para cualquier vector $\mathbf{r}$, el centro de masa de un sistema satisface

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i\|\mathbf{r}_i-\mathbf{c}\|^2 + m\|\mathbf{r}-\mathbf{c}\|^2,$$

donde $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ es la masa total del sistema.

En los ejercicios 42 al 47, hallar un vector unitario que tenga la propiedad dada.

42. Paralelo a la recta $x = 3t+1$, $y = 16t-2$, $z = -(t+2)$.

43. Ortogonal al plano $x - 6y + z = 12$.

44. Paralelo a los planos $8x + y + z = 1$ y $x - y - z = 0$.

45. Ortogonal a $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ y a $\mathbf{k}$.

46. Ortogonal a la recta $x = 2t-1$, $y = -t-1$, $z = t+2$, y al vector $\mathbf{i}-\mathbf{j}$.

47. A un ángulo de 30° con $\mathbf{i}$ y formando ángulos iguales con $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$.

48. Un par de dipolos distan entre sí en r. (Los *dipolos* son idealizaciones de pequeños magnetos con un polo norte y un polo sur infinitesimalmente cercanos entre sí; la potencia del dipolo se describe por un vector llamado su *momento de dipolo*.) La energía potencial magnética P está dada por $P = -\mathbf{m}_1\cdot\mathbf{B}_2$ (llamado el *potencial de interacción dipolo-dipolo*), donde el primer dipolo tiene momento $\mathbf{m}_1$ en el campo externo $\mathbf{B}_2$ del segundo dipolo. En unidades MKS,

$$\mathbf{B}_2 = \mu_0\frac{-\mathbf{m}_2 + 3(\mathbf{m}_2\cdot\mathbf{l})\mathbf{l}}{4\pi r^3},$$

donde $\mathbf{l}$ es un vector unitario, y μ_0 es una constante escalar.

(a) Mostrar que

$$P = \mu_0 \frac{\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2 - 3(\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{l})(\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{l})}{4\pi r^3}.$$

(b) Hallar P cuando $\mathbf{m}_1$ y $\mathbf{m}_2$ son perpendiculares.

49. Una esfera de radio 10 centímetros (cm) con centro en $(0, 0, 0)$ rota alrededor del eje z con velocidad angular 4 en una dirección tal que la rotación se ve en sentido contrario al que giran las manecillas del reloj desde el eje z positivo.

(a) Hallar el vector de rotación $\boldsymbol{\omega}$ (ver la sección 1.3, ejercicio 32).

(b) Hallar la velocidad $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ cuando $\mathbf{r} = 5\sqrt{2}(\mathbf{i} - \mathbf{j})$ está en el "ecuador".

2 DIFERENCIACIÓN

Yo me alejo con espanto y horror, de la triste maldad de las funciones que no tienen derivadas.

CHARLES HERMITE, en una carta a Thomas Jan Stieltjes

En este capítulo se amplían los principios del cálculo diferencial para funciones de una variable a funciones de varias variables. Comenzamos en la sección 2.1 con la geometría de las funciones con valores reales y el estudio de las gráficas de estas funciones como un auxiliar para visualizarlas. En la sección 2.2 se dan algunas definiciones básicas que relacionan límites y continuidad. Este tema se trata superficialmente, pues su desarrollo completo requiere de tiempo y madurez matemática, por lo cual es mejor dejarlo para un curso más avanzado.* Afortunadamente para nuestros propósitos, no es necesario un conocimiento completo de las sutilezas del concepto de límite; el estudiante que tenga dificultad con esta sección deberá tenerlo en mente. Sin embargo, añadimos enseguida, el concepto de límite ocupa un lugar central en la definición de derivada, pero no en los cálculos de las derivadas en problemas específicos; como ya sabemos por los cursos de cálculo de una variable. En las secciones 2.3 y 2.4 se trata la definición de derivada y se obtienen algunas reglas básicas del cálculo: a saber, cómo diferenciar una suma, producto, cociente o composición. En la sección 2.5 estudiamos derivadas direccionales y planos tangentes, relacionando estas ideas con las de la sección 2.1, y en la sección 2.6 consideramos algunas propiedades de las derivadas de orden superior. Finalmente la sección 2.7 es optativa, y ahí se dan algunas demostraciones técnicas.

*Ver, por ejemplo, J. Marsden, *Elementary Classical Analysis*, Freeman, Nueva York, 1974.

Al generalizar el cálculo de una a varias dimensiones, suele ser conveniente usar el lenguaje del álgebra de matrices. En la sección 1.5 hemos resumido lo que vamos a necesitar.

2.1 GEOMETRÍA DE LAS FUNCIONES CON VALORES REALES

Iniciamos nuestra investigación de funciones con valores reales desarrollando métodos para visualizarlas. Introduciremos en particular, los conceptos de gráfica, curva de nivel y superficie de nivel de dichas funciones.

Sea f una función cuyo dominio sea un subconjunto A de $\mathbf{R}^n$ y cuya imagen esté contenida en $\mathbf{R}^m$. Con esto queremos decir que a cada $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in A$, f asigna un valor $f(\mathbf{x})$, una m-ada en $\mathbf{R}^m$. Dichas funciones f se llaman *funciones con valores vectoriales** si $m > 1$, y *funciones con valores escalares* si $m = 1$. Por ejemplo, la función con valores escalares $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$ manda al conjunto A de $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ en $\mathbf{R}^3$ ($n = 3$ en este caso) a $\mathbf{R}(m = 1)$. Para denotar f solemos escribir

$$f\colon (x, y, z) \mapsto (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}.$$

Nótese que en $\mathbf{R}^3$ solemos usar la notación (x, y, z) en lugar de (x_1, x_2, x_3). En general, la notación $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x})$ es útil para indicar el valor al cual se manda un punto $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$. Escribimos $f\colon A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ para expresar que A es el dominio de f (en $\mathbf{R}^n$) y que la imagen está contenida en $\mathbf{R}^m$. También usamos la expresión f manda A *dentro* de $\mathbf{R}^m$. Dichas funciones f se llaman *funciones de varias variables* si $A \subset \mathbf{R}^n$, $n > 1$.

Como otro ejemplo, tomemos la función con valores vectoriales $g\colon \mathbf{R}^6 \to \mathbf{R}^2$ definida por la regla

$$g(\mathbf{x}) = g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6, \sqrt{x_1^2 + x_6^2}).$$

La primera coordenada del valor de g en $\mathbf{x}$ es el producto de las coordenadas de $\mathbf{x}$.

Las funciones de $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^m$ no son sólo abstracciones matemáticas, sino que surgen de manera natural en problemas estudiados en todas las ciencias. Por ejemplo, para especificar la temperatura T en una región A del espacio se requiere una función $T\colon A \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ ($n = 3$, $m = 1$); así $T(x, y, z)$ es la temperatura en el punto (x, y, z). Para especificar la velocidad de un fluido moviéndose en el espacio

*Algunos matemáticos escribirían dicha f en negritas, usando la notación $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, pues tiene valores vectoriales. Nosotros no lo hacemos así por cuestión de gusto. Usamos negritas principalmente para asociaciones que sean campos vectoriales, los cuales se introducirán más adelante. El concepto de función fue desarrollado durante muchos siglos, ampliándose la definición para cubrir más casos según iban apareciendo. Por ejemplo, en 1667 James Gregory definió una función como "una cantidad obtenida a partir de otras cantidades mediante una sucesión de operaciones algebraicas o mediante cualquier otra operación imaginable." En 1775 Euler dio la siguiente definición: "Si algunas cantidades dependen de otras de manera que varían cuando varían las últimas, entonces se dice que las primeras son función de las últimas."

se requiere una asociación $\mathbf{V}: \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$, donde $\mathbf{V}(x, y, z, t)$ es el vector velocidad del fluido en el punto (x, y, z) del espacio en el tiempo t (ver la figura 2.1.1). Para especificar la tasa de reacción de una solución que consta de seis reactores químicos A, B, C, D, E y F en proporciones x, y, z, w, u y v, se requiere una asociación $\sigma: U \subset \mathbf{R}^6 \to \mathbf{R}$, donde $\sigma(x, y, z, w, u, v)$ da la tasa cuando los químicos están en las proporciones indicadas. Para especificar el vector cardiaco (el vector que indica la magnitud y dirección del flujo de la corriente eléctrica en el corazón) en el tiempo t, se requiere una asociación $\mathbf{c}: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$, $t \mapsto \mathbf{c}(t)$.

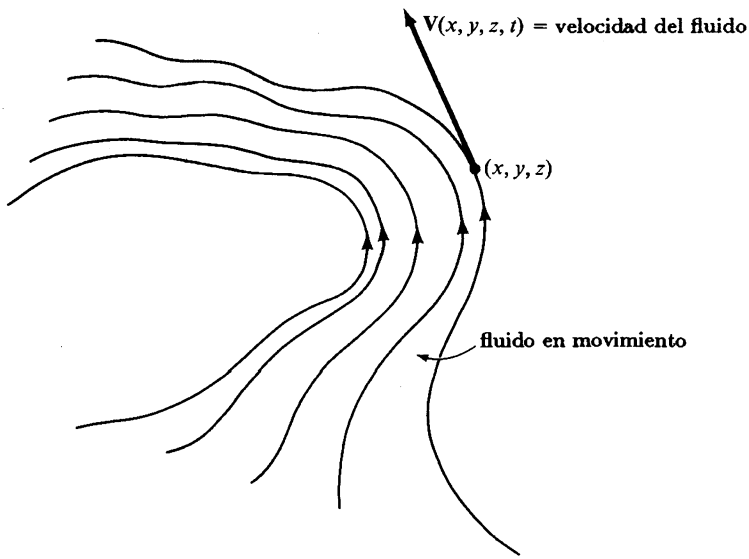


Figura 2.1.1 Un fluido en movimiento define un campo vectorial $\mathbf{V}$ al especificar la velocidad de las partículas del fluido en cada punto en espacio y tiempo.

Cuando $f: U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, decimos que f es una *función de n variables, con dominio U y valores reales.* La razón por la que decimos "n variables" es simplemente que consideramos las coordenadas de un punto $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in U$ como n variables, y $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ depende de estas variables. Decimos con "valores reales" porque $f(x_1, \ldots, x_n)$ es un número real. Buena parte de nuestro estudio será acerca de funciones con valores reales, por lo que les daremos atención especial.

Para $f: U \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $(n = 1)$, la *gráfica* de f es el subconjunto de $\mathbf{R}^2$ que consta de los puntos $(x, f(x))$ en el plano, para x en U. Este subconjunto se puede pensar como una curva en $\mathbf{R}^2$. Esto se escribe simbólicamente, como

$$\text{gráfica } f = \{(x, f(x)) \in \mathbf{R}^2 | x \in U\},$$

donde las llaves significan "el conjunto de todos" y la barra vertical significa "tal que". Trazar la gráfica de una función de una variable es un recurso útil

para visualizar el comportamiento real de una función. (Ver la figura 2.1.2.) Será conveniente generalizar la idea de gráfica de una función a funciones de varias variables. Esto conduce a la siguiente definición:

DEFINICIÓN *Sea $f: U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. Definimos la* ***gráfica*** *de f como el subconjunto de $\mathbf{R}^{n+1}$ que consta de todos los puntos $(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n))$ en $\mathbf{R}^{n+1}$ para $(x_1, \ldots, x_n)$ en U. En símbolos:*

$$\text{gráfica } f = \{(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)) \in \mathbf{R}^{n+1} | (x_1, \ldots, x_n) \in U\}.$$

Para el caso $n = 1$, la gráfica es una curva en $\mathbf{R}^2$, mientras que para $n = 2$ es una superficie en $\mathbf{R}^3$ (ver la figura 2.1.2). Para $n = 3$ es difícil visualizar la gráfica, pues como vivimos en un mundo tridimensional, nos es difícil imaginar conjuntos en $\mathbf{R}^4$. Para superar este obstáculo, introducimos la idea de conjunto de nivel.

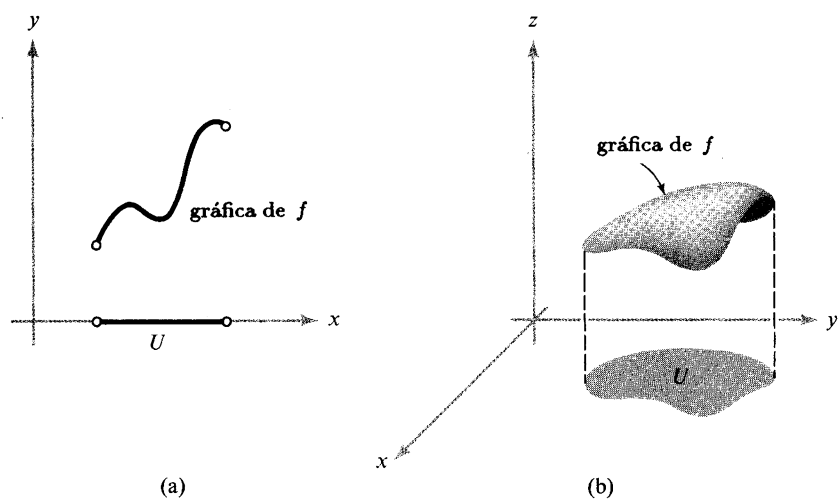


Figura 2.1.2 Gráficas de (a) una función de una variable y (b) una función de dos variables.

Supongamos que $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Un *conjunto de nivel* es un subconjunto de $\mathbf{R}^3$ en donde f es constante; por ejemplo, el conjunto donde $x^2+y^2+z^2 = 1$ es un conjunto de nivel para f. A éste sí lo podemos visualizar: es una esfera de radio 1 en $\mathbf{R}^3$. El comportamiento o estructura de una función está determinada en parte por la forma de sus conjuntos de nivel; en consecuencia, entender estos conjuntos nos ayuda a entender la función en cuestión. Los conjuntos de nivel también son útiles para entender funciones de dos variables $f(x, y)$, en cuyo caso hablaremos de *curvas de nivel*.

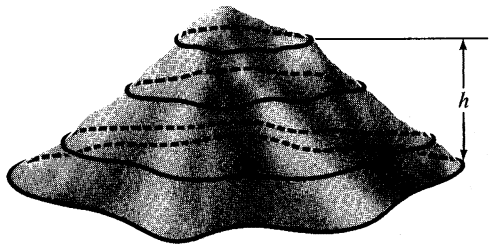


Figura 2.1.3 Los contornos de nivel de una función se definen de la misma manera que las líneas de contorno en un mapa topográfico.

La idea es análoga a la usada para preparar mapas de contornos, donde se trazan líneas para representar altitudes constantes; caminar a lo largo de dicha línea significará caminar en una curva de nivel. En el caso de una colina sobre el plano xy, una gráfica de todas las curvas de nivel nos da una buena idea de la función $h(x, y)$, que representa la altura de la colina en los puntos (x, y) (ver la figura 2.1.3).

DEFINICIÓN *Sea $f: U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ y sea $c \in \mathbf{R}$. Entonces el* ***conjunto de nivel del valor*** *c se define como aquellos puntos $\mathbf{x} \in U$ para los cuales $f(\mathbf{x}) = c$. Si $n = 2$, hablamos de una* ***curva de nivel*** *(de valor c); y si $n = 3$, hablamos de una* ***superficie de nivel****. En símbolos, el conjunto de nivel de valor c se escribe*

$$\{\mathbf{x} \in U | f(\mathbf{x}) = c\} \subset \mathbf{R}^n.$$

Nótese que el conjunto de nivel siempre está en el espacio dominio.

EJEMPLO 1 La función constante $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $(x, y) \mapsto 2$, esto es, la función $f(x, y) = 2$, tiene como gráfica el plano horizontal $z = 2$ en $\mathbf{R}^3$. La curva de nivel del valor c es vacía si $c \neq 2$, y es todo el plano xy si $c = 2$. ▲

EJEMPLO 2 La función $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $(x, y) \mapsto x + y + 2$ tiene como gráfica el plano inclinado $z = x + y + 2$. Este plano insterseca el plano xy ($z = 0$) en la recta $y = -x - 2$ y el eje z en el punto $(0, 0, 2)$. Para cualquier valor $c \in \mathbf{R}$, la curva de nivel del valor c es la recta $y = -x + (c - 2)$; o, en símbolos, el conjunto

$$L_c = \{(x, y) | y = -x + (c - 2)\} \subset \mathbf{R}^2$$

Exhibimos unas cuantas curvas de nivel de la función en la figura 2.1.4. Se trata, en realidad, de un mapa de contorno de la función f. ▲

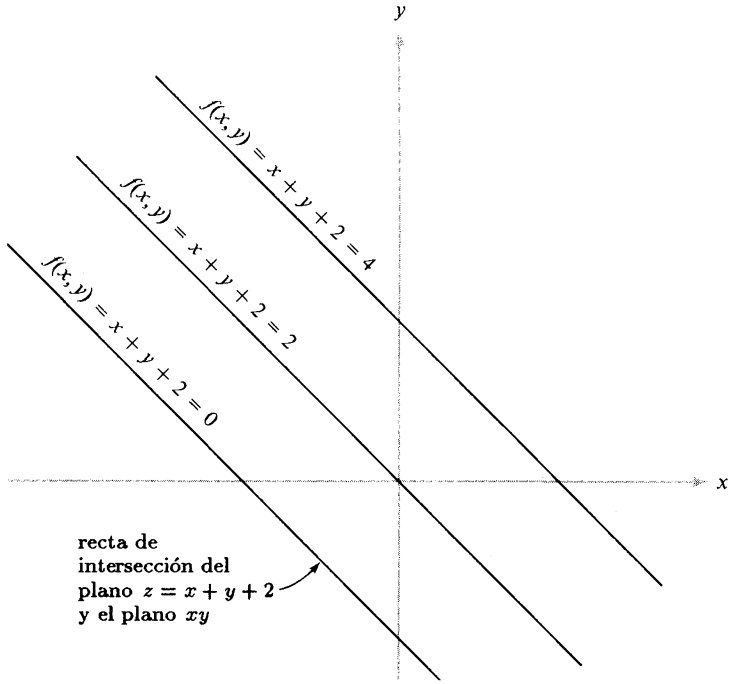


Figura 2.1.4 Las curvas de nivel de $f(x, y) = x + y + z + 2$ muestran el comportamiento de esta función.

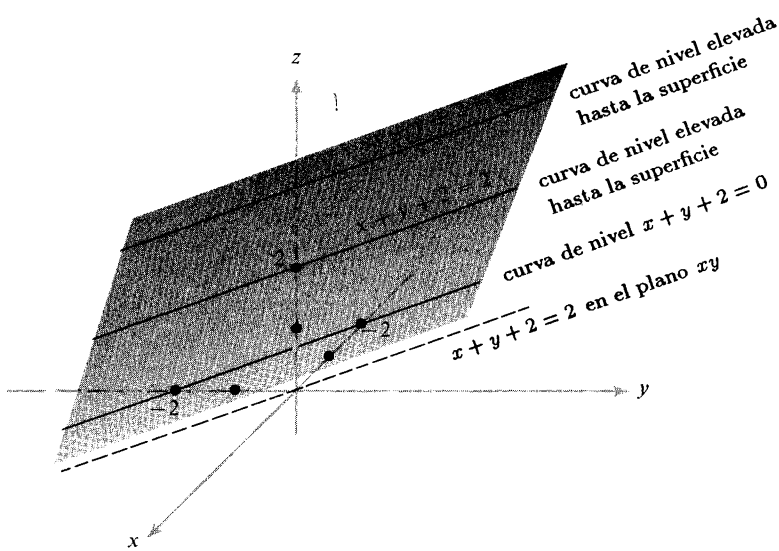


Figura 2.1.5 Relación de las curvas de nivel en la figura 2.1.4, con la gráfica de la función $f(x, y) = x + y + 2$, la cual es el plano $z = x + y + 2$.

A partir de las curvas de nivel rotuladas con el valor o "altura" de la función, se puede inferir la gráfica de la función elevando mentalmente cada curva de nivel a la altura apropiada, sin estirarla, inclinarla o deslizarla. Si se contemplara este procedimiento para todas las curvas de nivel L_c, esto es, para todos los valores $c \in \mathbf{R}$, juntas conformarían toda la gráfica de f, como se indicó en la figura 2.1.5 para el ejemplo 2. Si se visualiza la gráfica sólo para un número finito de curvas de nivel, como suele ser el caso, se produce una especie de modelo de contorno, como en la figura 2.1.4. Sin embargo, si f es una función suave, su gráfica será una superficie suave; entonces, al suavizar mentalmente el modelo de contorno se obtiene una buena idea de la gráfica.

EJEMPLO 3 *Describir la gráfica de la función cuadrática* $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$.

SOLUCIÓN La gráfica es el *paraboloide de revolución* $z = x^2 + y^2$, orientado hacia arriba desde el origen y alrededor del eje z. La curva de nivel del valor c es vacía para $c < 0$; para $c > 0$ la curva de nivel de valor c es el conjunto $\{(x, y) | x^2 + y^2 = c\}$, un círculo de radio $\sqrt{c}$ con centro en el origen. Así, al elevarlo a la altura c sobre el plano xy, el conjunto de nivel es un círculo de radio $\sqrt{c}$, que indica una forma parabólica (ver las figuras 2.1.6 y 2.1.7). ▲

Es posible determinar el aspecto de una gráfica mediante el *método de las secciones*. Una *sección* de la gráfica de f es la intersección de la gráfica con un plano (vertical). Por ejemplo, si P_1 es el plano xz en $\mathbf{R}^3$, definido por $y = 0$, entonces la sección de f en el ejemplo 3 es el conjunto

$$P_1 \cap \text{gráfica } f = \{(x, y, z) | y = 0, z = x^2\},$$

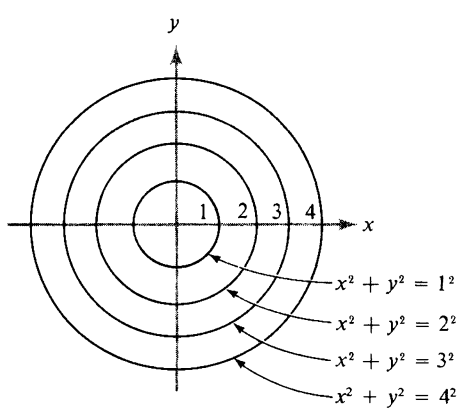


Figura 2.1.6 Algunas curvas de nivel para la función $f(x, y) = x^2 + y^2$.

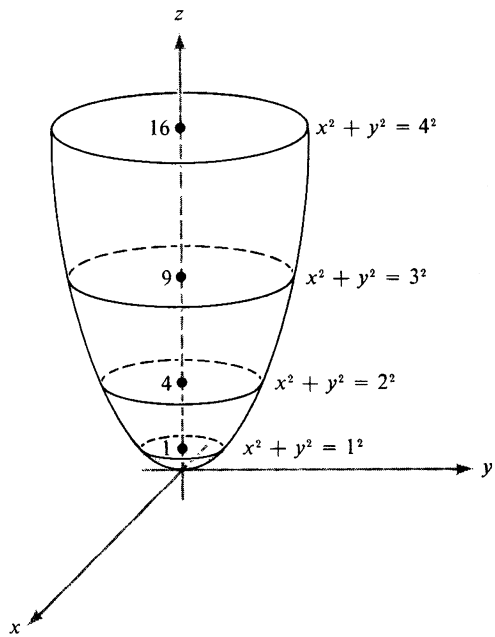


Figura 2.1.7 Las curvas de nivel de la figura 2.1.6 elevadas hasta la gráfica.

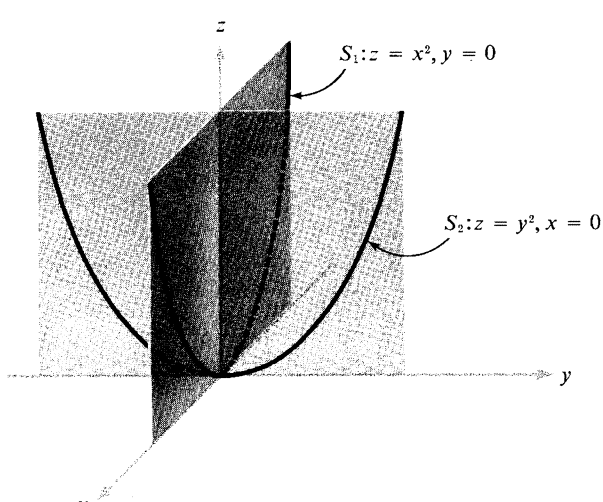


Figura 2.1.8 Dos secciones de la gráfica de $f(x, y) = x^2 + y^2$.

el cual es una parábola en el plano xz. De manera análoga, si P_2 denota al plano yz, definido por $x = 0$, entonces la sección

$$P_2 \cap \text{gráfica } f = \{(x, y, z) | x = 0, z = y^2\}$$

es una parábola en el plano yz (ver la figura 2.1.8). Usualmente, es útil calcular al menos una sección para complementar la información dada por los conjuntos de nivel.

EJEMPLO 4 *La gráfica de la función cuadrática $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$ se llama* ***paraboloide hiperbólico*** *o* ***silla de montar,*** *con centro en el origen. Esbozar la gráfica.*

SOLUCIÓN Para visualizar esta superficie trazamos primero las curvas de nivel. Para determinar las curvas de nivel, resolvemos la ecuación $x^2 - y^2 = c$. Consideremos los valores $c = 0, \pm 1, \pm 4$. Para $c = 0$, tenemos $y^2 = x^2$, o $y = \pm x$, de manera que este conjunto de nivel está formado por dos rectas que pasan por el origen. Para $c = 1$, la curva de nivel es $x^2 - y^2 = 1$, o $y = \pm\sqrt{x^2 - 1}$, que

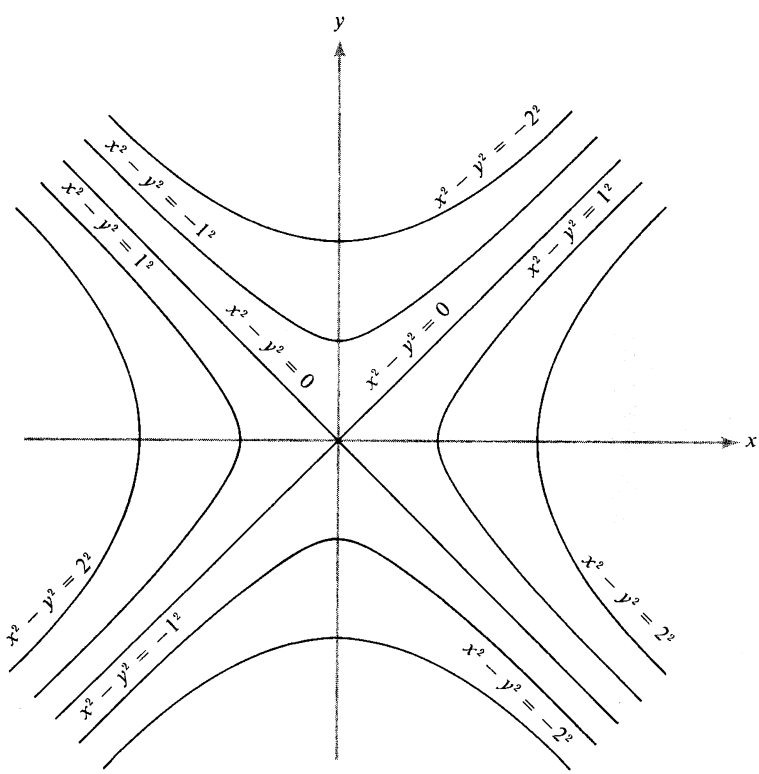


Figura 2.1.9 Curvas de nivel para la función $f(x, y) = x^2 - y^2$.

es una hipérbola que cruza verticalmente el eje x en los puntos $(\pm 1, 0)$ (ver la figura 2.1.9). De manera análoga, para $c = 4$, la curva de nivel está definida por $y = \pm\sqrt{x^2 - 4}$, la hipérbola cruza verticalmente el eje x en $(\pm 2, 0)$. Para $c = -1$, obtenemos la curva $x^2 - y^2 = -1$, esto es, $x = \pm\sqrt{y^2 - 1}$, la hipérbola cruza horizontalmente el eje y en $(0, \pm 1)$. Y para $c = -4$, se obtiene la hipérbola que pasa por $(0, \pm 2)$. Se muestran estas curvas en la figura 2.1.9. Como no es fácil visualizar la gráfica de f a partir sólo de estos datos, calcularemos dos secciones, como lo hicimos en el ejemplo anterior. Para la sección en el plano xz, tenemos

$$P_1 \cap \text{gráfica } f = \{(x, y, z) | y = 0, z = x^2\},$$

que es una parábola abriéndose hacia arriba; y para el plano yz,

$$P_2 \cap \text{gráfica } f = \{(x, y, z) | x = 0, z = -y^2\},$$

que es una parábola abriéndose hacia abajo. Ahora se puede visualizar la gráfica elevando las curvas de nivel a la altura apropiada y suavizando la superficie resultante. Su colocación se facilita al calcular las secciones parabólicas. Este procedimiento genera la silla de montar hiperbólica mostrada en la figura 2.1.10. Comparar esto con las gráficas generadas por computadora en la figura 2.1.11 (nótese que se ha cambiado la orientación de los ejes). ▲

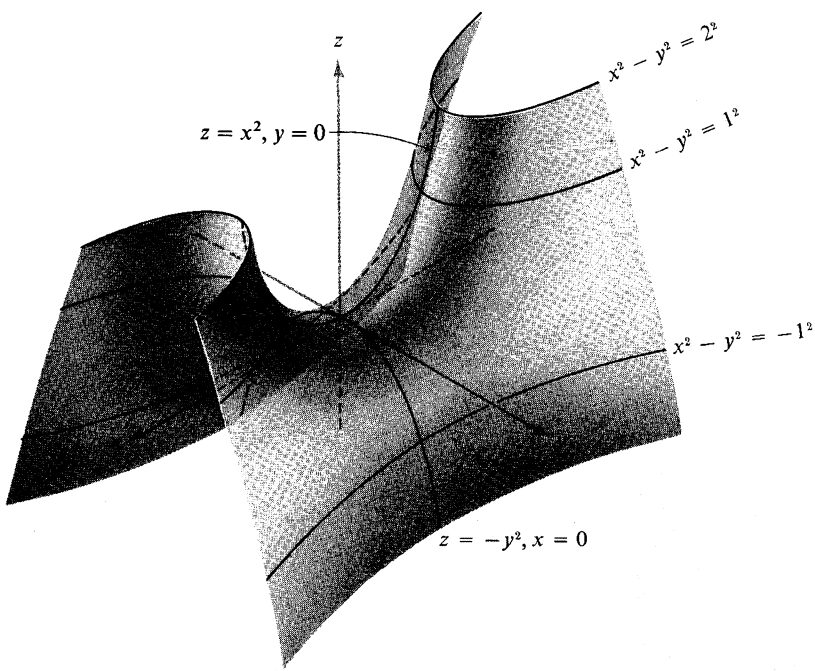


Figura 2.1.10 Algunas curvas de nivel en la gráfica de $f(x, y) = x^2 - y^2$.

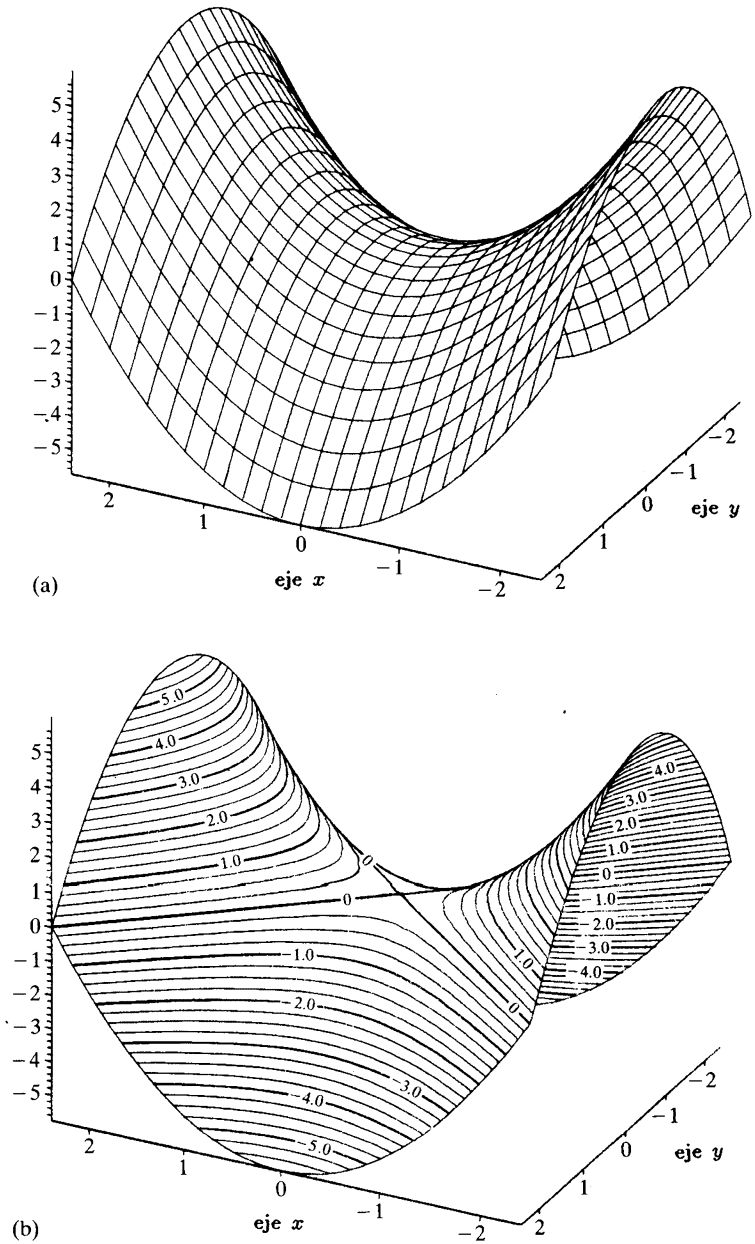


Figura 2.1.11 (a) Gráfica generada por computadora, de $z = x^2 + y^2$. (b) Esta gráfica con las curvas de nivel elevadas.

EJEMPLO 5 *Describir la gráfica de la función* $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$.

SOLUCIÓN Éste es el equivalente tridimensional del ejemplo 3. En este contexto, los conjuntos de nivel son superficies en el dominio tridimensional $\mathbf{R}^3$. La gráfica, en $\mathbf{R}^4$, no se puede visualizar directamente; sin embargo se pueden calcular de manera analítica las secciones.

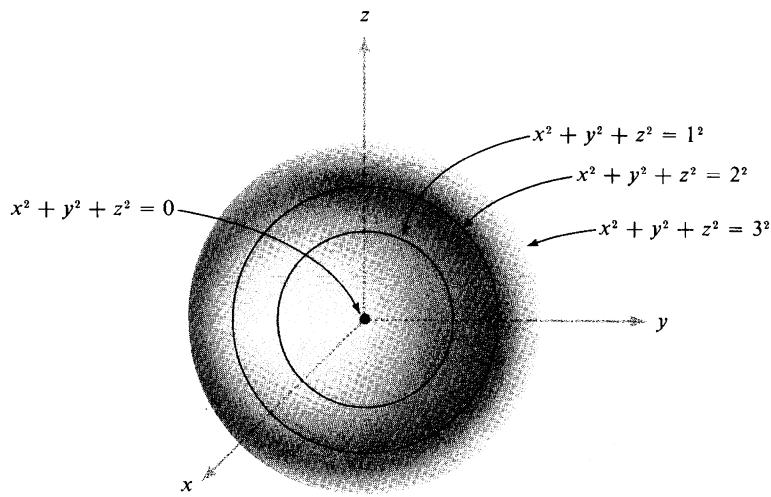


Figura 2.1.12 Algunas superficies de nivel para $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

El conjunto de nivel con valor c es el conjunto

$$L_c = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = c\},$$

el cual es una esfera con centro en el origen y radio $\sqrt{c}$ para $c > 0$, es un solo punto en el origen para $c = 0$, y es vacío para $c < 0$. En la figura 2.1.12 se muestran los conjuntos de nivel para $c = 0, 1, 4$ y 9. Se obtiene mayor información acerca de la gráfica al calcular una sección. Por ejemplo, si escribimos $S_{z=0} = \{(x, y, z, t) | z = 0\}$, entonces podemos ver la sección

$$S_{z=0} \cap \text{gráfica } f = \{(x, y, z, t) | t = x^2 + y^2, z = 0\}.$$

Como aquí z se mantiene fija en $z = 0$, podemos visualizar esta sección de la gráfica como una superficie en $\mathbf{R}^3$, en las variables x, y y t (figura 2.1.13). La superficie es un paraboloide de revolución. ▲

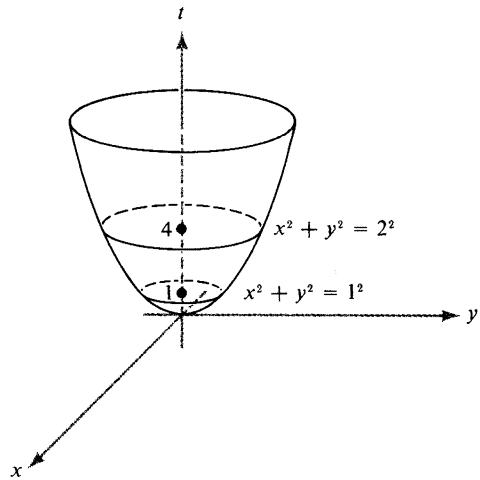


Figura 2.1.13 La sección $z = 0$ de la gráfica de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

EJEMPLO 6 *Describir la gráfica de la función $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ definida por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, que es el símil tridimensional del ejemplo 4, y también se conoce como* ***silla de montar****.*

SOLUCIÓN Las superficies de nivel están definidas por

$$L_c = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 - z^2 = c\}.$$

Para $c = 0$, se trata del cono $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$ con centro en el eje z. Para c negativa, digamos $c = -a^2$, obtenemos $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}$, que es un hiperboloide de dos hojas alrededor del eje z, que atraviesa el eje z en los puntos $(0, 0, \pm a)$. Para c positivo, digamos $c = b^2$, la superficie de nivel es el *hiperboloide de revolución de una hoja* alrededor del eje z definido por $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2 - b^2}$, el cual interseca el plano xy en el círculo de radio $|b|$. Estas superficies de nivel se esbozan en la figura 2.1.14. Se puede obtener otra vista de la gráfica a partir de una sección. Por ejemplo, el subespacio $S_{y=0} = \{(x, y, z, t) | y = 0\}$ interseca la gráfica en la sección

$$S_{y=0} \cap \text{gráfica } f = \{(x, y, z, t) | y = 0, t = x^2 - z^2\},$$

esto es, el conjunto de puntos de la forma $(x, 0, z, x^2 - z^2)$, que puede considerarse, como en el ejemplo anterior, una superficie en el espacio xzt (ver la figura 2.1.15). ▲

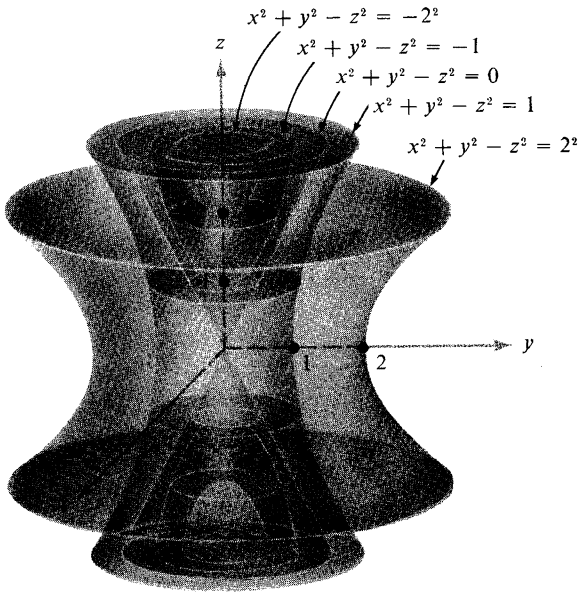


Figura 2.1.14 Algunas superficies de nivel de la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$.

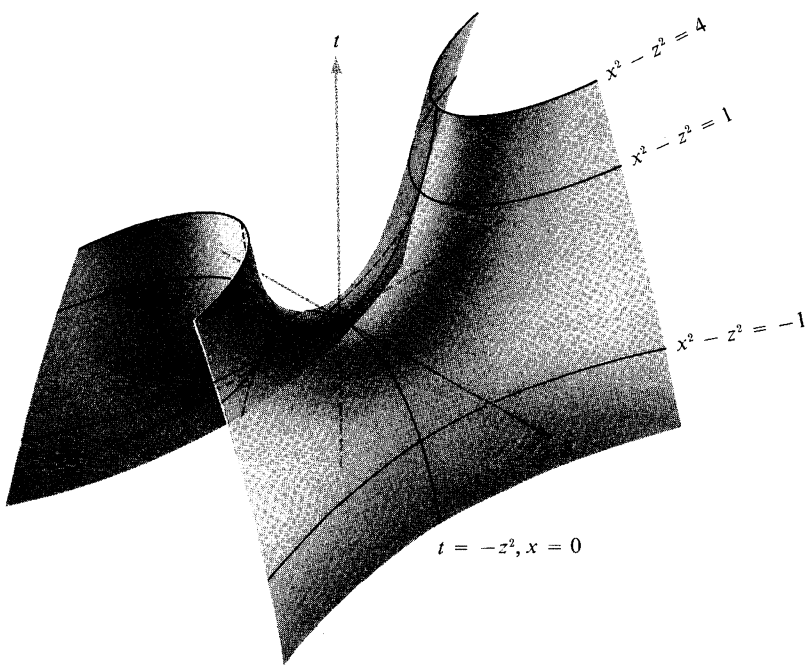
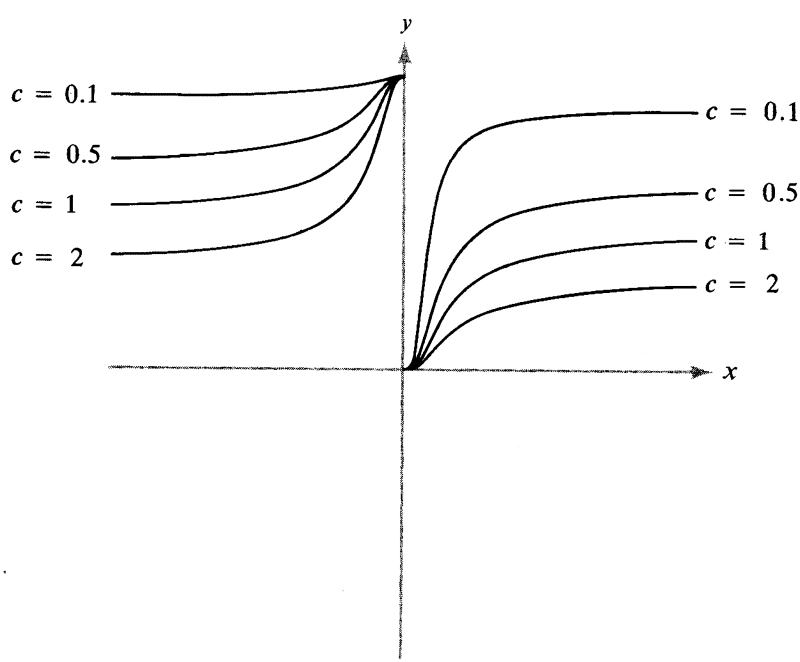


Figura 2.1.15 La sección $y = 0$ de la gráfica de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$.

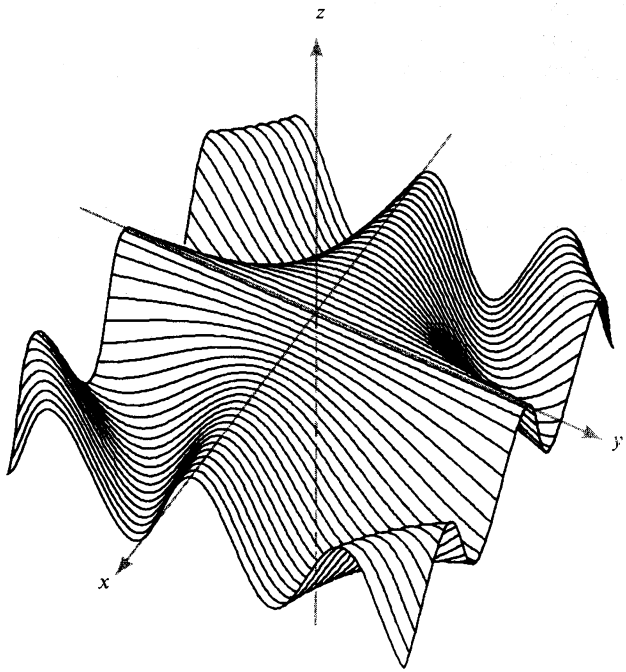
Hemos visto cómo se pueden usar los métodos de secciones y conjuntos de nivel para entender el comportamiento de una función y su gráfica; estas técnicas pueden ser de bastante utilidad para personas que deseen visualizar ampliamente datos complicados.

Existen muchos programas de computadora que pueden trazar una función dada. Para funciones de una variable, se trata sólo de calcular ciertos valores de la función y localizar los puntos. Para funciones de dos variables se usa el método de las secciones. Por ejemplo, para trazar $f(x, y)$, la computadora selecciona secciones paralelas a los ejes, asignando valores, digamos a y y trazando la gráfica correspondiente, después cambiando y y repitiendo el proceso. Así se puede barrer una buena parte de la gráfica. Se dan algunos ejemplos en las figuras 2.1.16 y 2.1.17.

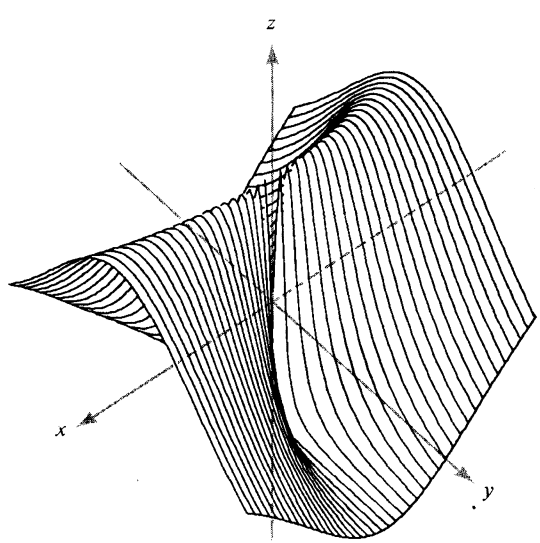


(a) $y = 1/(1 + ce^{1/x})$ *para* $c = 0.1,\ 0.5,\ 1,\ y\ 2.$

Figura 2.1.16 Algunas gráficas generadas por computadora.

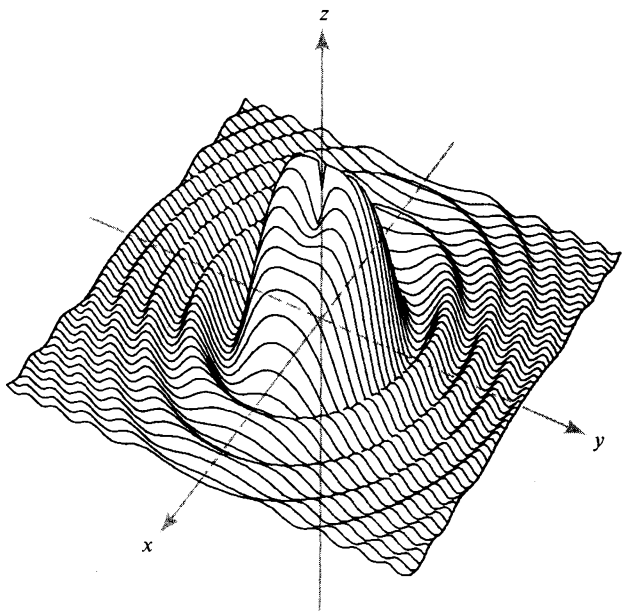


(b) $z = \cos(xy)$, $-3 \leq x \leq 3$, $-3 \leq y \leq 3$.

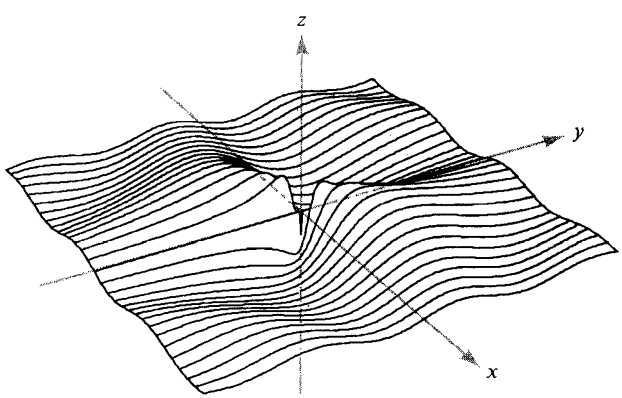


(c) $z = \dfrac{(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)}, 0 < |x| \leq 1, 0 < |y| \leq 1.$

Figura 2.1.16 Algunas gráficas generadas por computadora. (*Continúa*)



(d) $z = \dfrac{[\operatorname{sen}(2x^2 + 3y^2)]}{[x^2 + y^2]}, 0 < |x| \leq 3, 0 < |y| \leq 3.$



(e) $z = \dfrac{(\operatorname{sen} xy)}{(x^2 + y^2)}, 0 < |x| \leq 3, 0 < |y| \leq 3.$

Figura 2.1.16 (*Continúa*)

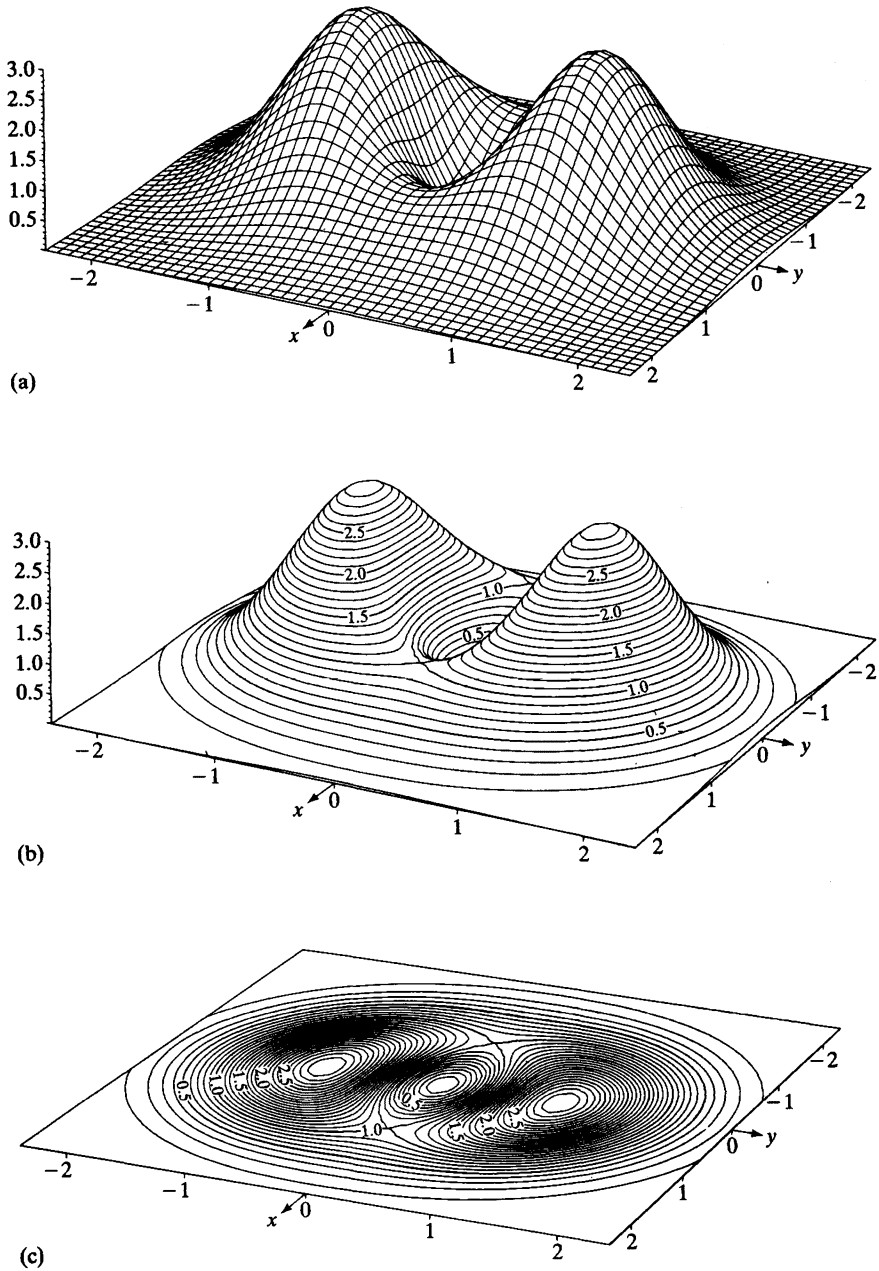
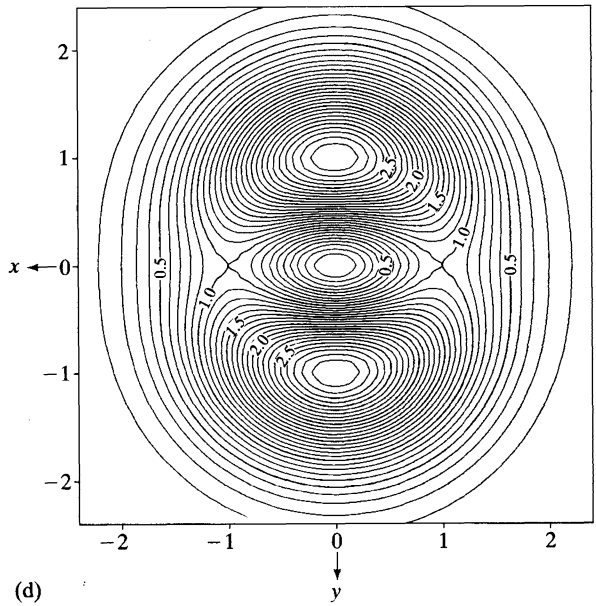


Figura 2.1.17 Gráfica generada por computadora, de $z = (x^2 + 3y^2)\exp(1 - x^2 - y^2)$, representada de cuatro maneras: (a) por secciones, (b) por curvas de nivel sobre la gráfica, (c) por curvas de nivel en el plano xy visto en perspectiva, y (d) por curvas de nivel en el plano xy visto desde arriba.



(d)

Figura 2.1.17 (*Continúa*)

EJERCICIOS

1. Esbozar curvas de nivel y gráfica de las siguientes funciones:
(a) $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, (x, y) \mapsto x - y + 2$ (b) $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, (x, y) \mapsto x^2 + 4y^2$
(c) $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, (x, y) \mapsto -xy$

2. Describir el comportamiento, conforme varía c, de la curva de nivel $f(x, y) = c$ para cada una de estas funciones:
(a) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ (b) $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ (c) $f(x, y) = x^3 - x$

3. Para las funciones en los ejemplos 2, 3 y 4, calcular la sección de la gráfica definida por el plano

$$S_\theta = \{(x, y, z) | y = x \tan \theta\}$$

para una constante dada θ. Hacer esto expresando z como función de r, donde $x = r \cos \theta$, $y = r \operatorname{sen} \theta$. Determinar cuáles de estas funciones f tienen la propiedad de que la forma de $S_\theta \cap$gráfica de f sea independiente de θ. (La solución sólo al ejemplo 3 está en la Guía de estudio de este libro.)

En los ejercicios 4 al 10, trazar las curvas de nivel (en el plano xy) para las funciones dadas f y valores especificados de c. Esbozar la gráfica de $z = f(x, y)$.

4. $f(x, y) = 4 - 3x + 2y$, $c = 0, 1, 2, 3, -1, -2, -3$

5. $f(x, y) = (100 - x^2 - y^2)^{1/2}$, $c = 0, 2, 4, 6, 8, 10$

6. $f(x,y) = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $c = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

7. $f(x,y) = x^2 + y^2$, $c = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

8. $f(x,y) = 3x - 7y$, $c = 0, 1, 2, 3, -1, -2, -3$

9. $f(x,y) = x^2 + xy$, $c = 0, 1, 2, 3, -1, -2, -3$

10. $f(x,y) = x/y$, $c = 0, 1, 2, 3, -1, -2, -3$

En los ejercicios 11 al 13, esbozar o describir las superficies de nivel y una sección de la gráfica de cada función.

11. $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}, (x,y,z) \mapsto -x^2 - y^2 - z^2$

12. $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}, (x,y,z) \mapsto 4x^2 + y^2 + 9z^2$

13. $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}, (x,y,z) \mapsto x^2 + y^2$

En los ejercicios 14 al 18, describir la gráfica de cada función calculando algunos conjuntos de nivel y secciones.

14. $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}, (x,y,z) \mapsto xy$

15. $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}, (x,y,z) \mapsto xy + yz$

16. $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}, (x,y,z) \mapsto xy + z^2$

17. $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, (x,y) \mapsto |y|$

18. $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, (x,y) \mapsto \text{máx}(|x|, |y|)$

Esbozar o describir las superficies en $\mathbf{R}^3$ de las ecuaciones presentadas en los ejercicios 19 al 31.

19. $4x^2 + y^2 = 16$

20. $x + 2z = 4$

21. $z^2 = y^2 + 4$

22. $x^2 + y^2 - 2x = 0$

23. $\dfrac{x}{4} = \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{9}$

24. $\dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = 1 + \dfrac{x^2}{16}$

25. $z = x^2$

26. $y^2 + z^2 = 4$

27. $z = \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{9}$

28. $y^2 = x^2 + z^2$

29. $4x^2 - 3y^2 + 2z^2 = 0$

30. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{12} + \dfrac{z^2}{9} = 1$

31. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - by + 9z - b = 0$, donde b es una constante

32. Usando coordenadas polares, describir las curvas de nivel de la función

$$f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

33. Sea $f\colon \mathbf{R}^2 \backslash \{\mathbf{0}\} \to \mathbf{R}$ dada en coordenadas polares por $f(r,\theta) = (\cos 2\theta)/r^2$. Esbozar algunas curvas de nivel respecto a los ejes xy. ($\mathbf{R}^2 \backslash \{\mathbf{0}\} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 | \mathbf{x} \neq \mathbf{0}\}$.)

34. En la figura 2.1.17(d), la "curva" de nivel $z = 3$ aparece formada por dos puntos. Probar esto algebraicamente.

2.2 LÍMITES Y CONTINUIDAD

En esta sección se desarrolla la terminología que nos ayudará a estudiar diferenciación de funciones de varias variables en la sección 2.3. Este material está centrado en los conceptos de conjunto abierto, límite y continuidad; los conjuntos abiertos son necesarios para entender límites, y, a su vez, los límites son necesarios para entender continuidad y diferenciabilidad.

Como sucede en cálculo elemental, no es necesario dominar completamente el concepto de límite para poder trabajar con problemas de diferenciación. Por esta razón los profesores pueden tratar el siguiente material con distintos grados de rigor. Los estudiantes deberán consultar a sus maestros acerca de la profundidad requerida.

Comenzamos la formulación del concepto de conjunto abierto mediante la definición de disco abierto. Sea $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ y sea r un número real positivo. El *disco abierto* (o *bola abierta*) de radio r y centro $\mathbf{x}_0$ se define como el conjunto de todos los puntos $\mathbf{x}$ tales que $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r$. Este conjunto se denota por $D_r(\mathbf{x}_0)$, y es el conjunto de puntos $\mathbf{x}$ en $\mathbf{R}^n$ cuya distancia (ver la sección 1.5) a $\mathbf{x}_0$ es menor que r. Nótese que incluimos sólo aquellas $\mathbf{x}$ para las cuales se cumple la desigualdad *estricta*. El disco $D_r(\mathbf{x}_0)$ se ilustra en la figura 2.2.1 para $n = 1$, 2 y 3. En el caso $n = 1$ y $x_0 \in \mathbf{R}$, el disco abierto $D_r(x_0)$ es el intervalo abierto $(x_0 - r, x_0 + r)$, que consta de los números $x \in \mathbf{R}$ que están *estrictamente* entre $x_0 - r$ y $x_0 + r$. En el caso $n = 2$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^2$, $D_r(\mathbf{x}_0)$ es el "interior" del disco de radio r con centro en $\mathbf{x}_0$. En el caso $n = 3$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^3$, $D_r(\mathbf{x}_0)$ es el "interior" de la bola de radio r con centro en $\mathbf{x}_0$.

DEFINICIÓN *Sea $U \subset \mathbf{R}^n$ (esto es, sea U un subconjunto de $\mathbf{R}^n$). Decimos que U es un* ***conjunto abierto*** *cuando para cualquier punto $\mathbf{x}_0$ en U existe algún $r > 0$ tal que $D_r(\mathbf{x}_0)$ está contenido en U; en símbolos, $D_r(\mathbf{x}_0) \subset U$ (ver la figura 2.2.2).*

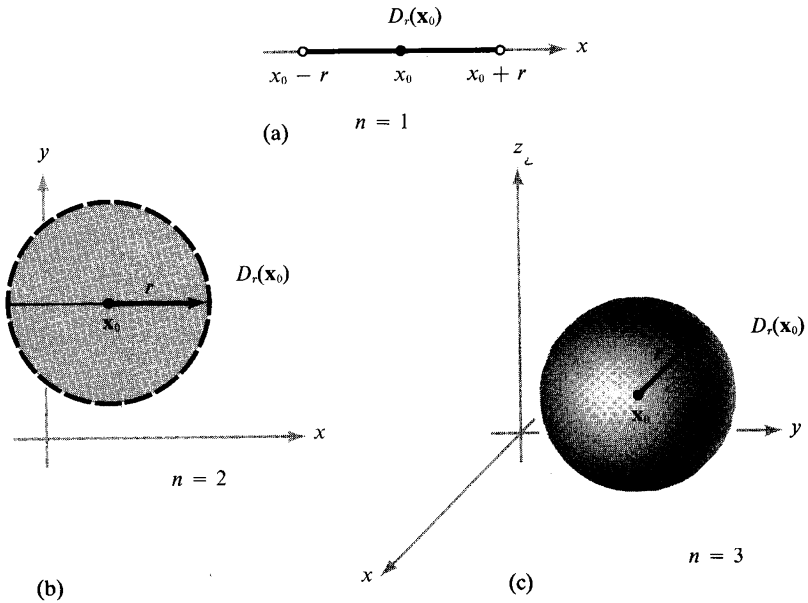


Figura 2.2.1 Apariencia de los discos $D_r(\mathbf{x}_0)$ en (a) 1, (b) 2, y (c) 3 dimensiones.

Nótese que el número $r > 0$ depende del punto $\mathbf{x}_0$, en general r disminuirá conforme $\mathbf{x}_0$ se acerca al "borde" de U. Hablando intuitivamente, un conjunto U es abierto cuando los puntos "frontera" de U no pertenecen a U. En la figura 2.2.2, la línea punteada *no* está incluida en U, y en la figura 2.2.1(c), la frontera de la esfera *no* está incluida.

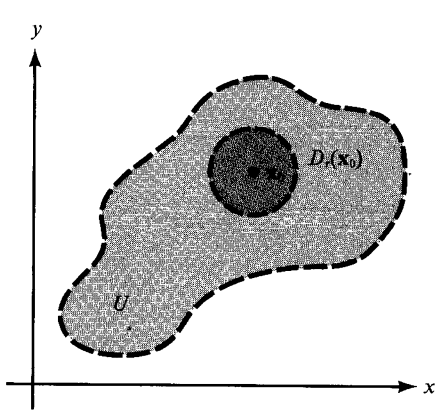


Figura 2.2.2 Un conjunto abierto U es aquel que incluye completamente algún disco $D_r(\mathbf{x}_0)$ alrededor de cada uno de sus puntos $\mathbf{x}_0$.

Además establecemos la convención de que el conjunto vacío $\emptyset$ (el conjunto que no tiene elementos) es abierto.

Hemos definido un disco abierto y un conjunto abierto. Según hemos escogido los términos, parece que un disco abierto también deberá ser un conjunto abierto. Un momento de reflexión nos hará ver que este hecho requiere una breve demostración.

TEOREMA 1 *Para cada* $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ *y* $r > 0$, $D_r(\mathbf{x}_0)$ *es un conjunto abierto.*

DEMOSTRACIÓN Sea $\mathbf{x} \in D_r(\mathbf{x}_0)$, esto es, sea $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r$. De acuerdo con la definición de conjunto abierto, debemos hallar un $s > 0$ tal que $D_s(\mathbf{x}) \subset D_r(\mathbf{x}_0)$. Si nos referimos a la figura 2.2.3, vemos que $s = r - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$ es una selección razonable; nótese que $s > 0$, pero que s se hace más chico si $\mathbf{x}$ está cerca del borde de $D_r(\mathbf{x}_0)$.

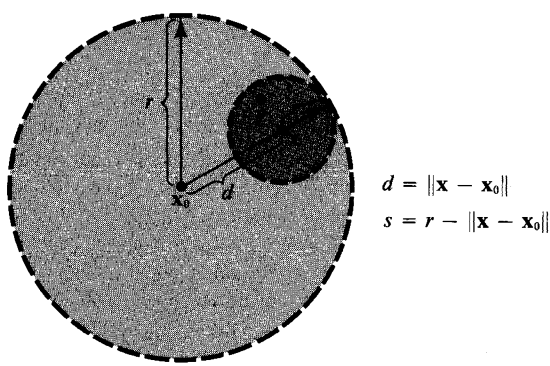


Figura 2.2.3 Geometría de la demostración de que un disco abierto es un conjunto abierto.

Para probar que $D_s(\mathbf{x}) \subset D_r(\mathbf{x}_0)$, sea $\mathbf{y} \in D_s(\mathbf{x})$; esto es, sea $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < s$. Queremos probar que también $\mathbf{y} \in D_r(\mathbf{x}_0)$. Probar esto en vista de la definición de un r-disco, equivale a demostrar que $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| < r$. Esto se hace mediante la desigualdad del triángulo para vectores en $\mathbf{R}^n$ (ver el corolario al teorema 3, sección 1.5):

$$\begin{aligned}\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| &= \|(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\| \\ &\leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < s + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = r.\end{aligned}$$

De aquí que $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| < r$. ■

El ejemplo siguiente ilustra algunas técnicas útiles para verificar que un conjunto es abierto.

EJEMPLO 1 *Probar que* $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x > 0\}$ *es un conjunto abierto.*

SOLUCIÓN Se muestra el conjunto en la figura 2.2.4. Intuitivamente, el conjunto es abierto pues ninguno de los puntos "frontera" $x = 0$, está contenido en el

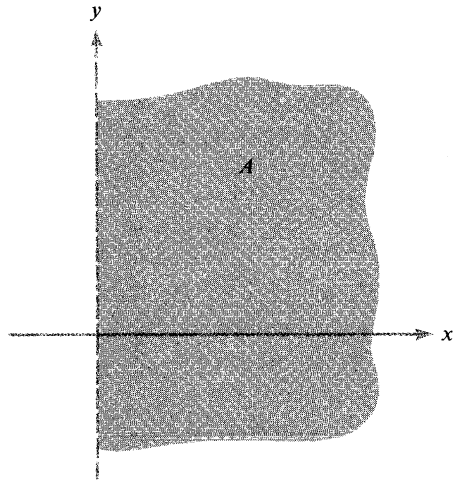


Figura 2.2.4 Problema: mostrar que A es un conjunto abierto.

conjunto. Este argumento será suficiente cuando nos hayamos acostumbrado a las ideas. Sin embargo, al principio debemos dar todos los detalles. Para probar que A es abierto, mostramos que para todo punto $(x, y) \in A$ existe un $r > 0$ tal que $D_r(x, y) \subset A$. Si $(x, y) \in A$, entonces $x > 0$. Escoger $r = x$. Si $(x_1, y_1) \in D_r(x, y)$, tenemos

$$|x_1 - x| = \sqrt{(x_1 - x)^2} \leq \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2} < r = x,$$

y así, $x_1 - x < x$ y $x - x_1 < x$. La desigualdad anterior implica que $x_1 > 0$, esto es, $(x_1, y_1) \in A$. Entonces $D_r(x, y) \subset A$, y por lo tanto A es abierto (ver la figura 2.2.5). ▲

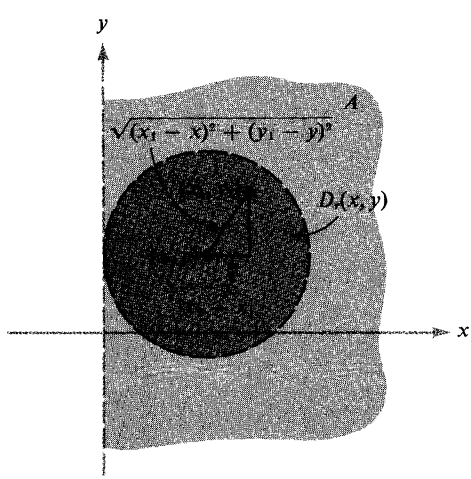


Figura 2.2.5 Construcción de un disco alrededor de un punto en A, que está completamente contenido en A.

Es útil tener un nombre especial para un conjunto abierto que contenga un punto dado $\mathbf{x}$, ya que esta idea se presenta frecuentemente al estudiar límites y continuidad. Así, designaremos como una *vecindad* de $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ a un conjunto abierto U que contiene al punto $\mathbf{x}$. Por ejemplo, $D_r(\mathbf{x}_0)$ es una vecindad de $\mathbf{x}_0$ para cualquier $r > 0$. El conjunto A en el ejemplo 1 es una vecindad del punto $\mathbf{x}_0 = (3, -10)$.

Introduzcamos formalmente el concepto de punto frontera aludido en el ejemplo 1.

DEFINICIÓN *Sea $A \subset \mathbf{R}^n$. Un punto $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ es* ***punto frontera*** *de A si toda vecindad de $\mathbf{x}$ contiene al menos un punto en A y al menos un punto fuera de A.*

En esta definición, $\mathbf{x}$ puede estar o no en A; si $\mathbf{x} \in A$, entonces $\mathbf{x}$ es un punto frontera si toda vecindad de $\mathbf{x}$ contiene al menos un punto que *no* esté en A (ya contiene un punto en A, a saber, $\mathbf{x}$). De manera análoga, si $\mathbf{x}$ no está en A, es un punto frontera si toda vecindad de $\mathbf{x}$ contiene al menos un punto de A.

Estaremos particularmente interesados en puntos frontera de conjuntos abiertos. Por la definición de conjunto abierto, ningún punto de un conjunto abierto A puede ser un punto frontera de A. Así, *un punto $\mathbf{x}$ es un punto frontera de un conjunto abierto A si y sólo si $\mathbf{x}$ no está en A y toda vecindad de $\mathbf{x}$ tiene intersección no vacía con A.*

Esto expresa en términos precisos la idea intuitiva de que un punto frontera de A es un punto justo en el "borde" de A. En la mayoría de los ejemplos resulta muy claro cuáles son los puntos frontera.

EJEMPLO 2 (a) Sea $A = (a, b)$ en $\mathbf{R}$. Entonces los puntos frontera de A son los puntos a y b. Un examen de la figura 2.2.6 y de la definición, lo aclaran. (Se pedirá al lector probar esto en el ejercicio 2(c).)

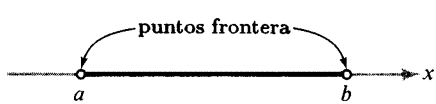


Figura 2.2.6 Los puntos frontera del intervalo (a, b).

(b) Sea $A = D_r(x_0, y_0)$ un r-disco alrededor de (x_0, y_0) en el plano. La frontera está formada por los puntos (x, y) con $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ (figura 2.2.7).

(c) Sea $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x > 0\}$. Entonces la frontera de A está formada por todos los puntos sobre el eje y (ver la figura 2.2.8).

(d) Sea A el conjunto $D_r(\mathbf{x}_0)$ menos el punto x_0 (un disco "agujereado" alrededor de $\mathbf{x}_0$). Entonces $\mathbf{x}_0$ es un punto frontera de A. ▲

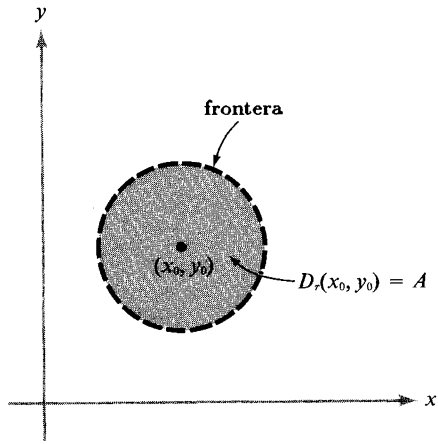


Figura 2.2.7 La frontera de A está formada por los puntos en el borde de A.

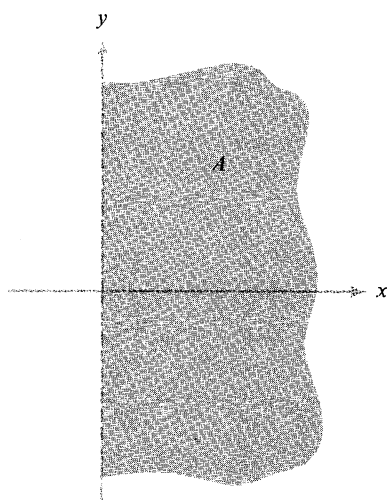


Figura 2.2.8 La frontera de A está formada por todos los puntos del eje y.

Ahora nos ocuparemos del concepto de límite. Durante toda la exposición siguiente, el dominio de definición de la función f será un conjunto abierto A. Estamos interesados en hallar el límite de f cuando $\mathbf{x} \in A$ tienda a un punto de A o a un punto frontera de A.

El lector deberá comprender el hecho de que el concepto de límite es una herramienta básica y útil para el análisis de funciones; nos permite estudiar derivadas y por lo tanto, máximos y mínimos, asíntotas, integrales impropias y otras características importantes de las funciones; también es útil para series infinitas y

sucesiones. Presentaremos una teoría de límites de funciones de varias variables que abarque, como caso particular, a la teoría de funciones de una variable.

El estudiante probablemente ya aprendió, del cálculo de una variable, una definición de $\underset{x \to x_0}{\text{límite}}\, f(x) = l$ para una función $f: A \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de un subconjunto A de números reales a los números reales. Intuitivamente, esto significa que conforme x se acerca más y más a x_0, los valores $f(x)$ se acercan más y más a l. Para colocar esta idea intuitiva sobre una base firme, precisa y manejable desde el punto de vista matemático, por lo general se introduce el "método de épsilon (ε) y delta (δ)" o el "método de las vecindades". Lo mismo sucede con las funciones de varias variables. A continuación desarrollaremos el enfoque de las vecindades para el concepto de límite. El enfoque épsilon-delta se deja como material de estudio opcional al final de esta sección.

DEFINICIÓN DE LÍMITE *Sea $f: A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, donde A es un conjunto abierto. Sea $\mathbf{x}_0$ un punto en A o en la frontera de A, y sea V una vecindad de $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$. Decimos que f está* ***finalmente* en*** *V* ***conforme*** *$\mathbf{x}$* ***tiende a*** *$\mathbf{x}_0$ si existe una vecindad U de $\mathbf{x}_0$ tal que $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x} \in U$ y $\mathbf{x} \in A$ implica $f(\mathbf{x}) \in V$. (En la figura 2.2.9 se ilustra el significado geométrico de esta afirmación; nótese que $\mathbf{x}_0$ no necesariamente debe estar en el conjunto A, de modo que no necesariamente está definida $f(\mathbf{x}_0)$.) Decimos que $f(\mathbf{x})$* ***tiende a*** *$\mathbf{b}$ cuando $\mathbf{x}$ tiende a $\mathbf{x}_0$, o, en símbolos,*

$$\underset{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0}{\text{límite}}\, f(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \qquad o \qquad f(\mathbf{x}) \to \mathbf{b} \qquad cuando \qquad \mathbf{x} \to \mathbf{x}_0,$$

cuando, dada ***cualquier*** *vecindad V de $\mathbf{b}$, f está finalmente en V conforme $\mathbf{x}$ tiende a $\mathbf{x}_0$ (esto es, "$f(\mathbf{x})$ está cerca de $\mathbf{b}$ si $\mathbf{x}$ está cerca de $\mathbf{x}_0$"). Puede ser que cuando $\mathbf{x}$ tienda a $\mathbf{x}_0$ los valores de $f(\mathbf{x})$ no se acerquen a un número particular. En este caso decimos que* $\underset{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0}{\text{límite}}\, f(\mathbf{x})$ ***no existe.***

De ahora en adelante, cuando consideremos el concepto de $\underset{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0}{\text{límite}}\, f(\mathbf{x})$, supondremos que $\mathbf{x}_0$ pertenece a cierto conjunto abierto donde está definida f, o bien está en la frontera de dicho conjunto.

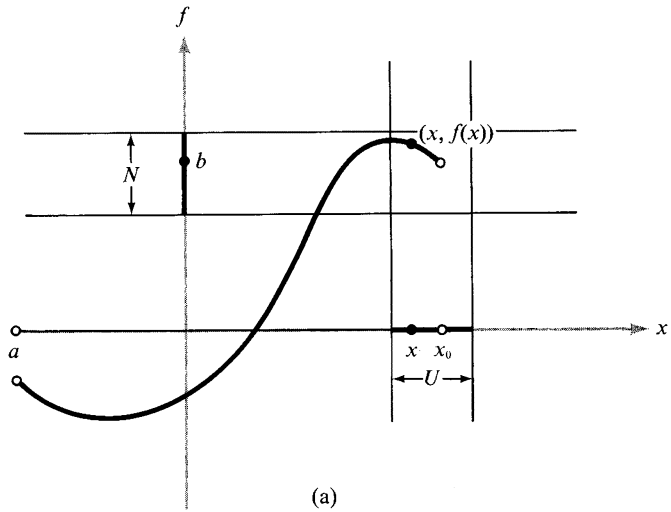
Una de las razones por las que insistimos en la definición de límite, en que $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$, será clara si recordamos, del cálculo de una variable, que nuestra intención es definir la derivada $f'(x_0)$ de una función f en un punto x_0 mediante

$$f'(x_0) = \underset{x \to x_0}{\text{límite}}\, \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

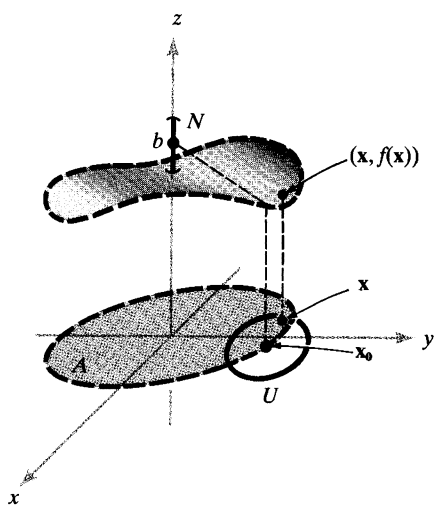
y esta expresión no está definida en $x = x_0$.

---

*Usamos "***finalmente***" como traducción de "***eventually***". El significado en castellano de la traducción literal "eventualmente" es: *incierta o casualmente* (cf. *Diccionario de la Lengua Española*. Madrid: Real Academia Española, 1984); mientras que el significado en inglés de "eventually" (y, por supuesto, con el sentido que se usa en la definición) es: *como resultado final* (cf. *The International Webster Dictionary of the English Language*. Nueva York: Tabor House, 1973). [N. del T.]



(a)



(b)

Figura 2.2.9 Límites en términos de vecindades; si $\mathbf{x}$ está en U, entonces $f(\mathbf{x})$ estará en V. (Los pequeños círculos huecos denotan el hecho de que $(a, f(a))$ y $(x_0, f(x_0))$ no están en la gráfica.)
(a) $f: A = (a, x_0) \to \mathbf{R}$. (b) $f: A = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\} \to \mathbf{R}$. (La línea punteada no está en la gráfica de f.)

EJEMPLO 3 (a) Este ejemplo ilustra un límite que no existe. Considerar la función $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ -1 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

No existe el $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ pues hay puntos x_1 arbitrariamente cerca de 0 con $f(x_1) = 1$, y también hay puntos x_2 arbitrariamente cerca de 0 con $f(x_2) = -1$; esto es, no hay un solo número cerca del cual esté f cuando x esté cerca de 0 (ver la figura 2.2.10). Si se restringe f al dominio $(0, 1)$ o $(-1, 0)$, entonces el límite existe. ¿Pueden ver por qué?

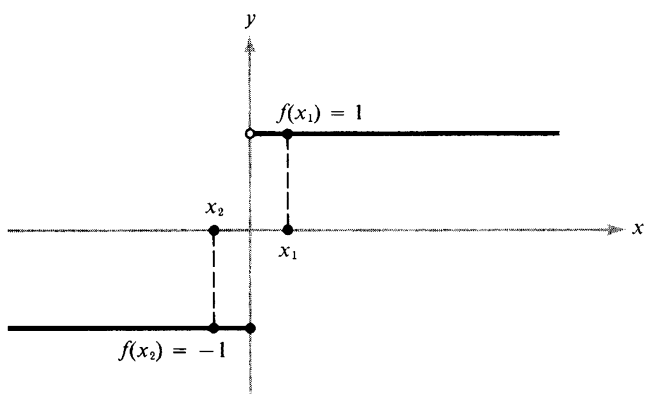


Figura 2.2.10 No existe el límite de esta función cuando $x \to 0$.

(b) Con este ejemplo se ilustra una función cuyo límite existe, pero cuyo valor límite no es igual a su valor en el punto donde se toma el límite. Definir $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ mediante

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Es cierto que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$, pues para cualquier vecindad U de 0, $x \in U$ y $x \neq 0$ implica que $f(x) = 0$. Si no hubiésemos insistido en que $x \neq x_0$, entonces

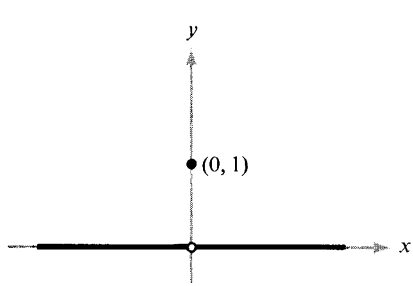


Figura 2.2.11 El límite de esta función cuando $x \to 0$ es cero.

el límite (suponiendo que usamos la definición anterior de límite sin la condición $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$) no existiría. Así, estamos realmente interesados en el valor al que se acerca f cuando $x \to 0$ (o, en general, cuando $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$). En la gráfica de la figura 2.2.11 vemos que f tiende a 0 cuando $x \to 0$; no nos importa si f toma otro valor en 0, o no está definida ahí. ▲

EJEMPLO 4 *Usar la definición para verificar que se cumple el "límite obvio"* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, *donde* $\mathbf{x}$ *y* $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$.

SOLUCIÓN Sea f la función definida por $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, y sea V cualquier vecindad de $\mathbf{x}_0$. Debemos mostrar que $f(\mathbf{x})$ está finalmente en V cuando $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$. Así, por la definición, debemos hallar una vecindad U de $\mathbf{x}_0$ con la propiedad de que si $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ y $\mathbf{x} \in U$, entonces $f(\mathbf{x}) \in V$. Escoger $U = V$. Si $\mathbf{x} \in U$, entonces $\mathbf{x} \in V$; como $\mathbf{x} = f(\mathbf{x})$, se sigue que $f(\mathbf{x}) \in V$. Así, hemos mostrado que $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{x} = \mathbf{x}_0$. De manera análoga tenemos

$$\lim_{(\mathbf{x},\mathbf{y})\to(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)} \mathbf{x} = \mathbf{x}_0, \qquad \text{etc.} \qquad ▲$$

A partir de ahora el estudiante puede dar por válidos, sin demostración, los límites que aprendió en cálculo de una variable. Por ejemplo, se puede usar $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x} = \sqrt{1} = 1$ y $\lim\limits_{\theta\to 0} \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen} 0 = 0$.

EJEMPLO 5 (En este ejemplo se muestra otro caso, en el cual no es posible simplemente "omitir" el límite.) *Hallar* $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ *donde*

$$g: x \mapsto \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}.$$

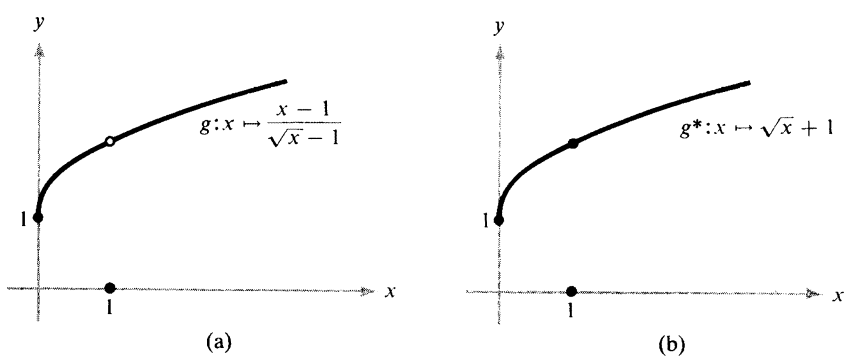


Figura 2.2.12 Estas gráficas son iguales, excepto que en la parte (a) g no está definida en $x = 1$, mientras que en la parte (b) g^* está definida para todo $x \geq 0$.

SOLUCIÓN La gráfica de esta función está en la figura 2.2.12. Vemos que $g(1)$ no está definido, pues la división entre cero no está definida. Sin embargo, si multiplicamos el numerador y el denominador de $g(x)$ por $\sqrt{x}+1$, hallamos que para todo x en el dominio de g, tenemos

$$g(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x}+1, \qquad x \neq 1.$$

La expresión $g^*(x) = \sqrt{x}+1$ está definida y toma el valor 2 en $x = 1$; por el cálculo en una variable, $g^*(x) \to 2$ cuando $x \to 1$. Pero como $g^*(x) = g(x)$ para todo $x \geq 0$, $x \neq 1$, debemos tener también que $g(x) \to 2$ cuando $x \to 1$. ▲

Para hablar con propiedad acerca de *el* límite, debemos mostrar que f puede tener *a lo más un* límite cuando $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$. Esto resulta intuitivamente claro y ahora lo enunciamos formalmente. (Ver la sección 2.7 para la demostración.)

TEOREMA 2: UNICIDAD DE LOS LÍMITES
Si $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_1$ *y* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_2$, *entonces* $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2$.

Para realizar cálculos prácticos con límites necesitamos algunas reglas, por ejemplo, que el límite de una suma es la suma de los límites. Estas reglas se resumen en el siguiente teorema (ver la sección 2.7 para la demostración).

TEOREMA 3 *Sean* $f\colon A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, $g\colon A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, $\mathbf{x}_0$ *un elemento de* A *o un punto frontera de* A, $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$ *y* $c \in \mathbf{R}$; *entonces*

(i) *Si* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$, *entonces* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} cf(\mathbf{x}) = c\mathbf{b}$, *donde* $cf\colon A \to \mathbf{R}^m$ *está definida por* $\mathbf{x} \mapsto c(f(\mathbf{x}))$.

(ii) *Si* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_1$ *y* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_2$, *entonces* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} (f+g)(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2$, *donde* $(f+g)\colon A \to \mathbf{R}^m$ *está definida por* $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$.

(iii) *Si* $m = 1$, $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = b_1$ *y* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = b_2$, *entonces* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} (fg)(\mathbf{x}) = b_1b_2$, *donde* $(fg)\colon A \to \mathbf{R}$ *está definida por* $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$.

(iv) *Si* $m = 1$, $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = b \neq 0$ *y* $f(\mathbf{x}) \neq 0$ *para todo* $\mathbf{x} \in A$, *entonces* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} 1/f(\mathbf{x}) = 1/b$, *donde* $1/f\colon A \to \mathbf{R}$ *está definida por* $\mathbf{x} \mapsto 1/f(\mathbf{x})$.

(v) *Si* $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x}))$ *donde* $f_i\colon A \to \mathbf{R}$, $i = 1, \ldots, m$, *son las funciones componentes de* f, *entonces* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_m)$ *si y sólo si* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_i(\mathbf{x}) = b_i$ *para cada* $i = 1, \ldots, m$.

Estos resultados son intuitivamente claros. Por ejemplo, la regla (ii) no dice más que si $f(\mathbf{x})$ está cerca de $\mathbf{b}_1$ y $g(\mathbf{x})$ está cerca de $\mathbf{b}_2$ cuando $\mathbf{x}$ está cerca

de $\mathbf{x}_0$, entonces $f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$ está cerca de $\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$ cuando $\mathbf{x}$ está cerca de $\mathbf{x}_0$. El siguiente ejemplo ilustrará la situación.

EJEMPLO 6 *Sea* $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 + 2$. *Calcular* $\underset{(x,y)\to(0,1)}{\text{límite}} f(x, y)$.

SOLUCIÓN Aquí f es la suma de las tres funciones $(x, y) \mapsto x^2$, $(x, y) \mapsto y^2$, y $(x, y) \mapsto 2$. El límite de una suma es la suma de los límites, y el límite de un producto es el producto de los límites (teorema 3). Por lo tanto, usando el hecho de que $\underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{\text{límite}} x = x_0$ (ejemplo 4), obtenemos

$$\underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{\text{límite}} x^2 = \left(\underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{\text{límite}} x\right)\left(\underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{\text{límite}} x\right) = x_0^2$$

y, usando el mismo razonamiento, $\underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{\text{límite}} y^2 = y_0^2$. En consecuencia,

$$\underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{\text{límite}} f(x, y) = 0^2 + 1^2 + 2 = 3. \qquad \blacktriangle$$

En el curso de cálculo de una variable aprendimos que el concepto de función continua está basado en la idea intuitiva de una función cuya gráfica es una curva sin romper, esto es, una curva sin *saltos*, o el tipo de curva que trazaría una partícula en movimiento o al mover la punta de un lápiz sin separarla del papel.

Para efectuar un análisis detallado de las funciones, necesitamos conceptos más precisos que estas vagas ideas. Aclaremos mediante un ejemplo. Consideremos la función $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por $f(x) = -1$ si $x \leq 0$ y $f(x) = 1$ si $x > 0$. La gráfica de f se muestra en la figura 2.2.13. (El pequeño círculo hueco significa que el punto $(0, 1)$ *no* está en la gráfica de f.) Claramente, la gráfica de f está rota en $x = 0$. Considerar ahora la función $g\colon x \mapsto x^2$. Se muestra esta función

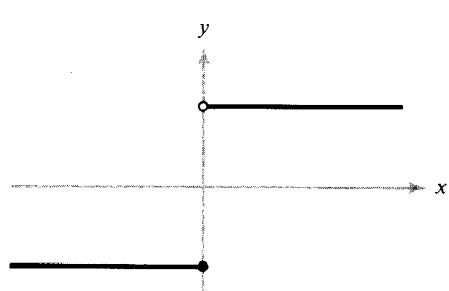


Figura 2.2.13 Esta función no es continua, pues su valor brinca súbitamente cuando x pasa por 0.

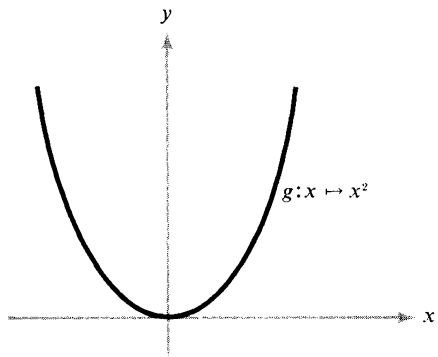


Figura 2.2.14 Esta función es continua.

en la figura 2.2.14. La gráfica de g no está rota en ningún punto. Si se examinan ejemplos de funciones como f, cuyas gráficas estén rotas en algún punto x_0, y funciones como g, cuyas gráficas no estén rotas, se ve que la diferencia principal entre ellas es que para una función como g, los valores de $g(x)$ se acercan más y más a $g(x_0)$ conforme x se acerca más y más a x_0. La misma idea sirve para funciones de varias variables. Pero la idea de más y más cerca no basta como definición matemática; así, formularemos estos conceptos de manera precisa en términos de límites.

DEFINICIÓN *Sea $f: A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ una función dada con dominio A. Sea $\mathbf{x}_0 \in A$. Decimos que f es* ***continua en*** $\mathbf{x}_0$ *si y sólo si*

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0).$$

Si decimos simplemente que f es ***continua****, queremos decir que f es continua en cada punto $\mathbf{x}_0$ de A.*

Como la condición $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$ significa que $f(\mathbf{x})$ está cerca de $f(\mathbf{x}_0)$ cuando $\mathbf{x}$ está cerca de $\mathbf{x}_0$, vemos que nuestra definición corresponde, en efecto, al requerimiento de que la gráfica de f no esté rota (ver la figura 2.2.15, donde se ilustra el caso $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$). El caso de varias variables es más fácil de visualizar si trabajamos con funciones con valores reales, digamos $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. En este caso podemos visualizar f trazando su gráfica, formada por todos los puntos (x, y, z) en $\mathbf{R}^3$ con $z = f(x, y)$. La continuidad de f significa entonces que su gráfica no tiene "brincos" (ver la figura 2.2.16).

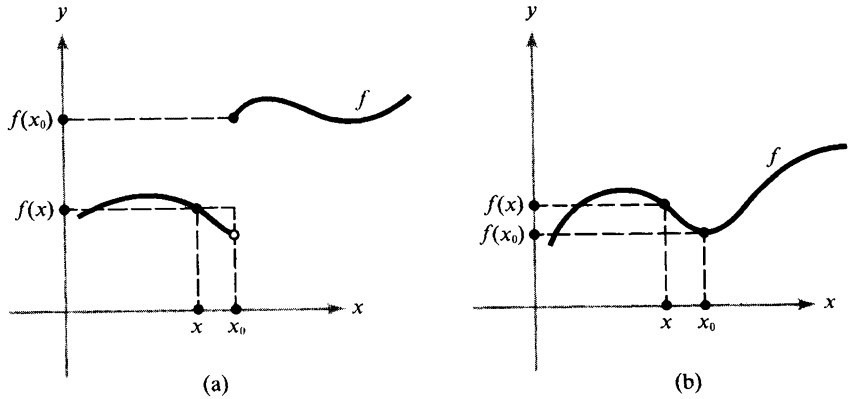


Figura 2.2.15 (a) Función discontinua para la cual no existe límite$_{x \to x_0}$ $f(x)$; (b) función continua para la cual existe el límite y es igual a $f(x_0)$.

EJEMPLO 7 Cualquier polinomio $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ es continuo de $\mathbf{R}$ a $\mathbf{R}$. En efecto, por el teorema 3 y el ejemplo 4,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) &= \lim_{x \to x_0} a_0 + \lim_{x \to x_0} a_1 x + \cdots + \lim_{x \to x_0} a_n x^n \\ &= a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n, \end{aligned}$$

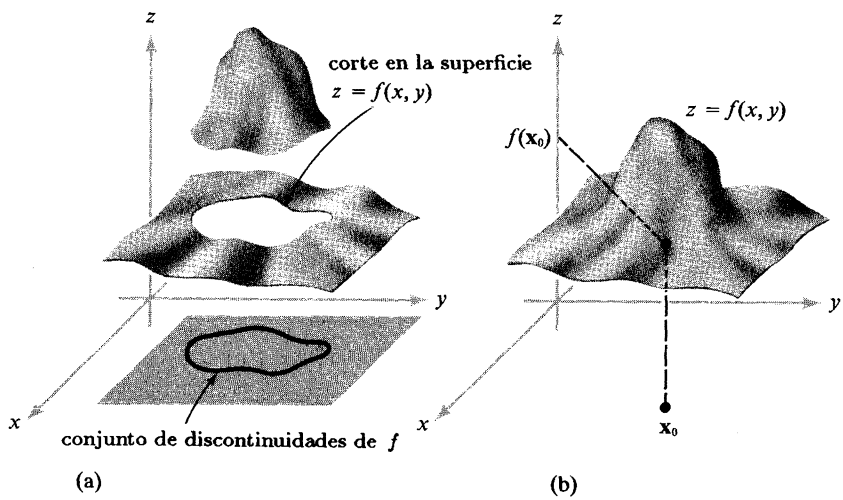


Figura 2.2.16 (a) Función discontinua de dos variables. (b) Función continua.

pues

$$\lim_{x \to x_0} x^n = \left(\lim_{x \to x_0} x\right) \cdots \left(\lim_{x \to x_0} x\right) = x_0^n. \quad \blacktriangle$$

EJEMPLO 8 Sea $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x, y) = xy$. Entonces f es continua, pues, por los teoremas de límites y el ejemplo 4,

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} xy = \left(\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} x\right)\left(\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} y\right) = x_0 y_0. \quad \blacktriangle$$

Se puede ver, por el mismo método, que cualquier polinomio $p(x, y)$ en x y y es continuo.

EJEMPLO 9 La función $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \leq 0 \quad \text{o} \quad y \leq 0 \\ 0 & \text{de no ser así} \end{cases}$$

no es continua en $(0, 0)$ o en cualquier punto sobre el eje x positivo o el eje y positivo. En efecto, si $(x_0, y_0) = \mathbf{u}$ es uno de dichos puntos y $\delta > 0$, hay puntos $(x, y) \in D_\delta(\mathbf{u})$, vecindad de $\mathbf{u}$, con $f(x, y) = 1$ y otros puntos $(x, y) \in D_\delta(\mathbf{u})$ con $f(x, y) = 0$. Así, *no* es cierto que $f(x, y) \to f(x_0, y_0) = 1$ cuando $(x, y) \to (x_0, y_0)$. $\blacktriangle$

Para probar que ciertas funciones específicas son continuas, podemos apoyarnos en los teoremas de límites (ver el teorema 3 y el ejemplo 7). Si transcribimos esos resultados en términos de continuidad, llegaremos a lo siguiente:

TEOREMA 4 *Sean $f: A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, $g: A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, y c un número real.*

(i) *Si f es continua en $\mathbf{x}_0$ también lo es cf, donde $(cf)(\mathbf{x}) = c[f(\mathbf{x})]$.*

(ii) *Si f y g son continuas en $\mathbf{x}_0$, también lo es $f + g$, donde $(f + g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$.*

(iii) *Si f y g son continuas en $\mathbf{x}_0$ y $m = 1$, entonces la función producto fg definida por $(fg)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$ es continua en $\mathbf{x}_0$.*

(iv) *Si $f: A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ es continua en $\mathbf{x}_0$ y no se anula en A, entonces el cociente $1/f$ es continuo en $\mathbf{x}_0$, donde $(1/f)(\mathbf{x}) = 1/f(\mathbf{x})$.**

(v) Si $f: A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ y $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x}))$, entonces f es continua en $\mathbf{x}_0$ si y sólo si cada una de las funciones con valores reales $f_1, \ldots, f_m$ es continua en $\mathbf{x}_0$.

---

*Otra manera de enunciar la regla (iv) es: Si $f(\mathbf{x}_0) \neq 0$ y f es continua, entonces $f(\mathbf{x}) \neq 0$ en una vecindad de $\mathbf{x}_0$ de modo que $1/f$ está definida en esa vecindad, y $1/f$ es continua en $\mathbf{x}_0$.

EJEMPLO 10 *Sea* $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $(x,y) \mapsto (x^2y, (y+x^3)/(1+x^2))$. *Mostrar que* f *es continua.*

SOLUCIÓN Para verlo es suficiente, por la propiedad (v) anterior, mostrar que cada componente es continua. Entonces, mostramos primero que $(x,y) \mapsto x^2y$ es continua. Ahora bien, $(x,y) \mapsto x$ es continua (ver el ejemplo 4), y de ahí, por (iii), $(x,y) \mapsto x^2$ es continua. Como $(x,y) \mapsto y$ es continua, por (iii), la corrrespondencia $(x,y) \mapsto x^2y$ es continua. Como $1+x^2$ es continua y diferente de cero, por la propiedad (iv) sabemos que $1/(1+x^2)$ es continua; por lo tanto $(y+x^3)/(1+x^2)$ es un producto de funciones continuas, y por (iii) es continua. ▲

A continuación estudiaremos la *composición*, otra operación básica que puede efectuarse con funciones. Si g manda A a B y f manda B a C, la composición de g con f, o de f en g, denotada por $f \circ g$, manda A a C mediante $\mathbf{x} \mapsto f(g(\mathbf{x}))$ (ver la figura 2.2.17). Por ejemplo, $\operatorname{sen}(x^2)$ es la composición de $x \mapsto x^2$ con $y \mapsto \operatorname{sen} y$.

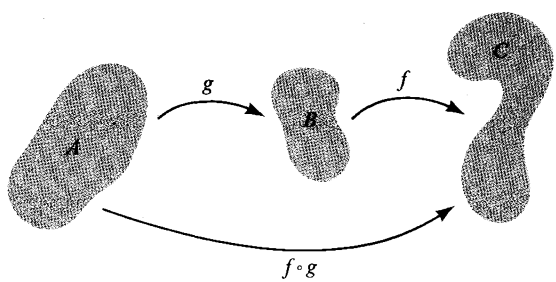


Figura 2.2.17 Composición de f en g.

TEOREMA 5 *Sean* $g\colon A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ *y* $f\colon B \subset \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$. *Suponer que* $g(A) \subset B$, *de manera que* $f \circ g$ *está definida en* A. *Si* g *es continua en* $\mathbf{x}_0 \in A$ *y* f *es continua en* $\mathbf{y}_0 = g(\mathbf{x}_0)$, *entonces* $f \circ g$ *es continua en* $\mathbf{x}_0$.

La idea intuitiva es fácil; la demostración formal que aparece en la sección 2.7 sigue un patrón similar. Intuitivamente, debemos mostrar que conforme $\mathbf{x}$ se acerca a $\mathbf{x}_0$, $f(g(\mathbf{x}))$ se acerca a $f(g(\mathbf{x}_0))$. Pero conforme $\mathbf{x}$ se acerca a $\mathbf{x}_0$, $g(\mathbf{x})$ se acerca a $g(\mathbf{x}_0)$ (por la continuidad de g en $\mathbf{x}_0$); y conforme $g(\mathbf{x})$ se acerca a $g(\mathbf{x}_0)$, $f(g(\mathbf{x}))$ se acerca a $f(g(\mathbf{x}_0))$ (por la continuidad de f en $g(\mathbf{x}_0)$).

EJEMPLO 11 *Sea* $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{30} + \operatorname{sen} z^3$. *Mostrar que* f *es continua.*

SOLUCIÓN Aquí podemos escribir f como suma de las dos funciones $(x^2+y^2+z^2)^{30}$ y $\operatorname{sen} z^3$, de modo que basta mostrar que cada una es continua. La primera

es la composición de $(x, y, z) \mapsto (x^2 + y^2 + z^2)$ con $u \mapsto u^{30}$, y la segunda es la composición de $(x, y, z) \mapsto z^3$ con $u \mapsto \operatorname{sen} u$, y tenemos la continuidad por el teorema 5. ▲

Suplemento de la Sección 2.2: LÍMITES EN TÉRMINOS DE ÉPSILON Y DELTA

Ahora enunciamos un útil teorema que formula el concepto de límite en términos de épsilons y deltas y que con frecuencia se considera la *definición* de límite. Es otra manera de precisar el enunciado intuitivo de que "$f(\mathbf{x})$ se acerca a $\mathbf{b}$ cuando $\mathbf{x}$ se acerca a $\mathbf{x}_0$". El lector comprenderá mejor esta exposición si la considera a la luz de los ejemplos ya presentados.

TEOREMA 6 *Sea $f: A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ y sea $\mathbf{x}_0$ un elemento de A o un punto frontera de A. Entonces* $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ *si y sólo si para todo número $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cualquier $\mathbf{x} \in A$ que satisfaga $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$, tenemos $\|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\| < \varepsilon$ (ver la figura 2.2.18).*

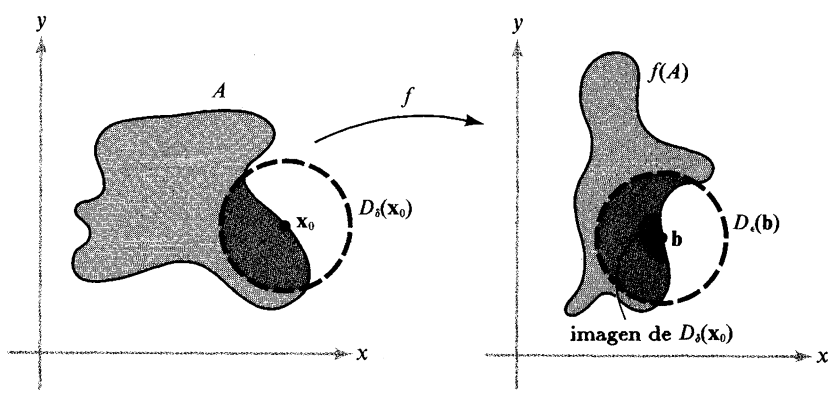


Figura 2.2.18 Geometría de la definición ε-δ de límite.

Este teorema se probará en la sección 2.7

Para ilustrar la metodología de la técnica épsilon-delta en el teorema 6, consideremos los ejemplos siguientes.

EJEMPLO 12 Mostrar que $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} x = 0$.

SOLUCIÓN Nótese que si $\delta > 0$, $\|(x, y) - (0, 0)\| = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ implica que $|x - 0| = |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$. Así, si $\|(x, y) - (0, 0)\| < \delta$, entonces $|x - 0|$ también es menor que δ. Dado $\varepsilon > 0$ se requiere que hallemos $\delta > 0$ (generalmente depende

de ε) con la propiedad de que $0 < \|(x,y) - (0,0)\| < \delta$ implique que $|x - 0| < \varepsilon$. ¿Qué δ vamos a escoger? En los cálculos anteriores vemos que si escogemos $\delta = \varepsilon$, entonces $\|(x,y) - (0,0)\| < \delta$ implica $|x - 0| < \varepsilon$. Esto muestra que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$. También pudimos haber escogido $\delta = \varepsilon/2$ o $\varepsilon/3$, pero basta hallar un δ para satisfacer los requerimientos de la definición de límite. ▲

EJEMPLO 13 *Considerar la función*

$$f(x,y) = \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}.$$

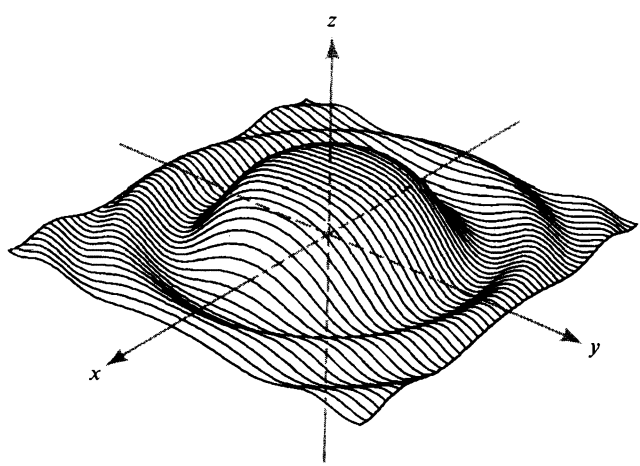
Aunque f no está definida en $(0,0)$, determinar si $f(x,y)$ tiende a algún número cuando (x,y) tiende a $(0,0)$.

SOLUCIÓN Por cálculo elemental sabemos que

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} = 1.$$

Por lo tanto, es razonable pensar que

$$\lim_{\mathbf{v}\to(0,0)} f(\mathbf{v}) = \lim_{\mathbf{v}\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}\|\mathbf{v}\|^2}{\|\mathbf{v}\|^2} = 1.$$



$$z = \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)} \qquad -3 \le x \le 3, -3 \le y \le 3$$

Figura 2.2.19 Gráfica generada por computadora.

En efecto, como $\underset{\alpha\to 0}{\text{límite}}\,(\operatorname{sen}\alpha)/\alpha = 1$, dado $\varepsilon > 0$ hallamos un $\delta > 0$, con $1 > \delta > 0$, tal que $0 < |\alpha| < \delta$ implica que $|(\operatorname{sen}\alpha)/\alpha - 1| < \varepsilon$. Si $0 < \|\mathbf{v}\| < \delta$, entonces $0 < \|\mathbf{v}\|^2 < \delta^2 < \delta$, y por lo tanto

$$|f(\mathbf{v}) - 1| = \left|\frac{\operatorname{sen}\|\mathbf{v}\|^2}{\|\mathbf{v}\|^2} - 1\right| < \varepsilon.$$

Así, $\underset{\mathbf{v}\to(0,0)}{\text{límite}}\, f(\mathbf{v}) = 1$. En efecto, si graficamos en una computadora $[\operatorname{sen}(x^2+y^2)]/(x^2+y^2)$, obtenemos una gráfica bien portada cerca de $(0,0)$ (figura 2.2.19). ▲

EJEMPLO 14 *Mostrar que*

$$\underset{(x,y)\to(0,0)}{\text{límite}}\ \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

SOLUCIÓN Debemos mostrar que $x^2/\sqrt{x^2+y^2}$ es pequeño cuando (x,y) está cerca del origen. Para ello usamos la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} 0 \le \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} &\le \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad (\text{como } y^2 \ge 0) \\ &= \sqrt{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$, escoger $\delta = \varepsilon$. Entonces $\|(x,y)-(0,0)\| = \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$, de modo que $\|(x,y)-(0,0)\| < \delta$ implica que

$$\left|\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0\right| = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)-(0,0)\| < \delta = \varepsilon.$$

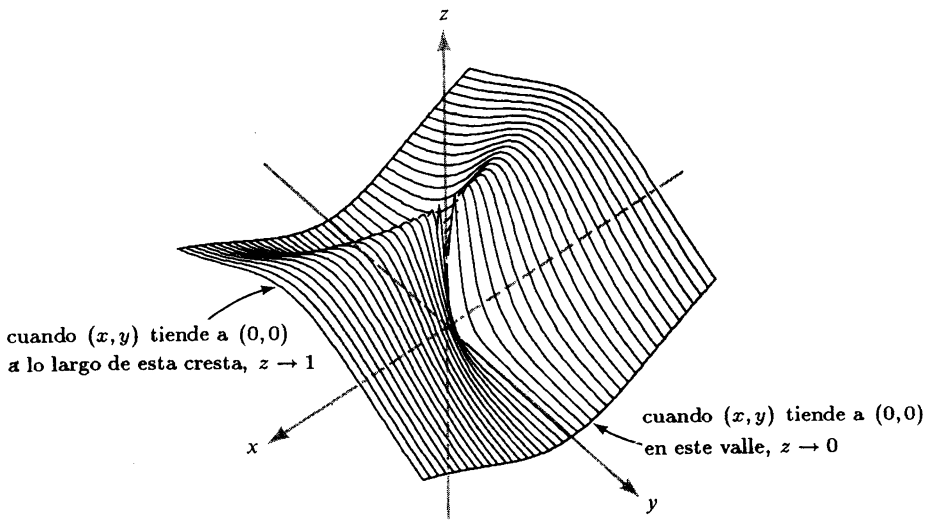
Así, se cumplen las condiciones del teorema 6 y se verifica el límite. ▲

EJEMPLO 15 *¿Existe* $\underset{(x,y)\to(0,0)}{\text{límite}}\ x^2/(x^2+y^2)$*?*

SOLUCIÓN Si existe el límite, $x^2/(x^2+y^2)$ debería aproximarse a un valor definido, digamos a, cuando (x,y) se acerque a $(0,0)$. En particular, si (x,y) tiende a cero a lo largo de cualquier trayectoria, entonces $x^2/(x^2+y^2)$ debería tender al valor límite a. Si (x,y) tiende a $(0,0)$ a lo largo de la recta $y=0$, claramente el valor límite es 1 (basta hacer $y=0$ en la expresión anterior para obtener $x^2/x^2 = 1$). Si (x,y) tiende a $(0,0)$ a lo largo de la recta $x=0$, el valor límite es

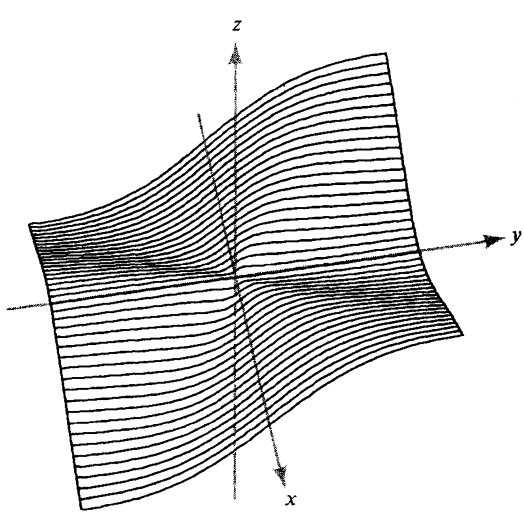
$$\underset{(x,y)\to(0,0)}{\text{límite}}\ \frac{0^2}{0^2+y^2} = 0 \ne 1.$$

Por lo tanto, no existe $\underset{(x,y)\to(0,0)}{\text{límite}}\ x^2/(x^2+y^2)$ (ver la figura 2.2.20). ▲



$$z = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \qquad -1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1$$

Figura 2.2.20 Esta función no tiene límite en $(0, 0)$.



$$z = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

Figura 2.2.21 Esta función tiene límite 0 en $(0, 0)$.

EJEMPLO 16 *Probar que (ver la figura 2.2.21)*

$$\underset{(x,y)\to(0,0)}{\text{límite}} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0.$$

SOLUCIÓN En efecto, nótese que

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{x^2y}{x^2}\right| = |y|.$$

Así, dado $\varepsilon > 0$, escoger $\delta = \varepsilon$; entonces $0 < \|(x,y)-(0,0)\| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ implica $|y| < \delta$, y así,

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| < \varepsilon. \qquad \blacktriangle$$

Usando la notación épsilon-delta llegamos a la siguiente reformulación de la definición de continuidad.

TEOREMA 7 *Sea $f: A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ una función dada. Entonces f es continua en $\mathbf{x}_0 \in A$ si y sólo si para todo número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que*

$$\mathbf{x} \in A \text{ y } \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\| < \delta \qquad \text{implica} \qquad \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\| < \varepsilon.$$

La demostración es casi inmediata. Nótese que en el teorema 6 insistimos en que $0 < \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|$, esto es, $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$. Esto *no* se impone aquí; en efecto, ciertamente la conclusión del teorema 7 es válida cuando $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, de modo que no es necesario excluir este caso. Aquí si nos interesa el valor de f en $\mathbf{x}_0$; queremos que en los puntos cercanos f esté cerca de este valor.

EJERCICIOS

En los ejercicios siguientes el lector puede suponer que las funciones exponencial, seno y coseno son continuas, y puede usar libremente las técnicas del cálculo de una variable.

1. Mostrar que los siguientes subconjuntos del plano son abiertos:
(a) $A = \{(x,y) | -1 < x < 1, -1 < y < 1\}$
(b) $B = \{(x,y) | y > 0\}$
(c) $C = \{(x,y) | 2 < x^2 + y^2 < 4\}$
(d) $A \cup B \cup C$, donde los conjuntos A, B y C se definen como en las parte (a), (b), y (c)
(e) $D = \{(x,y) | x \neq 0 \text{ y } y \neq 0\}$

2. (a) Probar que para $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ y $s < t$, $D_s(\mathbf{x}) \subset D_t(\mathbf{x})$.
(b) Probar que si U y V son vecindades de $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, entonces también lo son $U \cap V$ y $U \cup V$.
(c) Probar que los puntos frontera de un intervalo abierto $(a,b) \subset \mathbf{R}$ son los puntos a y b.

***3.** Usar la formulación ε-δ de los límites para probar que $x^2 \to 4$ cuando $x \to 2$. Dar una demostración más corta usando el teorema 3.

4. Calcular los límites siguientes:

(a) $\operatorname*{límite}_{(x,y)\to(0,1)} x^3 y$

(b) $\operatorname*{límite}_{(x,y)\to(0,1)} e^x y$

(c) $\operatorname*{límite}_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x}$

$\boxed{\text{(d)}}$ $\operatorname*{límite}_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}$

5. Calcular los límites siguientes:

(a) $\operatorname*{límite}_{x\to 3} (x^2 - 3x + 5)$

(b) $\operatorname*{lím}_{x\to 0} \operatorname{sen} x$

(c) $\operatorname*{límite}_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h}$

$\boxed{\text{(d)}}$ $\operatorname*{límite}_{h\to 0} \dfrac{e^h - 1}{h}$

(e) $\operatorname*{límite}_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2}$

6. Calcular los límites siguientes, si es que existen:

(a) $\operatorname*{límite}_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2 + 3)$

$\boxed{\text{(b)}}$ $\operatorname*{límite}_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2 + y^2 + 2}$

(c) $\operatorname*{límite}_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{xy}}{x+1}$

$\boxed{\text{(d)}}$ $\operatorname*{límite}_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\cos x - 1 - x^2/2}{x^4 + y^4}$

(e) $\operatorname*{límite}_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(x-y)^2}{x^2 + y^2}$

7. Calcular $\operatorname*{límite}_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$, si es que existe, para los casos siguientes:

(a) $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto |x|, x_0 = 1$

(b) $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, \mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$, $\mathbf{x}_0$ arbitrario

$\boxed{\text{(c)}}$ $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2, x \mapsto (x^2, e^x), x_0 = 1$

(d) $f\colon \mathbf{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbf{R}^2, (x,y) \mapsto (\operatorname{sen}(x-y), e^{x(y+1)} - x - 1)/\|(x,y)\|, \mathbf{x}_0 = (0,0)$

8. Sea $A \subset \mathbf{R}^2$ el disco unitario abierto $D_1(0,0)$ con el punto $\mathbf{x}_0 = (1,0)$ añadido, y sea $f\colon A \to \mathbf{R}$, $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x})$ la función constante $f(\mathbf{x}) = 1$. Mostrar que $\operatorname*{límite}_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = 1$.

$\boxed{\textbf{9.}}$ Mostrar que $\operatorname*{límite}_{(x,y)\to(0,0)} (\operatorname{sen} xy)/xy = 1$.

10. Mostrar que la correspondencia $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2 e^x/(2 - \operatorname{sen} x)$ es continua.

11. Sea $f(x,y,z) = (x^2 + 3y^2)/(x+1)$. Calcular

$$\operatorname*{límite}_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z).$$

$\boxed{\textbf{12.}}$ Mostrar que $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto (1-x)^8 + \cos(1 + x^3)$ es continua.

13. Si $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ y $g: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ son continuas, mostrar que las funciones

$$f^2 g: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, \mathbf{x} \mapsto [f(\mathbf{x})]^2 g(\mathbf{x})$$

y

$$f^2 + g: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, \mathbf{x} \mapsto [f(\mathbf{x})]^2 + g(\mathbf{x})$$

son continuas.

14. Probar que $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $(x, y) \mapsto ye^x + \operatorname{sen} x + (xy)^4$ es continua.

15. (a) ¿Se puede hacer continua $[\operatorname{sen}(x+y)]/(x+y)$ definiéndola de manera adecuada en $(0,0)$?

(b) ¿Se puede hacer continua $xy/(x^2+y^2)$ definiéndola de manera adecuada en $(0,0)$?

16. (a) Usar la regla de l'Hôpital para calcular $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x - 2x}{x^3}$.

(b) ¿Existe $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{\operatorname{sen} 2x - 2x + y}{x^3 + y}$?

17. Suponer que $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ están en $\mathbf{R}^n$ y que $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$. Mostrar que existe una función continua $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ con $f(\mathbf{x}) = 1$, $f(\mathbf{y}) = 0$, y $0 \leq f(\mathbf{z}) \leq 1$ para todo $\mathbf{z}$ en $\mathbf{R}^n$.

***18.** Sea $f: A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ y sea $\mathbf{x}_0$ un punto frontera de A. Decimos que $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \infty$ si para todo $N > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ implica $f(\mathbf{x}) > N$.

(a) Probar que $\lim\limits_{x \to 1} (x-1)^{-2} = \infty$

(b) Probar que $\lim\limits_{x \to 0} 1/|x| = \infty$. ¿Es cierto que $\lim\limits_{x \to 0} 1/x = \infty$?

(c) Probar que $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} 1/(x^2+y^2) = \infty$.

***19.** Sea $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función. Escribimos $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = L$ y decimos que L es el *límite por la izquierda* de f en b, si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x < b$ y $0 < |x - b| < \delta$ implica $|f(x) - L| < \varepsilon$.

(a) Formular una definición de *límite por la derecha*, o $\lim\limits_{x \to b^+} f(x)$.

(b) Hallar $\lim\limits_{x \to 0^-} 1/(1+e^{1/x})$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} 1/(1+e^{1/x})$.

(c) Esbozar la gráfica de $1/(1+e^{1/x})$.

***20.** Mostrar que f es continua en $\mathbf{x}_0$ si y sólo si

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\| = 0.$$

*21. Sea $f: A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ que satisface $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \leq K\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^\alpha$ para todo $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ en A para constantes positivas K y α. Mostrar que f es continua. (Dichas funciones se llaman *Hölder-continuas* o, si $\alpha = 1$, *Lipschitz-continuas*.)

*22. Mostrar que $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ es continua en todos los puntos si y sólo si la imagen inversa de todo abierto es abierta.

*23. (a) Probarque existe un número $\delta > 0$ tal que si $|a| < \delta$, entonces $|a^3 + 3a^2 + a| < 1/100$.

(b) Probar que existe un número $\delta > 0$ tal que si $x^2 + y^2 < \delta^2$, entonces

$$|x^2 + y^2 + 3xy + 180xy^5| < 1/10,000.$$

2.3 DIFERENCIACIÓN

En la sección 2.1 consideramos algunos métodos para graficar funciones. Mediante sólo estos métodos puede ser imposible calcular suficiente información para comprender incluso las características generales de una función complicada. Por el cálculo elemental sabemos que el concepto de derivada puede ser de mucha ayuda en esta tarea; por ejemplo, nos permite localizar máximos y mínimos, y calcular tasas de cambio. La derivada, además de éstas, tiene otras aplicaciones, como seguramente ya lo habrá descubierto el estudiante en su curso de cálculo elemental.

Intuitivamente ya sabemos, por nuestro trabajo con la sección 2.2, que una función continua no tiene la gráfica rota. Una función diferenciable de $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}$ debe ser tal que su gráfica no esté rota, pero además debe tener bien definido un plano tangente a la gráfica en cada punto. Así, no debe haber dobleces, esquinas

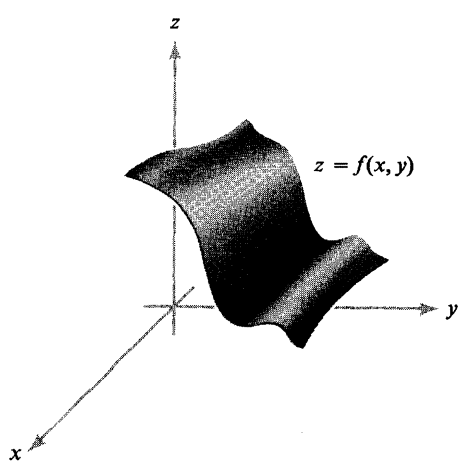


Figura 2.3.1 Gráfica suave.

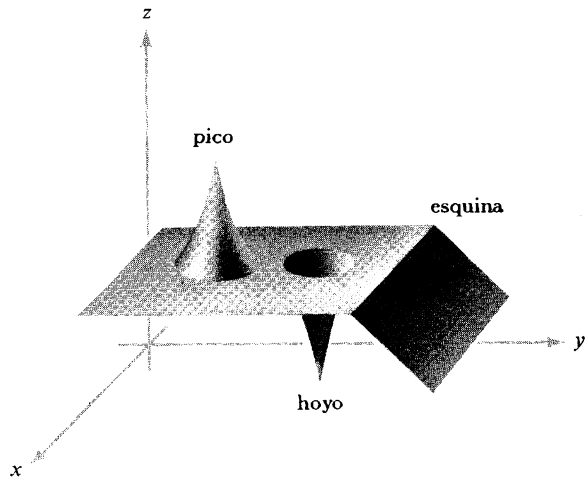


Figura 2.3.2 Esta gráfica no es suave.

o picos en la gráfica (ver las figuras 2.3.1 y 2.3.2). En otras palabras, la gráfica debe ser *suave*.

Para precisar estas ideas necesitamos una definición sensata de lo que entendemos por "$f(x_1, \ldots, x_n)$ es diferenciable en $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$". En realidad esta definición no es tan sencilla, como pudiera pensarse. Para avanzar en esa dirección, introduzcamos el concepto de *derivada parcial*. Este concepto se basa en nuestro conocimiento del cálculo en una variable. (En este momento se recomienda revisar rápidamente la definición de derivada en un libro de cálculo en una variable.)

DEFINICIÓN *Sean $U \subset \mathbf{R}^n$ un conjunto abierto y $f: U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ una función con valores reales. Entonces $\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n$, las* **derivadas parciales** *de f respecto a la primera, segunda, ..., n-ésima variable son las funciones con valores reales, de n variables, las cuales, en el punto $(x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{x}$, están definidas por*

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_n) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_j + h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x})}{h}\end{aligned}$$

si existen los límites, donde $1 \leq j \leq n$ y $\mathbf{e}_j$ es el j-ésimo vector de la base usual, definido por $\mathbf{e}_j = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, con el 1 en el j-ésimo lugar (ver la sección 1.5).

En otras palabras, $\partial f/\partial x_j$ es simplemente la derivada de f respecto a la variable x_j, manteniendo las otras variables fijas. Si $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, con frecuencia usaremos la notación $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, y $\partial f/\partial z$ en lugar de $\partial f/\partial x_1$, $\partial f/\partial x_2$, y

$\partial f/\partial x_3$. Si $f: U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, entonces podemos escribir

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)),$$

de modo que podemos hablar de las derivadas parciales de cada componente; por ejemplo, $\partial f_m/\partial x_n$ es la derivada parcial de la m-ésima componente con respecto a x_n, la n-ésima variable.

EJEMPLO 1 *Si $f(x,y) = x^2y + y^3$, hallar $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$.*

SOLUCIÓN Para hallar $\partial f/\partial x$ mantenemos y constante (piénsenla como si fuera un número, digamos 1) y diferenciamos sólo respecto a x; entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d(x^2y + y^3)}{dx} = 2xy.$$

De manera análoga, para hallar $\partial f/\partial y$ mantenemos x constante y diferenciamos sólo respecto a y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d(x^2y + y^3)}{dy} = x^2 + 3y^2 \qquad \blacktriangle$$

Para indicar que una derivada parcial ha de evaluarse en algún punto particular, por ejemplo en (x_0, y_0), escribimos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{o} \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0, y=y_0} \quad \text{o} \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)}$$

Cuando escribamos $z = f(x,y)$ para denotar la variable dependiente, con frecuencia escribiremos $\partial z/\partial x$ en lugar de $\partial f/\partial x$. Estrictamente hablando, éste es un abuso de notación, pero es una práctica común usar de manera indistinta estas dos notaciones. (Ver el ejercicio 24, en la sección 2.4 para una ilustración de los peligros que conlleva usar notación descuidada.)

EJEMPLO 2 *Si $z = \cos xy + x \cos y = f(x,y)$, hallar las derivadas parciales $(\partial z/\partial x)(x_0, y_0)$ y $(\partial z/\partial y)(x_0, y_0)$.*

SOLUCIÓN Primero fijamos y_0 y diferenciamos respecto a x, obteniendo

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) &= \left.\frac{d(\cos xy_0 + x \cos y_0)}{dx}\right|_{x=x_0} \\ &= (-y_0 \operatorname{sen} xy_0 + \cos y_0)|_{x=x_0} \\ &= -y_0 \operatorname{sen} x_0y_0 + \cos y_0.\end{aligned}$$

De manera análoga, fijamos x_0 y diferenciamos respecto a y para obtener

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) &= \left.\frac{d(\cos x_0 y + x_0 \cos y)}{dy}\right|_{y=y_0} \\ &= (-x_0 \operatorname{sen} x_0 y - x_0 \operatorname{sen} y)|_{y=y_0} \\ &= -x_0 \operatorname{sen} x_0 y_0 - x_0 \operatorname{sen} y_0. \qquad \blacktriangle\end{aligned}$$

EJEMPLO 3 *Hallar $\partial f/\partial x$ si $f(x,y) = xy/\sqrt{x^2+y^2}$.*

SOLUCIÓN Por la regla del cociente

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{y\sqrt{x^2+y^2} - xy(x/\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+y^2} \\ &= \frac{y(x^2+y^2) - x^2 y}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}. \qquad \blacktriangle\end{aligned}$$

Resulta insuficiente una definición de diferenciabilidad que requiera sólo de la existencia de las derivadas parciales. No se cumplirían muchos de los resultados usuales, como la regla de la cadena para varias variables, tal como lo muestra el ejemplo 4. Más adelante veremos cómo rectificar esta situación.

EJEMPLO 4 Sea $f(x,y) = x^{1/3}y^{1/3}$. Por definición,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0,$$

y, de manera similar, $(\partial f/\partial y)(0,0) = 0$ (¡no se trata de formas indeterminadas!). Es necesario usar la definición original de derivadas parciales, pues las funciones $x^{1/3}$ y $y^{1/3}$ no son diferenciables en 0. Supongamos que restringimos f a la recta $y = x$ para obtener $f(x,x) = x^{2/3}$ (ver la figura 2.3.3). Podemos ver la substitución $y = x$ como la composición de la función $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$, definida por $g(x) = (x,x)$, con $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, definida por $f(x,y) = x^{1/3}y^{1/3}$.

Así, la composición $f \circ g$ está dada por $(f \circ g)(x) = x^{2/3}$. Cada componente de g es diferenciable en x, y f tiene derivadas parciales en $(0,0)$, pero $f \circ g$ *no es diferenciable* en $x = 0$, en el sentido del cálculo en una variable. En otras palabras, la composición de f y g no es diferenciable, en contraste con el cálculo de funciones en una variable, donde la composición de funciones diferenciables *es* diferenciable. Más adelante daremos una definición de diferenciabilidad que tiene la agradable consecuencia de que la composición de funciones diferenciables es diferenciable.

Hay otra razón para no estar satisfechos con la simple existencia de las derivadas parciales de $f(x,y) = x^{1/3}y^{1/3}$; no hay plano tangente, en un sentido razonable, a la gráfica en $(0,0)$. El plano xy es tangente a la gráfica a lo largo de los ejes x y y pues f tiene pendiente cero en $(0,0)$ a lo largo de estos ejes; esto es, $\partial f/\partial x = 0$ y $\partial f/\partial y = 0$ en $(0,0)$. Así, si hubiera plano tangente, debería ser el plano xy. Sin embargo, como resulta evidente en la figura 2.3.3, el plano xy no es tangente a la gráfica en otras direcciones, pues la gráfica tiene una severa arruga de modo que no se puede decir que el plano xy es tangente a la gráfica de f. ▲

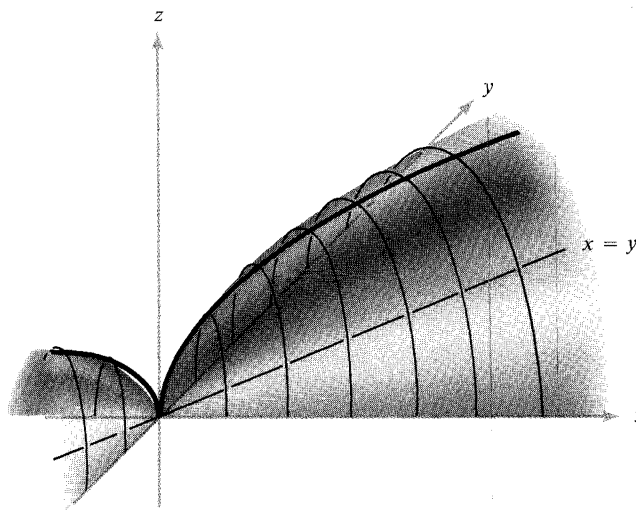


Figura 2.3.3 Parte "superior" de la gráfica de $x^{1/3}y^{1/3}$.

Para "motivar" la definición de diferenciabilidad, calculemos cómo debería ser la ecuación del plano tangente a la gráfica de $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$ en (x_0, y_0), si f fuera suficientemente suave. En $\mathbf{R}^3$, un plano no vertical tiene una ecuación de la forma

$$z = ax + by + c.$$

Si se trata de que sea el plano tangente a la gráfica de f, las pendientes a lo largo de los ejes x y y deben ser iguales a $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$, las tasas de cambio de f respecto a x y y. Así, $a = \partial f/\partial x$, $b = \partial f/\partial y$ (evaluadas en (x_0, y_0)). Finalmente, podemos determinar la constante c a partir del hecho que $z = f(x_0, y_0)$ cuando $x = x_0$, $y = y_0$. Así, obtenemos

$$z = f(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right](x - x_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right](y - y_0), \tag{1}$$

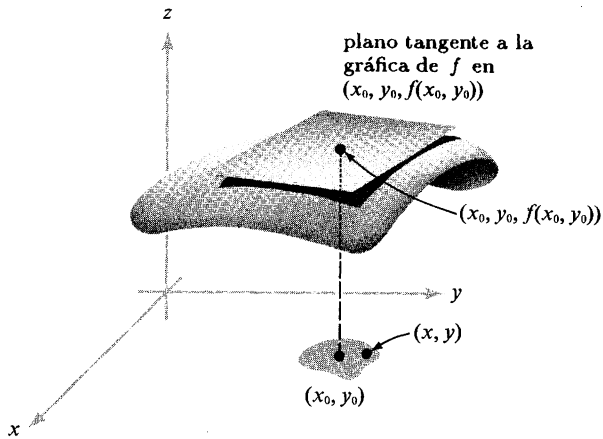


Figura 2.3.4 Para los puntos (x, y) cerca de (x_0, y_0), la gráfica del plano tangente está cerca de la gráfica de f.

que debería ser la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en (x_0, y_0), si f es "suficientemente suave" (ver la figura 2.3.4).

Nuestra definición de diferenciabilidad dirá, en efecto, que el plano dado por la ecuación (1) es una "buena" aproximación de f cerca de (x_0, y_0). Para tener una idea de lo que significa una buena aproximación, regresemos por un momento al cálculo en una variable. Si f es diferenciable en el punto x_0, entonces sabemos que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Sea $x = x_0 + \Delta x$ y reescribamos esto como

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Usando el límite trivial $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x_0) = f'(x_0)$, podemos reescribir la ecuación anterior como

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} f'(x_0)$$

o

$$\lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right] = 0$$

o

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0.$$

Así, la recta tangente l que pasa por $(x_0, f(x_0))$ con pendiente $f'(x_0)$ está cerca de f en el sentido de que la diferencia entre $f(x)$ y $l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ se hace cero *aun* al dividirse entre $x - x_0$, cuando x va hacia x_0. Ésta es la idea de "buena aproximación" que adaptaremos a funciones de varias variables, reemplazando la recta tangente por el plano tangente (ver la ecuación (1), anterior).

DEFINICIÓN *Sea $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. Decimos que f es* ***diferenciable en*** *(x_0, y_0), si $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ existen en (x_0, y_0) y si*

$$\frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \left[\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right](x - x_0) - \left[\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right](y - y_0)}{\|(x,y) - (x_0,y_0)\|} \to 0 \qquad (2)$$

cuando $(x, y) \to (x_0, y_0)$. Esta ecuación expresa el significado que damos cuando decimos que

$$f(x_0,y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right](x - x_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right](y - y_0)$$

es una ***buena aproximación*** *a la función f.*

No siempre es fácil usar esta definición para saber si f es diferenciable, pero será fácil usar otro criterio dado en el teorema 9, más adelante.

Hemos usado la idea informal del plano tangente a la gráfica de una función para motivar nuestra definición de diferenciabilidad. Ahora ya estamos preparados para adoptar una definición formal del plano tangente.

DEFINICIÓN *Sea $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ diferenciable en $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$. El plano en $\mathbf{R}^3$ definido mediante la ecuación (1),*

$$z = f(x_0,y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right](x - x_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right](y - y_0),$$

se llama ***plano tangente*** *a la gráfica de f en el punto (x_0, y_0).*

EJEMPLO 5 *Calcular el plano tangente a la gráfica de $z = x^2 + y^4 + e^{xy}$ en el punto $(1, 0, 2)$.*

SOLUCIÓN Aquí usamos la fórmula (1), con $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, y $z_0 = f(x_0, y_0) = 2$. Las derivadas parciales son

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + ye^{xy} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 + xe^{xy}.$$

En $(1,0,2)$, son 2 y 1, respectivamente. Así, por la fórmula (1), el plano tangente es

$$z = 2(x-1) + 1(y-0) + 2, \qquad \text{i.e.} \qquad z = 2x + y. \qquad \blacktriangle$$

Escribamos $\mathbf{D}f(x_0, y_0)$ para la matriz renglón

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right],$$

entonces, la definición de diferenciabilidad afirma que

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0) + \mathbf{D}f(x_0, y_0)&\begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} \\ &= f(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right](x - x_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right](y - y_0) \end{aligned} \tag{3}$$

es nuestra buena aproximación a f cerca de (x_0, y_0). (Como antes, "buena" se toma en el sentido de que la expresión (3) difiere de $f(x, y)$ en alguna cantidad pequeña multiplicada por $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$.) Decimos que la expresión (3) es la *mejor aproximación lineal* a f cerca de (x_0, y_0).

Ahora estamos preparados para dar una definición de diferenciabilidad para funciones f de $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^m$, usando el análisis anterior como motivación. La derivada $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$ de $f = (f_1, \ldots, f_m)$ en un punto $\mathbf{x}_0$ es una matriz con elementos $t_{ij} = \partial f_i / \partial x_j$ evaluada en $\mathbf{x}_0$.*

DEFINICIÓN *Sean U un conjunto abierto en $\mathbf{R}^n$ y $f: U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ una función dada. Decimos que f es* **diferenciable** *en $\mathbf{x}_0 \in U$ si existen las derivadas parciales de f en $\mathbf{x}_0$ y si*

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \frac{\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{T}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0, \tag{4}$$

donde $\mathbf{T} = \mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$ es la matriz cuyos elementos matriciales son $\partial f_i / \partial x_j$ evaluadas en $\mathbf{x}_0$ y $\mathbf{T}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ es el producto de $\mathbf{T}$ con $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ (considerado como un vector columna). Llamamos a **T derivada** *de f en $\mathbf{x}_0$.*

Siempre denotaremos la derivada $\mathbf{T}$ de f en $\mathbf{x}_0$ por $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$, aunque en algunos libros se denote $df(\mathbf{x}_0)$ y se denomine *diferencial* de f. En el caso $m = 1$, la matriz

*Resulta que es suficiente postular la existencia de *alguna* matriz que dé la mejor aproximación lineal cerca de $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$, pues de hecho esta matriz es *necesariamente* la matriz cuyo ij-ésimo registro es $\partial f_i / \partial x_j$ (ver la sección 2.7).

$\mathbf{T}$ es precisamente la matriz renglón

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0)\right].$$

(A veces, cuando hay peligro de confusión, separamos los registros mediante comas.) Al hacer $n = 2$ y colocar el resultado en la ecuación (4), vemos que las condiciones (2) y (4) coinciden. Así, si hacemos $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, una función f con valores reales, de n variables, es diferenciable en un punto $\mathbf{x}_0$ si

$$\operatorname*{límite}_{\mathbf{h}\to 0} \frac{1}{\|\mathbf{h}\|}\left| f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)h_j \right| = 0,$$

pues

$$\mathbf{Th} = \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0).$$

Para el caso general en que f manda a un subconjunto de $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^m$, la derivada es la matriz de $m \times n$ dada por

$$\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

donde $\partial f_i/\partial x_j$ está evaluada en $\mathbf{x}_0$. A $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$ se le llama, de manera correcta, *matriz de las derivadas parciales de f en $\mathbf{x}_0$*.

EJEMPLO 6 *Calcular las matrices de derivadas parciales para* (a) $f(x,y) = (e^{x+y} + y, y^2x)$, (b) $f(x,y) = (x^2 + \cos y, ye^x)$ *y* (c) $f(x,y,z) = (ze^x, -ye^z)$.

SOLUCIÓN (a) Aquí $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ está definida por $f_1(x,y) = e^{x+y} + y$ y $f_2(x,y) = y^2x$. Entonces $\mathbf{D}f(x,y)$ es la matriz de 2×2

$$\mathbf{D}f(x,y) = \begin{bmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} + 1 \\ y^2 & 2xy \end{bmatrix}.$$

(b) Tenemos

$$\mathbf{D}f(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & -\operatorname{sen} y \\ ye^x & e^x \end{bmatrix}.$$

(c) Aquí

$$\mathbf{D}f(x,y,z) = \begin{bmatrix} ze^x & 0 & e^x \\ 0 & -e^z & -ye^z \end{bmatrix}. \qquad \blacktriangle$$

DEFINICIÓN *Considerar el caso especial* $f\colon U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. *Aquí* $\mathbf{D}f(\mathbf{x})$ *es una matriz de* $1 \times n$:

$$\mathbf{D}f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Formamos el correspondiente vector $(\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n)$, *llamado el* ***gradiente*** *de* f *y denotado por* $\operatorname{grad} f$ *o* ∇f.

De la definición vemos que para $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$,

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k},$$

mientras que para $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$,

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}.$$

El significado geométrico del gradiente se analizará en la sección 2.5. En términos de productos internos, podemos escribir la derivada de f como

$$\mathbf{D}f(\mathbf{x})(\mathbf{h}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}.$$

EJEMPLO 7 Sea $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $f(x,y,z) = xe^y$. Entonces

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (e^y, xe^y, 0). \qquad \blacktriangle$$

EJEMPLO 8 Si $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ está dada por $(x,y) \mapsto e^{xy} + \operatorname{sen} xy$, entonces

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= (ye^{xy} + y\cos xy)\mathbf{i} + (xe^{xy} + x\cos xy)\mathbf{j} \\ &= (e^{xy} + \cos xy)(y\mathbf{i} + x\mathbf{j}). \end{aligned}$$

En cálculo de una variable se muestra que si f es diferenciable entonces f es continua. En el teorema 8 enunciaremos que esto también se cumple para las funciones diferenciables de varias variables. Como sabemos, hay multitud de funciones que son continuas pero no diferenciables, como $f(x) = |x|$. Antes de enunciar el resultado daremos el ejemplo de una función cuyas derivadas parciales existen en un punto pero que no es continua en ese punto.

EJEMPLO 9 Sea $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x = 0 \quad \text{o si} \quad y = 0 \\ 0 & \text{de no ser así} \end{cases}$$

Como f es constante en los ejes x y y, donde es igual a 1,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Pero f no es continua en $(0,0)$, pues $\underset{(x,y)\to(0,0)}{\text{límite}} f(x,y)$ no existe. ▲

TEOREMA 8 *Sea $f: U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ diferenciable en $\mathbf{x}_0 \in U$. Entonces f es continua en $\mathbf{x}_0$.*

Consultar la sección 2.7 para ver la demostración.

Como ya vimos, por lo general es fácil decir si existen las derivadas parciales de una función usando nuestro conocimiento de cálculo en una variable. Sin embargo, la definición de diferenciabilidad se ve algo más complicada, y la condición de aproximación requerida en la ecuación (4) parece difícil de verificar. Afortunadamente existe un criterio sencillo, dado en el siguiente teorema, que nos dice cuándo una función es diferenciable.

TEOREMA 9 *Sea $f: U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$. Supongamos que existen todas las derivadas parciales $\partial f_i / \partial x_j$ de f y son continuas en una vecindad de un punto $\mathbf{x} \in U$. Entonces f es diferenciable en $\mathbf{x}$.*

Daremos la demostración en la sección 2.7. Nótese la siguiente jerarquía:

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} & & & \text{Definición} & \\ & \text{Teorema 9} & & \text{de derivada} & \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ \text{Parciales continuas} & \Longrightarrow & \text{Diferenciable} & \Longrightarrow & \text{Existen las parciales} \end{array}}$$

Todos los enunciados recíprocos obtenidos invirtiendo una implicación, son inválidos. (Para un contraejemplo al recíproco de la primera implicación, usar $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$, $f(0) = 0$; para la segunda, ver el ejemplo 1 de la sección 2.7 o usar el ejemplo 4 de esta sección.)

Una función cuyas parciales existan y sean continuas, se dice que es de *clase* C^1. Así, el teorema 9 dice que *cualquier función* C^1 *es diferenciable.*

EJEMPLO 10 *Sea*

$$f(x,y) = \frac{\cos x + e^{xy}}{x^2 + y^2}.$$

Mostrar que f *es diferenciable en todos los puntos* $(x,y) \neq (0,0)$.

SOLUCIÓN Observar que las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2)(ye^{xy} - \operatorname{sen} x) - 2x(\cos x + e^{xy})}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(x^2+y^2)xe^{xy} - 2y(\cos x + e^{xy})}{(x^2+y^2)^2}$$

son continuas excepto cuando $x = 0$ y $y = 0$ (por los resultados en la sección 2.2). ▲

EJERCICIOS

1. Hallar $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ si

(a) $f(x,y) = xy$

(b) $f(x,y) = e^{xy}$

(c) $f(x,y) = x \cos x \cos y$

(d) $f(x,y) = (x^2+y^2)\log(x^2+y^2)$

2. Evaluar las derivadas parciales $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$ para las funciones dadas en los puntos indicados.

(a) $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$; $(0,0)$, $(a/2, a/2)$

(b) $z = \log\sqrt{1+xy}$; $(1,2)$, $(0,0)$

(c) $z = e^{ax}\cos(bx+y)$; $(2\pi/b, 0)$

3. En cada caso siguiente, hallar las derivadas parciales $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$.

(a) $w = xe^{x^2+y^2}$

(b) $w = \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

(c) $w = e^{xy}\log(x^2+y^2)$

(d) $w = x/y$

(e) $w = \cos y e^{xy} \operatorname{sen} x$

4. Mostrar que cada una de las funciones siguientes es diferenciable en cada punto de su dominio. Decir cuáles de las funciones son C^1.

(a) $f(x,y) = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$ (b) $f(x,y) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$

(c) $f(r,\theta) = \frac{1}{2} r \operatorname{sen} 2\theta, r > 0$ (d) $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(e) $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}$

5. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^2 + y^3$ en $(3,1,10)$.

6. Usando las funciones respectivas en el ejercicio 1, calcular el plano tangente a la gráfica en los puntos indicados.

(a) $(0,0)$ (b) $(0,1)$ (c) $(0,\pi)$ (d) $(0,1)$

7. Calcular la matriz de derivadas parciales de las funciones siguientes:

(a) $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, f(x,y) = (x,y)$

(b) $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3, f(x,y) = (xe^y + \cos y, x, x + e^y)$

(c) $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2, f(x,y,z) = (x + e^z + y, yx^2)$

(d) $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3, f(x,y) = (xye^{xy}, x \operatorname{sen} y, 5xy^2)$

8. Calcular la matriz de derivadas parciales de

(a) $f(x,y) = (e^x, \operatorname{sen} xy)$ (b) $f(x,y,z) = (x-y, y+z)$

(c) $f(x,y) = (x+y, x-y, xy)$ (d) $f(x,y,z) = (x+z, y-5z, x-y)$

9. ¿Dónde cruza al eje z el plano tangente a $z = e^{x-y}$ en $(1,1,1)$?

10. ¿Por qué podrían llamarse las gráficas de $f(x,y) = x^2+y^2$ y $g(x,y) = -x^2-y^2+xy^3$ "tangentes" en $(0,0)$?

11. Sea $f(x,y) = e^{xy}$. Mostrar que $x(\partial f/\partial x) = y(\partial f/\partial y)$.

12. Usar la expresión (1) en esta sección para aproximar una función adecuada $f(x,y)$ y a partir de ahí estimar lo siguiente:

(a) $(0.99e^{0.02})^8$

(b) $(0.99)^3 + (2.01)^3 - 6(0.99)(2.01)$

(c) $\sqrt{(4.01)^2 + (3.98)^2 + (2.02)^2}$

13. Calcular los gradientes de las funciones siguientes:

(a) $f(x,y,z) = x\exp(-x^2-y^2-z^2)$ (Notar que $\exp u = e^u$.)

(b) $f(x,y,z) = \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$ (c) $f(x,y,z) = z^2 e^x \cos y$

14. Calcular el plano tangente a $(1,0,1)$ para cada una de las funciones en el ejercicio 13. (La solución sólo a la parte (c) está en la Guía de estudio de este libro.)

15. Hallar la ecuación del plano tangente a $z = x^2 + 2y^3$ en $(1,1,3)$.

16. Calcular $\nabla h(1,1,1)$ si $h(x,y,z) = (x+z)e^{x-y}$.

17. Sea $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$. Calcular $\nabla f(0,0,1)$.

18. Evaluar el gradiente de $f(x,y,z) = \log(x^2 + y^2 + z^2)$ en $(1,0,1)$.

***19.** Describir todas las funciones Hölder-continuas con $\alpha > 1$ (ver el ejercicio 21, sección 2.2). [IDEA: ¿Cuál es la derivada de dicha función?]

***20.** Suponer que $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ es una transformación lineal. ¿Cuál es la derivada de f?

2.4 PROPIEDADES DE LA DERIVADA

En cálculo elemental aprendimos cómo diferenciar sumas, productos, cocientes y funciones compuestas. Ahora generalizamos estas ideas a funciones de varias variables, prestando particular atención a la diferenciación de funciones compuestas. La regla para diferenciación de composiciones, llamada regla de la cadena, adquiere una forma más profunda en el caso de funciones de varias variables que en las de una variable. Así, por ejemplo, si f es una función con valores reales en una variable, escrita como $z = f(y)$, y y es una función de x, que escribimos $y = g(x)$, entonces z resulta una función de x mediante la sustitución, a saber, $z = f(g(x))$, y tenemos la conocida fórmula

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = f'(g(x))g'(x).$$

Si f es una función con valores reales en tres variables u, v y w, escrita en la forma $z = f(u,v,w)$, y las variables u, v y w son cada una funciones de x, $u = g(x)$, $v = h(x)$, y $w = k(x)$, entonces al sustituir $g(x)$, $h(x)$ y $k(x)$ por u, v y w, expresamos z como función de x: $z = f(g(x), h(x), k(x))$. En este caso la regla de la cadena es:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{dw}{dx}.$$

Uno de los objetivos de esta sección es explicar dichas fórmulas en detalle.

Comenzamos con las reglas de diferenciación para sumas, productos y cocientes.

TEOREMA 10

(i) ***Regla del múltiplo constante.*** *Sea $f: U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y sea c un número real. Entonces $h(\mathbf{x}) = cf(\mathbf{x})$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y*

$$\mathbf{D}h(\mathbf{x}_0) = c\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) \qquad \textit{(igualdad de matrices).}$$

(ii) ***Regla de la suma.*** *Sean $f: U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ y $g: U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ diferenciables en $\mathbf{x}_0$. Entonces $h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y*

$$\mathbf{D}h(\mathbf{x}_0) = \mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) + \mathbf{D}g(\mathbf{x}_0) \qquad \textit{(suma de matrices).}$$

(iii) ***Regla del producto.*** *Sean $f: U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ y $g: U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ diferenciables en $\mathbf{x}_0$ y sea $h(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})f(\mathbf{x})$. Entonces $h: U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y*

$$\mathbf{D}h(\mathbf{x}_0) = g(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) + f(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0).$$

(Notar que cada lado de esta ecuación es una matriz de $1 \times n$; un producto más general se presenta en el ejercicio 25 al final de esta sección.)

(iv) ***Regla del cociente.*** *Con las mismas hipótesis que en la regla* (iii), *sea $h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})/g(\mathbf{x})$ y suponer que g nunca es cero en U. Entonces h es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y*

$$\mathbf{D}h(\mathbf{x}_0) = \frac{g(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)}{[g(\mathbf{x}_0)]^2}.$$

DEMOSTRACIÓN Las demostraciones de las reglas (i) a (iv) se desarrollan casi de la misma manera que en el caso de una variable, con sólo una ligera diferencia en la notación. Probaremos las reglas (i) y (ii), dejando las demostraciones de las reglas (iii) y (iv) para el ejercicio 29.

(i) Para mostrar que $\mathbf{D}h(\mathbf{x}_0) = c\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$, debemos mostrar que

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{\|h(\mathbf{x}_0) - h(\mathbf{x}_0) - c\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0,$$

esto es, que

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{\|cf(\mathbf{x}) - cf(\mathbf{x}_0) - c\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0,$$

(ver la ecuación (4) de la sección 2.3). Esto es cierto pues f es diferenciable y la constante c puede factorizarse (ver el teorema 3(i), sección 2.2).

(ii) Por la desigualdad del triángulo, podemos escribir

$$\begin{aligned}
&\frac{\|h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x}_0) - [\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) + \mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)](\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \\
&= \frac{\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - [\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)](\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0) - [\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)](\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \\
&\leq \frac{\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - [\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)](\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \\
&+ \frac{\|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0) - [\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)](\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|},
\end{aligned}$$

y cada término tiende a 0 conforme $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$. Por lo tanto, se cumple la regla (ii). ■

EJEMPLO 1 *Verificar la fórmula para* $\mathbf{D}h$ *en la regla* (iv) *del teorema 10 con* $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ *y* $g(x, y, z) = x^2 + 1$.

SOLUCIÓN Aquí

$$h(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + 1},$$

de modo que por diferenciación directa

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}h(x, y, z) &= \left[\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z}\right] \\
&= \left[\frac{(x^2 + 1)2x - (x^2 + y^2 + z^2)2x}{(x^2 + 1)^2}, \frac{2y}{x^2 + 1}, \frac{2z}{x^2 + 1}\right] \\
&= \left[\frac{2x(1 - y^2 - z^2)}{(x^2 + 1)^2}, \frac{2y}{x^2 + 1}, \frac{2z}{x^2 + 1}\right].
\end{aligned}$$

Por la regla (iv), obtenemos

$$\mathbf{D}h = \frac{g\mathbf{D}f - f\mathbf{D}g}{g^2} = \frac{(x^2 + 1)[2x, 2y, 2z] - (x^2 + y^2 + z^2)[2x, 0, 0]}{(x^2 + 1)^2}.$$

que es lo mismo que obtuvimos directamente. ▲

Como ya mencionamos anteriormente, es en la diferenciación de funciones compuestas que encontraremos aparentes alteraciones substanciales de la fórmula del cálculo de una variable. Sin embargo, si usamos la notación $\mathbf{D}$, esto es, notación matricial, la regla de la cadena para funciones de varias variables se parece a la regla para una variable.

TEOREMA 11: REGLA DE LA CADENA. *Sean $U \subset \mathbf{R}^n$ y $V \subset \mathbf{R}^m$ abiertos. Sean $g: U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ y $f: V \subset \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$ funciones dadas tales que g manda a U en V, de modo que está definida $f \circ g$. Suponer que g es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y que f es diferenciable en $\mathbf{y}_0 = g(\mathbf{x}_0)$. Entonces $f \circ g$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y*

$$\mathbf{D}(f \circ g)(\mathbf{x}_0) = \mathbf{D}f(\mathbf{y}_0)\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0). \tag{1}$$

El lado derecho es una matriz producto.

Daremos ahora una demostración de la regla de la cadena *bajo la hipótesis adicional de que las derivadas parciales de f son continuas*, desarrollando así el caso general mediante dos casos particulares que son importantes por sí mismos. (La demostración completa del teorema 11 sin la hipótesis adicional de continuidad está dada en la sección 2.7.)

PRIMER CASO ESPECIAL DE LA REGLA DE LA CADENA *Suponer que $\mathbf{c}: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ y $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$. Sea $h(t) = f(\mathbf{c}(t)) = f(x(t), y(t), z(t))$, donde $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Entonces*

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}. \tag{2}$$

Esto es,

$$\frac{dh}{dt} = \nabla f(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t),$$

donde $\mathbf{c}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$.

Éste es el caso especial del teorema 11 en el que tomamos $\mathbf{c} = g$, f con valores reales y $m = 3$. Nótese que

$$\nabla f(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) = \mathbf{D}f(\mathbf{c}(t))\mathbf{D}\mathbf{c}(t),$$

donde el producto en el lado izquierdo es el producto punto de vectores, mientras que el producto del lado derecho es multiplicación de matrices, y donde consideramos a $\mathbf{D}f(\mathbf{c}(t))$ como matriz *renglón* y $\mathbf{D}\mathbf{c}(t)$ como matriz *columna*. Los vectores $\nabla f(\mathbf{c}(t))$ y $\mathbf{c}'(t)$ tienen las mismas componentes que sus equivalentes matriciales; el cambio notacional indica el paso de matrices a vectores. Los diagramas siguientes pueden ser de utilidad para que el lector entienda esta relación:

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{R}^3 \arrow[dr, "f"] & \\ \mathbf{R} \arrow[ur, "\mathbf{c}"] \arrow[rr, "f \circ \mathbf{c}"'] & & \mathbf{R} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \mathbf{R}^3 \arrow[dr, "\mathbf{D}f"] & \\ \mathbf{R} \arrow[ur, "\mathbf{D}\mathbf{c}"] \arrow[rr, "\mathbf{D}(f \circ \mathbf{c}) = \mathbf{D}f\,\mathbf{D}\mathbf{c}"'] & & \mathbf{R} \end{tikzcd}$$

donde $\mathbf{D}c$ y $\mathbf{D}f$ están evaluadas en t y $\mathbf{c}(t)$ respectivamente.

DEMOSTRACIÓN DE LA ECUACIÓN (2) Por definición

$$\frac{dh}{dt}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0}.$$

Sumando y restando dos términos, escribimos

$$\begin{aligned}
\frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} &= \frac{f(x(t), y(t), z(t)) - f(x(t_0), y(t_0), z(t_0))}{t - t_0} \\
&= \frac{f(x(t), y(t), z(t)) - f(x(t_0), y(t), z(t))}{t - t_0} \\
&\quad + \frac{f(x(t_0), y(t), z(t)) - f(x(t_0), y(t_0), z(t))}{t - t_0} \\
&\quad + \frac{f(x(t_0), y(t_0), z(t)) - f(x(t_0), y(t_0), z(t_0))}{t - t_0}.
\end{aligned}$$

Invocamos ahora el *teorema del valor medio* del cálculo de una variable, que afirma que: *si* $g\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ *es continua y diferenciable en el intervalo abierto* (a, b), *entonces existe un punto* c *en* (a, b) *tal que* $g(b) - g(a) = g'(c)(b - a)$.

Así, al aplicar el teorema del valor medio a f como función de x, podemos asegurar que para alguna c entre x y x_0,

$$f(x, y, z) - f(x_0, y, z) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(c, y, z)\right](x - x_0).$$

Así, hallamos que

$$\begin{aligned}
\frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} &= \left[\frac{\partial f}{\partial x}(c, y(t), z(t))\right] \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0), d, z(t))\right] \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0} \\
&\quad + \left[\frac{\partial f}{\partial z}(x(t_0), y(t_0), e)\right] \frac{z(t) - z(t_0)}{t - t_0},
\end{aligned}$$

donde c, d y e están entre $x(t)$ y $x(t_0)$, entre $y(t)$ y $y(t_0)$, y entre $z(t)$ y $z(t_0)$, respectivamente. Al tomar el límite $t \to t_0$, usando la continuidad de las parciales $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ y $\partial f/\partial z$, y el hecho de que c, d y e convergen a $x(t_0)$, $y(t_0)$ y $z(t_0)$, respectivamente, obtenemos la fórmula (2). ■

SEGUNDO CASO ESPECIAL DE LA REGLA DE LA CADENA *Sean* $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ *y* $g\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$. *Escribir* $g(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$ *y definir* $h\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$

mediante $h(x,y,z) = f(u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z))$. *Entonces*

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial f}{\partial w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{3}$$

En este caso especial hemos tomado $n = m = 3$ y $p = 1$ para concretar, y $U = \mathbf{R}^3$ y $V = \mathbf{R}^3$ por facilidad, y hemos escrito explícitamente el producto matricial $[\mathbf{D}f(\mathbf{y}_0)][\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)]$ (suprimiendo de las matrices los argumentos $\mathbf{x}_0$ y $\mathbf{y}_0$).

DEMOSTRACIÓN DEL SEGUNDO CASO ESPECIAL DE LA REGLA DE LA CADENA Por definición, $\partial h/\partial x$ se obtiene diferenciando h respecto a x, manteniendo fijas y y z. Pero entonces $(u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z))$ se puede considerar como una función vectorial de la sola variable x. Se puede aplicar el primer caso especial a esta situación y, después de cambiar el nombre a las variables, obtenemos

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}. \tag{3'}$$

De manera análoga,

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}. \tag{3''}$$

y

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z}. \tag{3'''}$$

Estas ecuaciones son exactamente las que se obtendrían al multiplicar las matrices en la ecuación (3). ■

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 11 El caso general en la ecuación (1) se puede probar en dos pasos. Primero, se generaliza la ecuación (2) a m variables; esto es, para $f(x_1, \ldots, x_m)$ y $\mathbf{c}(t) = (x_1(t), \ldots, x_m(t))$, se tiene

$$\frac{dh}{dt} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt},$$

donde $h(t) = f(x_1(t), \ldots, x_m(t))$. Segundo, el resultado obtenido en el primer paso se usa para obtener la fórmula

$$\frac{\partial h_j}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_i},$$

donde $f = (f_1, \ldots, f_p)$ es una función vectorial de argumentos $y_1, \ldots, y_m$; $g(x_1, \ldots, x_n) = (y_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_m(x_1, \ldots, x_n))$; y $h_j(x_1, \ldots, x_n) = f_j(y_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_m(x_1, \ldots, x_n))$. (El uso de la letra y tanto para funciones como para argumentos es un abuso de notación, pero puede ayudar para recordar la fórmula.) Esta fórmula es equivalente a la fórmula (1) después de que se han multiplicado las matrices. ■

El patrón que sigue la regla de la cadena se aclarará apenas el estudiante trabaje algunos ejemplos adicionales. Por ejemplo,

$$\frac{\partial}{\partial x} f(u(x,y), v(x,y), w(x,y), z(x,y)) = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x},$$

con una fórmula similar para $\partial f/\partial y$.

La función $\mathbf{c}$ en el primer caso especial de la regla de la cadena representa una curva (figura 2.4.1), y $\mathbf{c}'(t)$ puede considerarse como un vector tangente (o vector velocidad) de la curva. Aunque esta idea se estudia con gran detalle en el capítulo 3, podemos indicar aquí el por qué de esta interpretación. Usando la definición de derivada de una función de una variable, vemos que

$$\mathbf{c}'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{c}(t+h) - \mathbf{c}(t)}{h}.$$

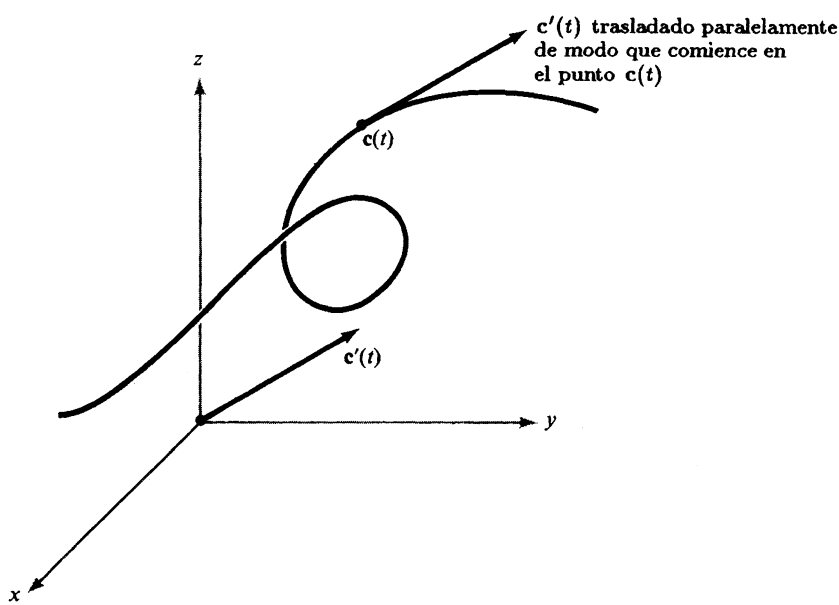


Figura 2.4.1 El vector $\mathbf{c}'(t)$ representa el vector tangente (o vector velocidad) de la curva $\mathbf{c}(t)$.

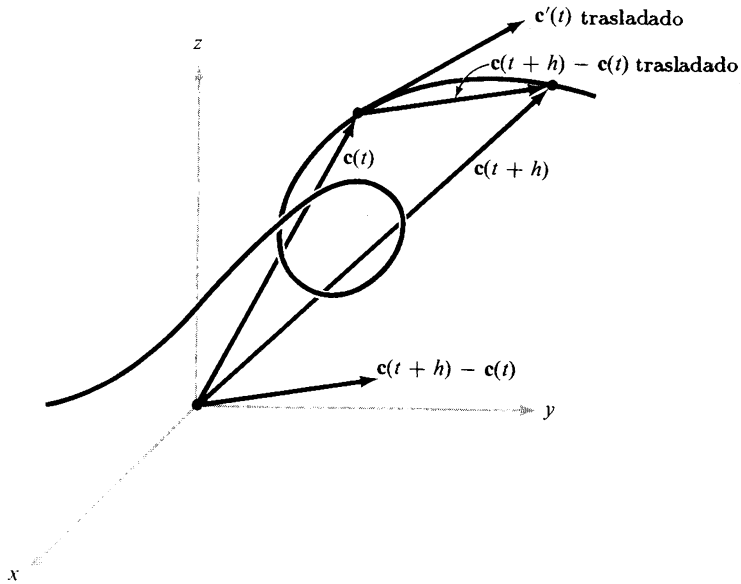


Figura 2.4.2 Geometría asociada con la fórmula límite$_{h\to 0}(\mathbf{c}(t+h)-\mathbf{c}(t))/h = \mathbf{c}'(t)$.

El cociente representa una secante que aproxima un vector tangente conforme $h \to 0$ (ver la figura 2.4.2).

EJEMPLO 2 *Calcular un vector tangente a la curva* $\mathbf{c}(t) = (t, t^2, e^t)$ *en* $t = 0$.

SOLUCIÓN Aquí $\mathbf{c}'(t) = (1, 2t, e^t)$, de modo que en $t = 0$ un vector tangente es $(1, 0, 1)$. ▲

La regla de la cadena nos puede ayudar a comprender la relación entre la geometría de una función $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ y la geometría de curvas en $\mathbf{R}^2$. (Se pueden enunciar afirmaciones similares acerca de $\mathbf{R}^3$ o, en general, $\mathbf{R}^n$.) Si $\mathbf{c}(t)$ es una curva en el plano, entonces $\mathbf{c}'(t)$ representa el vector tangente (o velocidad) de la curva $\mathbf{c}(t)$, y como se demostró en la figura 2.4.1, este vector tangente (o velocidad) se puede considerar como si comenzara en $\mathbf{c}(t)$. Ahora bien, sea $\boldsymbol{\sigma}(t) = f(\mathbf{c}(t))$, donde $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$. La curva $\boldsymbol{\sigma}$ representa la imagen de la curva $\mathbf{c}(t)$ bajo la función f. El vector tangente a $\boldsymbol{\sigma}$ está dado por la regla de la cadena:

$$\boldsymbol{\sigma}'(t) = \underbrace{\mathbf{D}f(\mathbf{c}(t))}_{\text{matriz}} \underbrace{\mathbf{c}'(t)}_{\text{vector columna}}$$

multiplicación de matrices

En otras palabras, *la matriz derivada de f manda al vector tangente (o velocidad) a una curva, al vector tangente (o velocidad) de la correspondiente curva imagen* (ver la figura 2.4.3). Así, los puntos son transportados por f, mientras que los vectores tangentes a curvas son transportados por la derivada de f, evaluada en el punto base del vector tangente en el dominio.

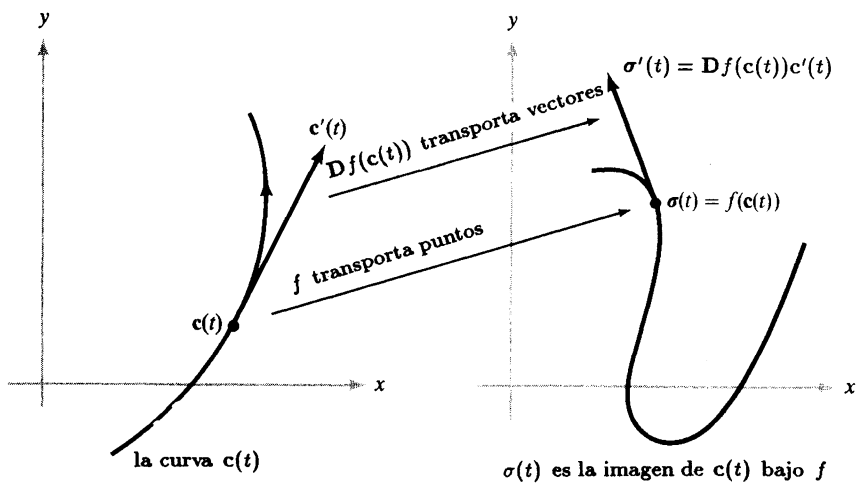


Figura 2.4.3 Los vectores tangentes son transportados por la matriz derivada.

EJEMPLO 3 *Verificar la regla de la cadena en la forma de la fórmula (3') para*

$$f(u, v, w) = u^2 + v^2 - w,$$

donde

$$u(x, y, z) = x^2 y, \qquad v(x, y, z) = y^2, \qquad w(x, y, z) = e^{-xz}.$$

SOLUCIÓN Aquí

$$\begin{aligned} h(x, y, z) &= f(u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)) \\ &= (x^2 y)^2 + y^4 - e^{-xz} = x^4 y^2 + y^4 - e^{-xz}. \end{aligned}$$

Así, diferenciando directamente,

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 4x^3 y^2 + z e^{-xz}$$

Por otro lado, usando la regla de la cadena,

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} = 2u(2xy) + 2v \cdot 0 + (-1)(ze^{-xz})$$
$$= (2x^2y)(2xy) + ze^{-xz},$$

que es lo mismo que se obtuvo anteriormente. ▲

EJEMPLO 4 *Dada $g(x,y) = (x^2+1, y^2)$ y $f(u,v) = (u+v, u, v^2)$, calcular la derivada de $f \circ g$ en $(1,1)$ usando la regla de la cadena.*

SOLUCIÓN Las matrices de derivadas parciales son

$$\mathbf{D}f(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2v \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{D}g(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{bmatrix}.$$

Cuando $(x,y) = (1,1)$, $g(x,y) = (u,v) = (2,1)$. Por lo tanto

$$\mathbf{D}(f \circ g)(1,1) = \mathbf{D}f(2,1)\mathbf{D}g(1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

es la derivada requerida. ▲

EJEMPLO 5 *Sea $f(x,y)$ dada y hacer la sustitución $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$ (coordenadas polares). Escribir una fórmula para $\partial f/\partial\theta$.*

SOLUCIÓN Por la regla de la cadena,

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

esto es,

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = -r\operatorname{sen}\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}. \quad ▲$$

EJEMPLO 6 *Sean $f(x,y) = (\cos y + x^2, e^{x+y})$ y $g(u,v) = (e^{u^2}, u - \operatorname{sen} v)$. (a) Escribir una fórmula para $f \circ g$. (b) Calcular $\mathbf{D}(f \circ g)(0,0)$ usando la regla de la cadena.*

SOLUCIÓN (a) Tenemos

$$\begin{aligned}(f \circ g)(u,v) &= f(e^{u^2}, u - \operatorname{sen} v)\\ &= (\cos(u - \operatorname{sen} v) + e^{2u^2}, e^{e^{u^2}+u-\operatorname{sen} v}).\end{aligned}$$

(b) Por la regla de la cadena,

$$\mathbf{D}(f \circ g)(0,0) = [\mathbf{D}f(g(0,0))][\mathbf{D}g(0,0)] = [\mathbf{D}f(1,0)][\mathbf{D}g(0,0)].$$

Ahora

$$\mathbf{D}g(0,0) = \begin{bmatrix} 2ue^{u^2} & 0 \\ 1 & -\cos v \end{bmatrix}_{(u,v)=(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{D}f(1,0) = \begin{bmatrix} 2x & -\operatorname{sen} y \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{bmatrix}_{(x,y)=(1,0)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ e & e \end{bmatrix}.$$

(¡Recordar que $\mathbf{D}f$ está evaluada en $g(0,0)$, no en $(0,0)$!) Así,

$$\mathbf{D}(f \circ g)(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ e & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ e & -e \end{bmatrix}. \qquad \blacktriangle$$

***EJEMPLO 7** *Sea $f: U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ diferenciable, con $f = (f_1, \ldots, f_m)$, y sea $g(\mathbf{x}) = \operatorname{sen}[f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x})]$. Calcular $\mathbf{D}g(\mathbf{x})$.*

SOLUCIÓN Por la regla de la cadena, $\mathbf{D}g(\mathbf{x}) = \cos[f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x})]\mathbf{D}h(\mathbf{x})$, donde $h(\mathbf{x}) = [f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x})] = f_1^2(\mathbf{x}) + \cdots + f_m^2(\mathbf{x})$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{D}h(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial h}{\partial x_n} \end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} 2f_1\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} + \cdots + 2f_m\dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & 2f_1\dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} + \cdots + 2f_m\dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix},\end{aligned}$$

que se puede escribir $2f(\mathbf{x})\mathbf{D}f(\mathbf{x})$, donde consideramos a f como una matriz renglón,

$$f = [f_1 \cdots f_m] \qquad \text{y} \qquad \mathbf{D}f = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Así $\mathbf{D}g(\mathbf{x}) = 2[\cos(f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x}))]f(\mathbf{x})\mathbf{D}f(\mathbf{x})$. $\blacktriangle$

EJERCICIOS

1. Si $f: U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ es diferenciable, probar que $\mathbf{x} \mapsto f^2(\mathbf{x}) + 2f(\mathbf{x})$ también es diferenciable, y calcular su derivada en términos de $\mathbf{D}f(\mathbf{x})$.

2. Probar que las siguientes funciones son diferenciables, y hallar sus derivadas en un punto arbitrario:

(a) $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, (x, y) \mapsto 2$
(b) $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, (x, y) \mapsto x + y$
(c) $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, (x, y) \mapsto 2 + x + y$
(d) $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, (x, y) \mapsto x^2 + y^2$
(e) $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, (x, y) \mapsto e^{xy}$
(f) $f: U \to \mathbf{R}, (x, y) \mapsto \sqrt{1 - x^2 - y^2}, U = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$
(g) $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, (x, y) \mapsto x^4 - y^4$

3. Escribir la regla de la cadena para cada una de las siguientes funciones y justificar la respuesta en cada caso usando el teorema 11.

(a) $\partial h/\partial x$ donde $h(x, y) = f(x, u(x, y))$
(b) dh/dx donde $h(x) = f(x, u(x), v(x))$
(c) $\partial h/\partial x$ donde $h(x, y, z) = f(u(x, y, z), v(x, y), w(x))$

4. Verificar la regla de la cadena para $\partial h/\partial x$ donde $h(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ y

$$f(u, v) = \frac{u^2 + v^2}{u^2 - v^2} \qquad u(x, y) = e^{-x-y}, \qquad v(x, y) = e^{xy}$$

5. Verificar el primer caso especial de la regla de la cadena para la composición $f \circ \mathbf{c}$ en cada uno de estos casos:

(a) $f(x, y) = xy, \mathbf{c}(t) = (e^t, \cos t)$
(b) $f(x, y) = e^{xy}, \mathbf{c}(t) = (3t^2, t^3)$
(c) $f(x, y) = (x^2 + y^2) \log \sqrt{x^2 + y^2}, \mathbf{c}(t) = (e^t, e^{-t})$
(d) $f(x, y) = x \exp(x^2 + y^2), \mathbf{c}(t) = (t, -t)$

6. ¿Cuál es el vector velocidad para cada curva $\mathbf{c}(t)$ en el ejercicio 5? (La solución a sólo la parte (b) está en la Guía de estudio de este libro.)

7. Sean $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ y $g: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ diferenciables. Probar que

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$$

8. Sea $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ diferenciable. Hacer las sustituciones

$$x = \rho \cos\theta \operatorname{sen}\phi, \qquad y = \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \qquad z = \rho \cos\phi$$

(coordenadas esféricas) en $f(x, y, z)$, y calcular $\partial f/\partial\rho$, $\partial f/\partial\theta$ y $\partial f/\partial\phi$.

9. Sean $f(u,v) = (\tan(u-1) - e^v, u^2 - v^2)$ y $g(x,y) = (e^{x-y}, x-y)$. Calcular $f \circ g$ y $\mathbf{D}(f \circ g)(1,1)$.

10. Sea $f(u,v,w) = (e^{u-w}, \cos(v+u) + \operatorname{sen}(u+v+w))$ y $g(x,y) = (e^x, \cos(y-x), e^{-y})$. Calcular $f \circ g$ y $\mathbf{D}(f \circ g)(0,0)$.

11. Encontrar $(\partial/\partial s)(f \circ T)(1,0)$, donde $f(u,v) = \cos u \operatorname{sen} v$ y $T(s,t) = (\cos(t^2 s), \log\sqrt{1+s^2})$.

12. Suponer que la temperatura en el punto (x,y,z) en el espacio es $T(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. Sea una partícula que viaja por la hélice circular recta $\sigma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ y sea $T(t)$ su temperatura en el tiempo t.

(a) ¿Cuál es $T'(t)$?

(b) Hallar un valor aproximado para la temperatura en $t = (\pi/2) + 0.01$.

13. Suponer que un pato está nadando en el círculo $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$ y que la temperatura del agua está dada por la fórmula $T = x^2 e^y - xy^3$. Hallar dT/dt, la tasa de cambio en temperatura que puede sentir el pato: (a) mediante la regla de la cadena; (b) expresando T en términos de t y diferenciando.

14. Sea $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ una transformación lineal de modo que (por el ejercicio 20, sección 2.3) $\mathbf{D}f(\mathbf{x})$ sea la matriz de f. Verificar la validez de la regla de la cadena directamente para transformaciones lineales.

15. Sea $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$; $(x,y) \mapsto (e^{x+y}, e^{x-y})$. Sea $\mathbf{c}(t)$ una curva con $\mathbf{c}(0) = (0,0)$ y $\mathbf{c}'(0) = (1,1)$. ¿Cuál es el vector tangente a la imagen de $\mathbf{c}(t)$ bajo f en $t = 0$?

16. Sea $f(x,y) = 1/\sqrt{x^2+y^2}$. Calcular $\nabla f(x,y)$.

17. (a) Sea $y(x)$ definida implícitamente por $G(x, y(x)) = 0$, donde G es una función dada de dos variables. Probar que si $y(x)$ y G son diferenciables, entonces

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial G/\partial x}{\partial G/\partial y} \quad \text{si} \quad \frac{\partial G}{\partial y} \neq 0.$$

(b) Obtener una fórmula análoga a la de la parte (a) si y_1, y_2 están definidas implícitamente mediante

$$G_1(x, y_1(x), y_2(x)) = 0,$$
$$G_2(x, y_1(x), y_2(x)) = 0.$$

(c) Sea y definida implícitamente por

$$x^2 + y^3 + e^y = 0.$$

Calcular dy/dx en términos de x y y.

18. Los libros sobre termodinámica usan la relación

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right) = -1.$$

Explicar el significado de esta ecuación y probar que es verdadera. (IDEA: Comenzar con una relación $F(x, y, z) = 0$ que define $x = f(y, z)$, $y = g(x, z)$ y $z = h(x, y)$ y diferenciar implícitamente.)

19. La ecuación de Dieterici del estado de un gas es

$$P(V - b)e^{a/RVT} = RT,$$

donde a, b y R son constantes. Considerar el volumen V como función de la temperatura T y de la presión P y probar que

$$\frac{\partial V}{\partial T} = \left(R + \frac{a}{TV}\right) \Big/ \left(\frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2}\right).$$

*20. Este ejercicio da otro ejemplo del hecho de que la regla de la cadena no es aplicable si f no es diferenciable. Considerar la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Mostrar que

(a) Existen $\partial f/\partial x(0, 0)$ y $\partial f/\partial y(0, 0)$.

(b) Si $\mathbf{g}(t) = (at, bt)$ para constantes a y b, entonces $f \circ \mathbf{g}$ es diferenciable y $(f \circ \mathbf{g})'(0) = ab^2/(a^2 + b^2)$ pero $\nabla f(0, 0) \cdot \mathbf{g}'(0) = 0$.

***21.** Probar que si $f: U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0 \in U$, existe una vecindad V de $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^n$ y una función $R_1: V \to \mathbf{R}$ tal que para todo $\mathbf{h} \in V$, $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h} \in U$,

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + [\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)]\mathbf{h} + R_1(\mathbf{h})$$

y

$$\frac{R_1(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad \mathbf{h} \to \mathbf{0}.$$

***22.** Suponer que $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ y $0 \leq r_1 < r_2$. Mostrar que existe una función C^1, $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ tal que $f(\mathbf{x}) = 0$ para $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \geq r_2$; $0 < f(\mathbf{x}) < 1$ para $r_1 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r_2$; y $f(\mathbf{x}) = 1$ para $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq r_1$. (IDEA: Aplicar un polinomio cúbico con $g(r_1^2) = 1$ y $g(r_2^2) = g'(r_2^2) = g'(r_1^2) = 0$ a $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2$ cuando $r_1 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r_2$.)

---

*Ver S. M. Binder, "Mathematical Methods in Elementary Thermodynamics," *J. Chem. Educ.* 43 (1966): 85–92. Una comprensión adecuada de la diferenciación parcial puede ser de gran utilidad en aplicaciones; ver, por ejemplo, M. Feinberg, "Constitutive Equation for Ideal Gas Mixtures and Ideal Solutions as Consequences of Simple Postulates," *Chem. Eng. Sci.* 32 (1977): 75–78.

***23.** Hallar una función C^1 $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ que lleve al vector $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ que sale del origen, a $\mathbf{i}-\mathbf{j}$ que sale de $(1,1,0)$ y que lleve a $\mathbf{k}$ que sale de $(1,1,0)$ a $\mathbf{k}-\mathbf{i}$ que sale del origen.

24. ¿Por qué está equivocado el siguiente argumento? Suponer que $w = f(x,y,z)$ y $z = g(x,y)$. Por la regla de la cadena,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}.$$

Por lo tanto

$$0 = \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x},$$

de modo que $\partial w/\partial z = 0$ o $\partial z/\partial x = 0$, lo cual es, en general, absurdo.

25. Suponer que $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ y $g\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ son diferenciables. Mostrar que la función producto $h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$ de $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^m$ es diferenciable y que si $\mathbf{x}_0$ y $\mathbf{y}$ están en $\mathbf{R}^n$, entonces $[\mathbf{D}h(\mathbf{x}_0)]\mathbf{y} = f(\mathbf{x}_0)\{[\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)]\mathbf{y}\} + \{[\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)]\mathbf{y}\}g(\mathbf{x}_0)$.

26. Mostrar que $h\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ es diferenciable si y sólo si cada una de las m funciones componentes $h_i\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ es diferenciable. (IDEA: Usar la función de proyección de coordenada y la regla de la cadena para una implicación y considerar $[\|h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x}_0) - \mathbf{D}h(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\|/\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|]^2 = \sum_{i=1}^m [h_i(\mathbf{x}) - h_i(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}h_i(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)]^2/\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|^2$ para obtener la otra.)

***27.** Usar la regla de la cadena para mostrar que

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^x f(x,y)\,dy = f(x,x) + \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy.$$

***28.** ¿Para cuáles enteros $p > 0$ es

$$f(x) = \begin{cases} x^p \operatorname{sen}(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

diferenciable? ¿Para cuál p es continua la derivada?

***29.** Probar las reglas (iii) y (iv) del teorema 10. (IDEA: Usar el mismo truco de suma y resta como en el caso de una variable y el teorema 8.)

2.5 GRADIENTES Y DERIVADAS DIRECCIONALES

En la sección 2.1 estudiamos las gráficas de las funciones con valores reales. Ahora retomaremos ese estudio usando los métodos del cálculo. Específicamente, usaremos gradientes para obtener una fórmula para el plano tangente a una superficie de nivel. Comencemos recordando cómo se define el gradiente.

DEFINICIÓN *Si $f: U \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ es diferenciable, el* ***gradiente*** *de f en (x, y, z) es el vector en el espacio $\mathbf{R}^3$ dado por*

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

Este vector también se denota por ∇f o $\nabla f(x, y, z)$. Así, ∇f es simplemente la matriz de las derivadas $\mathbf{D}f$, escrita como vector.

EJEMPLO 1 Sea $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r$, la distancia de $\mathbf{0}$ a (x, y, z). Entonces

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y, z) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \\ &= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) = \frac{\mathbf{r}}{r},\end{aligned}$$

donde $\mathbf{r}$ es el punto (x, y, z). Así, ∇f es el vector unitario en la dirección de (x, y, z). ▲

EJEMPLO 2 Si $f(x, y, z) = xy + z$, entonces

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (y, x, 1). \quad ▲$$

Suponer que $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ es una función con valores reales. Sean $\mathbf{v}$ y $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ vectores fijos y considerar la función de $\mathbf{R}$ a $\mathbf{R}$ definida por $t \mapsto f(\mathbf{x} + t\mathbf{v})$. El conjunto de puntos de la forma $\mathbf{x} + t\mathbf{v}$, $t \in \mathbf{R}$, es la recta L que pasa por el punto

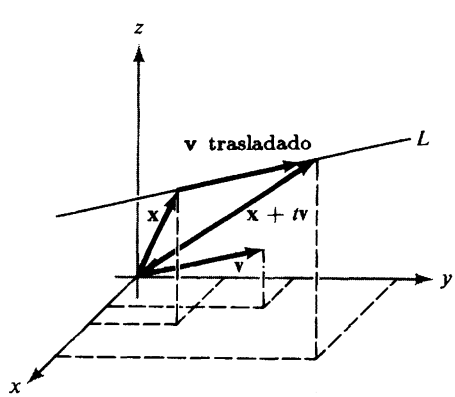


Figura 2.5.1 La ecuación de L es $\mathbf{l}(t) = \mathbf{x} + t\mathbf{v}$.

$\mathbf{x}$ paralela al vector $\mathbf{v}$ (ver la figura 2.5.1). Por lo tanto, la función $t \mapsto f(\mathbf{x}+t\mathbf{v})$ representa la función f restringida a la recta L. Podemos preguntar: ¿con qué rapidez están cambiando los valores de f a lo largo de la recta L en el punto $\mathbf{x}$? Como la razón de cambio de una función está dada por una derivada, podemos responder que es el valor de la derivada de esta función de t en $t = 0$ (cuando $t = 0$, $\mathbf{x} + t\mathbf{v}$ se reduce a $\mathbf{x}$). Esto debería ser la derivada de f en el punto $\mathbf{x}$ en la dirección de L, esto es, de $\mathbf{v}$. Podemos formalizar este concepto como sigue.

DEFINICIÓN *Si $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, la* ***derivada direccional*** *de f en $\mathbf{x}$ en la dirección de un vector $\mathbf{v}$ está dada por*

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{x} + t\mathbf{v})\bigg|_{t=0}$$

si es que existe.

De la definición, podemos ver que la derivada direccional también se puede definir por la fórmula

$$\operatorname*{límite}_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x})}{h}.$$

TEOREMA 12 *Si $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ es diferenciable, entonces existen todas las derivadas direccionales. La derivada direccional en $\mathbf{x}$ en la dirección $\mathbf{v}$ está dada por*

$$\begin{aligned} \mathbf{D}f(\mathbf{x})\mathbf{v} &= \operatorname{grad} f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x})\right] v_1 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x})\right] v_2 + \left[\frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{x})\right] v_3, \end{aligned}$$

donde $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

DEMOSTRACIÓN Sea $\mathbf{c}(t) = \mathbf{x} + t\mathbf{v}$, de manera que $f(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) = f(\mathbf{c}(t))$. Por el primer caso especial de la regla de la cadena, $(d/dt)f(\mathbf{c}(t)) = \nabla f(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t)$. Sin embargo, $\mathbf{c}(0) = \mathbf{x}$ y $\mathbf{c}'(0) = \mathbf{v}$, y entonces

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{x} + t\mathbf{v})\bigg|_{t=0} = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v},$$

como se pidió demostrar. ■

En la definición de derivada direccional, con frecuencia se escoge a $\mathbf{v}$ como un vector *unitario*. Hay dos razones para ello. La primera es que si α es cualquier número real positivo, $\alpha\mathbf{v}$ es un vector que apunta en la misma dirección que

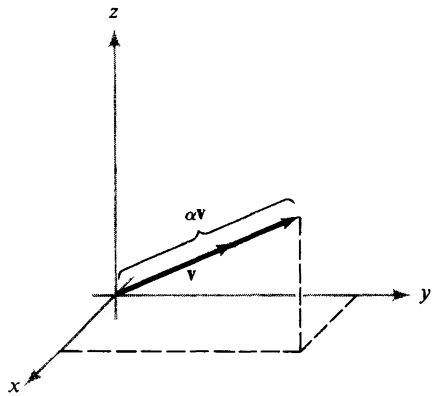


Figura 2.5.2 Al multiplicar un vector $\mathbf{v}$ por un escalar α, se altera la longitud de $\mathbf{v}$.

$\mathbf{v}$, pero puede ser más largo (si $\alpha > 1$) o más corto que $\mathbf{v}$ (si $\alpha < 1$) (ver la figura 2.5.2). Por el teorema 12, la derivada direccional de f en la dirección $\mathbf{v}$ es

$$\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x})\right] v_1 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x})\right] v_2 + \left[\frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{x})\right] v_3.$$

La derivada de f "en la dirección" $\alpha\mathbf{v}$ es $[\nabla f(\mathbf{x})] \cdot [\alpha\mathbf{v}] = \alpha[\nabla f(\mathbf{x})] \cdot \mathbf{v}$, que es α por la derivada direccional en la dirección $\mathbf{v}$, y por lo tanto no es igual a ella. Por lo tanto la derivada direccional, si está definida para *todo* $\alpha\mathbf{v}$, no depende sólo de un punto $\mathbf{x}$ y una dirección. Para resolver este problema *podemos requerir que el vector* $\mathbf{v}$ *sea de longitud* 1. Entonces el vector $\mathbf{v}$ determina una dirección, la misma dirección determinada por $\alpha\mathbf{v}$ si $\alpha > 0$, pero ahora la derivada direccional está definida de manera *única* por $\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}$.

La segunda razón es que podemos interpretar $\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}$ como la tasa de cambio de f en la dirección $\mathbf{v}$, pues cuando $\|\mathbf{v}\| = 1$, el punto $\mathbf{x} + t\mathbf{v}$ se mueve una distancia s cuando t se incrementa en s; así, realmente hemos escogido una escala en L de la figura 2.5.1.

Nótese que no es necesario usar líneas rectas para calcular la tasa de cambio de f a lo largo de una trayectoria $\boldsymbol{\sigma}(t)$. En efecto, por la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dt} f(\boldsymbol{\sigma}(t)) = \nabla f(\boldsymbol{\sigma}(t)) \cdot \boldsymbol{\sigma}'(t),$$

que es la derivada de f en la dirección $\boldsymbol{\sigma}'(t)$.

EJEMPLO 3 *Sea* $f(x, y, z) = x^2 e^{-yz}$. *Calcular la tasa de cambio de* f *en la dirección del vector unitario*

$$\mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \qquad \text{en} \qquad (1, 0, 0).$$

SOLUCIÓN La tasa de cambio requerida es, usando el teorema 12,

$$\operatorname{grad} f \cdot \mathbf{v} = (2xe^{-yz}, -x^2ze^{-yz}, -x^2ye^{-yz}) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

que en $(1,0,0)$ se convierte en

$$(2,0,0) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}. \quad \blacktriangle$$

Del teorema 12 también podemos obtener el significado geométrico del gradiente:

TEOREMA 13 *Suponer que* $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$. *Entonces* $\operatorname{grad} f(\mathbf{x})$ *apunta en la dirección a lo largo de la cual* f *crece más rápido.*

DEMOSTRACIÓN Si $\mathbf{n}$ es un vector unitario, la tasa de cambio de f en la dirección $\mathbf{n}$ es $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = \|\operatorname{grad} f(\mathbf{x})\| \cos\theta$, donde θ es el ángulo entre $\mathbf{n}$ y $\operatorname{grad} f(\mathbf{x})$. Éste es máximo cuando $\theta = 0$; esto es, cuando $\mathbf{n}$ y $\operatorname{grad} f$ son paralelos. (Si $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ esta tasa de cambio es 0 para cualquier $\mathbf{n}$.) ■

En otras palabras, si queremos movernos en una dirección en la cual f va a crecer más rápidamente, debemos proceder en la dirección $\nabla f(\mathbf{x})$. Análogamente, si deseamos movernos en una dirección en la cual f decrece más rápido, deberemos proceder en la dirección $-\nabla f(\mathbf{x})$.

EJEMPLO 4 *¿En qué dirección desde* $(0,1)$, *crece más rápido* $f(x,y) = x^2 - y^2$*?*

SOLUCIÓN El gradiente es

$$\nabla f = 2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j},$$

de modo que en $(0,1)$ esto es

$$\nabla f|_{(0,1)} = -2\mathbf{j}.$$

Por el teorema 13, f crece más rápido en la dirección $-\mathbf{j}$. (¿Pueden ver por qué esta respuesta es consistente con la figura 2.1.9?) $\blacktriangle$

Ahora veremos la relación entre el gradiente de una función f y sus superficies de nivel. El gradiente apunta en la dirección en la que los valores de f cambian más rápidamente, mientras que una superficie de nivel está en las direcciones en las que esos valores no cambian. Si f es suficientemente bien portada, el gradiente y la superficie de nivel serán perpendiculares.

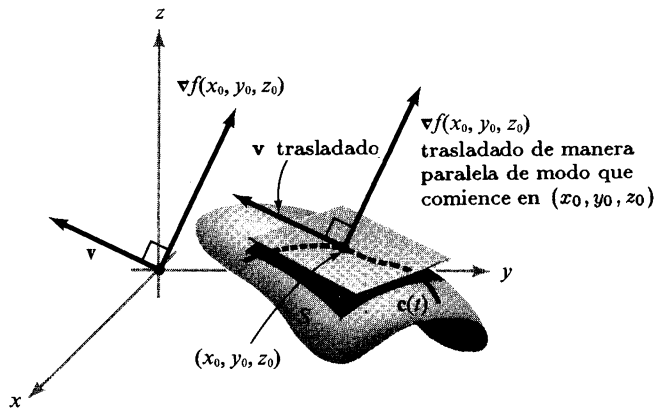


Figura 2.5.3 Significado geométrico del gradiente: ∇f es ortogonal a la superficie S en la cual f es constante.

TEOREMA 14 *Sean $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ una función C^1 y (x_0, y_0, z_0) un punto en la superficie de nivel S definida por $f(x, y, z) = k$, para k constante. Entonces* $\operatorname{grad} f(x_0, y_0, z_0)$ *es normal a la superficie de nivel en el sentido siguiente: Si* $\mathbf{v}$ *es el vector tangente en $t = 0$ de una trayectoria $\mathbf{c}(t)$ en S con $\mathbf{c}(0) = (x_0, y_0, z_0)$, entonces* $(\operatorname{grad} f) \cdot \mathbf{v} = 0$ *(ver la figura 2.5.3).*

DEMOSTRACIÓN Sea $\mathbf{c}(t)$ en S; entonces $f(\mathbf{c}(t)) = k$. Sea $\mathbf{v}$ como en la hipótesis; entonces $\mathbf{v} = \mathbf{c}'(0)$. Así, el hecho de que $f(\mathbf{c}(t))$ es constante en t y la regla de la cadena dan

$$0 = \frac{d}{dt} f(\mathbf{c}(t))\bigg|_{t=0} = \nabla f(\mathbf{c}(0)) \cdot \mathbf{v}. \qquad \blacksquare$$

Si estudiamos la conclusión del teorema 14 vemos que es razonable *definir* el plano tangente a S como sigue:

DEFINICIÓN *Sea S la superficie formada por los puntos (x, y, z) tales que $f(x, y, z) = k$, para k constante. El* **plano tangente** *de S en un punto (x_0, y_0, z_0) de S está definido por la ecuación*

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 \tag{1}$$

si $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$. Esto es, el plano tangente es el conjunto de puntos (x, y, z) que satisfacen la ecuación (1).

Esto extiende la definición que dimos antes para el plano tangente a la gráfica de una función (ver el ejercicio 11 al final de esta sección).

EJEMPLO 5 *Calcular la ecuación del plano tangente a la superficie definida por* $3xy + z^2 = 4$ *en* $(1, 1, 1)$.

SOLUCIÓN Aquí $f(x, y, z) = 3xy + z^2$ y $\nabla f = (3y, 3x, 2z)$, que en $(1, 1, 1)$ es el vector $(3, 3, 2)$. Así, el plano tangente es

$$(3, 3, 2) \cdot (x - 1, y - 1, z - 1) = 0$$
$$3x + 3y + 2z = 8. \quad \blacktriangle$$

En el teorema 14 y en la definición anterior pudimos haber trabajado tanto en dos dimensiones como en tres. Así, si tenemos $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ y consideramos una curva de nivel

$$C = \{(x, y) | f(x, y) = k\},$$

entonces $\nabla f(x_0, y_0)$ es perpendicular a C para cualquier punto (x_0, y_0) en C. Asimismo, la recta tangente a C en (x_0, y_0) tiene la ecuación

$$\nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0 \tag{2}$$

si $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$; esto es, la recta tangente es el conjunto de puntos (x, y) que satisfacen la ecuación (2) (ver la figura 2.5.4).

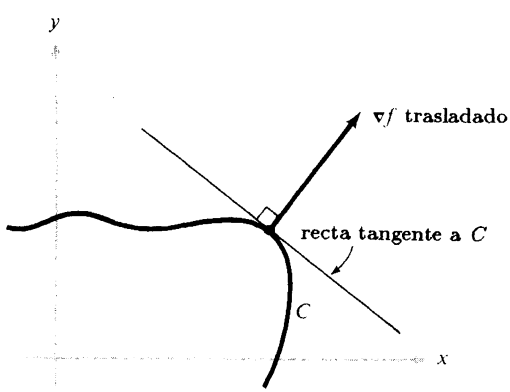


Figura 2.5.4 En el plano, el gradiente ∇f es ortogonal a la curva $f =$ constante.

Con frecuencia nos referimos a ∇f como *campo vectorial gradiente*. Nótese que ∇f asigna un vector a cada punto en el dominio de f. En la figura 2.5.5 no describimos la función ∇f trazando su gráfica, que sería un subconjunto de $\mathbf{R}^6$, esto es, el conjunto de elementos $(\mathbf{x}, \nabla f(\mathbf{x}))$, sino representando a $\nabla f(\mathrm{P})$, para cada punto P, como un vector que sale del punto P en lugar del origen. Como en una gráfica, este método pictórico de describir ∇f contiene al punto P y al valor $\nabla f(\mathrm{P})$ en la misma ilustración.

El campo vectorial gradiente tiene un importante significado geométrico. Muestra la dirección en la cual f crece más rápido y la dirección que es ortogonal a las

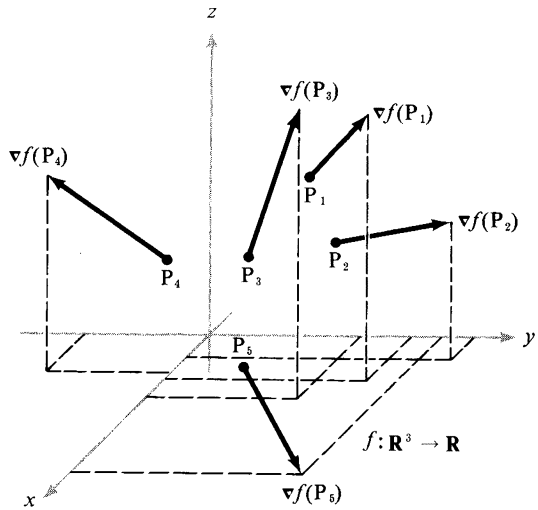


Figura 2.5.5 El gradiente ∇f de una función $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ es un campo vectorial en $\mathbf{R}^3$; en cada punto P_i, $\nabla f(P_i)$ es un vector que sale de P_i.

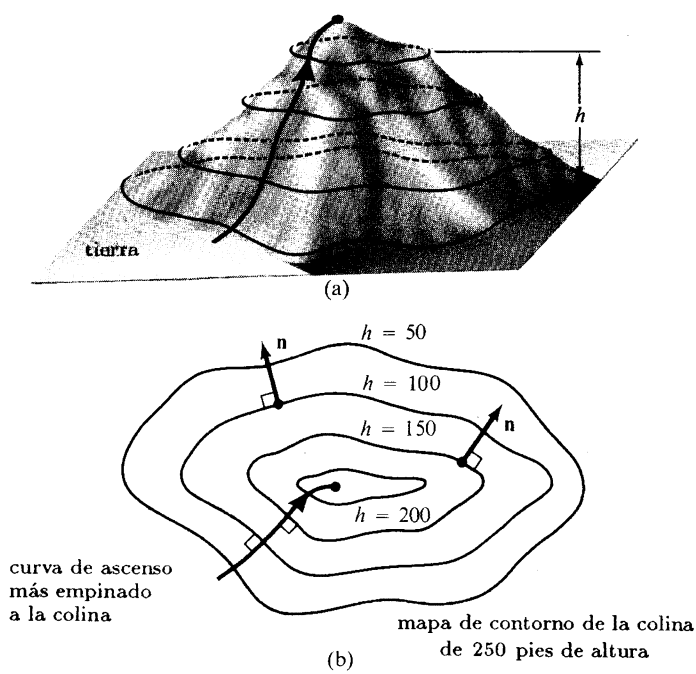


Figura 2.5.6 Ilustración física de dos hechos (a) ∇f es la dirección de más rápido crecimiento de f y (b) ∇f es ortogonal a las curvas de nivel.

superficies (o curvas en el plano) de nivel de f. Es plausible que haga ambas cosas. Para verlo, imaginen una colina como la que se muestra en la figura 2.5.6(a). Sea h la función de altura, una función de dos variables. Si trazamos curvas de nivel de h, serán simplemente los contornos de nivel de la colina. Las podemos imaginar como trayectorias de nivel sobre la colina (ver la figura 2.5.6(b)). Una cosa será obvia para cualquiera que haya emprendido la caminata: para llegar más rápido a la cima de la colina se deberá caminar perpendicular a los contornos de nivel. Esto es consistente con los teoremas 13 y 14, que aseguran que la dirección de crecimiento más rápido (el gradiente) es ortogonal a las curvas de nivel.

EJEMPLO 6 La fuerza gravitacional sobre una masa unitaria m en (x, y, z) producida por una masa M en el origen en $\mathbf{R}^3$, de acuerdo con la ley de gravitación de Newton, está dada por

$$\mathbf{F} = -\frac{GmM}{r^2}\mathbf{n},$$

donde G es una constante; $r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ es la distancia de (x, y, z) al origen; y $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ el vector unitario en la dirección de $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, que es el vector de posición del origen a (x, y, z).

Notar que $\mathbf{F} = \nabla(GmM/r) = -\nabla V$, esto es, $\mathbf{F}$ es el negativo del gradiente del potencial gravitacional $V = -GmM/r$. Esto puede verificarse como en el ejemplo 1. Nótese que $\mathbf{F}$ está dirigido hacia adentro, hacia el origen. Además, las superficies de nivel de V son esferas. $\mathbf{F}$ es normal a estas esferas, lo cual confirma el resultado del teorema 14. ▲

EJEMPLO 7 *Hallar un vector unitario normal a la superficie S dada por $z = x^2y^2 + y + 1$ en el punto $(0, 0, 1)$.*

SOLUCIÓN Sea $f(x, y, z) = x^2y^2 + y + 1 - z$, y considerar la superficie definida por $f(x, y, z) = 0$. Como éste es el conjunto de puntos (x, y, z) con $z = x^2y^2 + y + 1$, vemos que es la superficie S. El gradiente está dado por

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y, z) &= \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k} \\ &= 2xy^2\mathbf{i} + (2x^2y + 1)\mathbf{j} - \mathbf{k},\end{aligned}$$

y así,

$$\nabla f(0, 0, 1) = \mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Este vector es perpendicular a S en $(0, 0, 1)$ y, para hallar una normal unitaria $\mathbf{n}$, dividimos este vector entre su longitud para obtener

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla f(0, 0, 1)}{\|\nabla f(0, 0, 1)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{j} - \mathbf{k}). \quad ▲$$

EJEMPLO 8 Considerar dos conductores, uno con carga positiva y el otro negativa. Entre ellos se instala un potencial eléctrico. Este potencial es una función $\phi: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$. El campo eléctrico está dado por $\mathbf{E} = -\nabla\phi$. Por el teorema 14 sabemos que $\mathbf{E}$ es perpendicular a las superficies de nivel de ϕ. Estas superficies de nivel se llaman *superficies equipotenciales*, pues en ellas el potencial es constante (ver la figura 2.5.7). ▲

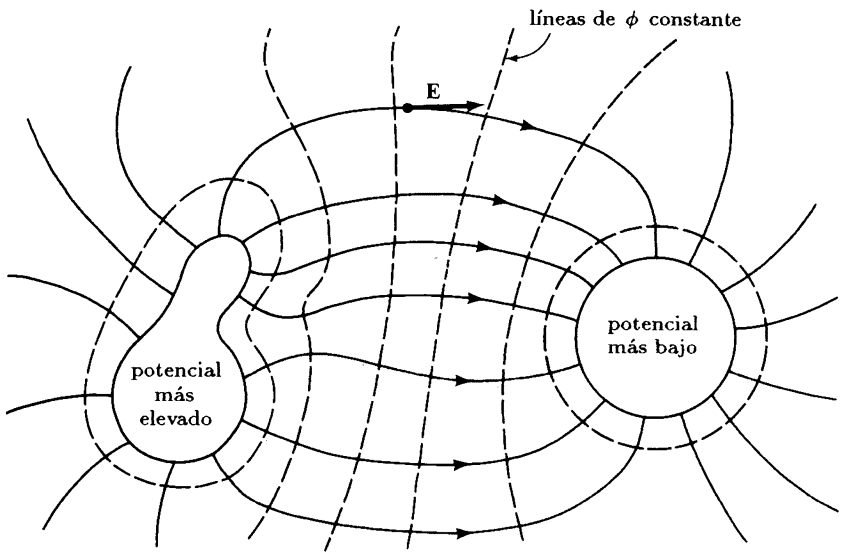


Figura 2.5.7 Las superficies equipotenciales son ortogonales al campo de fuerza eléctrico $\mathbf{E}$.

EJERCICIOS

1. Mostrar que la derivada direccional de $f(x, y, z) = z^2x + y^3$ en $(1, 1, 2)$ en la dirección $(1/\sqrt{5})\mathbf{i} + (2/\sqrt{5})\mathbf{j}$ es $2\sqrt{5}$.

2. Calcular las derivadas direccionales de las siguientes funciones en los puntos indicados en las direcciones dadas:

(a) $f(x, y) = x + 2xy - 3y^2$, $(x_0, y_0) = (1, 2)$, $\mathbf{v} = \frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}$

(b) $f(x, y) = \log\sqrt{x^2 + y^2}$, $(x_0, y_0) = (1, 0)$, $\mathbf{v} = (1/\sqrt{5})(2\mathbf{i} + \mathbf{j})$

(c) $f(x, y) = e^x \cos(\pi y)$, $(x_0, y_0) = (0, -1)$, $\mathbf{v} = -(1/\sqrt{5})\mathbf{i} + (2/\sqrt{5})\mathbf{j}$

(d) $f(x, y) = xy^2 + x^3y$, $(x_0, y_0) = (4, -2)$, $\mathbf{v} = (1/\sqrt{10})\mathbf{i} + (3/\sqrt{10})\mathbf{j}$

3. Calcular las derivadas direccionales de las siguientes funciones a lo largo de vectores unitarios en los puntos indicados en las direcciones *paralelas* al vector dado:

(a) $f(x, y) = x^y$, $(x_0, y_0) = (e, e)$, $\mathbf{d} = 5\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$

(b) $f(x, y, z) = e^x + yz$, $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$, $\mathbf{d} = (1, -1, 1)$

(c) $f(x, y, z) = xyz$, $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, 1)$, $\mathbf{d} = (1, 0, -1)$

4. Hallar los planos tangentes a las siguientes superficies en los puntos indicados:
(a) $x^2 + 2y^2 + 3xz = 10$, $(1, 2, \frac{1}{3})$
(b) $y^2 - x^2 = 3$, $(1, 2, 8)$
(c) $xyz = 1$, $(1, 1, 1)$

5. Hallar la ecuación para el plano tangente a cada superficie $z = f(x, y)$ en el punto indicado:
(a) $z = x^3 + y^3 - 6xy$, $(1, 2, -3)$
(b) $z = (\cos x)(\cos y)$, $(0, \pi/2, 0)$
(c) $z = (\cos x)(\operatorname{sen} y)$, $(0, \pi/2, 1)$

6. Calcular el gradiente ∇f para cada una de las funciones siguientes:
(a) $f(x, y, z) = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
(b) $f(x, y, z) = xy + yz + xz$
(c) $f(x, y, z) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$

7. Para las funciones en el ejercicio 6, ¿cuál es la dirección de más rápido crecimiento en $(1, 1, 1)$? (La solución sólo a la parte (c) está en la Guía de estudio de este libro.)

8. Mostrar que una normal unitaria a la superficie $x^3y^3 + y - z + 2 = 0$ en $(0, 0, 2)$ está dada por $\mathbf{n} = (1/\sqrt{2})(\mathbf{j} - \mathbf{k})$.

9. Hallar una normal unitaria a la superficie $\cos(xy) = e^z - 2$ en $(1, \pi, 0)$.

10. Verificar los teoremas 13 y 14 para $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

11. Mostrar que la definición que sigue al teorema 14 produce, como caso especial, la fórmula para el plano tangente a la gráfica de $f(x, y)$ considerando a la gráfica como una superficie de nivel de $F(x, y, z) = f(x, y) - z$ (ver la sección 2.3).

12. Sea $f(x, y) = -(1 - x^2 - y^2)^{1/2}$ para (x, y) tal que $x^2 + y^2 < 1$. Mostrar que el plano tangente a la gráfica de f en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ es ortogonal al vector con componentes $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Interpretar esto geométricamente.

13. Para las siguientes funciones $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ y $\mathbf{g}\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$, hallar ∇f y $\mathbf{g}'$ y evaluar $(f \circ \mathbf{g})'(1)$.
(a) $f(x, y, z) = xz + yz + xy$, $\mathbf{g}(t) = (e^t, \cos t, \operatorname{sen} t)$
(b) $f(x, y, z) = e^{xyz}$, $\mathbf{g}(t) = (6t, 3t^2, t^3)$
(c) $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2) \log \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\mathbf{g}(t) = (e^t, e^{-t}, t)$

14. Calcular la derivada direccional de f en las direcciones dadas $\mathbf{v}$ en los puntos dados P.
(a) $f(x, y, z) = xy^2 + y^2z^3 + z^3x$, $P = (4, -2, -1)$, $\mathbf{v} = 1/\sqrt{14}(\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$
(b) $f(x, y, z) = x^{yz}$, $P = (e, e, 0)$, $\mathbf{v} = \frac{12}{13}\mathbf{i} + \frac{3}{13}\mathbf{j} + \frac{4}{13}\mathbf{k}$

15. Sea $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y $r = \|\mathbf{r}\|$. Probar que

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

16. El capitán Ralph tiene dificultades cerca del lado soleado de Mercurio. La temperatura del casco de la nave, cuando él está en la posición (x, y, z) estará dada por $T(x, y, z) = e^{-x^2-2y^2-3z^2}$, donde x, y y z están medidas en metros. Actualmente él está en $(1, 1, 1)$.

(a) ¿En qué dirección deberá avanzar para disminuir más rápido la temperatura?

(b) Si la nave viaja a e^8 metros por segundo, ¿con qué rapidez decrecerá la temperatura si avanza en esa dirección?

(c) Desafortunadamente, el metal del casco se cuarteará si se enfría a una tasa mayor que $\sqrt{14}e^2$ grados por segundo. Describir el conjunto de las direcciones posibles en las que puede avanzar para bajar la temperatura a una tasa no mayor que ésa.

17. Una función $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ es independiente de la segunda variable si y sólo si existe una función $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tal que $f(x, y) = g(x)$ para todo x en $\mathbf{R}$. En este caso, calcular ∇f en términos de g'.

18. Sean f y g funciones de $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}$. Suponer que f es diferenciable y $\nabla f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})\mathbf{x}$. Mostrar que las esferas con centro en el origen están contenidas en los conjuntos de nivel para f; esto es, f es constante en dichas esferas.

19. Una función $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ se llama una función *par* si $f(\mathbf{x}) = f(-\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x}$ en $\mathbf{R}^n$. Si f es diferenciable y par, hallar $\mathbf{D}f$ en el origen.

20. Suponer que una montaña tiene forma de un paraboloide elíptico $z = c - ax^2 - by^2$, donde a, b y c son constantes positivas, x y y son las coordenadas este-oeste y norte-sur, y z es la altitud sobre el nivel del mar (x, y y z están medidas en metros). En el punto $(1, 1)$, ¿en qué dirección está aumentando más rápido la altitud? Si se suelta una canica en $(1, 1)$, ¿en qué dirección comenzará a rodar?

21. Un ingeniero desea construir un ferrocarril que suba la montaña del ejercicio 20. Subir directo la montaña es demasiado empinado para la fuerza de las máquinas. En el punto $(1, 1)$, ¿en qué direcciones se puede colocar la vía de modo que suba un 3% —esto es, un ángulo cuya tangente sea 0.03? (Hay dos posibilidades.) Hacer un esbozo de la situación indicando las dos direcciones posibles para una inclinación del 3% en $(1, 1)$.

22. En electroestática, la fuerza $\mathbf{P}$ de atracción entre dos partículas de carga opuesta está dada por $\mathbf{P} = k(\mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|^3)$ (*ley de Coulomb*), donde k es una constante y $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Mostrar que $\mathbf{P}$ es el gradiente de $f = -k/\|\mathbf{r}\|$.

23. El potencial V debido a dos filamentos de carga paralelos infinitos de densidades lineales λ y $-\lambda$ es $V = (\lambda/2\pi\varepsilon_0)\ln(r_2/r_1)$, donde $r_1^2 = (x-x_0)^2+y^2$ y $r_2^2 = (x+x_0)^2+y^2$. Consideramos a los filamentos en la dirección z, pasando por el plano xy en $(-x_0, 0)$ y $(x_0, 0)$. Hallar $\nabla V(x, y)$.

24. Para cada una de las siguientes, hallar los valores máximo y mínimo alcanzados por la función f a lo largo de curva $\boldsymbol{\sigma}(t)$:

(a) $f(x,y) = xy$; $\boldsymbol{\sigma}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$; $0 \le t \le 2\pi$.

(b) $f(x,y) = x^2 + y^2$; $\boldsymbol{\sigma}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$; $0 \le t \le 2\pi$.

25. Suponer que una partícula se lanza desde la superficie $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ en el punto $(1, 1, \sqrt{3})$ en una dirección normal a la superficie en el tiempo $t = 0$ con una rapidez de 10 unidades por segundo. ¿Cuándo y dónde cruza el plano xy?

***26.** Sea $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ y considerar a $\mathbf{D}f(x,y,z)$ como una transformación lineal de $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}$. Mostrar que el kernel (o espacio nulo —el conjunto de vectores enviados al cero—) de $\mathbf{D}f$ es el subespacio lineal de $\mathbf{R}^3$ ortogonal a ∇f.

2.6 DERIVADAS PARCIALES ITERADAS

En las secciones anteriores se desarrolló información considerable acerca de la derivada de una función y se investigó la geometría asociada con la derivada de funciones con valores reales mediante el uso del gradiente. En esta sección procederemos a estudiar derivadas de orden superior, aunque volveremos a ellas en el capítulo 4. El objetivo principal de esta sección es probar un teorema que asegura la igualdad de las "segundas derivadas parciales mixtas" de una función. Comenzaremos definiendo los términos necesarios.

Sea $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ de clase C^1. Recordar que esto significa que $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ y $\partial f/\partial z$ existen y son continuas; y la existencia de derivadas parciales continuas implica que f es diferenciable (teorema 9). Si estas derivadas, a su vez, tienen derivadas parciales continuas, decimos que f es de *clase* C^2, o que es *dos veces continuamente diferenciable*. Asimismo, si decimos que f es de clase C^3, significa que f tiene derivadas parciales iteradas continuas de tercer orden, y así sucesivamente. A continuación, unos ejemplos de cómo se escriben estas derivadas de orden superior:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad \text{etc.}$$

Por supuesto que el proceso puede repetirse para las derivadas de tercer orden y así sucesivamente. Si f es una función de sólo x y y y $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ son continuamente diferenciables, al tomar las segundas derivadas parciales, obtenemos las cuatro funciones

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Todas éstas se llaman *derivadas parciales iteradas*, mientras que $\partial^2 f/\partial x \partial y$ y $\partial^2 f/\partial y \partial x$ se llaman *derivadas parciales mixtas*.

EJEMPLO 1 *Hallar las segundas derivadas parciales de* $f(x,y) = xy + (x+2y)^2$.

SOLUCIÓN

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + 2(x+2y), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x + 4(x+2y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 8$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 5, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 5. \qquad \blacktriangle$$

EJEMPLO 2 *Hallar las segundas derivadas parciales de* $f(x,y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen}^2 y$.

SOLUCIÓN

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x \operatorname{sen}^2 y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \cos y = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2y;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\operatorname{sen} x \operatorname{sen}^2 y, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \operatorname{sen} x \cos 2y;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \cos x \operatorname{sen} 2y, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2 \cos x \operatorname{sen} y \cos y = \cos x \operatorname{sen} 2y. \qquad \blacktriangle$$

EJEMPLO 3 Sea $f(x,y,z) = e^{xy} + z \cos x$. Entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy} - z \operatorname{sen} x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = \cos x,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = -\operatorname{sen} x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = -\operatorname{sen} x, \quad \text{etc.} \qquad \blacktriangle$$

En todos estos ejemplos nótese que los pares de derivadas parciales mixtas tales como $\partial^2 f/\partial x \partial y$ y $\partial^2 f/\partial y \partial x$, o $\partial^2 f/\partial z \partial x$ y $\partial^2 f/\partial x \partial z$ son iguales. Es un hecho básico y quizá sorprendente el que por lo general así suceda. Lo probaremos en el siguiente teorema para funciones $f(x,y)$ de dos variables, pero la demostración se puede extender con facilidad a funciones de n variables.

TEOREMA 15 *Si* $f(x,y)$ *es de clase* C^2 *(es dos veces continuamente diferenciable), entonces las derivadas parciales mixtas son iguales; esto es,*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

DEMOSTRACIÓN Considerar la siguiente expresión:

$$S(\Delta x, \Delta y) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0).$$

Manteniendo y_0 y Δy fijos, definir

$$g(x) = f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0),$$

de modo que $S(\Delta x, \Delta y) = g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)$, *lo cual expresa S como una diferencia de diferencias.* Por el teorema del valor medio para funciones de una variable, esto es igual a $g'(\overline{x})\Delta x$ para alguna $\overline{x}$ entre x_0 y $x_0 + \Delta x$. De aquí,

$$S(\Delta x, \Delta y) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}, y_0 + \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}, y_0)\right] \Delta x.$$

Aplicando nuevamente el teorema del valor medio,

$$S(\Delta x, \Delta y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\overline{x}, \overline{y})\Delta x \Delta y.$$

Como $\partial^2 f / \partial y \partial x$ es continua, se sigue que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \underset{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)}{\text{límite}} \frac{1}{\Delta x \Delta y}[S(\Delta x, \Delta y)].$$

De manera análoga, se muestra que $\partial^2 f / \partial x \partial y$ está dada por la misma fórmula de límite, lo cual prueba el resultado. ■

Fue Leonhard Euler, en 1734, quien probó por primera vez este teorema, en relación con sus estudios de hidrodinámica.

En el ejercicio 7 pedimos al lector que muestre que para una función C^3, de x, y y z,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial x}, \qquad \text{etc.}$$

En otras palabras, podemos calcular derivadas parciales iteradas en el orden que nos plazca.

EJEMPLO 4 *Verificar la igualdad de las segundas derivadas parciales mixtas para la función*

$$f(x, y) = xe^y + yx^2.$$

SOLUCIÓN Aquí

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^y + 2xy, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^y + x^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = e^y + 2x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^y + 2x,$$

y por lo tanto tenemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}. \qquad \blacktriangle$$

A veces se usa la notación f_x, f_y, f_z para las derivadas parciales $f_x = \partial f/\partial x$, etc. Con esta notación, escribimos $f_{xy} = (f_x)_y$, de manera que la igualdad de las derivadas parciales mixtas se denota por $f_{xy} = f_{yx}$. Nótese que $f_{xy} = \partial^2 f/\partial y \partial x$, de manera que se invierte el orden de x y y en las dos notaciones; afortunadamente, la igualdad de las parciales mixtas hace irrelevante esta potencial ambigüedad.

EJEMPLO 5 *Sea $z = f(x,y) = e^x \operatorname{sen} xy$ y escribir $x = g(s,t)$, $y = h(s,t)$ para funciones g y h. Sea $k(s,t) = f(g(s,t), h(s,t))$. Calcular k_{st} usando la regla de la cadena.*

SOLUCIÓN Por la regla de la cadena,

$$k_s = f_x g_s + f_y h_s = (e^x \operatorname{sen} xy + ye^x \cos xy)g_s + (xe^x \cos xy)h_s.$$

Al diferenciar respecto a t se tiene

$$k_{st} = (f_x)_t g_s + f_x (g_s)_t + (f_y)_t h_s + f_y (h_s)_t$$

Aplicando la regla de la cadena a $(f_x)_t$ y a $(f_y)_t$ se obtiene

$$(f_x)_t = f_{xx} g_t + f_{xy} h_t \qquad \text{y} \qquad (f_y)_t = f_{yx} g_t + f_{yy} h_t$$

por lo tanto, k_{st} se vuelve

$$\begin{aligned} k_{st} &= (f_{xx} g_t + f_{xy} h_t) g_s + f_x g_{st} + (f_{yx} g_t + f_{yy} h_t) h_s + f_y h_{st} \\ &= f_{xx} g_t g_s + f_{xy}(h_t g_s + h_s g_t) + f_{yy} h_t h_s + f_x g_{st} + f_y h_{st}. \end{aligned}$$

Comprobar que esta última fórmula es simétrica en (s,t), mediante la verificación de la igualdad $k_{st} = k_{ts}$. Al calcular f_{xx}, f_{xy} y f_{yy}, obtenemos

$$\begin{aligned} k_{st} = {} & (e^x \operatorname{sen} xy + 2ye^x \cos xy - y^2 e^x \operatorname{sen} xy) g_t g_s \\ & + (xe^x \cos xy + e^x \cos xy - xye^x \operatorname{sen} xy)(h_t h_s + h_s g_t) \\ & - (x^2 e^x \operatorname{sen} xy) h_t h_s + (e^x \operatorname{sen} xy + ye^x \cos xy) g_{st} + (xe^x \cos xy) h_{st}, \end{aligned}$$

donde se entiende que $x = g(s,t)$ y $y = h(s,t)$. $\blacktriangle$

EJEMPLO 6 *La ecuación diferencial parcial $u_t + u_{xxx} + uu_x = 0$, llamada* ***ecuación de Korteweg-de Vries*** *(o ecuación KdV, como abreviación), describe el movimiento de las ondas de agua en un canal poco profundo.*

(a) *Mostrar que para cualquier constante positiva c, la función*

$$u(x,t) = 3c\,\mathrm{sech}^2[\tfrac{1}{2}(x-ct)\sqrt{c}]$$

es una solución de la ecuación de Korteweg-de Vries. (Esta solución representa una "joroba" de agua que viaja en el canal y se llama ***solitón****.)**

(b) *¿Cómo depende de c la forma y rapidez del solitón?*

SOLUCIÓN (a) Calculamos u_t, u_x, u_{xx} y u_{xxx} usando la regla de la cadena y la fórmula de diferenciación $(d/dx)\,\mathrm{sech}\,x = -\mathrm{sech}\,x\,\tanh x$ del cálculo de una variable. Al hacer $\alpha = (x-ct)\sqrt{c}/2$,

$$\begin{aligned} u_t &= 6c\,\mathrm{sech}\,\alpha\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{sech}\,\alpha = -6c\,\mathrm{sech}^2\alpha\tanh\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial t} \\ &= 3c^{5/2}\,\mathrm{sech}^2\alpha\tanh\alpha = c^{3/2}u\tanh\alpha. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} u_x &= -6c\,\mathrm{sech}^2\alpha\tanh\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial x} \\ &= -3c^{3/2}\,\mathrm{sech}^2\alpha\tanh\alpha = -\sqrt{c}u\tanh\alpha, \end{aligned}$$

y así $u_t = -cu_x$ y

$$\begin{aligned} u_{xx} &= -\sqrt{c}\left[u_x\tanh\alpha + u(\mathrm{sech}^2\alpha)\frac{\sqrt{c}}{2}\right] = -\sqrt{c}(\tanh\alpha)u_x - \frac{u^2}{6} \\ &= c(\tanh^2\alpha)u - \frac{u^2}{6} = c(1-\mathrm{sech}^2\alpha)u - \frac{u^2}{6} \\ &= cu - \frac{u^2}{3} - \frac{u^2}{6} = cu - \frac{u^2}{2}. \end{aligned}$$

Así,

$$u_{xxx} = cu_x - uu_x.$$

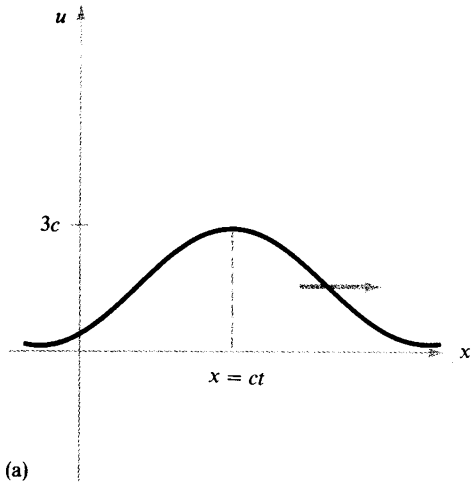
Por lo tanto,

$$u_t + u_{xxx} + uu_x = u_t + u_{xxx} + (cu_x - u_{xxx}) = u_t + cu_x = 0.$$

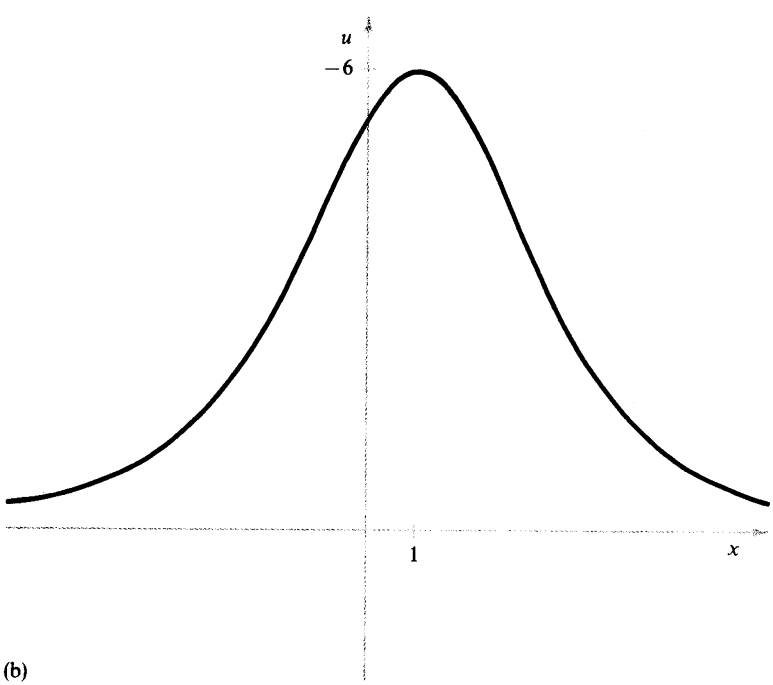
(b) La rapidez del solitón es c, pues la gráfica en la figura 2.6.1(a) se mueve c unidades en x por una unidad de t. La forma en el tiempo $t = 1$ se muestra en la figura 2.6.1(b) para $c = 1$. ▲

---

*Los solitones fueron observados por primera vez por J. Scott Russell alrededor de 1840 en los canales cercanos a Edimburgo; reportó sus resultados en Trans. Royal Society of Edinburgh **14** (1840): 47–109.



(a)



(b)

Figura 2.6.1 El solitón: (a) general; (b) la gráfica para $c = 1$, $t = 1$; $u = 6/(e^{(x-1)/2} + e^{(1-x)/2})$.

NOTA HISTÓRICA: ALGUNAS ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

La filosofía [naturaleza] está escrita en ese gran libro que siempre está ante nuestros ojos —el universo— pero no lo podemos entender si no aprendemos primero el lenguaje y comprendemos los símbolos en los que está escrito. El libro está escrito en lenguaje matemático y los símbolos son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin cuya ayuda es imposible comprender una sola palabra; sin ello, uno vaga sin esperanza en un oscuro laberinto.

GALILEO

Esta cita ilustra la creencia, popular en la época de Galileo, de que buena parte del conocimiento de la naturaleza podría reducirse a matemáticas. Al final del siglo diecisiete se reforzó este modo de pensar, cuando Newton usó su ley de gravitación y el nuevo cálculo para deducir las tres leyes de Kepler del movimiento celeste (ver la sección 3.1). El impacto de esta filosofía en las matemáticas fue sustancial, y muchos matemáticos trataron de "matematizar" la naturaleza. La gran cantidad de matemáticas que hoy se ocupan de la física (y en medida creciente, de la economía y de las ciencias sociales y de la vida) es testigo del éxito de esos intentos. Asimismo, las tentativas de matematizar la naturaleza han conducido con frecuencia a nuevos descubrimientos matemáticos.

Buena parte de las leyes de la naturaleza fueron descritas en términos de ecuaciones diferenciales ordinarias (ecuaciones que incluyen las derivadas de funciones de una sola variable, como $\mathbf{F} = md^2\mathbf{x}/dt^2$, donde $\mathbf{F}$ está dada por la ley de gravitación de Newton), o ecuaciones diferenciales parciales, esto es, ecuaciones que incluyen derivadas parciales de funciones. Con objeto de presentar al lector cierta perspectiva histórica y así ofrecer una motivación para estudiar derivadas parciales, presentamos una breve descripción de tres de las más famosas ecuaciones diferenciales parciales: la ecuación de calor, la ecuación de potencial (o ecuación de Laplace) y la ecuación de onda. Todas ellas serán analizadas con gran detalle en la sección 8.5.

La ecuación de calor. Al principio del siglo diecinueve el matemático francés Joseph Fourier (1768–1830) inició el estudio del calor. El flujo del calor tenía obvias aplicaciones, tanto a problemas industriales como científicos: por ejemplo, una mejor comprensión del fenómeno haría posible que la fundición de metales fuera más eficiente permitiendo a los científicos determinar la temperatura de un cuerpo dada la temperatura en su frontera, y así, aproximar la temperatura en el interior de la Tierra.

Sea $\mathcal{B} \subset \mathbf{R}^3$ un cuerpo homogéneo (figura 2.6.2) representado por alguna región en el 3-espacio. Denotemos por $T(x, y, z, t)$ la temperatura del cuerpo en el punto (x, y, z) en el tiempo t. Fourier probó, basado en los principios físicos descritos en la sección 8.5, que T debe satisfacer la ecuación diferencial parcial llamada la *ecuación de calor*,

$$k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial T}{\partial t}, \tag{1}$$

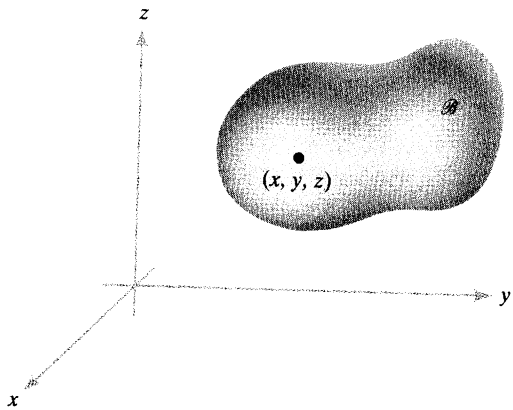


Figura 2.6.2 Cuerpo homogéneo en el espacio.

donde k es una constante cuyo valor depende de la conductividad del material que compone el cuerpo.

Fourier usó esta ecuación para resolver problemas de conducción de calor. De hecho, sus investigaciones de las soluciones de la ecuación (1) lo condujeron al descubrimiento de un nuevo concepto matemático, llamado ahora *series de Fourier*.

La ecuación de potencial. En el ejemplo 6 de la sección 2.5 introdujimos el potencial de gravitación V (llamado con frecuencia potencial de Newton) de una masa m en un punto (x, y, z) provocado por una masa puntual M colocada en el origen. Este potencial está dado por $V = -GmM/r$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. El potencial V satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \tag{2}$$

donde sea, excepto en el origen, como podrá verificar el lector al resolver el ejercicio 19 al final de esta sección. Esta ecuación se conoce como *ecuación de Laplace*. Pierre Simon de Laplace (1749–1827) realizó trabajos sobre atracción gravitacional de masas no puntuales, y fue el primero en considerar la ecuación (2) relacionada con la atracción gravitacional. Presentó argumentos (más tarde se mostró que eran incorrectos) acerca de que la ecuación (2) se cumplía para cualquier cuerpo y cualquier punto, ya fuera dentro o fuera del cuerpo. Sin embargo, Laplace no fue el primero en escribir la ecuación (2). La ecuación de potencial apareció por primera vez en uno de los principales artículos de Euler en 1752, "Principles of the Motions of Fluids", en donde dedujo la ecuación de potencial relacionada con el movimiento de fluidos (incompresibles). Euler insistió en que no tenía idea de cómo resolver la ecuación (2). (Estudiaremos potenciales gravitacionales en la sección 6.4 y las ecuaciones de la mecánica de fluidos en la sección 8.5.) Más tarde, Poisson mostró que si (x, y, z) está dentro de un cuerpo atrayente, entonces V satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\rho \tag{3}$$

donde ρ es la densidad del cuerpo atrayente. La ecuación (3) se llama ahora *Ecuación de Poisson*. Fue también Poisson el primero en señalar la importancia de esta ecuación para problemas que incluyeran campos eléctricos. Nótese que si la temperatura T es constante en el tiempo, entonces la ecuación del calor se reduce a la ecuación de Laplace (¿Por qué?).

Las ecuaciones de Laplace y de Poisson son fundamentales en muchos campos, además de la mecánica de fluidos, campos gravitacionales y campos electrostáticos. Por ejemplo, son útiles para estudiar películas de jabón y cristales líquidos; ver, por ejemplo, *Mathematics and Optimal Form*, de S. Hildebrandt y A. Tromba, Scientific American Books, Nueva York, 1985.

LA ECUACIÓN DE ONDA. La ecuación lineal de onda en el espacio tiene la forma

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}. \tag{4}$$

La ecuación de onda unidimensional

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \tag{4'}$$

fue deducida alrededor de 1727 por John Bernoulli, y varios años después por Jean Le Rond d'Alembert en el estudio para determinar el movimiento de una cuerda vibrante (como la de un violín). La ecuación (4) se volvió muy útil para estudiar tanto cuerpos vibrantes como elasticidad. Como veremos cuando consideremos las ecuaciones de Maxwell en electromagnetismo en la sección 8.5, esta ecuación surge también en el estudio de la propagación de radiación electromagnética y de ondas de sonido.

EJERCICIOS

1. Calcular las segundas derivadas parciales $\partial^2 f/\partial x^2$, $\partial^2 f/\partial x \partial y$, $\partial^2 f/\partial y \partial x$, $\partial^2 f/\partial y^2$ para cada una de las funciones siguientes. Verificar en cada caso el teorema 15:

(a) $f(x,y) = 2xy/(x^2+y^2)^2, (x,y) \neq (0,0)$
(b) $f(x,y,z) = e^z + 1/x + xe^{-y}, x \neq 0$
(c) $f(x,y) = \cos(xy^2)$
(d) $f(x,y) = e^{-xy^2} + y^3x^4$
(e) $f(x,y) = 1/(\cos^2 x + e^{-y})$

2. Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} xy(x^2-y^2)/(x^2+y^2), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(ver la figura 2.6.3).

(a) Si $(x,y) \neq (0,0)$, calcular $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$.
(b) Mostrar que $(\partial f/\partial x)(0,0) = 0 = (\partial f/\partial y)(0,0)$.
(c) Mostrar que $(\partial^2 f/\partial x \partial y)(0,0) = 1$, $(\partial^2 f/\partial y \partial x)(0,0) = -1$.
(d) ¿Qué sucedió? ¿Por qué no son iguales las parciales mixtas?

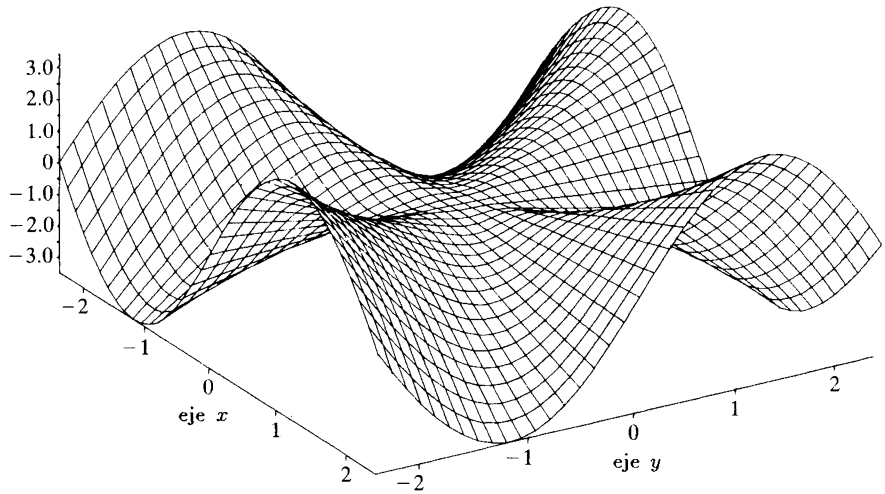


Figura 2.6.3 Gráfica generada por computadora de la función del ejercicio 2.

3. Hallar $\partial^2 z/\partial x^2$, $\partial^2 z/\partial x \partial y$, $\partial^2 z/\partial y \partial x$ y $\partial^2 z/\partial y^2$ para
(a) $z = 3x^2 + 2y^2$
(b) $z = (2x^2 + 7x^2 y)/3xy, (x, y) \neq (0, 0)$

4. Hallar todas las segundas derivadas parciales de
(a) $z = \operatorname{sen}(x^2 - 3xy)$
(b) $z = x^2 y^2 e^{2xy}$

5. Hallar f_{xy}, f_{yz}, f_{zx} y f_{xyz} para

$$f(x, y, z) = x^2 y + xy^2 + yz^2.$$

6. Sea $z = x^4 y^3 - x^8 + y^4$.
(a) Calcular $\partial^3 z/\partial y \partial x \partial x$, $\partial^3 z/\partial x \partial y \partial x$ y $\partial^3 z/\partial x \partial x \partial y$.
(b) Calcular $\partial^3 z/\partial x \partial y \partial y$, $\partial^3 z/\partial y \partial x \partial y$ y $\partial^3 z/\partial y \partial y \partial x$.

7. Usar el teorema 15 para demostrar que si $f(x, y, z)$ es de clase C^3, entonces

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial x}.$$

8. Verificar que

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x}$$

para $f(x, y, z) = ze^{xy} + yz^3 x^2$.

9. Verificar que $f_{xzw} = f_{zwx}$ para $f(x, y, z, w) = e^{xyz} \operatorname{sen}(xw)$.

10. Si $f(x, y, z, w)$ es de la clase C^3, demostrar que

$$f_{xzw} = f_{zwx}.$$

11. Evaluar todas las primeras y segundas derivadas parciales de las funciones siguientes:

(a) $f(x, y) = x \arctan(x/y)$
(b) $f(x, y) = \cos \sqrt{x^2 + y^2}$
(c) $f(x, y) = \exp(-x^2 - y^2)$

12. Sea $w = f(x, y)$ una función C^2 de dos variables y sea $x = u + v$, $y = u - v$. Mostrar que

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

13. Sea $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ una función C^2 y sea $\mathbf{c}(t)$ una curva C^2 en $\mathbf{R}^2$. Escribir una fórmula para $(d^2/dt^2)((f \circ \mathbf{c})(t))$ usando dos veces la regla de la cadena.

14. Sea $f(x, y, z) = e^{xz} \tan(yz)$ y sea $x = g(s, t)$, $y = h(s, t)$, $z = k(s, t)$ y $m(s, t) = f(g(s, t), h(s, t), k(s, t))$. Hallar una fórmula para m_{st} usando la regla de la cadena y verificar que la respuesta sea simétrica en s y t.

15. Una función $u = f(x, y)$ con segundas derivadas parciales continuas que satisfaga la *ecuación de Laplace*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

se llama *función armónica*. Mostrar que la función $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ es armónica.

16. ¿Cuáles de las funciones siguientes son armónicas? (Ver el ejercicio 15.)

(a) $f(x, y) = x^2 - y^2$ (b) $f(x, y) = x^2 + y^2$
(c) $f(x, y) = xy$ (d) $f(x, y) = y^3 + 3x^2 y$
(e) $f(x, y) = \operatorname{sen} x \cosh y$ (f) $f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$

17. Sean f y g funciones diferenciables de una variable. Sea $\phi = f(x - t) + g(x + t)$.
(a) Probar que ϕ satisface la ecuación de onda: $\partial^2\phi/\partial t^2 = \partial^2\phi/\partial x^2$.
(b) Esbozar la gráfica de ϕ contra t y x si $f(x) = x^2$ y $g(x) = 0$.

18. (a) Mostrar que la función $g(x, t) = 2 + e^{-t} \operatorname{sen} x$ satisface la ecuación de calor: $g_t = g_{xx}$. (Aquí $g(x, t)$ representa la temperatura de una varilla de metal en la posición x y tiempo t.)

(b) Esbozar la gráfica de g para $t \geq 0$.[IDEA: Ver las secciones formadas por los planos $t = 0$, $t = 1$ y $t = 2$.]

(c) ¿Qué le sucede a $g(x, t)$ conforme $t \to \infty$? Interpretar este límite en términos del comportamiento del calor en la varilla.

19. Mostrar que el potencial V de Newton (ver el ejemplo 6, sección 2.5) satisface la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \qquad \text{para} \qquad (x, y, z) \neq (0, 0, 0).$$

SECCIÓN OPTATIVA

*2.7 ALGUNOS TEOREMAS TÉCNICOS DE DIFERENCIACIÓN

En esta sección examinaremos con mayor detalle las bases matemáticas del cálculo diferencial y proporcionaremos las demostraciones que se omitieron en las secciones 2.2, 2.3 y 2.4. Comenzaremos proporcionando las demostraciones de los teoremas de límites presentados en la sección 2.2 (la numeración de los teoremas corresponde a la que tienen antes en este capítulo). Recordemos la definición de límite.

DEFINICIÓN DE LÍMITE *Sea $f: A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, donde A es un conjunto abierto. Sea $\mathbf{x}_0$ un punto en A o en la frontera de A, y sea V una vecindad de $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$. Decimos que f está* ***finalmente en*** *V* ***conforme*** *$\mathbf{x}$* ***tiende a*** *$\mathbf{x}_0$ si existe una vecindad U de $\mathbf{x}_0$ tal que $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x} \in U$ y $\mathbf{x} \in A$ implique $f(\mathbf{x}) \in V$. Decimos que $f(\mathbf{x})$* ***tiende a*** *$\mathbf{b}$ cuando $\mathbf{x}$ tiende a $\mathbf{x}_0$, o, en símbolos,*

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \qquad \text{o} \qquad f(\mathbf{x}) \to \mathbf{b} \quad \text{cuando} \quad \mathbf{x} \to \mathbf{x}_0,$$

cuando, dada ***cualquier*** *vecindad V de $\mathbf{b}$, f está finalmente en V conforme $\mathbf{x}$ tiende a $\mathbf{x}_0$. Puede ser que cuando $\mathbf{x}$ tienda a $\mathbf{x}_0$ los valores de $f(\mathbf{x})$ no se acerquen a un número particular. En este caso decimos que* $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$ ***no existe.***

Primero mostraremos que esta definición es equivalente a la formulación ε-δ de los límites.

TEOREMA 6 *Sea $f: A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ y sea $\mathbf{x}_0$ un punto en A o en la frontera de A. Entonces* $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ *si y sólo si para todo número $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para $\mathbf{x} \in A$ que satisfaga $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$, se tiene $\|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\| < \varepsilon$.*

DEMOSTRACIÓN Supongamos primero que $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$. Sea $\varepsilon > 0$ un número dado, y considerar la ε-vecindad $V = D_\varepsilon(\mathbf{b})$, la bola o disco de radio ε con centro en $\mathbf{b}$. Por la definición de límite, f está finalmente en $D_\varepsilon(\mathbf{b})$ cuando $\mathbf{x}$ tiende a $\mathbf{x}_0$, lo cual significa que existe una vecindad U de $\mathbf{x}_0$ tal que $f(\mathbf{x}) \in D_\varepsilon(\mathbf{b})$ si $\mathbf{x} \in U$, $\mathbf{x} \in A$ y $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$. Ahora, como U es un abierto y $\mathbf{x}_0 \in U$, existe $\delta > 0$ tal que $D_\delta(\mathbf{x}_0) \subset U$. En consecuencia, $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ y $\mathbf{x} \in A$ implica $\mathbf{x} \in D_\delta(\mathbf{x}_0) \subset U$. Así, $f(\mathbf{x}) \in D_\varepsilon(\mathbf{b})$, lo cual significa que $\|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\| < \varepsilon$. Ésta es la afirmación ε-δ que deseábamos probar.

Probaremos ahora el recíproco. Supongamos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ y $\mathbf{x} \in A$ implica $\|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\| < \varepsilon$. Sea V una vecindad de $\mathbf{b}$. Tenemos que demostrar que f está finalmente en V conforme $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$; esto es, debemos hallar un conjunto abierto $U \subset \mathbf{R}^n$ tal que $\mathbf{x} \in U$, $\mathbf{x} \in A$ y $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ implique $f(\mathbf{x}) \in V$. Ahora bien, como V es un abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $D_\varepsilon(\mathbf{b}) \subset V$. Si escogemos $U = D_\delta(\mathbf{x})$ (de acuerdo con nuestra hipótesis), entonces $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{x} \in A$ y $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ significa que $\|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\| < \varepsilon$, esto es, que $f(x) \in D_\varepsilon(\mathbf{b}) \subset V$. ■

TEOREMA 2: UNICIDAD DE LOS LÍMITES *Si* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_1$ *y* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_2$, *entonces* $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2$.

DEMOSTRACIÓN Es conveniente usar la formulación ε-δ del teorema 6. Suponer que $f(\mathbf{x}) \to \mathbf{b}_1$ y $f(\mathbf{x}) \to \mathbf{b}_2$ cuando $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$. Dado $\varepsilon > 0$ podemos, por hipótesis, hallar $\delta_1 > 0$ tal que si $\mathbf{x} \in A$ y $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta_1$, entonces $\|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}_1\| < \varepsilon$, y de manera análoga, podemos hallar $\delta_2 > 0$ tal que $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta_2$ implica $\|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}_2\| < \varepsilon$. Sea δ el menor de δ_1 y δ_2. Escoger $\mathbf{x}$ tal que $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ y $\mathbf{x} \in A$. Existen dichas $\mathbf{x}$'s, pues $\mathbf{x}_0$ está en A o es un punto frontera de A. Así, usando la desigualdad del triángulo,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2\| &= \|(\mathbf{b}_1 - f(\mathbf{x})) + (f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}_2)\| \\ &\le \|\mathbf{b}_1 - f(\mathbf{x})\| + \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}_2\| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Así, para *todo* $\varepsilon > 0$, $\|\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2\| < 2\varepsilon$. De aquí que $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2$, pues si $\mathbf{b}_1 \neq \mathbf{b}_2$ se podría hacer $\varepsilon = \|\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2\|/2 > 0$ y tendríamos $\|\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2\| < \|\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2\|$, lo cual es imposible. ■

TEOREMA 3 *Sean* $f: A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, $g: A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, $\mathbf{x}_0$ *un elemento de* A *o un punto frontera de* A, $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$ *y* $c \in \mathbf{R}$; *entonces, se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(i) *Si* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$, *entonces* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} cf(\mathbf{x}) = c\mathbf{b}$, *donde* $cf: A \to \mathbf{R}^m$ *está definida por* $\mathbf{x} \mapsto c(f(\mathbf{x}))$.

(ii) *Si* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_1$ *y* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_2$, *entonces* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} (f+g)(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$, *donde* $(f+g): A \to \mathbf{R}^m$ *está definida por* $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$.

(iii) *Si* $m = 1$, $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = b_1$ *y* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = b_2$, *entonces* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} (fg)(\mathbf{x}) = b_1 b_2$, *donde* $(fg): A \to \mathbf{R}$ *está definida por* $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$.

(iv) *Si* $m = 1$, $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = b \neq 0$ *y* $f(\mathbf{x}) \neq 0$ *para todo* $\mathbf{x} \in A$, *entonces* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} 1/f = 1/b$, *donde* $1/f: A \to \mathbf{R}$ *está definida por* $\mathbf{x} \mapsto 1/f(\mathbf{x})$.

(v) *Si* $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x}))$ *donde* $f_i: A \to \mathbf{R}$, $i = 1, \ldots, m$, *son las funciones componentes de* f, *entonces* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_m)$ *si y sólo si* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_i(\mathbf{x}) = b_i$ *para cada* $i = 1, \ldots m$.

DEMOSTRACIÓN Ilustraremos la técnica demostrando las afirmaciones (i) y (ii). Las demostraciones de las otras afirmaciones son algo más complicadas y las puede proporcionar el lector. En cada caso, probablemente el enfoque más conveniente es la formulación ε-δ del teorema 6.

Para probar la regla (i), sea $\varepsilon > 0$ un número dado; debemos producir un número $\delta > 0$ tal que la desigualdad $\|cf(\mathbf{x}) - c\mathbf{b}\| < \varepsilon$ se cumpla si $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$. Si $c = 0$, se cumple con cualquier δ, de manera que supondremos que $c \neq 0$. Sea $\varepsilon' = \varepsilon/|c|$; por la definición de límite, existe δ con la propiedad de que $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ implica $\|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\| < \varepsilon' = \varepsilon/|c|$. Así, $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ implica $\|cf(\mathbf{x}) - c\mathbf{b}\| = |c|\,\|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\| < \varepsilon$, lo cual demuestra la regla (i).

Para probar la regla (ii), sea $\varepsilon > 0$ de nuevo un número dado. Escoger $\delta_1 > 0$ tal que $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta_1$ implica $\|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}_1\| < \varepsilon/2$. De manera análoga, escoger $\delta_2 > 0$ tal que $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta_2$ implica $\|g(\mathbf{x}) - \mathbf{b}_2\| < \varepsilon/2$. Sea δ el menor de δ_1 y δ_2. Entonces $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ implica

$$\|f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) - \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2\| \leq \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}_1\| + \|g(\mathbf{x}) - \mathbf{b}_2\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Así, hemos probado que $(f + g)(\mathbf{x}) \to \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$ cuando $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$. ■

Recordemos la definición de función continua.

DEFINICIÓN *Sea $f: A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ una función dada con dominio A. Sea $\mathbf{x}_0 \in A$. Decimos que f es* ***continua en*** *$\mathbf{x}_0$ si y sólo si*

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0).$$

Si decimos simplemente que f es ***continua****, queremos decir que f es continua en cada punto $\mathbf{x}_0$ de A.*

A partir del teorema 6, obtenemos el teorema 7: *f es continua en $\mathbf{x}_0 \in A$ si y sólo si para todo número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que*

$$\mathbf{x} \in A \quad \text{y} \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \quad \text{implica} \quad \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\| < \varepsilon.$$

Una de las propiedades de las funciones continuas que enunciamos sin demostración en la sección 2.2 fue la siguiente:

TEOREMA 5 *Sean $f: A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ y $g: B \subset \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$. Suponer que $f(A) \subset B$, de manera que $g \circ f$ está definida en A. Si f es continua en $\mathbf{x}_0 \in A$ y g es continua en $\mathbf{y}_0 = f(\mathbf{x}_0)$, entonces $g \circ f$ es continua en $\mathbf{x}_0$.*

DEMOSTRACIÓN Usamos el criterio ε-δ de continuidad. Así, dado $\varepsilon > 0$, debemos hallar $\delta > 0$ tal que para $\mathbf{x} \in A$,

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \quad \text{implica} \quad \|(g \circ f)(\mathbf{x}) - (g \circ f)(\mathbf{x}_0)\| < \varepsilon.$$

Como g es continua en $f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0 \in B$, existe $\gamma > 0$ tal que para $\mathbf{y} \in B$,

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\| < \gamma \quad \text{implica} \quad \|g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{y}_0)\| < \varepsilon.$$

Como f es continua en $\mathbf{x}_0 \in A$, existe, para este γ, un $\delta > 0$ tal que $\mathbf{x} \in A$, y

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \quad \text{implica} \quad \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\| < \gamma,$$

lo cual a su vez implica que

$$\|g(f(\mathbf{x})) - g(f(\mathbf{x}_0))\| < \varepsilon,$$

que es la conclusión deseada. ■

La exposición en la sección 2.3 se simplificó suponiendo, como parte de la definición de $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$, que existían las derivadas parciales de f. Nuestro siguiente objetivo es mostrar que se puede omitir esta hipótesis. Comencemos redefiniendo "diferenciable". El teorema 16 mostrará que la nueva definición es equivalente a la antigua.

DEFINICIÓN *Sean U un conjunto abierto en $\mathbf{R}^n$ y $f: U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ una función dada. Decimos que f es* **diferenciable** *en $\mathbf{x}_0 \in U$ si y sólo si existe una matriz $\mathbf{T}$ de $m \times n$, tal que*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{T}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0. \tag{1}$$

Llamamos a $\mathbf{T}$ **derivada** *de f en $\mathbf{x}_0$ y la denotamos por $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$. En notación matricial, $\mathbf{T}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ equivale a*

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{m1} & t_{m2} & \cdots & t_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_{01} \\ \vdots \\ x_n - x_{0n} \end{bmatrix},$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ y $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, \ldots, x_{0n})$. A veces escribimos $\mathbf{T}(\mathbf{y})$ como $\mathbf{T} \cdot \mathbf{y}$ o simplemente $\mathbf{Ty}$.

La condición (1) se puede reescribir como

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0} \frac{\|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{Th}\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0 \tag{2}$$

haciendo $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$. Al escribir la ecuación (2) en términos de la notación ε-δ dice que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < \|\mathbf{h}\| < \delta$ implica

$$\frac{\|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{Th}\|}{\|\mathbf{h}\|} < \varepsilon,$$

o en otras palabras,

$$\|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{Th}\| < \varepsilon\|\mathbf{h}\|.$$

Nótese que como U es abierto, en tanto δ sea suficientemente pequeño, $\|\mathbf{h}\| < \delta$ implica $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h} \in U$.

Nuestra tarea es mostrar que la matriz $\mathbf{T}$ es necesariamente la matriz de las derivadas parciales, y, por lo tanto, que esta definición abstracta concuerda con la definición de diferenciabilidad dada en la sección 2.3.

TEOREMA 16 *Suponer que $f: U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$. Entonces todas las derivadas parciales de f existen en el punto $\mathbf{x}_0$ y la matriz $\mathbf{T}$ de $m \times n$ está dada por*

$$[t_{ij}] = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right],$$

esto es,

$$\mathbf{T} = \mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix},$$

donde $\partial f_i/\partial x_j$ está evaluada en $\mathbf{x}_0$. En particular, esto implica que $\mathbf{T}$ está determinada de manera única; no existe otra matriz que satisfaga la condición (1).

DEMOSTRACIÓN Por el teorema 3(v), la condición (2) equivale a

$$\operatorname*{límite}_{\mathbf{h}\to 0} \frac{|f_i(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f_i(\mathbf{x}_0) - (\mathbf{Th})_i|}{\|\mathbf{h}\|} = 0, \qquad 1 \le i \le m.$$

Aquí, $(\mathbf{Th})_i$ denota la i-ésima componente del vector columna $\mathbf{Th}$. Ahora sea $\mathbf{h} = a\mathbf{e}_j = (0, \ldots, a, \ldots, 0)$, con el número a en el j-ésimo lugar y ceros en los demás. Obtenemos

$$\operatorname*{límite}_{a\to 0} \frac{|f_i(\mathbf{x}_0 + a\mathbf{e}_j) - f_i(\mathbf{x}_0) - a(\mathbf{Te}_j)_i|}{|a|} = 0,$$

o, en otras palabras,

$$\operatorname*{límite}_{a\to 0} \left| \frac{f_i(\mathbf{x}_0 + a\mathbf{e}_j) - f_i(\mathbf{x}_0)}{a} - (\mathbf{Te}_j)_i \right| = 0,$$

de modo que

$$\operatorname*{límite}_{a\to 0} \frac{f_i(\mathbf{x}_0 + a\mathbf{e}_j) - f_i(\mathbf{x}_0)}{a} = (\mathbf{Te}_j)_i.$$

Pero este límite no es más que la derivada parcial $\partial f_i/\partial x_j$ evaluada en el punto $\mathbf{x}_0$. Así, hemos probado que existe $\partial f_i/\partial x_j$ y es igual a $(\mathbf{Te}_j)_i$. Pero $(\mathbf{Te}_j)_i = t_{ij}$ (ver la sección 1.5), de modo que se sigue el teorema. ■

Nuestra siguiente tarea es mostrar que diferenciabilidad implica continuidad.

TEOREMA 8 *Sea $f: U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ diferenciable en $\mathbf{x}_0$. Entonces f es continua en $\mathbf{x}_0$, y más aún, $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\| < M_1\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$ para alguna constante M_1 y $\mathbf{x}$ cerca de $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$.*

DEMOSTRACIÓN Usaremos el resultado del ejercicio 2 que está al final de esta sección, a saber, $\|\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{h}\| \leq M\|\mathbf{h}\|$ donde M es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los elementos en la matriz $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$.

Escoger $\varepsilon = 1$. Entonces, por la definición de la derivada (ver la fórmula (2)), existe un $\delta_1 > 0$ tal que $0 < \|\mathbf{h}\| < \delta_1$ implica

$$\|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{h}\| < \varepsilon\|\mathbf{h}\| = \|\mathbf{h}\|.$$

Nótese ahora que si $\|\mathbf{h}\| < \delta_1$, entonces

$$\begin{aligned}\|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)\| &= \|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{h} + \mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{h}\| \\ &\leq \|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{h}\| + \|\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{h}\| \\ &< \|\mathbf{h}\| + M\|\mathbf{h}\| = (1 + M)\|\mathbf{h}\|.\end{aligned}$$

(Nótese que en esta derivación usamos la desigualdad del triángulo.) Haciendo $M_1 = 1 + M$ se prueba la segunda afirmación del teorema.

Sea ahora ε' cualquier número positivo y sea δ el menor entre δ_1 y $\varepsilon'/(1 + M)$. Entonces $\|\mathbf{h}\| < \delta$ implica

$$\|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)\| < (1 + M)\frac{\varepsilon'}{1 + M} = \varepsilon',$$

lo cual prueba que

$$\operatorname*{límite}_{\mathbf{h}\to 0} f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0)$$

o que f es continua en $\mathbf{x}_0$. ■

En la sección 2.3 afirmamos que un importante criterio para asegurar diferenciabilidad es que las derivadas parciales existan y sean continuas. Probémoslo.

TEOREMA 9 *Sea $f: U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$. Supongamos que existen todas las derivadas parciales $\partial f_i/\partial x_j$ de f y son continuas en una vecindad de un punto $\mathbf{x} \in U$. Entonces f es diferenciable en $\mathbf{x}$.*

DEMOSTRACIÓN (En esta demostración vamos a usar el teorema del valor medio del cálculo de una variable. Ver el enunciado en la pág. 135.

Consideraremos sólo el caso $m = 1$, esto es, $f: U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, el caso general lo dejamos al lector (ver la demostración del teorema 16 anterior). Tenemos que mostrar que

$$\operatorname*{límite}_{\mathbf{h}\to 0} \frac{\left| f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})\right] h_i \right|}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Escribir

$$\begin{aligned}
&f(x_1+h_1,\ldots,x_n+h_n)-f(x_1,\ldots,x_n)\\
&\quad=f(x_1+h_1,\ldots,x_n+h_n)-f(x_1,x_2+h_2,\ldots,x_n+h_n)\\
&\qquad+f(x_1,x_2+h_2,\ldots,x_n+h_n)-f(x_1,x_2,x_3+h_3,\ldots,x_n+h_n)+\cdots\\
&\qquad+f(x_1,\ldots,x_{n-1}+h_{n-1},x_n+h_n)-f(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n+h_n)\\
&\qquad+f(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n+h_n)-f(x_1,\ldots,x_n).
\end{aligned}$$

(Ésta se llama una *suma telescópica* pues cada término se cancela con el siguiente o con el anterior, excepto el primero y el último.) Por el teorema del valor medio, se puede escribir esta expresión como

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h})-f(\mathbf{x})=\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{y}_1)\right]h_1+\left[\frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{y}_2)\right]h_2+\cdots+\left[\frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{y}_n)\right]h_n,$$

donde $\mathbf{y}_1=(c_1,x_2+h_2,\ldots,x_n+h_n)$ y c_1 está entre x_1 y x_1+h_1; $\mathbf{y}_2=(x_1,c_2,x_3+h_3,\ldots,x_n+h_n)$ y c_2 está entre x_2 y x_2+h_2; y $\mathbf{y}_n=(x_1,\ldots,x_{n-1},c_n)$ donde c_n está entre x_n y x_n+h_n. Así podemos escribir

$$\begin{aligned}
&\left|f(\mathbf{x}+\mathbf{h})-f(\mathbf{x})-\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})\right]h_i\right|\\
&\qquad=\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{y}_1)-\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x})\right)h_1+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{y}_n)-\frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x})\right)h_n\right|.
\end{aligned}$$

Por la desigualdad del triángulo, esta expresión es menor o igual que

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{y}_1)-\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x})\right|\,|h_1|+\cdots+\left|\frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{y}_n)-\frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x})\right|\,|h_n|\\
&\qquad\le\left\{\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{y}_1)-\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x})\right|+\cdots+\left|\frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{y}_n)-\frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x})\right|\right\}\|\mathbf{h}\|,
\end{aligned}$$

pues $|h_i|\le\|\mathbf{h}\|$. Así, hemos demostrado que

$$\begin{aligned}
&\frac{\left|f(\mathbf{x}+\mathbf{h})-f(\mathbf{x})-\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})\right]h_i\right|}{\|\mathbf{h}\|}\\
&\qquad\le\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{y}_1)-\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x})\right|+\cdots+\left|\frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{y}_n)-\frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x})\right|.
\end{aligned}$$

Pero como las derivadas parciales son continuas por hipótesis, el lado derecho tiende a 0 cuando $\mathbf{h}\to\mathbf{0}$, de modo que el lado izquierdo también tiende a 0. ■

TEOREMA 11: REGLA DE LA CADENA *Sean $U \subset \mathbf{R}^n$ y $V \subset \mathbf{R}^m$ abiertos. Sean $g: U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ y $f: V \subset \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$ funciones dadas tales que g manda a U en V, de modo que está definida $f \circ g$. Suponer que g es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y que f es diferenciable en $\mathbf{y}_0 = g(\mathbf{x}_0)$. Entonces $f \circ g$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$, y*

$$\mathbf{D}(f \circ g)(\mathbf{x}_0) = \mathbf{D}f(\mathbf{y}_0)\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0).$$

DEMOSTRACIÓN De acuerdo con la definición de derivada, debemos verificar que

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \frac{\|f(g(\mathbf{x})) - f(g(\mathbf{x}_0)) - \mathbf{D}f(\mathbf{y}_0)\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0.$$

Primero reescribimos el numerador y aplicamos la desigualdad del triángulo como sigue:

$$\begin{aligned} &\|f(g(\mathbf{x})) - f(g(\mathbf{x}_0)) - \mathbf{D}f(\mathbf{y}_0) \cdot (g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)) \\ &\qquad + \mathbf{D}f(\mathbf{y}_0) \cdot [g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0) - \mathbf{D}g(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)]\| \\ &\leq \|f(g(\mathbf{x})) - f(g(\mathbf{x}_0)) - \mathbf{D}f(\mathbf{y}_0) \cdot (g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0))\| \\ &\qquad + \|\mathbf{D}f(\mathbf{y}_0) \cdot [g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0) - \mathbf{D}g(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)]\|. \end{aligned} \tag{3}$$

Como en la demostración del teorema 8, $\|\mathbf{D}f(\mathbf{y}_0) \cdot \mathbf{h}\| \leq M\|\mathbf{h}\|$ para alguna constante M. Así, el lado derecho de la desigualdad (3) es menor o igual que

$$\begin{aligned} &\|f(g(\mathbf{x})) - f(g(\mathbf{x}_0)) - \mathbf{D}f(\mathbf{y}_0) \cdot (g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0))\| \\ &\qquad + M\|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0) - \mathbf{D}g(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|. \end{aligned} \tag{4}$$

Como g es diferenciable en $\mathbf{x}_0$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta_1$ implica

$$\frac{\|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0) - \mathbf{D}g(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Esto hace que el segundo término en la expresión (4) sea menor que $\varepsilon\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|/2$.

Volvamos al primer término en la expresión (4). Por el teorema 8, $\|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)\| < M_1\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$ para una constante M_1 si $\mathbf{x}$ está cerca de $\mathbf{x}_0$, digamos $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta_2$. Escojamos ahora δ_3 tal que $0 < \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\| < \delta_3$ implique

$$\|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{y}_0) - \mathbf{D}f(\mathbf{y}_0) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{y}_0)\| < \frac{\varepsilon\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\|}{2M_1}.$$

Como $\mathbf{y} = g(\mathbf{x})$ y $\mathbf{y}_0 = g(\mathbf{x}_0)$, $\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\| < \delta_3$ si $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta_3/M_1$ y $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta_2$, de modo que

$$\|f(g(\mathbf{x})) - f(g(\mathbf{x}_0)) - \mathbf{D}f(\mathbf{y}_0) \cdot (g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0))\| \leq \frac{\varepsilon\|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)\|}{2M_1} < \frac{\varepsilon\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|}{2}.$$

Así, si $\delta = \text{mín}(\delta_1, \delta_2, \delta_3/M_1)$, la expresión (4) es menor que

$$\frac{\varepsilon\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|}{2} + \frac{\varepsilon\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|}{2} = \varepsilon\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|,$$

de modo que

$$\frac{\|f(g(\mathbf{x})) - f(g(\mathbf{x}_0)) - \mathbf{D}f(\mathbf{y}_0)\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

para $0 < \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\| < \delta$. Esto demuestra el teorema. ■

El estudiante ya conoce varios ejemplos que ilustran los teoremas anteriores. Consideremos ahora uno de naturaleza más técnica.

EJEMPLO 1 *Sea*

$$f(x,y)) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

¿Es f diferenciable en $(0,0)$? (Ver la figura 2.7.1)

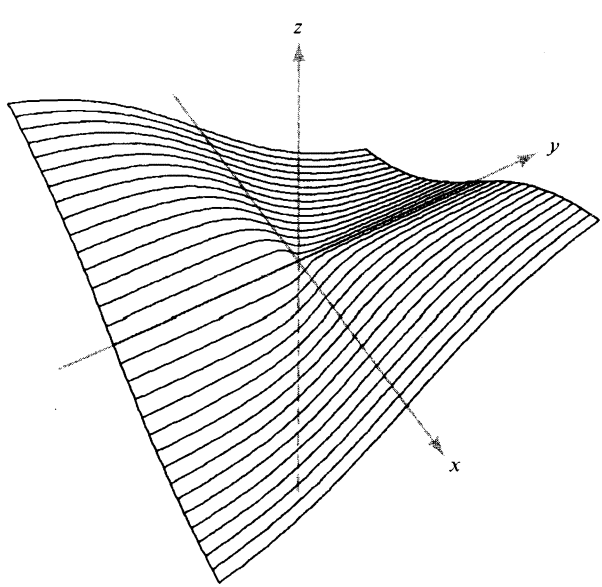


Figura 2.7.1 Esta función no es diferenciable en $(0,0)$ porque está "torcida".

SOLUCIÓN Notamos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(x\cdot 0)/\sqrt{x^2+0}-0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0$$

y de manera análoga, $(\partial f/\partial y)(0,0) = 0$. Así, las derivadas parciales existen en $(0,0)$. Además, si $(x,y) \neq (0,0)$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y\sqrt{x^2+y^2} - 2x(xy)/2\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{3/2}},$$

lo cual no tiene límite cuando $(x,y) \to (0,0)$. Se obtienen límites diferentes cuando se usan diferentes trayectorias para acercarse al punto, como bien se puede ver haciendo $x = My$. Así, las derivadas parciales no son continuas en $(0,0)$ y por lo tanto no podemos usar el teorema 9.

Podemos ahora intentar demostrar que f no es diferenciable (sin embargo f es continua). Si existiera $\mathbf{D}f(0,0)$, por el teorema 16 debería ser la matriz cero, porque $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ son cero en $(0,0)$. Así, por la definición de diferenciabilidad, para cualquier $\varepsilon > 0$ existiría $\delta > 0$ tal que $0 < \|(h_1,h_2)\| < \delta$ implique

$$\frac{|f(h_1,h_2)-f(0,0)|}{\|(h_1,h_2\|} < \varepsilon$$

esto es,

$$|f(h_1,h_2)| < \varepsilon\|(h_1,h_2)\|$$

o

$$|h_1h_2| < \varepsilon(h_1^2+h_2^2).$$

Pero si escogemos $h_1 = h_2$, esto queda como

$$\tfrac{1}{2} < \varepsilon,$$

lo cual no sería cierto si escogiéramos $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$. Por lo tanto, f *no* es diferenciable en $(0,0)$. ▲

EJERCICIOS

1. Sea $f(x,y,z) = (e^x, \cos y, \operatorname{sen} z)$. Calcular $\mathbf{D}f$. En general, ¿cuándo será $\mathbf{D}f$ una matriz diagonal?

2. (a) Sea $\mathbf{A}\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ una transformación lineal con matriz $[a_{ij}]$ de modo que $\mathbf{Ax}$ tenga componentes $y_i = \sum a_{ij}x_j$. Sea $M = (\sum a_{ij}^2)^{1/2}$. Usar la desigualdad de Schwarz para demostrar que $\|\mathbf{Ax}\| \leq M\|\mathbf{x}\|$.

(b) Usar la desigualdad deducida en la parte (a) para mostrar que una transformación lineal $\mathbf{T}\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ con matriz $[t_{ij}]$ es continua. (El ejercicio continúa en la página 178.)

(c) Sea $\mathbf{A}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ una transformación lineal. Si

$$\lim_{\mathbf{x}\to 0} \frac{\mathbf{A}\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} = \mathbf{0},$$

mostrar que $\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

3. Sean $f: A \to B$ y $g: B \to C$ funciones entre conjuntos abiertos del espacio euclidiano, y sea $\mathbf{x}_0$ un elemento de A o un punto frontera de A y $\mathbf{y}_0$ un elemento de B o un punto frontera de B.

(a) Si $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_0$ y $\lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{y}_0} g(\mathbf{y}) = \mathbf{w}$, mostrar que $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(f(\mathbf{x}))$ no necesariamente es igual a $\mathbf{w}$.

(b) Si $\mathbf{y}_0 \in B$ y $\mathbf{w} = g(\mathbf{y}_0)$, mostrar que $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(f(\mathbf{x})) = \mathbf{w}$.

4. Se dice que una función $f: A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ es *uniformemente continua* si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q} \in \mathbf{A}$, $\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\| < \delta$ implica $\|f(\mathbf{p}) - f(\mathbf{q})\| < \varepsilon$. (Nótese que una función uniformemente continua es continua; tratar de describir explícitamente la propiedad extra que tiene una función uniformemente continua.)

(a) Probar que una transformación lineal $\mathbf{T}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ es uniformemente continua. (IDEA: Usar el ejercicio 2.)

(b) Probar que $x \mapsto 1/x^2$ en $(0, 1]$ es continua pero no uniformemente continua.

5. Sea $\mathbf{A} = (a_{ij})$ una matriz *simétrica* de $n \times n$ (esto es, $a_{ij} = a_{ji}$) y definir $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{A}\mathbf{x}$ de modo que $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. Mostrar que $\nabla f(\mathbf{x})$ es el vector $2\mathbf{A}\mathbf{x}$.

6. En la figura 2.7.2 está graficada la siguiente función:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^2}{x^2 + y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Mostrar que $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ existen en todas partes; de hecho existen todas las derivadas direccionales. Pero mostrar que f no es continua en $(0, 0)$. ¿Es f diferenciable?

7. Sea $f(x, y) = g(x) + h(y)$, y suponer que g es diferenciable en x_0 y h es diferenciable en y_0. Probar, a partir de la definición, que f es diferenciable en (x_0, y_0).

8. Usar la desigualdad de Schwarz para probar que para cualquier vector $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$,

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}_0.$$

9. Probar que si $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = b$ para $f: A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, entonces

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} [f(\mathbf{x})]^2 = b^2 \qquad \text{y} \qquad \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \sqrt{|f(\mathbf{x})|} = \sqrt{|b|}.$$

(Se puede usar el ejercicio 3(b).)

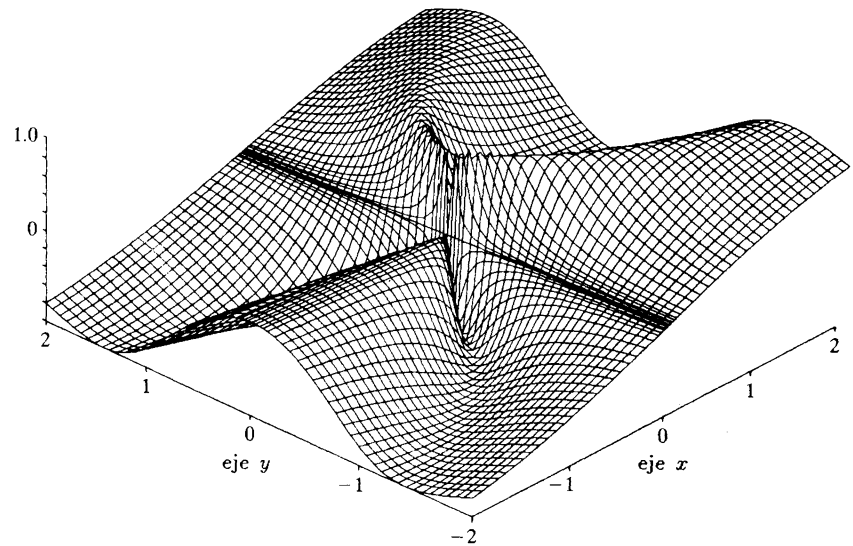


Figura 2.7.2 Gráfica generada por computadora de $z = 2xy^2/(x^2 + y^4)$.

10. Mostrar que en el teorema 9, con $m = 1$, es suficiente suponer que son continuas $n - 1$ derivadas parciales y que la otra existe. ¿Concuerda esto con lo que podría esperarse para $n = 1$?

11. Definir $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ mediante

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2 + y^2)^{1/2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Mostrar que f es continua.

12. (a) ¿Existe el $\displaystyle\operatorname*{límite}_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2 + y^2}$?

(b) ¿Existe el $\displaystyle\operatorname*{límite}_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2}$?

13. Hallar el $\displaystyle\operatorname*{límite}_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

14. Probar que $s\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^1$, $(x, y) \mapsto x + y$ es continua.

15. Usando la definición de continuidad, probar que f es continua en $\mathbf{x}$ si y sólo si

$$\operatorname*{límite}_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}).$$

16. (a) Se dice que una sucesión de puntos $\mathbf{x}_n$ en $\mathbf{R}^m$ *converge* a $\mathbf{x}$, y se escribe $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$ cuando $n \to \infty$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe N tal que $n \geq N$ implica $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_n\| < \varepsilon$. Mostrar que $\mathbf{y}$ es un punto frontera de un conjunto abierto A si y sólo si $\mathbf{y}$ no está en A y existe una sucesión de puntos distintos de A, que converge a $\mathbf{y}$.

(b) Sea $f: A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ y $\mathbf{y}$ un elemento de A o un punto frontera de A. Probar que $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{y}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ si y sólo si $f(\mathbf{x}_n) \to \mathbf{b}$ para toda sucesión de puntos $\mathbf{x}_n$ en A con $\mathbf{x}_n \to \mathbf{y}$.

(c) Si $U \subset \mathbf{R}^m$ es un abierto, mostrar que $f: U \to \mathbf{R}^p$ es continua si y sólo si $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x} \in U$ implica $f(\mathbf{x}_n) \to f(\mathbf{x})$.

17. Si $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$ y si $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$, entonces mostrar que también $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$.

18. Sean $A \subset \mathbf{R}^n$ y sea $\mathbf{x}_0$ un punto frontera de A. Sea $f: A \to \mathbf{R}$ y $g: A \to \mathbf{R}$ funciones definidas en A tales que existen $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$ y $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x})$, y suponer que para todo $\mathbf{x}$ en alguna vecindad agujereada de $\mathbf{x}_0$, $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$. (Una vecindad agujereada de $\mathbf{x}_0$ es cualquier vecindad de $\mathbf{x}_0$, sin $\mathbf{x}_0$.)

(a) Probar que $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) \leq \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x})$. (IDEA: Considerar la función $\phi(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})$; probar que $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \phi(\mathbf{x}) \geq 0$, y después usar el hecho de que el límite de la suma de dos funciones es la suma de sus límites.)

(b) Si $f(\mathbf{x}) < g(\mathbf{x})$, ¿necesariamente se tendrá la desigualdad estricta de los límites?

19. Dada $f: A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, decimos que "$f$ es $o(\mathbf{x})$ cuando $\mathbf{x} \to \mathbf{0}$" si $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} f(\mathbf{x})/\|\mathbf{x}\| = \mathbf{0}$.

(a) Si f_1 y f_2 son $o(\mathbf{x})$ cuando $\mathbf{x} \to \mathbf{0}$, probar que $f_1 + f_2$ también es $o(\mathbf{x})$ cuando $\mathbf{x} \to \mathbf{0}$ (donde $(f_1 + f_2)(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{x})$).

(b) Sea $g: A \to \mathbf{R}$ una función con la propiedad de que existe un número $c > 0$ tal que $|g(\mathbf{x})| \leq c$ para todo $\mathbf{x}$ en A (se dice que g está *acotada*). Si f es $o(\mathbf{x})$ cuando $\mathbf{x} \to \mathbf{0}$, probar que gf también es $o(\mathbf{x})$ cuando $\mathbf{x} \to \mathbf{0}$ (donde $(gf)(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})f(\mathbf{x})$).

(c) Mostrar que $f(x) = x^2$ es $o(x)$ cuando $x \to 0$. ¿También $g(x) = x$ es $o(x)$ cuando $x \to 0$?

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 2

1. Describir las gráficas de:

$\boxed{\text{(a)}}$ $f(x, y) = 3x^2 + y^2$

(b) $f(x, y) = xy + 3x$

2. Describir superficies de nivel y secciones adecuadas de las gráficas de:

(a) $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2$

(b) $f(x, y, z) = x^2$

$\boxed{\text{(c)}}$ $f(x, y, z) = xyz$

3. Calcular la derivada $\mathbf{D}f(\mathbf{x})$ de cada una de las funciones siguientes:
(a) $f(x,y) = (x^2y, e^{-xy})$
(b) $f(x) = (x, x)$
(c) $f(x,y,z) = e^x + e^y + e^z$
(d) $f(x,y,z) = (x,y,z)$

4. Suponer que $f(x,y) = f(y,x)$ para todo (x,y). Probar que

$$(\partial f/\partial x)(a,b) = (\partial f/\partial y)(b,a).$$

5. Sea $f(x,y) = (1 - x^2 - y^2)^{1/2}$. Mostrar que el plano tangente a la gráfica de f en $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ es ortogonal al vector $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$. Interpretar geométricamente.

6. Suponer que $F(x,y) = (\partial f/\partial x) - (\partial f/\partial y)$ y f es de clase C^2. Probar que

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

7. Hallar una ecuación para el plano tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ para:
(a) $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, (x,y) \mapsto x - y + 2, \quad (x_0,y_0) = (1,1)$
(b) $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, (x,y) \mapsto x^2 + 4y^2, \quad (x_0,y_0) = (2,-1)$
(c) $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, (x,y) \mapsto xy, \quad (x_0,y_0) = (-1,-1)$
(d) $f(x,y) = \log(x+y) + x\cos y + \arctan(x+y), \quad (x_0,y_0) = (1,0)$
(e) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, \quad (x_0,y_0) = (1,1)$
(f) $f(x,y) = xy, \quad (x_0,y_0) = (2,1)$

8. Calcular una ecuación para los planos tangentes a las siguientes superficies en los puntos indicados.
(a) $x^2 + y^2 + z^2 = 3, \quad (1,1,1)$
(b) $x^3 - 2y^3 + z^3 = 0, \quad (1,1,1)$
(c) $(\cos x)(\cos y)e^z = 0, \quad (\pi/2, 1, 0)$
(d) $e^{xyz} = 1, \quad (1,1,0)$

9. Dibujar algunas curvas de nivel de las funciones siguientes:
(a) $f(x,y) = 1/xy$
(b) $f(x,y) = x^2 - xy - y^2$

10. Considerar una función de temperatura $T(x,y) = x \operatorname{sen} y$. Dibujar algunas curvas de nivel. Calcular ∇T y explicar su significado.

11. Hallar los siguientes límites, si existen:
(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos xy - 1}{x}$ (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{|(x+y)/(x-y)|}, x \neq y$

12. Calcular las primeras derivadas parciales y los gradientes de las funciones siguientes:
(a) $f(x,y,z) = xe^z + y\cos x$
(b) $f(x,y,z) = (x+y+z)^{10}$
(c) $f(x,y,z) = (x^2+y)/z$

13. Sea $\mathbf{F} = F_1(x, y)\mathbf{i} + F_2(x, y)\mathbf{j}$ un campo vectorial de clase C^1. Mostrar que si $\mathbf{F} = \nabla f$ para alguna f, entonces $\partial F_1/\partial y = \partial F_2/\partial x$. Mostrar que $\mathbf{F} = y(\cos x)\mathbf{i} + x(\operatorname{sen} y)\mathbf{j}$ no es un campo vectorial gradiente.

14. Sea $y(x)$ una función diferenciable definida implícitamente por $F(x, y(x)) = 0$. Del ejercicio 17(a), sección 2.4, sabemos que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}.$$

Considerar la superficie $z = F(x, y)$, y suponer que F es creciente como función de x y como función de y; i.e., $\partial F/\partial x > 0$ y $\partial F/\partial y > 0$. Mostrar, considerando la gráfica y el plano $z = 0$, que para z fija en $z = 0$, y deberá *decrecer* conforme x crece y x deberá *decrecer* conforme y crece. ¿Concuerda esto con el signo menos en la fórmula de dy/dx?

15. (a) Considerar la gráfica de una función $f(x, y)$ (figura 2.R.1). Sea (x_0, y_0) en una curva C de nivel, de modo que $\nabla f(x_0, y_0)$ es perpendicular a esta curva. Mostrar que el plano tangente a la gráfica es el plano que (i) contiene la recta perpendicular a $\nabla f(x_0, y_0)$ y está en el plano horizontal $z = f(x_0, y_0)$, y (ii) tiene pendiente $\|\nabla f(x_0, y_0)\|$ respecto al plano xy. (Por *pendiente* de un plano P respecto al plano xy se entiende la tangente del ángulo θ, $0 \leq \theta \leq \pi$, entre la normal a P que apunta hacia arriba, $\mathbf{p}$, y el vector unitario $\mathbf{k}$.)

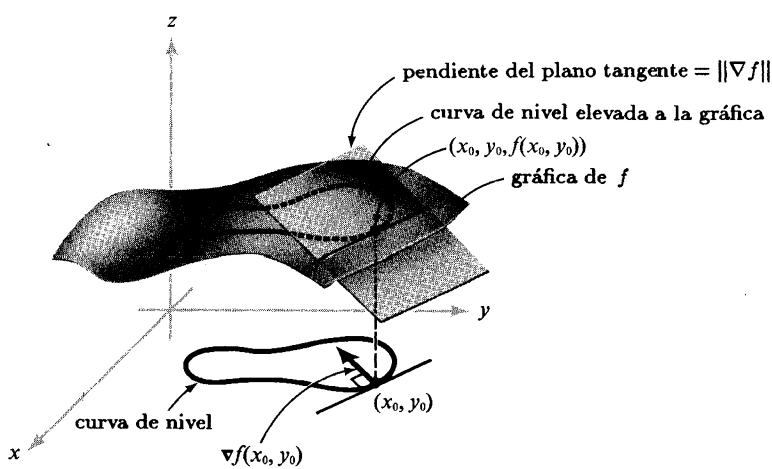


Figura 2.R.1 Relación entre el gradiente de una función y el plano tangente a la gráfica de la función (ejercicio 15(a)).

(b) Usar este método para mostrar que el plano tangente a la gráfica de $f(x, y) = (x + \cos y)x^2$ en $(1, 0, 2)$ es como el que se ha dibujado en la figura 2.R.2.

16. Hallar el plano tangente a la superficie $z = x^2 + y^2$ en el punto $(1, -2, 5)$. Explicar el significado geométrico para esta superficie, del gradiente de $f(x, y) = x^2 + y^2$ (ver el ejercicio 15).

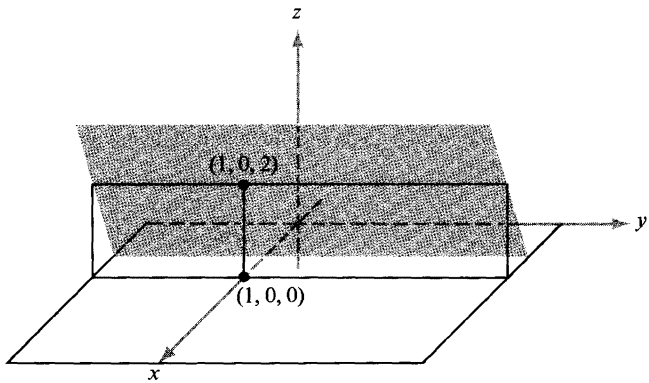


Figura 2.R.2 Plano al cual hace referencia el ejercicio 15(b).

17. ¿En qué dirección es igual a cero la derivada direccional de $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ en $(1, 1)$?

18. Hallar la derivada direccional de la función dada en el punto dado y en la dirección del vector dado.

(a) $f(x, y, z) = e^x \cos(yz), p_0 = (0, 0, 0), \mathbf{v} = (2, 1, -2)$

$\boxed{\text{(b)}}$ $f(x, y, z) = xy + yz + zx, p_0 = (1, 1, 2), \mathbf{v} = (10, -1, 2)$

19. Hallar el plano tangente y la normal al hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 18$ en $(3, 5, -4)$.

20. Sea $(x(t), y(t))$ una curva en el plano, $0 \leq t \leq 1$, y sea $f(x, y)$ una función de dos variables. Suponer que $f_x x + f_y y \leq 0$. Mostrar que $f(x(1), y(1)) \leq f(x(0), y(0))$.

$\boxed{\textbf{21.}}$ Un insecto se halla en un medio ambiente tóxico. El nivel de toxicidad está dado por $T(x, y) = 2x^2 - 4y^2$. El insecto está en $(-1, 2)$. ¿En qué dirección deberá moverse para disminuir lo más rápido posible la toxicidad?

22. Hallar la dirección en la cual la función $w = x^2 + xy$ crece más rápidamente desde el punto $(-1, 1)$. ¿Cuál es la magnitud de ∇w en esta dirección? Interpretar geométricamente esta magnitud.

23. Sea f definida en un conjunto abierto S en $\mathbf{R}^n$. Decimos que f es *homogénea de grado* p sobre S si $f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^p f(\mathbf{x})$ para todo real λ y para todo $\mathbf{x}$ en S para el cual $\lambda \mathbf{x} \in S$.

(a) Si dicha función es diferenciable en $\mathbf{x}$, mostrar que $\mathbf{x} \cdot \nabla f(\mathbf{x}) = pf(\mathbf{x})$. Esto se conoce como el *teorema de Euler* para funciones homogéneas. [IDEA: Para $\mathbf{x}$ fija, definir $g(\lambda) = f(\lambda \mathbf{x})$ y calcular $g'(1)$.]

(b) Hallar p y verificar el teorema de Euler para la función $f(x, y, z) = x - 2y - \sqrt{xz}$, $xz > 0$.

24. Probar que si $f(x,y)$ satisface la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

entonces también la satisface la función

$$\phi(x,y) = f\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right) \qquad \text{para} \qquad (x,y) \neq (0,0).$$

(Una función que satisface la ecuación de Laplace se llama *armónica*.)

25. Probar que las funciones

(a) $f(x,y) = \log(x^2+y^2)$

$\boxed{\text{(b)}}$ $g(x,y,z) = \dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$

(c) $h(x,y,z,w) = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2+w^2}$

satisfacen las respectivas ecuaciones de Laplace

(a) $f_{xx} + f_{yy} = 0$

(b) $g_{xx} + g_{yy} + g_{zz} = 0$

(c) $h_{xx} + h_{yy} + h_{zz} + h_{ww} = 0$

donde $f_{xx} = \partial^2 f/\partial x^2$, etc.

26. Si $z = [f(x-y)]/y$, demostrar que $z + y(\partial z/\partial x) + y(\partial z/\partial y) = 0$.

27. Dado $z = f((x+y)/(x-y))$ para f una función de clase C^1, mostrar que

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

28. Sea f con derivadas parciales $\partial f(\mathbf{x})/\partial x_i$, donde $i = 1, 2, \ldots, n$, en cada punto $\mathbf{x}$ de un conjunto abierto U en $\mathbf{R}^n$. Si f tiene un máximo local o un mínimo local en el punto $\mathbf{x}_0$ en U, mostrar que $\partial f(\mathbf{x}_0)/\partial x_i = 0$ para cada i.

29. Considerar las funciones definidas en $\mathbf{R}^2$ mediante las fórmulas siguientes:

(i) $f(x,y) = xy/(x^2+y^2)$ si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$

$\boxed{\text{(ii)}}$ $f(x,y) = x^2y^2/(x^2+y^4)$ si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$

(a) Mostrar, en cada caso, que las derivadas parciales $\partial f(x,y)/\partial x$ y $\partial f(x,y)/\partial y$ existen para todo (x,y) en $\mathbf{R}^2$, y evaluar estas derivadas explícitamente en términos de x y y.

(b) Explicar por qué las funciones descritas en (i) y (ii) son diferenciables o no, en $(0,0)$.

30. Calcular el vector gradiente $\nabla f(x,y)$ en todos los puntos (x,y) en $\mathbf{R}^2$ para cada una de las funciones siguientes:

(a) $f(x,y) = x^2y^2\log(x^2+y^2)$ si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$

$\boxed{\text{(b)}}$ $f(x,y) = xy\,\mathrm{sen}[1/(x^2+y^4)]$ si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$

31. Dada una función f definida en $\mathbf{R}^2$, sea $F(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$. Por ejemplo, si $f(x,y) = x/(x^2+y^2)$, entonces $F(r,\theta) = (\cos\theta)/r$. (El ejercicio continúa en la página siguiente.)

(a) Suponer que f cumple las propiedades de diferenciabilidad adecuadas, y mostrar que

$$\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) + \operatorname{sen}\theta \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} F(r,\theta) = \cos^2\theta \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) + 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) + \operatorname{sen}^2\theta \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y)$$

donde $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$.

(b) Verificar la fórmula

$$\|\nabla f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta\|^2 = \left(\frac{\partial}{\partial r} F(r,\theta)\right) + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial \theta} F(r,\theta)\right)^2.$$

32. (a) Sean $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$. Hallar: $\|\mathbf{u}\|$, $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$, $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ y un vector que apunte en la misma dirección que $\mathbf{u}$ pero de longitud unitaria.

(b) Hallar la tasa de cambio de $e^{xy}\operatorname{sen}(x,y,z)$ en la dirección $\mathbf{u}$ en $(0,1,1)$.

33. Hallar las derivadas direccionales de las siguientes funciones en el punto $(1,1)$ en la dirección $(\mathbf{i}+\mathbf{j})/\sqrt{2}$:

(a) $f(x,y) = x\tan^{-1}(x/y)$

(b) $f(x,y) = \cos(\sqrt{x^2+y^2})$

(c) $f(x,y) = \exp(-x^2 - y^2)$

34. Suponer que f es una función diferenciable de una variable y que una función $u = g(x,y)$ está definida por

$$u = g(x,y) = xyf\left(\frac{x+y}{xy}\right).$$

Mostrar que u satisface una ecuación diferencial (parcial) de la forma

$$x^2\frac{\partial u}{\partial x} - y^2\frac{\partial u}{\partial y} = G(x,y)u$$

y hallar la función $G(x,y)$.

35. Denotemos por $h(x,y) = 2e^{-x^2} + e^{-3y^2}$ la altura de una montaña en la posición (x,y). ¿En qué dirección desde $(1,0)$ deberíamos comenzar a caminar para escalar lo más rápido posible?

36. Calcular una ecuación para el plano tangente a la gráfica de

$$f(x,y) = \frac{e^x}{x^2+y^2}$$

en $x = 1$, $y = 2$.

37. (a) Presentar un enunciado cuidadoso de la forma general de la regla de la cadena.
(b) Sea $f(x,y) = x^2+y$ y sea $\mathbf{h}(u) = (\operatorname{sen} 3u, \cos 8u)$. Sea $g(u) = f(\mathbf{h}(u))$. Calcular dg/du en $u = 0$ de dos maneras, directa y usando la regla de la cadena.

38. (a) Trazar las curvas de nivel de $f(x,y) = -x^2 - 9y^2$ para $c = 0, -1, -10$.
(b) En la figura, dibujar ∇f en $(1,1)$. Explicar.

39. En el tiempo $t = 0$, se lanza una partícula desde el punto $(1,1,1)$ sobre la superficie $x^2+2y^2+3z^2 = 6$ en una dirección normal a la superficie con una rapidez de 10 unidades por segundo. ¿En qué instante cruza la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 103$?

40. ¿En qué punto(s) de la superficie del ejercicio 39 es el vector normal paralelo a la recta $x = y = z$?

41. Calcular $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ si

$$z = \frac{u^2+v^2}{u^2-v^2}, \qquad u = e^{x-y}, \qquad v = e^{xy}$$

(a) por sustitución y cálculo directo y (b) por la regla de la cadena.

42. Calcular las derivadas parciales como en el ejercicio 41 si $z = uv$, $u = x + y$ y $v = x - y$.

43. ¿Dónde falla el siguiente argumento? Suponer que $w = f(x,y)$ y $y = x^2$. Por la regla de la cadena,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} + 2x\frac{\partial w}{\partial y}.$$

Por lo tanto, $0 = 2x(\partial w/\partial y)$, y así, $\partial w/\partial y = 0$. Dar un ejemplo claro para ver que esto es incorrecto.

44. Un bote navega hacia el noreste a 20 km/h. Suponiendo que la temperatura desciende a una tasa de 0.2 °C/km en la dirección norte y 0.3 °C/km en la dirección este, ¿cuál es la tasa de cambio de la temperatura con respecto al tiempo observada en el bote?

45. Usar la regla de la cadena para hallar una fórmula para $(d/dt)\exp[f(t)g(t)]$.

46. Usar la regla de la cadena para hallar una fórmula para $(d/dt)(f(t)^{g(t)})$.

47. Verificar la regla de la cadena para la función $f(x,y,z) = [\ln(1+x^2+2z^2)]/(1+y^2)$ y la curva $\sigma(t) = (t, 1-t^2, \cos t)$.

48. Verificar la regla de la cadena para la función $f(x,y) = x^2/(2+\cos y)$ y la curva $x = e^t$, $y = e^{-t}$.

49. Suponer que $u(x,t)$ satisface la ecuación diferencial $u_t + uu_x = 0$ y que x, como función $x = f(t)$ de t, satisface $dx/dt = u(x,t)$. Probar que $u(f(t),t)$ es constante en t.

50. El desplazamiento en el tiempo t y posición horizontal sobre una recta x de cierta cuerda de violín está dada por $u = \operatorname{sen}(x - 6t) + \operatorname{sen}(x + 6t)$. Calcular la velocidad de la cuerda en $x = 1$ cuando $t = \frac{1}{3}$.

51. La *ley del gas ideal* $PV = nRT$ incluye una constante R, el número n de moles del gas, el volumen V, la temperatura en grados Kelvin T y la presión P.

(a) Mostrar que cada una: n, P, T y V es función de las variables restantes, y determinar explícitamente las ecuaciones que las definen.

(b) Calcular $\partial V/\partial T$, $\partial T/\partial P$ y $\partial P/\partial V$, y mostrar que su producto es igual a -1.

52. La *temperatura potencial* θ está definida en términos de la temperatura T y la presión p mediante

$$\theta = T\left(\frac{1000}{p}\right)^{0.286}$$

La temperatura y la presión se pueden pensar como funciones de la posición (x, y, z) en la atmósfera y también del tiempo t.

(a) Hallar fórmulas para $\partial\theta/\partial x$, $\partial\theta/\partial y$, $\partial\theta/\partial z$ y $\partial\theta/\partial t$ en términos de las derivadas parciales de T y p.

(b) La condición $\partial\theta/\partial z < 0$ se considera como *atmósfera inestable*, pues conduce a grandes excursiones verticales de parcelas de aire a partir de un solo ímpetu hacia arriba o hacia abajo. Los meteorólogos usan la fórmula

$$\frac{\partial\theta}{\partial z} = \frac{\theta}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial z} + \frac{g}{C_p}\right)$$

donde $g = 32.2$ y C_p es una constante positiva. ¿Cómo cambia la temperatura hacia arriba en una atmósfera inestable?

53. El volumen específico V, la presión P y la temperatura T de un gas de van der Waals están relacionados mediante $P = RT/(V - \beta) - \alpha/V^2$, donde α, β y R son constantes.

(a) Explicar por qué cualesquiera dos de V, P y T se pueden considerar variables independientes que determinan la tercera variable.

(b) Hallar $\partial T/\partial P$, $\partial P/\partial V$, $\partial V/\partial T$. Identificar cuáles variables son constantes e interpretar físicamente cada derivada parcial.

(c) Verificar que $(\partial T/\partial P)(\partial P/\partial V)(\partial V/\partial T) = -1$ (¡no $+1$!).

54. La altura h del volcán hawaiano Mauna Loa se describe (aproximadamente) mediante la función $h(x, y) = 2.59 - 0.00024y^2 - 0.00065x^2$, donde h es la altura sobre el nivel del mar en millas y x y y miden las distancias este-oeste y norte-sur, respectivamente, en millas, a partir de la cima de la montaña. En $(x, y) = (-2, -4)$:

(a) ¿Con qué rapidez se incrementa la altura en la dirección $(1, 1)$ (esto es, hacia el noreste)? Expresar la respuesta en millas de altura por milla de distancia horizontal recorrida.

(b) ¿En qué dirección va la trayectoria hacia arriba más empinada?

55. (a) ¿En qué dirección es igual a cero la derivada direccional de $f(x,y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ en $(1,1)$?

(b) ¿Qué sucede en un punto arbitrario (x_0, y_0) en el primer cuadrante?

(c) Describir las curvas de nivel de f. En particular, analizarlas en términos del resultado de (b).

56. (a) Mostrar que la curva $x^2 - y^2 = c$, para *cualquier* valor de c, satisface la ecuación diferencial $dy/dx = x/y$.

(b) Trazar algunas de las curvas $x^2 - y^2 = c$, digamos para $c = \pm 1$. En varios puntos (x,y) a lo largo de cada una de estas curvas, trazar un pequeño segmento de pendiente x/y; verificar que estos segmentos parecen tangentes a la curva. ¿Qué sucede cuando $y = 0$? ¿Qué sucede cuando $c = 0$?

57. ¿Qué condiciones cumple la función $f(x,y)$ si el campo vectorial $\mathbf{k} \times \nabla f$ es un campo vectorial gradiente? (Ver el ejercicio 13.)

***58.** (a) Sea F una función de una variable y f una función de dos variables. Mostrar que el vector gradiente de $g(x,y) = F(f(x,y))$ es paralelo al vector gradiente de $f(x,y)$.

(b) Sean $f(x,y)$ y $g(x,y)$ funciones tales que $\nabla f = \lambda \nabla g$ para alguna función $\lambda(x,y)$. ¿Cuál es la relación entre las curvas de nivel de f y g? Explicar por qué puede haber una función F tal que $g(x,y) = F(f(x,y))$.

3 FUNCIONES CON VALORES VECTORIALES

. . . quien con vigor mental casi divino, fue el primero en demostrar los movimientos y formas de los planetas, las trayectorias de los cometas y el flujo de las mareas.

EPITAFIO DE NEWTON

Uno de nuestros objetivos principales en el capítulo 2 fue el estudio de las funciones con valores reales. En este capítulo nos ocuparemos de las funciones cuyos valores son vectores. Comenzamos en la sección 3.1 con trayectorias, que son funciones de $\mathbf{R}$ a $\mathbf{R}^n$. Después pasaremos a campos vectoriales e introduciremos las principales operaciones del cálculo diferencial vectorial además del gradiente, a saber, la divergencia y el rotacional. Consideraremos algunos de los aspectos geométricos asociados a estas operaciones, tal como lo hicimos para el gradiente, pero los resultados que tienen las aplicaciones físicas más importantes tendrán que esperar hasta que hayamos estudiado teoría de la integración.

3.1 TRAYECTORIAS Y VELOCIDAD

Con frecuencia consideramos una curva como una línea trazada sobre un papel, tal como una línea recta, un círculo, o una curva senoidal. Para tratar de manera efectiva con estos objetos, resulta conveniente pensar una curva en $\mathbf{R}^n$ como el conjunto de valores de una función que manda un intervalo en $\mathbf{R}$ a $\mathbf{R}^n$. A dicha función le llamaremos *trayectoria*. Una trayectoria está en un plano si $n = 2$, y en el espacio si $n = 3$. La imagen de la trayectoria corresponde, entonces, a la línea que vemos en el papel (ver la figura 3.1.1).

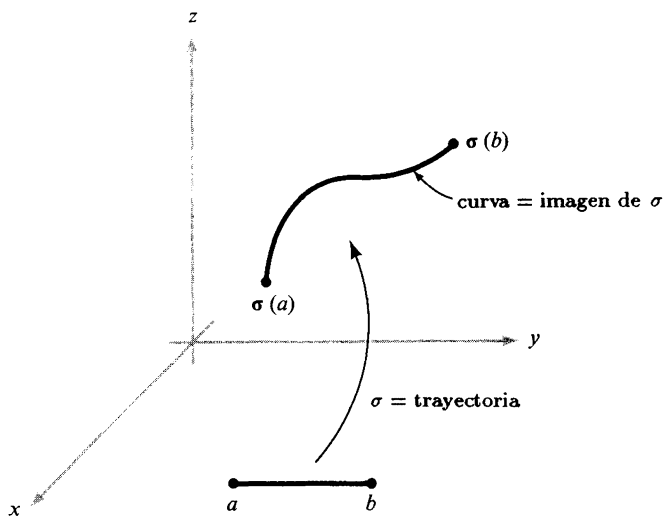


Figura 3.1.1 La función σ es la trayectoria; su imagen es la curva que "vemos".

En esta sección definiremos de manera precisa el concepto de trayectoria, daremos algunos ejemplos y mostraremos cómo las trayectorias pueden modelar el camino que siguen objetos en movimiento. Después definiremos velocidad y aceleración de trayectorias y aplicaremos estas ideas a la segunda ley de Newton, del movimiento, y al movimiento de los planetas en órbitas circulares.

DEFINICIÓN *Una* ***trayectoria*** *en* $\mathbf{R}^n$ *es una función* $\boldsymbol{\sigma}\colon [a,b] \to \mathbf{R}^n$. *Si* $\boldsymbol{\sigma}$ *es diferenciable, decimos que* $\boldsymbol{\sigma}$ *es una trayectoria* ***diferenciable****. Si* $\boldsymbol{\sigma}$ *es de clase* C^1, *decimos que* $\boldsymbol{\sigma}$ *es una* C^1 ***trayectoria****. Los puntos* $\boldsymbol{\sigma}(a)$ *y* $\boldsymbol{\sigma}(b)$ *se llaman* ***extremos*** *de la trayectoria. La imagen de* $\boldsymbol{\sigma}$ *se llama* ***curva*** *de* $\boldsymbol{\sigma}$.

Es útil denotar la variable como t y pensar que $\boldsymbol{\sigma}(t)$ va trazando una curva en $\mathbf{R}^n$ conforme t va variando. A menudo imaginamos t como el tiempo y $\boldsymbol{\sigma}(t)$ como la posición de una partícula en movimiento en el tiempo t. Si $\boldsymbol{\sigma}$ es una trayectoria en $\mathbf{R}^3$, podemos escribir $\boldsymbol{\sigma}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ y llamamos a $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$, *funciones componentes* de $\boldsymbol{\sigma}$. Queda claro que de manera similar podemos formar funciones componentes en $\mathbf{R}^2$ o, en general, en $\mathbf{R}^n$.

EJEMPLO 1 La recta L en $\mathbf{R}^3$ que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) en la dirección del vector $\mathbf{v}$ es la curva de la trayectoria

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = (x_0, y_0, z_0) + t\mathbf{v}$$

para $t \in \mathbf{R}$ (ver la figura 3.1.2). ▲

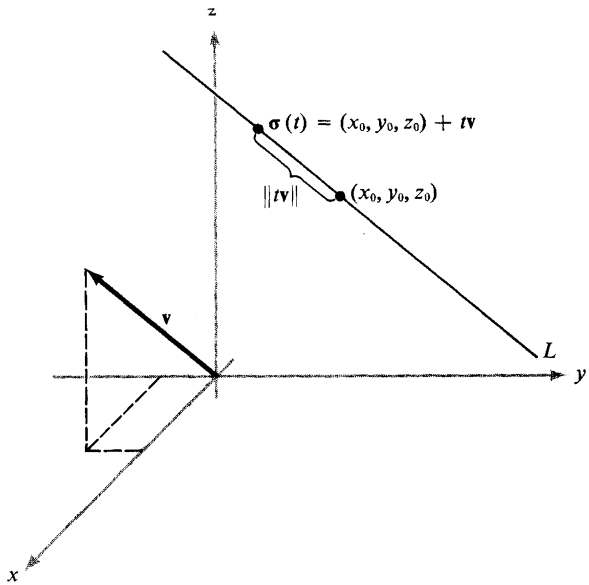


Figura 3.1.2 L es la recta en el espacio que pasa por (x_0, y_0, z_0) en dirección de $\mathbf{v}$; su ecuación es $\sigma(t) = (x_0, y_0, z_0) + t\mathbf{v}$.

EJEMPLO 2 El círculo unitario en el plano está representado por la trayectoria

$$\sigma: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2, \qquad \sigma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$$

(ver la figura 3.1.3). La imagen de σ, esto es, el conjunto de puntos $\sigma(t) \in \mathbf{R}^2$, para $t \in \mathbf{R}$, es el círculo unitario. ▲

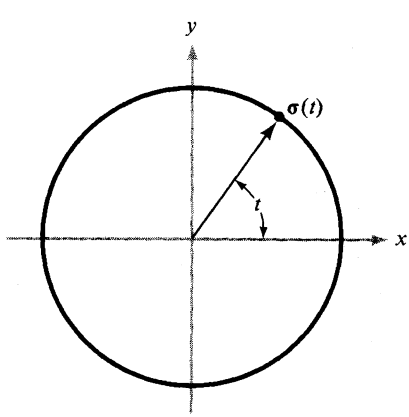


Figura 3.1.3 $\sigma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ es una trayectoria cuya imagen es el círculo unitario.

EJEMPLO 3 La trayectoria $\sigma(t) = (t, t^2)$ tiene una curva que es un arco parabólico. La curva coincide con la gráfica de $f(x) = x^2$ (ver la figura 3.1.4).

▲

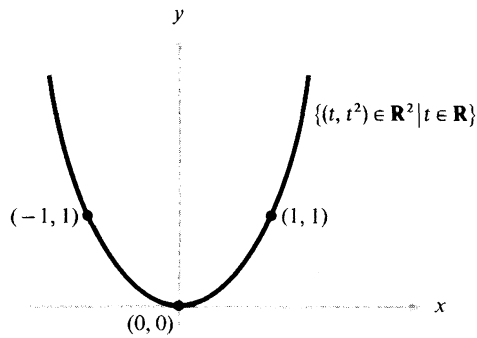


Figura 3.1.4 La imagen de $\sigma(t) = (t, t^2)$ es la parábola $y = x^2$.

EJEMPLO 4 La función $\sigma: t \mapsto (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t)$ describe la función de posición de un punto en un círculo de radio 1, que va rodando. El círculo está en el plano xy y rueda a lo largo del eje x con rapidez constante; esto es, el centro del círculo se mueve hacia la derecha a lo largo de la recta $y = 1$, con rapidez constante de 1

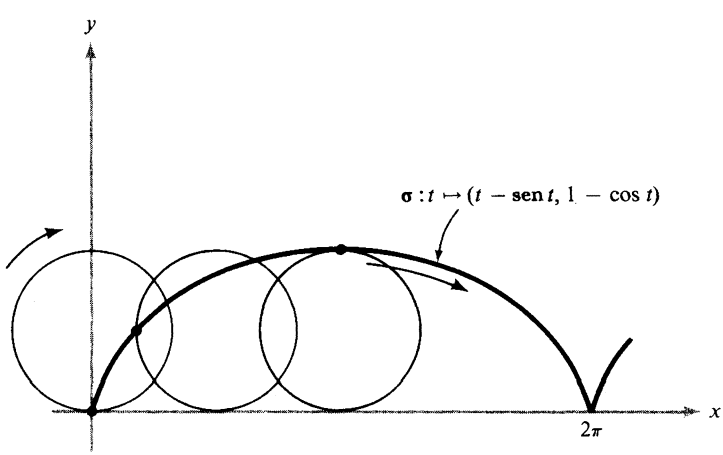


Figura 3.1.5 Esta curva se llama cicloide. Es la trayectoria descrita por un punto moviéndose sobre un círculo que rueda.

radián por unidad de tiempo. El movimiento del punto $\boldsymbol{\sigma}(t)$ es más complicado; su curva se conoce como *cicloide* (ver la figura 3.1.5). ▲

Por lo general, las partículas que se mueven en el espacio lo hacen en curvas suaves. Por ejemplo, las partículas, usualmente, no desaparecen y espontáneamente reaparecen en otro punto, ni cambian repentinamente de velocidad. Así, por el resto de esta sección, restringiremos nuestro estudio a trayectorias suficientemente suaves, digamos C^1.

En el capítulo 2 aprendimos que si $\boldsymbol{\sigma}$ es una trayectoria en $\mathbf{R}^3$, su derivada, $\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma}(t)$, es una matriz de 3×1:

$$\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma}(t) = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix}.$$

Sea $\boldsymbol{\sigma}'(t)$ el correspondiente vector (renglón). Así,

$$\boldsymbol{\sigma}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

de modo que,

$$\boldsymbol{\sigma}'(t_0) = \operatorname*{límite}_{h \to 0} \frac{\boldsymbol{\sigma}(t_0 + h) - \boldsymbol{\sigma}(t_0)}{h}.$$

Si nos referimos a la figura 3.1.6, podemos argumentar intuitivamente que el vector $\boldsymbol{\sigma}'(t_0)$ deberá ser paralelo a la recta L, tangente a la trayectoria $\boldsymbol{\sigma}$ en el punto $\boldsymbol{\sigma}(t_0)$, y que deberá representar la velocidad de la partícula. En efecto,

$$\frac{\boldsymbol{\sigma}(t_0 + h) - \boldsymbol{\sigma}(t_0)}{h}$$

representa la velocidad dirigida promedio en el intervalo de tiempo de t_0 a $t_0 + h$ (es decir, el desplazamiento total dividido entre el tiempo transcurrido). Por lo tanto, cuando $h \to 0$, esta expresión tiende al vector de velocidad instantánea. Esto conduce a la siguiente definición.

DEFINICIÓN *Sea $\boldsymbol{\sigma}: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ una trayectoria de clase C^1. El* ***vector velocidad*** *en $\boldsymbol{\sigma}(t)$ está dado por $\mathbf{v}(t) = \boldsymbol{\sigma}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$, y la* ***rapidez*** *de la partícula está dada por $S(t) = \|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|$, la longitud del vector $\boldsymbol{\sigma}'(t)$.*

Como el vector velocidad $\boldsymbol{\sigma}'(t_0)$ es paralelo a la recta L tangente a la trayectoria $t \mapsto \boldsymbol{\sigma}(t)$ en el punto $\boldsymbol{\sigma}(t_0)$, una ecuación de la recta L tangente a $t \mapsto \boldsymbol{\sigma}(t)$ en $\boldsymbol{\sigma}(t_0)$ deberá estár dada por la fórmula $\lambda \mapsto \boldsymbol{\sigma}(t_0) + \lambda\boldsymbol{\sigma}'(t_0)$, donde el parámetro λ varía entre los números reales (ver la figura 3.1.7).

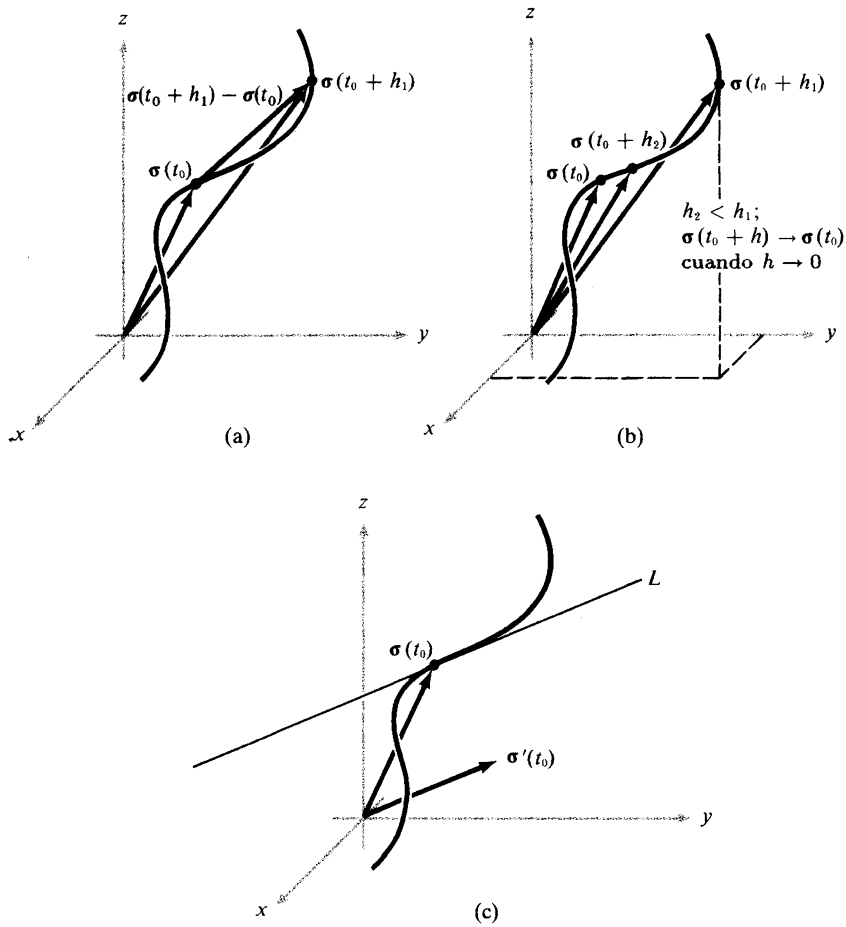


Figura 3.1.6 Ilustración de la geometría de la definición de la derivada de una trayectoria: $\sigma'(t_0) = \text{límite}_{h\to 0}[\sigma(t_0+h) - \sigma(t_0)]/h$.

(a) $[\sigma(t_0+h) - \sigma(t_0)]/h$ es un vector paralelo al vector que va de $\sigma(t_0)$ a $\sigma(t_0+h)$ para $h = h_1$.

(b) El mismo vector para un incremento menor $h = h_2$.

(c) Caso límite $h \to 0$.

DEFINICIÓN *Sea σ una curva de clase C^1 en $\mathbf{R}^3$. La* ***recta tangente*** *a σ en $\sigma(t_0)$ está dada en forma paramétrica por**

$$\mathbf{l}(\lambda) = \sigma(t_0) + \lambda\sigma'(t_0).$$

*Hablando estrictamente, esta definición se deberá usar sólo si $\sigma'(t_0) \neq \mathbf{0}$. Ver razones en la página 205.

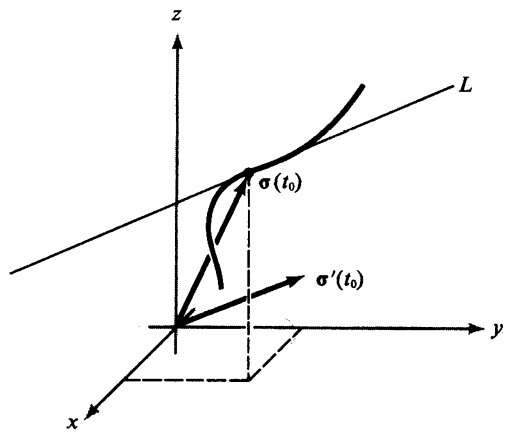


Figura 3.1.7 La recta L tangente a una trayectoria σ en $\sigma(t_0)$ tiene la ecuación $\mathrm{l}(\lambda) = \sigma(t_0) + \lambda\sigma'(t_0)$.

EJEMPLO 5 Si $\sigma: t \mapsto (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, entonces el vector velocidad es $\mathbf{v}(t) = \sigma'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 1)$. La rapidez de un punto es la magnitud de la velocidad:

$$S(t) = \|\mathbf{v}(t)\| = (\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + 1)^{1/2} = \sqrt{2}.$$

Así, el punto se mueve con rapidez constante, aunque su velocidad no sea constante, pues cambia continuamente de dirección. La trayectoria del punto cuyo movimiento está dado por σ se llama hélice (circular recta) (ver la figura 3.1.8). La hélice está sobre un cilindro circular recto. ▲

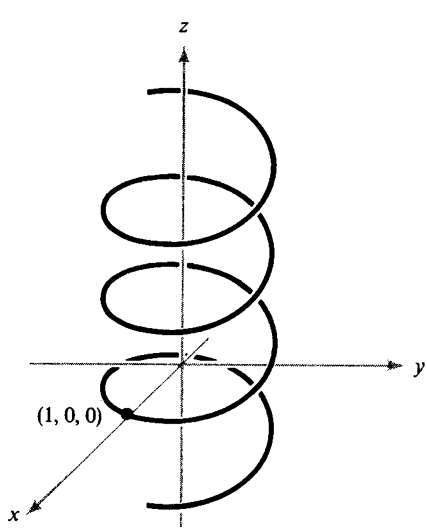


Figura 3.1.8 $\sigma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ es una hélice circular recta.

Dada una partícula moviéndose sobre una trayectoria $\sigma(t)$, es natural definir la tasa de cambio del vector velocidad como *aceleración*. Así,

$$\mathbf{a}(t) = \sigma''(t) = (x''(t), y''(t), z''(t)).$$

Si una partícula de masa m se mueve en $\mathbf{R}^3$, la fuerza $\mathbf{F}$ que actúa sobre ella en el punto $\sigma(t)$, se relaciona con la aceleración por medio de la *segunda ley de Newton:*

$$\mathbf{F}(\sigma(t)) = m\mathbf{a}(t).$$

En particular, si no actúa fuerza alguna sobre una partícula, $\mathbf{a}(t) = \mathbf{0}$, de modo que $\sigma'(t)$ es constante y la partícula sigue una recta.

EJEMPLO 6 *Considerar una partícula moviéndose sobre la trayectoria descrita en el ejemplo 5, donde t es el tiempo. En el tiempo $t = \pi$ la partícula deja la trayectoria y se va por una tangente (como se despega el lodo de una rueda de bicicleta). Hallar la ubicación de la partícula en el tiempo $t = 2\pi$. Suponer que ninguna fuerza actúa sobre ella después de dejar la hélice (ver la figura 3.1.9).*

SOLUCIÓN Notamos que $\mathbf{v}(\pi) = (0, -1, 1)$, de modo que la partícula, después de dejar la primera curva, viaja en trayectoria recta a lo largo de la recta L, que es paralela al vector velocidad $\mathbf{v}(\pi) = \sigma'(\pi)$. Si $t \mapsto \mathbf{c}(t)$ representa la trayectoria de la partícula para $t \geq \pi$, el vector velocidad, $\mathbf{c}'(t)$, debe ser constante, ya

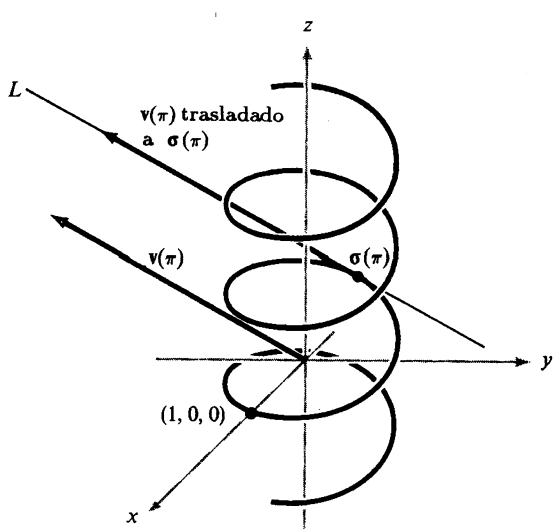


Figura 3.1.9 Búsqueda del vector velocidad de la hélice circular recta. (El dibujo no está a escala.)

que después de que la partícula deja la curva ninguna fuerza actúa sobre ella. Entonces $\mathbf{c}'(t) = \boldsymbol{\sigma}'(\pi) = \mathbf{v}(\pi) = (0, -1, 1)$ y $\mathbf{c}(\pi) = \boldsymbol{\sigma}(\pi) = (-1, 0, \pi)$.

Como $t \mapsto \mathbf{c}(t)$ es una trayectoria recta paralela a $\mathbf{v}(\pi)$, su ecuación está dada por $t \mapsto \mathbf{w} + t\mathbf{v}(\pi) = \mathbf{w} + t(0, -1, 1)$, donde $\mathbf{w}$ es algún vector constante. Para hallar $\mathbf{w}$ notamos que $\mathbf{c}(\pi) = \mathbf{w} + \pi(0, -1, 1) = \boldsymbol{\sigma}(\pi) = (-1, 0, \pi)$, de modo que $\mathbf{w} = (-1, 0, \pi) - (0, -\pi, \pi) = (-1, \pi, 0)$. Así, $\mathbf{c}(t) = (-1, \pi, 0) + t(0, -1, 1)$. En consecuencia, $\mathbf{c}(2\pi) = (-1, \pi, 0) + 2\pi(0, -1, 1) = (-1, -\pi, 2\pi)$. ▲

En el problema para determinar la trayectoria $\boldsymbol{\sigma}(t)$ de una partícula, dada su masa, posición y velocidad iniciales, y una fuerza, la ley de Newton se vuelve una ecuación diferencial, (i.e., una ecuación que incluye derivadas) para $\boldsymbol{\sigma}(t)$, y se pueden usar las técnicas de las ecuaciones diferenciales para resolverlo. Por ejemplo, un planeta moviéndose alrededor del Sol (considerado situado en el origen en $\mathbf{R}^3$) en una trayectoria $\mathbf{r}(t)$ obedece la ley

$$m\mathbf{r}''(t) = -\frac{GmM}{\|\mathbf{r}(t)\|^3}\mathbf{r}(t), \qquad \text{o abreviando,} \qquad m\mathbf{r}'' = -\frac{GmM}{r^3}\mathbf{r},$$

donde M es la masa del Sol, m la del planeta $r = \|\mathbf{r}\|$ y G es la constante gravitacional. La relación usada para determinar la fuerza, $\mathbf{F} = -GmM\mathbf{r}/r^3$, se llama *ley de la gravitación de Newton* (ver la figura 3.1.10). No investigaremos en este libro la solución de dichas ecuaciones, sino que nos conformaremos con el siguiente caso particular.

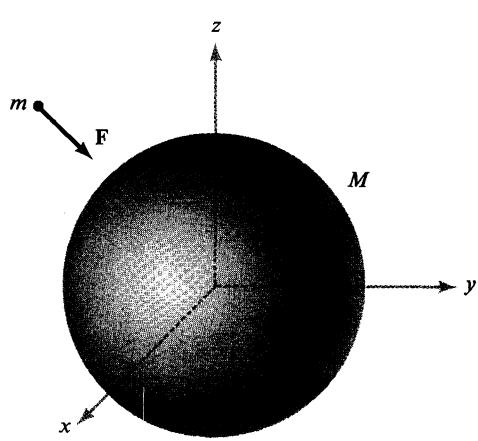


Figura 3.1.10 Una masa M atrae a una masa m con una fuerza $\mathbf{F}$ dada por la ley de la gravitación de Newton: $\mathbf{F} = -GmM\mathbf{r}/r^3$.

EJEMPLO 7 Considerar una partícula de masa m moviéndose con rapidez constante S en una trayectoria circular de radio r_0. Entonces, suponiendo que se

mueve en el plano xy, podemos suprimir la tercera componente y escribir

$$\mathbf{r}(t) = \left(r_0 \cos \frac{tS}{r_0}, r_0 \operatorname{sen} \frac{tS}{r_0}\right),$$

pues éste es un círculo de radio r_0 y $\|\mathbf{r}'(t)\| = S$. Entonces podemos ver que

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = \left(-\frac{S^2}{r_0} \cos \frac{tS}{r_0}, -\frac{S^2}{r_0} \operatorname{sen} \frac{tS}{r_0}\right) = -\frac{S^2}{r_0^2}\mathbf{r}(t).$$

Así, la aceleración va en dirección opuesta a $\mathbf{r}(t)$; esto es, se dirige hacia el centro del círculo (ver la figura 3.1.11). Esta aceleración multiplicada por la masa de la partícula se llama *fuerza centrípeta*. Nótese que aunque la rapidez es constante, la dirección de la velocidad cambia continuamente, por lo cual resulta una aceleración.

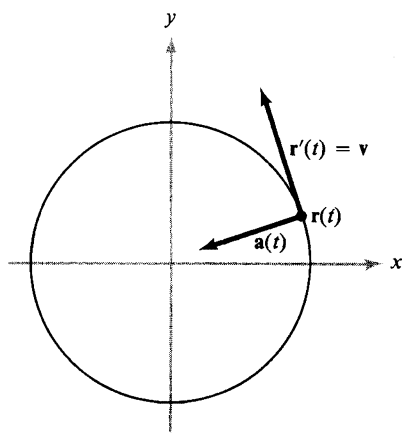


Figura 3.1.11 La posición de una partícula moviéndose con rapidez S en un círculo de radio r_0 está dada por la ecuación

$$\mathbf{r}(t) = (r_0 \cos(tS/r_0), r_0 \operatorname{sen}(tS/r_0)),$$

y su aceleración por $\mathbf{a}(t) = -S^2\mathbf{r}(t)/r_0^2$.

Supongamos ahora que tenemos un satélite de masa m moviéndose con una rapidez S alrededor de un cuerpo central con masa M en una órbita *circular* de radio r_0 (distancia al centro del cuerpo esférico central). Por la segunda ley de Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, obtenemos

$$-\frac{S^2 m}{r_0^2}\mathbf{r}(t) = -\frac{GmM}{r_0^3}\mathbf{r}(t).$$

Las longitudes de los vectores en ambos lados de esta ecuación deben ser iguales. Por lo tanto

$$S^2 = \frac{GM}{r_0}.$$

Si T es el periodo de una revolución, entonces $2\pi r_0/T = S$; sustituyendo este valor por S en la ecuación anterior y despejando T, obtenemos la regla:

$$T^2 = r_0^3 \frac{(2\pi)^2}{GM}.$$

Así, *el cuadrado del periodo es proporcional al cubo del radio.* ▲

Hemos definido dos conceptos básicos asociados con una trayectoria: su velocidad y su aceleración. Ambos están relacionados con cálculo *diferencial*. El concepto fundamental de longitud de una trayectoria, relacionado con cálculo *integral*, se tratará en la siguiente sección.

NOTA HISTÓRICA

El ejemplo 7 ilustra una de las tres famosas leyes que Kepler dedujo antes de que Newton formulara sus leyes; permite calcular el periodo de un satélite cuando está dado el radio de su órbita, y viceversa. Newton pudo deducir las tres leyes celestes de Kepler a partir de su propia ley de gravitación. El preclaro orden matemático del universo establecido por estos hombres y sus contemporáneos tuvo un gran impacto en el pensamiento del siglo dieciocho.

Newton jamás escribió sus leyes como ecuaciones analíticas. El primero en hacerlo fue Euler, alrededor de 1750. (Ver C. Truesdell, *Essays in the History of Mechanics*, Springer, Nueva York, 1968.) Newton hizo sus deducciones sólo por medios geométricos (al menos en lo publicado).

EJERCICIOS

1. Hallar $\boldsymbol{\sigma}'(t)$ y $\boldsymbol{\sigma}'(0)$ en cada uno de los casos siguientes.

(a) $\boldsymbol{\sigma}(t) = (\operatorname{sen} 2\pi t, \cos 2\pi t, 2t - t^2)$ (b) $\boldsymbol{\sigma}(t) = (e^t, \cos t, \operatorname{sen} t)$

(c) $\boldsymbol{\sigma}(t) = (t^2, t^3 - 4t, 0)$ (d) $\boldsymbol{\sigma}(t) = (\operatorname{sen} 2t, \log(1 + t), t)$

2. Determinar los vectores velocidad y aceleración, y la ecuación de la recta tangente para cada una de las curvas siguientes en el valor especificado de t.

(a) $\mathbf{r}(t) = 6t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}, t = 0$ (b) $\boldsymbol{\sigma}(t) = (\operatorname{sen} 3t, \cos 3t, 2t^{3/2}), t = 1$

(c) $\boldsymbol{\sigma}(t) = (\cos^2 t, 3t - t^3, t), t = 0$ (d) $\boldsymbol{\sigma}(t) = (0, 0, t), t = 1$

3. Hallar los vectores velocidad y aceleración y la ecuación de la recta tangente para cada una de las curvas siguientes, en el valor dado de t.

(a) $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} 2t)\mathbf{j}, t = 0$ $\boxed{\text{(b)}}$ $\boldsymbol{\sigma}(t) = (t \operatorname{sen} t, t \cos t, \sqrt{3}t), t = 0$

(c) $\mathbf{r}(t) = \sqrt{2}t\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}, t = 0$ (d) $\boldsymbol{\sigma}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \frac{2}{3}t^{3/2}\mathbf{k}, t = 9$

4. ¿Qué fuerza actúa en el ejercicio 2(a), sobre una partícula de masa m en $t = 0$ si sigue la trayectoria dada?

$\boxed{\textbf{5.}}$ Sea una partícula de 1 gramo (g) de masa, que siga la trayectoria del ejercicio 3(a), con unidades en segundos y centímetros. ¿Qué fuerza actúa sobre ella en $t = 0$? (Escribir las unidades en la respuesta.)

6. Sea $\boldsymbol{\sigma}$ una trayectoria en $\mathbf{R}^3$ con aceleración cero. Probar que $\boldsymbol{\sigma}$ es una recta o un punto.

7. Hallar la trayectoria $\boldsymbol{\sigma}$ tal que $\boldsymbol{\sigma}(0) = (0, -5, 1)$ y $\boldsymbol{\sigma}'(t) = (t, e^t, t^2)$.

8. Hallar trayectorias $\boldsymbol{\sigma}(t)$ que representen las siguientes curvas o trayectorias. Esbozar.

(a) $\{(x, y) | y = e^x\}$ $\boxed{\text{(b)}}$ $\{(x, y) | 4x^2 + y^2 = 1\}$

(c) Una recta en $\mathbf{R}^3$ que pasa por el origen y el punto (a, b, c)

(d) $\{(x, y) | 9x^2 + 16y^2 = 4\}$

9. Un satélite da vueltas a 500 km sobre la Tierra en órbita circular. Calcular su periodo. ($G = 6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$, $M = 5.98 \times 10^{24}$ kg = masa de la Tierra, radio de la Tierra $= 6.37 \times 10^3$ km. Aquí G está dada en unidades MKS —metros, kilogramos, segundos.)

10. Suponer que una partícula sigue la trayectoria $\boldsymbol{\sigma}(t) = (e^t, e^{-t}, \cos t)$ hasta que sale por una tangente en $t = 1$. ¿Dónde está en $t = 2$?

11. Suponer que una partícula que va siguiendo la trayectoria $\boldsymbol{\sigma}(t) = (t^2, t^3 - 4t, 0)$ sale por una tangente en $t = 2$. Calcular la posición de la partícula en $t = 3$.

12. Probar las reglas siguientes para trayectorias diferenciables (en $\mathbf{R}^n$ para (a) y $\mathbf{R}^3$ para (b)).

(a) $\dfrac{d}{dt}[\boldsymbol{\sigma}(t) \cdot \boldsymbol{\rho}(t)] = \dfrac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} \cdot \boldsymbol{\rho}(t) + \boldsymbol{\sigma}(t) \cdot \dfrac{d\boldsymbol{\rho}}{dt}$

$\boxed{\text{(b)}}$ $\dfrac{d}{dt}[\boldsymbol{\sigma}(t) \times \boldsymbol{\rho}(t)] = \dfrac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} \times \boldsymbol{\rho}(t) + \boldsymbol{\sigma}(t) \times \dfrac{d\boldsymbol{\rho}}{dt}$

13. Probar la siguiente regla para trayectorias diferenciables en $\mathbf{R}^3$:

$$\frac{d}{dt}\{\boldsymbol{\sigma}(t) \cdot [\boldsymbol{\rho}(t) \times \boldsymbol{\tau}(t)]\} = \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} \cdot [\boldsymbol{\rho}(t) \times \boldsymbol{\tau}(t)] + \boldsymbol{\sigma}(t) \cdot \left[\frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} \times \boldsymbol{\tau}(t)\right] + \boldsymbol{\sigma}(t) \cdot \left[\boldsymbol{\rho}(t) \times \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}\right]$$

14. Sea $\sigma(t)$ una trayectoria, $\mathbf{v}(t)$ la velocidad y $\mathbf{a}(t)$ la aceleración. Suponer que $\mathbf{F}$ es una función de $\mathbf{R}^3$ en $\mathbf{R}^3$, $m > 0$ y $\mathbf{F}(\sigma(t)) = m\mathbf{a}(t)$ (segunda ley de Newton). Probar que

$$\frac{d}{dt}[m\sigma(t) \times \mathbf{v}(t)] = \sigma(t) \times \mathbf{F}(\sigma(t))$$

(es decir, "tasa de cambio del momento angular = torca"). ¿Qué se puede concluir si $\mathbf{F}(\sigma(t))$ es paralelo a $\sigma(t)$? ¿Es este el caso del movimiento planetario?

15. Continuar las investigaciones en el ejercicio 4 para probar la ley de Kepler que afirma que un planeta en movimiento alrededor del Sol efectúa ese movimiento en un plano fijo.

3.2 LONGITUD DE ARCO

Considerar una trayectoria dada $\sigma(t)$. Podemos pensar $\sigma(t)$ como la trayectoria de una partícula con rapidez $S(t) = \|\sigma'(t)\|$; esta trayectoria traza una curva en el espacio. ¿Cuál es la longitud de esta curva conforme t varía de, digamos, a a b? Intuitivamente, esto debiera ser precisamente el total de la distancia recorrida, esto es $\int_a^b S(t)\,dt$. Esto nos conduce a lo siguiente.

DEFINICIÓN *Sea $\sigma\colon [a,b] \to \mathbf{R}^n$ una trayectoria de clase C^1. La* ***longitud*** *de σ está definida como*

$$l(\sigma) = \int_a^b \|\sigma'(t)\|\,dt.$$

En $\mathbf{R}^3$, la fórmula es

$$l(\sigma) = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\,dt,$$

y para curvas en $\mathbf{R}^2$, la fórmula es

$$l(\sigma) = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt.$$

EJEMPLO 1 La longitud de arco de la curva $\sigma(t) = (r\cos t, r\operatorname{sen} t)$, para $0 \le t \le 2\pi$, es

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r\operatorname{sen} t)^2 + (r\cos t)^2}\,dt = 2\pi r,$$

lo cual no es más que la circunferencia de un círculo de radio r. Si permitimos que $0 \le t \le 4\pi$, hubiéramos obtenido $4\pi r$, pues la trayectoria recorrería dos veces el mismo círculo (figura 3.2.1). ▲

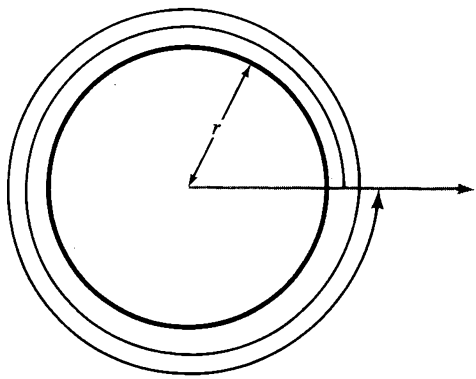


Figura 3.2.1 La longitud de arco de un círculo recorrido dos veces es $4\pi r$.

EJEMPLO 2 *Hallar la longitud de arco de la hélice definida por* $\boldsymbol{\rho}\colon [0, 4\pi] \to \mathbf{R}^3$, $t \mapsto (\cos 2t, \operatorname{sen} 2t, \sqrt{5}t)$.

SOLUCIÓN El vector velocidad es $\boldsymbol{\rho}'(t) = (-2\operatorname{sen} 2t, 2\cos 2t, \sqrt{5})$ que tiene la magnitud

$$\|\boldsymbol{\rho}'(t)\| = \sqrt{4(\operatorname{sen} 2t)^2 + 4(\cos 2t)^2 + 5} = \sqrt{9} = 3.$$

Entonces la longitud de arco de $\boldsymbol{\rho}$ es

$$l(\boldsymbol{\rho}) = \int_0^{4\pi} \|\boldsymbol{\rho}'(t)\|\, dt = \int_0^{4\pi} 3\, dt = 12\pi. \qquad \blacktriangle$$

EJEMPLO 3 *Considerar el punto con función de posición* $\boldsymbol{\sigma}\colon t \mapsto (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t)$ *que traza la cicloide estudiada en el ejemplo 4, sección 3.1. Hallar la velocidad, rapidez y longitud de arco.*

SOLUCIÓN El vector velocidad es $\boldsymbol{\sigma}'(t) = (1 - \cos t, \operatorname{sen} t)$ y la rapidez del punto $\boldsymbol{\sigma}(t)$ es

$$\|\boldsymbol{\sigma}'(t)\| = \sqrt{(1 - \cos t)^2 + sen^2 t} = \sqrt{2 - 2\cos t}.$$

Por lo tanto, $\boldsymbol{\sigma}(t)$ se mueve con rapidez variable, no obstante que, como ya descubrimos, el círculo rueda con rapidez constante. Más aún, la rapidez de $\boldsymbol{\sigma}(t)$ es cero cuando t es un múltiplo entero de 2π. En estos valores de t, la coordenada y del punto $\boldsymbol{\sigma}(t)$ es cero por lo que el punto está en el eje x. La longitud de arco

de un ciclo es

$$
\begin{aligned}
l(\sigma) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\, dt \\
&= 2\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}\, dt \\
&= 2\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\frac{t}{2}\, dt \qquad \left(1 - \cos t = 2\operatorname{sen}^2\frac{t}{2} \ \text{ y } \ \operatorname{sen}\frac{t}{2} \geq 0 \ \text{ en } [0, 2\pi]\right) \\
&= 4\left(-\cos\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 8. \qquad \blacktriangle
\end{aligned}
$$

---

*SECCIÓN OPTATIVA

En esta sección se supone que el lector está familiarizado con la integral definida, definida en términos de sumas de Riemann. En caso de no conocer bien el tema, se puede posponer hasta después del capítulo 5.

En $\mathbf{R}^3$ hay otra manera de justificar la fórmula para $l(\sigma)$ dada en la definición anterior. Este método se basa en aproximaciones poligonales, y se procede como sigue: partimos el intervalo $[a, b]$ en N subintervalos de igual longitud:

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b;$$

$$t_{i+1} - t_i = \frac{b-a}{N} \qquad \text{para} \qquad 0 \leq i \leq N-1.$$

Después consideramos la poligonal obtenida al unir pares sucesivos de puntos $\sigma(t_i)$, $\sigma(t_{i+1})$ para $0 \leq i \leq N-1$. Esto produce una aproximación poligonal a σ como la de la figura 3.2.2. De la fórmula para la distancia en $\mathbf{R}^3$ se sigue que el segmento de $\sigma(t_i)$ a $\sigma(t_{i+1})$ tiene longitud

$$\|\sigma(t_{i+1}) - \sigma(t_i)\| = \sqrt{[x(t_{i+1}) - x(t_i)]^2 + [y(t_{i+1}) - y(t_i)]^2 + [z(t_{i+1}) - z(t_i)]^2},$$

donde $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Aplicando el teorema del valor medio a $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ en $[t_i, t_{i+1}]$, obtenemos tres puntos t_i^*, t_i^{**} y t_i^{***} tales que

$$x(t_{i+1}) - x(t_i) = x'(t_i^*)(t_{i+1} - t_i),$$
$$y(t_{i+1}) - y(t_i) = y'(t_i^{**})(t_{i+1} - t_i)$$

y

$$z(t_{i+1}) - z(t_i) = z'(t_i^{***})(t_{i+1} - t_i).$$

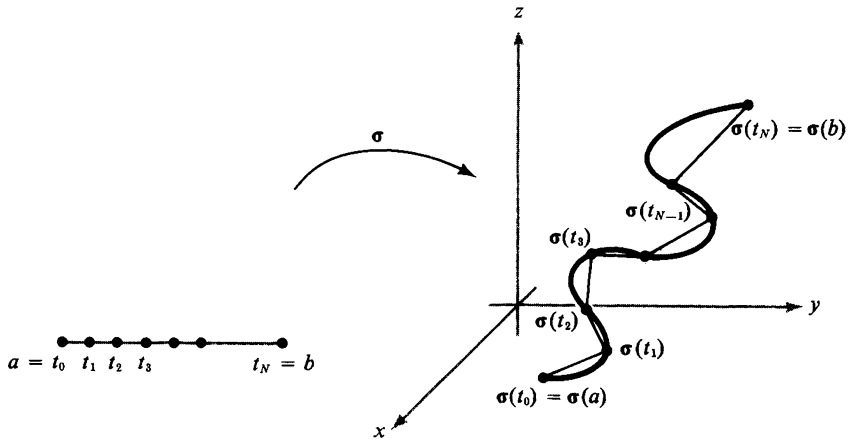


Figura 3.2.2 Una trayectoria σ se puede aproximar mediante una trayectoria poligonal obtenida al unir cada $\sigma(t_i)$ con $\sigma(t_{i+1})$ por medio de una recta.

Así, el segmento de $\sigma(t_i)$ a $\sigma(t_{i+1})$ tiene longitud

$$\sqrt{[x'(t_i^*)]^2 + [y'(t_i^{**})]^2 + [z'(t_i^{***})]^2}(t_{i+1} - t_i).$$

Entonces la longitud de nuestra poligonal de aproximación es

$$S_N = \sum_{i=0}^{N-1} \sqrt{[x'(t_i^*)]^2 + [y'(t_i^{**})]^2 + [z'(t_i^{***})]^2}(t_{i+1} - t_i).$$

Cuando $N \to \infty$, esta poligonal aproxima mejor la imagen de σ. Por lo tanto definimos la longitud de arco de σ como el límite, si es que existe, de la sucesión S_N cuando $N \to \infty$. Como se supone que las derivadas x', y' y z' son continuas en $[a, b]$, podemos concluir que, de hecho, el límite existe y está dado por

$$\operatorname*{límite}_{N\to\infty} S_N = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, dt.$$

(La teoría de la integración relaciona la integral con las sumas mediante la fórmula

$$\int_a^b f(t)\, dt = \operatorname*{límite}_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N-1} f(t_i^*)(t_{i+1} - t_i),$$

donde $t_0, \ldots, t_N$ es una partición de $[a, b]$, $t_i^* \in [t_i, t_{i+1}]$ es arbitrario y f es una función continua. Es posible que aquí haya *puntos distintos* t_i^*, t_i^{**} y t_i^{***} de modo que habrá que ampliar ligeramente esta fórmula.)

La imagen de una trayectoria de clase C^1 no necesariamente es "muy suave"; en efecto, puede tener dobleces puntiagudos o cambios bruscos de dirección. Por ejemplo, la cicloide del ejemplo 3 anterior (ver además la figura 3.1.5) tiene picos en los puntos donde $\boldsymbol{\sigma}(t)$ toca el eje x (esto es, donde $t = 2\pi n$, $n = 0, \pm 1, \ldots$). Otro ejemplo es el *hipocicloide de cuatro picos*, $\boldsymbol{\sigma}\colon [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$, $t \mapsto (\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t)$, que tiene picos en cuatro puntos (figura 3.2.3). Sin embargo, en esos puntos, $\boldsymbol{\sigma}'(t) = \mathbf{0}$, la recta tangente no está bien definida y la rapidez del punto $\boldsymbol{\sigma}(t)$ es cero. Es evidente que la dirección de $\boldsymbol{\sigma}(t)$ puede cambiar de manera abrupta en puntos cercanos al reposo.

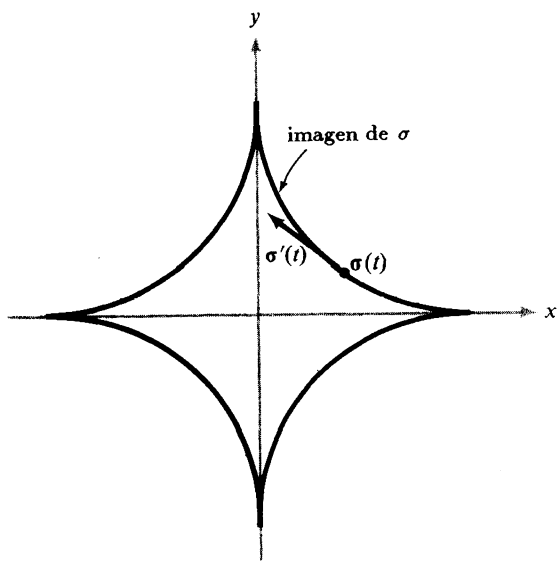


Figura 3.2.3 La imagen de la trayectoria suave $\boldsymbol{\sigma}(t) = (\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t)$, una hipocicloide, no "se ve suave".

Si tenemos una trayectoria $\boldsymbol{\sigma}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ en $\mathbf{R}^3$, es costumbre denotarla por $\mathbf{s}(t) = \boldsymbol{\sigma}(t)$, de modo que

$$\boldsymbol{\sigma}'(t) = \frac{d\mathbf{s}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}.$$

Así,

$$\|\boldsymbol{\sigma}'(t)\| = \left\|\frac{d\mathbf{s}}{dt}\right\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

En esta notación se puede escribir la longitud de arco de $\boldsymbol{\sigma}$ como

$$l(\boldsymbol{\sigma}) = \int_a^b \left\|\frac{d\mathbf{s}}{dt}\right\| dt.$$

También es común introducir la *función de longitud de arco* $s(t)$ dada por

$$s(t) = \int_a^t \|\sigma'(\tau)\|\, d\tau,$$

de modo que

$$s'(t) = \|\sigma'(t)\| = \left\| \frac{d\mathbf{s}}{dt} \right\|$$

y

$$l(\sigma) = \int_a^b s'(t)\, dt = s(b) - s(a) = s(b).$$

EJEMPLO 4 *Una partícula se mueve a lo largo de una hipocicloide de acuerdo a las ecuaciones*

$$x = cos^3 t, \qquad y = \operatorname{sen}^3 t, \qquad a \le t \le b.$$

¿Cuáles son la velocidad y rapidez de la partícula?

SOLUCIÓN El vector velocidad de la partícula es

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} = -(3 \operatorname{sen} t \cos^2 t)\mathbf{i} + (3 \cos t \operatorname{sen}^2 t)\mathbf{j}$$

y su rapidez es

$$\begin{aligned} S(t) = \left\| \frac{d\mathbf{s}}{dt} \right\| &= (9 \operatorname{sen}^2 t \cos^4 t + 9 \cos^2 t \operatorname{sen}^4 t)^{1/2} \\ &= 3|\operatorname{sen} t|\,|\cos t|. \qquad \blacktriangle \end{aligned}$$

La definición de la longitud de arco puede extenderse hasta incluir trayectorias que no sean de clase C^1 pero que se formen al pegar un número finito de trayectorias C^1. Una trayectoria $\sigma\colon [a,b] \to \mathbf{R}^3$, $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ se llama *trayectoria de clase C^1 a trozos* si existe una partición de $[a,b]$

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b$$

tal que la función σ restringida a cada intervalo $[t_i, t_{i+1}]$, $0 \le i \le N-1$, sea continuamente diferenciable. Esto significa que la derivada existe y es continua en $[t_i, t_{i+1}]$; las derivadas en los extremos de cada intervalo se calculan usando límites desde dentro del intervalo (esto es, límites de un lado, como en la pág. 117). En el caso de que una trayectoria sea C^1 a trozos, definimos la longitud de arco de la trayectoria como la suma de las longitudes de arco de las trayectorias C^1 que la forman. Esto es, si la partición

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b$$

satisface las condiciones dadas anteriormente, definimos

$$\text{longitud de arco de } \boldsymbol{\sigma} = \sum_{i=0}^{N-1} (\text{longitud de arco de } \boldsymbol{\sigma} \text{ de } t_i \text{ a } t_{i+1}).$$

EJEMPLO 5 *Hallar la longitud de arco de la trayectoria* $\boldsymbol{\sigma}\colon [-1,1] \to \mathbf{R}^3$, $t \mapsto (|t|, |t-\frac{1}{2}|, 0)$.

SOLUCIÓN $\boldsymbol{\sigma}$ no es de clase C^1 pues $\sigma_1\colon t \mapsto |t|$ no es diferenciable en 0, ni tampoco $\sigma_2\colon t \mapsto |t-\frac{1}{2}|$ es diferenciable en $\frac{1}{2}$. Sin embargo, si tomamos la partición

$$-1 = t_0 < 0 = t_1 < \tfrac{1}{2} = t_2 < 1 = t_3,$$

vemos que cada $\boldsymbol{\sigma}_i$ es continuamente diferenciable en cada uno de los intervalos $[-1,0]$, $[0,\frac{1}{2}]$ y $[\frac{1}{2},1]$ y por lo tanto $\boldsymbol{\sigma}$ es continuamente diferenciable en cada intervalo. Así, $\boldsymbol{\sigma}$ es C^1 a trozos. (Ver la figura 3.2.4.)

En $[-1,0]$ tenemos $x(t) = -t$, $y(t) = -t+\frac{1}{2}$, $z(t) = 0$ y $\|\mathbf{ds}/dt\| = \sqrt{2}$; de aquí, la longitud de arco de $\boldsymbol{\sigma}$ entre -1 y 0 es $\int_{-1}^{0} \sqrt{2}\,dt = \sqrt{2}$. De manera análoga, en $[0,\frac{1}{2}]$, $x(t) = t$, $y(t) = -t+\frac{1}{2}$, $z(t) = 0$ y, de nuevo, $\|\mathbf{ds}/dt\| = \sqrt{2}$, de modo que la longitud de arco de $\boldsymbol{\sigma}$ entre 0 y $\frac{1}{2}$ es $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Finalmente, en $[\frac{1}{2},1]$, tenemos $x(t) = t$, $y(t) = t-\frac{1}{2}$, $z(t) = 0$ y la longitud de arco de $\boldsymbol{\sigma}$ entre $\frac{1}{2}$ y 1 es $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Así, la longitud de arco total de $\boldsymbol{\sigma}$ es $2\sqrt{2}$. ▲

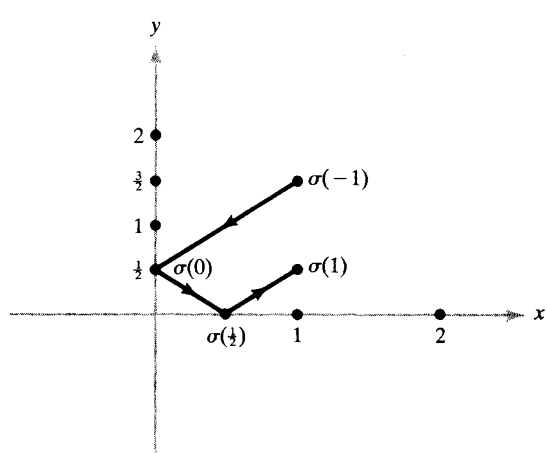


Figura 3.2.4 Un caso particular de una trayectoria C^1 a trozos: $\boldsymbol{\sigma}(t) = |t|\mathbf{i} + |t-\frac{1}{2}|\mathbf{j}$, $-1 \le t \le 1$.

EJERCICIOS

1. Calcular la longitud de arco de la curva dada en el intervalo particular*

(a) La trayectoria del ejercicio 2(a), sección 3.1, $[0, 1]$

(b) La trayectoria del ejercicio 2(b), sección 3.1, $[0, 1]$

(c) $\mathbf{s}(t) = t\mathbf{i} + t(\operatorname{sen} t)\mathbf{j} + t(\cos t)\mathbf{k}$, $[0, \pi]$

(d) $\mathbf{s}(t) = 2t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$, $[0, 2]$

(e) La trayectoria del ejercicio 3(b), sección 3.1, $[0, 1]$

(f) La trayectoria del ejercicio 3(c), sección 3.1, $[-1, 1]$

(g) La trayectoria del ejercicio 3(d), sección 3.1, $[t_0, t_1]$

2. La función de longitud de arco $s(t)$ para una trayectoria dada $\boldsymbol{\sigma}(t)$, definida por $s(t) = \int_a^t \|\boldsymbol{\sigma}'(\tau)\|\, d\tau$, representa la distancia que una partícula viajando por la trayectoria $\boldsymbol{\sigma}$ habrá recorrido en el tiempo t si comienza en el tiempo a; esto es, da la longitud de $\boldsymbol{\sigma}$ entre $\boldsymbol{\sigma}(a)$ y $\boldsymbol{\sigma}(t)$. Hallar las funciones de longitud de arco para las curvas $\boldsymbol{\alpha}(t) = (\cosh t, \operatorname{senh} t, t)$ y $\boldsymbol{\beta}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, con $a = 0$.

3. Sea $\boldsymbol{\sigma}$ la trayectoria $\boldsymbol{\sigma}(t) = (2t, t^2, \log t)$, definida para $t > 0$. Hallar la longitud de arco de $\boldsymbol{\sigma}$ entre los puntos $(2, 1, 0)$ y $(4, 4, \log 2)$.

4. Sea $\boldsymbol{\sigma}$ la trayectoria $\boldsymbol{\sigma}(t) = (t, t \operatorname{sen} t, t \cos t)$. Hallar la longitud de arco de $\boldsymbol{\sigma}$ entre $(0, 0, 0)$ y $(\pi, 0, -\pi)$.

5. Sea $\mathbf{c}(t)$ una trayectoria dada, $a \le t \le b$. Sea $s = \alpha(t)$ una nueva variable, donde α es una función dada estrictamente creciente, de clase C^1, definida en $[a, b]$. Para cada s en $[\alpha(a), \alpha(b)]$ existe un t, único, con $\alpha(t) = s$. Definir la función $\mathbf{d}\colon [\alpha(a), \alpha(b)] \to \mathbf{R}^3$ mediante $\mathbf{d}(s) = \mathbf{c}(t)$.

(a) Hacer ver que las curvas imágenes de $\mathbf{c}$ y $\mathbf{d}$ son la misma.

(b) Mostrar que $\mathbf{c}$ y $\mathbf{d}$ tienen la misma longitud de arco.

(c) Sea $s = \alpha(t) = \int_a^t \|\mathbf{c}'(\tau)\|\, d\tau$. Definir $\mathbf{d}$ como se hizo antes, mediante $\mathbf{d}(s) = \mathbf{c}(t)$. Mostrar que

$$\left\| \frac{d}{ds}\mathbf{d}(s) \right\| = 1.$$

Se dice que la trayectoria $s \mapsto \mathbf{d}(s)$ es una *reparametrización* de $\mathbf{c}$.

En los ejercicios del 6 al 11 se presenta parte de la geometría diferencial clásica de las curvas.

6. Sea $\boldsymbol{\sigma}\colon [a, b] \to \mathbf{R}^3$ una trayectoria infinitamente diferenciable (existen derivadas de todos los órdenes). Suponer que $\boldsymbol{\sigma}'(t) \neq \mathbf{0}$ para cualquier t. El vector $\boldsymbol{\sigma}'(t)/\|\boldsymbol{\sigma}'(t)\| = \mathbf{T}(t)$ es tangente a $\boldsymbol{\sigma}$ en $\boldsymbol{\sigma}(t)$ y, como $\|\mathbf{T}(t)\| = 1$, $\mathbf{T}$ se llama *tangente unitaria* a $\boldsymbol{\sigma}$.

(a) Mostrar que $\mathbf{T}'(t) \cdot \mathbf{T}(t) = 0$. (IDEA: Diferenciar $\mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{T}(t) = 1$.)

(b) Escribir una fórmula en términos de $\boldsymbol{\sigma}$ para $\mathbf{T}'(t)$.

---

*En varios de estos problemas se puede usar la fórmula

$$\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx = \tfrac{1}{2}[x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \log(x + \sqrt{x^2 + a^2})] + C$$

de la tabla de integrales que está al final del libro.

7. (a) Se dice que una trayectoria $\sigma(s)$ está *parametrizada por la longitud de arco* o, lo que es lo mismo, *tiene rapidez unitaria* si $\|\sigma'(s)\| = 1$. Mostrar que para una trayectoria parametrizada por la longitud de arco en $[a, b]$, se tiene $l(\sigma) = b - a$.

(b) La *curvatura* en un punto $\sigma(s)$ sobre una trayectoria se define por $k = \|\mathbf{T}'(s)\|$ cuando la trayectoria está parametrizada por la longitud de arco (ver los ejercicios 6 y 7(a)). Mostrar que $k = \|\sigma''(s)\|$.

(c) Si σ está dada en términos de algún otro parámetro t y $\sigma'(t)$ nunca es $\mathbf{0}$, mostrar que $k = \|\sigma'(t) \times \sigma''(t)\|/\|\sigma'(t)\|^3$, usando el ejercicio 5.

(d) Calcular la curvatura de la hélice $\sigma(t) = (1/\sqrt{2})(\cos t, \operatorname{sen} t, t)$. (Esta σ es simplemente un múltiplo escalar de la hélice circular recta de la figura 3.1.8.)

8. Si $\mathbf{T}'(t) \neq \mathbf{0}$, se sigue del ejercicio 6 que $\mathbf{N}(t) = \mathbf{T}'(t)/\|\mathbf{T}'(t)\|$ es normal (i.e., perpendicular) a $\mathbf{T}(t)$; $\mathbf{N}$ se llama *vector normal principal*. Un tercer vector unitario que es perpendicular tanto a $\mathbf{T}$ como a $\mathbf{N}$ se define por $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$; $\mathbf{B}$ se llama *vector binormal*. Juntos, $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ y $\mathbf{B}$ forman un sistema de la mano derecha de vectores ortogonales entre sí que, se puede pensar, se va moviendo a lo largo de la trayectoria (figura 3.2.5). Mostrar que

(a) $\dfrac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot \mathbf{B} = 0.$ (b) $\dfrac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot \mathbf{T} = 0.$

(c) $d\mathbf{B}/dt$ es un múltiplo escalar de $\mathbf{N}$.

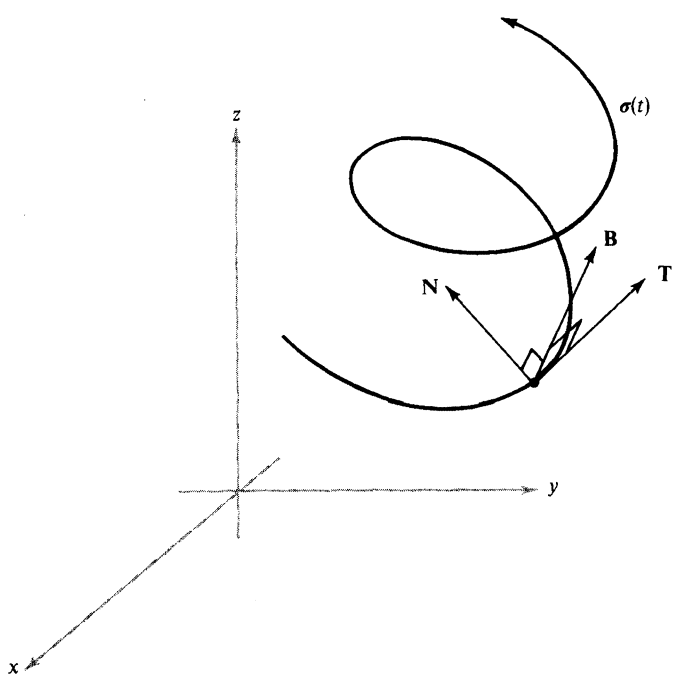


Figura 3.2.5 Tangente $\mathbf{T}$, normal principal $\mathbf{N}$ y binormal $\mathbf{B}$.

9. Si $\sigma(s)$ está parametrizada por la longitud de arco, podemos usar el resultado del ejercicio 8(c) para definir una función con valores escalares τ, llamada *torsión*, por medio de

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau\mathbf{N}.$$

(a) Mostrar que $\tau = [\sigma'(s) \times \sigma''(s)] \cdot \sigma'''(s)/\|\sigma''(s)\|^2$.

(b) Mostrar que si σ está dada en términos de algún otro parámetro t,

$$\tau = \frac{[\sigma'(t) \times \sigma''(t)] \cdot \sigma'''(t)}{\|\sigma'(t) \times \sigma''(t)\|^2}.$$

Comparar con el ejercicio7(c).

(c) Calcular la torsión de la hélice $\sigma(t) = (1/\sqrt{2})(\cos t, \operatorname{sen} t, t)$.

***10.** Mostrar que si una trayectoria está en un plano entonces su torsión es cero. Hacerlo demostrando que $\mathbf{B}$ es constante y es un vector normal al plano en el cual está σ. (Si la torsión no es cero, da una medida de cuánto se tuerce la curva fuera del plano formado por $\mathbf{T}$ y $\mathbf{N}$.)

11.** (a) Usar los resultados de los ejercicios 8 y 9 para probar las ***fórmulas de Frenet para curvas de rapidez unitaria:

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = k\mathbf{N}; \qquad \frac{d\mathbf{N}}{ds} = -k\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}; \qquad \frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau\mathbf{N}.$$

(b) Expresar nuevamente los resultados de la parte (a) como

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix}\mathbf{T}\\ \mathbf{N}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix} = \omega \times \begin{pmatrix}\mathbf{T}\\ \mathbf{N}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix}$$

para un vector adecuado ω.

***12.** En relatividad especial, el *tiempo propio* de una trayectoria $\sigma\colon [a,b] \to \mathbf{R}^4$ con $\sigma(\lambda) = (x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda), t(\lambda))$ se define como la cantidad

$$\int_a^b \sqrt{[x'(\lambda)]^2 + [y'(\lambda)]^2 + [z'(\lambda)]^2 - c^2[t'(\lambda)]^2}\,d\lambda,$$

donde c es la velocidad de la luz, una constante. En la figura 3.2.6, mostrar que

$$\text{tiempo propio(AB)} + \text{tiempo propio(BC)} < \text{tiempo propio(AC)}$$

(Esta desigualdad es un caso especial de lo que se conoce como *paradoja de los gemelos.*)

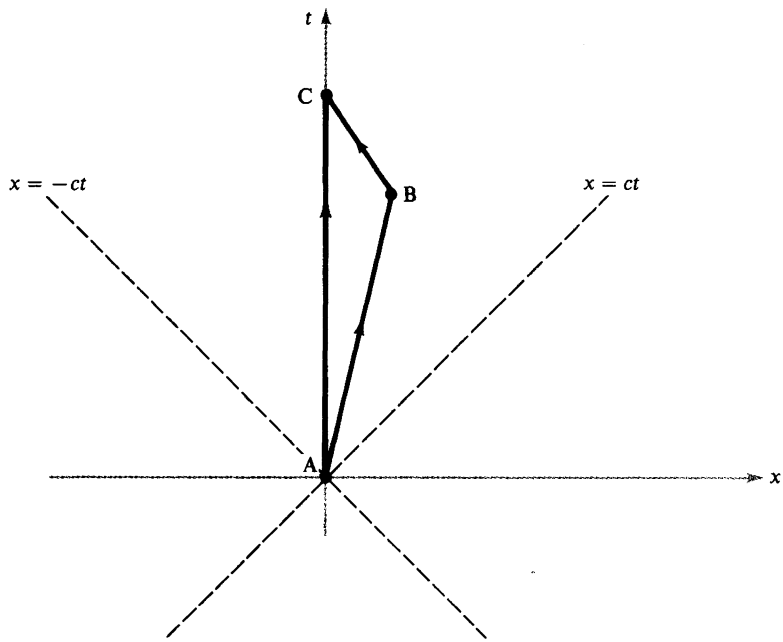


Figura 3.2.6 Desigualdad relativista del triángulo.

3.3 CAMPOS VECTORIALES

En el capítulo 2 introdujimos los campos vectoriales mediante la idea del campo vectorial gradiente. En esta sección estudiaremos algunas propiedades generales de los campos vectoriales, incluyendo su significado geométrico y físico. Es importante lograr una clara comprensión de esto para continuar con las secciones 3.4 y 3.5 y para estudiar el capítulo 8.

DEFINICIÓN *Un* ***campo vectorial*** *en* $\mathbf{R}^n$ *es una función* $\mathbf{F}: A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *que asigna a cada punto* $\mathbf{x}$ *en su dominio* A *un vector* $\mathbf{F}(\mathbf{x})$.

Podemos ilustrar gráficamente $\mathbf{F}$ adhiriendo una flecha a cada punto (figura 3.3.1). De manera análoga, una función $f: A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ que asigna un número a cada punto se llama *campo escalar*. Por ejemplo, un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z)$ en $\mathbf{R}^3$ tiene tres *campos escalares componentes* F_1, F_2 y F_3, de modo que $\mathbf{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$. Si cada campo F_1, F_2 y F_3 es una función C^k, decimos que el campo vectorial $\mathbf{F}$ es de *clase* C^k; esto equivale a decir que la función $\mathbf{F}$ es de clase C^k en el sentido expresado en el capítulo 2. Se supone que los campos vectoriales son, al menos, de clase C^1, a no ser que se diga lo contrario.

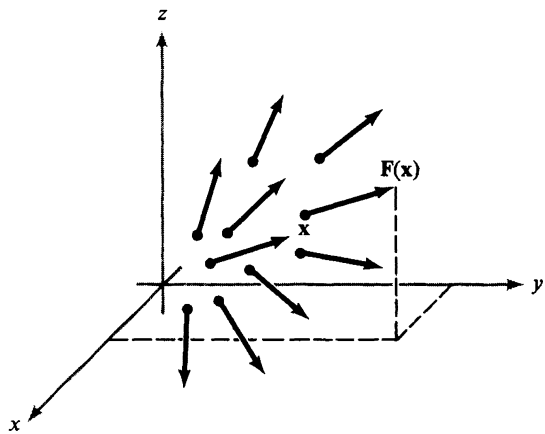


Figura 3.3.1 Un campo vectorial **F** asigna un vector (flecha) **F**(**x**) a cada punto **x** de su dominio.

Es conveniente trazar la flecha que representa **F**(**x**) de modo que comience en **x**, no en el origen (que es como se acostumbra trazar vectores). Consideramos este vector desplazado con su cola en **x** como equivalente al vector correspondiente que comienza en **0**. En el resto del libro nos ocuparemos principalmente de campos vectoriales en $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$, de modo que el término "campo vectorial" significará un campo vectorial en $\mathbf{R}^2$ o $\mathbf{R}^3$, a menos que se diga lo contrario.

EJEMPLO 1 Imaginemos un fluido moviéndose por una tubería con flujo estacionario. Si en cada punto colocamos la velocidad del fluido en ese punto obtenemos el campo de velocidad **V** del fluido (ver la figura 3.3.2). Nótese que la longitud de las flechas (la rapidez) y la dirección del flujo pueden cambiar de punto a punto. ▲

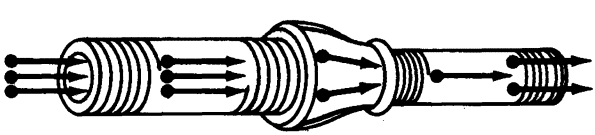


Figura 3.3.2 Campo vectorial que describe la velocidad de flujo en una tubería.

EJEMPLO 2 Considerar una pieza de material que se calienta por un lado y se enfría por otro. La temperatura en cada punto dentro del cuerpo produce un campo escalar $T(x, y, z)$. El flujo real de calor se puede marcar mediante un campo de flechas que indiquen la dirección y magnitud del flujo (figura 3.3.3).

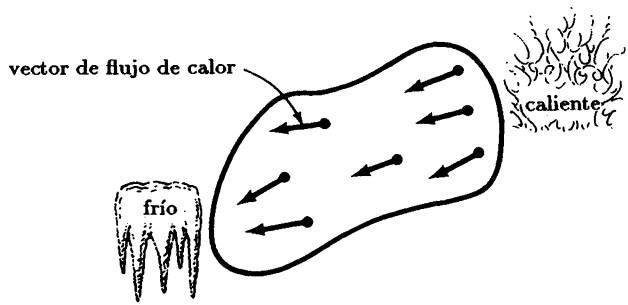


Figura 3.3.3 Campo vectorial que describe la dirección y magnitud del flujo de calor.

Esta *energía* o *campo vectorial de flujo de calor* está dado por $\mathbf{J} = -k\nabla T$, donde $k > 0$ es una constante llamada *conductividad* y ∇T es el gradiente de la función con valores reales T. Nótese que el calor fluye, como debe ser, de las regiones calientes hacia las frías, pues $-\nabla T$ apunta en la dirección donde T decrece (ver la sección 2.5). ▲

EJEMPLO 3 La fuerza de atracción de la Tierra sobre una masa m puede describirse mediante un campo vectorial en $\mathbf{R}^3$, el campo de fuerza gravitacional. De acuerdo con la ley de Newton, este campo está dado por

$$\mathbf{F} = -\frac{mMG}{r^3}\mathbf{r}$$

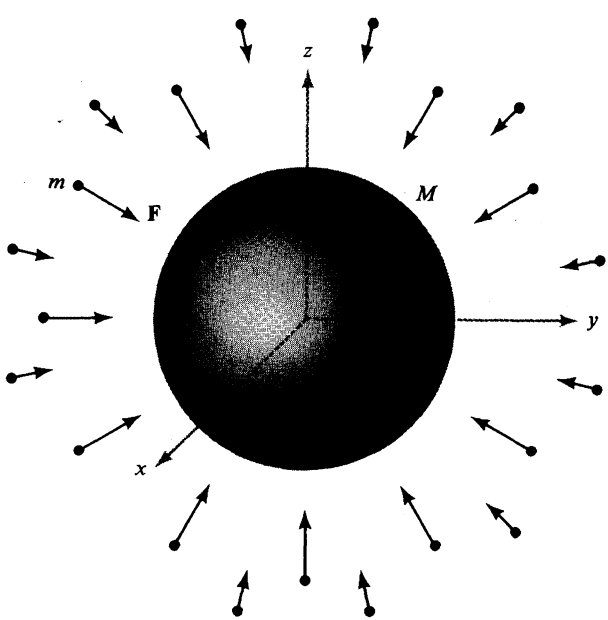


Figura 3.3.4 Campo vectorial $\mathbf{F}$ dado por la ley de gravitación de Newton.

(ver las secciones 2.5 y 3.1), donde $\mathbf{r}(x, y, z) = (x, y, z)$ y $r = \|\mathbf{r}\|$ (ver la figura 3.3.4). Como vimos antes (ejemplo 6, sección 2.5), $\mathbf{F}$ es en realidad, un campo gradiente, $\mathbf{F} = -\nabla V$, donde $V = -(mMG)/r$. Nótese de nuevo que $\mathbf{F}$ apunta en la dirección en que decrece V. Al escribir $\mathbf{F}$ en términos de componentes, vemos que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{-mMG}{r^3}x, \frac{-mMG}{r^3}y, \frac{-mMG}{r^3}z\right). \quad \blacktriangle$$

EJEMPLO 4 El movimiento giratorio (como el movimiento de las partículas en un fonógrafo) se describe por el campo vectorial

$$\mathbf{V}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}.$$

Ver la figura 3.3.5. ▲

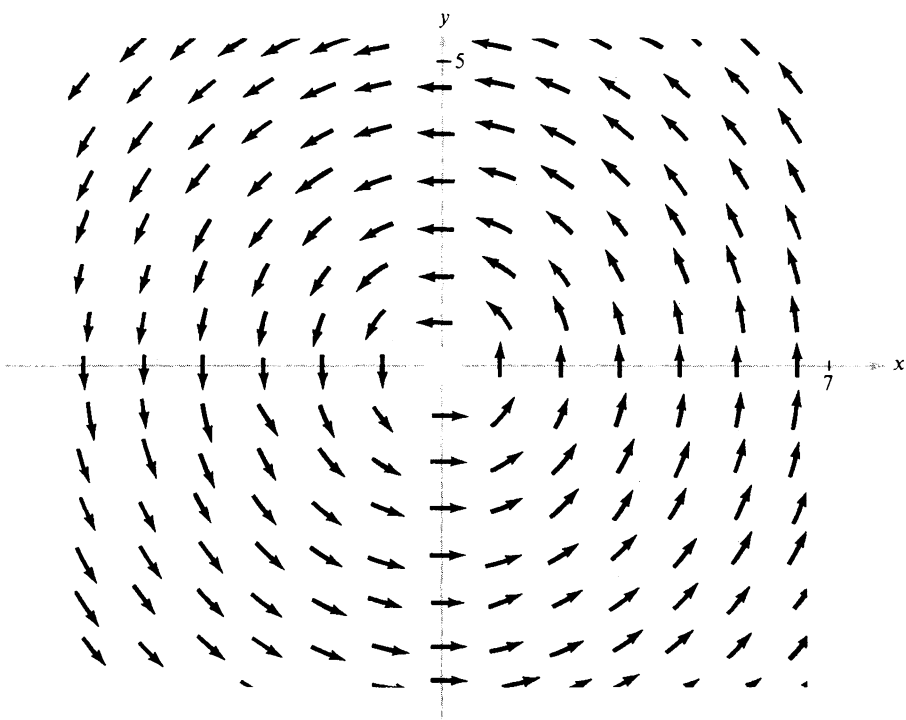


Figura 3.3.5 Campo vectorial giratorio (las flechas muestran la dirección, no la magnitud).

EJEMPLO 5 En el plano, $\mathbf{R}^2$, la función $\mathbf{V}$ definida por

$$\mathbf{V}(x, y) = \frac{y\mathbf{i}}{x^2 + y^2} - \frac{x\mathbf{j}}{x^2 + y^2} = \left(\frac{y}{x^2 + y^2}, -\frac{x}{x^2 + y^2}\right)$$

es un campo vectorial en $\mathbf{R}^2$ menos el origen. Éste es el campo de velocidad que aproxima al campo de velocidad del agua en movimiento "circular" tal como ocurre, por ejemplo, cuando se quita el tapón de una tina de agua (figura 3.3.6). ▲

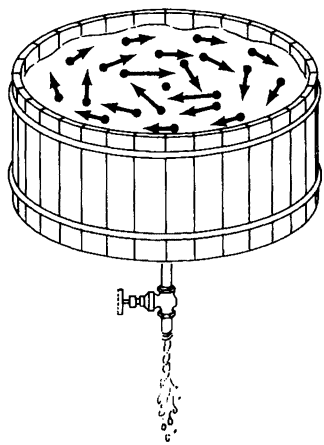


Figura 3.3.6 Campo vectorial que describe el flujo circular en una tina.

EJEMPLO 6 De acuerdo con la *ley de Coulomb*, la fuerza que actúa sobre una carga e en $\mathbf{r}$ debido a una carga Q en el origen, es

$$\mathbf{F} = \frac{\varepsilon Qe}{r^3}\mathbf{r} = -\nabla V,$$

donde $V = \varepsilon Qe/r$ y ε es una constante que depende de las unidades usadas. Para $Qe > 0$ (cargas del mismo signo) la fuerza es repulsiva (figura 3.3.7(a)), y para $Qe < 0$ (cargas de signo distinto) la fuerza es atractiva (figura 3.3.7(b)). En este ejemplo el potencial V es constante en las superficies de nivel de V, por eso se llaman *superficies equipotenciales*. Nótese que el campo de fuerza es ortogonal a las superficies equipotenciales (el campo de fuerza es radial y las superficies equipotenciales son esferas concéntricas). Esto concuerda con el resultado general de la sección 2.5. En el caso de gradientes de temperatura, en el que $\mathbf{F} = -k\nabla T$, las superficies donde T es constante se llaman *isotermas*. ▲

Hacemos notar que, en general, un campo vectorial no tiene que ser un campo gradiente; esto es, un campo vectorial no tiene que ser el gradiente de una función con valores reales. Esto se aclarará en capítulos posteriores. Sin embargo, el concepto de superficie equipotencial tiene sentido sólo si el campo vectorial resulta un campo gradiente.

Otro concepto importante es el de *línea de flujo*. Es fácil de visualizar esta idea en el contexto del ejemplo 1. En ese caso, una línea de flujo es simplemente una

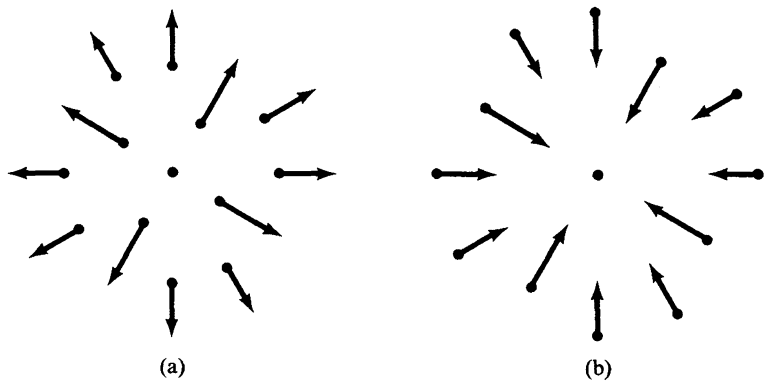


Figura 3.3.7 Campos vectoriales asociados con (a) cargas del mismo signo ($Qe > 0$) y (b) cargas con signo distinto ($Qe < 0$).

trayectoria que sigue una pequeña partícula suspendida en el fluido (figura 3.3.8). También es apropiado llamar a las líneas de flujo *líneas de corriente* o *curvas integrales.*

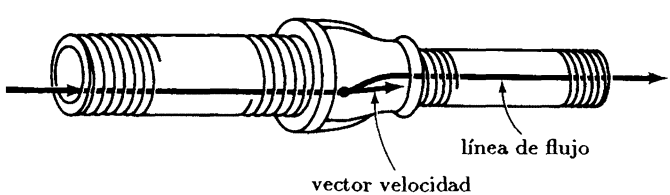


Figura 3.3.8 El vector velocidad de un fluido es tangente a una línea de flujo.

DEFINICIÓN *Si* $\mathbf{F}$ *es un campo vectorial, una* ***línea de flujo*** *para* $\mathbf{F}$ *es una trayectoria* $\boldsymbol{\sigma}(t)$ *tal que*

$$\boldsymbol{\sigma}'(t) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}(t)). \tag{1}$$

Esto es, $\mathbf{F}$ *produce el campo de velocidad de la trayectoria* $\boldsymbol{\sigma}(t)$.

Geométricamente, el problema de hallar una línea de flujo que pase por un punto dado $\mathbf{x}_0$ para un campo vectorial dado $\mathbf{F}$, es el de ensartar una curva por el campo vectorial de manera que el vector tangente a la curva coincida con el campo vectorial, como en la figura 3.3.9.

Analíticamente, el problema de hallar una línea de flujo que pase por $\mathbf{x}_0$ en el tiempo $t = 0$ implica resolver la ecuación diferencial (fórmula (1), anterior) con condición inicial $\mathbf{x}_0$; esto es,

$$\boldsymbol{\sigma}'(t) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}(t)); \qquad \boldsymbol{\sigma}(0) = \mathbf{x}_0.$$

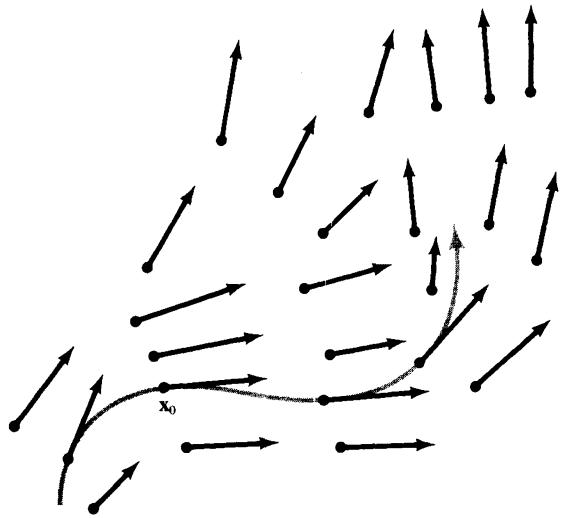


Figura 3.3.9 Línea de flujo que se va ensartando por un campo vectorial en el plano.

Usando coordenadas (x, y, z), la ecuación anterior se puede escribir como las ecuaciones simultáneas

$$x'(t) = F_1(x(t), y(t), z(t))$$
$$y'(t) = F_2(x(t), y(t), z(t))$$
$$z'(t) = F_3(x(t), y(t), z(t))$$

con condiciones iniciales

$$(x(0), y(0), z(0)) = (x_0, y_0, z_0),$$

donde $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$. En cursos de ecuaciones diferenciales se prueba que si F es de clase C^1, entonces existe solución única para cada $\mathbf{x}_0$ (pero la solución no necesariamente está definida para todo t).

Nótese que campos vectoriales *diferentes* pueden tener líneas de flujo que sean la misma curva geométrica. Por ejemplo, en los ejemplos 4 y 5 las líneas de flujo son círculos.

Existen varios programas de computadora que permiten hallar numéricamente las curvas solución de campos vectoriales; hay además muchas técnicas analíticas, que se estudian en cursos de ecuaciones diferenciales. La figura 3.3.10 muestra algunas curvas integrales del campo vectorial en el plano dado por $\mathbf{F}(x, y) = (\operatorname{sen} y, x^2 - y)$, realizadas en una Macintosh usando el programa "Macmath" (por Hubbard y West de Cornell University).

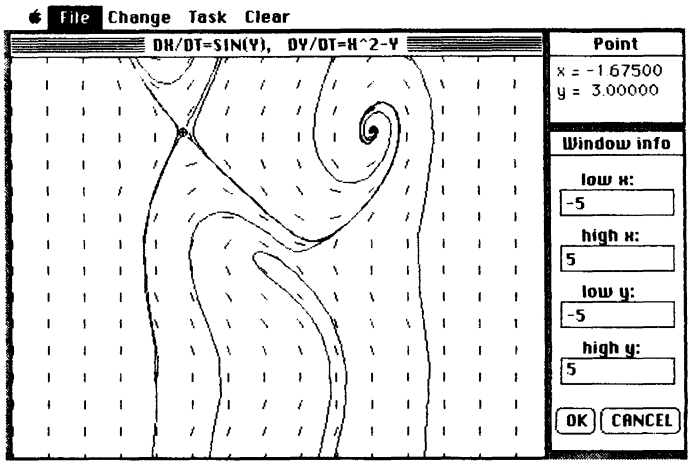


Figura 3.3.10 Curvas integrales trazadas por computadora, de $\mathbf{F}(x, y) = (\operatorname{sen} y)\mathbf{i} + (x^2 - y)\mathbf{j}$.

Suplemento de la sección 3.3 Flujos de campos vectoriales

Es conveniente tener una notación especial para la solución única que pasa por un punto dado en el tiempo 0, la cual se usará en el suplemento a la sección 3.4. Sea

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \left\{ \begin{array}{l} \text{posición del punto en la línea de flujo que pasa} \\ \text{por } \mathbf{x} \text{ después de transcurrido un tiempo } t. \end{array} \right\}.$$

Con $\mathbf{x}$ como la condición inicial, seguir a lo largo de la línea de flujo durante un periodo de tiempo t hasta alcanzar la nueva posición $\phi(\mathbf{x}, t)$ (ver la figura 3.3.11). Analíticamente, $\phi(\mathbf{x}, t)$ está definida por:

$$\left. \begin{array}{r} \dfrac{\partial}{\partial t}\phi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}(\phi(\mathbf{x}, t)) \\ \phi(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x} \end{array} \right\}. \tag{2}$$

La función ϕ, que se considera como función de las variables $\mathbf{x}$ y t, se llama *flujo* de $\mathbf{F}$.

Denotamos por $\mathbf{D}_{\mathbf{x}}$ la diferenciación respecto a $\mathbf{x}$, manteniendo t fija. En cursos de ecuaciones diferenciales se prueba que ϕ es una función diferenciable de $\mathbf{x}$. Así, diferenciando la ecuación (2) respecto a $\mathbf{x}$,

$$\mathbf{D}_{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial t}\phi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{D}_{\mathbf{x}}[\mathbf{F}(\phi(\mathbf{x}, t))].$$

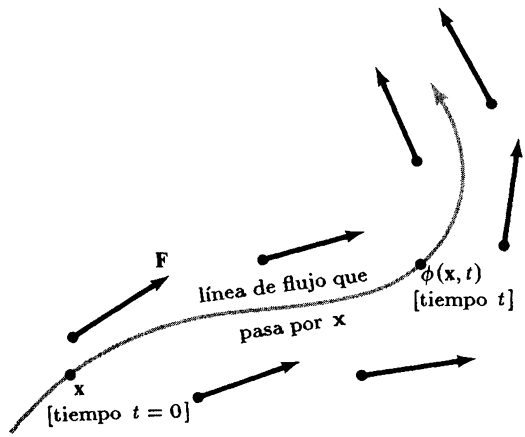


Figura 3.3.11 Definición del flujo $\phi(\mathbf{x}, t)$ de $\mathbf{F}$.

En el lado izquierdo de esta ecuación se puede usar la igualdad de las derivadas parciales mixtas, y en el lado derecho se puede aplicar la regla de la cadena, obteniéndose

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}_{\mathbf{x}}\phi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{DF}(\phi(\mathbf{x}, t))\mathbf{D}_{\mathbf{x}}\phi(\mathbf{x}, t), \tag{3}$$

donde $\mathbf{DF}(\phi(\mathbf{x}, t))$ denota la derivada de $\mathbf{F}$ evaluada en $\phi(\mathbf{x}, t)$. Esta ecuación diferencial lineal para $\mathbf{D}_{\mathbf{x}}\phi(\mathbf{x}, t)$, se llama *ecuación de primera variación*. Será de utilidad para el estudio de la divergencia y rotacional de la siguiente sección. Nótese que en el espacio tanto $\mathbf{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(\phi)$ como $\mathbf{D}_{\mathbf{x}}\phi$ son matrices de 3×3 pues $\mathbf{F}$ y ϕ toman valores en $\mathbf{R}^3$ y son diferenciadas respecto a $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$. De manera análoga, para campos vectoriales en el plano, serían matrices de 2×2.

EJERCICIOS

1. Sea una partícula de masa m que se mueve sobre una trayectoria $\mathbf{r}(t)$ de acuerdo a la ley de Newton, en un campo de fuerza $\mathbf{F} = -\nabla V$ en $\mathbf{R}^3$, donde V es una función dada de energía potencial.

(a) Probar que la energía $E = \frac{1}{2}m\|\mathbf{r}'(t)\|^2 + V(\mathbf{r}(t))$ es constante en el tiempo. (IDEA: Realizar la diferenciación dE/dt.)

(b) Si la partícula se mueve sobre una superficie equipotencial, mostrar que su rapidez es constante.

2. Esbozar algunas líneas de flujo de los campos vectoriales

(a) $\mathbf{F}(x, y) = (y, -x)$ $\boxed{\text{(b)}}$ $\mathbf{F}(x, y) = (x, -y)$ (c) $\mathbf{F}(x, y) = (x, x^2)$

3. Sea $\mathbf{c}(t)$ una línea de flujo de un campo gradiente $\mathbf{F} = -\nabla V$. Probar que $V(\mathbf{c}(t))$ es una función decreciente de t. Explicar.

4. Esbozar el campo gradiente $-\nabla V$ para $V(x,y) = (x+y)/(x^2+y^2)$. Esbozar la superficie equipotencial $V = 1$.

5. Suponer que las isotermas en una región son esferas concéntricas con centro en el origen. Probar que el campo vectorial de flujo de energía apunta hacia el origen o hacia afuera.

6. Mostrar que $\sigma(t) = (e^{2t}, \ln|t|, 1/t)$ para $t \neq 0$ es una línea de flujo del campo vectorial de velocidad $\mathbf{F}(x,y,z) = (2x, z, -z^2)$.

7. Mostrar que $\sigma(t) = (t^2, 2t-1, \sqrt{t})$ para $t > 0$ es una línea de flujo del campo vectorial de velocidad $\mathbf{F}(x,y,z) = (y+1, 2, 1/2z)$.

8. (a) Suponiendo que existe unicidad en las líneas de flujo que pasan por un punto dado en un tiempo dado, probar la siguiente propiedad del flujo $\phi(\mathbf{x}, t)$ de un campo vectorial $\mathbf{F}$:

$$\phi(\mathbf{x}, t+s) = \phi(\phi(\mathbf{x}, s), t).$$

(b) ¿Cuál es la propiedad correspondiente para $\mathbf{D}_{\mathbf{x}}\phi$?

***9.** Si $f(\mathbf{x}, t)$ es una función con valores reales de $\mathbf{x}$ y t, definamos la *derivada material* de f respecto a un campo vectorial $\mathbf{F}$ como

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla f(x) \cdot \mathbf{F}.$$

Mostrar que Df/Dt es la t derivada de $f(\phi(\mathbf{x}, t), t)$ (i.e., la t derivada de f transportada por el flujo de $\mathbf{F}$).

3.4 DIVERGENCIA Y ROTACIONAL DE UN CAMPO VECTORIAL

La *operación rotacional* asocia a cada campo vectorial C^1 $\mathbf{F}$ en $\mathbf{R}^3$ el campo vectorial $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ definido como sigue: Sea

$$\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k} = (F_1, F_2, F_3),$$

y hagamos

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}. \tag{1}$$

Esta fórmula es más fácil de recordar si la reescribimos usando la notación de "operador". Introduzcamos formalmente el símbolo "del" (o "nabla"):

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

∇ es un operador; esto es, actúa u opera sobre funciones con valores reales. Específicamente, ∇f, ∇ operando sobre f, está dado por

$$\nabla f = \mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial f}{\partial z}, \tag{2}$$

es el *gradiente* de f. Esta notación formal es bastante útil; si vemos ∇ como vector con componentes $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$, entonces podemos tomar también el producto cruz

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k} \\ &= \operatorname{rot}\mathbf{F}.\end{aligned}$$

Así,

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F},$$

y con frecuencia usaremos esta última expresión. (Nótese que $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ es de clase C^{k-1} si $\mathbf{F}$ es de clase C^k.)

EJEMPLO 1 *Sea* $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + \mathbf{k}$. *Hallar* $\nabla \times \mathbf{F}$.

SOLUCIÓN Tenemos

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & xy & 1 \end{vmatrix} = (0-0)\mathbf{i} - (0-0)\mathbf{j} + (y-0)\mathbf{k}.$$

Así, $\nabla \times \mathbf{F} = y\mathbf{k}$. ▲

El teorema siguiente enuncia una relación básica entre el gradiente y el rotacional. Deberá compararse con el hecho de que para cualquier vector $\mathbf{v}$, tenemos $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

TEOREMA 1 *Para cualquier función f de clase C^2, tenemos*

$$\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0};$$

esto es, el rotacional de cualquier gradiente es el vector cero.

DEMOSTRACIÓN Escribamos las componentes del campo vectorial $\nabla \times (\nabla f)$. Como $\nabla f = (\partial f/\partial x, \partial f/\partial y, \partial f/\partial z)$ tenemos, por definición,

$$\nabla \times \nabla f = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)\mathbf{k}.$$

Cada componente es cero debido a la propiedad simétrica de las derivadas parciales mixtas; por lo tanto se sigue el resultado deseado. ■

El significado físico total del rotacional se verá con detalle en los ejercicios 12 y 13, también en el capítulo 8, donde se estudia el teorema de Stokes. Sin embargo, podemos ahora considerar una situación sencilla para mostrar por qué el rotacional está asociado con rotaciones.

EJEMPLO 2 Considerar un cuerpo rígido B que gira alrededor de un eje L. El movimiento rotacional del cuerpo se puede describir mediante un vector $\mathbf{w}$ a lo largo del eje de rotación, la dirección se escoge de manera que el cuerpo gire alrededor de $\mathbf{w}$ como en la figura 3.4.1, con la longitud $\omega = \|\mathbf{w}\|$ tomada como la rapidez angular del cuerpo B, esto es, la rapidez tangencial de cualquier punto

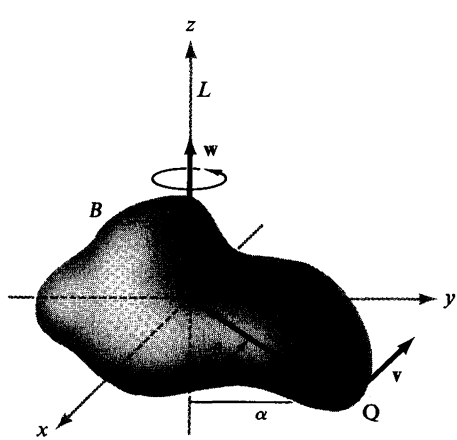


Figura 3.4.1 La velocidad $\mathbf{v}$ y la velocidad angular $\mathbf{w}$ de un cuerpo en rotación están relacionadas por $\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{r}$.

en B dividida entre su distancia al eje L de rotación. Seleccionar un sistema coordenado de modo que L sea el eje z. Sea Q cualquier punto en B y sea α la distancia de Q a L. Claramente,

$$\alpha = \|\mathbf{r}\| \operatorname{sen} \theta,$$

donde $\mathbf{r}$ es el vector cuyo punto inicial es el origen y cuyo punto terminal es Q. La velocidad tangencial $\mathbf{v}$ de Q se dirige en sentido contrario al que giran las manecillas del reloj, a lo largo de la tangente a un círculo paralelo al plano xy con radio α, con magnitud

$$\|\mathbf{v}\| = \omega\alpha = \omega\|\mathbf{r}\| \operatorname{sen} \theta = \|\mathbf{w}\| \, \|\mathbf{r}\| \operatorname{sen} \theta.$$

Hemos visto (pág. 36) que la dirección y magnitud de $\mathbf{v}$ implican que

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{r}.$$

Debido a la selección de ejes, podemos escribir $\mathbf{w} = \omega\mathbf{k}$, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, de modo que

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{r} = -\omega y\mathbf{i} + \omega x\mathbf{j}$$

y más aún

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = 2\omega\mathbf{k} = 2\mathbf{w}.$$

Por lo tanto, para la rotación de un cuerpo rígido, el rotacional del campo vectorial de velocidad es un campo vectorial dirigido paralelo al eje de rotación con magnitud igual al doble de la rapidez angular. ▲

Si un campo vectorial $\mathbf{F}$ representa el flujo de un fluido (ver el ejemplo 1, sección 3.3), entonces $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$ en P significa físicamente que el fluido no tiene rotaciones o es irrotacional en P; esto es, no tiene remolinos. La justificación de esta idea y, por lo tanto, del uso de la palabra "irrotacional" depende del teorema de Stokes (o del ejercicio 13). Sin embargo, podemos decir informalmente que $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$ significa que si colocamos en el fluido una *pequeña* rueda con aspas se moverá con el fluido, pero no girará alrededor de su eje. Por ejemplo, se ha determinado por medio de experimentos que el fluido drenado de una tina es, generalmente, irrotacional excepto justo en el centro, aunque el fluido "rote" alrededor del hoyo en la tina (ver la figura 3.4.2). Así, el lector deberá tener cuidado con la confusión que pueda generar la palabra "irrotacional". Consideremos algunos ejemplos de campos rotacionales e irrotacionales.

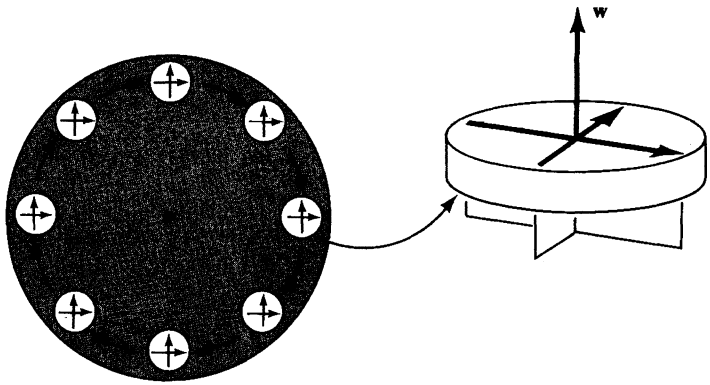


Figura 3.4.2 El campo de velocidad $\mathbf{V}(x, y, z) = (y\mathbf{i} - x\mathbf{j})/(x^2 + y^2)$ es irrotacional; una pequeña rueda con aspas moviéndose en el fluido no girará alrededor de su eje $\mathbf{w}$.

EJEMPLO 3 *Verificar que el campo vectorial del ejemplo 5, sección 3.3, es irrotacional en cada punto* $(x, y) \neq (0, 0)$.

SOLUCIÓN El rotacional es

$$\nabla \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{y}{x^2 + y^2} & \dfrac{-x}{x^2 + y^2} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{x^2 + y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right)\right]\mathbf{k}$$

$$= \left[\frac{-(x^2 + y^2) + 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{-(x^2 + y^2) + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2}\right]\mathbf{k}$$

$$= \mathbf{0}. \quad \blacktriangle$$

EJEMPLO 4 *Sea* $\mathbf{V}(x, y, z) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$. *Mostrar que* $\mathbf{V}$ *no es un campo gradiente.*

SOLUCIÓN Si $\mathbf{V}$ fuera un campo gradiente, entonces por el teorema 1 tendríamos la ecuación $\operatorname{rot} \mathbf{V} = \mathbf{0}$. Pero

$$\operatorname{rot} \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & 0 \end{vmatrix} = -2\mathbf{k} \neq \mathbf{0}. \quad \blacktriangle$$

Las líneas de flujo para el campo vectorial en el ejemplo 4, así como para el del ejemplo 3, son círculos alrededor del origen en el plano xy, pero este campo de velocidad tiene rotación. En dicho flujo, una pequeña rueda con aspas gira una vez, conforme circula alrededor del origen (figura 3.4.3).

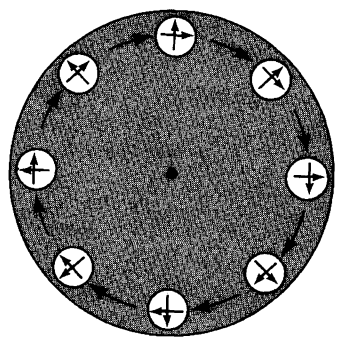


Figura 3.4.3 El campo de velocidad $\mathbf{V}(x, y, z) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ es rotacional; una pequeña rueda con aspas moviéndose en el fluido girará alrededor de su eje $\mathbf{w}$ (ver la figura 3.4.2).

Otra operación básica es la *divergencia*, definida como sigue:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}. \tag{3}$$

En notación de operador, $\operatorname{div} \mathbf{F}$ es el producto punto de ∇ y $\mathbf{F}$. Nótese que $\nabla \times \mathbf{F}$ es un *campo vectorial*, mientras que $\nabla \cdot \mathbf{F}: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, de modo que $\nabla \cdot \mathbf{F}$ es un *campo escalar*. Leemos $\nabla \cdot \mathbf{F}$ como "divergencia de $\mathbf{F}$".

El significado completo de la divergencia se da en el suplemento a esta sección y también se presenta en conexión con el teorema de Gauss en el capítulo 8, pero podemos ver aquí parte de su significado físico. Si imaginamos $\mathbf{F}$ como el campo de velocidad de un gas (o fluido), entonces $\operatorname{div} \mathbf{F}$ representa la tasa de expansión por unidad de volumen del gas (o fluido). Por ejemplo, si $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, entonces $\operatorname{div} \mathbf{F} = 3$; esto significa que el gas se está expandiendo a la tasa de 3 unidades cúbicas por unidad de volumen por unidad de tiempo. Esto es razonable, pues en este caso $\mathbf{F}$ es un vector radial hacia afuera, y conforme el gas se mueve hacia afuera a lo largo de las líneas de flujo, se expande. (Ver la sección 3.3 para un estudio de las líneas de flujo.) Si $\operatorname{div} \mathbf{F} < 0$ significa que el gas se comprime.

A continuación se presenta una relación básica entre las operaciones de divergencia y rotacional.

TEOREMA 2 *Para cualquier campo vectorial* $\mathbf{F}$ *de clase* C^2,

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0;$$

esto es, la divergencia de cualquier rotacional es cero.

Como con el teorema 1, la demostración se basa en la igualdad de las derivadas parciales mixtas. El estudiante deberá escribir los detalles.

Hemos visto que $\nabla \times \mathbf{F}$ está relacionado con las rotaciones y $\nabla \cdot \mathbf{F}$ está relacionado con compresiones y expansiones. Esto conduce a la siguiente terminología. Si $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, decimos que $\mathbf{F}$ es *incompresible*, y decimos que $\mathbf{F}$ es *irrotacional* si $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

EJEMPLO 5 *Calcular la divergencia de*

$$\mathbf{F} = x^2 y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}.$$

SOLUCIÓN

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 y) + \frac{\partial}{\partial y}(z) + \frac{\partial}{\partial z}(xyz) = 2xy + 0 + xy = 3xy. \qquad \blacktriangle$$

EJEMPLO 6 Del teorema 2 concluimos que $\mathbf{F}$ en el ejemplo 5 no puede ser el rotacional de otro campo vectorial, pues tendría divergencia cero. ▲

El *operador de Laplace* ∇^2, que opera sobre funciones f, está definido como sigue:

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Si $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ es un campo vectorial C^2, también podemos definir $\nabla^2\mathbf{F}$ en términos de componentes:

$$\nabla^2 \mathbf{F} = \nabla^2 F_1\mathbf{i} + \nabla^2 F_2\mathbf{j} + \nabla^2 F_3\mathbf{k}.$$

Como se señaló en la sección 2.6, este operador juega un papel importante en muchas leyes físicas. Continuaremos este estudio en el capítulo 8.

Suplemento de la sección 3.4 Geometría de la divergencia

Estudiaremos ahora con más detalle el significado de la divergencia. Este análisis depende del concepto de flujo $\phi(\mathbf{x}, t)$ de un campo vectorial $\mathbf{F}$ dado al final de la sección 3.3. Ver los ejercicios del 11 al 13 para el correspondiente estudio de rotacional.

Fijar un punto $\mathbf{x}$ y considerar los tres vectores de la base usual $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ saliendo de $\mathbf{x}$. Sea $\varepsilon > 0$ un número pequeño y considerar los vectores de la base $\mathbf{v}_1 = \varepsilon\mathbf{i}$, $\mathbf{v}_2 = \varepsilon\mathbf{j}$ y $\mathbf{v}_3 = \varepsilon\mathbf{k}$, que salen también de $\mathbf{x}$. Estos vectores generan un paralelepípedo $P(0)$. Conforme el tiempo crece o decrece, el flujo $\phi(\mathbf{x}, t)$ transforma $P(0)$ en algún objeto. Para un tiempo *fijo*, ϕ es una función diferenciable de $\mathbf{x}$ (esto es, ϕ es una función diferenciable de $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^3$). Cuando ε es pequeño, la imagen de $P(0)$ bajo ϕ se puede aproximar por medio de su imagen bajo la derivada de ϕ con respecto a $\mathbf{x}$.

(Ver el análisis de la aproximación lineal a una función en la sección 2.3. En particular, recordar que si $\mathbf{v}$ es un vector corto anclado en un punto P_1, con extremo en P_2, de modo que $\mathbf{v} = P_2 - P_1$, entonces $\phi(P_2, t) - \phi(P_1, t) \approx \mathbf{D}_\mathbf{x}\phi(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}$; ver el ejercicio 15.) Así, para un tiempo fijo y ε pequeño y positivo, $P(0)$ se transforma aproximadamente en un paralelepípedo generado por los vectores $\mathbf{v}_1(t)$, $\mathbf{v}_2(t)$ y $\mathbf{v}_3(t)$ dados por

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{v}_1(t) &= \mathbf{D}_\mathbf{x}\phi(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2(t) &= \mathbf{D}_\mathbf{x}\phi(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_3(t) &= \mathbf{D}_\mathbf{x}\phi(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}_3. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Como $\phi(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x}$, se sigue que $\mathbf{v}_1(0) = \mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2(0) = \mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3(0) = \mathbf{v}_3$. (Esta fórmula para vectores transformados se estudió en la pág. 138.) Los vectores $\mathbf{v}_1(t)$, $\mathbf{v}_2(t)$ y $\mathbf{v}_3(t)$ generan un paralelepípedo $P(t)$ que se mueve en el tiempo (ver la figura 3.4.4).

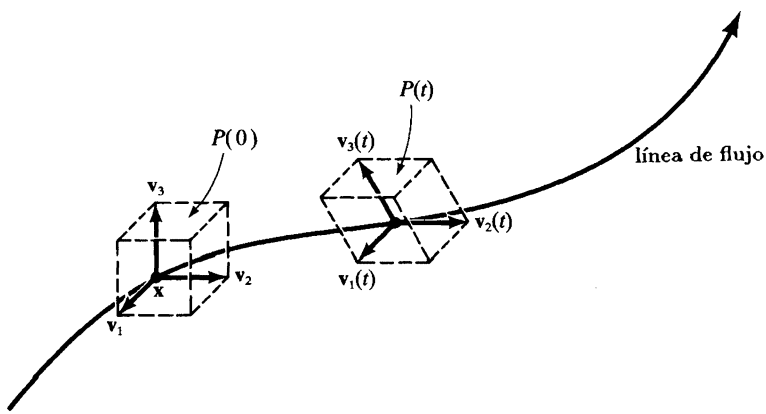


Figura 3.4.4 La base en movimiento $\mathbf{v}_1(t)$, $\mathbf{v}_2(t)$ y $\mathbf{v}_3(t)$ y el paralelepípedo asociado.

Denotemos por $\mathcal{V}(t)$ el volumen de $P(t)$. El principal significado geométrico de la divergencia está dado por el teorema siguiente.

TEOREMA 3 $\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \dfrac{1}{\mathcal{V}(0)} \dfrac{d}{dt}\mathcal{V}(t)\Big|_{t=0}$.

DEMOSTRACIÓN Por la ecuación (3) de la sección anterior,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{v}_i(t) = \mathbf{D}_\mathbf{x}\mathbf{F}(\phi(\mathbf{x}, t)) \cdot \mathbf{D}_x\phi(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}_i \tag{5}$$

para $i = 1, 2, 3$.

Como $\phi(\mathbf{x},0)=\mathbf{x}$, $\mathbf{D}_{\mathbf{x}}\phi(\mathbf{x},0)$ es la matriz identidad, la evaluación en $t=0$ da

$$\left.\frac{d}{dt}\mathbf{v}_i(t)\right|_{t=0}=\mathbf{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{v}_i.$$

El volumen $\mathcal{V}(t)$ está dado por el triple producto (ver pág. 39):

$$\mathcal{V}(t)=\mathbf{v}_1(t)\cdot[\mathbf{v}_2(t)\times\mathbf{v}_3(t)].$$

Usando los ejercicios 12 y 13 de la sección 3.1, y las identidades $\mathbf{v}_1\cdot[\mathbf{v}_2\times\mathbf{v}_3]=\mathbf{v}_2\cdot[\mathbf{v}_3\times\mathbf{v}_1]=\mathbf{v}_3\cdot[\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2]$, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{V}}{dt}&=\frac{d\mathbf{v}_1}{dt}\cdot[\mathbf{v}_2(t)\times\mathbf{v}_3(t)]+\mathbf{v}_1(t)\cdot\left[\frac{d\mathbf{v}_2}{dt}\times\mathbf{v}_3(t)\right]+\mathbf{v}_1(t)\cdot\left[\mathbf{v}_2(t)\times\frac{d\mathbf{v}_3}{dt}\right]\\&=\frac{d\mathbf{v}_1}{dt}\cdot[\mathbf{v}_2(t)\times\mathbf{v}_3(t)]+\frac{d\mathbf{v}_2}{dt}\cdot[\mathbf{v}_3(t)\times\mathbf{v}_1(t)]+\frac{d\mathbf{v}_3}{dt}\cdot[\mathbf{v}_1(t)\times\mathbf{v}_2(t)].\end{aligned}$$

En $t=0$, debido a la sustitución de la fórmula (4) y al hecho de que $\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2=\varepsilon\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_3\times\mathbf{v}_1=\varepsilon\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_2\times\mathbf{v}_3=\varepsilon\mathbf{v}_1$, se obtiene

$$\left.\frac{d\mathcal{V}}{dt}\right|_{t=0}=\varepsilon^3[\mathbf{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{x})\mathbf{i}]\cdot\mathbf{i}+\varepsilon^3[\mathbf{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{x})\mathbf{j}]\cdot\mathbf{j}+\varepsilon^3[\mathbf{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{x})\mathbf{k}]\cdot\mathbf{k}. \tag{6}$$

Pero $\mathcal{V}(0)=\varepsilon^3$, $\mathbf{F}=F_1\mathbf{i}+F_2\mathbf{j}+F_3\mathbf{k}$, $[\mathbf{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{x})\mathbf{i}]\cdot\mathbf{i}=\partial F_1/\partial x$ y, análogamente, el segundo y tercer términos de la ecuación (5) son $\varepsilon^3(\partial F_2/\partial y)$ y $\varepsilon^3(\partial F_3/\partial z)$. Al sustituir esto en la ecuación (6) y dividir entre ε^3 se prueba el teorema. ■

El lector más familiarizado con álgebra lineal puede probar esta generalización del teorema 3:* *Sean* $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ *y* $\mathbf{v}_3$ *cualesquiera tres vectores no coplanares que salgan de* $\mathbf{x}$ *y que fluyan de acuerdo con la fórmula*

$$\mathbf{v}_i(t)=\mathbf{D}_{\mathbf{x}}\phi(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{v}_i,\qquad i=1,2,3.$$

Los vectores $\mathbf{v}_1(t)$, $\mathbf{v}_2(t)$ *y* $\mathbf{v}_3(t)$ *generan un paralelepípedo* $P(t)$ *con volumen* $\mathcal{V}(t)$. *Entonces*

$$\left.\frac{1}{\mathcal{V}(0)}\frac{d\mathcal{V}}{dt}\right|_{t=0}=\operatorname{div}\mathbf{F}(\mathbf{x}). \tag{7}$$

En otras palabras, la divergencia de $\mathbf{F}$ en $\mathbf{x}$ es la tasa a la cual cambia el volumen, por unidad de volumen. "Tasa" se refiere a la tasa de cambio respecto al tiempo conforme los volúmenes son transportados por el flujo.

---

*El lector necesitará saber cómo escribir la matriz de una transformación lineal respecto a una base dada y conocer el hecho de que la traza de una matriz es independiente de la base.

EJERCICIOS

1. Calcular el rotacional, $\nabla \times \mathbf{F}$, de cada uno de los siguientes campos vectoriales:
(a) $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
(b) $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$
(c) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k})$
(d) $\mathbf{F}(x, y, z) = \dfrac{yz\mathbf{i} - xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}}{x^2 + y^2 + z^2}$

2. Calcular la divergencia $\nabla \cdot \mathbf{F}$ de cada uno de los campos vectoriales en el ejercicio 1. (La solución sólo a la parte (b) está en la Guía de estudio de este libro.)

3. Verificar que $\nabla \times (\nabla f) = 0$ para cada una de las funciones siguientes.
(a) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
(b) $f(x, y, z) = xy + yz + xz$
(c) $f(x, y, z) = 1/(x^2 + y^2 + z^2)$

4. Verificar que el campo vectorial en el ejemplo 5, sección 3.3, es incompresible. ¿Pueden interpretar físicamente este resultado?

5. Verificar que $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ es incompresible.

6. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = 3x^2y\mathbf{i} + (x^3 + y^3)\mathbf{j}$.
(a) Verificar que $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$.
(b) Hallar una función f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$. (En el capítulo 8 se dan técnicas específicas para construir f en general. La de este problema deberá ser directa.)
(c) ¿Es cierto que para un campo vectorial $\mathbf{F}$ puede existir dicha función f sólo si $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$?

7. Sea $f(x, y, z) = x^2y^2 + y^2z^2$. Verificar directamente que $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$.

***8.** Mostrar que las partes real e imaginaria de cada una de las siguientes funciones complejas forman las componentes de un campo vectorial en el plano, irrotacional e incompresible; aquí $i = \sqrt{-1}$.
(a) $(x - iy)^2$ (b) $(x - iy)^3$ (c) $e^{x-iy} = e^x(\cos y - i \operatorname{sen} y)$

9. Mostrar que $\mathbf{F} = y(\cos x)\mathbf{i} + x(\operatorname{sen} y)\mathbf{j}$ *no* es un campo vectorial gradiente.

10. Sea $\mathbf{r}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Del ejercicio 1(a), sabemos que $\nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$. ¿Pueden comprender el significado físico, visualizando $\mathbf{r}$ como el campo de velocidad de un fluido?

***11.** Sean $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ dos vectores que salen del origen y son movidos por la derivada del flujo, como sucede en el suplemento a la sección 3.4:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{D}_{\mathbf{x}}\phi(\mathbf{0}, t)\mathbf{v}, \qquad \mathbf{w}(t) = \mathbf{D}_{\mathbf{x}}\phi(\mathbf{0}, t)\mathbf{w},$$

de modo que en el tiempo $t = 0$ y en el origen $\mathbf{0}$ en $\mathbf{R}^3$

$$\left.\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right|_{t=0} = \mathbf{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{v} \qquad \text{y} \qquad \left.\frac{d\mathbf{w}}{dt}\right|_{t=0} = \mathbf{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{w}. \tag{7}$$

Mostrar que

$$\left.\frac{d}{dt}\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}\right|_{t=0} = [\mathbf{D_x F}(\mathbf{0})\cdot\mathbf{v}]\cdot\mathbf{w} + \mathbf{v}\cdot[\mathbf{D_x F}(\mathbf{0})\cdot\mathbf{w}]$$
$$= \{(\mathbf{D_x F}(\mathbf{0}) + [\mathbf{D_x F}(\mathbf{0})]^T)\mathbf{v}\}\cdot\mathbf{w}$$

***12.** Cualquier matriz A se puede escribir (de manera única) como la suma de una matriz simétrica (una matriz S es *simétrica* si $S^T = S$) y una matriz antisimétrica ($W^T = -W$) como sigue:

$$A = \tfrac{1}{2}(A + A^T) + \tfrac{1}{2}(A - A^T) = S + W$$

En particular, para $A = \mathbf{D_x F}(\mathbf{0})$,

$$S = \tfrac{1}{2}\{\mathbf{D_x F}(\mathbf{0}) + [\mathbf{D_x F}(\mathbf{0})]^T\}$$

y

$$W = \tfrac{1}{2}\{\mathbf{D_x F}(\mathbf{0}) - [\mathbf{D_x F}(\mathbf{0})]^T\}.$$

Llamamos a S *matriz de deformación* y a W *matriz de rotación*. Mostrar que los registros de W están determinados por

$$w_{12} = -\tfrac{1}{2}(\operatorname{rot}\mathbf{F})_3,\ w_{23} = -\tfrac{1}{2}(\operatorname{rot}\mathbf{F})_1,\ \text{y}\ w_{31} = -\tfrac{1}{2}(\operatorname{rot}\mathbf{F})_2.$$

***13.** Sea $\mathbf{w} = \frac{1}{2}(\nabla\times\mathbf{F})(\mathbf{0})$. Suponer que se escogen los ejes de modo que $\mathbf{w}$ sea paralelo al eje z y apunte en la dirección de $\mathbf{k}$. Sea $\mathbf{v} = \mathbf{w}\times\mathbf{r}$, donde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, de modo que $\mathbf{v}$ es el campo de velocidad de una rotación alrededor del eje $\mathbf{w}$ con velocidad angular $\omega = \|\mathbf{w}\|$ y con $\operatorname{rot}\mathbf{v} = 2\mathbf{w}$. Como $\mathbf{r}$ es una función de (x, y, z), $\mathbf{v}$ también es una función de (x, y, z). Mostrar que la derivada de $\mathbf{v}$ en el origen está dada por

$$\mathbf{D}\mathbf{v}(0) = W = \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Interpretar el resultado como se hizo en el suplemento a la sección 3.4.

***14.** Sean

$$\mathbf{V}(x, y, z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}, \qquad \mathbf{W}(x, y, z) = \frac{\mathbf{V}(x, y, z)}{(x^2 + y^2)^{1/2}},$$

y

$$\mathbf{Y}(x, y, z) = \frac{\mathbf{V}(x, y, z)}{(x^2 + y^2)}.$$

(a) Calcular la divergencia y el rotacional de $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ y $\mathbf{Y}$.
(b) Hallar las líneas de flujo de $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ y $\mathbf{Y}$.
(c) ¿Cómo se comportará una pequeña rueda con aspas en el flujo de $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ y $\mathbf{Y}$?

***15.** Sea $\phi(\mathbf{x}, t)$ el flujo de un campo vectorial $\mathbf{F}$. Sean $\mathbf{x}$ y t fijos. Para pequeños vectores $\mathbf{v}_1 = \epsilon\mathbf{i}$, $\mathbf{v}_2 = \epsilon\mathbf{j}$ y $\mathbf{v}_3 = \epsilon\mathbf{k}$ que salen de $\mathbf{x}$, sea $P(0)$ el paralelepípedo generado por $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$. Demostrar que para ϵ pequeño, positivo, $P(0)$ se transforma mediante el flujo en aproximadamente un paralelepípedo generado por $\mathbf{v}_1(t)$, $\mathbf{v}_2(t)$ y $\mathbf{v}_3(t)$, dado por la fórmula (4).

3.5 CÁLCULO DIFERENCIAL VECTORIAL

Ahora tenemos a mano estas operaciones básicas: gradiente, divergencia, rotacional y operador de Laplace. En esta sección se desarrollan un poco más sus propiedades y las relaciones entre ellas.

En la tabla 3.1 se resumen algunas fórmulas generales básicas, útiles cuando se trabaja con campos vectoriales en $\mathbf{R}^3$. Algunas, como las identidades 10 y 14, se estudiaron en la sección 3.4. Otras se prueban en los ejemplos y ejercicios.

Algunas expresiones en la tabla requieren explicación. Primero, en la identidad 7,

$$\mathbf{V} = (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G}$$

Tabla 3.1 Algunas identidades comunes en el análisis vectorial

1. $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$
2. $\nabla(cf) = c\nabla f$, para c constante
3. $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$
4. $\nabla(f/g) = (g\nabla f - f\nabla g)/g^2$, en los puntos donde $g(\mathbf{x}) \neq 0$
5. $\operatorname{div}(\mathbf{F}+\mathbf{G}) = \operatorname{div}\mathbf{F} + \operatorname{div}\mathbf{G}$
6. $\operatorname{rot}(\mathbf{F}+\mathbf{G}) = \operatorname{rot}\mathbf{F} + \operatorname{rot}\mathbf{G}$
7. $\nabla(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}) = (\mathbf{F}\cdot\nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G}\cdot\nabla)\mathbf{F} + \mathbf{F} \times \operatorname{rot}\mathbf{G} + \mathbf{G} \times \operatorname{rot}\mathbf{F}$
8. $\operatorname{div}(f\mathbf{F}) = f \operatorname{div}\mathbf{F} + \mathbf{F}\cdot\nabla f$
9. $\operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{F} - \mathbf{F}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{G}$
10. $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{F} = 0$
11. $\operatorname{rot}(f\mathbf{F}) = f\operatorname{rot}\mathbf{F} + \nabla f \times \mathbf{F}$
12. $\operatorname{rot}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{F}\operatorname{div}\mathbf{G} - \mathbf{G}\operatorname{div}\mathbf{F} + (\mathbf{G}\cdot\nabla)\mathbf{F} - (\mathbf{F}\cdot\nabla)\mathbf{G}$
13. $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{F} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{F} - \nabla^2\mathbf{F}$
14. $\operatorname{rot}\nabla f = \mathbf{0}$
15. $\nabla(\mathbf{F}\cdot\mathbf{F}) = 2(\mathbf{F}\cdot\nabla)\mathbf{F} + 2\mathbf{F} \times (\operatorname{rot}\mathbf{F})$
16. $\nabla^2(fg) = f\nabla^2 g + g\nabla^2 f + 2(\nabla f\cdot\nabla g)$
17. $\operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0$
18. $\nabla\cdot(f\nabla g - g\nabla f) = f\nabla^2 g - g\nabla^2 f$
19. $\mathbf{H}\cdot(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G}\cdot(\mathbf{H} \times \mathbf{F}) = \mathbf{F}\cdot(\mathbf{G} \times \mathbf{H})$
20. $\mathbf{H}\cdot((\mathbf{F} \times \nabla) \times \mathbf{G}) = ((\mathbf{H}\cdot\nabla)\mathbf{G})\cdot\mathbf{F} - (\mathbf{H}\cdot\mathbf{F})(\nabla\cdot\mathbf{G})$
21. $\mathbf{F} \times (\mathbf{G} \times \mathbf{H}) = (\mathbf{F}\cdot\mathbf{H})\mathbf{G} - \mathbf{H}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G})$

NOTA: f y g denotan campos escalares; $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$ denotan campos vectoriales.

tiene, por definición, componentes $V_i = \mathbf{F} \cdot (\nabla G_i)$, para $i = 1, 2, 3$, donde $\mathbf{G} = (G_1, G_2, G_3)$. Segundo, en la identidad 13, $\nabla^2 \mathbf{F}$ tiene componentes $\nabla^2 F_i$, donde $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$. En la identidad 20, la expresión $(\mathbf{F} \times \nabla) \times \mathbf{G}$ significa que ∇ va a operar sólo sobre $\mathbf{G}$ como sigue: para calcular $(\mathbf{F} \times \nabla) \times \mathbf{G}$, definimos formalmente $\mathbf{U} = \mathbf{F} \times \nabla$ por:

$$\begin{aligned}
\mathbf{U} = \mathbf{F} \times \nabla &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ F_1 & F_2 & F_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \\
&= \left(F_2 \frac{\partial}{\partial z} - F_3 \frac{\partial}{\partial y}\right) \mathbf{i} - \left(F_1 \frac{\partial}{\partial z} - F_3 \frac{\partial}{\partial x}\right) \mathbf{j} + \left(F_1 \frac{\partial}{\partial y} - F_2 \frac{\partial}{\partial x}\right) \mathbf{k} \\
&= U_1 \mathbf{i} + U_2 \mathbf{j} + U_3 \mathbf{k}
\end{aligned}$$

y así,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{F} \times \nabla) \times \mathbf{G} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ U_1 & U_2 & U_3 \\ G_1 & G_2 & G_3 \end{vmatrix} \\
&= (U_2 G_3 - U_3 G_2)\mathbf{i} - (U_1 G_3 - U_3 G_1)\mathbf{j} + (U_1 G_2 - U_2 G_1)\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

Por ejemplo, la primera componente de $(\mathbf{F} \times \nabla) \times \mathbf{G}$ es

$$U_2 G_3 - U_3 G_2 = -\left(F_1 \frac{\partial G_3}{\partial z} - F_3 \frac{\partial G_3}{\partial x}\right) - \left(F_1 \frac{\partial G_2}{\partial y} - F_2 \frac{\partial G_2}{\partial x}\right).$$

EJEMPLO 1 *Probar la identidad 8 de la tabla 3.1.*

SOLUCIÓN $f\mathbf{F}$ tiene componentes fF_i, para $i = 1, 2, 3$, y entonces

$$\operatorname{div}(f\mathbf{F}) = \frac{\partial}{\partial x}(fF_1) + \frac{\partial}{\partial y}(fF_2) + \frac{\partial}{\partial z}(fF_3).$$

Sin embargo, $(\partial/\partial x)(fF_1) = f\partial F_1/\partial x + F_1 \partial f/\partial x$, con expresiones similares para los otros términos. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(f\mathbf{F}) &= f\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) + F_1 \frac{\partial f}{\partial x} + F_2 \frac{\partial f}{\partial y} + F_3 \frac{\partial f}{\partial z} \\
&= f(\nabla \cdot \mathbf{F}) + \mathbf{F} \cdot \nabla f. \qquad \blacktriangle
\end{aligned}$$

EJEMPLO 2 *Sea* $\mathbf{r}$ *el campo vectorial* $\mathbf{r}(x, y, z) = (x, y, z)$ *(el vector de posición), y sea* $r = \|\mathbf{r}\|$. *Calcular* ∇r *y* $\nabla \cdot (r\mathbf{r})$.

SOLUCIÓN Tenemos

$$\nabla r = \left(\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z}\right).$$

Ahora $r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, y así, para $r \neq 0$ obtenemos

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}.$$

Así,

$$\nabla r = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right) = \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Para la segunda parte, usar la identidad 8 para escribir

$$\nabla \cdot (r\mathbf{r}) = r(\nabla \cdot \mathbf{r}) + \mathbf{r} \cdot \nabla r.$$

Ahora, $\nabla \cdot \mathbf{r} = \partial x/\partial x + \partial y/\partial y + \partial z/\partial z = 3$, y hemos calculado antes $\nabla r = \mathbf{r}/r$. Como $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}/r = r^2/r$,

$$\nabla \cdot (r\mathbf{r}) = 3r + \frac{r^2}{r} = 4r. \qquad \blacktriangle$$

EJEMPLO 3 *Mostrar que* $\nabla f \times \nabla g$ *siempre es incompresible. De hecho, deducir la identidad 17 de la tabla 3.1, a partir de la identidad 9.*

SOLUCIÓN Por la identidad 9,

$$\operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g) = \nabla g \cdot (\nabla \times \nabla f) - \nabla f \cdot (\nabla \times \nabla g),$$

lo cual es cero, pues $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$ y $\nabla \times \nabla g = \mathbf{0}$. $\blacktriangle$

En los ejercicios 2 al 6 al final de esta sección, el lector practicará con este tipo de manipulaciones. Más adelante en el libro usaremos las identidades del ejercicio 8.

Ahora estudiaremos las expresiones para el gradiente, divergencia y rotacional en coordenadas cilíndricas y esféricas, primero enunciando los resultados y después verificando algunos de éstos en los ejemplos; el resto se dejará como ejercicios y para un estudio posterior en el libro (ver el suplemento a la sección 8.4).

TEOREMA 4 *Las siguientes fórmulas se cumplen en coordenadas cilíndricas:*

(i) $$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e}_z$$

(ii) $$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rF_r) + \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z}(rF_z)\right]$$

y

(iii) $$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_r & rF_\theta & F_z \end{vmatrix}$$

donde $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ *y* $\mathbf{e}_z$, *son los vectores ortonormales unitarios mostrados en la figura 3.5.1 y* $\mathbf{F} = F_r\mathbf{e}_r + F_\theta\mathbf{e}_\theta + F_z\mathbf{e}_z$ *con* $F_r = \mathbf{F}\cdot\mathbf{e}_r$, $F_\theta = \mathbf{F}\cdot\mathbf{e}_\theta$ *y* $F_z = \mathbf{F}\cdot\mathbf{e}_z$.

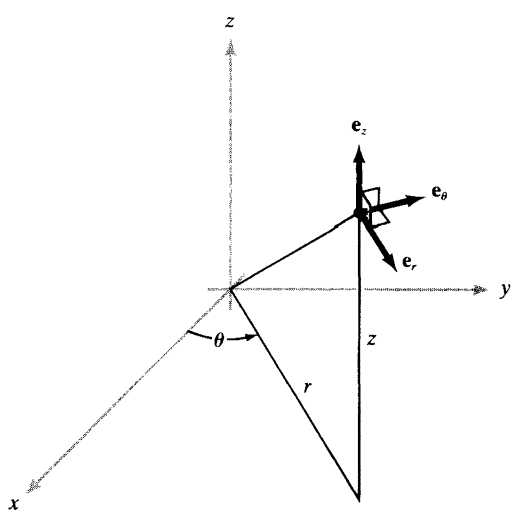


Figura 3.5.1 Vectores ortonormales $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ y $\mathbf{e}_z$ asociados con las coordenadas cilíndricas.

TEOREMA 5 *En coordenadas esféricas (ver la sección 1.4),*

(i) $$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\mathbf{e}_\phi + \frac{1}{\rho \operatorname{sen}\phi}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta$$

(ii) $$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2 F_\rho) + \frac{1}{\rho \operatorname{sen}\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}(\operatorname{sen}\phi\, F_\phi) + \frac{1}{\rho \operatorname{sen}\phi}\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta}$$

$$\text{(iii)} \quad \nabla \times \mathbf{F} = \left[\frac{1}{\rho \operatorname{sen}\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}(\operatorname{sen}\phi\, F_\theta) - \frac{1}{\rho\operatorname{sen}\phi}\frac{\partial F_\phi}{\partial\theta}\right]\mathbf{e}_\rho$$
$$+\left[\frac{1}{\rho\operatorname{sen}\phi}\frac{\partial F_\rho}{\partial\theta} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho F_\theta)\right]\mathbf{e}_\phi + \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho F_\phi) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\rho}{\partial\phi}\right]\mathbf{e}_\theta$$

donde $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\phi$ *y* $\mathbf{e}_\theta$ *son como se muestra en la figura 3.5.2 y* $\mathbf{F} = F_\rho\mathbf{e}_\rho + F_\phi\mathbf{e}_\phi + F_\theta\mathbf{e}_\theta$.

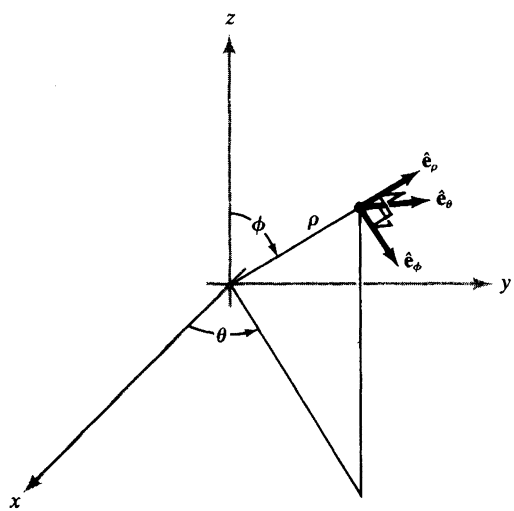


Figura 3.5.2 Vectores ortonormales $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\phi$ y $\mathbf{e}_\theta$ asociados con las coordenadas esféricas.

EJEMPLO 4 *Probar la fórmula* (i) *del teorema 4.*

SOLUCIÓN Tenemos

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}. \tag{1}$$

De la figura 3.5.1, tenemos

$$\mathbf{e}_r = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}$$

$$\mathbf{e}_\theta = \frac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\operatorname{sen}\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j} \qquad (\mathbf{e}_\theta \text{ y } \mathbf{e}_r \text{ son ortogonales en el plano})$$

y

$$\mathbf{e}_z = \mathbf{k}.$$

(Notar las diferencias entre lo anterior y el ejercicio 6, sección 1.4.) Resolviendo para **i**, **j** y **k**, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= \mathbf{e}_r \cos\theta - \mathbf{e}_\theta \operatorname{sen}\theta \\ \mathbf{j} &= \mathbf{e}_r \operatorname{sen}\theta + \mathbf{e}_\theta \cos\theta \\ \mathbf{k} &= \mathbf{e}_z. \end{aligned} \tag{2}$$

Por la regla de la cadena, y recordando que $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$ y $z = z$, obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r};$$

esto es,

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \operatorname{sen}\theta\frac{\partial f}{\partial y}.$$

De manera análoga,

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = -r\operatorname{sen}\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Resolviendo, obtenemos

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \cos\theta\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \operatorname{sen}\theta\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Sustituyendo las ecuaciones (2) y (3) en la ecuación (1) y simplificando se obtiene el resultado deseado. ▲

Este método de cambio de variables también se puede usar para la divergencia y el rotacional, aunque es más tedioso para éstos que para el gradiente.

Las demostraciones de las fórmulas en el teorema 5 son más largas si se les ataca directamente con el argumento del cambio de variable y la regla de la cadena usado en el ejemplo 4. Un procedimiento más eficiente para la fórmula (i) es el siguiente método informal. Para justificar

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\mathbf{e}_\phi + \frac{1}{\rho\operatorname{sen}\phi}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta,$$

notamos que si ρ, ϕ, θ cambian de manera infinitesimal, los correspondientes cambios de longitud en las direcciones $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\phi$ y $\mathbf{e}_\theta$ de sus ejes coordenados son

$$d\rho, \qquad \rho\, d\phi \qquad \text{y} \qquad \rho\operatorname{sen}\phi\, d\theta$$

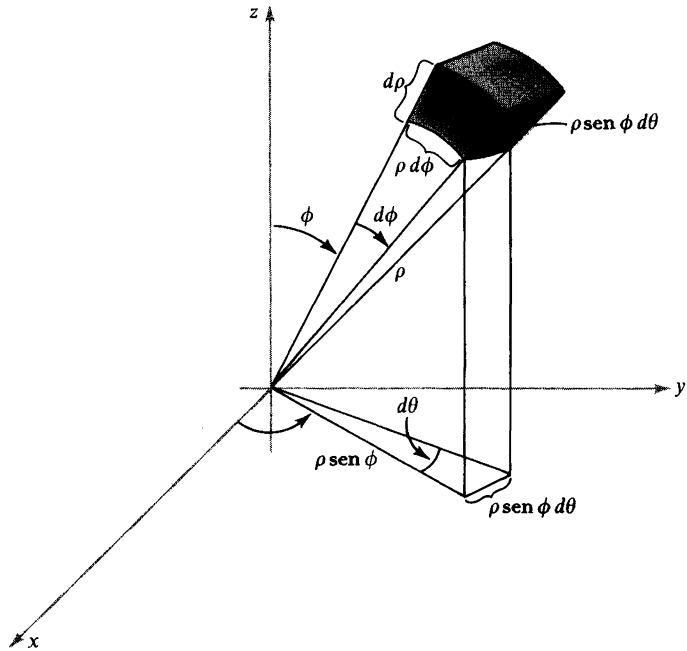


Figura 3.5.3 Cambios infinitesimales de longitud producidos por $d\rho$, $d\theta$ y $d\phi$.

(figura 3.5.3). Así, las componentes del gradiente de f (las tasas de cambio de f por unidad de distancia) están dadas por $\nabla f \cdot \mathbf{e}_\rho = \partial f/\partial\rho$, $\nabla f \cdot \mathbf{e}_\phi = \partial f/(\rho\partial\phi)$ y $\nabla f \cdot \mathbf{e}_\theta = \partial f/(\rho \operatorname{sen} \phi \, \partial\theta)$, lo cual da la fórmula (i).

La mejor demostración formal de las fórmulas (ii) y (iii) hace uso de los teoremas de Stokes y de Gauss, los cuales se tratan en el capítulo 8. El lector que intente el argumento directo de la regla de la cadena apreciará la espera y probablemente estará de acuerdo en que ese argumento (en el suplemento de la sección 8.4) ¡es más explícito y ciertamente más fácil!

EJERCICIOS

1. Suponer que $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ y que $\nabla \cdot \mathbf{G} = 0$. ¿Cuáles de las siguientes tienen necesariamente divergencia cero?

(a) $\mathbf{F} + \mathbf{G}$ (b) $\mathbf{F} \times \mathbf{G}$ (c) $(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G})\mathbf{F}$

2. Probar las identidades 1 a 6 de la tabla 3.1.

3. Probar las identidaddes 7, 9 y 11 de la tabla 3.1. (La demostración sólo de la identidad 9 está en la Guía de estudio de este libro.)

4. Probar las identidades 12, 13, 15 y 16 de la tabla 3.1.

5. Sea $\mathbf{F} = 2xz^2\mathbf{i} + \mathbf{j} + y^3zx\mathbf{k}$, $\mathbf{G} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ y $f = x^2y$. Calcular las siguientes cantidades:

(a) ∇f (b) $\nabla \times \mathbf{F}$
(c) $(\mathbf{F}\cdot\nabla)\mathbf{G}$ (d) $\mathbf{F}\cdot(\nabla f)$
(e) $\mathbf{F}\times\nabla f$

6. Probar las identidades 18 a la 21 de la tabla 3.1.

7. Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial general. ¿Tiene $\nabla \times \mathbf{F}$ que ser perpendicular a $\mathbf{F}$?

8. Sea $\mathbf{r}(x,y,z) = (x,y,z)$ y $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \|\mathbf{r}\|$. Probar las identidades siguientes.

(a) $\nabla(1/r) = -\mathbf{r}/r^3, r \neq 0$; y, en general, $\nabla(r^n) = nr^{n-2}\mathbf{r}$ y $\nabla(\log r) = \mathbf{r}/r^2$.
(b) $\nabla^2(1/r) = 0, r \neq 0$; y, en general, $\nabla^2 r^n = n(n+1)r^{n-2}$.
(c) $\nabla\cdot(\mathbf{r}/r^3) = 0$; y, en general, $\nabla\cdot(r^n\mathbf{r}) = (n+3)r^n$.
(d) $\nabla\times\mathbf{r} = \mathbf{0}$; y, en general, $\nabla\times(r^n\mathbf{r}) = \mathbf{0}$.

9. Probar la fórmula (ii) del teorema 4 comenzando con $\nabla\cdot\mathbf{F} = \left(\mathbf{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ $\cdot(F_r\mathbf{e}_r + F_\theta\mathbf{e}_\theta + F_z\mathbf{e}_z)$ y sustituyendo las fórmulas desarrolladas en el ejemplo 4.

***10.** Probar la fórmula (iii) del teorema 5.

***11.** Mostrar que en coordenadas polares (r,θ) en $\mathbf{R}^2$, la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

toma la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = 0.$$

***12.** Mostrar que en coordenadas esféricas (ρ,θ,ϕ) la ecuación de Laplace $\nabla^2 V = 0$ toma la forma

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left((1-\mu^2)\frac{\partial V}{\partial\mu}\right) + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} + \rho\frac{\partial^2(\rho V)}{\partial\rho^2} = 0$$

donde $\mu = \cos\phi$. (Ésta fue la forma original de la ecuación de Laplace.) Compararla con la expresión del ejercicio 11 cuando V es constante en ϕ y $\mu = 0$.

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 3

1. Calcular la divergencia de los siguientes campos vectoriales, en los puntos indicados.

(a) $\mathbf{F}(x,y,z) = x\mathbf{i} + 3xy\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $(0,1,0)$
(b) $\mathbf{F}(x,y,z) = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$, $(1,1,1)$
(c) $\mathbf{F}(x,y,z) = (x+y)^3\mathbf{i} + (\operatorname{sen} xy)\mathbf{j} + (\cos xyz)\mathbf{k}$, $(2,0,1)$

2. Calcular el rotacional de cada campo vectorial en el ejercicio de repaso 1 en el punto dado. (La solución sólo a la parte (b) está en la Guía de estudio de este libro.)

3. (a) Sea $f(x, y, z) = xyz^2$; calcular ∇f.
(b) Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + zy\mathbf{k}$; calcular $\nabla \times \mathbf{F}$.
(c) Calcular $\nabla \times (f\mathbf{F})$ usando la identidad 11 de la tabla 3.1. Comparar mediante cálculo directo.

4. Calcular $\nabla \cdot \mathbf{F}$ y $\nabla \times \mathbf{F}$ para los siguientes campos vectoriales:
(a) $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} + 4z\mathbf{k}$
(b) $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$
(c) $\mathbf{F} = (x + y)\mathbf{i} + (y + z)\mathbf{j} + (z + x)\mathbf{k}$

5. En el punto indicado de cada una de las siguientes trayectorias, calcular el vector velocidad, el vector aceleración, la rapidez y la ecuación de la recta tangente.
(a) $\boldsymbol{\sigma}(t) = (t^3 + 1, e^{-t}, \cos(\pi t/2)); t = 1$
(b) $\boldsymbol{\sigma}(t) = (t^2 - 1, \cos(t^2), t^4); t = \sqrt{\pi}$
(c) $\boldsymbol{\sigma}(t) = (e^t, \operatorname{sen} t, \cos t); t = 0$
(d) $\boldsymbol{\sigma}(t) = \dfrac{t^2}{1 + t^2}\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \mathbf{k}; t = 2$

6. Sean $\boldsymbol{\sigma}: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ una trayectoria y $h: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función diferenciable estrictamente creciente. La composición $\boldsymbol{\sigma} \circ h: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ se llama *reparametrización* de $\boldsymbol{\sigma}$ por h; decir por qué $\boldsymbol{\sigma} \circ h$ tiene la misma trayectoria que $\boldsymbol{\sigma}$, y probar que si $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\sigma} \circ h$, entonces $\boldsymbol{\alpha}'(t) = h'(t)\boldsymbol{\sigma}'(h(t))$. (Ver el ejercicio 5(c) de la sección 3.2.)

7. ¿A qué altitud debe estar un satélite para que parezca quieto en el cielo cuando se le ve desde la Tierra? (Ver el ejercicio 9, sección 3.1. para las unidades.)

8. (a) Sea $\boldsymbol{\alpha}$ cualquier trayectoria diferenciable cuya rapidez nunca es cero. Sea $s(t)$ la función de longitud de arco para $\boldsymbol{\alpha}$, $s(t) = \int_a^t \|\boldsymbol{\sigma}'(\tau)\|\, d\tau$. Sea $t(s)$ la función inversa de s. Probar que la curva $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha} \circ t$ tiene rapidez unitaria; i.e., $\|\boldsymbol{\beta}'(s)\| = 1$.
(b) Sea $\boldsymbol{\sigma}$ la trayectoria $\boldsymbol{\sigma}(t) = (a\cos t, a\operatorname{sen} t, bt)$. Hallar una trayectoria $\boldsymbol{\alpha}$ que tenga la misma trayectoria que $\boldsymbol{\sigma}$ pero que tenga rapidez unitaria, $\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\| = 1$; i.e., hallar una reparametrización de $\boldsymbol{\sigma}$ con rapidez unitaria. (Ver los ejercicios 5 y 7 en la sección 3.2.)

9. Sea una partícula de masa m que se mueve sobre la trayectoria $\boldsymbol{\sigma}(t) = (t^2, \operatorname{sen} t, \cos t)$. Calcular la fuerza que actúa sobre la partícula en $t = 0$.

10. (a) Sea $\mathbf{c}(t)$ una trayectoria con $\|\mathbf{c}(t)\| =$ constante; i.e., la curva está sobre una esfera. Probar que $\mathbf{c}'(t)$ es ortogonal a $\mathbf{c}(t)$.
(b) Sea $\mathbf{c}$ una trayectoria cuya rapidez nunca es cero. Mostrar que $\mathbf{c}$ tiene rapidez constante si y sólo si el vector aceleración $\mathbf{c}''$ siempre es perpendicular al vector velocidad $\mathbf{c}'$.

11. Sea una partícula que viaja sobre la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (t, t^2, t\cos t)$ y, en $t = \pi$, sale de la curva por una tangente. ¿Dónde está la partícula en el tiempo $t = 2\pi$?

12. Verificar las identidades en el ejercicio 8, sección 3.5, usando las expresiones para div, grad y rot en coordenadas esféricas.

13. (a) Sea $\mathbf{F} = 2xye^z\mathbf{i} + e^z x^2\mathbf{j} + (x^2ye^z + z^2)\mathbf{k}$. Calcular $\nabla \cdot \mathbf{F}$ y $\nabla \times \mathbf{F}$.
(b) Hallar una función $f(x, y, z)$ tal que $\mathbf{F} = \nabla f$. Analizar brevemente.

14. Una partícula que se mueve sobre la curva $\boldsymbol{\sigma}(t) = 3t^2\mathbf{i} - (\operatorname{sen} t)\mathbf{j} - e^t\mathbf{k}$ se suelta en el tiempo $t = \frac{1}{2}$ y sale por la tangente. ¿Cuáles son sus coordenadas en el tiempo $t = 1$?

15. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, 0, z(1 + x))$. Mostrar que $\boldsymbol{\sigma}(t) = (1/(1 - t), 0, e^t/(1 - t))$ es una línea de flujo de $\mathbf{F}$.

16. Expresar como integral la longitud de arco de la curva $x^2 = y^3 = z^5$ entre $x = 1$ y $x = 4$ con una parametrización adecuada.

17. Hallar la longitud de arco de $\boldsymbol{\sigma}(t) = t\mathbf{i} + (\ln t)\mathbf{j} + 2\sqrt{2t}\mathbf{k}$ para $1 \leq t \leq 2$.

4 DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR; MÁXIMOS Y MÍNIMOS

> ...a saber, pues la forma de todo el universo es de lo más perfecto, y, de hecho diseñado por el creador más sabio, nada ocurrirá en el mundo sin que destaque, de alguna manera, la presencia de una regla máxima o mínima.
>
> LEONHARD EULER

En cálculo de una variable, para saber si una función $f(x)$ tiene algún máximo o mínimo local, se buscan los puntos críticos x_0, esto es, puntos x_0 tales que $f'(x_0) = 0$, y en cada uno de dichos puntos se observa el signo de la segunda derivada $f''(x_0)$. Si $f''(x_0) < 0$, entonces en $f(x_0)$ hay un máximo local de f; si $f''(x_0) > 0$, entonces $f(x_0)$ es un mínimo local de f; si $f''(x_0) = 0$, el criterio falla.

En este capítulo se extienden estos métodos a funciones con valores reales, de varias variables. Comenzamos en la sección 4.1 con un estudio del teorema de Taylor, que se usará en la sección 4.2 para deducir criterios para detectar máximos, mínimos y puntos silla. Tal como sucede con funciones de una variable, dichos métodos ayudan a visualizar la forma de una gráfica.

En la sección 4.3 se estudiará el problema de maximizar una función con valores reales sujeta a condiciones adicionales, también conocidas como restricciones. Por ejemplo, podríamos querer maximizar $f(x, y, z)$ para (x, y, z) restringidos a pertenecer a la esfera unitaria, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. En la sección 4.4 se presenta un teorema técnico (el teorema de la función implícita) útil para estudiar restricciones. También será útil más adelante, cuando estudiemos superficies.

En la sección 4.5 se describen algunas aplicaciones del material anterior, relacionadas con geometría, economía y puntos de equilibrio de sistemas físicos y su estabilidad.

4.1 TEOREMA DE TAYLOR

Usaremos el teorema de Taylor en varias variables, para deducir un criterio que permita detectar diferentes tipos de puntos extremos, y finalmente obtendremos un criterio parecido al de la segunda derivada que se estudió en cálculo de una variable. Existen algunas otras aplicaciones importantes de este teorema. Básicamente, el teorema de Taylor nos da aproximaciones "de orden superior" a una función, usando algo más que simplemente la primera derivada de la función.

Para funciones suaves de una variable $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, el teorema de Taylor asegura que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a) + \cdots$$
$$+ \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_k(x,a), \tag{1}$$

donde

$$R_k(x,a) = \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\,dt \tag{1'}$$

es el residuo. Para x cerca de a, este error $R_k(x,a)$ es pequeño "de orden k". Esto significa que

$$\frac{R_k(x,a)}{(x-a)^k} \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad x \to a. \tag{2}$$

En otras palabras, $R_k(x,a)$ es pequeño comparado con la cantidad (de por sí pequeña) $(x-a)^k$.

El objetivo de esta sección es probar un teorema análogo válido para funciones de varias variables. De ahí se seguirá el teorema para funciones de una variable, como corolario. Ya conocemos una versión de primer orden, esto es, cuando $k = 1$. En efecto, si $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y definimos

$$R_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - [\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)](\mathbf{x} - \mathbf{x}_0),$$

de modo que

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + [\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)](\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + R_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0),$$

entonces, por la definición de diferenciabilidad,

$$\frac{|R_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad \mathbf{x} \to \mathbf{x}_0;$$

esto es, $R_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ tiende a cero más rápido que la cantidad de primer orden, en $\mathbf{x}_0$. Resumamos estos resultados. Escribamos $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ y $R_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = R_1(\mathbf{h}, \mathbf{x}_0)$ (¡abuso de notación permitido!), y se obtiene:

TEOREMA 1 *(Fórmula de Taylor de primer orden). Sea $f: U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ diferenciable en $\mathbf{x}_0 \in U$. Entonces podemos escribir*

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) + R_1(\mathbf{h}, \mathbf{x}_0),$$

donde $R_1(\mathbf{h}, \mathbf{x}_0)/\|\mathbf{h}\| \to 0$ cuando $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ en $\mathbf{R}^n$.

La *fórmula de Taylor de segundo orden* es como sigue:

TEOREMA 2 *Sea $f: U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ con derivadas parciales continuas hasta de tercer orden.* Entonces podemos escribir*

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) + R_2(\mathbf{h}, \mathbf{x}_0),$$

donde $R_2(\mathbf{h}, \mathbf{x}_0)/\|\mathbf{h}\|^2 \to 0$ cuando $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ y la segunda suma es sobre todas las i y j entre 1 y n (de manera que hay n^2 términos).

En el transcurso de la demostración obtendremos una fórmula explícita útil para el residuo R_2 (ver la ecuación (5′), a continuación). Esta fórmula es una generalización de la fórmula (1′).

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2 Por la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) = [\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})]\mathbf{h} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) h_i;$$

ahora, integrar ambos lados de $t = 0$ a $t = 1$ para obtener

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) h_i \, dt = \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) h_i \, dt.$$

Integrar por partes la expresión del lado derecho usando la fórmula general

$$\int_0^1 u \frac{dv}{dt} \, dt = -\int_0^1 v \frac{du}{dt} \, dt + uv \Big|_0^1.$$

---

*En realidad, para el enunciado del teorema según se presenta aquí, basta que f sea de clase C^2, pero para tener una forma adecuada del residuo suponemos que f es de clase C^3. Si se *supone válida* la versión de una variable, al aplicarla a $g(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})$ se obtiene la versión que se da aquí para varias variables.

En este caso, sea $u = (\partial f/\partial x_i)(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})h_i$ y sea $v = t - 1$. Entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})h_i\, dt = \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^1 (1-t)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})h_i h_j\, dt + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0),$$

pues

$$\frac{du}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})h_i h_j,$$

por la regla de la cadena, y

$$uv\Big|_0^1 = (t-1)\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})h_i\Big|_{t=0}^1 = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)h_i.$$

Así, hemos probado la identidad

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)h_i + R_1(\mathbf{h}, \mathbf{x}_0)$$

donde
$$R_1(\mathbf{h}, \mathbf{x}_0) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^1 (1-t)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})h_i h_j\, dt. \tag{3}$$

(La fórmula (3) es una fórmula explícita para el residuo en el teorema 1.)

Si integramos por partes la expresión (3) para $R_1(\mathbf{h}, \mathbf{x}_0)$, con

$$u = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})h_i h_j \qquad \text{y} \qquad v = -\frac{(t-1)^2}{2},$$

obtenemos

$$R_1(\mathbf{h}, \mathbf{x}_0) = \sum_{i,j,k=1}^{n} \int_0^1 \frac{(t-1)^2}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})h_i h_j h_k\, dt + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0)h_i h_j.$$

Así, hemos probado que

$$\left.\begin{aligned} f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) &= f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) + R_2(\mathbf{h}, \mathbf{x}_0) \\ &\text{donde} \\ R_2(\mathbf{h}, \mathbf{x}_0) &= \sum_{i,j,k=1}^{n} \int_0^1 \frac{(t-1)^2}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})h_i h_j h_k\, dt. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

El integrando es una función continua de t y por lo tanto está acotada en una pequeña vecindad de $\mathbf{x}_0$ (pues tiene que estar cerca de su valor en $\mathbf{x}_0$). Así, para una constante $M \geq 0$ obtenemos, para $\|\mathbf{h}\|$ pequeña,

$$|R_2(\mathbf{h}, \mathbf{x}_0)| \leq \|\mathbf{h}\|^3 M.$$

En particular,

$$\frac{|R_2(\mathbf{h},\mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{h}\|^2} \leq \|\mathbf{h}\|M \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad \mathbf{h} \to \mathbf{0},$$

como requiere el teorema. Un argumento similar aplicado a R_1, muestra que $|R_1(\mathbf{h},\mathbf{x}_0)|/\|\mathbf{h}\| \to 0$ cuando $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$, aunque esto se sigue también, de la definición de diferenciabilidad, como se notó en la pág. 242. ■

FORMA EXPLÍCITA DEL RESIDUO

(i) *En el teorema 1,*

$$\begin{aligned} R_1(\mathbf{h},\mathbf{x}_0) &= \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^1 (1-t)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})h_i h_j \, dt \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{c})h_i h_j \end{aligned} \tag{5}$$

donde $\mathbf{c}$ *está en algún lugar de la recta que une* $\mathbf{x}_0$ *con* $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}$.

(ii) *En el teorema 2,*

$$\begin{aligned} R_2(\mathbf{h},\mathbf{x}_0) &= \sum_{i,j,k=1}^{n} \int_0^1 \frac{(t-1)^2}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})h_i h_j h_k \, dt \\ &= \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\mathbf{c}')h_i h_j h_k \end{aligned} \tag{5'}$$

donde $\mathbf{c}'$ *está en algún lugar de la recta que une a* $\mathbf{x}_0$ *con* $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}$.

Las representaciones de R_1 y R_2 como integrales se obtuvieron durante la demostración del teorema 2 (ver las fórmulas (3) y (4)). Las fórmulas que incluyen $\mathbf{c}$ y $\mathbf{c}'$ (se llaman forma de Lagrange para el residuo) se obtienen del *segundo teorema del valor medio para integrales.* Éste dice que

$$\int_a^b h(t)g(t)\,dt = h(c)\int_a^b g(t)\,dt,$$

siempre que h *y* g *sean continuas y* $g \geq 0$ *en* $[a,b]$*; donde* c *es algún número entre* a *y* b.* Esto se aplica en la fórmula (5) para la forma explícita del residuo con $h(t) = (\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j)(x_0 + t\mathbf{h})$ y $g(t) = 1 - t$.

**Demostración* Si $g = 0$, el resultado es trivial, de modo que podemos suponer que $g \neq 0$ y que $\int_a^b g(t)\,dt > 0$. Sean M y m los valores máximo y mínimo de h, alcanzados en t_M y t_m, respectivamente. Como $g(t) \geq 0$,

$$m\int_a^b g(t)\,dt \leq \int_a^b h(t)g(t)\,dt \leq M\int_a^b g(t)\,dt.$$

Así, $(\int_a^b h(t)g(t)\,dt)/(\int_a^b g(t)\,dt)$ está entre $m = h(t_m)$ y $M = h(t_M)$ y entonces, por el teorema del valor intermedio, es igual a $h(c)$ para algún c intermedio. ■

No es difícil imaginar la forma general del teorema de Taylor. Por ejemplo, la fórmula de Taylor de tercer orden es

$$f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0)$$
$$+ \frac{1}{3!}\sum_{i,j,k=1}^{n} h_i h_j h_k \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\mathbf{x}_0) + R_3(\mathbf{h},\mathbf{x}_0),$$

donde $R_3(\mathbf{h},\mathbf{x}_0)/\|\mathbf{h}\|^3 \to 0$ cuando $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$, y así sucesivamente. La fórmula general se puede probar por inducción, usando el método de demostración dado anteriormente.

EJEMPLO 1 *Calcular la fórmula de Taylor de segundo orden para* $f(x,y) = \operatorname{sen}(x+2y)$, *alrededor del punto* $\mathbf{x}_0 = (0,0)$.

SOLUCIÓN Nótese que

$$f(0,0) = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \cos(0+2\cdot 0) = 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 2\cos(0+2\cdot 0) = 2,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0.$$

Así,

$$f(\mathbf{h}) = f(h_1,h_2) = h_1 + 2h_2 + R_2(\mathbf{h},\mathbf{0}),$$

donde

$$\frac{R_2(\mathbf{h},\mathbf{0})}{\|\mathbf{h}\|^2} \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad \mathbf{h} \to \mathbf{0}. \qquad \blacktriangle$$

EJEMPLO 2 *Calcular la fórmula de Taylor de segundo orden para* $f(x,y) = e^x \cos y$, *alrededor del punto* $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

SOLUCIÓN Aquí

$$f(0,0) = 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 1, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = -1, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0,$$

y así

$$f(\mathbf{h}) = f(h_1, h_2) = 1 + h_1 + \tfrac{1}{2}h_1^2 - \tfrac{1}{2}h_2^2 + R_2(\mathbf{h}, \mathbf{0}),$$

donde

$$\frac{R_2(\mathbf{h}, \mathbf{0})}{\|\mathbf{h}\|^2} \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad \mathbf{h} \to \mathbf{0}. \qquad \blacktriangle$$

En el caso de funciones de una variable, se puede desarrollar $f(x)$ en una serie infinita de potencias, llamada *serie de Taylor*:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f'(x_0)h^2}{2} + \cdots + \frac{f^{(k)}(x_0)h^k}{k!} + \cdots,$$

siempre que se pueda mostrar que $R_k(h, x_0) \to 0$ cuando $k \to \infty$. De manera análoga, para funciones de varias variables los términos anteriores se reemplazan con lós correspondientes que incluyen derivadas parciales, como lo vimos en el teorema 2. De nuevo, se puede representar dicha función mediante su serie de Taylor, siempre que sea posible mostrar que $R_k \to 0$ cuando $k \to \infty$. Este punto se examina con mayor profundidad en el ejercicio 7.

EJERCICIOS

En los ejercicios 1 al 6, determinar la fórmula de Taylor de segundo orden para la función dada alrededor del punto dado (x_0, y_0).

1. $f(x, y) = (x + y)^2$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$

2. $f(x, y) = 1/(x^2 + y^2 + 1)$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$

3. $f(x, y) = e^{x+y}$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$

4. $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}\cos(xy)$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$

5. $f(x, y) = \operatorname{sen}(xy) + \cos(xy)$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$

6. $f(x, y) = e^{(x-1)^2}\cos y$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$

***7.** Una función $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ se llama *analítica* siempre que

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + \cdots + \frac{f^{(k)}(x)}{k!}h^k + \cdots$$

(i.e., la serie del lado derecho converja y sea igual a $f(x + h)$).

(a) Suponer que f satisface la condición siguiente: en cualquier intervalo cerrado $[a, b]$ existe una constante M tal que para toda $k = 1, 2, 3, \ldots$, $|f^{(k)}(x)| \leq M^k$ para todo $x \in [a, b]$. Probar que f es analítica.

(b) Sea $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$

Mostrar que f es una función C^∞, pero que f no es analítica.

(c) Dar una definición de función analítica de $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}$. Generalizar la demostración de la parte (a) para esta clase de funciones.

(d) Desarrollar $f(x, y) = e^{x+y}$ en una serie de potencias alrededor de $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

4.2 EXTREMOS DE FUNCIONES CON VALORES REALES

NOTA HISTÓRICA

A lo largo de la historia se han buscado leyes que describan los fenómenos del mundo físico. Sin embargo, ningún principio general que abarcara a todos los fenómenos se propuso hasta 1744, cuando el científico francés Pierre Louis Moreau de Maupertuis presentó su gran esquema del universo.

El "principio metafísico" de Maupertuis es la suposición de que la naturaleza siempre opera con la mayor economía posible. Dicho brevemente, las leyes físicas son consecuencia de un principio de "economía de medios"; la naturaleza siempre actúa de tal manera que minimiza alguna cantidad, lo que Maupertuis llamó "acción".

Estas ideas, a menudo llamadas *principios variacionales,* son la piedra angular filosófica de buena parte de la física matemática y particularmente de la mecánica, tema central de la física, la ingeniería y las matemáticas. El gran matemático suizo Leonhard Euler contribuyó con gran parte de la base matemática para la teoría relacionada de máximos y mínimos de cantidades escalares. Parte de su teoría se presenta en esta sección.

Entre las características geométricas básicas de la gráfica de una función están sus puntos extremos, en los cuales la función alcanza sus valores mayor y menor. En esta sección deduciremos un método para determinar estos puntos. De hecho, el método también descubre extremos locales. Éstos son puntos en donde la función alcanza un valor máximo o uno mínimo respecto a los puntos cercanos. Comencemos definiendo los términos usados.

DEFINICIÓN *Si $f: U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ es una función escalar dada, un punto $\mathbf{x}_0 \in U$ se llama* ***mínimo local*** *de f si existe una vecindad V de $\mathbf{x}_0$ tal que para todos los*

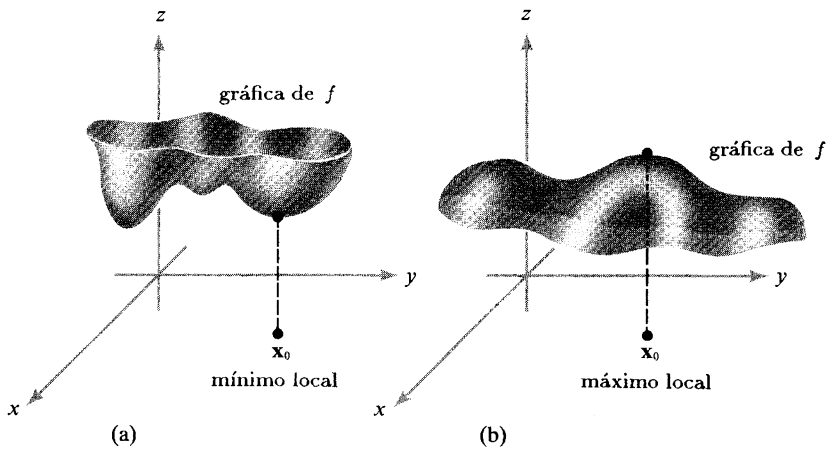


Figura 4.2.1 Puntos mínimo local (a) y máximo local (b) para una función de dos variables.

puntos $\mathbf{x}$ *en* V, $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$. *(Ver la figura 4.2.1.) De manera análoga,* $\mathbf{x}_0 \in U$ *es un* ***máximo local*** *si existe una vecindad* V *de* $\mathbf{x}_0$ *tal que* $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$ *para todo* $\mathbf{x} \in V$. *El punto* $\mathbf{x}_0 \in U$ *es un* ***extremo local*** *o* ***relativo****, si es mínimo local o máximo local. Un punto* $\mathbf{x}_0$ *es un* ***punto crítico*** *de* f *si* $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$. *Un punto crítico que no es un extremo local se llama* ***punto silla****.**

La ubicación de los extremos está basada en el hecho siguiente, que debiera conocerse desde el cálculo de una variable (caso $n = 1$): todo extremo es un punto crítico.

TEOREMA 3 *Si* $U \subset \mathbf{R}^n$ *es abierto,* $f: U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *es diferenciable y* $\mathbf{x}_0 \in U$ *es un extremo local, entonces* $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$*; esto es,* $\mathbf{x}_0$ *es un punto crítico de* f.

DEMOSTRACIÓN Suponer que f alcanza un máximo local en $\mathbf{x}_0$. Entonces para cualquier $\mathbf{h} \in \mathbf{R}^n$, la función $g(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})$ tiene un máximo local en $t = 0$. Así, por cálculo de una variable $g'(0) = 0$.† Por otro lado, por la regla de la cadena,

$$g'(0) = [\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)]\mathbf{h}.$$

---

*No siempre se usa el término "*punto silla*" con esta generalidad; más adelante continuaremos con el estudio de los puntos silla.

†*Demostración* Como $g(0)$ es un máximo local, $g(t) \leq g(0)$ para $t > 0$ pequeño, de modo que $g(t) - g(0) \leq 0$, y de aquí, $g'(0) = \lim_{t \to 0^+} (g(t) - g(0))/t \leq 0$, donde límite significa límite cuando $t \to 0$ y $t > 0$. De manera análoga, para $t < 0$ pequeña tenemos $g'(0) = \lim_{t \to 0^-} (g(t) - g(0))/t \geq 0$, de modo que $g'(0) = 0$. ■

Así, $[\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)]\mathbf{h} = 0$ para todo $\mathbf{h}$, de modo que $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$. El caso en el que f alcanza un mínimo local en $\mathbf{x}_0$ es completamente análogo. ■

Si recordamos que $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) = 0$ significa que todas las componentes de $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$ son cero, podemos reescribir el resultado del teorema 3: si $\mathbf{x}_0$ es un extremo local, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n;$$

esto es, cada derivada parcial es cero en $\mathbf{x}_0$. En otras palabras, $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$, donde ∇f es el gradiente de f.

Si queremos hallar los extremos o los extremos locales de una función, entonces según el teorema 3 debemos buscar entre los puntos críticos. A veces resulta posible detectarlos mediante inspección, pero lo común es usar criterios (que desarrollaremos más adelante) análogos al de la segunda derivada en cálculo de una variable.

EJEMPLO 1 *Hallar los máximos y mínimos de la función $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$. (Ignorar el hecho de que este ejemplo puede resolverse por inspección).*

SOLUCIÓN Debemos identificar los puntos críticos de f resolviendo las ecuaciones $\partial f(x, y)/\partial x = 0$ y $\partial f(x, y)/\partial y = 0$, para x y y. Pero

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 2x \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 2y,$$

de modo que el único punto crítico es el origen $(0, 0)$, donde el valor de la función es cero. Como $f(x, y) \geq 0$, este punto es un mínimo relativo —de hecho, un mínimo absoluto o global— de f. ▲

EJEMPLO 2 *Considerar la función del ejemplo 4 de la sección 2.1, $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$. Ignorar por el momento que esta función tiene un punto silla y no tiene extremos, y aplicar el método del teorema 3 para localizar los extremos.*

SOLUCIÓN Como en el ejemplo 1, hallamos que f tiene un solo punto crítico, en el origen, donde el valor de f es cero. Examinando directamente los valores de f para puntos cerca del origen, vemos que $f(x, 0) \geq f(0, 0)$ y $f(0, y) \leq f(0, 0)$. Como se pueden tomar x o y arbitrariamente pequeños, el origen no puede ser un mínimo relativo ni un máximo relativo (de modo que es un punto silla). Por lo tanto, esta función no tiene extremos relativos (ver la figura 4.2.2). ▲

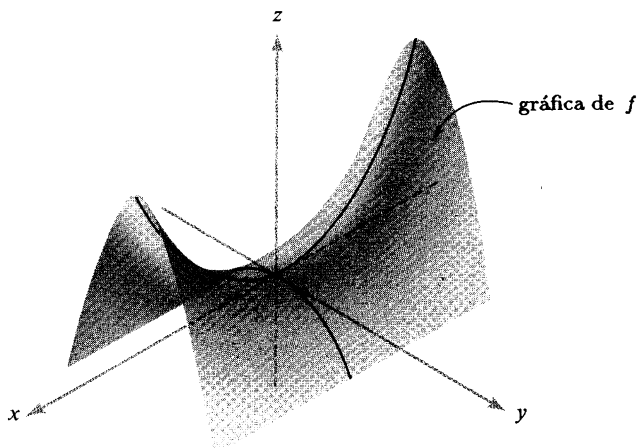


Figura 4.2.2 Función de dos variables con punto silla.

EJEMPLO 3 *Hallar todos los puntos críticos de* $z = x^2y + y^2x$.

SOLUCIÓN Diferenciando, obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + y^2, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy + x^2.$$

Al igualar a cero las derivadas parciales se obtiene

$$2xy + y^2 = 0, \qquad 2xy + x^2 = 0.$$

Restando, obtenemos $x^2 = y^2$. Así, $x = \pm y$. Sustituyendo $x = +y$ en la primera ecuación anterior, hallamos que

$$2y^2 + y^2 = 3y^2 = 0,$$

de modo que $y = 0$ y así, $x = 0$. Si $x = -y$, entonces

$$-2y^2 + y^2 = -y^2 = 0,$$

de modo que $y = 0$ y por lo tanto $x = 0$. De aquí que el único punto crítico es $(0, 0)$. Para $x = y$, $z = 2x^3$, que es tanto positivo como negativo para x cerca de cero. Así, $(0, 0)$ no es un extremo relativo. ▲

El resto de esta sección se dedica a deducir un criterio que dependa de la segunda derivada, para que un punto crítico sea un extremo relativo. En el caso especial $n = 1$, el criterio se reducirá a la conocida condición de que $f''(x) > 0$

para un mínimo y $f''(x) < 0$ para un máximo. Pero en el contexto general, la segunda derivada es un objeto matemático bastante más complicado. Para enunciar el criterio introducimos una versión de la segunda derivada llamado el hessiano.

El concepto que deseamos introducir incluye la idea de *función cuadrática*. Las funciones cuadráticas son funciones $g\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ que tienen la forma

$$g(h_1, \ldots, h_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j$$

para una matriz $[a_{ij}]$. En términos de multiplicación de matrices podemos escribir

$$g(h_1, \ldots, h_n) = [h_1 \cdots h_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}.$$

Podemos, si así lo queremos, suponer que $[a_{ij}]$ es simétrica; de hecho, g no cambia si reemplazamos a_{ij} por $b_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$, pues $h_i h_j = h_j h_i$ y la suma es sobre toda i y j. La naturaleza *cuadrática* de g se refleja en la identidad

$$g(\lambda h_1, \ldots, \lambda h_n) = \lambda^2 g(h_1, \ldots, h_n),$$

que se sigue de la definición.

Ahora estamos preparados para definir funciones hessianas (llamadas así en honor de Ludwig Otto Hesse, quien las introdujo en 1844).

DEFINICIÓN *Suponer que $f\colon U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ tiene derivadas parciales de segundo orden $(\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j)(\mathbf{x}_0)$, para $i, j = 1, \ldots, n$, en un punto $\mathbf{x}_0 \in U$. El* ***hessiano de f en $\mathbf{x}_0$*** *es la función cuadrática definida por*

$$Hf(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) h_i h_j.$$

Esta función se usa, por lo común, en puntos críticos $\mathbf{x}_0 \in U$. En este caso, $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) = 0$, y la fórmula de Taylor (ver el teorema 2, sección 4.1) se puede escribir en la forma

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + Hf(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) + R_2(\mathbf{h}, \mathbf{x}_0).$$

Así, en un punto crítico el hessiano es igual al primer término no constante en la serie de Taylor de f.

Una función cuadrática $g\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ se llama *definitivamente positiva* si $g(\mathbf{h}) \geq 0$, para todo $\mathbf{h} \in \mathbf{R}^n$ y $g(\mathbf{h}) = 0$ sólo para $\mathbf{h} = \mathbf{0}$. De manera análoga, g es *definitivamente negativa* si $g(\mathbf{h}) \leq 0$ y $g(\mathbf{h}) = 0$ sólo para $\mathbf{h} = \mathbf{0}$.

Nótese que si $n = 1$, $Hf(x_0)(h) = \frac{1}{2} f''(x_0) h^2$, la cual es definitivamente positiva si $f''(x_0) > 0$. Ahora ya estamos preparados para enunciar el criterio para extremos relativos.

TEOREMA 4 *Si $f: U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ es de clase C^3, $\mathbf{x}_0 \in U$ es un punto crítico de f y el hessiano $Hf(\mathbf{x}_0)$ es definitivamente positivo, entonces $\mathbf{x}_0$ es un mínimo relativo de f. De manera análoga, si $Hf(\mathbf{x}_0)$ es definitivamente negativo, entonces $\mathbf{x}_0$ es un máximo relativo.*

En realidad, probaremos que los extremos son *estrictos*. Se dice que un máximo relativo $\mathbf{x}_0$ es *estricto* si $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}_0)$ para $\mathbf{x}$ cercano, con $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$. De manera análoga se define un mínimo relativo estricto.

La demostración del teorema 4 requiere el teorema de Taylor y el siguiente resultado de álgebra lineal.

LEMA 1 *Si $B = [b_{ij}]$ es una matriz real de $n \times n$, y si la función cuadrática asociada*

$$H: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, (h_1, \ldots, h_n) \mapsto \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} h_i h_j$$

es definitivamente positiva, entonces existe una constante $M > 0$ tal que para todo $\mathbf{h} \in \mathbf{R}^n$,

$$H(\mathbf{h}) \geq M \|\mathbf{h}\|^2.$$

DEMOSTRACIÓN Para $\|\mathbf{h}\| = 1$, hacer $g(\mathbf{h}) = H(\mathbf{h})$. Entonces g es una función continua de $\mathbf{h}$ para $\|\mathbf{h}\| = 1$ y por lo tanto alcanza un valor mínimo, digamos M.* Como H es cuadrática, tenemos

$$H(\mathbf{h}) = H\left(\frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}\|\mathbf{h}\|\right) = H\left(\frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}\right)\|\mathbf{h}\|^2 = g\left(\frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}\right)\|\mathbf{h}\|^2 \geq M\|\mathbf{h}\|^2$$

para cualquier $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$. (El resultado es válido de manera obvia si $\mathbf{h} = \mathbf{0}$.) ■

Nótese que la función cuadrática asociada con la matriz $\frac{1}{2}(\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j)$ es precisamente el hessiano.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 4 (Optativa) Recordar que si $f: U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ es de clase C^3 y $\mathbf{x}_0 \in U$ es un punto crítico, el teorema de Taylor se puede expresar en la forma

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) = Hf(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) + R_2(\mathbf{h}, \mathbf{x}_0),$$

donde

$$\frac{R_2(\mathbf{h}, \mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{h}\|^2} \to 0$$

cuando $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$.

---

*Usamos aquí sin demostración, un teorema análogo al de cálculo en el cual se afirma que toda función continua en un intervalo $[a, b]$ alcanza un máximo y un mínimo. El resultado requerido aquí se enuncia en el teorema 6, más adelante.

Como $Hf(\mathbf{x}_0)$ es definitivamente positivo, el lema 1 asegura la existencia de una constante $M > 0$ tal que para todo $\mathbf{h} \in \mathbf{R}^n$

$$Hf(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) \geq M\|\mathbf{h}\|^2.$$

Como $R_2(\mathbf{h}, \mathbf{x}_0)/\|\mathbf{h}\|^2 \to 0$ cuando $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$, existe $\delta > 0$ tal que para $0 < \|\mathbf{h}\| < \delta$

$$|R_2(\mathbf{h}, \mathbf{x}_0)| < M\|\mathbf{h}\|^2.$$

Así, $0 < Hf(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) + R_2(\mathbf{h}, \mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)$ para $0 < \|\mathbf{h}\| < \delta$, de manera que $\mathbf{x}_0$ es un mínimo relativo, de hecho, un mínimo relativo estricto.

La demostración en el caso definitivamente negativo es análoga, o puede obtenerse al aplicar la anterior a $-f$, y se deja como ejercicio. ■

EJEMPLO 4 Considerar de nuevo la función $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$. Entonces, $(0, 0)$ es un punto crítico y f ya está dada en la forma del teorema de Taylor

$$f((0,0) + (h_1, h_2)) = f(0,0) + (h_1^2 + h_2^2) + 0.$$

Podemos ver directamente que el hessiano en $(0, 0)$ es

$$Hf(\mathbf{0})(\mathbf{h}) = h_1^2 + h_2^2,$$

el cual, es evidente, es definitivamente positivo. Así, $(0, 0)$ es un mínimo relativo. Desde luego que este caso sencillo pudo haberse hecho sin cálculo. En efecto, resulta claro que $f(x, y) > 0$ para todo $(x, y) \neq (0, 0)$. ▲

Para funciones $f(x, y)$ de dos variables, es posible escribir el hessiano como sigue:

$$Hf(x,y)(\mathbf{h}) = \tfrac{1}{2}[h_1, h_2] \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}.$$

Presentaremos ahora un criterio útil para saber cuándo una función cuadrática definida por una matriz de 2×2 de ese tipo, es definitivamente positiva. Esto será de utilidad junto con el teorema 4.

LEMA 2 *Sean*

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad H(\mathbf{h}) = \tfrac{1}{2}[h_1, h_2]B \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}.$$

Entonces $H(\mathbf{h})$ es definitivamente positiva si y sólo si $a > 0$ y $\det B = ac - b^2 > 0$.

DEMOSTRACIÓN Tenemos

$$H(\mathbf{h}) = \tfrac{1}{2}[h_1, h_2]\begin{bmatrix} ah_1 + bh_2 \\ bh_1 + ch_2 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2}(ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2).$$

Completemos el cuadrado, escribiendo

$$H(\mathbf{h}) = \tfrac{1}{2}a\left(h_1 + \frac{b}{a}h_2\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{a}\right)h_2^2$$

Supongamos que H es definitivamente positivo. Haciendo $h_2 = 0$, vemos que $a > 0$. Haciendo $h_1 = -(b/a)h_2$, obtenemos $c - b^2/a > 0$ o $ac - b^2 > 0$. Recíprocamente, si $a > 0$ y $c - b^2/a > 0$, $H(\mathbf{h})$ es una suma de cuadrados, de manera que $H(\mathbf{h}) \geq 0$. Si $H(\mathbf{h}) = 0$, entonces cada cuadrado debe ser cero. Esto implica que tanto h_1 como h_2 deben ser cero, de modo que $H(\mathbf{h})$ es definitivamente positiva. ■

De manera análoga, $H(\mathbf{h})$ es definitivamente negativa si y sólo si $a < 0$ y $ac - b^2 > 0$. Hay criterios similares para una matriz simétrica B de $n \times n$. Considerar las n submatrices cuadradas a lo largo de la diagonal (ver la figura 4.2.3). B es definitivamente positiva (esto es, la función cuadrática asociada con B es definitivamente positiva) si y sólo si los determinantes de estas submatrices diagonales son todos mayores que cero. Para B definitivamente negativa, los signos deberán alternarse < 0 y > 0. No probaremos aquí este caso general.* En caso de que los determinantes de las submatrices diagonales no sean todos iguales a cero pero que la matriz no sea definitivamente positiva o negativa, el punto crítico es *tipo silla*; en este caso se puede mostrar que el punto no es máximo ni mínimo.

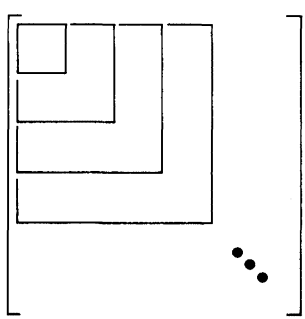


Figura 4.2.3 Se usan submatrices "diagonales" en el criterio para definitividad positiva; todas deben tener determinante > 0.

El lema 2 y el teorema 4 dan el resultado de la página siguiente.

*Esto se demuestra, por ejemplo, en K. Hoffman y R. Kunze, *Linear Algebra*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1961, págs. 249–251. Los estudiantes familiarizados con álgebra lineal notarán que B es definitivamente positiva cuando todos sus valores propios (que son reales, pues B es simétrica) son positivos.

TEOREMA 5 *Sea $f(x,y)$ de clase C^3 en un conjunto abierto U en $\mathbf{R}^2$. Un punto (x_0, y_0) es un mínimo local (estricto) de f si se cumplen las tres condiciones siguientes:*

(i) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$

(ii) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$

(iii) $D = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$ *en* (x_0, y_0)

(D se llama el discriminante.) Si en (ii) *tenemos < 0 en lugar de > 0 sin cambiar la condición* (iii), *entonces tenemos un máximo local (estricto).*

EJEMPLO 5 *Clasificar los puntos críticos de la función $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $(x,y) \mapsto x^2 - 2xy + 2y^2$.*

SOLUCIÓN Como en el ejemplo 4, es fácil calcular y ver que el origen es el único punto crítico $f(0,0) = 0$, y que el hessiano es

$$Hf(\mathbf{0})(\mathbf{h}) = h_1^2 - 2h_1h_2 + 2h_2^2 = (h_1 - h_2)^2 + h_2^2,$$

el cual claramente es definitivamente positivo. Así, f tiene un mínimo relativo en $(0,0)$. De manera alternativa, podemos aplicar el teorema 5. En $(0,0)$, $\partial^2 f/\partial x^2 = 2$, $\partial^2 f/\partial y^2 = 4$ y $\partial^2 f/\partial x \partial y = -2$. Se cumplen las condiciones (i), (ii) y (iii), de modo que f tiene un mínimo relativo en $(0,0)$. ▲

Si en el teorema 5 se tuviera $D < 0$, entonces tendríamos un punto silla. De hecho, podemos probar que $f(x,y)$ es mayor que $f(x_0, y_0)$ conforme nos alejamos de (x_0, y_0) en una dirección y menor en la dirección ortogonal (ver el ejercicio 24). Entonces, la apariencia general es similar a la mostrada en la figura 4.2.2. En el caso $D = 0$, para conocer la apariencia de la gráfica cerca de (x_0, y_0), se requiere de más análisis.

Resumamos el procedimiento para tratar con funciones de dos variables: Después de que se han hallado todos los puntos críticos y calculado los hessianos asociados, algunos de éstos pueden ser definitivamente positivos, indicando mínimos relativos; otros pueden ser definitivamente negativos, indicando máximos relativos, y algunos no serán definitivamente positivos ni definitivamente negativos, indicando puntos silla. La forma de la gráfica en un punto silla donde $D < 0$ es como la de la figura 4.2.2. Los puntos críticos para los cuales $D \neq 0$ se llaman *puntos críticos no degenerados*. Dichos puntos son máximos, mínimos o puntos silla. Los puntos críticos restantes, donde $D = 0$, se pueden examinar directamente, con conjuntos de nivel y secciones (sección 2.1), o por otro método. Dichos puntos críticos se llaman *degenerados*; los métodos desarrollados en este capítulo no pueden proporcionar una imagen del comportamiento de una función cerca de dichos puntos, de modo que los examinaremos caso por caso.

EJEMPLO 6 *Localizar los máximos, mínimos y puntos silla de la función*

$$f(x,y) = \log(x^2 + y^2 + 1).$$

SOLUCIÓN Primero debemos localizar los puntos críticos de esta función; por lo tanto, de acuerdo con el teorema 3, calculamos

$$\nabla f(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2+1}\mathbf{i} + \frac{2y}{x^2+y^2+1}\mathbf{j}.$$

Así, $\nabla f(x,y) = \mathbf{0}$ si y sólo si $(x,y) = (0,0)$, de modo que el único punto crítico de f es $(0,0)$. Ahora debemos determinar si se trata de un máximo, un mínimo o un punto silla. Las segundas derivadas parciales son

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2(x^2+y^2+1) - (2x)(2x)}{(x^2+y^2+1)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2(x^2+y^2+1) - (2y)(2y)}{(x^2+y^2+1)^2}$$

y

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-2x(2y)}{(x^2+y^2+1)^2}.$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0,$$

lo cual conduce a

$$D = 2 \cdot 2 = 4 > 0.$$

Como $(\partial^2 f/\partial x^2)(0,0) > 0$, concluimos, por el teorema 5, que $(0,0)$ es un mínimo local. (¿Pueden mostrar esto a partir sólo del hecho de que $\log t$ es una función creciente de $t > 0$?) ▲

EJEMPLO 7 *La gráfica de la función $g(x,y) = 1/xy$ es una superficie S en $\mathbf{R}^3$. Hallar los puntos en S más cercanos al origen $(0,0,0)$.*

SOLUCIÓN La distancia de (x,y,z) a $(0,0,0)$ está dada por la fórmula

$$d(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Si $(x,y,z) \in S$, entonces d se puede expresar como una función $d_*(x,y) = d(x,y,1/xy)$ de dos variables:

$$d_*(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+\frac{1}{x^2y^2}}.$$

Nótese que el mínimo (si es que existe) no puede estar "muy cerca" del eje x o del eje y, pues d_* se hace muy grande cuando x o y tienden a cero. Además, d_* se hace grande para x y y grandes. Así, es plausible (y lo aceptaremos) que d_* tenga realmente un mínimo para algunos valores finitos de x y y diferentes de cero. Nuestra tarea será localizar este punto.

Como $d_* > 0$, esto se minimizará cuando $d_*^2(x,y) = x^2+y^2+(1/x^2y^2) = f(x,y)$ sea mínima. (Es más fácil trabajar con esta función f.) Calculamos el gradiente

$$\nabla f(x,y) = \nabla d_*^2(x,y) = \left(2x - \frac{2}{x^3y^2}\right)\mathbf{i} + \left(2y - \frac{2}{y^3x^2}\right)\mathbf{j}.$$

Esto es $\mathbf{0}$ si y sólo si

$$\left(2x - \frac{2}{x^3y^2}\right) = 0 = \left(2y - \frac{2}{y^3x^2}\right),$$

es decir, $x^4y^2 - 1 = 0$ y $x^2y^4 - 1 = 0$. De la primera ecuación obtenemos $y^2 = 1/x^4$, y, sustituyendo esto en la segunda ecuación, obtenemos

$$\frac{x^2}{x^8} = 1 = \frac{1}{x^6}.$$

Así, $x = \pm 1$ y $y = \pm 1$, y por lo tanto se sigue que f tiene cuatro puntos críticos, a saber: $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$ y $(-1,-1)$. Para determinar en qué casos se trata de mínimos locales, máximos locales o puntos silla, aplicamos el teorema 5:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 + \frac{6}{x^4y^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 + \frac{6}{x^2y^4}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{4}{x^3y^3},$$

y así

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) = 8,$$

donde (a,b) es uno de los cuatro puntos críticos dados anteriormente, y $(\partial^2 f/\partial x \partial y)(a,b) = \pm 4$.

Vemos que en cualquiera de los casos anteriores $D = 64 - 16 = 48 > 0$ y $(\partial^2 f/\partial x^2)(a,b) > 0$, de modo que cada punto crítico es un mínimo local, y éstos son todos los mínimos locales de f.

Finalmente, nótese que $d_*^2(a,b) = 3$ para todos estos puntos críticos de modo que los puntos sobre la superficie más cercanos a $(0,0,0)$ son $(1,1,1)$, $(1,-1,-1)$, $(-1,1,-1)$ y $(-1,-1,1)$, con $d_* = \sqrt{3}$ en estos puntos. Así, $d_* \geq \sqrt{3}$ y es igual a $\sqrt{3}$ cuando $(x,y) = (\pm 1, \pm 1)$. ▲

EJEMPLO 8 *Analizar el comportamiento de $z = x^5y + xy^5 + xy$ en sus puntos críticos.*

SOLUCIÓN Las primeras derivadas parciales son

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 5x^4y + y^5 + y = y(5x^4 + y^4 + 1)$$

y

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x(5y^4 + x^4 + 1).$$

Los términos $5x^4 + y^4 + 1$ y $5y^4 + x^4 + 1$ siempre son mayores o iguales que 1; se sigue, entonces, que el único punto crítico está en $(0,0)$.

Las segundas derivadas parciales son

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 20x^3y, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 20xy^3$$

y

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 5x^4 + 5y^4 + 1.$$

Así, en $(0,0)$, $D = -1$, de modo que $(0,0)$ es un punto silla no degenerado y la gráfica de z cerca de $(0,0)$ se ve como en la figura 4.2.2. ▲

Terminamos esta sección con un estudio de la teoría de máximos y mínimos *absolutos*, o *globales*, de funciones de varias variables. Desafortunadamente, en general es un problema más difícil localizar los máximos y mínimos absolutos para funciones definidas en $\mathbf{R}^n$ que para funciones de una variable.

DEFINICIÓN *Suponer que $f\colon A \to \mathbf{R}$ es una función definida en un conjunto A de $\mathbf{R}^2$ o $\mathbf{R}^3$. Se dice que un punto $\mathbf{x}_0 \in A$ es un punto de* ***máximo absoluto*** *(o de* ***mínimo absoluto****) de f si $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$ (o $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$) para todo $\mathbf{x} \in A$.*

En cálculo de una variable se aprende que toda función continua en un intervalo cerrado I alcanza su valor máximo (o mínimo) en algún punto $\mathbf{x}_0$ en I. También se cumple una generalización a $\mathbf{R}^n$ de este hecho teórico.

DEFINICIÓN *Se dice que un conjunto $D \subset \mathbf{R}^n$ es* ***acotado*** *si existe un número $M > 0$ tal que $\|\mathbf{x}\| < M$ para todo $\mathbf{x} \in D$. Un conjunto es* ***cerrado*** *si contiene a todos sus puntos frontera.*

Así, un conjunto es acotado si puede estar estrictamente contenido en alguna bola (que puede ser grande). La generalización apropiada del teorema en una variable de los máximos y mínimos es el resultado siguiente, que enunciamos sin demostración.

TEOREMA 6: TEOREMA DEL MÁXIMO Y DEL MÍNIMO *Sea D cerrado y acotado en $\mathbf{R}^n$ y sea $f: D \to \mathbf{R}$ continua. Entonces f alcanza sus valores máximo y mínimo en algunos puntos $\mathbf{x}_0$ y $\mathbf{x}_1$ de D.*

Dicho de manera simple, $\mathbf{x}_0$ y $\mathbf{x}_1$ son puntos en donde f alcanza sus valores mayor y menor. Como en cálculo de una variable, estos puntos no necesariamente están determinados de manera única.

Suponer que $D = U \cup \partial U$, donde U es abierto y ∂U es su frontera. Más aún, suponer que ∂U es una curva suave a trozos (como en la figura 4.2.4). Por definición, D es cerrado, pues contiene a todos sus puntos frontera (ver la sección 2.2) y suponemos además que D está acotado. Ahora podemos enunciar una consecuencia del teorema 3.

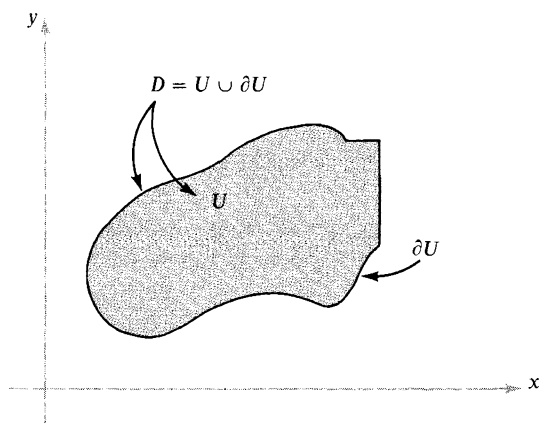


Figura 4.2.4 $D = U \cup \partial U$.

TEOREMA 7 *Sea D según la descripción anterior, con $f: D \to \mathbf{R}$ continua, y sea f de clase C^1 en U. Si f alcanza su valor máximo (o mínimo) en un punto $\mathbf{x}_0$ de U, entonces $\mathbf{x}_0$ es un punto crítico de f.*

En efecto, si el punto máximo (o mínimo) es elemento de U y no está en ∂U, es un extremo local, y así, el teorema 3 da el resultado. Para hallar el máximo y mínimo absolutos para una función de clase C^1, $f: D \to \mathbf{R}$, empleamos un procedimiento similar al del cálculo en una variable:

(i) *Localizar todos los puntos críticos de f en U.*

(ii) *Hallar los puntos críticos de f considerada como función definida sólo en ∂U.*

(iii) *Calcular el valor de f en todos estos puntos críticos.*

(iv) *Comparar estos valores y seleccionar el mayor y el menor.*

Estos pasos, excepto el (ii), han de ser ya conocidos por el alumno. Para llevar a cabo el paso (ii) en el plano, hallamos primero parametrización suave de ∂U;

esto es, hallamos una trayectoria una $\sigma: I \to \partial U$, donde I es algún intervalo que va sobre ∂U. En segundo lugar, consideramos la función de una variable $t \mapsto f(\sigma(t))$, $t \in I$ y localizamos los puntos máximo y mínimo t_0 y $t_1 \in I$ (¡recuerden revisar los extremos!). Entonces $\sigma(t_0)$, $\sigma(t_1)$ será un máximo y un mínimo para f, o viceversa, como función definida en ∂U. Otro método para manejar el paso (ii) es el del multiplicador de Lagrange, que presentaremos en la sección siguiente.

EJEMPLO 9 *Hallar los valores máximo y mínimo de la función $f(x,y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$ en el disco D definido por $x^2 + y^2 \leq 1$.*

SOLUCIÓN (i) Para hallar los puntos críticos hacemos $\partial f/\partial x = \partial f/\partial y = 0$. Así, $2x - 1 = 0$, $2y - 1 = 0$ y por lo tanto, $(x,y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ es el único punto crítico en el disco abierto $U = \{(x,y) | x^2 + y^2 < 1\}$.

(ii) La frontera ∂U se puede parametrizar por $\sigma(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Así,

$$\begin{aligned} f(\sigma(t)) &= \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t - \operatorname{sen} t - \cos t + 1 \\ &= 2 - \operatorname{sen} t - \cos t = g(t). \end{aligned}$$

Para hallar el máximo y mínimo de f en ∂U, basta localizar el máximo y mínimo de g. Ahora, $g'(t) = 0$ sólo cuando

$$\operatorname{sen} t = \cos t, \qquad \text{i.e.,} \qquad t = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}.$$

Así, los candidatos para máximo y mínimo de f en ∂U son los puntos $\sigma(\frac{\pi}{4})$, $\sigma(\frac{5}{4}\pi)$ y los extremos $\sigma(0) = \sigma(2\pi)$.

(iii) Los valores de f en los puntos críticos son: $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ del paso (i) y, del paso (ii),

$$\begin{aligned} f\left(\sigma\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) &= f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \sqrt{2} + 1 \\ &= 2 - \sqrt{2}, \\ f\left(\sigma\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) &= f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 + \sqrt{2}, \end{aligned}$$

y

$$f(\sigma(0)) = f(\sigma(2\pi)) = f(0,1) = 1.$$

(iv) Comparando todos los valores $\frac{1}{2}$, $2-\sqrt{2}$, $2+\sqrt{2}$, 1, es claro que el mínimo absoluto se alcanza en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y el máximo absoluto se alcanza en $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$. ▲

EJERCICIOS

En los ejercicios 1 al 16, hallar los puntos críticos de las funciones dadas y determinar cuáles son máximos locales, mínimos locales o puntos silla.

1. $f(x,y) = x^2 - y^2 + xy$

2. $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$

3. $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy$

4. $f(x,y) = x^2 + y^2 + 3xy$

5. $f(x,y) = e^{1+x^2-y^2}$

6. $f(x,y) = x^2 - 3xy + 5x - 2y + 6y^2 + 8$

7. $f(x,y) = 3x^2 + 2xy + 2x + y^2 + y + 4$

8. $f(x,y) = \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$ (considerar solamente el punto crítico $(0,0)$)

9. $f(x,y) = \cos(x^2 + y^2)$ (considerar solamente los puntos críticos $(0,0)$, $(\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2})$ y $(0, \sqrt{\pi})$)

10. $f(x,y) = y + x \operatorname{sen} y$

11. $f(x,y) = e^x \cos y$

12. $f(x,y) = (x-y)(xy-1)$

13. $f(x,y) = xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$

14. $f(x,y) = \log(2 + \operatorname{sen} xy)$

15. $f(x,y) = x \operatorname{sen} y$

16. $f(x,y) = (x+y)(xy+1)$

17. Al examinar la función $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $(x,y) \mapsto (y-3x^2)(y-x^2)$ nos daremos idea de la dificultad para hallar condiciones que garanticen que un punto crítico sea un extremo relativo cuando falle el teorema 5. Mostrar que

(a) El origen es un punto crítico de f;

(b) f tiene un mínimo relativo en $(0,0)$ en cada recta que pasa por $(0,0)$; esto es, si $g(t) = (at, bt)$, entonces $f \circ g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tiene un mínimo relativo en 0, para cada selección de a y b;

(c) El origen no es un mínimo relativo de f.

18. Sea $f(x,y) = Ax^2 + E$ donde A y E son constantes. ¿Cuáles son los puntos críticos de f? ¿Son máximos locales o mínimos locales?

19. Sea $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2$. Aquí $D = 0$. ¿Pueden decir cuáles puntos críticos son mínimos locales, máximos locales o puntos silla?

20. Hallar el punto en el plano $2x - y + 2z = 20$ más cercano al origen.

21. Mostrar que la caja rectangular de volumen dado tiene superficie mínima cuando la caja es un cubo.

22. Mostrar que el paralelepípedo rectangular con área de superficie fija y volumen máximo es un cubo.

23. Escribir el número 120 como suma de tres números, de modo que la suma de los productos tomados de dos en dos, sea máxima.

24. Mostrar que si (x_0, y_0) es un punto crítico de una función C^3, $f(x,y)$, y $D < 0$, entonces hay puntos (x,y) cerca de (x_0, y_0) en los cuales $f(x,y) > f(x_0, y_0)$ y, de manera análoga, puntos en los cuales $f(x,y) < f(x_0, y_0)$

25. Determinar la naturaleza de los puntos críticos de la función

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy.$$

26. Sea n un entero mayor que 2 y sea $f(x,y) = ax^n + cy^n$, donde $ac \neq 0$. Determinar la naturaleza de los puntos críticos de f.

27. Determinar la naturaleza de los puntos críticos de $f(x,y) = x^3 + y^2 - 6xy + 6x + 3y$.

28. Hallar los valores máximo y mínimo absolutos de la función $f(x,y) = (x^2 + y^2)^4$ definida en el disco $x^2 + y^2 \leq 1$.

29. Repetir el ejercicio 28 para la función $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$.

30. Una curva C en el espacio está definida *implícitamente* en el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ por medio de la ecuación adicional $x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1$. Hallar el punto o puntos en C más cercanos al origen.

31. Hallar los valores máximo y mínimo absolutos para $f(x,y) = \operatorname{sen} x + \cos y$ en el rectángulo $R = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

32. Hallar los valores máximo y mínimo absolutos de la función $f(x,y) = xy$ en el rectángulo $R = [-1, 1] \times [-1, 1]$.

33. Determinar la naturaleza de los puntos críticos de $f(x,y) = xy + 1/x + 8/y$.

En los ejercicios 34 al 38, D denota al disco unitario.

***34.** Sea u una función definida en D, que sea "estrictamente subarmónica"; esto es, $\nabla^2 u = (\partial^2 u/\partial x^2) + (\partial^2 u/\partial y^2) > 0$. Mostrar que u no puede tener un punto máximo en $D \backslash \partial D$ (conjunto de puntos en D que no están en ∂D).

***35.** Sea u una función armónica; esto es, $\nabla^2 u = 0$. Mostrar que si u alcanza su valor máximo en $D \backslash \partial D$, también lo alcanza en ∂D. A veces se le llama "principio débil del máximo" para funciones armónicas. (IDEA: Considerar $\nabla^2(u + \epsilon e^x)$, $\epsilon > 0$. Pueden usar el hecho siguiente, que se demuestra en textos más avanzados: dada una sucesión $\{\mathbf{p}_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, en un conjunto cerrado y acotado A, en $\mathbf{R}^2$ o $\mathbf{R}^3$, existe un punto $\mathbf{q}$ tal que toda vecindad de $\mathbf{q}$ contiene al menos un miembro de $\{\mathbf{p}_n\}$.

***36.** Definir el concepto de función estrictamente supraarmónica u en D, parafraseando el ejercicio 34. Mostrar que u no puede tener mínimo en $D \backslash \partial D$.

***37.** Sea u armónica en D, como en el ejercicio 35. Mostrar que si u alcanza su valor mínimo en $D \backslash \partial D$, también lo alcanza en ∂D. A veces se le llama "principio débil del mínimo" para funciones armónicas.

***38.** Sea $\phi: \partial D \to \mathbf{R}$ continua y T una solución en D a $\nabla^2 T = 0$, $T = \phi$ en ∂D.

(a) Usar los ejercicios 34 a 37 para mostrar que dicha solución, de existir, debe ser única.

(b) Suponer que $T(x, y)$ representa una función de temperatura que es independiente del tiempo, donde ϕ representa la temperatura de una placa circular en su frontera. ¿Pueden dar una interpretación física del principio enunciado en la parte (a)?

***39.** (a) Sea f una función C^1 en la recta real $\mathbf{R}$. Suponer que f tiene exactamente un punto crítico x_0 que es un mínimo local estricto de f. Mostrar que x_0 también es un mínimo absoluto para f, esto es, que $f(x) \geq f(x_0)$ para todo x.

(b) En el ejemplo siguiente se muestra que la conclusión de la parte (a) no se cumple para funciones de más de una variable. Sea $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(x, y) = -y^4 - e^{-x^2} + 2y^2\sqrt{e^x + e^{-x^2}}.$$

(i) Mostrar que $(0, 0)$ es el único punto crítico de f y que es un mínimo local.

(ii) Mostrar de manera informal que f no tiene mínimo absoluto.

***40.** Suponer que un pentágono está compuesto de un rectángulo debajo de un triángulo isósceles (ver la figura 4.2.5). Si la longitud del perímetro es fija, hallar el área máxima posible.

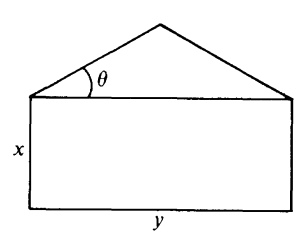


Figura 4.2.5 Maximizar el área para un perímetro fijo.

4.3 EXTREMOS RESTRINGIDOS Y MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Es común en problemas querer maximizar una función sujeta a ciertas *restricciones* o *condiciones laterales*. Dichas situaciones surgen, por ejemplo, en economía. Suponer que queremos vender dos tipos de mercancía, digamos I y II; sean x y y la cantidad vendida de cada una. Representamos por $f(x,y)$ la ganancia obtenida cuando se vende x cantidad de I y y cantidad de II. Pero nuestra producción está controlada por nuestro capital, de manera que estamos restringidos a trabajar sujetos a una relación $g(x,y) = c$. Así, queremos maximizar $f(x,y)$ entre los (x,y) que satisfagan $g(x,y) = c$. A la condición $g(x,y) = c$ le llamamos *restricción* en el problema.

El propósito de esta sección es desarrollar algunos métodos para manejar este problema y otros similares.

TEOREMA 8: TEOREMA DEL MULTIPLICADOR DE LAGRANGE *Sean $f: U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ y $g: U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ funciones suaves dadas. Sean $\mathbf{x}_0 \in U$ y $g(\mathbf{x}_0) = c$, y sea S el conjunto de nivel para g con valor c (recordar que éste es el conjunto de puntos $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ con $g(\mathbf{x}) = c$). Suponer que $\nabla g(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$.*

Si $f|S$, que denota a "f restringida a S", tiene un máximo o un mínimo en S, en $\mathbf{x}_0$, entonces existe un número real λ tal que

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}_0). \tag{1}$$

DEMOSTRACIÓN En realidad, no hemos desarrollado técnicas suficientes para dar una demostración completa, pero podemos dar los puntos esenciales. (Las cuestiones técnicas adicionales necesarias se dan en la sección 4.4.)

Recordar que para $n = 3$ se define el espacio tangente o plano tangente de S en $\mathbf{x}_0$ como el espacio ortogonal a $\nabla g(\mathbf{x}_0)$ (ver la sección 2.5), y para n arbitraria podemos dar exactamente la misma definición de espacio tangente de S en $\mathbf{x}_0$. Esta definición se puede motivar al considerar tangentes a trayectorias $\boldsymbol{\sigma}(t)$ que están en S, como sigue: si $\boldsymbol{\sigma}(t)$ es una trayectoria en S y $\boldsymbol{\sigma}(0) = \mathbf{x}_0$, entonces $\boldsymbol{\sigma}'(0)$ es un vector tangente a S en $\mathbf{x}_0$; pero

$$\frac{d}{dt} g(\boldsymbol{\sigma}(t)) = \frac{d}{dt} c = 0,$$

y por otro lado, por la regla de la cadena,

$$\left.\frac{d}{dt} g(\boldsymbol{\sigma}(t))\right|_{t=0} = \nabla g(\mathbf{x}_0) \cdot \boldsymbol{\sigma}'(0),$$

de manera que $\nabla g(\mathbf{x}_0) \cdot \boldsymbol{\sigma}'(0) = 0$; esto es, $\boldsymbol{\sigma}'(0)$ es ortogonal a $\nabla g(\mathbf{x}_0)$.

Si $f|S$ tiene un máximo en $\mathbf{x}_0$, entonces $f(\sigma(t))$ indudablemente tiene un máximo en $t = 0$. Por cálculo de una variable, $df(\sigma(t))/dt|_{t=0} = 0$. Entonces, por la regla de la cadena,

$$0 = \frac{d}{dt} f(\sigma(t))\bigg|_{t=0} = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \sigma'(0).$$

Así, $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ es perpendicular a la tangente de toda curva en S y entonces también es perpendicular al espacio tangente de S en $\mathbf{x}_0$. Como el espacio perpendicular a este espacio tangente es una recta, $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ y $\nabla g(\mathbf{x}_0)$ son paralelos. Como $\nabla g(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$, se sigue que $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ es múltiplo de $\nabla g(\mathbf{x}_0)$, lo cual es precisamente la conclusión del teorema. ■

Presentemos el aspecto geométrico de la demostración.

COROLARIO *Si f, al restringirse a una superficie S, tiene un máximo o mínimo en $\mathbf{x}_0$, entonces $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ es perpendicular a S en $\mathbf{x}_0$ (ver la figura 4.3.1).*

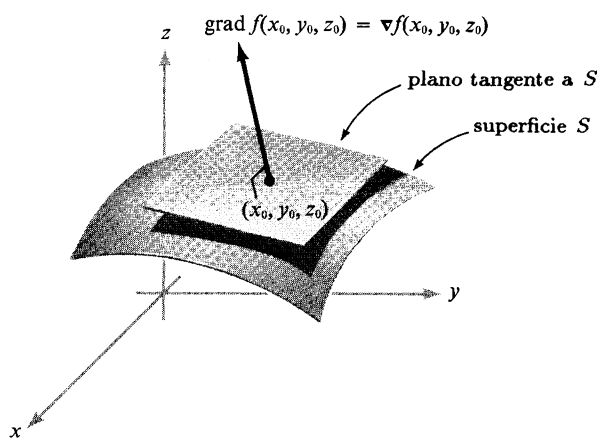


Figura 4.3.1 Geometría de los extremos con restricciones.

En estos resultados se observa que para hallar los extremos con restricciones de f debemos buscar entre los $\mathbf{x}_0$ que satisfagan las conclusiones del teorema o del corolario. Daremos varios ejemplos de cómo usar cada uno.

Cuando se use el método del teorema 8, debemos buscar un punto $\mathbf{x}_0$ y una constante λ, llamada *multiplicador de Lagrange*, tal que $\nabla f(\mathbf{x}_0 = \lambda \nabla g(\mathbf{x}_0)$. Este método es de naturaleza más analítica que el método del corolario al teorema del multiplicador de Lagrange, que es más geométrico.

En la ecuación (1) se dice que las derivadas parciales de f son proporcionales a las de g. Hallar los puntos $\mathbf{x}_0$ en los que ocurre esto, significa resolver las ecuaciones simultáneas

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,\ldots,x_n) &= \lambda\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,\ldots,x_n)\\
\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,\ldots,x_n) &= \lambda\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,\ldots,x_n)\\
&\vdots\\
\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1,\ldots,x_n) &= \lambda\frac{\partial g}{\partial x_n}(x_1,\ldots,x_n)\\
g(x_1,\ldots,x_n) &= c
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

para $x_1,\ldots, x_n$ y λ.

Otra manera de considerar estas ecuaciones es así: pensar en λ como una variable adicional y formar la función auxiliar $h(x_1,\ldots,x_n,\lambda) = f(x_1,\ldots,x_n) - \lambda[g(x_1,\ldots,x_n) - c]$. En el teorema del multiplicador de Lagrange se dice que para hallar los puntos extremos de $f|S$ debemos examinar los puntos críticos de h. Éstos se encuentran resolviendo las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}
0 = \frac{\partial h}{\partial x_1} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda\frac{\partial g}{\partial x_1}\\
0 = \frac{\partial h}{\partial x_n} &= \frac{\partial f}{\partial x_n} - \lambda\frac{\partial g}{\partial x_n}\\
0 = \frac{\partial h}{\partial \lambda} &= g(x_1,\ldots,x_n) - c
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

que son las mismas que las ecuaciones en el grupo (2) anterior.

En el teorema 9 a continuación, se darán criterios de la segunda derivada análogos a los de la sección 4.2. Sin embargo, en muchos problemas es posible distinguir entre máximos y mínimos por medios geométricos. Como, usualmente, esto es más sencillo, consideraremos primero ejemplos del último tipo.

EJEMPLO 1 *Sea $S \subset \mathbf{R}^2$ la recta que pasa por $(-1,0)$ inclinada a $45°$, y sea $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $(x,y) \mapsto x^2 + y^2$. Hallar los extremos de $f|S$.*

SOLUCIÓN Aquí $S = \{(x,y) \mid y - x - 1 = 0\}$, y por lo tanto hacemos $g(x,y) = y - x - 1$ y $c = 0$. Tenemos $\nabla g(x,y) = -\mathbf{i} + \mathbf{j} \neq \mathbf{0}$. Los extremos relativos de $f|S$ deben hallarse entre los puntos en que ∇f es ortogonal a S, esto es, inclinado a $-45°$. Pero $\nabla f(x,y) = (2x, 2y)$, que tiene la pendiente deseada sólo cuando $x = -y$, o cuando (x,y) está sobre la recta L que pasa por el origen inclinada a $-45°$. Esto puede suceder en el conjunto S sólo para el único punto en el que se

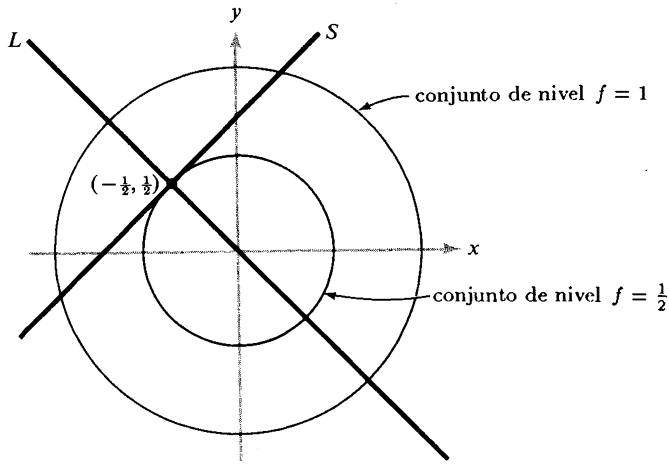


Figura 4.3.2 Geometría asociada con la búsqueda de los extremos de $f(x, y) = x^2 + y^2$ restringida a $S = \{(x, y) \mid y - x - 1 = 0\}$.

intersecan L y S (ver la figura 4.3.2). Al referirnos a las curvas de nivel de f se indica que este punto $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ es un mínimo relativo de $f|S$ (pero no de f). ▲

EJEMPLO 2 *Sea $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$, y sea S el círculo de radio 1 alrededor del origen. Hallar el extremo de $f|S$.*

SOLUCIÓN El conjunto S es la curva de nivel para g con valor 1, donde $g: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$. Como ya estudiamos ambas funciones en ejemplos anteriores, conocemos sus curvas de nivel; se muestran en la figura 4.3.3. En dos dimensiones, la condición de que $\nabla f = \lambda \nabla g$ en $\mathbf{x}_0$, i.e., que ∇f y ∇g son paralelos en $\mathbf{x}_0$, es la misma que las curvas de nivel sean tangentes en $\mathbf{x}_0$ (¿por qué?). Así, los puntos extremos de $f|S$ son $(0, \pm 1)$ y $(\pm 1, 0)$. Evaluando f, hallamos que $(0, \pm 1)$ son mínimos y $(\pm 1, 0)$ son máximos.

Resolvamos ahora el problema analíticamente, por el método de los multiplicadores de Lagrange. Claramente,

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2x, -2y)$$

y

$$\nabla g(x, y) = (2x, 2y).$$

Nótese que $\nabla g(x, y) \neq \mathbf{0}$ si $x^2 + y^2 = 1$. Así, de acuerdo con el teorema del multiplicador de Lagrange, debemos hallar λ tal que

$$(2x, -2y) = \lambda(2x, 2y)$$

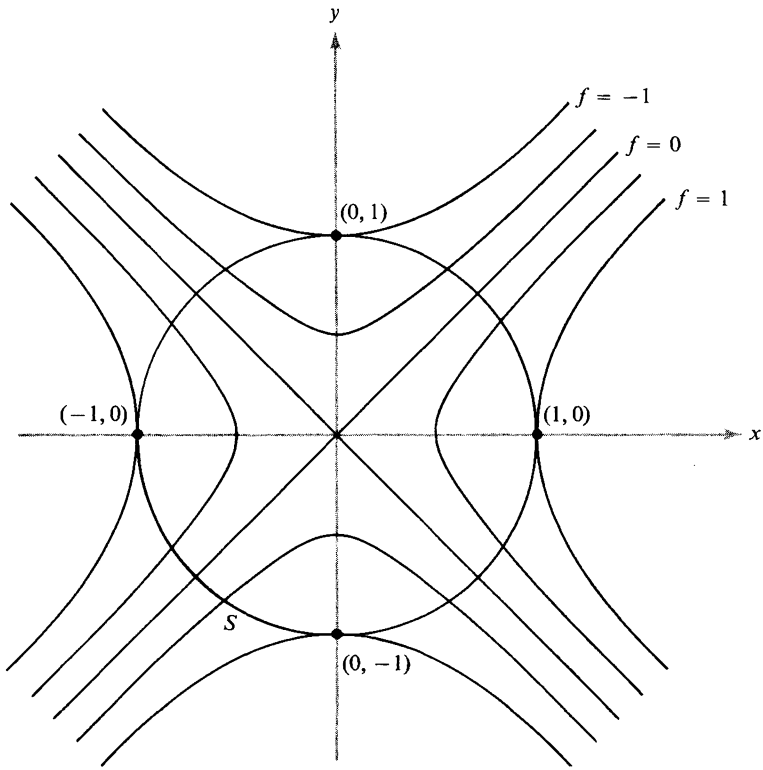


Figura 4.3.3 Geometría asociada con el problema de hallar los extremos de $x^2 - y^2$ en $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

y

$$(x, y) \in S, \qquad \text{i.e.,} \qquad x^2 + y^2 = 1.$$

Estas condiciones producen tres ecuaciones que se pueden resolver para las tres incógnitas x, y y λ. De $2x = \lambda 2x$ concluimos que $x = 0$ o $\lambda = 1$. Si $x = 0$, entonces $y = \pm 1$ y $-2y = \lambda 2y$ implica $\lambda = -1$. Si $\lambda = 1$, entonces $y = 0$ y $x = \pm 1$. Así, obtenemos los puntos $(0, \pm 1)$ y $(\pm 1, 0)$, como antes. Como hemos mencionado, este método sólo localiza extremos potenciales; deben usarse otros métodos, tales como argumentos geométricos o el criterio de la segunda derivada presentado a continuación* para determinar si son máximos, mínimos o ni una cosa ni otra. ▲

*En estos ejemplos, $\nabla g(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$ en la superficie S, como requiere el teorema del multiplicador de Lagrange. Si $\nabla g(\mathbf{x}_0)$ fuera cero para algún $\mathbf{x}_0$ en S, entonces habría que incluirlo entre los extremos posibles.

EJEMPLO 3 *Maximizar la función $f(x, y, z) = x + z$ sujeta a la restricción $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.*

SOLUCIÓN De nuevo usamos el teorema del multiplicador de Lagrange. Buscamos λ y (x, y, z) tales que

$$1 = 2x\lambda,$$
$$0 = 2y\lambda,$$
$$1 = 2z\lambda$$

y

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

De la primera o tercera ecuación vemos que $\lambda \neq 0$. Así, de la segunda ecuación, obtenemos $y = 0$. De la primera y tercera ecuaciones, $x = z$, y de la cuarta, $x = \pm 1/\sqrt{2} = z$. Entonces nuestros puntos son $(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$ y $(-1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$. Comparando los valores de f en estos puntos, podemos ver que el primer punto produce el máximo de f (con las restricciones) y el segundo el mínimo. ▲

EJEMPLO 4 *Hallar el mayor volumen que pueda tener una caja rectangular sujeta a la restricción de que el área de la superficie esté fija, en* $10\,\mathrm{m}^2$.

SOLUCIÓN Aquí, si x, y y z son las longitudes de los lados, el volumen es $f(x, y, z) = xyz$. La restricción es $2(xy + xz + yz) = 10$; esto es, $xy + xz + yz = 5$. Así, nuestras condiciones son

$$yz = \lambda(y + z)$$
$$xz = \lambda(x + z)$$
$$xy = \lambda(y + x)$$
$$xy + xz + yz = 5.$$

En primer lugar, $x \neq 0$, pues $x = 0$ implica $yz = 5$ y $0 = \lambda z$, de modo que $\lambda = 0$ y $yz = 0$. De manera análoga, $y \neq 0$, $z \neq 0$, $x + y \neq 0$ y así sucesivamente. Al eliminar λ de las dos primeras ecuaciones se tiene $yz/(y + z) = xz/(x + z)$, lo cual da $x = y$; de manera análoga, $y = z$. Al sustituir estos valores en la última ecuación, obtenemos $3x^2 = 5$, o $x = \sqrt{\frac{5}{3}}$. Así, $x = y = z = \sqrt{\frac{5}{3}}$ y $xyz = (\frac{5}{3})^{3/2}$. Ésta es la solución; deberá ser claro, geométricamente, que el máximo ocurre cuando $x = y = z$. ▲

Algunas recomendaciones generales son útiles para problemas como éste. En primer lugar, si la superficie S está acotada (como, por ejemplo, un elipsoide),

entonces f debe tener un máximo y un mínimo en S. (Ver el teorema 6 en la sección anterior.) En particular, si f sólo tiene dos puntos que satisfagan las condiciones del teorema del multiplicador de Lagrange o de su corolario, entonces uno debe ser un máximo y el otro debe ser un mínimo. Evaluando f en cada punto podremos distinguir el máximo del mínimo. Sin embargo, si hay más de dos de dichos puntos, alguno puede ser punto silla. Además, si S no está acotada (por ejemplo, si es un hiperboloide), entonces f no necesariamente tiene máximos o mínimos.

Si una superficie S está definida por cierto número de restricciones, a saber,

$$\left.\begin{array}{l} g_1(x_1,\ldots,x_n)=c_1 \\ g_2(x_1,\ldots,x_n)=c_2 \\ \vdots \\ g_k(x_1,\ldots,x_n)=c_k \end{array}\right\} \tag{4}$$

entonces se puede generalizar el teorema del multiplicador de Lagrange, de la siguiente manera: *Si f tiene un máximo o un mínimo en $\mathbf{x}_0$ en S, deben existir constantes $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tales que**

$$\nabla f(\mathbf{x}_0)=\lambda_1\nabla g_1(\mathbf{x}_0)+\cdots+\lambda_k\nabla g_k(\mathbf{x}_0). \tag{5}$$

Este caso se puede probar generalizando el método usado para probar el teorema del multiplicador de Lagrange. Demos un ejemplo de cómo puede usarse esta formulación más general.

EJEMPLO 5 *Hallar los puntos extremos de $f(x,y,z)=x+y+z$ sujeto a las condiciones $x^2+y^2=2$ y $x+z=1$.*

SOLUCIÓN Aquí hay dos restricciones:

$$g_1(x,y,z)=x^2+y^2-2=0$$

y

$$g_2(x,y,z)=x+z-1=0.$$

Así, debemos hallar x, y, z, λ_1 y λ_2 tales que

$$\nabla f(x,y,z)=\lambda_1\nabla g_1(x,y,z)+\lambda_2\nabla g_2(x,y,z)$$

y

$$g_1(x,y,z)=0,$$
$$g_2(x,y,z)=0;$$

*Como con la hipótesis $\nabla g(\mathbf{x}_0)\neq 0$ en el teorema del multiplicador de Lagrange, aquí debemos suponer que los vectores $\nabla g_1(\mathbf{x}_0), \ldots, \nabla g_k(\mathbf{x}_0)$ son linealmente independientes.

esto es, calculando los gradientes e igualando componentes,

$$1 = \lambda_1 \cdot 2x + \lambda_2 \cdot 1,$$
$$1 = \lambda_1 \cdot 2y + \lambda_2 \cdot 0,$$
$$1 = \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 1$$

y

$$x^2 + y^2 = 2,$$
$$x + z = 1.$$

Éstas son cinco ecuaciones para x, y, z, λ_1 y λ_2. De la tercera, $\lambda_2 = 1$, y así $2x\lambda_1 = 0$, $2y\lambda_1 = 1$. Como la segunda implica $\lambda_1 \neq 0$, tenemos $x = 0$. Así, $y = \pm\sqrt{2}$ y $z = 1$. Entonces los extremos deseados son $(0, \pm\sqrt{2}, 1)$. Por inspección, $(0, \sqrt{2}, 1)$ da un máximo y $(0, -\sqrt{2}, 1)$ un mínimo. ▲

Suplemento de la sección 4.3 Criterio de la segunda derivada para extremos restringidos

En la sección 4.2 desarrollamos un criterio de la segunda derivada para extremos de funciones de varias variables, basado en la observación del término de segundo grado en la serie de Taylor de f. Si la matriz hessiana de las segundas derivadas parciales era definitivamente positiva o definitivamente negativa en un punto crítico de f, pudimos concluir que estábamos en un mínimo o máximo relativo, respectivamente.

Sin embargo, en esta sección no estamos interesados en todos los valores de f sino sólo en aquellos obtenidos al restringir f a algún conjunto S que sea el conjunto de nivel de otra función g. La situación es complicada, primero porque los extremos restringidos de f no necesariamente se presentan en los puntos críticos de f y, segundo, porque sólo se permite a la variable moverse en el conjunto S. No obstante, se puede dar un criterio de la segunda derivada en términos de lo que se llama el *hessiano limitado*. Mostraremos cómo surge esto para el caso de una función $f(x, y)$ de dos variables sujeta a la restricción $g(x, y) = c$.

De acuerdo a las observaciones que siguen al teorema del multiplicador de Lagrange, los extremos restringidos de f se hallan buscando en los puntos críticos de la función auxiliar $h(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - c)$. Supongamos que (x_0, y_0, λ) es dicho punto y sea $\mathbf{v}_0 = (x_0, y_0)$. Esto es,

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\mathbf{v}_0} = \lambda \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{\mathbf{v}_0}$$
$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\mathbf{v}_0} = \lambda \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{\mathbf{v}_0}$$
$$g(x_0, y_0) = c.$$

En cierto sentido, se trata de un problema en una variable. Si la función g es del todo razonable, entonces el conjunto S definido por $g(x,y) = c$ es una curva y estamos interesados en cómo varía f conforme nos movemos a lo largo de esta curva. Si en la ecuación $g(x,y) = c$ podemos despejar una variable en términos de la otra, entonces la tendremos explícita y podemos usar el criterio de la segunda derivada para una variable. Si $\partial g/\partial y|_{\mathbf{v}_0} \neq 0$, entonces la curva S no es vertical en $\mathbf{v}_0$ y es razonable que podamos despejar y como función de x en una vecindad de x_0. De hecho, lo probaremos en la sección 4.4. (Si $\partial g/\partial x|_{\mathbf{v}_0} \neq 0$, podemos despejar x como función de y.)

Suponer que S es la gráfica de $y = \phi(x)$. Entonces $f|S$ se puede escribir como función de una variable, $f(x,y) = f(x,\phi(x))$. La regla de la cadena da

$$\left.\begin{aligned} &\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d\phi}{dx} \\ \text{y}\quad &\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{d\phi}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{d^2\phi}{dx^2} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

La relación $g(x,\phi(x)) = c$ se puede usar para hallar $d\phi/dx$ y $d^2\phi/dx^2$. Diferenciando ambos lados de $g(x,\phi(x)) = c$ respecto a x da

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{d\phi}{dx} = 0$$

y

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}\frac{d\phi}{dx} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{d^2\phi}{dx^2} = 0,$$

de modo que

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\phi}{dx} = -\frac{\partial g/\partial x}{\partial g/\partial y} \\ \text{y}\quad &\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\frac{1}{\partial g/\partial y}\left[\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}\frac{\partial g/\partial x}{\partial g/\partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\left(\frac{\partial g/\partial x}{\partial g/\partial y}\right)^2\right] \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Al sustituir la ecuación (7) en la (6) tenemos

$$\left.\begin{aligned} &\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f/\partial y}{\partial g/\partial y}\frac{\partial g}{\partial x} \\ \text{y}\quad &\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{1}{(\partial g/\partial y)^2}\left\{\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f/\partial y}{\partial g/\partial y}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right]\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2\right. \\ &\qquad \left. -2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial f/\partial y}{\partial g/\partial y}\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}\right]\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial f/\partial y}{\partial g/\partial y}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right]\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2\right\} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

En $\mathbf{v}_0$, sabemos que $\partial f/\partial y = \lambda \partial g/\partial y$ y que $\partial f/\partial x = \lambda \partial g/\partial x$, de modo que la ecuación (8) se convierte en

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0} - \lambda \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{x_0} = 0$$

y

$$\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x_0} = \frac{1}{(\partial g/\partial y)^2}\left[\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2\right]$$

$$= -\frac{1}{(\partial g/\partial y)^2}\begin{vmatrix} 0 & -\dfrac{\partial g}{\partial x} & -\dfrac{\partial g}{\partial y} \\ -\dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \\ -\dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

donde las cantidades se evalúan en x_0 y h es la función auxiliar introducida anteriormente. Este determinante de 3×3 se llama *hessiano limitado*, y su signo es opuesto al de $d^2 f/dx^2$. Por lo tanto, si es negativo debemos tener un mínimo local. Si es positivo, estamos en un máximo local; y si es cero, el criterio no permite concluir. Este razonamiento conduce al siguiente criterio (ver el ejercicio 24 para un enfoque diferente).

TEOREMA 9 *Sean $f: U \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ y $g: U \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ funciones suaves (al menos C^2). Sean $\mathbf{v}_0 \in U$, $g(\mathbf{v}_0) = c$ y S la curva de nivel para g con valor c. Suponer que $\nabla g(\mathbf{v}_0) \neq \mathbf{0}$ y que existe un número real λ tal que $\nabla f(\mathbf{v}_0) = \lambda \nabla g(\mathbf{v}_0)$. Formar la función auxiliar $h = f - \lambda g$ y el determinante hessiano limitado*

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & -\dfrac{\partial g}{\partial x} & -\dfrac{\partial g}{\partial y} \\ -\dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \\ -\dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2} \end{vmatrix} \quad \textit{evaluado en } \mathbf{v}_0.$$

(i) *Si $|\bar{H}| > 0$, entonces $\mathbf{v}_0$ es un punto máximo local para $f|S$.*

(ii) *Si $|\bar{H}| < 0$, entonces $\mathbf{v}_0$ es un punto mínimo local para $f|S$.*

(iii) *Si $|\bar{H}| = 0$, entonces el criterio no concluye, y $\mathbf{v}_0$ puede ser un máximo, un mínimo o ni una cosa ni otra.*

EJEMPLO 6 *Hallar puntos extremos de $f(x, y) = (x - y)^n$ sujetos a la restricción $x^2 + y^2 = 1$, donde $n \geq 1$.*

SOLUCIÓN Igualamos a cero las primeras derivadas de la función auxiliar $h(x, y, \lambda) = (x - y)^n - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$:

$$\begin{aligned} n(x-y)^{n-1} - 2\lambda x &= 0 \\ -n(x-y)^{n-1} - 2\lambda y &= 0 \\ -(x^2 + y^2 - 1) &= 0. \end{aligned}$$

De las primeras dos ecuaciones vemos que $\lambda(x + y) = 0$. Si $\lambda = 0$, entonces $x = y = \pm\sqrt{2}/2$. Si $\lambda \neq 0$ entonces $x = -y$. Los cuatro puntos críticos se representan en la figura 4.3.4 y se listan a continuación los valores correspondientes de $f(x, y)$:

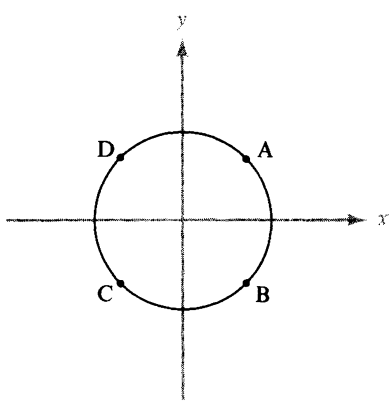


Figura 4.3.4 Los cuatro puntos críticos del ejemplo 6.

(A)	$x = \sqrt{2}/2$	$y = \sqrt{2}/2$	$\lambda = 0$	$f(x, y) = 0$
(B)	$x = \sqrt{2}/2$	$y = -\sqrt{2}/2$	$\lambda = n(\sqrt{2})^{n-2}$	$f(x, y) = (\sqrt{2})^n$
(C)	$x = -\sqrt{2}/2$	$y = -\sqrt{2}/2$	$\lambda = 0$	$f(x, y) = 0$
(D)	$x = -\sqrt{2}/2$	$y = +\sqrt{2}/2$	$\lambda = (-1)^{n-2} n(\sqrt{2})^{n-2}$	$f(x, y) = (-\sqrt{2})^n$

Por inspección, vemos que si n es par, entonces A y C son puntos mínimos y B y D son máximos. Si n es impar, entonces B es un punto máximo, D es un mínimo, y A y D no son ni una cosa ni otra. Veamos si el teorema 9 es consistente con estas observaciones.

El determinante hessiano limitado es

$$\begin{aligned} |\bar{H}| &= \begin{vmatrix} 0 & -2x & -2y \\ -2x & n(n-1)(x-y)^{n-2} - 2\lambda & -n(n-1)(x-y)^{n-2} \\ -2y & -n(n-1)(x-y)^{n-2} & n(n-1)(x-y)^{n-2} - 2\lambda \end{vmatrix} \\ &= -4n(n-1)(x-y)^{n-2}(x+y)^2 + 8\lambda(x^2 - y^2). \end{aligned}$$

Si $n = 1$ o si $n \geq 3$, $|\bar{H}| = 0$ en A, B, C y D. Si $n = 2$, entonces $|\bar{H}| = 0$ en B y D y -16 en A y C. Entonces el criterio de la segunda derivada reconoce los mínimos en A y C, pero no detecta los máximos en B y D para $n = 2$. Tampoco concluye para otros valores de n. ▲

Tal como sucede en el caso sin restricciones, también hay un criterio de la segunda derivada para funciones de más de dos variables. Si buscamos los puntos extremos para $f(x_1, \ldots, x_n)$ sujetos a la sola restricción $g(x_1, \ldots, x_n) = c$, primero formamos el hessiano limitado para la función auxiliar $h(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) - \lambda(g(x_1, \ldots, x_n) - c)$, como sigue:

$$\begin{vmatrix} 0 & -\partial g/\partial x_1 & -\partial g/\partial x_2 & \cdots & -\partial g/\partial x_n \\ -\partial g/\partial x_1 & \partial^2 h/\partial x_1^2 & \partial^2 h/\partial x_1 \partial x_2 & \cdots & \partial^2 h/\partial x_1 \partial x_n \\ -\partial g/\partial x_2 & \partial^2 h/\partial x_1 \partial x_2 & \partial^2 h/\partial x_2^2 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\partial g/\partial x_n & \partial^2 h/\partial x_1 \partial x_n & \partial^2 h/\partial x_2 \partial x_n & \cdots & \partial^2 h/\partial x_n^2 \end{vmatrix}$$

En segundo lugar, examinamos los determinantes de las submatrices diagonales de orden ≥ 3 en los puntos críticos de h. Si son todos negativos, esto es, si

$$\begin{vmatrix} 0 & -\dfrac{\partial g}{\partial x_1} & -\dfrac{\partial g}{\partial x_2} \\ -\dfrac{\partial g}{\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} \\ -\dfrac{\partial g}{\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} < 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & -\dfrac{\partial g}{\partial x_1} & -\dfrac{\partial g}{\partial x_2} & -\dfrac{\partial g}{\partial x_3} \\ -\dfrac{\partial g}{\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_3} \\ -\dfrac{\partial g}{\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_2^2} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_2 \partial x_3} \\ -\dfrac{\partial g}{\partial x_3} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_3} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_2 \partial x_3} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_3^2} \end{vmatrix} < 0, \ldots,$$

entonces estamos en un mínimo local de $f|S$. Si comienzan con un subdeterminante positivo de 3×3 y se alternan los signos (esto es, > 0, < 0, > 0, $< 0, \ldots$), entonces estamos en un máximo local. Si no son todos cero y no siguen estos patrones, entonces el punto no es un máximo ni un mínimo (se llama de tipo silla).*

EJEMPLO 7 *Estudiar los puntos extremos locales de $f(x, y, z) = xyz$ en la superficie de la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ usando el criterio de la segunda derivada.*

---

*Para un estudio detallado, ver C. Caratheodory, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, Holden-Day, San Francisco, 1965; Y. Murata, *Mathematics for Stability and Optimization of Economic Systems*, Academic Press, Nueva York, 1977, págs. 263–271; o D. Spring, *Am. Math. Monthly* 92 (1985): 631–643. Ver también el ejercicio 24.

SOLUCIÓN Igualando a cero las derivadas parciales de la función auxiliar $h(x, y, z, \lambda) = xyz - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$ se obtiene

$$\begin{aligned} yz &= 2\lambda x \\ xz &= 2\lambda y \\ xy &= 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1. \end{aligned}$$

Así, $3xyz = 2\lambda(x^2+y^2+z^2) = 2\lambda$. Si $\lambda = 0$, las soluciones son $(x, y, z, \lambda) = (\pm 1, 0, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0, 0)$ y $(0, 0, \pm 1, 0)$. Si $\lambda \neq 0$, entonces tenemos $2\lambda = 3xyz = 6\lambda z^2$, de modo que $z^2 = \frac{1}{3}$. De manera análoga, $x^2 = y^2 = \frac{1}{3}$. Así, las soluciones están dadas por $\lambda = \frac{3}{2}xyz = \pm\sqrt{3}/6$. Los puntos críticos de h y los valores correspondientes de f están dados en la tabla 4.1. Vemos de ahí que los puntos E, F, G y K son mínimos. Los puntos D, H, I y J son máximos. Para ver si esto concuerda con el criterio de la segunda derivada necesitamos considerar dos determinantes. Primero veamos lo siguiente:

$$\begin{aligned} |\bar{H}_2| &= \begin{vmatrix} 0 & -\partial g/\partial x & -\partial g/\partial y \\ -\partial g/\partial x & \partial^2 h/\partial x^2 & \partial^2 h/\partial x \partial y \\ -\partial g/\partial y & \partial^2 h/\partial x \partial y & \partial^2 h/\partial y^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2x & -2y \\ -2x & -2\lambda & z \\ -2y & z & -2\lambda \end{vmatrix} \\ &= 8\lambda x^2 + 8\lambda y^2 + 8xyz = 8\lambda(x^2 + y^2 + 2z^2) \end{aligned}$$

Observar que signo $(|\bar{H}_2|)$ = signo λ = signo (xyz), donde signo $\alpha = +1$ si $\alpha > 0$ y -1 si $\alpha < 0$. En segundo lugar consideremos

$$|\bar{H}_3| = \begin{vmatrix} 0 & -\partial g/\partial x & -\partial g/\partial y & -\partial g/\partial z \\ -\partial g/\partial x & \partial^2 h/\partial x^2 & \partial^2 h/\partial x \partial y & \partial^2 h/\partial x \partial z \\ -\partial g/\partial y & \partial^2 h/\partial x \partial y & \partial^2 h/\partial y^2 & \partial^2 h/\partial y \partial z \\ -\partial g/\partial z & \partial^2 h/\partial x \partial z & \partial^2 h/\partial y \partial z & \partial^2 h/\partial z^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2x & -2y & -2z \\ -2x & -2\lambda & z & y \\ -2y & z & -2\lambda & x \\ -2z & y & x & -2\lambda \end{vmatrix},$$

Tabla 4.1 Los puntos críticos A, B,..., J, K de h y valores correspondientes de f

	x	y	z	λ	f(x, y, z)
A	1	0	0	0	0
B	0	1	0	0	0
C	0	0	1	0	0
D	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/6$	$\sqrt{3}/9$
E	$-\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/6$	$-\sqrt{3}/9$
F	$\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/6$	$-\sqrt{3}/9$
G	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/6$	$-\sqrt{3}/9$
H	$\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/6$	$\sqrt{3}/9$
I	$-\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/6$	$\sqrt{3}/9$
J	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/6$	$\sqrt{3}/9$
K	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/6$	$-\sqrt{3}/9$

que resulta ser +4 en los puntos ±A, ±B y ±C, y $-\frac{16}{3}$ en los otros 8 puntos. En E, F, G y K, tenemos $|\bar{H}_2| < 0$ y $|\bar{H}_3| < 0$, de modo que el criterio señala que son mínimos locales. En D, H, I y J, tenemos $|\bar{H}_2| > 0$ y $|\bar{H}_3| < 0$, de modo que el criterio señala que son máximos locales. Finalmente, el criterio de la segunda derivada muestra que ±A, ±B y ±C son puntos silla. ▲

EJERCICIOS

En los ejercicios 1 al 5 hallar los extremos de f sujetos a las restricciones enunciadas.

1. $f(x,y,z) = x - y + z,\ x^2 + y^2 + z^2 = 2$

2. $f(x,y) = x - y,\ x^2 - y^2 = 2$

3. $f(x,y) = x,\ x^2 + 2y^2 = 3$

4. $f(x,y,z) = x + y + z,\ x^2 - y^2 = 1, 2x + z = 1$

5. $f(x,y) = 3x + 2y,\ 2x^2 + 3y^2 = 3$

Hallar los extremos relativos de $f|S$ en los ejercicios 6 al 9.

6. $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R},\ (x,y) \mapsto x^2 + y^2,\ S = \{(x,2)|x \in \mathbf{R}\}$

7. $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R},\ (x,y) \mapsto x^2 + y^2,\ S = \{(x,y)|y \geq 2\}$

8. $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R},\ (x,y) \mapsto x^2 - y^2,\ S = \{(x,\cos x)|x \in \mathbf{R}\}$

9. $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R},\ (x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2,\ S = \{(x,y,z)|z \geq 2 + x^2 + y^2\}$

10. Usar el método de los multiplicadores de Lagrange para hallar los valores máximo y mínimo absolutos de $f(x,y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$ en el disco unitario (ver el ejemplo 9 de la sección 4.2).

11. Considerar la función $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ en el disco unitario $D = \{(x,y)|x^2 + y^2 \leq 1\}$. Usar el método de los multiplicadores de Lagrange para localizar los puntos máximo y mínimo para f en el círculo unitario. Usar esto para determinar los valores máximo y mínimo absolutos de f en D.

12. Una caja rectangular sin tapa, debe tener un área de superficie de $16\,\mathrm{m}^2$. Hallar las dimensiones que maximicen su volumen.

13. Diseñar una lata cilíndrica (con tapa) que contenga 1 litro de agua, usando la mínima cantidad de metal.

14. Mostrar que las soluciones de las ecuaciones (4) y (5) están en correspondencia biunívoca con los puntos críticos de $h(x_1,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_k) = f(x_1,\ldots,x_n) - \lambda_1[g_1(x_1,\ldots,x_n) - c_1] - \cdots - \lambda_k[g_k(x_1,\ldots,x_n) - c_k]$.

15. Se va a cortar y adornar un espejo rectangular con área de A pies cuadrados. Si los adornos a lo largo de los lados horizontales cuestan p centavos por pie y los de los lados verticales cuestan q centavos por pie, hallar las dimensiones que minimicen el costo total.

16. Un canal de riego en Arizona tiene lados y fondo de concreto con sección transversal trapezoidal de área $A = y(x + y\tan\theta)$ y perímetro húmedo $P = x + 2y/\cos\theta$, donde x = ancho del fondo, y = profundidad del agua y θ = inclinación lateral, medida a partir de la vertical. El mejor diseño para una inclinación fija θ se halla resolviendo P = mínimo sujeto a la condición A = constante. Mostrar que $y^2 = (A\cos\theta)/(2 - \operatorname{sen}\theta)$.

17. Aplicar el criterio de la segunda derivada para estudiar la naturaleza de los extremos en los ejercicios 1 a 5.

18. Un rayo de luz viaja del punto A al punto B cruzando una frontera entre dos medios (ver la figura 4.3.5). En el primer medio su velocidad es v_1, y en el segundo es v_2. Mostrar que el viaje se realiza en el menor tiempo cuando se cumple la *ley de Snell*:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}.$$

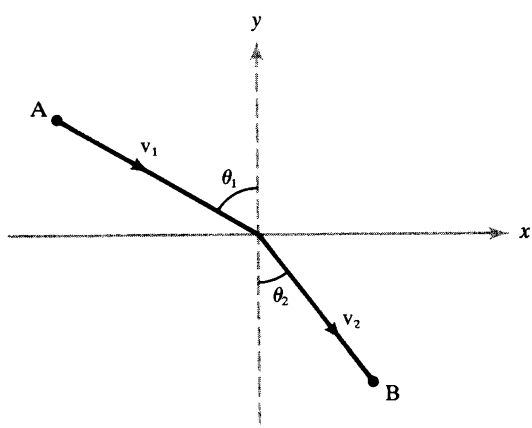


Figura 4.3.5 Ley de refracción de Snell.

19. Un servicio de entrega de paquetes requiere que las dimensiones de una caja rectangular sea tal que la longitud más el doble del ancho más el doble de la altura no rebase 108 pulgadas ($l + 2w + 2h \leq 108$). ¿Cuál es el volumen de la caja más grande que podrá enviar la compañía?

20. Sea P un punto en la superficie S en $\mathbf{R}^3$ definida por la ecuación $f(x, y, z) = 1$ donde f es de clase C^1. Suponer que P es un punto donde se maximiza la distancia del origen a S. Mostrar que el vector que sale del origen y termina en P es perpendicular a S.

***21.** Sea A una matriz simétrica, distinta de cero, de 3×3. Entonces sus registros satisfacen $a_{ij} = a_{ji}$. Considerar la función $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}$.

(a) ¿Cuál es ∇f?

(b) Considerar la restricción de f a la esfera unitaria $S = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ en $\mathbf{R}^3$. Suponer que f debe tener un máximo y un mínimo en S (ver las observaciones en la página 260. Mostrar que debe haber un $\mathbf{x} \in S$ y un $\lambda \neq 0$ tales que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. ($\mathbf{x}$ se llama *vector propio,* mientras que λ se llama *valor propio.*)

***22.** Suponer ahora que A en la función f definida en el ejercicio 21 no necesariamente es simétrica.

(a) ¿Cuál es ∇f?

(b) ¿Es posible concluir la existencia de un vector propio y de un valor propio, como en el ejercicio 21?

***23.** (a) Hallar los puntos críticos de $x + y^2$ sujeta a la restricción $2x^2 + y^2 = 1$.

(b) Usar el hessiano limitado para clasificar los puntos críticos.

***24.** Mostrar que el hessiano limitado de $f(x_1, \ldots, x_n)$ sujeta a la única restricción $g(x_1, \ldots, x_n) = c$ es el hessiano de la función $f(x_1, \ldots, x_n) - \lambda g(x_1, \ldots, x_n)$ de las $n+1$ variables λ, $x_1, \ldots, x_n$ (evaluado en el punto crítico). ¿Pueden usar esta observación para dar otra demostración del criterio restringido de la segunda derivada usando el criterio sin restricciones? [IDEA: Si λ_0 denota el valor de λ determinado por el teorema del multiplicador de Lagrange, considerar la función

$$F(x_1, \ldots, x_n, \lambda) = f(x_1, \ldots, x_n) - \lambda g(x_1, \ldots, x_n) \pm (\lambda - \lambda_0)^2.]$$

SECCIÓN OPTATIVA

*4.4 TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA

Esta sección comienza con el enunciado y demostración de una versión particular del teorema de la función implícita. Esta versión es apropiada para estudiar superficies y, en particular, nos permite completar la demostración del teorema del multiplicador de Lagrange de la sección 4.3. Además de probar este teorema, enunciamos sin demostración el teorema general de la función implícita (acompañado del de la inversa). Este estudio será útil más adelante, cuando veamos el teorema del cambio de variables en el capítulo 5. Sin embargo, los temas cubiertos en esta sección no son esenciales para la comprensión de los principales resultados y aplicaciones del resto del libro.

Recordar, del estudio del cálculo de una variable, que si $y = f(x)$ es una función C^1 y $f'(x_0) \neq 0$, entonces podemos, localmente, cerca de x_0, despejar x: $x = f^{-1}(y)$. Aprendimos que $(f^{-1})'(y) = 1/f'(x)$; esto es, $dx/dy = 1/(dy/dx)$. Es plausible que se pueda invertir $y = f(x)$ porque $f'(x_0) \neq 0$ significa que la pendiente de $y = f(x)$ no es cero, de modo que la gráfica está subiendo o bajando cerca de x_0. Así, si reflejamos la gráfica por medio de la recta $y = x$ sigue siendo una gráfica *cerca* de (x_0, y_0) donde $y_0 = f(x_0)$. En la figura 4.4.1 podemos invertir $y = f(x)$ en la caja sombreada, así está definido $x = f^{-1}(y)$ en este margen.

En el estudio del cálculo de una variable comprendimos la importancia del proceso de inversión. Por ejemplo, $x = \ln y$ es la inversa de $y = e^x$, y $x = \operatorname{sen}^{-1} y$ es la inversa de $y = \operatorname{sen} x$. El proceso de inversión también es importante para funciones de varias variables; por ejemplo, el cambio entre coordenadas cartesianas y polares en el plano, incluye la inversión de dos funciones de dos variables.

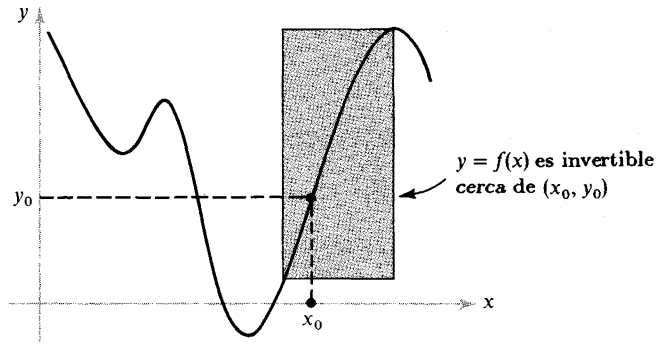


Figura 4.4.1 Si $f'(x_0) \neq 0$, entonces $y = f(x)$ es localmente invertible.

TEOREMA 10: TEOREMA PARTICULAR DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA *Suponer que* $F: \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}$ *tiene derivadas parciales continuas. Denotar los puntos en* $\mathbf{R}^{n+1}$ *por* $(\mathbf{x}, z)$, *donde* $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ *y* $z \in \mathbf{R}$, *suponer que* $(\mathbf{x}_0, z_0)$ *satisface*

$$F(\mathbf{x}_0, z_0) = 0 \qquad y \qquad \frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{x}_0, z_0) \neq 0.$$

Entonces existe una bola U *que contiene a* $\mathbf{x}_0$ *en* $\mathbf{R}^n$ *y una vecindad* V *de* z_0 *en* $\mathbf{R}$ *tal que existe una función única* $z = g(\mathbf{x})$ *definida para* $\mathbf{x}$ *en* U *y* z *en* V *que satisface* $F(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = 0$. *Más aún, si* $\mathbf{x}$ *en* U *y* z *en* V *satisfacen* $F(\mathbf{x}, z) = 0$, *entonces* $z = g(\mathbf{x})$. *Finalmente,* $z = g(\mathbf{x})$ *es continuamente diferenciable, con la derivada dada por*

$$\mathbf{D}g(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{x}, z)} \mathbf{D}_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}, z)\Bigg|_{z=g(\mathbf{x})}$$

donde $\mathbf{D}_{\mathbf{x}}F$ *denota la derivada (parcial) de* F *respecto a la variable* $\mathbf{x}$, $\mathbf{D}_{\mathbf{x}}F = [\partial F/\partial x_1, \ldots, \partial F/\partial x_n]$; *esto es,*

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = -\frac{\partial F/\partial x_i}{\partial F/\partial z}, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

***DEMOSTRACIÓN** Probaremos el caso $n = 2$, de modo que $F: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$. El caso para toda n es similar, pero debe modificarse la notación. Escribimos $\mathbf{x} = (x, y)$ y $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$. Como $(\partial F/\partial z)(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, es positivo o negativo. Supongamos, para definir, que es positivo. Por continuidad, podemos hallar números $a > 0$ y $b > 0$ tales que si $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < a$ y $|z - z_0| < a$, entonces $(\partial F/\partial z)(\mathbf{x}, z) > b$. También podemos suponer que las otras derivadas parciales están acotadas por un número M en esta región, esto es, $|(\partial F/\partial x)(\mathbf{x}, z)| \leq M$ y $|(\partial F/\partial y)(\mathbf{x}, z)| \leq M$. Esto también se sigue por

la continuidad. Podemos escribir ahora

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}, z) &= F(\mathbf{x}, z) - F(\mathbf{x}_0, z_0) \\ &= [F(\mathbf{x}, z) - F(\mathbf{x}_0, z)] + [F(\mathbf{x}_0, z) - F(\mathbf{x}_0, z_0)]. \end{aligned} \tag{2}$$

Considerar la función

$$h(t) = F(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{x}_0, z)$$

para $\mathbf{x}$ y z fijos. Por el teorema del valor medio, existe un número θ entre 0 y 1 tal que

$$h(1) - h(0) = h'(\theta)(1-0) = h'(\theta),$$

esto es,

$$F(\mathbf{x}, z) - F(\mathbf{x}_0, z) = [\mathbf{D}_{\mathbf{x}} F(\theta\mathbf{x} + (1-\theta)\mathbf{x}_0, z)](\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Al sustituir esta fórmula en la ecuación (2) junto con una fórmula similar para el segundo término de la ecuación, da

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}, z) &= [\mathbf{D}_{\mathbf{x}} F(\theta\mathbf{x} + (1-\theta)\mathbf{x}_0, z)](\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \\ &\quad + \left[\frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{x}_0, \phi z + (1-\phi)z_0)\right](z - z_0), \end{aligned} \tag{3}$$

donde ϕ está entre 0 y 1. Sea a_0 que satisface $0 < a_0 < a$ y escojamos $\delta > 0$ tal que $\delta < a_0$ y $\delta < ba_0/2M$. Entonces, si $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$, tanto $|x - x_0|$ como $|y - y_0|$ son menores que δ, de modo que el valor absoluto de cada uno de los dos términos en

$$\begin{aligned} &[\mathbf{D}_{\mathbf{x}} F(\theta\mathbf{x} + (1-\theta)\mathbf{x}_0, z)](\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \\ &\quad = \left[\frac{\partial F}{\partial x}(\theta\mathbf{x} + (1-\theta)\mathbf{x}_0, z)\right](x - x_0) + \left[\frac{\partial F}{\partial y}(\theta\mathbf{x} + (1-\theta)\mathbf{x}_0, z)\right](y - y_0) \end{aligned}$$

es menor que $M\delta < M(ba_0/2M) = ba_0/2$. Así, $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ implica

$$|[\mathbf{D}_{\mathbf{x}} F(\theta\mathbf{x} + (1-\theta)\mathbf{x}_0, z)](\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)| < ba_0.$$

Por lo tanto, de la ecuación (3) y la selección de b, $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ implica que

$$F(\mathbf{x}, z_0 + a_0) > 0 \qquad \text{y} \qquad F(\mathbf{x}, z_0 - a_0) < 0.$$

(Las igualdades se invierten si $(\partial F/\partial z)(\mathbf{x}_0, z_0) < 0$.) Así, por el teorema del valor intermedio aplicado a $F(\mathbf{x}, z)$ como función de z, para cada $\mathbf{x}$ existe z entre $z_0 - a_0$ y $z_0 + a_0$ tal que $F(\mathbf{x}, z) = 0$. Esta z es única, pues, por cálculo elemental, una función con derivada positiva es creciente y así, no puede tener más de un cero.

Sea U la bola abierta de radio δ y centro $\mathbf{x}_0$ en $\mathbf{R}^n$ y sea V el intervalo abierto en $\mathbf{R}$ de $z_0 - a_0$ a $z_0 + a_0$. Hemos probado que si $\mathbf{x}$ está confinado a U, existe z único en V tal que $F(\mathbf{x}, z) = 0$. Esto define la función $z = g(\mathbf{x}) = g(x, y)$ requerida por el teorema. Dejamos al lector probar que a partir de esta construcción, $z = g(x, y)$ es una función continua.

Falta probar la diferenciabilidad continua de $z = g(\mathbf{x})$. De la ecuación (3), y como $F(\mathbf{x}, z) = 0$ y $z_0 = g(\mathbf{x}_0)$, tenemos

$$g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0) = -\frac{[\mathbf{D}_{\mathbf{x}}F(\theta\mathbf{x} + (1-\theta)\mathbf{x}_0, z)](\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{x}_0, \phi z + (1-\phi)z_0)}.$$

Si hacemos $\mathbf{x} = (x_0 + h, y_0)$, entonces esta ecuación se convierte en

$$\frac{g(x_0 + h, y_0) - g(x_0, y_0)}{h} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(\theta\mathbf{x} + (1-\theta)\mathbf{x}_0, z)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{x}_0, \phi z + (1-\phi)z_0)}.$$

Cuando $h \to 0$, se sigue que $x \to x_0$ y que $z \to z_0$, de modo que tenemos

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0 + h, y_0) - g(x_0, y_0)}{h} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, z)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, z)}.$$

La fórmula

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, z)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, z)}.$$

se prueba de la misma manera. Esta deducción se cumple en cualquier punto (x, y) en U por medio del mismo argumento, de modo que hemos probado la fórmula (1). Como el lado derecho de la fórmula (1) es continuo, hemos probado el teorema. ■

Una vez que sabemos que existe $z = g(\mathbf{x})$ y es diferenciable, se puede verificar la fórmula (1) por medio de diferenciación implícita; esto es, la regla de la cadena aplicada a $F(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = 0$ da

$$\mathbf{D}_{\mathbf{x}}F(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) + \left[\frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))\right][\mathbf{D}g(\mathbf{x})] = 0,$$

lo cual es equivalente a la fórmula (1).

EJEMPLO 1 En el teorema particular de la función implícita, es importante reconocer la necesidad de tomar vecindades U y V suficientemente pequeñas. Por ejemplo, considerar la ecuación

$$x^2 + z^2 - 1 = 0,$$

esto es, $F(x, z) = x^2 + z^2 - 1$, con $n = 1$. Aquí, $(\partial F/\partial z)(x, z) = 2z$, de modo que se aplica el teorema particular de la función implícita a un punto (x_0, z_0) que satisfaga $x_0^2 + z_0^2 - 1 = 0$ y $z_0 \neq 0$. Así, cerca de dichos puntos, z es una función única de x. Esta función es $z = \sqrt{1 - x^2}$ si $z_0 > 0$ y $z = -\sqrt{1 - x^2}$ si $z_0 < 0$. Nótese que z está definida sólo para $|x| < 1$ (U no debe ser muy grande) y z es única sólo cerca de z_0 (V no debe ser muy grande). Estos hechos, y el que no exista $\partial z/\partial x$ en $z_0 = 0$, son, por supuesto, claros a partir del hecho de que $x^2 + z^2 = 1$ define un círculo en el plano xz (figura 4.4.2). ▲

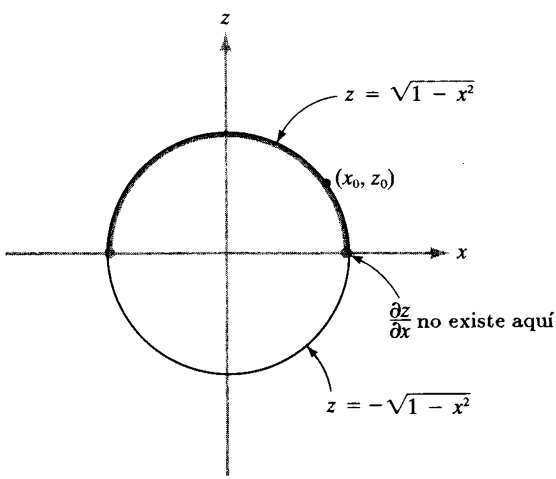


Figura 4.4.2 Es necesario tomar vecindades pequeñas en el teorema de la función implícita.

Apliquemos el teorema 10 al estudio de superficies. Nos interesa el conjunto de nivel de una función $g: U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, esto es, de la superficie S formada por el conjunto de $\mathbf{x}$ que satisfacen $g(\mathbf{x}) = c_0$, donde $c_0 = g(\mathbf{x}_0)$ y donde $\mathbf{x}_0$ está dada. Tomemos $n = 3$, para trabajar con un caso concreto. Así, nos ocuparemos de la superficie de nivel de una función $g(x, y, z)$ que pasa por un punto dado (x_0, y_0, z_0). Como en el teorema del multiplicador de Lagrange, supongamos que $\nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$. Esto significa que al menos una de las derivadas parciales de g no es cero. Para definir, supongamos que $(\partial g/\partial z)(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Aplicando el teorema 10 a la función $(x, y, z) \mapsto g(x, y, z) - c_0$, sabemos que existe una función única $z = k(x, y)$ que satisface $g(x, y, k(x, y)) = c_0$ para (x, y) cerca de (x_0, y_0) y z cerca de z_0. Así, cerca de z_0 la superficie S es la gráfica de la función k. Como k es continuamente diferenciable, esta superficie tiene plano tangente en (x_0, y_0, z_0) definido por

$$z = z_0 + \left[\frac{\partial k}{\partial x}(x_0, y_0)\right](x - x_0) + \left[\frac{\partial k}{\partial y}(x_0, y_0)\right](y - y_0). \tag{4}$$

Pero por la fórmula (1),

$$\frac{\partial k}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)} \quad \text{y} \quad \frac{\partial k}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}.$$

Sustituyendo estas dos ecuaciones en la ecuación (4) se obtiene esta descripción equivalente:

$$0 = (z - z_0)\frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) + (x - x_0)\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0);$$

esto es,

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \nabla g(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Así, el plano tangente a la superficie de nivel de g es el complemento ortogonal a $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0). Esto concuerda con la definición de la pág. 150.

Ahora estamos preparados para completar la demostración del teorema del multiplicador de Lagrange. Para ello debemos mostrar que todo vector tangente a S en (x_0, y_0, z_0) es tangente a una curva en S. Por el teorema 10, basta mostrar esto para una gráfica de la forma $z = k(x, y)$. Sin embargo, si $\mathbf{v} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ es tangente a la gráfica (esto es, si satisface la ecuación (4)), entonces $\mathbf{v}$ es tangente a la curva en S dada por

$$\mathbf{c}(t) = (x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0), k(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_o)))$$

en $t = 0$. Esto puede verificarse usando la regla de la cadena. (Ver la figura 4.4.3.)

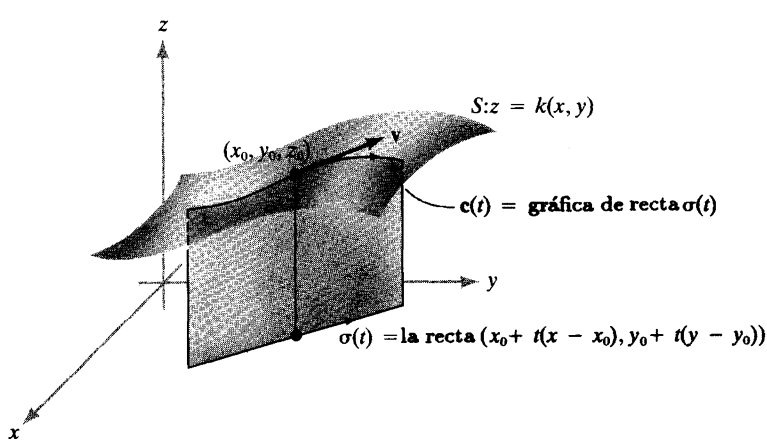


Figura 4.4.3 Construcción de una curva $\mathbf{c}(t)$ en la superficie S cuyo vector tangente es $\mathbf{v}$.

EJEMPLO 2 *¿Cerca de cuáles puntos es posible representar la superficie*

$$x^3 + 3y^2 + 8xz^2 - 3z^3y = 1$$

como gráfica de un función diferenciable $z = k(x, y)$*?*

SOLUCIÓN Aquí tomamos $F(x, y, z) = x^3 + 3y^2 + 8xz^2 - 3z^3y - 1$ e intentamos despejar z de $F(x, y, z) = 0$ para presentarlo como función de (x, y). Por el teorema 10, es posible hacerlo cerca de un punto (x_0, y_0, z_0) si $(\partial F/\partial z)(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, esto es, si

$$z_0(16x_0, 9z_0y_0) \neq 0,$$

lo cual significa, a su vez,

$$z_0 \neq 0 \qquad \text{y} \qquad 16x_0 \neq 9z_0y_0. \qquad \blacktriangle$$

A continuación enunciaremos, sin demostración, el *teorema general de la función implícita.** En lugar de tratar de resolver una ecuación con una variable, tratamos de resolver m ecuaciones con m variables $z_1, \ldots, z_m$:

$$\begin{aligned} F_1(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m) &= 0 \\ F_2(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m) &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad &\quad \vdots \\ F_m(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m) &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

En el teorema 10 teníamos la condición $\partial F/\partial z \neq 0$. La condición apropiada para el teorema general de la función implícita es que $\Delta \neq 0$, donde Δ es el determinante de la matriz de $m \times m$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial z_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial z_m} \end{bmatrix}$$

evaluado en el punto $(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0)$; en la vecindad de dicho punto podemos resolver de manera única para $\mathbf{z}$ en términos de $\mathbf{x}$.

---

*Para tres demostraciones diferentes del caso general, consultar:

(a) E. Goursat, *A Course in Mathematical Analysis*, I, Dover, Nueva York, 1959, pág. 45. (Esta demostración deduce el teorema general mediante aplicaciones sucesivas del teorema 10.)

(b) T. M. Apostol, *Mathematical Analysis*, 2a ed., Addison Wesley, Reading, Mass., 1974.

(c) J. E. Marsden, *Elementary Classical Analysis*, Freeman, Nueva York, 1974.

De estas fuentes, las dos últimas usan ideas más sofisticadas, que usualmente no se cubren hasta un curso introductorio de análisis. Sin embargo, la primera la puede comprender fácilmente un lector que tenga algún conocimiento de álgebra lineal.

TEOREMA 11: TEOREMA GENERAL DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA *Si $\Delta \neq 0$, entonces cerca del punto $(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0)$, la ecuación (5) define de manera única funciones (suaves)*

$$z_i = k_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Sus derivadas se pueden calcular mediante diferenciación implícita.

EJEMPLO 3 *Mostrar que cerca del punto $(x, y, u, v) = (1, 1, 1, 1)$ podemos resolver*

$$\begin{aligned} xu + yvu^2 &= 2 \\ xu^3 + y^2v^4 &= 2 \end{aligned}$$

de manera única para u y v como funciones de x y y. Calcular $(\partial u/\partial x)(1, 1)$.

SOLUCIÓN Para verificar la existencia de la solución, formamos las ecuaciones

$$\begin{aligned} F_1(x, y, u, v) &= xu + yvu^2 - 2 \\ F_2(x, y, u, v) &= xu^3 + y^2v^4 - 2 \end{aligned}$$

y el determinante

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u} & \dfrac{\partial F_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u} & \dfrac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix} \qquad \text{en} \qquad (1, 1, 1, 1) \\ &= \begin{vmatrix} x + 2yuv & yu^2 \\ 3u^2x & 4y^2v^3 \end{vmatrix} \qquad \text{en} \qquad (1, 1, 1, 1) \\ &= \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 9. \end{aligned}$$

Como $\Delta \neq 0$, se asegura la existencia de la solución por el teorema general de la función implícita. Para hallar $\partial u/\partial x$, diferenciamos implícitamente las ecuaciones dadas en x usando la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} x\frac{\partial u}{\partial x} + u + y\frac{\partial v}{\partial x}u^2 + 2yvu\frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ 3xu^2\frac{\partial u}{\partial x} + u^3 + 4y^2v^3\frac{\partial v}{\partial x} &= 0. \end{aligned}$$

Al hacer $(x, y, u, v) = (1, 1, 1, 1)$ da

$$\begin{aligned} 3\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} &= -1 \\ 3\frac{\partial u}{\partial x} + 4\frac{\partial v}{\partial x} &= -1. \end{aligned}$$

Resolviendo para $\partial u/\partial x$, multiplicando la primera ecuación por 4 y restando, da $\partial u/\partial x = -\frac{1}{3}$. ▲

Un caso especial del teorema general de la función implícita es el *teorema de la función inversa*. Aquí tratamos de resolver las n ecuaciones

$$\left.\begin{array}{c} f_1(x_1,\ldots,x_n)=y_1 \\ \cdots \\ f_n(x_1,\ldots,x_n)=y_n \end{array}\right\} \tag{6}$$

para $x_1,\ldots, x_n$ como funciones de $y_1,\ldots, y_n$; esto es, estamos tratando de invertir las ecuaciones del sistema (6). Esto es análogo a formar los inversos de funciones como $\operatorname{sen} x = y$ y $e^x = y$, con las que el lector debe estar familiarizado desde cálculo elemental. Ahora, sin embargo, tratamos con funciones de varias variables. La cuestión de existencia de solución se responde por medio del teorema general de la función implícita aplicado a las funciones $y_i - f_i(x_1,\ldots,x_n)$ con las incógnitas $x_1,\ldots, x_n$ (llamadas $z_1,\ldots, z_n$ anteriormente). La condición para existencia de solución en una vecindad de un punto $\mathbf{x}_0$ es $\Delta \neq 0$, donde Δ es el determinante de la matriz $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$, y $f = (f_1,\ldots,f_n)$. La cantidad Δ se denota por $\partial(f_1,\ldots,f_n)/\partial(x_1,\ldots,x_n)$, $\partial(y_1,\ldots,y_n)/\partial(x_1,\ldots,x_n)$ o $Jf(\mathbf{x}_0)$ y se llama *determinante jacobiano* de f. Explícitamente,

$$\left.\frac{\partial(f_1,\ldots,f_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} = Jf(\mathbf{x}_0) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{vmatrix}. \tag{7}$$

El determinante jacobiano jugará un papel importante en nuestro trabajo posterior de integración (ver la sección 6.3). El teorema siguiente resume este análisis:

TEOREMA 12: TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA *Sea $U \subset \mathbf{R}^n$ un abierto y sean $f_1: U \to \mathbf{R},\ldots, f_n: U \to \mathbf{R}$ con derivadas parciales continuas. Considerar las ecuaciones en el grupo (6) cerca de una solución dada $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{y}_0$. Si $[\partial(f_1,\ldots,f_n)]/[\partial(x_1,\ldots,x_n)] = Jf(\mathbf{x}_0)$ (definido por la ecuación (7)) es diferente de cero, entonces el grupo (6) de ecuaciones se puede resolver de manera única como $\mathbf{x} = g(\mathbf{y})$ para $\mathbf{x}$ cerca de $\mathbf{x}_0$ y $\mathbf{y}$ cerca de $\mathbf{y}_0$. Más aún, la función g tiene derivadas parciales continuas.*

EJEMPLO 4 *Considerar las ecuaciones*

$$\frac{x^4+y^4}{x} = u(x,y), \qquad \operatorname{sen} x + \cos y = v(x,y).$$

¿Cerca de cuáles puntos (x,y) podemos resolver para x y y en términos de u y v?

SOLUCIÓN Aquí las funciones son $u(x,y) = f_1(x,y) = (x^4+y^4)/x$ y $v(x,y) = f_2(x,y) = \operatorname{sen} x + \cos y$. Queremos conocer los puntos cerca de los cuales podemos resolver para x y y como funciones de u y v. De acuerdo con el teorema de la función

inversa, debemos primero calcular $\partial(f_1, f_2)/\partial(x, y)$. Tomemos el dominio de $f = (f_1, f_2)$ como $U = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x \neq 0\}$. Ahora

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{3x^4 - y^4}{x^2} & \dfrac{4y^3}{x} \\ \cos x & -\operatorname{sen} y \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} y}{x^2}(y^4 - 3x^4) - \frac{4y^3}{x}\cos x.$$

Por lo tanto, en los puntos donde esto no se anula, se puede resolver para x y y en términos de u y v. En otras palabras, podemos resolver para x y y cerca de aquellos x, y para los que $x \neq 0$ y $(\operatorname{sen} y)(y^4 - 3x^4) \neq 4xy^3 \cos x$. Generalmente no se pueden resolver explícitamente dichas condiciones. Por ejemplo, si $x_0 = \pi/2$, $y_0 = \pi/2$, podemos resolver para x y y cerca de (x_0, y_0) pues ahí $\partial(f_1, f_2)/\partial(x, y) \neq 0$. ▲

EJERCICIOS

1. Sea $F(x, y) = 0$ que define una curva en el plano xy que pasa por el punto (x_0, y_0). Suponer que $(\partial F/\partial y)(x_0, y_0) \neq 0$. Mostrar que esta curva se puede representar localmente por la gráfica de una función $y = g(x)$. Mostrar que (i) la recta ortogonal a $\nabla F(x_0, y_0)$ concuerda con (ii) la recta tangente a la gráfica de $y = g(x)$.

2. Mostrar que $xy + z + 3xz^5 = 4$ es soluble para z como función de (x, y) cerca $(1, 0, 1)$. Calcular $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ en $(1, 0)$.

3. (a) Verificar directamente (i.e., sin usar el teorema 10) dónde podemos resolver la ecuación $F(x, y) = y^2 + y + 3x + 1 = 0$ para y en términos de x.

(b) Verificar que la respuesta en la parte (a) concuerde con la respuesta esperada del teorema de la función implícita. Calcular dy/dx.

4. Repetir el ejercicio 3 con $F(x, y) = xy^2 - 2y + x^2 + 2 = 0$.

5. Mostrar que $x^3z^2 - z^3yx = 0$ es soluble para z como función de (x, y) cerca de $(1, 1, 1)$, pero no cerca del origen. Calcular $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ en $(1, 1)$.

6. Analizar la solubilidad del sistema

$$3x + 2y + z^2 + u + v^2 = 0$$
$$4x + 3y + z + u^2 + v + w + 2 = 0$$
$$x + z + w + u^2 + 2 = 0$$

para u, v y w en términos de x, y y z cerca de $x = y = z = 0$, $u = v = 0$ y $w = -2$.

7. Analizar la solubilidad de

$$y + x + uv = 0$$
$$uxy + v = 0$$

para u y v en términos de x y y, cerca de $x = y = u = v = 0$ y verificar directamente.

8. Investigar si el sistema

$$u(x, y, z) = x + xyz$$
$$v(x, y, z) = y + xy$$
$$w(x, y, z) = z + 2x + 3z^2$$

se puede resolver para x, y y z en términos de u, v y w, cerca de $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

9. Considerar $f(x, y) = ((x^2 - y^2)/(x^2 + y^2), xy/(x^2 + y^2))$. ¿Tiene esta función de $\mathbf{R}^2 \backslash (0, 0)$ a $\mathbf{R}^2$ inversa local cerca de $(x, y) = (0, 1)$?

10. (a) Definir $x: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ por $x(r, \theta) = r\cos\theta$ y definir $y: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ por $y(r, \theta) = r \operatorname{sen}\theta$. Mostrar que

$$\left.\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}\right|_{(r_0, \theta_0)} = r_0.$$

(b) ¿Cuándo podemos formar una función inversa suave $r(x, y)$, $\theta(x, y)$? Verificar directamente y con el teorema de la función inversa.

(c) Considerar las siguientes transformaciones para coordenadas esféricas (ver la sección 1.4):

$$x(\rho, \phi, \theta) = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta$$
$$y(\rho, \phi, \theta) = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta$$
$$z(\rho, \phi, \theta) = \rho \cos\phi.$$

Mostrar que

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, \theta)} = \rho^2 \operatorname{sen}\phi.$$

(d) ¿Cuándo podemos resolver para (ρ, ϕ, θ) en términos de (x, y, z)?

11. Sea (x_0, y_0, z_0) un punto del lugar geométrico definido por $z^2 + xy - a = 0$, $z^2 + x^2 - y^2 - b = 0$, donde a y b son constantes.

(a) ¿Bajo qué condiciones puede la parte de la figura cerca de (x_0, y_0, z_0) representarse en la forma $x = f(z)$, $y = g(z)$?

(b) Calcular $f'(z)$ y $g'(z)$.

12. ¿Es posible resolver

$$xy^2 + xzu + yv^2 = 3$$
$$u^3yz + 2xv - u^2v^2 = 2$$

para $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ cerca de $(x, y, z) = (1, 1, 1)$, $(u, v) = (1, 1)$? Calcular $\partial v/\partial y$ en $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.

13. El problema de factorizar un polinomio $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ en factores lineales es, en cierto sentido, un problema de "función inversa". Los coeficientes a_i son funciones conocidas de las n raíces r_j. Quisiéramos expresar las raíces como funciones de los coeficientes en alguna región. Con $n = 3$, aplicar el teorema de la función inversa a este problema y enunciar la conclusión acerca de la posibilidad de hacer lo planteado.

4.5 ALGUNAS APLICACIONES

En esta sección daremos algunas aplicaciones de los métodos matemáticos desarrollados en las secciones anteriores. Estos métodos tienen aplicación en mecánica, geometría y economía, comenzando con mecánica. El alumno deberá consultar con su maestro acerca de cuáles ejemplos deberá estudiar.

Denotemos por $\mathbf{F}$ un campo de fuerza definido en cierto dominio U de $\mathbf{R}^3$. Así, $\mathbf{F}: U \to \mathbf{R}^3$ es un campo vectorial dado. Acordemos que una partícula (con masa m), se mueve a lo largo de una trayectoria $\boldsymbol{\sigma}(t)$ de manera que se cumple la ley de Newton; masa × aceleración = fuerza; esto es, la trayectoria $\boldsymbol{\sigma}(t)$ satisface la ecuación

$$m\boldsymbol{\sigma}''(t) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}(t)). \tag{1}$$

Si $\mathbf{F}$ es un campo de potencial con potencial V, esto es, si $\mathbf{F} = -\operatorname{grad} V$, entonces

$$\tfrac{1}{2}m\|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|^2 + V(\boldsymbol{\sigma}(t)) = \text{constante}. \tag{2}$$

(El primer término se llama *energía cinética.*) En efecto, al diferenciar con la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|^2 + V(\boldsymbol{\sigma}(t))\right] &= m\boldsymbol{\sigma}'(t)\cdot\boldsymbol{\sigma}''(t) + \operatorname{grad} V(\boldsymbol{\sigma}(t))\cdot\boldsymbol{\sigma}'(t)\\ &= [m\boldsymbol{\sigma}''(t) + \operatorname{grad} V(\boldsymbol{\sigma}(t))]\cdot\boldsymbol{\sigma}'(t) = 0,\end{aligned}$$

pues $m\boldsymbol{\sigma}''(t) = -\operatorname{grad} V(\boldsymbol{\sigma}(t))$. Esto prueba la fórmula (2).

DEFINICIÓN *Un punto $\mathbf{x}_0 \in U$ se llama* ***posición de equilibrio*** *si la fuerza en ese punto es cero: $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$. Un punto $\mathbf{x}_0$ que sea posición de equilibrio se llama* ***estable*** *si para todo $\rho > 0$ y $\epsilon > 0$, podemos escoger números $\rho_0 > 0$ y $\epsilon_0 > 0$ tales que un punto material situado en cualquier lugar a una distancia menor que ρ_0 de $\mathbf{x}_0$, después de recibir inicialmente energía cinética en una cantidad*

menor que ϵ_0, permanecerá para siempre a una distancia de $\mathbf{x}_0$ menor que ρ y poseerá energía cinética menor que ϵ (ver la figura 4.5.1).

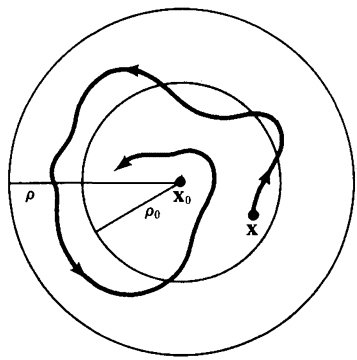


Figura 4.5.1 Movimiento cerca de un punto estable $\mathbf{x}_0$.

Así, si tenemos una posición de equilibrio, estabilidad en $\mathbf{x}_0$ significa que una partícula que se mueva lentamente cerca de $\mathbf{x}_0$ siempre permanecerá cerca de $\mathbf{x}_0$ y se mantendrá moviéndose lentamente. Si tenemos un punto de equilibrio inestable $\mathbf{x}_0$, entonces $\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathbf{x}_0$ resuelve la ecuación $m\boldsymbol{\sigma}''(t) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}(t))$, pero las soluciones cercanas pueden alejarse de $\mathbf{x}_0$ conforme transcurra el tiempo. Por ejemplo, un lápiz que se balancee sobre su punta ilustra una configuración inestable, mientras que una bola colgando de un resorte ilustra un equilibrio estable.

TEOREMA 13

(i) *Los puntos críticos de un potencial son posiciones de equilibrio.*

(ii) *En un campo de potencial, un punto $\mathbf{x}_0$ en el cual el potencial alcance un mínimo local estricto es una posición de equilibrio estable.* (Recordar que una función f tiene un mínimo local *estricto* en el punto $\mathbf{x}_0$ si existe una vecindad U de $\mathbf{x}_0$ tal que $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x}_0)$ para todo $\mathbf{x}$ en U distinto de $\mathbf{x}_0$.)

SOLUCIÓN La primera afirmación es bastante obvia debido a la definición $\mathbf{F} = -\operatorname{grad} V$; los puntos de equilibrio $\mathbf{x}_0$ son exactamente los puntos críticos de V, en los cuales $\nabla V(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$.

Para probar la afirmación (ii), haremos uso de la ley de conservación de energía, ecuación (2). Tenemos

$$\frac{1}{2}m\|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|^2 + V(\boldsymbol{\sigma}(t)) = \frac{1}{2}m\|\boldsymbol{\sigma}'(0)\|^2 + V(\boldsymbol{\sigma}'(0)).$$

Argumentaremos de manera un poco informal para ampliar e iluminar las ideas centrales. Escojamos una pequeña vecindad de $\mathbf{x}_0$ y comience nuestra partícula

con poca energía cinética. Conforme t crece, la partícula se aleja de $\mathbf{x}_0$ sobre una trayectoria $\boldsymbol{\sigma}(t)$ y $V(\boldsymbol{\sigma}(t))$ crece (pues $V(\boldsymbol{\sigma}(0))$ es un mínimo estricto), de modo que la energía cinética debe decrecer. Si la energía cinética inicial es suficientemente pequeña, entonces, para que la partícula escape de la vecindad de $\mathbf{x}_0$, fuera de la cual V ha crecido en una cantidad definida, la energía cinética tendría que volverse negativa (lo cual es imposible). Así, la partícula no puede escapar de la vecindad. ■

EJEMPLO 1 *Hallar los puntos que son posiciones de equilibrio y determinar si son o no estables, si el campo de fuerza* $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$ *está dado por* $F_x = -k^2x$, $F_y = -k^2y$, $F_z = -k^2z$ $(k \neq 0)$.*

SOLUCIÓN El campo $\mathbf{F}$ es un campo de potencial, con potencial $V = \frac{1}{2}k^2(x^2 + y^2 + z^2)$. El único punto crítico de V es el origen. El hessiano de V en el origen es $HV(0,0,0)(h_1, h_2, h_3) = \frac{1}{2}k^2(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2)$, que es definitivamente positivo. Se sigue que el origen es un mínimo estricto de V. Así, por (i) y (ii) del teorema 13, hemos mostrado que el origen es una posición de equilibrio estable. ▲

Sea un punto material en un campo de potencial V restringido a mantenerse sobre la superficie de nivel S dada por la ecuación $\phi(x, y, z) = 0$, con $\operatorname{grad}\phi \neq \mathbf{0}$. Si en la fórmula (1) reemplazamos $\mathbf{F}$ con la componente de $\mathbf{F}$ paralela a S, aseguramos que la partícula permanecerá en S.† Por analogía con el teorema 13, tenemos:

TEOREMA 14

(i) *Si en un punto* P *sobre la superficie* S *el potencial* $V|S$ *tiene un valor extremo, entonces el punto* P *es una posición de equilibrio sobre la superficie.*

(ii) *Si un punto* $\mathrm{P} \in S$ *es un mínimo local estricto del potencial* $V|S$, *entonces el punto* P *es una posición de equilibrio estable.*

Se omitirá la demostración de este teorema. Es análoga a la demostración del teorema 13, con el hecho adicional de que la ecuación de movimiento usa sólo la componente de $\mathbf{F}$ a lo largo de la superficie.‡

---

*El campo de fuerza en este ejemplo es el que gobierna el movimiento de un oscilador armónico tridimensional.

†Si $\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$, la partícula está restringida a moverse sobre una esfera; por ejemplo, puede estar girando sujeta a una cuerda. La parte sustraída de $\mathbf{F}$ para hacerlo paralelo a S es normal a S y se llama *fuerza centrípeta*.

‡Estas ideas se pueden aplicar a un buen número de situaciones físicas interesantes, tales como vibraciones moleculares. La estabilidad de dichos sistemas es una cuestión importante. Para mayor información consultar la literatura sobre física (e.g., H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1950, capítulo 10) y la literatura matemática (e.g., M. Hirsch y S. Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Academic Press, Nueva York, 1974).

EJEMPLO 2 *Sea* $\mathbf{F}$ *el campo gravitacional cerca de la superficie de la Tierra; esto es, sea* $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$, *donde* $F_x = 0$, $F_y = 0$ *y* $F_z = -mg$, *donde* g *es la aceleración debida a la gravedad. ¿Cuáles son las posiciones de equilibrio, si un punto material con masa* m *está restringido a la esfera* $\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$ $(r > 0)$? *¿Cuáles son estables?*

SOLUCIÓN Nótese que $\mathbf{F}$ es un campo de potencial con $V = mgz$. Usando el método de los multiplicadores de Lagrange introducido en la sección 4.3 para localizar los extremos posibles, tenemos las ecuaciones

$$\nabla V = \lambda \nabla \phi$$

$$\phi = 0$$

o, en términos de componentes,

$$0 = 2\lambda x$$

$$0 = 2\lambda y$$

$$mg = 2\lambda z$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0.$$

La solución de estas ecuaciones simultáneas es $x = 0$, $y = 0$, $z = \pm r$, $\lambda = \pm mg/2r$. Por el teorema 14, se sigue que los puntos $P_1 = (0, 0, -r)$ y $P_2 = (0, 0, r)$ son posiciones de equilibrio. Al observar la función de potencial $V = mgz$ y por el teorema 14, parte (ii), se sigue que P_1 es un mínimo estricto y, por lo tanto, un punto estable, mientras que P_2 no lo es. Esta conclusión debe resultar obvia desde el punto de vista físico. ▲

Pasamos ahora a una aplicación geométrica.

EJEMPLO 3 *Suponer que tenemos una curva definida por la ecuación*

$$\phi(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 - 1 = 0.$$

Hallar la distancia máxima y mínima de la curva al origen. (Éstas son las longitudes de los ejes ***semimayor*** *y* ***semimenor*** *de esta cuadrática.)*

SOLUCIÓN El problema es equivalente a hallar los valores extremos de $f(x, y) = x^2 + y^2$ sujeto a la condición restrictiva $\phi(x, y) = 0$. Usando el método del multiplicador de Lagrange, tenemos las ecuaciones siguientes:

$$2x + \lambda(2Ax + 2By) = 0 \tag{1}$$

$$2y + \lambda(2Bx + 2Cy) = 0 \tag{2}$$

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1. \tag{3}$$

Sumando x por la ecuación (1) más y por la ecuación (2), obtenemos $2(x^2 + y^2) + 2\lambda(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2) = 0$. De la ecuación (3) se sigue que $x^2 + y^2 + \lambda = 0$. Sea $t = -1/\lambda = 1/(x^2 + y^2)$ (es imposible que $\lambda = 0$, pues $(0,0)$ no está sobre la curva $\phi(x,y) = 0$). Entonces las ecuaciones (1) y (2) se pueden escribir como sigue:

$$\begin{aligned} 2(A-t)x + 2By &= 0 \\ 2Bx + 2(C-t)y &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Si estas dos ecuaciones van a tener solución no trivial (recordar que $(x,y) = (0,0)$ no está sobre nuestra curva, de modo que no es solución), se sigue de un teorema de álgebra lineal, que su determinante se anula:*

$$\begin{vmatrix} A-t & B \\ B & C-t \end{vmatrix} = 0.$$

Como esta ecuación es cuadrática en t, hay dos soluciones, que llamaremos t_1 y t_2. Como $-\lambda = x^2 + y^2$, tenemos $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{-\lambda}$. Ahora bien, $\sqrt{x^2+y^2}$ es la distancia del punto (x,y) al origen. Por lo tanto, si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) denotan las soluciones no triviales de la ecuación (4), correspondientes a t_1 y t_2, tenemos que $\sqrt{x_2^2 + y_2^2} = 1/\sqrt{t_2}$ y $\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = 1/\sqrt{t_1}$. En consecuencia, si $t_1 > t_2$, las longitudes de los ejes semimenor y semimayor son $1/\sqrt{t_1}$ y $1/\sqrt{t_2}$, respectivamente. Si la curva es una elipse, tanto t_1 como t_2 son reales y positivos. ¿Qué sucede con una hipérbola o una parábola? ▲

Finalmente, estudiaremos una aplicación en economía.

EJEMPLO 4 *Suponer que la producción de una firma manufacturera es una cantidad Q de cierto producto, donde Q es una función $f(K,L)$, donde K es la cantidad de capital (inversión) y L es la cantidad de trabajo usada. Si el precio del trabajo es p, el precio del capital q y la firma no puede gastar más de B dólares, ¿cómo podemos hallar la cantidad de capital y de trabajo que maximice la producción Q?*

SOLUCIÓN Se esperaría que si se incrementa la cantidad de capital o de trabajo, entonces la producción deberá incrementarse; esto es,

$$\frac{\partial Q}{\partial K} \geq 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial Q}{\partial L} \geq 0.$$

*La matriz de los coeficientes de las ecuaciones no puede tener inversa, pues ello implicaría que la solución es cero. De la sección 1.5 sabemos que una matriz que no tiene inversa, tiene determinante cero.

También se esperaría que conforme se añada trabajo a una cantidad dada de capital, obtendremos menos productos adicionales por nuestro esfuerzo; esto es,

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} < 0.$$

De manera análoga,

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} < 0.$$

Con estas hipótesis sobre Q, es razonable esperar que las curvas de nivel de la producción (llamadas *isocuantas*) $Q(K, L) = c$ se vean como las esbozadas en la figura 4.5.2, con $c_1 < c_2 < c_3$.

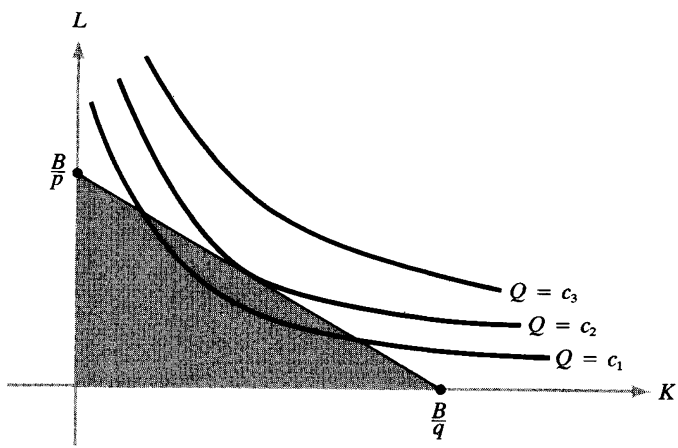


Figura 4.5.2 ¿Cuál es el mayor valor de Q en el triángulo sombreado?

Podemos interpretar la convexidad de las isocuantas como sigue: conforme nos movemos hacia la derecha a lo largo de una isocuanta dada, se emplea más y más capital para reemplazar una unidad de trabajo y producir la misma cantidad. La restricción de presupuesto significa que debemos mantenernos dentro del triángulo acotado por los ejes y la recta $pL + qK = B$. Geométricamente, es claro que producimos más al gastar nuestro dinero de tal manera que seleccionemos la isocuanta que solamente toca, pero no cruza, la recta de presupuesto.

Como el punto máximo está en la frontera de nuestro dominio, aplicamos el método de los multiplicadores de Lagrange para hallar el máximo. Para maximizar $Q = f(K, L)$ sujeto a la restricción $pL + qK = B$, buscamos los puntos

críticos de la función auxiliar,

$$h(K, L, \lambda) = f(K, L) - \lambda(pL + qK - B).$$

Así, queremos

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = \lambda q, \qquad \frac{\partial Q}{\partial L} = \lambda p \qquad \text{y} \qquad pL + qK = B.$$

Éstas son las condiciones que debemos alcanzar para maximizar la producción. (En el ejercicio 11 se pide al lector trabajar un caso específico.) ▲

En el ejemplo anterior, λ representa algo interesante. Sea $k = qK$ y $l = pL$, de modo que k es el valor en dólares del capital empleado y l es el valor en dólares del trabajo empleado. Entonces las primeras dos ecuaciones se convierten en

$$\frac{\partial Q}{\partial k} = \frac{1}{q}\frac{\partial Q}{\partial K} = \lambda = \frac{1}{p}\frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{\partial Q}{\partial l}.$$

Así, en el punto óptimo de producción, el cambio marginal en la producción por dólar de inversión de capital adicional, es igual al cambio marginal de la producción por dólar de trabajo adicional, y λ es este valor común. En el punto óptimo, el intercambio de un dólar de capital por un dólar de trabajo no cambia la producción. Fuera del punto óptimo, la producción marginal es distinta, y un intercambio o el otro incrementarán la producción.

EJERCICIOS

1. Sea una partícula que se mueve en un campo de potencial en $\mathbf{R}^2$ dado por $V(x, y) = 3x^2 + 2xy + 2x + y^2 + y + 4$. Hallar los puntos de equilibrio estable, si los hay.

2. Sea una partícula moviéndose en un campo de potencial en $\mathbf{R}^2$ dado por $V(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 + y^3 + x^4$. ¿Es $(0, 0)$ una posición de equilibrio estable?

3. Sea una partícula moviéndose en un campo de potencial en $\mathbf{R}^2$ dado por $V(x, y) = x^2 + 4xy - y^2 - 8x - 6y$. Hallar todos los puntos de equilibrio. ¿Cuáles, si hay, son estables?

4. Sea una partícula restringida a moverse en el círculo $x^2 + y^2 = 25$ sujeta a fuerzas gravitacionales (como en el ejemplo 2) así como al potencial adicional $V(x, y) = x^2 + 24xy + 8y^2$. Hallar los puntos de equilibrio estable, si los hay.

5. Sea una partícula restringida a moverse sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, sujeta a fuerzas gravitacionales (como en el ejemplo 2), así como al potencial adicional $V(x, y, z) = x + y$. Hallar los puntos de equilibrio estable, si los hay.

6. Tratar de formular una definición y un teorema que diga que si un potencial tiene un máximo en $\mathbf{x}_0$, entonces $\mathbf{x}_0$ es una posición de equilibrio inestable. Cuidado con las fallas en su argumentación.

7. Tratar de hallar los extremos de $xy + yz$ entre los puntos que satisfacen $xz = 1$.

8. Responder la pregunta planteada en la última línea del ejemplo 3.

9. Hallar el punto sobre la curva $(\cos t, \operatorname{sen} t, \operatorname{sen}(t/2))$ más alejado del origen.

10. La función de producción de una compañía es $Q(x, y) = xy$. El costo de producción es $C(x, y) = 2x + 3y$. Si esta compañía gasta $C(x, y) = 10$, ¿cuál es la máxima cantidad que puede producir?

11. Realizar el análisis del ejemplo 4 para la función de producción $Q(K, L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$, donde A y α son constantes positivas y $0 < \alpha < 1$. Ésta se llama *función de producción de Cobb-Douglas* y se usa a veces como un modelo sencillo para la economía nacional. Q es, entonces, la producción agregada de la economía para una entrada de capital y trabajo dada.

12. Una firma usa fibra de lana y de algodón para producir tela. La cantidad de tela producida está dada por $Q(x, y) = xy - x - y + 1$, donde x es el número de libras de lana, y el número de libras de algodón, $x > 1$ y $y > 1$. Si la lana cuesta p dólares por libra y el algodón q dólares por libra, y la firma puede gastar B dólares en material, ¿Cuál será la razón de algodón y lana para producir la mayor cantidad de tela?

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 4

1. Analizar el comportamiento de las siguientes funciones en los puntos indicados. (La respuesta puede depender de la constante C.)

(a) $z + x^2 - y^2 + 3xy$, $(x, y) = (0, 0)$
(b) $z = x^2 + y^2 + Cxy$, $(x, y) = (0, 0)$
(c) $z = x^2 - y^2 + Cxy$, $(x, y) = (0, 0)$

2. Hallar y clasificar los valores extremos (si los hay) de las funciones en $\mathbf{R}^2$ definidas por las expresiones siguientes:

(a) $y^2 - x^3$ (b) $(x-1)^2 + (x-y)^2$ (c) $x^2 + xy^2 + y^4$

3. (a) Hallar la distancia mínima del origen en $\mathbf{R}^3$ a la supeficie $z = \sqrt{x^2 - 1}$.
(b) Repetir la parte (a) para la superficie $z = 6xy + 7$.

4. Hallar los primeros términos en el desarrollo de Taylor de $f(x, y) = e^{xy} \cos x$ alrededor de $x = 0$, $y = 0$.

5. Hallar el valor extremo de $z = xy$, sujeto a la condición $x + y = 1$.

6. Hallar los valores extremos de $z = \cos^2 x + \cos^2 y$ sujeto a la condición $x + y = \pi/4$.

7. Hallar los puntos sobre la superficie $z^2 - xy = 1$ más cercanos al origen.

8. Usar el teorema de la función implícita para calcular dy/dx para
(a) $x/y = 10$ $\boxed{\text{(b)}}$ $x^3 - \operatorname{sen} y + y^4 = 4$ (c) $e^{x+y^2} + y^3 = 0$

9. Hallar la distancia más corta del punto $(0, b)$ a la parábola $x^2 - 4y = 0$. Resolver este problema usando el multiplicador de Lagrange y también sin usar el método de Lagrange.

10. Resolver los siguientes problemas geométricos mediante el método de Lagrange.
(a) Hallar la distancia más corta del punto (a_1, a_2, a_3) en $\mathbf{R}^3$ al plano cuya ecuación está dada por $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 = 0$, donde $(b_1, b_2, b_3) \neq (0, 0, 0)$.
(b) Hallar el punto sobre la recta de intersección de los dos planos $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ y $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 = 0$ que esté más cerca del origen.
$\boxed{\text{(c)}}$ Mostrar que el volumen del paralelepípedo rectangular más grande que puede inscribirse en el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

es $8abc/3\sqrt{3}$.

11. Una partícula se mueve en un potencial $V(x, y) = x^3 - y^2 + x^2 + 3xy$. Determinar si $(0, 0)$ es un punto de equilibrio estable.

12. Estudiar la naturaleza de la función $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$ cerca de $(0, 0)$. Mostrar que el punto $(0, 0)$ es un punto crítico degenerado, esto es, $D = 0$. Esta superficie se llama "silla de mono".

13. Hallar y esbozar el máximo de $f(x, y) = xy$ sobre la curva $(x + 1)^2 + y^2 = 1$.

$\boxed{\textbf{14.}}$ Hallar el máximo y mínimo de $f(x, y) = xy - y + x - 1$ en el conjunto $x^2 + y^2 \leq 2$.

15. La planta en Baraboo, Wisconsin, de la Compañía Internacional de Chucherías, S.A. usa aluminio, hierro y magnesio para producir chucherías de alta calidad. La cantidad de chucherías que puede producir usando x toneladas de aluminio, y toneladas de hierro y z toneladas de magnesio es $Q(x, y, z) = xyz$. El costo de la materia prima es: aluminio, \$6 por tonelada; hierro, \$4 por tonelada; y magnesio, \$8 por tonelada. ¿Cuántas toneladas de aluminio, hierro y magnesio deberán usarse para manufacturar 1000 chucherías al menor costo posible? (IDEA: Hallar un valor extremo: ¿de qué función, sujeta a qué restricciones?)

***16.** Sea $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de clase C^1 y sea

$$u = f(x)$$
$$v = -y + xf(x).$$

Si $f'(x_0) \neq 0$, mostrar que esta transformación de $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}^2$ es invertible cerca de (x_0, y) y su inversa está dada por

$$x = f^{-1}(u)$$
$$y = -v + uf^{-1}(u).$$

*$\boxed{17.}$ Mostrar que las ecuaciones

$$x^2 - y^2 - u^3 + v^2 + 4 = 0$$
$$2xy + y^2 - 2u^2 + 3v^4 + 8 = 0$$

determinan funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ cerca de $x = 2$ y $y = -1$ tales que $u(2, -1) = 2$ y $v(2, -1) = 1$. Calcular $\partial u/\partial x$ en $(2, -1)$.

***18.** Mostrar que existen números positivos p y q tales que hay funciones únicas u y v de $(-1 - p, -1 + p)$ en $(1 - q, 1 + q)$ que satisfacen

$$xe^{u(x)} + u(x)e^{v(x)} = 0 = xe^{v(x)} + v(x)e^{u(x)}$$

para todo $x \in (-1 - p, -1 + p)$ y $u(-1) = 1 = v(-1)$.

***19.** Para trabajar en este ejercicio el lector deberá estar familiarizado con la técnica de diagonalización de una matriz de 2×2. Sean $a(x)$, $b(x)$ y $c(x)$ tres funciones continuas definidas en $U \cup \partial U$, donde U es un conjunto abierto y ∂U denota su conjunto de puntos frontera (ver la sección 2.2). Usar la notación del lema 2 en la sección 4.2, y suponer que para cada $x \in U \cup \partial U$, la forma cuadrática definida por la matriz

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

es definitivamente positiva. Para una función v de clase C^2, en $U \cup \partial U$, definimos un operador diferencial L mediante $Lv = a(\partial^2 v/\partial x^2) + 2b(\partial^2 v/\partial x \partial y) + c(\partial^2 v/\partial y^2)$. Con esta condición de definitividad positiva, dicho operador se llama *elíptico*. Una función v se llama *estrictamente subarmónica respecto a* L si $Lv > 0$. Mostrar que una función estrictamente subarmónica no puede tener un punto máximo en U.

***20.** Se dice que una función v está en el núcleo del operador L descrito en el ejercicio 19 si $Lv = 0$ en $U \cup \partial U$. Argumentando como en el ejercicio 35 de la sección 4.2, mostrar que si v alcanza su máximo en U, también lo alcanza en ∂U. Éste es el principio débil del máximo para operadores elípticos.

***21.** Sea L un operador diferencial elíptico como en los ejercicios 19 y 20.

(a) Definir el concepto de función supraarmónica estricta.

(b) Mostrar que dichas funciones no pueden alcanzar un mínimo en U.

(c) Si v es como en el ejercicio 20, mostrar que si v alcanza su mínimo en U, también lo alcanza en ∂U.

El siguiente ***método de los cuadrados mínimos*** *deberá aplicarse a los ejercicios 22 al 27.*

Sucede a menudo que la teoría detrás de un experimento indica que los datos experimentales deberán estar colocados, de manera aproximada, a lo largo de una recta de la forma $y = mx + b$. Es claro que los resultados obtenidos en la realidad, nunca concuerdan exactamente con la teoría. Enfrentamos entonces el problema de hallar la

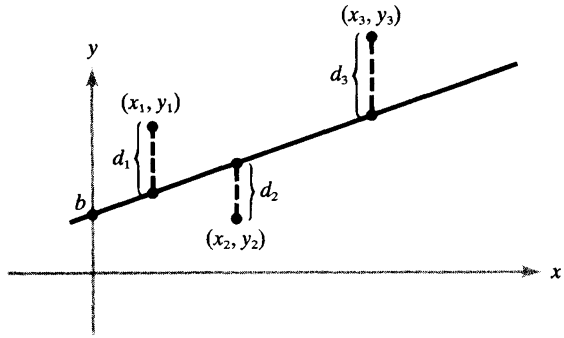


Figura 4.R.1 El método de los cuadrados mínimos trata de hallar una recι que mejor aproxime un conjunto de datos.

recta que mejor se ajuste a algún conjunto de datos experimentales $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ como en la figura 4.R.1. Si pensamos que la recta $y = mx + b$ ajustará los datos, cada punto se desviará verticalmente de la recta en una distancia $d_i = y_i - (mx_i + b)$.

Quisiéramos escoger m y b de manera que el efecto total de estas desviaciones fuera lo más pequeño posible. Sin embargo, como algunas son negativas y otras positivas, y a pesar de tener multitud de cancelaciones, quizá el ajuste siga siendo malo. Esto nos hace sospechar que quizá una mejor medida del error total sea la suma de los cuadrados de estas desviaciones. Así, llegamos al problema de hallar m y b que minimicen la función

$$s = f(m, b) = d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_n^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - mx_i - b)^2,$$

donde $x_1, \ldots, x_n$ y $y_1, \ldots, y_n$ son datos dados.

22. Para cada conjunto de tres puntos dato, localizar los puntos, escribir la función $f(m, b)$ anterior y hallar m y b para dar el mejor ajuste en línea recta de acuerdo con el método de los cuadrados mínimos, y dibujar la recta.

(a) $(x_1, y_1) = (1, 1)$ (b) $(x_1, y_1) = (0, 0)$
$(x_2, y_2) = (2, 3)$ $(x_2, y_2) = (1, 2)$
$(x_3, y_3) = (4, 3)$ $(x_3, y_3) = (2, 3)$

23. Mostrar que si sólo se dan dos puntos dato (x_1, y_1) y (x_2, y_2), este método produce la recta que pasa por (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

24. Mostrar que las ecuaciones para un punto crítico, $\partial s/\partial b = 0$ y $\partial s/\partial m = 0$, son equivalentes a

$$m\left(\sum x_i\right) + nb = \left(\sum y_i\right) \qquad \text{y} \qquad m\left(\sum x_i^2\right) + b\left(\sum x_i\right) = \left(\sum x_i y_i\right),$$

donde todas las sumas van de $i = 1$ a $i = n$.

25. Si $y = mx + b$ es la recta que mejor ajusta los puntos dato $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ de acuerdo con el método de los cuadrados mínimos, mostrar que

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - mx_i - b) = 0;$$

esto es, las desviaciones positivas y negativas se cancelan (ver el ejercicio 24).

26. Usar el criterio de la segunda derivada para mostrar que el punto crítico de f en realidad no produce un mínimo.

27. Usar el método de los cuadrados mínimos para hallar la recta que mejor ajuste los puntos $(0, 1)$, $(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 4)$ y $(4, 5)$. Dibujar los puntos y la recta.*

---

*El método de los cuadrados mínimos puede ser cambiado y generalizado de multitud de maneras. La idea básica se puede aplicar a ecuaciones de curvas más complicadas que una recta. Por ejemplo, se puede buscar la parábola que mejor ajuste un conjunto dado de datos. Estas ideas también formaban parte de la base para el desarrollo de la ciencia de la cibernética realizado por Norbert Wiener. Otra versión de los datos es el siguiente problema de aproximación de cuadrados mínimos: dada una función f definida e integrable en un intervalo $[a, b]$, hallar un polinomio P de grado $\leq n$ tal que el error cuadrático medio

$$\int_a^b |f(x) - P(x)|^2 \, dx$$

sea lo más pequeño posible.

5 INTEGRALES DOBLES

Es a Arquímedes mismo (c. 225 A.C.) a quien debemos el mejor enfoque a la verdadera integración descubierto entre los griegos. Su primer avance notable en esta dirección se ocupaba de la demostración de que el área de un segmento parabólico es cuatro tercios del triángulo con la misma base y vértice, o dos tercios del paralelogramo circunscrito.

D. E. Smith, *History of Mathematics*

En éste y en el siguiente capítulo estudiamos la integración de funciones de varias variables con valores reales; en este capítulo se trata con integrales de funciones de dos variables, o *integrales dobles.* La integral doble tiene una interpretación geométrica básica como volumen, y se puede definir rigurosamente como límite de sumas aproximantes. Presentaremos varias técnicas para evaluar integrales dobles y consideraremos algunas aplicaciones.

5.1 INTRODUCCIÓN

En esta sección se estudian de manera breve algunos aspectos geométricos de la integral doble, dejando un análisis más riguroso, en términos de sumas de Riemann, hasta la sección 5.2.

Considerar una función continua de dos variables $f: R \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ cuyo dominio R es un rectángulo con lados paralelos a los ejes coordenados. El rectángulo R puede describirse en términos de dos intervalos cerrados $[a, b]$ y $[c, d]$, representando los lados de R a lo largo de los ejes x y y, respectivamente, como en la figura 5.1.1. En este caso, podemos decir que R es el *producto cartesiano* de $[a, b]$ y $[c, d]$ y escribimos $R = [a, b] \times [c, d]$.

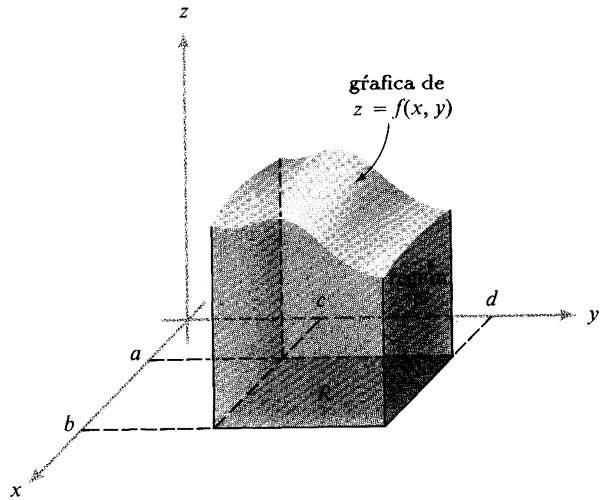


Figura 5.1.1 La región V en el espacio está acotada por la gráfica de f, el rectángulo R y los cuatro lados verticales indicados.

Suponer que $f(x,y) \geq 0$ en R, de manera que la gráfica de $z = f(x,y)$ es una superficie que está arriba del rectángulo R. Esta superficie, el rectángulo R y los cuatro planos $x = a$, $x = b$, $y = c$ y $y = d$ forman la frontera de una región V en el espacio (ver la figura 5.1.1). Es necesario enfrentar el problema de cómo definir de manera rigurosa el volumen V, cosa que haremos en la sección 5.2 por medio del método clásico de exhausión, o, dicho en términos modernos, el método de las sumas de Riemann. Sin embargo, para tener un conocimiento intuitivo de este método, supongamos provisionalmente que se ha definido el volumen de una región. *El volumen de la región arriba de R y debajo de la gráfica de f se llama la* ***integral (doble)*** *de f sobre R y se denota por*

$$\int_R f, \quad \int_R f(x,y)\,dA, \quad \int_R f(x,y)\,dx\,dy, \quad \iint_R f(x,y)\,dx\,dy \quad \text{o} \quad \iint_R f(x,y)\,dx\,dy.$$

EJEMPLO 1 (a) Si f está definida por $f(x,y) = k$, donde k es una constante positiva, entonces $\int_R f(x,y)\,dA = k(b-a)(d-c)$, pues la integral es igual al volumen de una caja rectangular con base R y altura k.

(b) Si $f(x,y) = 1-x$ y $R = [0,1]\times[0,1]$, entonces $\int_R f(x,y)\,dA = \frac{1}{2}$, pues la integral es igual al volumen del sólido triangular mostrado en la figura 5.1.2. ▲

EJEMPLO 2 Suponer que $z = f(x,y) = x^2 + y^2$ y $R = [-1,1] \times [0,1]$. Entonces la integral $\int_R f = \int_R (x^2+y^2)\,dx\,dy$ es igual al volumen del sólido esbozado en la figura 5.1.3. Calcularemos esta integral en el ejemplo 3. ▲

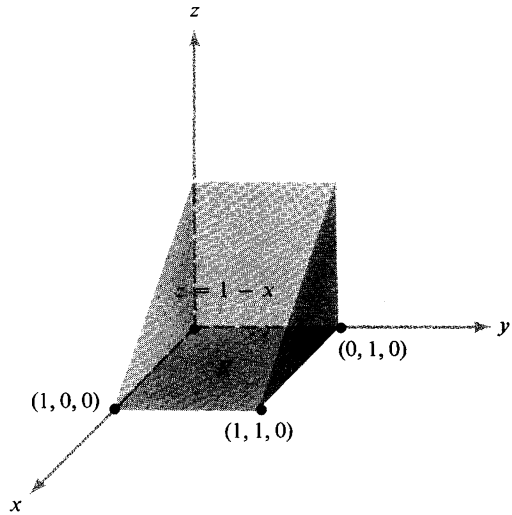


Figura 5.1.2 Volumen bajo la gráfica $z = 1 - x$ y sobre $R = [0, 1] \times [0, 1]$.

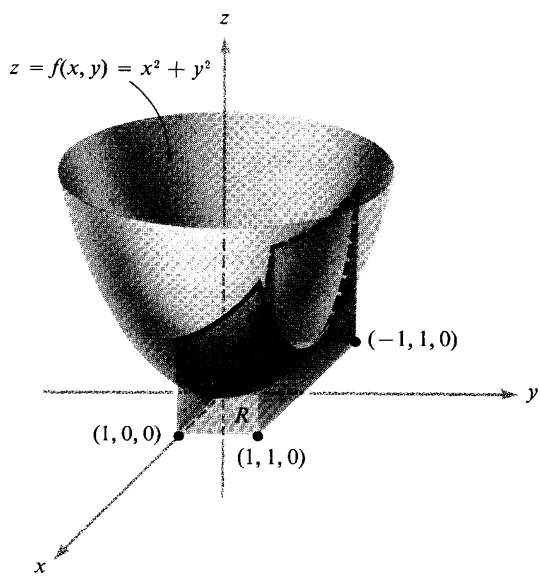


Figura 5.1.3 Volumen bajo $z = x^2 + y^2$ y sobre $R = [-1, 1] \times [0, 1]$.

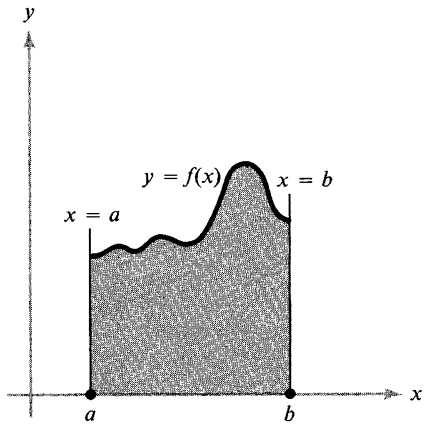


Figura 5.1.4 Área bajo la gráfica de una función continua no negativa f de $x = a$ a $x = b$ es $\int_a^b f(x)\,dx$.

Estas ideas son similares a la de integral simple $\int_a^b f(x)\,dx$, que representa el área bajo la gráfica de f si $f \geq 0$ y, digamos continua; ver la figura 5.1.4.* Recordar que puede definirse rigurosamente $\int_a^b f(x)\,dx$, sin recurrir al concepto de área, como un límite de sumas de Riemann. Así, podemos aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$ escogiendo una partición $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ de $[a, b]$, seleccionando puntos $c_i \in [x_i, x_{i+1}]$ y formando la suma de Riemann

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1} - x_i) \approx \int_a^b f(x)\,dx$$

(ver la figura 5.1.5). En la sección siguiente examinamos el proceso análogo para integrales dobles.

Hay un método para calcular volúmenes conocido como *principio de Cavalieri*. Supongamos que tenemos un cuerpo sólido y denotemos por $A(x)$ el área de su sección transversal medida a una distancia x de un plano de referencia (figura 5.1.6). De acuerdo con el principio de Cavalieri, el volumen del cuerpo está dado por

$$\text{volumen} = \int_a^b A(x)\,dx,$$

donde a y b son las distancias mínima y máxima a partir del plano de referencia. Esto se puede aclarar de manera intuitiva. Si partimos $[a, b]$ en $a = x_0 <$

*Los lectores que no estén familiarizados con esta idea deberán repasar las secciones adecuadas de su libro de cálculo introductorio.

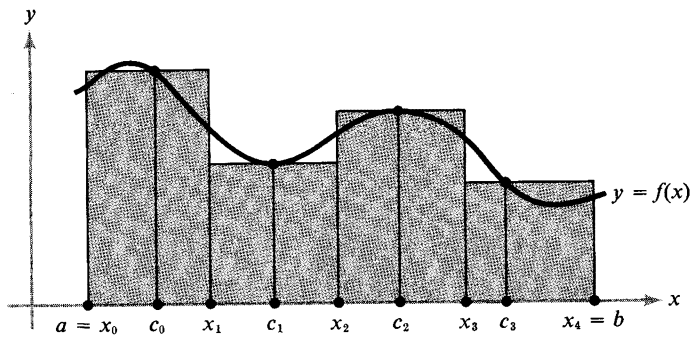


Figura 5.1.5 La suma de las áreas de los rectángulos sombreados es una suma de Riemann que aproxima el área bajo f de $x = a$ a $x = b$.

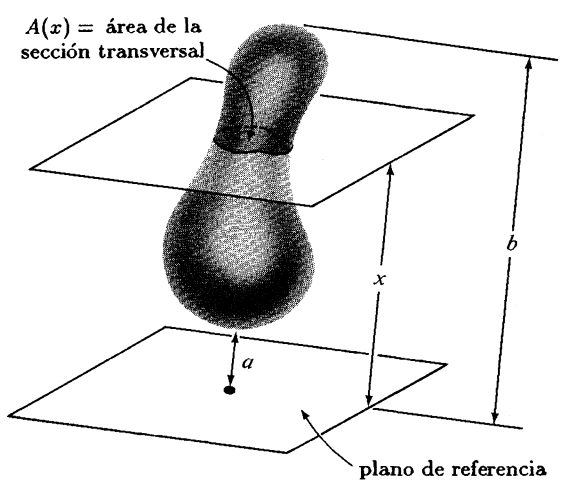


Figura 5.1.6 Cuerpo sólido con área de sección transversal $A(x)$ a una distancia x del plano de referencia.

$x_1 < \cdots < x_n = b$, entonces una suma de Riemann aproximante para la integral es

$$\sum_{i=0}^{n-1} A(c_i)(x_{i+1} - x_i).$$

Pero esta suma también aproxima el volumen del cuerpo, pues $A(x)\,\Delta x$ es el volumen de una rebanada con área de sección transversal $A(x)$ y ancho Δx (figura 5.1.7). Por lo tanto, es razonable aceptar la fórmula anterior para el volumen. A continuación se presenta una justificación más cuidadosa del método.

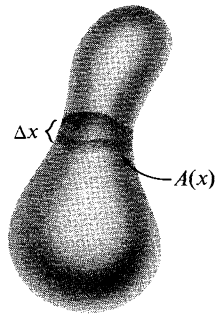


Figura 5.1.7 El volumen de una rebanada con área de sección transversal $A(x)$ y grueso Δx es igual a $A(x)\,\Delta x$. El volumen total del cuerpo es $\int_a^b A(x)\,dx$.

NOTA HISTÓRICA

Bonaventura Cavalieri (1598–1647) fue discípulo de Galileo y profesor en Bolonia. Sus investigaciones acerca del área y volumen fueron bases importantes para el fundamento del cálculo. Aunque estos métodos fueron criticados por sus contemporáneos, Arquímedes había usado antes ideas similares, y más adelante fueron tomadas por los "padres" del cálculo, Newton y Leibniz.

Ahora usamos el principio de Cavalieri para evaluar integrales dobles. Considerar la región sólida bajo la gráfica $z = f(x, y)$ definida en la región $[a, b] \times [c, d]$, donde f es continua y mayor que cero. Hay dos funciones naturales para el área de sección transversal: una, obtenida usando planos cortantes perpendiculares al eje x y la otra usando planos cortantes perpendiculares al eje y. La sección transversal determinada por un plano cortante $x = x_0$, del primer tipo, es la región plana debajo de la gráfica de $z = f(x_0, y)$ de $y = c$ a $y = d$ (figura 5.1.8). Cuando fijamos $x = x_0$, tenemos la función $y \mapsto f(x_0, y)$ que es continua en $[c, d]$. El área de la sección transversal $A(x_0)$ es, por lo tanto, igual a la integral $\int_c^d f(x_0, y)\,dy$. Así, la función A de área de sección transversal tiene dominio $[a, b]$ y $A\colon x \mapsto \int_c^d f(x, y)\,dy$. Por el principio de Cavalieri, el volumen V de la región debajo de $z = f(x, y)$ debe ser igual a

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,dy\right] dx.$$

La integral $\int_a^b [\int_c^d f(x, y)\,dy]\,dx$ se conoce como *integral iterada*, pues se obtiene integrando respecto a y y después integrando el resultado respecto a x. Como

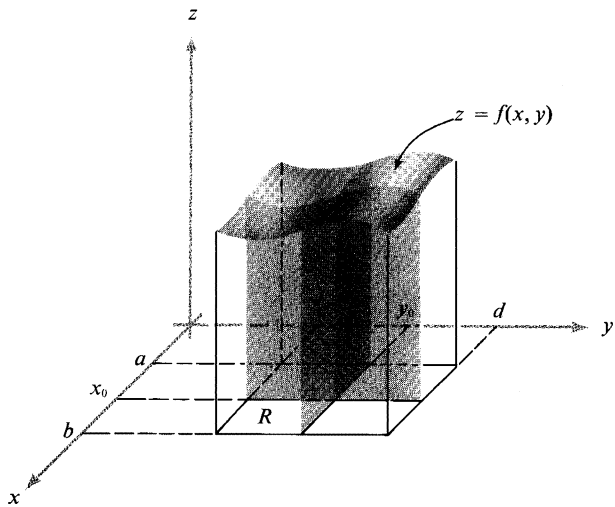


Figura 5.1.8 Dos secciones transversales diferentes que barren el volumen bajo $z = f(x, y)$.

$\int_R f(x, y)\, dA$ es igual al volumen V,

$$\int_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy \right] dx. \tag{1}$$

Si invertimos los papeles de x y y en el estudio anterior y usamos planos cortantes perpendiculares al eje y, obtenemos

$$\int_R f(x, y)\, dA = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx \right] dy. \tag{2}$$

La expresión a la derecha de la fórmula (2) es la integral iterada obtenida al integrar respecto a x y después integrando el resultado respecto a y.

Así, si nuestro conocimiento intuitivo acerca del volumen es correcto, las fórmulas (1) y (2) deberán ser válidas. De hecho, esto es cierto cuando se definen de manera rigurosa los conceptos estudiados; ello se conoce como el teorema de Fubini. En la siguiente sección daremos una demostración de este teorema.

Como se ilustra en los ejemplos siguientes, el concepto de integral iterada y las ecuaciones (1) y (2) proporcionan un método poderoso para calcular la integral doble de una función de dos variables.

EJEMPLO 3 *Sea* $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ *y sea* $R = [-1, 1] \times [0, 1]$. *Evaluar la integral* $\int_R (x^2 + y^2)\, dx\, dy$.

SOLUCIÓN Por la ecuación (2),

$$\int_R (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\int_{-1}^1 (x^2+y^2)\,dx\right] dy.$$

Para hallar $\int_{-1}^1 (x^2+y^2)\,dx$, tratamos y como constante e integramos respecto a x. Como $x \mapsto x^3/3 + y^2x$ es una antiderivada de $x \mapsto x^2+y^2$, podemos integrar usando métodos de cálculo de una variable, y obtener

$$\int_{-1}^1 (x^2+y^2)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + y^2x\right]_{x=-1}^1 = \frac{2}{3} + 2y^2.$$

Después integramos $y \mapsto \frac{2}{3} + 2y^2$ respecto a y, de 0 a 1, para obtener

$$\int_0^1 (\frac{2}{3} + 2y^2)\,dy = [\frac{2}{3}y + \frac{2}{3}y^3]_{y=0}^1 = \frac{4}{3}.$$

Entonces el volumen del sólido en la figura 5.1.3 es $\frac{4}{3}$. Para completar, evaluemos $\int_R (x^2+y^2)\,dx\,dy$ usando la ecuación (1) —esto es, integrando respecto a y y después respecto a x—. Tenemos

$$\int_R (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_{-1}^1 \left[\int_0^1 (x^2+y^2)\,dy\right] dx.$$

Tratando x como constante en la integración respecto a y, obtenemos

$$\int_0^1 (x^2+y^2)\,dy = \left[x^2y + \frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^1 = x^2 + \frac{1}{3}.$$

Después evaluamos $\int_{-1}^1 (x^2 + \frac{1}{3})\,dx$ para obtener

$$\int_{-1}^1 \left(x^2 + \frac{1}{3}\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x}{3}\right]_{x=-1}^1 = \frac{4}{3},$$

lo que concuerda con la respuesta obtenida previamente. ▲

EJEMPLO 4 *Calcular* $\int_S \cos x \operatorname{sen} y\,dx\,dy$, *donde* S *es el cuadrado* $[0,\pi/2]\times[0,\pi/2]$ *(ver la figura 5.1.9).*

SOLUCIÓN Por la ecuación (2),

$$\int_S \cos x \operatorname{sen} y\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^{\pi/2} \cos x \operatorname{sen} y\,dx\right] dy = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} y \left[\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx\right] dy$$

$$= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} y\,dy = 1. \quad ▲$$

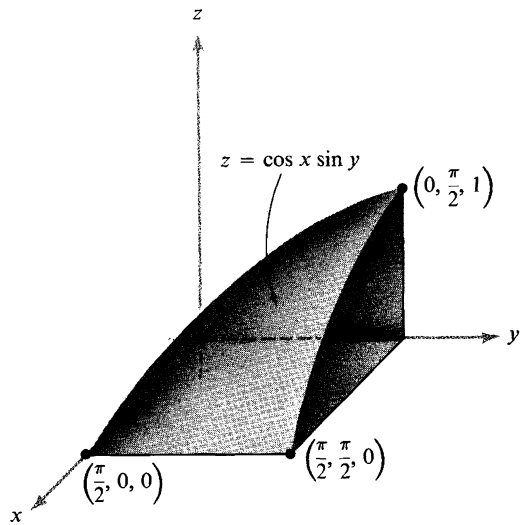


Figura 5.1.9 Volumen bajo $z = \cos x \operatorname{sen} y$ y sobre el rectángulo $[0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$.

En la siguiente sección usaremos sumas de Riemann para definir rigurosamente la integral doble para una amplia clase de funciones de dos variables, sin recurrir al concepto de volumen. Aunque suprimiremos el requerimiento de que $f(x, y) \geq 0$, se seguirán cumpliendo las ecuaciones (1) y (2). Por lo tanto, la integral iterada proporcionará de nuevo la clave para calcular la integral doble. En la sección 5.3 trataremos integrales dobles sobre regiones más generales que rectángulos.

Finalmente, observamos que es común eliminar los paréntesis cuadrados en las integrales iteradas, como en las ecuaciones (1) y (2) anteriores, y escribir

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy \right] dx$$

y

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx \right] dy.$$

EJERCICIOS

1. Evaluar las siguientes integrales iteradas:
   (a) $\int_{-1}^{1} \int_0^1 (x^4 y + y^2)\, dy\, dx$ $\boxed{\text{(b)}}$ $\int_0^{\pi/2} \int_0^1 (y \cos x + 2)\, dy\, dx$
   (c) $\int_0^1 \int_0^1 (xye^{x+y})\, dy\, dx$ (d) $\int_{-1}^{0} \int_1^2 (-x \log y)\, dy\, dx$

2. Evaluar las integrales del ejercicio 1 integrando respecto a x y después respecto a y. (La solución sólo a la parte (b) está en la Guía de estudio de este libro.)

3. Usar el principio de Cavalieri para mostrar que los volúmenes de dos cilindros con la misma base y altura son iguales (ver la figura 5.1.10).

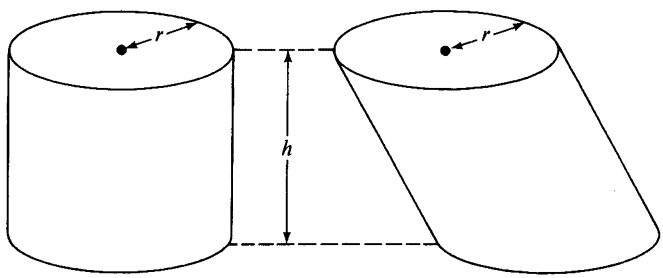


Figura 5.1.10 Dos cilindros con la misma base y altura tienen el mismo volumen.

4. Usando el principio de Cavalieri, calcular el volumen de la estructura mostrada en la figura 5.1.11; cada sección transversal es un rectángulo de longitud 5 y ancho 3.

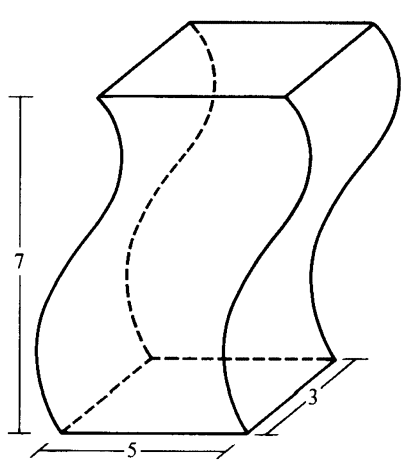


Figura 5.1.11 Calcular este volumen.

5. Un leñador corta una pieza con forma de cuña de un árbol cilíndrico de radio r, mediante dos cortes de sierra hacia el centro del árbol, uno horizontal y otro a un ángulo θ. Calcular el volumen de la cuña C usando el principio de Cavalieri. (Ver la figura 5.1.12.)

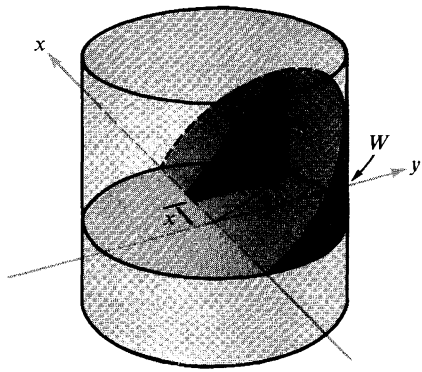


Figura 5.1.12 Hallar el volumen de C.

6. (a) Demostrar informalmente que el volumen del sólido de revolución mostrado en la figura 5.1.13 es

$$\pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx.$$

(b) Mostrar que el volumen de la región obtenida al girar la región bajo la gráfica de la parábola $y = -x^2 + 2x + 3$, $-1 \leq x \leq 3$ alrededor del eje x es $512\pi/15$ (ver la figura 5.1.14).

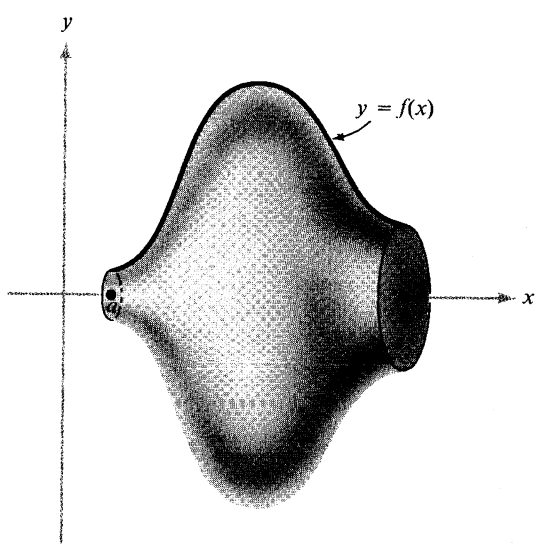


Figura 5.1.13 Este sólido de revolución tiene volumen $\pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$.

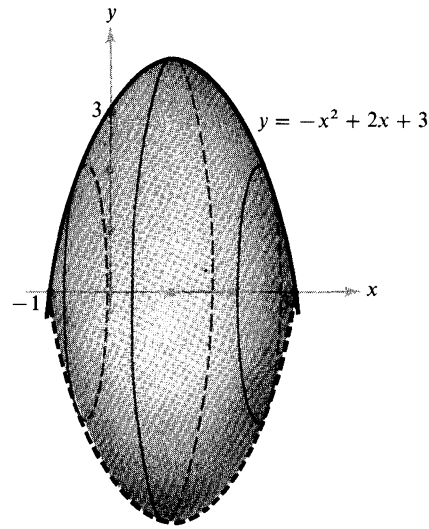


Figura 5.1.14 Girando la región entre la gráfica de $y = -x^2 + 2x + 3$ y el eje x, alrededor del eje x.

Evaluar las integrales dobles en los ejercicios 7 al 9, donde R es el rectángulo $[0, 2] \times [-1, 0]$.

7. $\int_R (x^2y^2 + x)\, dy\, dx$

8. $\int_R (|y| \cos \frac{1}{4}\pi x)\, dy\, dx$

9. $\int_R (-xe^x \operatorname{sen} \frac{1}{2}\pi y)\, dy\, dx$

10. Hallar el volumen acotado por la gráfica de $f(x, y) = 1 + 2x + 3y$, el rectángulo $[1, 2] \times [0, 1]$ y los cuatro lados verticales del rectángulo R, como en la figura 5.1.1.

11. Repetir el ejercicio 10 para la superficie $f(x, y) = x^4 + y^2$ y el rectángulo $[-1, 1] \times [-3, -2]$.

5.2 INTEGRAL DOBLE SOBRE UN RECTÁNGULO

Estamos preparados para dar una definición rigurosa de la integral doble como límite de una sucesión de sumas. Esto se usará después para *definir* el volumen de la región debajo de la gráfica de una función $f(x, y)$. No requeriremos que $f(x, y) \geq 0$; pero si $f(x, y)$ toma valores negativos, interpretaremos la integral como un volumen con signo, así como para el área bajo la gráfica de una función

de una variable. Además, estudiaremos algunas propiedades algebraicas de la integral doble y probaremos el teorema de Fubini, que asegura que la integral doble se puede calcular como integral iterada. Para comenzar, establezcamos la notación para particiones y sumas.

Considerar un rectángulo $R \subset \mathbf{R}^2$, que es el producto cartesiano $R = [a, b] \times [c, d]$. Por una *partición regular* de R de orden n, entenderemos dos colecciones ordenadas de $n + 1$ puntos igualmente espaciados $\{x_j\}_{j=0}^n$ y $\{y_k\}_{k=0}^n$; esto es, puntos que satisfacen

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \qquad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$$

y

$$x_{j+1} - x_j = \frac{b-a}{n}, \qquad y_{k+1} - y_k = \frac{d-c}{n}$$

(ver la figura 5.2.1).

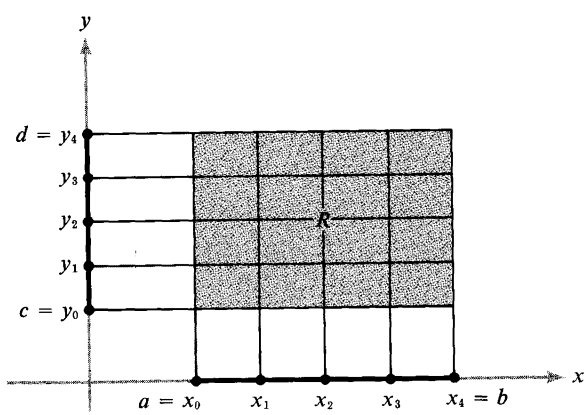


Figura 5.2.1 Partición regular de un rectángulo R, con $n = 4$.

Sea R_{jk} el rectángulo $[x_j, x_{j+1}] \times [y_k, y_{k+1}]$, y sea $\mathbf{c}_{jk}$ *cualquier* punto en R_{jk}. Suponer que $f: R \to \mathbf{R}$ es una función acotada con valores reales. Formar la suma

$$S_n = \sum_{j,k=0}^{n-1} f(\mathbf{c}_{jk})\Delta x \Delta y = \sum_{j,k=0}^{n-1} f(\mathbf{c}_{jk})\Delta A, \tag{1}$$

donde

$$\Delta x = x_{j+1} - x_j = \frac{b-a}{n}, \qquad \Delta y = y_{k+1} - y_k = \frac{d-c}{n},$$

y

$$\Delta A = \Delta x \Delta y.$$

Esta suma está tomada sobre todo j y k de 0 a $n - 1$, de modo que hay n^2 términos. Una suma de este tipo se llama *suma de Riemann* para f.

DEFINICIÓN *Si la sucesión $\{S_n\}$ converge a un límite S cuando $n \to \infty$ y el límite S es el mismo para cualquier selección de puntos $\mathbf{c}_{jk}$ en los rectángulos R_{jk}, entonces decimos que f es* **integrable** *sobre R y escribimos*

$$\int_R f, \quad \int_R f(x,y)\,dA, \quad \int_R f(x,y)\,dx\,dy, \quad \iint_R f(x,y)\,dx\,dy \quad \text{o} \quad \iint_R f(x,y)\,dx\,dy.$$

para el límite S.

Así, podemos reescribir la integrabilidad de la siguiente manera:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j,k=0}^{n-1} f(\mathbf{c}_{jk})\Delta x \Delta y = \int_R f$$

para cualquier selección de $\mathbf{c}_{jk} \in R_{jk}$.

La demostración del siguiente teorema básico no es difícil, pero como requiere de ciertos aspectos técnicos que no son esenciales para el desarrollo del libro, se presenta en la sección 5.5.*

TEOREMA 1 *Cualquier función continua definida en un rectángulo R es integrable.*

Si $f(x,y) \geq 0$, la existencia de $\lim_{n\to\infty} S_n$ tiene un significado geométrico directo. Considerar la gráfica de $z = f(x,y)$ como la tapa de un sólido cuya base es el rectángulo R. Si tomamos cada $\mathbf{c}_{jk}$ como un punto donde $f(x,y)$ tiene su valor mínimo† en R_{jk}, entonces $f(\mathbf{c}_{jk})\,\Delta x\,\Delta y$ representa el volumen de una caja rectangular con base R_{jk}. La suma $\sum_{j,k=0}^{n-1} f(\mathbf{c}_{jk})\,\Delta x\,\Delta y$ es igual al volumen de un sólido inscrito, parte del cual se muestra en la figura 5.2.2. De manera análoga, si $\mathbf{c}_{jk}$ es un punto donde $f(x,y)$ tiene su máximo en R_{jk}, entonces la suma $\sum_{j,k=0}^{n-1} f(\mathbf{c}_{jk})\,\Delta x\,\Delta y$ es igual al volumen de un sólido circunscrito (ver la figura 5.2.3). Por lo tanto, si existe $\lim_{n\to\infty} S_n$ y es independiente de $\mathbf{c}_{jk} \in R_{jk}$, se sigue que los volúmenes de los sólidos inscrito y circunscrito tienden al mismo límite cuando $n \to \infty$. Es entonces razonable llamar a este límite el volumen exacto del sólido bajo la gráfica de f. Así, el método de las sumas de Riemann es consistente con los conceptos introducidos como base intuitiva en la sección 5.1.

También hay un teorema que garantiza la existencia de la integral de ciertas funciones discontinuas. Necesitaremos este resultado en la siguiente sección para estudiar la integral de funciones sobre regiones más generales que rectángulos. Nos interesaremos en especial por funciones cuyas discontinuidades estén en curvas en el plano xy. En la figura 5.2.4 se muestran dos funciones definidas en un

*Para detalles técnicos adicionales acerca de la teoría de la integración, ver J. Marsden, *Elementary Classical Analysis*, Freeman, Nueva York, 1974.

†Dicha $\mathbf{c}_{jk}$ existe debido a la continuidad de f en R, pero no lo probaremos.

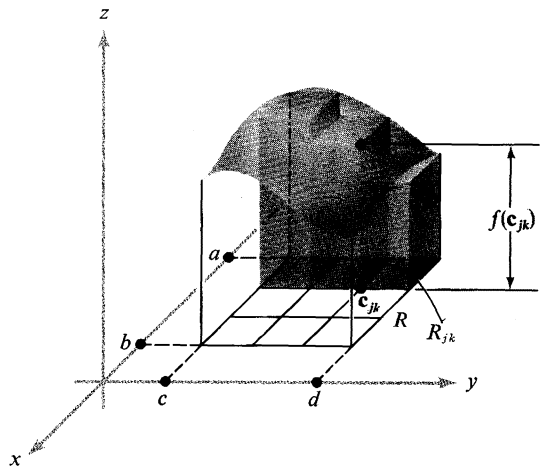


Figura 5.2.2 La suma de cajas inscritas aproxima el volumen debajo de la gráfica de $z = f(x, y)$.

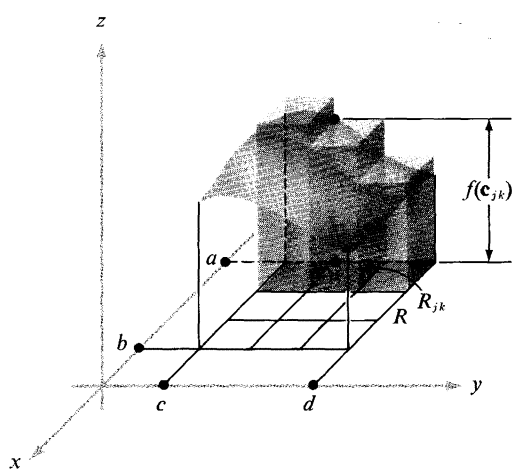


Figura 5.2.3 El volumen de cajas circunscritas también aproxima el volumen debajo de $z = f(x, y)$.

rectángulo R, cuyas discontinuidades están situadas en curvas. En otras palabras, f es continua en cada punto que esté en R pero no sobre la curva. Curvas útiles son las gráficas de funciones $y = \phi(x)$, $a \leq x \leq b$, o $x = \psi(y)$, $c \leq y \leq d$, o uniones finitas de dichas gráficas. Se muestran algunos ejemplos en la figura 5.2.5. El siguiente teorema proporciona un criterio importante para determinar si una función es integrable. La demostración se estudia en la sección 5.5.

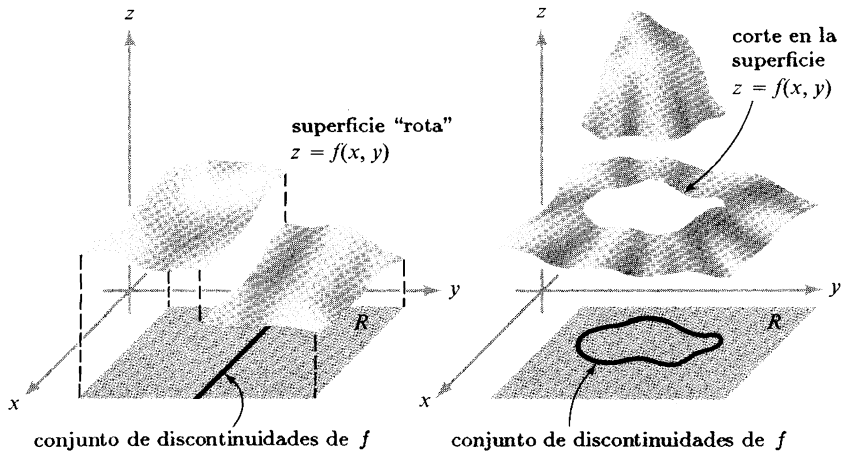


Figura 5.2.4 Cómo podrían verse las gráficas de funciones discontinuas de dos variables.

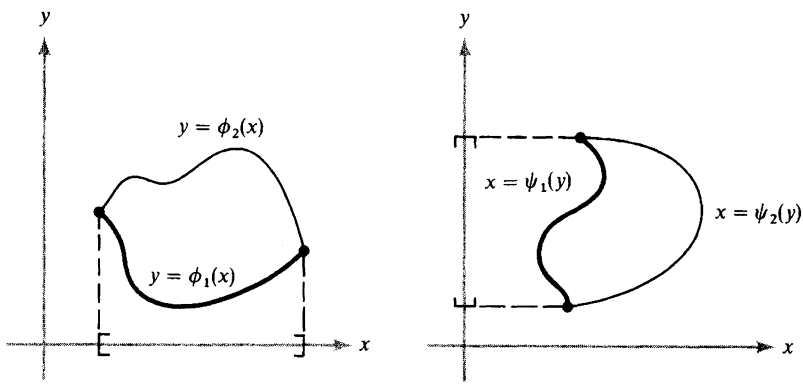


Figura 5.2.5 Curvas en el plano representadas como gráficas.

TEOREMA 2 *Sea $f: R \to \mathbf{R}$ una función acotada con valores reales, definida en el rectángulo R, y suponer que el conjunto de puntos donde f es discontinua está formado por una unión finita de gráficas de funciones continuas. Entonces f es integrable sobre R.*

Recordar que una función está *acotada* si existe un número $M > 0$ tal que $-M \leq f(x, y) \leq M$ para todo (x, y) en el dominio de f. Una función continua en un rectángulo cerrado siempre está acotada, pero, por ejemplo, $f(x, y) = 1/x$ en $(0, 1] \times [0, 1]$ no está acotada, pues $1/x$ se vuelve arbitrariamente grande para x cerca de 0.

Usando el teorema 2 y las observaciones que lo preceden, vemos que las funciones esbozadas en la figura 5.2.4 son integrables sobre R, pues estas funciones están acotadas y son continuas, excepto en gráficas de funciones continuas.

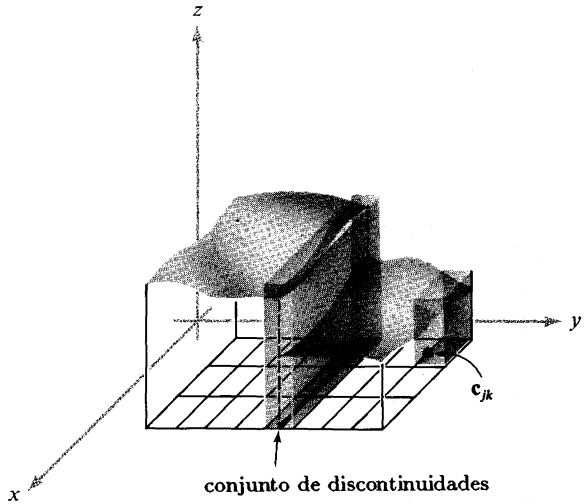


Figura 5.2.6 Gráfica de una función discontinua y dos cajas circunscritas.

Geométricamente, el teorema 2 implica que si una función no negativa f no es "demasiado mal portada", entonces los volúmenes de los sólidos circunscritos e inscritos aproximarán el "verdadero" volumen bajo su gráfica (ver la figura 5.2.6).

De la definición de integral como límite de sumas y los teoremas de límites, podemos deducir algunas propiedades fundamentales de la integral $\int_R f(x,y)\,dA$; estas propiedades son esencialmente las mismas que para la integral de una función con valores reales, de una variable.

Sean f y g funciones integrables en el rectángulo R, y sea c una constante. Entonces $f+g$ y cf son integrables, y

(i) (*Linealidad*)

$$\int_R [f(x,y)+g(x,y)]\,dA = \int_R f(x,y)\,dA + \int_R g(x,y)\,dA.$$

(ii) (*Homogeneidad*)

$$\int_R cf(x,y)\,dA = c\int_R f(x,y)\,dA.$$

(iii) (*Monotonía*) Si $f(x,y) \geq g(x,y)$, entonces

$$\int_R f(x,y)\,dA \geq \int_R g(x,y)\,dA.$$

(iv) (*Aditividad*) Si R_i, $i = 1,\ldots, m$, son rectángulos ajenos entre sí, tales que f es integrable sobre cada R_i y si $Q = R_1 \cup R_2 \cup \cdots \cup R_m$ es un rectángulo, entonces una función acotada $f\colon Q \to \mathbf{R}$ es integrable sobre Q y

$$\int_Q f(x,y)\,dA = \sum_{i=1}^{m} \int_{R_i} f(x,y)\,dA.$$

Las propiedades (i) y (ii) son consecuencia de la definición de integral como límite de una suma y los siguientes hechos acerca de series convergentes $\{S_n\}$ y $\{T_n\}$, que se demuestran en libros de cálculo de una variable:

$$\lim_{n\to\infty}(T_n + S_n) = \lim_{n\to\infty} T_n + \lim_{n\to\infty} S_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(cS_n) = c\lim_{n\to\infty} S_n.$$

Para demostrar la monotonía, observamos primero que si $h(x,y) \geq 0$ y $\{S_n\}$ es una sucesión de sumas de Riemann que converge a $\int_R h(x,y)\,dA$, entonces, $S_n \geq 0$ para todo n, de modo que $\int_R h(x,y)\,dA = \lim_{n\to\infty} S_n \geq 0$. Si $f(x,y) \geq g(x,y)$ para todo $(x,y) \in R$, entonces $(f-g)(x,y) \geq 0$ para todo (x,y) y usando las propiedades (i) y (ii), tenemos

$$\int_R f(x,y)\,dA - \int_R g(x,y)\,dA = \int_R [f(x,y) - g(x,y)]\,dA \geq 0.$$

Esto prueba la propiedad (iii). La demostración de la propiedad (iv) es más técnica y se prueba un caso particular en la sección 5.5. Deberá ser intuitivamente obvia.

Otro resultado importante es la desigualdad

$$\left|\int_R f\right| \leq \int_R |f|. \tag{2}$$

Para ver por qué se cumple la fórmula (2), nótese que, por definición de valor absoluto, $-|f| \leq f \leq |f|$; por lo tanto, de la monotonía y la homogeneidad de la integración (con $c = -1$),

$$-\int_R |f| \leq \int_R f \leq \int_R |f|,$$

lo cual es equivalente a la fórmula (2).

Aunque hemos visto la integrabilidad de gran variedad de funciones, aún no hemos establecido rigurosamente un método general para calcular integrales. En el caso de una variable, evitamos tener que calcular $\int_a^b f(x)\,dx$ a partir de su definición como límite de una suma, mediante el uso del *teorema fundamental del cálculo integral*. Recordemos este importante teorema, que nos dice que *si f es continua, entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

donde f es una antiderivada de f; esto es, $F' = f$.

Esta técnica no funciona según está enunciada, para funciones $f(x,y)$ de dos variables. Sin embargo, como lo indicamos en la sección 5.1, a menudo es posible

reducir una integral doble sobre un rectángulo, a integrales simples iteradas; después se aplica el teorema fundamental a estas integrales. El teorema de Fubini, que ya se mencionó en la sección anterior, justifica rigurosamente esta reducción a integrales iteradas, mediante sumas de Riemann. Como vimos en la sección 5.1, la reducción,

$$\int_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy,$$

es consecuencia del principio de Cavalieri, al menos si $f(x,y) \geq 0$. En términos de sumas de Riemann, corresponde a la siguiente igualdad:

$$\sum_{j,k=0}^{n-1} f(\mathbf{c}_{jk})\Delta x \Delta y = \sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} f(\mathbf{c}_{jk})\Delta y\right)\Delta x = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{j=0}^{n-1} f(\mathbf{c}_{jk})\Delta x\right)\Delta y,$$

que se puede probar de manera más general, como sigue: Sea $[a_{jk}]$ una matriz de $n \times n$, $0 \leq j \leq n-1$, $0 \leq k \leq n-1$. *Sea* $\sum_{j,k=0}^{n-1} a_{jk}$ *la suma de los* n^2 *registros de la matriz. Entonces*

$$\sum_{j,k=0}^{n-1} a_{jk} = \sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_{jk}\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{j=0}^{n-1} a_{jk}\right). \tag{3}$$

En la primera igualdad, el lado derecho representa la suma de los registros de la matriz, primero por renglones y después sumando los resultados:

$$\begin{array}{c}
\begin{bmatrix}
a_{00} & a_{01} & a_{02} & \cdots & a_{0k} & \cdots & a_{0(n-1)} \\
\vdots & & & & & & \vdots \\
a_{j0} & a_{j1} & & \cdots & a_{jk} & \cdots & a_{j(n-1)} \\
\vdots & & & & & & \vdots \\
a_{(n-1)0} & a_{(n-1)1} & & \cdots & a_{(n-1)k} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)}
\end{bmatrix}
\begin{array}{c}
\sum_{k=0}^{n-1} a_{0k} \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{n-1} a_{jk} \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{n-1} a_{(n-1)k}
\end{array} \\
\hline
\sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_{jk}\right)
\end{array}$$

Claramente esto es igual a $\sum_{j,k=0}^{n-1} a_{jk}$, esto es, la suma de todos los a_{jk}. De manera análoga, $\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{j=0}^{n-1} a_{jk}\right)$ representa una suma de los registros de la matriz por columnas. Esto prueba la ecuación (3) y hace plausible la reducción a integrales iteradas, si recordamos que las integrales se pueden aproximar mediante las correspondientes sumas de Riemann. De hecho, la demostración del teorema de Fubini explota esta idea.

Antes de proceder con la demostración, será útil recordar cómo el principio de Cavalieri hace plausible la fórmula

$$\int_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy. \tag{4}$$

Si cortamos el volumen bajo la gráfica de f en rebanadas paralelas al eje y, entonces podemos ver que el volumen bajo la gráfica es aproximadamente igual a la suma de las cantidades $[\int_c^d f(x,y)\,dy]\Delta x$; esto es, si tenemos que $\int_R f(x,y)\,dA = \int_a^b[\int_c^d f(x,y)\,dy]dx$. De manera análoga, la segunda igualdad en (4) se demuestra cortando el volumen en rebanadas paralelas al eje x (ver la figura 5.2.7).

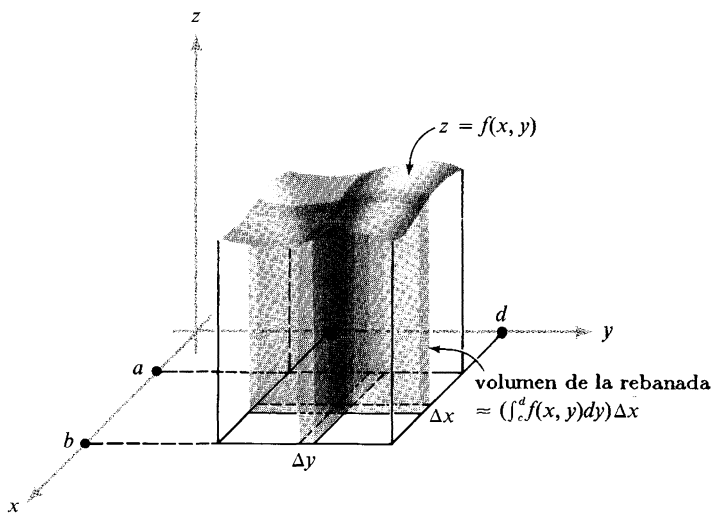


Figura 5.2.7 Interpretación geométrica de la integral iterada.

TEOREMA 3: TEOREMA DE FUBINI *Sea f una función continua con dominio rectangular $R = [a,b] \times [c,d]$. Entonces*

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int_R f(x,y)\,dA. \tag{4'}$$

***DEMOSTRACIÓN** Primero mostraremos que

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_R f(x,y)\,dA.$$

Sea $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$ una partición de $[c,d]$ en n partes iguales. Definir

$$F(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy.$$

Entonces

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{y_k}^{y_{k+1}} f(x,y)\,dy.$$

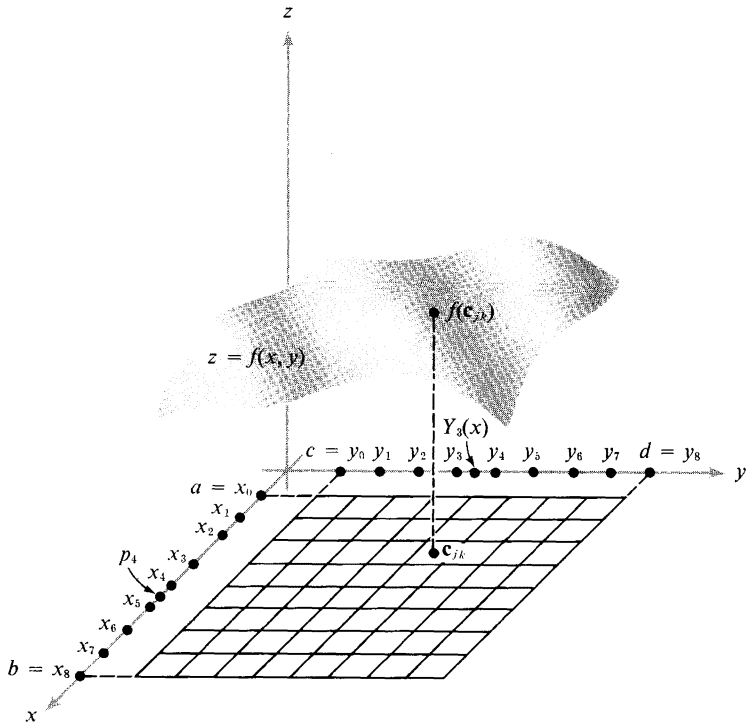


Figura 5.2.8 Notación necesaria en la demostración del teorema de Fubini; $n = 8$.

Usando la versión integral del teorema del valor medio,* para cada x fija y cada k, tenemos

$$\int_{y_k}^{y_{k+1}} f(x, y)\, dy = f(x, Y_k(x))(y_{k+1} - y_k)$$

(ver la figura 5.2.8), donde el punto $Y_k(x)$ pertenece a $[y_k, y_{k+1}]$ y puede depender de x, k y n. Hemos mostrado entonces que

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x, Y_k(x))(y_{k+1} - y_k). \tag{5}$$

Ahora bien, por la definición de la integral en una variable como límite de sumas de Riemann,

$$\begin{aligned}\int_a^b F(x)\, dx &= \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy\right] dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} F(p_j)(x_{j+1} - x_j),\end{aligned}$$

*Éste asegura que si $g(x)$ es continua en $[a, b]$, $\int_a^b g(x)\, dx = g(c)(b - a)$ para algún punto $c \in [a, b]$. El segundo teorema del valor medio, más general, se demostró en la sección 4.1 (ver la página 245).

donde $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ es una partición del intervalo $[a, b]$ en n partes iguales y p_j es cualquier punto en $[x_j, x_{j+1}]$. Haciendo $\mathbf{c}_{jk} = (p_j, Y_k(p_j)) \in R_{jk}$, tenemos (sustituyendo p_j por x en la ecuación 5)

$$F(p_j) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\mathbf{c}_{jk})(y_{k+1} - y_k).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx &= \int_a^b F(x)\, dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} F(p_j)(x_{j+1} - x_j) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} f(\mathbf{c}_{jk})(y_{k+1} - y_k)(x_{j+1} - x_j) \\
&= \int_R f(x, y)\, dA.
\end{aligned}$$

Así, hemos probado que

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx = \int_R f(x, y)\, dA.$$

Con el mismo razonamiento podemos mostrar que

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy = \int_R f(x, y)\, dA.$$

Estas dos conclusiones son precisamente lo que queríamos demostrar. ■

El teorema de Fubini se puede generalizar al caso en que f no necesariamente es continua. Aunque sin demostración, enunciamos aquí esta versión más general.

TEOREMA 3′: TEOREMA DE FUBINI *Sea f una función acotada cuyo dominio es un rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$, y suponer que las discontinuidades de f forman una unión finita de gráficas de funciones continuas. Si*

$$\int_c^d f(x, y)\, dy \qquad \text{existe para cada} \qquad x \in [a, b],$$

entonces

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy \right] dx$$

existe y

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx = \int_R f(x, y)\, dA.$$

De manera análoga, si

$$\int_a^b f(x,y)\,dx \qquad \text{existe para cada} \qquad y \in [c,d],$$

entonces

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy$$

existe y

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int_R f(x,y)\,dA.$$

Así, si todas estas condiciones se cumplen simultáneamente,

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int_R f(x,y)\,dA.$$

Las hipótesis para esta versión del teorema de Fubini son más complicadas que las del teorema 3. Son necesarias pues si f no es continua donde sea, por ejemplo, no hay garantía de que exista $\int_c^d f(x,y)\,dy$ para cada x.

EJEMPLO 1 *Calcular $\int_R (x^2+y)\,dA$, donde R es el cuadrado $[0,1]\times[0,1]$.*

SOLUCIÓN Por el teorema de Fubini,

$$\int_R (x^2+y)\,dA = \int_0^1 \int_0^1 (x^2+y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\int_0^1 (x^2+y)\,dx\right] dy.$$

Por el teorema fundamental del cálculo, se puede ejecutar la integración en x:

$$\int_0^1 (x^2+y)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}+yx\right]_{x=0}^1 = \frac{1}{3}+y.$$

Así,

$$\int_R (x^2+y)\,dA = \int_0^1 \left[\frac{1}{3}+y\right] dy = \left[\frac{1}{3}y+\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{5}{6}.$$

Lo que hemos hecho es mantener fija y, integrar respecto a x y después, evaluar el resultado entre los límites dados para la variable x. A continuación, integramos la función restante (sólo de y) respecto a y para obtener la respuesta final. ▲

EJEMPLO 2 *Una consecuencia del teorema de Fubini es que al intercambiar el orden de integración en las integrales iteradas, no se altera la respuesta. Verificar esto para el ejemplo 1.*

SOLUCIÓN Realicemos la integración en el otro orden:

$$\int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y)\, dy\, dx = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^1 dx = \int_0^1 \left[x^2 + \frac{1}{2}\right] dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x}{2}\right]_0^1 = \frac{5}{6}. \quad \blacktriangle$$

Vimos que cuando $f(x,y) \geq 0$ en $R = [a,b] \times [c,d]$, la integral $\int_R f(x,y)\, dA$ se puede interpretar como un volumen. Si la función también toma valores negativos, entonces la integral doble se puede pensar como la suma de todos los volúmenes que están entre la superficie $z = f(x,y)$ y el plano $z = 0$, acotados por los planos $x = a$, $x = b$, $y = c$ y $y = d$; aquí, los volúmenes arriba de $z = 0$ se cuentan como positivos y los de abajo como negativos. Sin embargo, el teorema de Fubini según se enunció, sigue siendo válido en el caso en que $f(x,y)$ sea negativo o cambie de signo en R; esto es, no hay restricción en el signo de f en la hipótesis del teorema.

EJEMPLO 3 *Sea R el rectángulo $[-2,1] \times [0,1]$ y sea f definida por $f(x,y) = y(x^3 - 12x)$; $f(x,y)$ toma valores positivos y negativos en R. Evaluar la integral $\int_R f(x,y)\, dx\, dy = \int_R y(x^3 - 12x)\, dx\, dy$.*

SOLUCIÓN Por el teorema de Fubini, podemos escribir

$$\int_R y(x^3 - 12x)\, dx\, dy = \int_0^1 \left[\int_{-2}^1 y(x^3 - 12x)\, dx\right] dy = \frac{57}{4}\int_0^1 y\, dy = \frac{57}{8}.$$

De manera alternativa, integrando primero respecto a y, hallamos

$$\int_R y(x^3 - 12x)\, dy\, dx = \int_{-2}^1 \left[\int_0^1 y(x^3 - 12x) y\, dy\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^1 (x^3 - 12x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4} - 6x^2\right]_{-2}^1 = \frac{57}{8}. \quad \blacktriangle$$

NOTA HISTÓRICA

Aunque el teorema 3 acerca de la igualdad de las integrales iteradas lleva el nombre del matemático italiano Guido Fubini (1879–1943), quien probó un resultado muy general de este tipo en 1907, Cauchy y sus contemporáneos ya sabían que se cumplía la igualdad para funciones continuas. Cauchy fue el primero en mostrar que la igualdad no se cumplía cuando f no estaba acotada, y, algo más adelante, también se hallaron ejemplos de funciones acotadas donde no se cumple la igualdad.

EJERCICIOS

1. Evaluar cada una de las integrales siguientes si $R = [0,1] \times [0,1]$.
(a) $\int_R (x^3 + y^2)\, dA$ (b) $\int_R y e^{xy}\, dA$
(c) $\int_R (xy)^2 \cos x^3\, dA$ (c) $\int_R \ln[(x+1)(y+1)]\, dA$

2. Evaluar cada una de las integrales siguientes si $R = [0,1] \times [0,1]$.
(a) $\int_R (x^m y^n)\, dx\, dy$, donde $m, n > 0$ (b) $\int_R (ax + by + c)\, dx\, dy$
(c) $\int_R \operatorname{sen}(x+y)\, dx\, dy$ (d) $\int_R (x^2 + 2xy + y\sqrt{x})\, dx\, dy$

3. Sea f continua, $f \geq 0$ en el rectángulo R. Si $\int_R f\, dA = 0$, probar que $f = 0$ en R.

4. Calcular el volumen del sólido acotado por el plano xz, el plano yz, el plano xy, los planos $x = 1$ y $y = 1$, y la superficie $z = x^2 + y^4$.

5. Sean f continua en $[a,b]$ y g continua en $[c,d]$. Mostrar que

$$\int_R [f(x)g(y)]\, dx\, dy = \left[\int_a^b f(x)\, dx\right] \left[\int_c^d g(y)\, dy\right],$$

donde $R = [a,b] \times [c,d]$.

6. Calcular el volumen del sólido acotado por la superficie $z = \operatorname{sen} y$, los planos $x = 1$, $x = 0$, $y = 0$ y $y = \pi/2$ y el plano xy.

7. Calcular el volumen del sólido acotado por la gráfica $z = x^2 + y$, el rectángulo $R = [0,1] \times [1,2]$ y los "lados verticales" de R.

8. Sea f continua en $R = [a,b] \times [c,d]$; para $a < x < b$, $c < y < d$, definir

$$F(x,y) = \int_a^x \int_c^y f(u,v)\, dv\, du.$$

Mostrar que $\partial^2 F/\partial x \partial y = \partial^2 F/\partial y \partial x = f(x,y)$. Usar este ejemplo para estudiar la relación entre el teorema de Fubini y la igualdad de las derivadas parciales mixtas (ver la sección 2.6).

***9.** Sea $f\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & x \text{ racional} \\ 2y & x \text{ irracional} \end{cases}$$

Mostrar que la integral iterada $\int_0^1 [\int_0^1 f(x,y)\, dy] dx$ existe pero f no es integrable.

***10.** Expresar $\int_R \cosh xy\, dx\, dy$ como serie convergente, donde $R = [0,1] \times [0,1]$.

*11. Aunque el teorema de Fubini se cumple para la mayoría de las funciones que encontramos en la práctica, es necesario tener cuidado. No se cumple para toda función. Por ejemplo, podríamos dividir el cuadrado unitario en infinidad de rectángulos de la forma $[1/(m+1), 1/m] \times [1/(n+1), 1/n]$, como en la figura 5.2.9. Definir f de manera que el volumen bajo la gráfica de f sobre cada rectángulo tome valores de acuerdo con la tabla siguiente:

$$\begin{array}{cccccc}
\cdots & \frac{1}{32} & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -1 \\
\cdots & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\
\cdots & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 \\
\cdots & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Definir f como cero en $(0,0)$. Cada renglón suma cero, de modo que al sumar los renglones y después las columnas da como resultado cero. Por otro lado, las columnas suman

$$\cdots \quad -\frac{1}{32} \quad -\frac{1}{16} \quad -\frac{1}{8} \quad -\frac{1}{4} \quad -\frac{1}{2} \quad -1,$$

de modo que al sumar las columnas y después los renglones da como resultado -2. ¿Por qué no se cumple el teorema de Fubini para esta función?

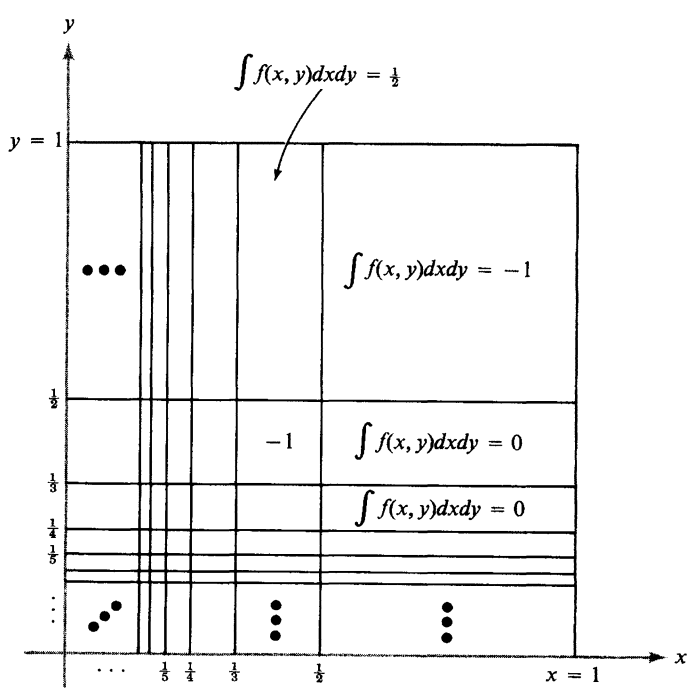


Figura 5.2.9 Construcción de una función que no satisface el teorema de Fubini (ejercicio 11).

5.3 INTEGRAL DOBLE SOBRE REGIONES MÁS GENERALES

En esta sección nuestro propósito es doble: en primer lugar, queremos definir la integral $\int_D f(x,y)\,dA$ en regiones D más generales que rectángulos; y en segundo, queremos desarrollar una técnica para evaluar este tipo de integrales. Para ello, definiremos tres tipos especiales de subconjuntos del plano xy, y después ampliaremos el concepto de integral doble para incluirlos.

Suponer que tenemos dos funciones continuas con valores reales, $\phi_1\colon [a,b] \to \mathbf{R}$, $\phi_2\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ que satisfacen $\phi_1(x) \le \phi_2(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Sea D el conjunto de todos los puntos (x,y) tales que

$$x \in [a,b], \qquad \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x).$$

Esta región D es de *tipo 1*. En la figura 5.3.1 se muestran varios ejemplos de regiones del tipo 1. Las curvas y segmentos de recta que acotan la región, forman juntos la *frontera* de D, denotada por ∂D.

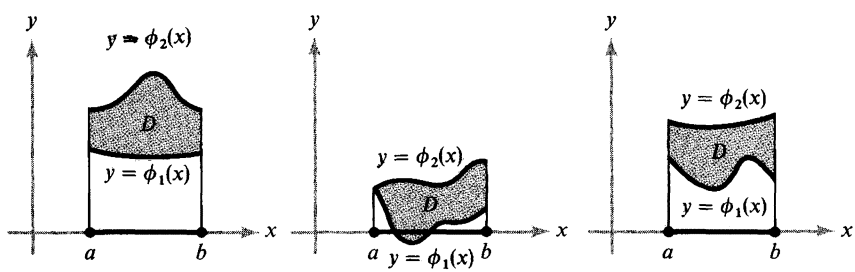


Figura 5.3.1 Algunas regiones del tipo 1.

Decimos que una región D es de *tipo 2* si existen funciones continuas ψ_1, $\psi_2\colon [c,d] \to \mathbf{R}$ tales que D es el conjunto de puntos (x,y) que satisfacen

$$y \in [c,d], \qquad \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y),$$

donde $\psi_1(y) \le \psi_2(y)$ para todo $y \in [c,d]$. De nuevo, las curvas que acotan la región D constituyen su frontera ∂D. Algunos ejemplos de funciones del tipo 2 se muestran en la figura 5.3.2.

Finalmente, una región de *tipo 3* es aquella que es del tipo 1 y del tipo 2; esto es, la región se puede describir tanto como una región del tipo 1 como una región del tipo 2. Un ejemplo de región del tipo 3 es el disco unitario (figura 5.3.3).

A veces nos referiremos a las regiones de los tipos 1, 2 y 3, como *regiones elementales*. Notar que la frontera ∂D de una región elemental es del tipo de conjunto de discontinuidades de una función permitidas en el teorema 2.

DEFINICIÓN *Si D es una región elemental en el plano, escoger un rectángulo R que contenga a D. Dada $f\colon D \to \mathbf{R}$, donde f es continua (y, por lo tanto,*

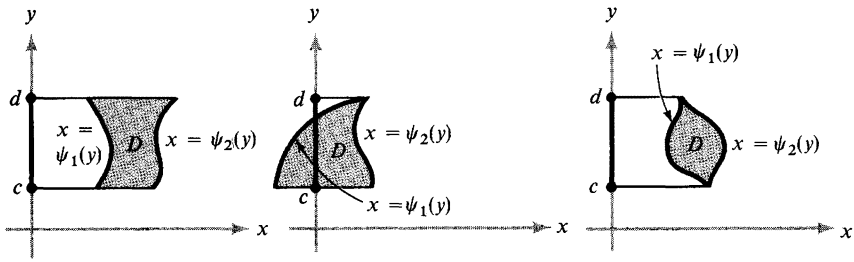


Figura 5.3.2 Algunas regiones del tipo 2.

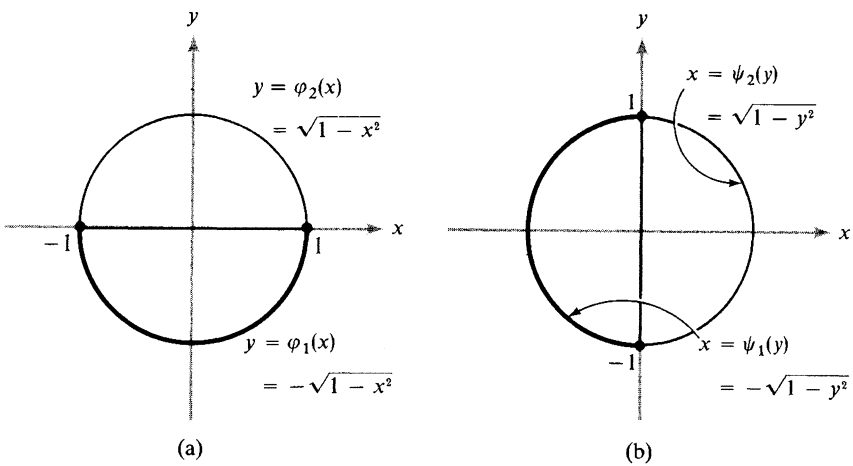


Figura 5.3.3 El disco unitario, una región de tipo 3: (a) como región del tipo 1 y (b) como región del tipo 2.

acotada), definir $\int_D f(x,y)\,dA$, *la* ***integral de*** f ***sobre el conjunto*** D *como sigue: extender* f *a una función* f^* *definida en todo* R *mediante*

$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y) \in D \\ 0 & (x,y) \notin D \quad \text{y} \quad (x,y) \in R \end{cases}$$

Ahora bien, f^* *está acotada (pues* f *lo está) y es continua, excepto quizá en la frontera de* D *(ver la figura 5.3.4). La frontera de* D *está formada por gráficas de funciones continuas, de modo que* f^* *es integrable sobre* R *por el teorema 2, sección 5.2. Por lo tanto, podemos definir*

$$\int_D f(x,y)\,dA = \int_R f^*(x,y)\,dA.$$

Cuando $f(x,y) \geq 0$ *en* D, *podemos interpretar la integral* $\int_D f(x,y)\,dA$ *como el volumen de la región tridimensional entre la gráfica de* f *y* D, *como es evidente en la figura 5.3.4.*

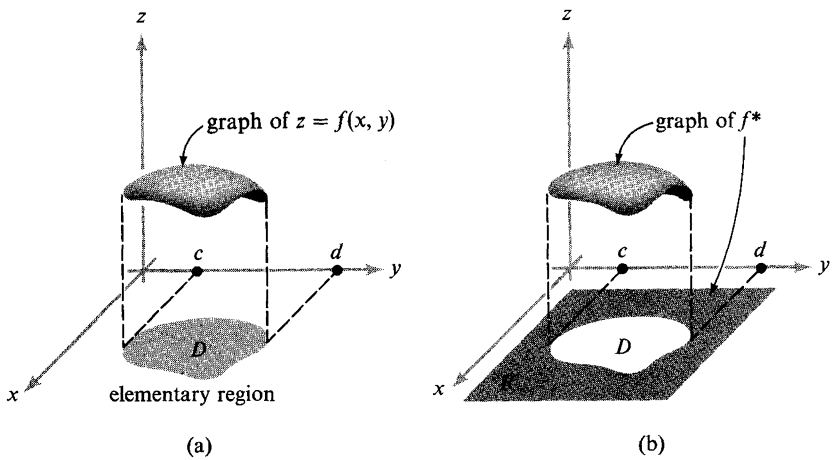


Figura 5.3.4 (a) Gráfica de $z = f(x, y)$ sobre una región elemental D. (b) La región sombreada muestra la gráfica de $z = f^*(x, y)$ en algún rectángulo R que contiene a D. En esta figura vemos que los puntos frontera de D pueden ser puntos de discontinuidad de f^*, pues la gráfica de $z = f^*(x, y)$ se puede romper en estos puntos.

Hemos definido $\int_D f(x, y)\, dx\, dy$ escogiendo un rectángulo R que incluya a D. Deberá ser intuitivamente claro que el valor de $\int_D f(x, y)\, dx\, dy$ no depende del R particular escogido; demostraremos este hecho al final de esta sección.

Si $R = [a, b] \times [c, d]$ es un rectángulo que contiene a D, podemos usar los resultados sobre integrales iteradas en la sección 5.2, para obtener

$$\int_D f(x, y)\, dA = \int_R f^*(x, y)\, dA = \int_a^b \int_c^d f^*(x, y)\, dy\, dx$$
$$= \int_c^d \int_a^b f^*(x, y)\, dx\, dy,$$

donde f^* es igual a f en D y cero fuera de D, como antes. Suponer que D es una región de tipo 1 determinada por funciones $\phi_1 \colon [a, b] \to \mathbf{R}$ y $\phi_2 \colon [a, b] \to \mathbf{R}$. Considerar la integral iterada

$$\int_a^b \int_c^d f^*(x, y)\, dy\, dx$$

y, en particular, la integral interior $\int_c^d f^*(x, y)\, dy$ para alguna x fija (figura 5.3.5). Como por definición $f^*(x, y) = 0$ si $y < \phi_1(x)$ o $y > \phi_2(x)$, obtenemos

$$\int_c^d f^*(x, y)\, dy = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f^*(x, y)\, dy = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\, dy.$$

A continuación resumimos lo obtenido.

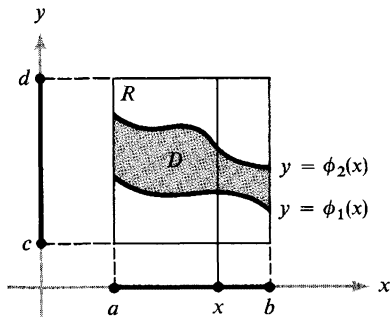


Figura 5.3.5 La región entre las dos gráficas —una región de tipo 1.

TEOREMA 4 *Si D es una región del tipo 1, como se muestra en la figura 5.3.5, entonces*

$$\int_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx. \tag{1}$$

En el caso $f(x,y) = 1$ para todo $(x,y) \in D$, $\int_D f(x,y)\,dA$ es el área de D. Podemos verificarlo para la fórmula (1) como sigue:

$$\int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b [\phi_2(x) - \phi_1(x)]\,dx = A(D),$$

la cual es la fórmula para el área de D que se aprende en cálculo elemental.

EJEMPLO 1 *Hallar $\int_T (x^3y + \cos x)\,dA$, donde T es el triángulo que consta de los puntos (x,y) tales que $0 \le x \le \pi/2$, $0 \le y \le x$.*

SOLUCIÓN Refiriéndonos a la figura 5.3.6 y a la fórmula (1), tenemos

$$\begin{aligned}
\int_T (x^3y + \cos x)\,dA &= \int_0^{\pi/2} (x^3y + \cos x)\,dy\,dx \\
&= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{x^3y^2}{2} + y\cos x\right]_{y=0}^{x} dx = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{x^5}{2} + x\cos x\right) dx \\
&= \left[\frac{x^6}{12}\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (x\cos x)\,dx = \frac{\pi^6}{(12)(64)} + [x\,\mathrm{sen}\,x + \cos x]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{\pi^6}{768} + \frac{\pi}{2} - 1. \qquad \blacktriangle
\end{aligned}$$

En el ejemplo siguiente usaremos la fórmula (1) para hallar el volumen de un sólido cuya base es una región D no rectangular.

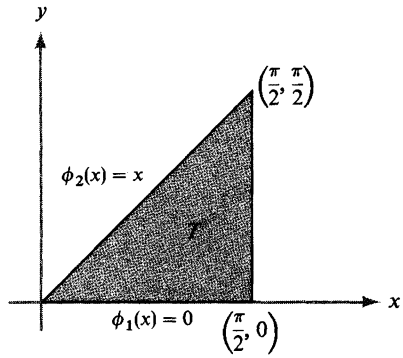


Figura 5.3.6 Triángulo T representado como región del tipo 1.

EJEMPLO 2 *Hallar el volumen del tetraedro acotado por los planos* $y = 0$, $z = 0$, $x = 0$ *y* $y - x + z = 1$ *(figura 5.3.7).*

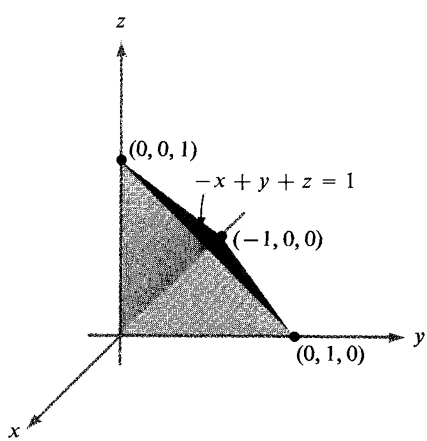


Figura 5.3.7 Tetraedro acotado por los planos $y = 0$, $z = 0$, $x = 0$ y $y - x + z = 1$.

SOLUCIÓN Notemos primero que el tetraedro dado tiene una base triangular D cuyos puntos (x, y) satisfacen $-1 \leq x \leq 0$ y $0 \leq y \leq 1 + x$; por lo tanto, D es una región de tipo 1. (De hecho, D es de tipo 3; ver la figura 5.3.8.)

Para cualquier punto (x, y) en D, la altura de la superficie z sobre (x, y) es $1 - y + x$. Así, el volumen que buscamos está dado por la integral

$$\int_D (1 - y + x)\, dA.$$

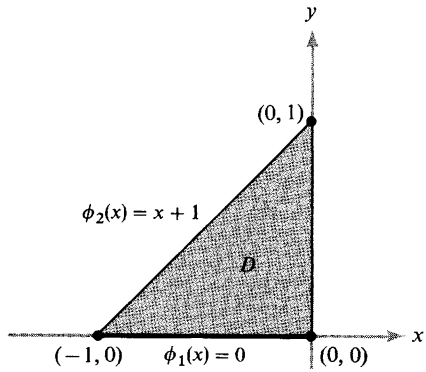


Figura 5.3.8 La base del tetraedro en la figura 5.3.7 representada como una región de tipo 1.

Usando la fórmula (1) con $\phi_1(x) = 0$ y $\phi_2(x) = x + 1$, tenemos

$$\begin{aligned}\int_D (1 - y + x)\, dA &= \int_{-1}^{0} \int_{0}^{1+x} (1 - y + x)\, dy\, dx \\ &= \int_{-1}^{0} \left[(1 + x)y - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{1+x} dx \\ &= \int_{-1}^{0} \left[\frac{(1 + x)^2}{2} \right] dx \\ &= \left[\frac{(1 + x)^3}{6} \right]_{-1}^{0} = \frac{1}{6}. \qquad \blacktriangle\end{aligned}$$

EJEMPLO 3 *Sea D una región de tipo 1. Describir su área $A(D)$ como límite de sumas de Riemann.*

SOLUCIÓN Si recordamos la definición, $A(D) = \int_D dx\, dy$ es la integral de la función $f = 1$, sobre un rectángulo R que contenga a D. Una suma de Riemann S_n para esta integral se obtiene dividiendo R en subrectángulos y formando la suma $S_n = \sum_{j,k=0}^{n-1} f^*(\mathbf{c}_{jk})\, \Delta x\, \Delta y$ como en la fórmula (1) de la sección 5.2. Ahora, $f^*(\mathbf{c}_{jk})$ es 1 o 0, dependiendo de si $\mathbf{c}_{jk}$ está o no en D. Considerar los subrectángulos R_{jk} que tengan intersección no vacía con D, y escoger $\mathbf{c}_{jk}$ en $D \cap R_{jk}$. Así, S_n es la suma de las áreas de los subrectángulos que tocan a D y $A(D)$ es el límite de éstos cuando $n \to \infty$. Así, $A(D)$ es el límite de las áreas de los rectángulos que "circunscriben" a D. El lector deberá trazar una figura simultáneamente con este estudio. ▲

Los métodos para tratar las regiones de tipo 2 son completamente análogos. Específicamente, tenemos el siguiente:

TEOREMA 4′ *Suponer que D es el conjunto de puntos (x, y) tales que $y \in [c, d]$ y $\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)$. Si f es continua en D, entonces*

$$\int_D f(y, x)\, dA = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx \right] dy. \tag{2}$$

Para hallar el área de D sustituimos $f = 1$ en la fórmula (2); obtenemos

$$\int_D dA = \int_c^d (\psi_2(y) - \psi_1(y))\, dy$$

Nótese de nuevo que este resultado para el área es consistente con los resultados de cálculo de una variable para el área de una región entre dos curvas.

Para las integrales sobre regiones del tipo 3 se puede usar indistintamente el método para regiones del tipo 1 o para regiones del tipo 2.

También se sigue de las fórmulas (1) y (2), que $\int_D f\, dA$ es independiente de la selección del rectángulo R que contiene a D, usado en la definición de $\int_D f\, dA$. Para verlo, consideremos el caso en que D es del tipo 1. Entonces se cumple la fórmula (1); más aún, R no aparece en el lado derecho de esta fórmula, por lo tanto, $\int_D f\, dA$ es independiente de R.

EJERCICIOS

1. Evaluar las siguientes integrales iteradas y trazar las regiones D determinadas por los límites. Decir si las regiones son del tipo 1, del tipo 2 o de ambos tipos.

(a) $\int_0^1 \int_0^{x^2} dy\, dx$ $\boxed{\text{(b)}}$ $\int_1^2 \int_{2x}^{3x+1} dy\, dx$

(c) $\int_0^1 \int_1^{e^x} (x + y)\, dy\, dx$ (d) $\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} y\, dy\, dx$

2. Repetir el ejercicio 1 para las siguientes integrales iteradas:

(a) $\int_{-3}^2 \int_0^{y^2} (x^2 + y)\, dx\, dy$ $\boxed{\text{(b)}}$ $\int_{-1}^1 \int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y}\, dy\, dx$

(c) $\int_0^1 \int_0^{(1-x^2)^{1/2}} dy\, dx$ (d) $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos x} y \operatorname{sen} x\, dy\, dx$

$\boxed{\text{(e)}}$ $\int_0^1 \int_{y^2}^{y} (x^n + y^m)\, dx\, dy, \quad m, n > 0$ (f) $\int_{-1}^0 \int_0^{2(1-x^2)^{1/2}} x\, dy\, dx$

3. Usar integrales dobles para calcular el área de un círculo de radio r.

$\boxed{\textbf{4.}}$ Usar integrales dobles para determinar el área de una elipse con semiejes de longitud a y b.

5. ¿Cuál es el volumen de un granero que tiene una base rectangular de 6 m por 12 m, y paredes verticales de 9 m de altura al frente (que está del lado que mide 6 m) y 12 m atrás? El granero tiene un techo plano. Usar integrales dobles para calcular el volumen.

6. Sea D la región acotada por las partes positivas de los ejes x y y, y la recta $3x + 4y = 10$. Calcular

$$\int_D (x^2 + y^2)\, dA.$$

7. Sea D la región acotada por el eje y y la parábola $x = -4y^2 + 3$. Calcular

$$\int_D x^3 y\, dx\, dy.$$

8. Evaluar $\int_0^1 \int_0^{x^2} (x^2+xy-y^2)\, dy\, dx$. Describir esta integral iterada como una integral sobre cierta región D en el plano xy.

9. Sea D la región dada como el conjunto de (x, y) donde $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$ y $y \geq 0$. ¿Es D una región elemental? Evaluar $\int_D f(x, y)\, dA$ donde $f(x, y) = 1 + xy$.

10. Usar integrales dobles para hallar el área rodeada por un periodo de la función $\operatorname{sen} x$, para $0 \leq x \leq 2\pi$, y el eje x.

11. Hallar el volumen de la región dentro de la superficie $z = x^2 + y^2$ y entre $z = 0$ y $z = 10$.

12. Calcular el volumen de un cono de base de radio r y altura h.

13. Evaluar $\int_D y\, dA$ donde D es el conjunto de puntos (x, y) tales que $0 \leq 2x/\pi \leq y$, $y \leq \operatorname{sen} x$.

14. Por el ejercicio 5, sección 5.2, sabemos que $\int_a^b \int_c^d f(x)g(y)\, dy\, dx = (\int_a^b f(x)\, dx) \times (\int_c^d g(y)\, dy)$. ¿Es cierto esto si integramos $f(x)g(y)$ sobre cualquier región D (por ejemplo, una región del tipo 1)?

15. Sea D una región dada como el conjunto de (x, y) con $-\phi(x) \leq y \leq \phi(x)$ y $a \leq x \leq b$, donde ϕ es una función no negativa continua en el intervalo $[a, b]$. Sea $f(x, y)$ una función definida en D, tal que $f(x, y) = -f(x, -y)$ para todo $(x, y) \in D$. Hacer ver que $\int_D f(x, y)\, dA = 0$.

16. Usar los métodos de esta sección para mostrar que el área del paralelogramo D determinado por los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ es $|a_1b_2 - a_2b_1|$, donde $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$.

17. Describir el área $A(D)$ de una región como límite de áreas de rectángulos inscritos, como en el ejemplo 3.

5.4 CAMBIO EN EL ORDEN DE INTEGRACIÓN

Suponer que D es una región de tipo 3. Así, al ser del tipo 1 y del tipo 2, puede expresarse como el conjunto de puntos (x, y) tales que

$$a \leq x \leq b, \qquad \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)$$

y también como el conjunto de puntos (x, y) tales que

$$c \leq y \leq d, \qquad \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y).$$

Por lo tanto, tenemos las fórmulas

$$\int_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Si vamos a calcular una de las anteriores integrales iteradas, lo podemos hacer evaluando la otra; esta técnica se llama *cambio del orden de integración*. Suele ser útil realizar estos cambios al evaluar integrales iteradas, pues quizá una de las integrales iteradas sea más difícil de calcular que la otra.

EJEMPLO *Evaluar*

$$\int_0^a \int_0^{(a^2-x^2)^{1/2}} (a^2 - y^2)^{1/2}\,dy\,dx$$

cambiando el orden de integración.

SOLUCIÓN Nótese que x varía entre 0 y a, y que, para x fija, $0 \leq y \leq (a^2 - x^2)^{1/2}$. Así, la integral iterada es equivalente a la integral doble

$$\int_D (a^2 - y^2)^{1/2}\,dy\,dx,$$

donde D es el conjunto de puntos (x, y) tales que $0 \leq x \leq a$ y $0 \leq y \leq (a^2 - x^2)^{1/2}$. Pero ésta es la representación de un cuarto (la parte del cuadrante positivo) del disco de radio a; por lo tanto D también se puede describir como el conjunto de puntos (x, y) que satisface

$$0 \leq y \leq a, \qquad 0 \leq x \leq (a^2 - y^2)^{1/2}$$

(ver la figura 5.4.1). Así,

$$\begin{aligned}
\int_0^a \int_0^{(a^2-x^2)^{1/2}} (a^2 - y^2)^{1/2}\,dy\,dx &= \int_0^a \left[\int_0^{(a^2-y^2)^{1/2}} (a^2 - y^2)^{1/2}\,dx\right] dy \\
&= \int_0^a \left[x(a^2 - y^2)^{1/2}\right]_{x=0}^{(a^2-y^2)^{1/2}} dy \\
&= \int_0^a (a^2 - y^2)\,dy = \left[a^2 y - \frac{y^3}{3}\right]_0^a = \frac{2a^3}{3}. \qquad \blacktriangle
\end{aligned}$$

Pudimos haber evaluado directamente la integral iterada inicial, pero, como puede verificar fácilmente el lector, al cambiar el orden de integración se facilitó el problema. El ejemplo siguiente muestra que, incluso, puede ser "imposible" evaluar una integral iterada y, sin embargo, ser posible evaluar la integral iterada obtenida al cambiar el orden de integración.

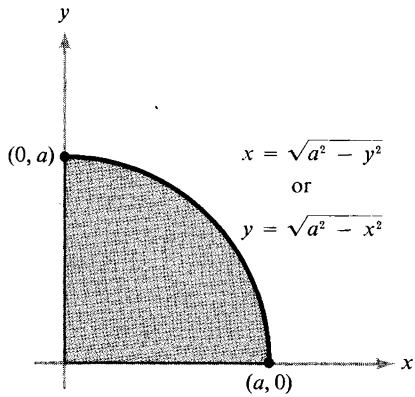


Figura 5.4.1 La parte del cuadrante positivo de un disco de radio a.

EJEMPLO 2 *Evaluar*

$$\int_1^2 \int_0^{\log x} (x-1)\sqrt{1+e^{2y}}\, dy\, dx.$$

SOLUCIÓN Primero, observar que no se puede calcular esta integral, en el orden dado, usando el teorema fundamental. Sin embargo, la integral es igual a $\int_D (x-1)\sqrt{1+e^{2y}}\, dA$, donde D es el conjunto de (x, y) tales que

$$1 \leq x \leq 2 \qquad \text{y} \qquad 0 \leq y \leq \log x.$$

La región D es del tipo 3 (ver la figura 5.4.2) y por lo tanto puede expresarse como

$$0 \leq y \leq \log 2 \qquad \text{y} \qquad e^y \leq x \leq 2.$$

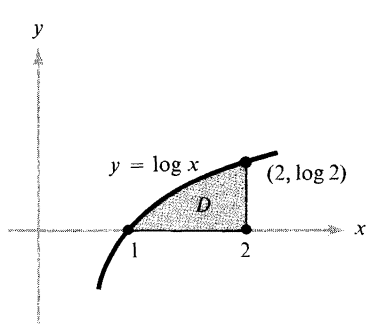


Figura 5.4.2 D es la región de integración para el ejemplo 2.

Así, la integral iterada dada es igual a

$$\begin{aligned}\int_0^{\log 2}\int_{e^y}^2 (x-1)\sqrt{1+e^{2y}}\,dx\,dy &= \int_0^{\log 2}\sqrt{1+e^{2y}}\left[\int_{e^y}^2 (x-1)\,dx\right]dy\\ &= \int_0^{\log 2}\sqrt{1+e^{2y}}\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_{e^y}^2 dy\\ &= -\int_0^{\log 2}\left(\frac{e^{2y}}{2}-e^y\right)\sqrt{1+e^{2y}}\,dy\\ &\quad -\frac{1}{2}\int_0^{\log 2} e^{2y}\sqrt{1+e^{2y}}\,dy\\ &\quad +\int_0^{\log 2} e^y\sqrt{1+e^{2y}}\,dy. \qquad (1)\end{aligned}$$

En la primera integral en la expresión (1) sustituimos $u = e^{2y}$, y en la segunda, $v = e^y$. Entonces obtenemos

$$-\frac{1}{4}\int_1^4 \sqrt{1+u}\,du + \int_1^2 \sqrt{1+v^2}\,dv. \qquad (2)$$

Ambas integrales en la expresión (2) se pueden hallar fácilmente con las técnicas de cálculo (o consultando la tabla de integrales al final del libro). Para la primera integral, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\int_1^4 \sqrt{1+u}\,du &= [\tfrac{1}{6}(1+u)^{3/2}]_1^4 = \tfrac{1}{6}[(1+4)^{3/2}-2^{3/2}]\\ &= \tfrac{1}{6}[5^{3/2}-2^{3/2}]. \qquad (3)\end{aligned}$$

La segunda integral es

$$\begin{aligned}\int_1^2 \sqrt{1+v^2}\,dv &= \tfrac{1}{2}[v\sqrt{1+v^2}+\log(\sqrt{1+v^2}+v)]_1^2\\ &= \tfrac{1}{2}[2\sqrt{5}+\log(\sqrt{5}+2)]-\tfrac{1}{2}[\sqrt{2}+\log(\sqrt{2}+1)] \qquad (4)\end{aligned}$$

(ver la fórmula 43 en la tabla de integrales). Finalmente, restamos la ecuación (3) de la ecuación (4) para obtener la respuesta

$$\frac{1}{2}\left(2\sqrt{5}-\sqrt{2}+\log\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{2}+1}\right)-\frac{1}{6}[5^{3/2}-2^{3/2}]. \qquad \blacktriangle$$

Para concluir esta sección mencionamos un importante resultado análogo al teorema del valor medio del cálculo integral.

TEOREMA 5: TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA INTEGRALES DOBLES *Suponer que $f: D \to \mathbf{R}$ es continua y D es una región elemental. Entonces para algún punto (x_0, y_0) en D, tenemos*

$$\int_D f(x,y)\,dA = f(x_0, y_0)A(D),$$

donde $A(D)$ denota el área de D.

DEMOSTRACIÓN No podemos probar este teorema con todo rigor, pues se requiere de algunos resultados sobre funciones continuas que no se han demostrado en este libro; pero podemos esbozar las ideas principales que sustentan la demostración (ver la demostración de la versión para una variable en la página 245.

Como f es continua en D, tiene un valor máximo M y un valor mínimo m (ver el teorema 6 en la página 260). Así,

$$m \leq f(x,y) \leq M \tag{5}$$

para todo $(x,y) \in D$. Más aún, $f(x_1, y_1) = m$ y $f(x_2, y_2) = M$ para algunos pares (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en D. De la desigualdad (5) se sigue que

$$mA(D) = \int_D m\,dA \leq \int_D f(x,y)\,dA \leq \int_D M\,dA = MA(D).$$

Por lo tanto, dividiendo todo entre $A(D)$, obtenemos

$$m \leq \frac{1}{A(D)} \int_D f(x,y)\,dA \leq M. \tag{6}$$

Como una función continua definida en D toma todos los valores entre sus valores máximo y mínimo (éste es el teorema del valor intermedio que se demuestra en cálculo avanzado), y como el número $[1/A(D)] \int_D f(x,y)\,dA$ está por la desigualdad (6) entre estos valores, debe haber un punto $(x_0, y_0) \in D$ con

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{A(D)} \int_D f(x,y)\,dA.$$

Pero ésta es precisamente la conclusión del teorema 5. ■

EJERCICIOS

1. En las integrales siguientes, cambiar el orden de integración, esbozar las regiones correspondientes y evaluar las integrales de las dos maneras.

(a) $\int_0^1 \int_x^1 xy\,dy\,dx$

(b) $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos\theta} \cos\theta\,dr\,d\theta$

(c) $\int_0^1 \int_1^{2-y} (x+y)^2 \, dx \, dy$

(d) $\int_a^b \int_a^y f(x,y) \, dx \, dy$ (expresar la respuesta en términos de antiderivadas).

2. Hallar

(a) $\int_{-1}^1 \int_{|y|}^1 (x+y)^2 \, dx \, dy$ (b) $\int_{-3}^1 \int_{-\sqrt{(9-y^2)}}^{\sqrt{(9-y^2)}} x^2 \, dx \, dy$

(c) $\int_0^4 \int_{y/2}^2 e^{x^2} \, dx \, dy$ (d) $\int_0^1 \int_{\tan^{-1} y}^{\pi/4} (\sec^5 x) \, dx \, dy$

3. Si $f(x,y) = e^{\operatorname{sen}(x+y)}$ y $D = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$, mostrar que

$$\frac{1}{e} \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_D f(x,y) \, dA \leq e.$$

4. Mostrar que $\frac{1}{2}(1 - \cos 1) \leq \displaystyle\int_{[0,1]\times[0,1]} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + (xy)^4} \, dx \, dy \leq 1.$

5. Si $D = [-1,1] \times [-1,2]$, mostrar que $1 \leq \displaystyle\int_D \frac{dx \, dy}{x^2 + y^2 + 1} \leq 6.$

6. Usando el teorema del valor medio, mostrar que

$$\frac{1}{6} \leq \int_D \frac{dA}{y - x + 3} \leq \frac{1}{4},$$

donde D es el triángulo con vértices $(0,0)$, $(1,1)$ y $(1,0)$.

7. Calcular el volumen de un elipsoide con semiejes a, b y c. (IDEA: Usar la simetría y hallar primero el volumen de medio elipsoide.)

8. Calcular $\int_D f(x,y) \, dA$, donde $f(x,y) = y^2\sqrt{x}$ y D es el conjunto de (x,y) donde $x > 0$, $y > x^2$ y $y < 10 - x^2$.

9. Hallar el volumen de la región determinada por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 10$, $z \geq 2$. Usar el método del disco del cálculo de una variable, y decir cómo está relacionado el método con el principio de Cavalieri.

10. Evaluar $\iint_D e^{x-y} \, dx \, dy$, donde D es el interior del triángulo con vértices $(0,0)$, $(1,3)$ y $(2,2)$.

11. Evaluar $\iint_D y^3 (x^2 + y^2)^{-3/2} \, dx \, dy$, donde D es la región determinada por las condiciones $\frac{1}{2} \leq y \leq 1$ y $x^2 + y^2 \leq 1$.

12. Dado que la integral doble $\iint_D f(x,y) \, dx \, dy$ de una función continua positiva f es igual a la integral iterada $\int_0^1 [\int_{x^2}^x f(x,y) \, dy] dx$, esbozar la región D e intercambiar el orden de integración.

13. Dado que la integral doble $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ de una función continua positiva f es igual a la integral iterada $\int_0^1 [\int_y^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)]\,dx\,dy$, esbozar la región D e intercambiar el orden de integración.

14. Probar que $2\int_a^b \int_x^b f(x)f(y)\,dy\,dx = (\int_a^b f(x)\,dx)^2$. [IDEA: Notar que $(\int_a^b f(x)\,dx)^2 = \int_{[a,b]\times[a,b]} f(x)f(y)\,dx\,dy$.]

15. Mostrar que

$$\frac{d}{dx}\int_a^x \int_c^d f(x,y,z)\,dz\,dy = \int_c^d f(x,x,z)\,dz + \int_a^x \int_c^d f_x(x,y,z)\,dz\,dy.$$

SECCIÓN OPTATIVA

*5.5 ALGUNOS TEOREMAS TÉCNICOS DE INTEGRACIÓN

Esta sección proporciona las ideas principales de las demostraciones de existencia y aditividad de la integral que se enunciaron en la sección 5.2. Estas demostraciones requieren conceptos más avanzados que los necesarios para el resto de este capítulo. Se mencionan aquí los conceptos de continuidad uniforme y de plenitud (o compleción) de los números reales, que usualmente se estudian en un curso introductorio de análisis matemático o de teoría de variable real.

DEFINICIÓN *Sean $D \subset \mathbf{R}^n$ y $f: D \to \mathbf{R}$. Recordar que f es* ***continua en*** $\mathbf{x}_0 \in D$ *si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que si $\mathbf{x} \in D$ y $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$, entonces $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$. Decimos que f es* ***continua en*** *D si es continua en cada punto de D.*

La función f es ***uniformemente continua*** *en D si para todo número $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y} \in D$ y $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta$, entonces $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| < \varepsilon$.*

La diferencia principal entre continuidad y continuidad uniforme es que para la continuidad, es posible que δ dependa de $\mathbf{x}_0$, mientras que en la continuidad uniforme, δ sólo depende de ε. Así, cualquier función uniformemente continua también es continua. En el ejercicio 2 se da un ejemplo de función continua que no es uniformemente continua. Es posible reescribir la diferencia entre los conceptos de continuidad y continuidad uniforme: para una función f que sea continua pero no uniformemente continua, δ no se puede escoger independiente del punto del dominio (el $\mathbf{x}_0$ en la definición). La definición de continuidad uniforme afirma de manera explícita que una vez escogido $\varepsilon > 0$, se puede hallar δ independiente de cualquier punto de D.

Recordar de la sección 4.2 que un conjunto $D \subset \mathbf{R}^n$ *está* ***acotado*** *si existe un número $M > 0$ tal que $\|\mathbf{x}\| \leq M$ para todo $\mathbf{x} \in D$. Un conjunto es* ***cerrado*** *si contiene a todos sus puntos frontera.* Así, un conjunto está acotado si es posible colocarlo dentro de alguna bola (aunque sea grande). El teorema siguiente afirma que bajo algunas condiciones, una función continua es en realidad uniformemente continua.

TEOREMA 6: PRINCIPIO DE CONTINUIDAD UNIFORME *Toda función que sea continua en un conjunto cerrado y acotado D en $\mathbf{R}^n$, es uniformemente continua en D.*

Demostrar este teorema nos alejará bastante del tema que estamos tratando;* sin embargo, podemos probar un caso especial que, de hecho, es suficiente para la mayoría de las situaciones importantes en este libro.

DEMOSTRACIÓN DE UN CASO ESPECIAL DEL TEOREMA 6 Supongamos que $D = [a, b]$ es un intervalo cerrado en la recta, que $f: D \to \mathbf{R}$ es continua, que existe df/dx en el intervalo abierto (a, b) y que df/dx está acotada (esto es, que existe una constante $C > 0$ tal que $|(df/dx)(x)| \leq C$ para toda x en (a, b)). Para mostrar que estas condiciones implican que f es uniformemente continua, usamos el teorema del valor medio como sigue: sea $\varepsilon > 0$ dado y sean x y y en D. Entonces, por el teorema del valor medio,

$$f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$$

para alguna c entre x y y. Por la hipótesis de acotación de la derivada,

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|.$$

Sea $\delta = \varepsilon/C$. Si $|x - y| < \delta$, entonces

$$|f(x) - f(y)| < C\frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon.$$

Así, f es uniformemente continua. (Nótese que δ no depende de x ni de y, lo cual es la parte delicada de la definición.) ■

Esta demostración también funciona para regiones en $\mathbf{R}^n$ que sean convexas; esto es, que para cualesquiera dos puntos $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ en D, el segmento de recta $\boldsymbol{\sigma}(t) = t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}$, $0 \leq t \leq 1$, que los une también está en D. Suponemos que f es diferenciable (en algún conjunto abierto que contenga a D) y que $\|\nabla f(\mathbf{x})\| \leq C$ para alguna constante C. Entonces el teorema del valor medio, aplicado a la función $h(t) = f(\boldsymbol{\sigma}(t))$, da

$$h(1) - h(0) = [h'(c)][1 - 0]$$

o

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}) = h'(c) = \nabla f(\boldsymbol{\sigma}(c)) \cdot \boldsymbol{\sigma}'(c) = \nabla f(\boldsymbol{\sigma}(c)) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

por la regla de la cadena. Así, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq \|\nabla f(\boldsymbol{\sigma}(c))\| \, \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq C\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Entonces, como antes, dado $\varepsilon > 0$, podemos hacer $\delta = \varepsilon/C$.

---

*Se puede hallar la demostración en cualquier libro de análisis matemático. Ver, por ejemplo, J. Marsden, *Elementary Classical Analysis*, Freeman, Nueva York, 1974; o W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3a ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1976.

Pasemos ahora al concepto de *sucesión de Cauchy* de números reales. Recordemos que en la definición de las sumas de Riemann obtuvimos una sucesión de números $\{S_n\}$, $n = 1, \ldots$. Sería bueno que pudiéramos decir que esta sucesión converge a S (o que tiene límite S), pero ¿cómo podemos obtener dicho límite? En el planteamiento abstracto, no sabemos de S_n más que es una suma de Riemann de una función (digamos, continua), y, aunque no se ha demostrado, esta información deberá ser suficiente para asegurar su convergencia.

Así, debemos determinar una propiedad para sucesiones que garantice su convergencia. Definiremos una clase de sucesiones llamadas sucesiones de Cauchy, y después tomaremos como axioma del sistema de los números reales que dichas sucesiones convergen a un límite.* La determinación tomada en el siglo XIX de que era necesario dicho axioma para los fundamentos del cálculo, fue un avance importante en la historia de las matemáticas y preparó el camino para el enfoque riguroso moderno del análisis matemático. En breve diremos más al respecto.

DEFINICIÓN *Una sucesión de números reales* $\{S_n\}$, $n = 1, \ldots$, *satisface el* ***criterio de Cauchy*** *si para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* N *tal que para todo* m *y* $n \geq N$, $|S_n - S_m| < \varepsilon$.

Si una sucesión S_n converge a un límite S, entonces S_n es una sucesión de Cauchy. Para verlo, recordar la definición: para todo $\varepsilon > 0$ existe N tal que para todo $n \geq N$, $|S_n - S| < \varepsilon$. Dado $\varepsilon > 0$, escoger N_1 tal que para $n \geq N_1$, $|S_n - S| < \varepsilon/2$ (usar la definición con $\varepsilon/2$ en lugar de ε). Entonces si n y $m \geq N_1$, $|S_n - S_m| = |S_n - S + S - S_m| \leq |S_n - S| + |S - S_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, lo cual prueba nuestra afirmación. El axioma de plenitud asegura que también se cumple el recíproco:

AXIOMA DE PLENITUD DE LOS NÚMEROS REALES *Toda sucesión de Cauchy* $\{S_n\}$ *converge a algún límite* S.

NOTA HISTÓRICA

Augustin Louis Cauchy (1789–1857), uno de los más grandes matemáticos de todos los tiempos, definió lo que ahora llamamos sucesiones de Cauchy en su *Cours d'analyse*, publicado en 1821. Este libro fue un trabajo básico para los fundamentos del análisis, aunque según los patrones actuales se consideraría no muy riguroso. Cauchy sabía que una sucesión convergente era "de Cauchy", y observó que una sucesión de Cauchy converge. No tenía una demostración, y no pudo haberla tenido pues dicha demostración depende del desarrollo riguroso del sistema de los números reales, que hasta 1872 logró el matemático alemán Georg Cantor (1845–1918).

---

*En los libros de análisis matemático como los mencionados en la nota anterior se usan, a veces, axiomas diferentes, como la propiedad de la mínima cota superior. En dicho planteamiento, nuestro axioma de plenitud se convierte en teorema.

Ahora ya está claro lo que debemos hacer para asegurar que las sumas de Riemann $\{S_n\}$ de, digamos, una función continua definida en un rectángulo converge a algún límite S, lo cual probaría que las funciones continuas en rectángulos son integrables; *debemos mostrar que* $\{S_n\}$ *es una sucesión de Cauchy.* Para demostrarlo se usa el principio de continuidad uniforme. La integrabilidad de las funciones continuas será una consecuencia de los dos lemas siguientes.

LEMA 1 *Sea f una función continua en un rectángulo R en el plano, y sea $\{S_n\}$ una sucesión de sumas de Riemann para f. Entonces $\{S_n\}$ converge a algún número S.*

DEMOSTRACIÓN Dado un rectángulo $R \subset \mathbf{R}^2$, $R = [a,b] \times [c,d]$, tenemos la partición regular de R $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$, estudiada en la sección 5.2. Recordar que

$$\Delta x = x_{j+1} - x_j = \frac{b-a}{n}, \qquad \Delta y = y_{k+1} - y_k = \frac{d-c}{n},$$

y

$$S_n = \sum_{j,k=0}^{n-1} f(\mathbf{c}_{jk})\Delta x \Delta y,$$

donde $\mathbf{c}_{jk}$ es un punto escogido de manera arbitraria en $R_{jk} = [x_j, x_{j+1}] \times [y_k, y_{k+1}]$. La sucesión $\{S_n\}$ está determinada sólo por la selección de los puntos $\mathbf{c}_{jk}$.

Para propósitos de la demostración introduciremos una notación un poco más complicada pero muy precisa: sea

$$\Delta x^n = \frac{b-a}{n}$$

y

$$\Delta y^n = \frac{d-c}{n}.$$

Con esta notación, tenemos

$$S_n = \sum_{j,k=0}^{n-1} f(\mathbf{c}_{jk})\Delta x^n \Delta y^n. \tag{1}$$

Para mostrar que $\{S_n\}$ satisface el criterio de Cauchy, debemos mostrar que dado $\varepsilon > 0$ existe N tal que para todo n, $m \geq N$, $|S_n - S_m| \leq \varepsilon$. Por el principio de continuidad uniforme, f es uniformemente continua en R. Así, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que cuando $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in R$, $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta$, entonces $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon/[2\,\text{área}\,(R)]$ (se usa $\varepsilon/[2\,\text{área}\,(R)]$ en lugar de ε en la definición). Sea N lo suficientemente grande para que si $m \geq N$, el diámetro (longitud de una diagonal) de cualquier subrectángulo R_{jk} en la m-ésima partición regular de R sea menor que δ. Así, si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son puntos en el mismo subrectángulo, tendremos que $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon/[2\,\text{área}\,(R)]$.

Fijar m y $n \geq N$. Mostraremos que $|S_n - S_m| < \varepsilon$. Esto muestra que $\{S_n\}$ es una sucesión de Cauchy y por lo tanto converge. Considerar la mn-ésima = (m por n)-ésima partición regular de R. Entonces

$$S_{mn} = \sum_{r,t} f(\tilde{\mathbf{c}}_{rt})\Delta x^{mn}\Delta y^{mn},$$

donde $\tilde{\mathbf{c}}_{rt}$ es un punto en el rt-ésimo rectángulo. Nótese que cada subrectángulo de la mn-ésima partición es un subrectángulo tanto de la m-ésima como de la n-ésima partición regular (ver la figura 5.5.1).

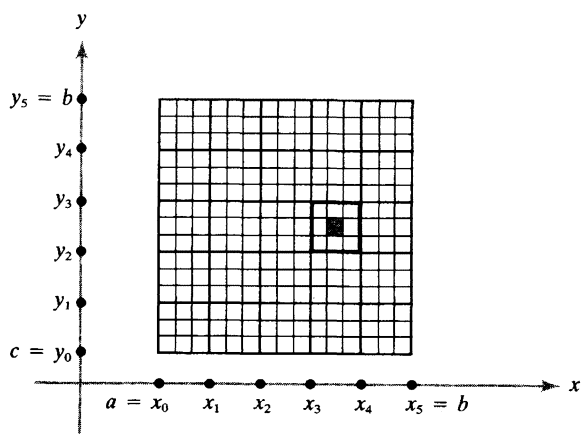


Figura 5.5.1 La caja sombreada muestra un subrectángulo en la mn-ésima partición, y la caja marcada con línea gruesa, un subrectángulo en la m-ésima partición.

Denotemos los subrectángulos en la mn-ésima subdivisión por $\tilde{R}_{rt}$ y los de la n-ésima subdivisión por R_{jk}. Así, cada $\tilde{R}_{rt} \subset R_{jk}$ para algún jk, y por lo tanto podemos reescribir la fórmula (1) como

$$S_n = \sum_{j,k}^{n-1} \left(\sum_{\tilde{\mathbf{R}}_{rt} \subset \mathbf{R}_{jk}} f(\mathbf{c}_{jk})\Delta x^{mn}\Delta y^{mn} \right). \tag{1'}$$

Aquí estamos usando el hecho de que

$$\sum_{\tilde{\mathbf{R}}_{rt} \subset \mathbf{R}_{jk}} f(\mathbf{c}_{jk})\Delta x^{mn}\Delta y^{mn} = f(\mathbf{c}_{jk})\Delta x^{n}\Delta y^{n},$$

donde la suma se toma sobre todos los subrectángulos en la mn-ésima subdivisión contenidos en un rectángulo *fijo* R_{jk} en la n-ésima subdivisión. También tenemos la identidad

$$S_{mn} = \sum_{r,t}^{mn-1} f(\tilde{\mathbf{c}}_{rt})\Delta x^{mn}\Delta y^{mn}. \tag{2}$$

Esta relación también se puede reescribir como

$$S_{mn} = \sum_{j,k} \sum_{\tilde{\mathbf{R}}_{rt} \subset \mathbf{R}_{jk}} f(\tilde{\mathbf{c}}_{rt}) \Delta x^{mn} \Delta y^{mn}, \tag{2'}$$

donde en la ecuación (2′) primero sumamos sobre los subrectángulos en la mn-ésima partición contenidos en un R_{jk} fijo y después sumamos sobre j, k. Al restar la ecuación (2′) de la ecuación (1′), obtenemos

$$\begin{aligned} |S_n - S_{mn}| &= \left| \sum_{j,k} \sum_{\tilde{\mathbf{R}}_{rt} \subset \mathbf{R}_{jk}} [f(\mathbf{c}_{jk}) \Delta x^{mn} \Delta y^{mn} - f(\tilde{\mathbf{c}}_{rt}) \Delta x^{mn} \Delta y^{mn}] \right| \\ &\leq \sum_{j,k} \sum_{\tilde{\mathbf{R}}_{rt} \subset \mathbf{R}_{jk}} |f(\mathbf{c}_{jk}) - f(\tilde{\mathbf{c}}_{rt})| \Delta x^{mn} \Delta y^{mn}. \end{aligned}$$

Debido a la selección de δ y N, $|f(\mathbf{c}_{jk} - f(\tilde{\mathbf{c}}_{rt})| < \varepsilon/[2\,\text{área}\,(R)]$, y en consecuencia la desigualdad anterior se convierte en

$$|S_n - S_{mn}| \leq \sum_{j,k} \sum_{\tilde{\mathbf{R}}_{rt} \subset \mathbf{R}_{jk}} \frac{\varepsilon}{2\,\text{área}(R)} \Delta x^{mn} \Delta y^{mn} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Así, $|S_n - S_{mn}| < \varepsilon/2$ y de manera análoga se muestra que $|S_m - S_{mn}| < \varepsilon/2$. Como

$$|S_n - S_m| = |S_n - S_{mn} + S_{mn} - S_m| \leq |S_n - S_{mn}| + |S_{mn} - S_m| < \varepsilon$$

para m, $n \geq N$, hemos mostrado que $\{S_n\}$ satisface el criterio de Cauchy y así, tiene límite S. ■

Hemos observado que cada suma de Riemann depende de la selección de una colección de puntos $\mathbf{c}_{jk}$. Para mostrar que una función continua en un rectángulo R es integrable, debemos demostrar que el límite S obtenido en el lema 1 es independiente de la selección de los puntos $\mathbf{c}_{jk}$.

LEMA 2 *El límite S en el lema 1 no depende de la selección de puntos $\mathbf{c}_{jk}$.*

DEMOSTRACIÓN Supongamos que tenemos dos sucesiones de sumas de Riemann $\{S_n\}$ y $\{S_n^*\}$ obtenidas al seleccionar dos conjuntos diferentes de puntos, digamos $\mathbf{c}_{jk}$ y $\mathbf{c}_{jk}^*$ en cada n-ésima partición. Por el lema 1 sabemos que $\{S_n\}$ converge a algún número S y $\{S_n^*\}$ también debe converger a algún número, digamos S^*. Queremos mostrar que $S = S^*$, y lo haremos mostrando que dado cualquier $\varepsilon > 0$, $|S - S^*| < \varepsilon$, lo cual implica que S debe ser igual a S^* (¿por qué?).

Para comenzar, sabemos que f es uniformemente continua en R. En consecuencia, dado $\varepsilon > 0$, existe δ tal que $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon/[3\,\text{área}\,(R)]$ cuando $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta$. Escogemos N lo suficientemente grande para que si $n \geq N$ el diámetro de cada subrectángulo en la n-ésima partición regular sea menor que δ. Como $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ y $\lim_{n\to\infty} S_n^* = S^*$, podemos suponer que N se ha escogido tan grande para que $n \geq N$ implique que $|S_n - S| < \varepsilon/3$ y $|S_n^* - S^*| < \varepsilon/3$. Además, para $n \geq N$ sabemos, por continuidad uniforme, que si $\mathbf{c}_{jk}$ y $\mathbf{c}_{jk}^*$ son puntos en el mismo subrectángulo R_{jk} de

la n-ésima partición, entonces $|f(\mathbf{c}_{jk}) - f(\mathbf{c}^*_{jk})| < \varepsilon/[3\,\text{área}\,(R)]$. Así,

$$\begin{aligned}|S_n - S_n^*| &= \left|\sum_{j,k} f(\mathbf{c}_{jk})\Delta x^n \Delta y^n - \sum_{j,k} f(\mathbf{c}^*_{jk})\Delta x^n \Delta y^n\right| \\ &\leq \sum_{j,k} |f(\mathbf{c}_{jk}) - f(\mathbf{c}^*_{jk})|\Delta x^n \Delta y^n < \frac{\varepsilon}{3}.\end{aligned}$$

Escribimos ahora

$$\begin{aligned}|S - S^*| &= |S - S_n + S_n - S_n^* + S_n^* - S^*| \\ &\leq |S - S_n| + |S_n - S_n^*| + |S_n^* - S| < \varepsilon\end{aligned}$$

de modo que el lema queda demostrado. ■

Juntos, los lemas 1 y 2 prueban el teorema 1 de la sección 5.2:

TEOREMA 1 *Cualquier función continua definida sobre un rectángulo R es integrable.*

NOTA HISTÓRICA

Cauchy presentó la primera demostración publicada de este teorema en su *résumé* de 1823, en el cual señala la necesidad de probar la existencia de la integral como límite de una suma. En este artículo trata primero las funciones continuas (como lo estamos haciendo ahora), pero en un intervalo $[a, b]$. (La demostración es esencialmente la misma.) Sin embargo, su demostración no era rigurosa pues carecía del concepto de continuidad uniforme, que no existía en ese tiempo.

El concepto de suma de Riemann S_n para una función f es, con certeza, anterior a Bernhard Riemann (1826-1866). Las sumas llevan su nombre probablemente porque él desarrolló un enfoque teórico para el estudio de la integración en un artículo fundamental acerca de series trigonométricas en 1854. Su enfoque, aunque fue generalizado posteriormente por Darboux (1875) y Stieltjes (1894), se mantuvo por más de medio siglo hasta que fue rebasado por la teoría que presentó Lebesgue al mundo matemático en 1902. Este último enfoque a la teoría de la integración se estudia, por lo general, en cursos de matemáticas para graduados.

La demostración del teorema 2 (sección 5.2) se deja al lector en los ejercicios 4 al 6 al final de esta sección. Las ideas principales están contenidas esencialmente en la demostración del teorema 1, aunque la demostración del teorema 2 contiene una dificultad adicional.

Nuestro siguiente objetivo será presentar una demostración de la propiedad (iv) de la integral en la página 319, a saber, su aditividad. Sin embargo, debido a algunas dificultades técnicas para probar estos resultados en toda su generalidad, lo probaremos sólo en el caso en que f es continua.

TEOREMA: ADITIVIDAD DE LA INTEGRAL *Sean R_1 y R_2 dos rectángulos ajenos (rectángulos cuya intersección no contiene rectángulos) tales que $Q = R_1 \cup R_2$ es de nuevo un rectángulo, como en la figura 5.5.2. Si f es una función continua sobre Q, de modo que lo es sobre cada R_i, entonces*

$$\int_Q f = \int_{R_1} f + \int_{R_2} f. \tag{3}$$

DEMOSTRACIÓN La demostración depende de las ideas que ya se presentaron en la demostración del teorema 1.

El hecho de que f sea integrable sobre Q, R_1 y R_2, se sigue del teorema 1. Así, existen las tres integrales de la ecuación (3), y falta sólo probar la igualdad.

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $R_1 = [a, b_1] \times [c, d]$ y $R_2 = [b_1, b] \times [c, d]$ (ver la figura 5.5.2). De nuevo, es necesario desarrollar alguna notación. Sea

$$\Delta x_1^n = \frac{b_1 - a}{n}, \qquad \Delta x_2^n = \frac{b - b_1}{n}, \qquad \Delta x^n = \frac{b - a}{n} \qquad \text{y} \qquad \Delta y^n = \frac{d - c}{n}.$$

Sea

$$S_n^1 = \sum_{j,k} f(\mathbf{c}_{jk}^1)\Delta x_1^n \Delta y^n \tag{4}$$

$$S_n^2 = \sum_{j,k} f(\mathbf{c}_{jk}^2)\Delta x_2^n \Delta y^n \tag{5}$$

$$S_n = \sum_{j,k} f(\mathbf{c}_{jk})\Delta x^n \Delta y^n \tag{6}$$

donde $\mathbf{c}_{jk}^1$, $\mathbf{c}_{jk}^2$ y $\mathbf{c}_{jk}$ son puntos en el jk-ésimo subrectángulo de la n-ésima partición regular de R_1, R_2 y Q, respectivamente. Sea $S^i = \lim\limits_{n\to\infty} S_n^i$, donde $i = 1, 2$ y $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Se debe mostrar que $S = S^1 + S^2$, lo cual se hará mostrando que para $\varepsilon > 0$ arbitrario, $|S - S^1 - S^2| < \varepsilon$.

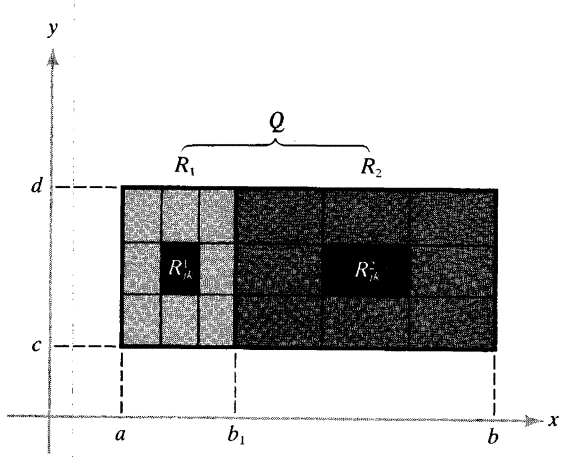


Figura 5.5.2 Elementos de una partición regular de R_1 y R_2.

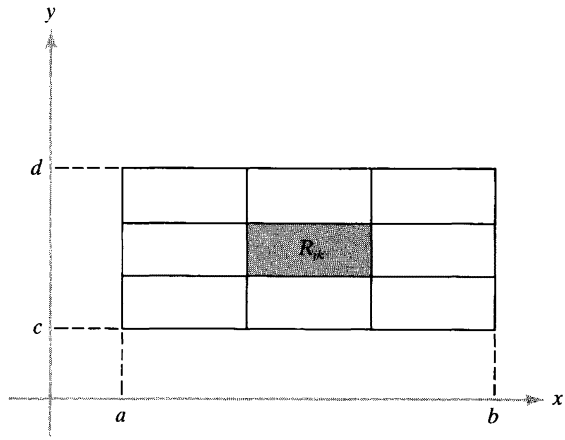


Figura 5.5.3 Partición regular de Q.

Por la continuidad uniforme de f en Q, sabemos que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que cuando $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta$, $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon$. Sea N lo suficientemente grande para que si $n \geq N$, $|S_n - S| < \varepsilon/3$, $|S_n^i - S^i| < \varepsilon/3$, $i = 1, 2$, y si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son dos puntos cualesquiera en cualquier subrectángulo de la n-ésima partición ya sea de R_1, R_2 o Q, entonces $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon/[3\,\text{área}\,(Q)]$. Consideremos la n-ésima partición regular de R_1, R_2 y Q. Éstas forman una colección de subrectángulos que denotaremos por R_{jk}^1, R_{jk}^2 y R_{jk}, respectivamente (ver las figuras 5.5.2 y 5.5.3).

Si colocamos la subdivisión de Q encima de las n-ésimas subdivisiones de R_1 y R_2, obtenemos una nueva colección de rectángulos, digamos $\tilde{R}_{\alpha\beta}$, $\beta = 1, \ldots, n$ y $\alpha = 1, \ldots, m$, $m > n$ (ver la figura 5.5.4).

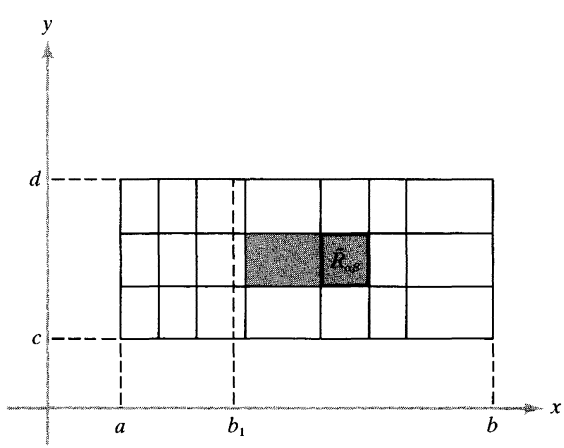


Figura 5.5.4 Las rectas verticales y horizontales de esta subdivisión se obtuvieron tomando la unión de las rectas horizontales y verticales de las figuras 5.5.2 y 5.5.3.

Cada $\tilde{R}_{\alpha\beta}$ está contenido en algún subrectángulo R_{jk} de Q y en algún subrectángulo de la n-ésima partición ya sea de R_1 o de R_2. Considerar las igualdades (4), (5) y (6), anteriores. Se pueden reescribir como

$$S_n^i = \sum_{j,k} \sum_{\tilde{R}_{\alpha\beta} \subset R_i} f(\mathbf{c}_{jk}^i)\, \text{área}(\tilde{R}_{\alpha\beta}) \tag{4'}$$

$$= \sum_{\substack{\alpha,\beta \\ \tilde{R}_{\alpha\beta} \subset R_i}} f(\tilde{\mathbf{c}}_{\alpha\beta})\, \text{área}(\tilde{R}_{\alpha\beta}), \tag{5'}$$

donde $\tilde{\mathbf{c}}_{\alpha\beta} = \mathbf{c}_{jk}^i$ si $\tilde{R}_{\alpha\beta} \subset \mathbf{R}_{jk}^i$, $i = 1, 2$ y

$$S_n = \sum_{j,k} \sum_{\tilde{R}_{\alpha\beta} \subset R_{jk}} f(\mathbf{c}_{jk})\, \text{área}(\tilde{R}_{\alpha\beta}) = \sum_{\alpha,\beta} f(\mathbf{c}_{\alpha\beta}^*)\, \text{área}(\tilde{R}_{\alpha\beta}), \tag{6'}$$

donde $\mathbf{c}_{\alpha\beta}^* = \mathbf{c}_{jk}$ si $\tilde{R}_{\alpha\beta} \subset R_{jk}$.

Para el lector que ve por primera vez esta notación con índices, queremos señalar que

$$\sum_{\substack{\alpha,\beta \\ \tilde{R}_{\alpha\beta} \subset R_i}}$$

significa que se toma la suma sobre las α y β tales que el rectángulo correspondiente $\tilde{R}_{\alpha\beta}$ está contenido en el rectángulo R_i.

Ahora bien, la suma para S_n se puede dividir en dos:

$$S_n = \sum_{\substack{\alpha,\beta \\ \tilde{R}_{\alpha\beta} \subset R_1}} f(\mathbf{c}_{\alpha\beta}^*)\, \text{área}(\tilde{R}_{\alpha\beta}) + \sum_{\substack{\alpha,\beta \\ \tilde{R}_{\alpha\beta} \subset R_2}} f(\mathbf{c}_{\alpha\beta}^*)\, \text{área}(\tilde{R}_{\alpha\beta}).$$

Por estas representaciones y la desigualdad del triángulo, se sigue que

$$\begin{aligned}
|S_n - S_n^1 - S_n^2| &\leq \left| \sum_{\substack{\alpha,\beta \\ \tilde{R}_{\alpha\beta} \subset R_1}} [f(\mathbf{c}_{\alpha\beta}^*) - f(\tilde{\mathbf{c}}_{\alpha\beta})]\, \text{área}(\tilde{R}_{\alpha\beta}) \right| \\
&\quad + \left| \sum_{\substack{\alpha,\beta \\ \tilde{R}_{\alpha\beta} \subset R_2}} [f(\mathbf{c}_{\alpha\beta}^*) - f(\tilde{\mathbf{c}}_{\alpha\beta})]\, \text{área}(\tilde{R}_{\alpha\beta}) \right| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3\, \text{área}\, Q} \sum_{\substack{\alpha,\beta \\ \tilde{R}_{\alpha\beta} \subset R_1}} \text{área}(\tilde{R}_{\alpha\beta}) \\
&\quad + \frac{\varepsilon}{3\, \text{área}\, Q} \sum_{\substack{\alpha,\beta \\ \tilde{R}_{\alpha\beta} \subset R_2}} \text{área}(\tilde{R}_{\alpha\beta}) < \frac{\varepsilon}{3}.
\end{aligned}$$

En este paso usamos la continuidad uniforme de f. Así, $|S_n - S_n^1 - S_n^2| < \varepsilon/3$ para $n \geq N$. Pero $|S - S_n| < \varepsilon/3$, $|S_n^1 - S^1| < \varepsilon/3$ y $|S_n^2 - S^2| < \varepsilon/3$. Como en el lema 2, al aplicar la desigualdad del triángulo se muestra que $|S - S^1 - S^2| < \varepsilon$, lo cual completa la demostración. ■

EJERCICIOS

1. Mostrar que si a y b son dos números tales que para cualquier $\varepsilon > 0$, $|a - b| < \varepsilon$, entonces $a = b$.

2. (a) Sea f la función en el intervalo semiabierto $(0, 1]$ definida por $f(x) = 1/x$. Mostrar que f es continua en todo punto de $(0, 1]$ pero no es uniformemente continua.

(b) Generalizar este ejemplo a $\mathbf{R}^2$.

3. Sea R el rectángulo $[a, b] \times [c, d]$ y f una función acotada que sea integrable sobre R.

(a) Mostrar que f es integrable sobre $[(a + b)/2, b] \times [c, d]$.

(b) Sea N cualquier entero positivo. Mostrar que f es integrable sobre $[(a + b)/N, b] \times [c, d]$.

En los ejercicios 4 al 6 se trata de dar una demostración del teorema 2 de la sección 5.2.

4. Sea C la gráfica de una función continua $\phi: [a, b] \to \mathbf{R}$. Sea $\varepsilon > 0$ cualquier número positivo. Mostrar que C puede colocarse en una unión finita de cajas $B_i = [a_i, b_i] \times [c_i, d_i]$ de manera tal que C no contenga puntos frontera de $\cup B_i$ y tal que $\sum \text{área}(B_i) \leq \varepsilon$. (IDEA: Usar el principio de continuidad uniforme presentado en esta sección.)

5. Sean R y B rectángulos y $B \subset R$. Considerar la n-ésima partición regular de R y sea b_n la suma de las áreas de todos los rectángulos en la partición que tienen intersección no vacía con B. Mostrar que $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = \text{área}\,(B)$.

6. Sea R un rectángulo y $C \subset R$ la gráfica de una función continua ϕ. Suponer que $f: R \to \mathbf{R}$ está acotada y es continua, excepto en C. Usar los ejercicios 4 y 5 anteriores, y las técnicas usadas en la demostración del teorema 1 de esta sección para mostrar que f es integrable sobre R.

7. (a) Usar el principio de continuidad uniforme para mostrar que si $\phi: [a, b] \to \mathbf{R}$ es una función continua, entonces ϕ está acotada.

(b) Generalizar la parte (a) para mostrar que la función continua $f: [a, b] \times [c, d] \to \mathbf{R}$ está acotada.

(c) Generalizar aún más la parte (b) para mostrar que f está acotada donde $f: D \to \mathbf{R}$ es una función continua en un conjunto cerrado y acotado $D \subset \mathbf{R}^n$.

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 5

1. Evaluar las integrales siguientes:

(a) $\int_0^3 \int_{-x^2+1}^{x^2+1} xy\, dy\, dx$

(b) $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 (x + y)^2\, dy\, dx$

(c) $\int_0^1 \int_{e^x}^{e^{2x}} x \ln y\, dy\, dx$

2. Invertir el orden de integración de las integrales en el ejercicio 1 y evaluar. (La solución sólo a la parte (b) está en la Guía de estudio de este libro.)

3. Evaluar las integrales siguientes:

(a) $\int_0^1 \int_y^{y^3} e^{x/y}\, dx\, dy$

(b) $\int_0^{\pi/2} \int_0^{(\operatorname{arcsen} y)/y} y \cos xy\, dx\, dy$

4. Cambiar el orden de integración y evaluar

$$\int_0^2 \int_{y/2}^1 (x+y)^2\, dx\, dy.$$

5. Mostrar que al evaluar $\iint_D dx\, dy$, donde D es una región del tipo 1, se reproduce la fórmula del cálculo de una variable para el área entre dos curvas.

6. Cambiar el orden de integración y evaluar

$$\int_0^2 \int_{y^{1/2}}^1 (x^2 + y^3 x)\, dx\, dy.$$

7. Sea D la región en el plano xy dentro del círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$. Evaluar $\iint_D f(x,y)\, dx\, dy$ en cada uno de los casos siguientes:

(a) $f(x,y) = xy$ (b) $f(x,y) = x^2y^2$ (c) $f(x,y) = x^3y^3$

8. Hallar $\iint_D y[1 - \cos(\pi x/4)]\, dx\, dy$, donde D es la región en la figura 5.R.1.

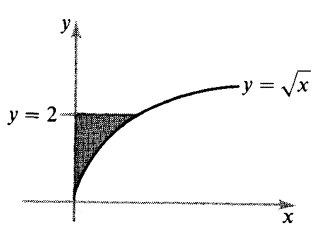


Figura 5.R.1 Región de integración para el ejercicio 8.

Evaluar las integrales en los ejercicios 9 a 16. Esbozar e identificar el tipo de la región (correspondiente a la manera como está escrita la integral).

9. $\int_0^{\pi} \int_{\operatorname{sen} x}^{3 \operatorname{sen} x} x(1+y)\, dy\, dx$

10. $\int_0^1 \int_{x-1}^{x \cos \pi x/2} (x^2 + xy + 1)\, dy\, dx$

11. $\int_{-1}^1 \int_{y^{2/3}}^{(2-y)^2} (y\sqrt{x} + y^3 - 2y)\, dx\, dy$

12. $\int_0^2 \int_{-3(\sqrt{4-x^2})/2}^{3(\sqrt{4-x^2})/2} \left(\frac{5}{\sqrt{2+x}} + y^3 \right) dy\, dx$

13. $\int_0^1 \int_0^{x^2} (x^2 + xy - y^2)\, dy\, dx$

14. $\int_2^4 \int_{y^2-1}^{y^3} 3\, dx\, dy$

15. $\int_0^1 \int_{x^2}^{x} (x+y)^2\, dy\, dx$

16. $\int_0^1 \int_0^{3y} e^{x+y}\, dx\, dy$

En los ejercicios 17 al 19, integrar la función dada f sobre la región dada D.

17. $f(x,y) = x - y$; D es el triángulo con vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(2,1)$.

18. $f(x,y) = x^3 y + \cos x$; D es el triángulo definido por $0 \le x \le \pi/2$, $0 \le y \le x$.

19. $f(x,y) = (x^2 + 2xy^2 + 2)$; D es la región acotada por la gráfica de $y = -x^2 + x$, el eje x y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

En los ejercicios 20 y 21, esbozar la región de integración, intercambiar el orden y evaluar.

20. $\int_1^4 \int_1^{\sqrt{x}} (x^2 + y^2)\, dy\, dx$

21. $\int_0^1 \int_{1-y}^{1} (x + y^2)\, dx\, dy$

22. Mostrar que

$$4e^5 \le \int_{[1,3]\times[2,4]} e^{x^2+y^2}\, dA \le 4e^{25}.$$

23. Mostrar que

$$4\pi \le \int_D (x^2 + y^2 + 1)\, dx\, dy \le 20\pi,$$

donde D es el disco de radio 2 con centro en el origen.

***24.** Suponer que W es una *región arco-conexa*. Esto es, dados cualesquiera dos puntos de W, existe una trayectoria continua que los une. Si f es una función continua en W, usar el teorema del valor intermedio para mostrar que hay al menos un punto en W en el cual el valor de f es igual al promedio de f sobre W, i.e., la integral de f sobre D dividida entre el área de D. (Comparar esto con el teorema del valor medio para integrales dobles, teorema 5.) ¿Qué sucede si W no es arco-conexa?

***25.** Probar que: $\int_0^x \left[\int_0^t F(u)\, du \right] dt = \int_0^x (x-u) F(u)\, du$.

6 INTEGRAL TRIPLE, FÓRMULA DE CAMBIO DE VARIABLES Y APLICACIONES

Si estás atorado con un problema de cálculo y no sabes qué hacer, trata de integrar por partes o cambiar de variables.

Jerry Kazdan

En este capítulo comenzaremos por adaptar los principios de la integral doble a la integral triple. Después desarrollaremos más ideas sobre integración; la más importante es el teorema de cambio de variables, vital para evaluar integrales en coordenadas polares, cilíndricas y esféricas. El capítulo se concluye con un estudio de integrales impropias, extendiendo a integrales múltiples un concepto ya familiar desde el estudio de integrales de una variable.

6.1 INTEGRAL TRIPLE

Dada una función continua $f: B \to \mathbf{R}$, donde B es algún paralelepípedo rectangular en $\mathbf{R}^3$, podemos definir la integral de f sobre B como un límite de sumas, así como lo hicimos para una función de dos variables. Brevemente, partimos los

tres lados de B en n partes iguales y formamos la suma

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} f(\mathbf{c}_{ijk})\Delta V,$$

donde $\mathbf{c}_{ijk} \in B_{ijk}$, el ijk-ésimo paralelepípedo rectangular (o caja) en la partición de B, y ΔV es el volumen de B_{ijk} (ver la figura 6.1.1).

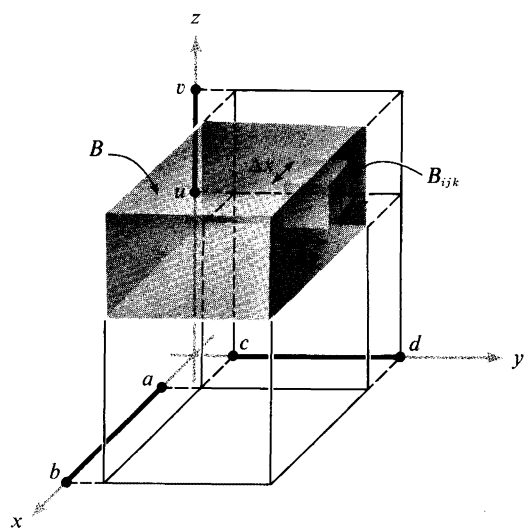


Figura 6.1.1 Partición de una caja B en n^3 subcajas B_{ijk}.

DEFINICIÓN *Sea f una función acotada de tres variables, definida en B. Si existe* $\lim_{n\to\infty} S_n$ *(para cualquier selección de $\mathbf{c}_{ijk}$), le llamamos* **integral triple** *(o simplemente integral) de f sobre B y la denotamos por*

$$\int_B f\,dV, \qquad \int_B f(x,y,z)\,dV, \qquad \int_B f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$\iiint_B f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \qquad \text{o} \qquad \iiint_B f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Como antes, podemos probar que las funciones continuas definidas en B son integrables. Más aún, las funciones acotadas cuyas discontinuidades están confinadas en gráficas de funciones continuas (tales como $x = \alpha(y,z)$, $y = \beta(x,z)$ o $z = \gamma(x,y)$) son integrables. Esto es el análogo del teorema 2 de la sección 5.2.

Suponer que el paralelepípedo rectangular B es el producto cartesiano $[a,b] \times [c,d] \times [u,v]$. Entonces, por analogía con las funciones de dos variables, hay varias

integrales iteradas que podemos considerar, a saber,

$$\int_u^v \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz, \qquad \int_u^v \int_a^b \int_c^d f(x,y,z)\,dy\,dx\,dz,$$

$$\int_a^b \int_u^v \int_c^d f(x,y,z)\,dy\,dz\,dx, \qquad \text{etc.}$$

El orden de dx, dy y dz indica cómo se realiza la integración. Por ejemplo, la primera integral anterior representa a

$$\int_u^v \left[\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y,z)\,dx\right) dy\right] dz.$$

Como en el caso de dos variables, se cumple el teorema de Fubini: *si f es continua, entonces las seis integrales iteradas posibles son iguales.* En otras palabras, una integral triple se puede reducir a una triple integración iterada.

Para completar la analogía con la integral doble, considerar el problema de evaluar integrales triples sobre conjuntos acotados más generales $W \subset \mathbf{R}^3$ (esto es, aquellos conjuntos que se pueden encerrar en alguna caja). Dada $f\colon W \to \mathbf{R}$, extender f a una función f^* que coincida con f en W y sea cero fuera de W. Si B es una caja que contiene a W y ∂W está formada por las gráficas de un número finito de funciones continuas, f^* será integrable y definimos

$$\int_W f(x,y,z)\,dV = \int_B f^*(x,y,z)\,dV.$$

Como en el caso bidimensional, esta integral es independiente de la selección de B.

Como en el caso de dos variables, nos restringiremos a regiones de tipos especiales. Una región W es del *tipo* I si se puede describir como el conjunto de los (x,y,z) tales que

$$a \le x \le b, \qquad \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x) \qquad \text{y} \qquad \gamma_1(x,y) \le z \le \gamma_2(x,y). \tag{1}$$

En esta definición, $\gamma_i\colon D \to \mathbf{R}$, $i = 1, 2$, son funciones continuas, D es una región bidimensional del tipo 1 y $\gamma_1(x,y) = \gamma_2(x,y)$ implica $(x,y) \in \partial D$. La última condición significa que si las superficies $z = \gamma_1(x,y)$ y $z = \gamma_2(x,y)$ se intersecan, lo hacen sólo en $(x,y) \in \partial D$.

Una región tridimensional también se llamará del tipo I si puede expresarse como el conjunto de los (x,y,z) tales que

$$c \le y \le d, \qquad \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y) \qquad \text{y} \qquad \gamma_1(x,y) \le z \le \gamma_2(x,y), \tag{2}$$

donde $\gamma_i\colon D \to \mathbf{R}$ son como antes y D es una región bidimensional de tipo 2. La figura 6.1.2 muestra dos regiones del tipo I, descritas por las condiciones (1) y (2), respectivamente.

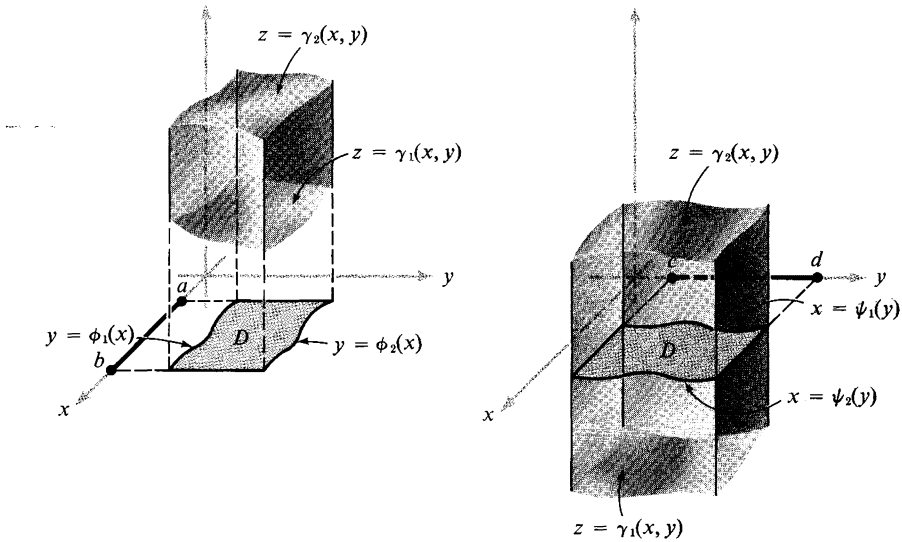


Figura 6.1.2 Algunas regiones del tipo I en el espacio.

Una región W es de *tipo* II si puede expresarse en la forma de la ecuación (1) o (2), intercambiados los papeles de x y z, y W es del *tipo* III si se puede expresar en la forma de la ecuación (1) o (2), con y y z intercambiados. Una región W que sea del tipo I, II y III, se llama del *tipo* IV (figura 6.1.3). Un ejemplo de una región de tipo IV es la bola de radio r, $x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$.

Suponer que W es del tipo I. Entonces,

$$\begin{aligned}\int_W f(x, y, z)\, dV &= \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx \\ &= \int_D \left[\int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right] dy\, dx \qquad (3)\end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned}\int_W f(x, y, z)\, dV &= \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy \\ &= \int_D \left[\int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right] dx\, dy, \qquad (4)\end{aligned}$$

ya sea que W esté definida por la ecuación (1) o por la ecuación (2). Las demostraciones de las ecuaciones (3) y (4) por medio del teorema de Fubini son iguales a las del caso bidimensional. El lector deberá esbozar, o al menos tratar de visualizar, las figuras asociadas con las ecuaciones (3) y (4). Una vez que se han entendido los términos, las fórmulas son fáciles de recordar. Puede ser útil recordar la aportación intuitiva del principio de Cavalieri al teorema de Fubini.

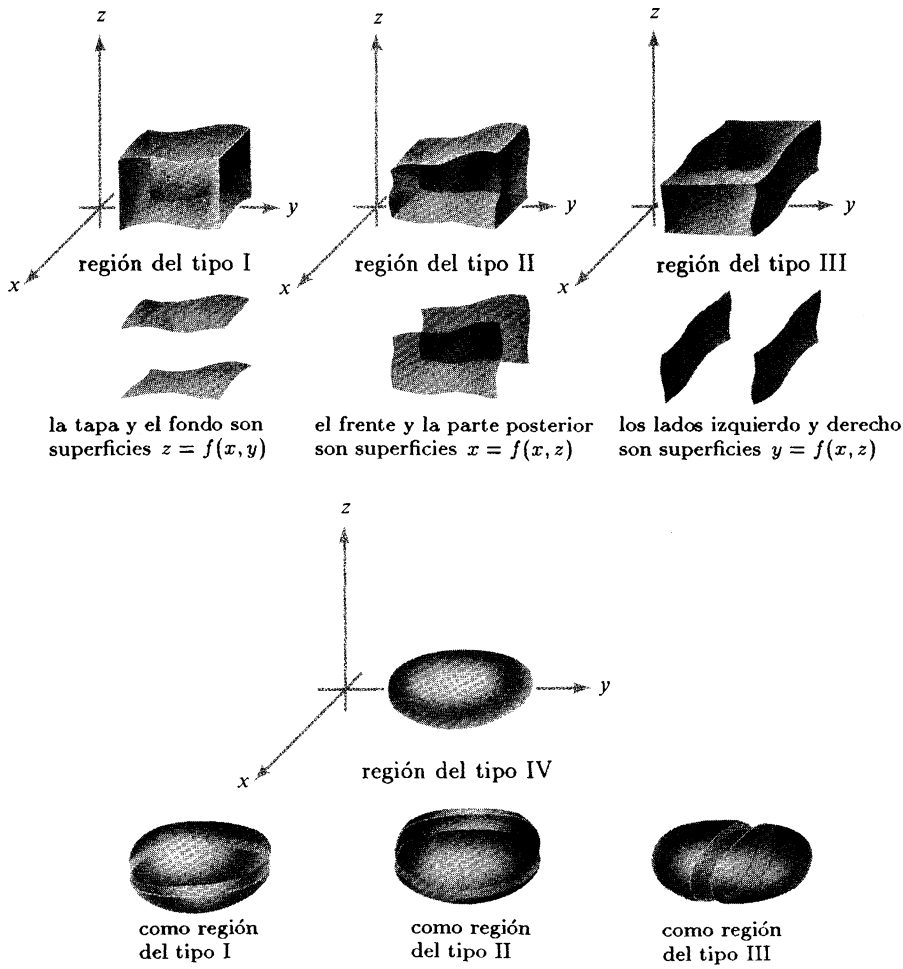


Figura 6.1.3 Cuatro posibles tipos de regiones en el espacio.

Si $f(x, y, z) = 1$ para todo $(x, y, z) \in W$, entonces obtenemos

$$\int_W f(x, y, z)\, dV = \int_W 1\, dV = \text{volumen}\,(W).$$

En el caso de que W sea del tipo I y la fórmula (3) sea aplicable, obtenemos la fórmula

$$\begin{aligned}\text{volumen}\,(W) &= \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} dz\, dy\, dx \\ &= \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} [\gamma_2(x, y) - \gamma_1(x, y)]\, dy\, dx.\end{aligned}$$

¿Pueden ver cómo probar esta fórmula a partir del principio de Cavalieri?

EJEMPLO 1 *Verificar la fórmula para el volumen de una bola:* $\int_W dV = \frac{4}{3}\pi$, *donde* W *es la bola unitaria* $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

SOLUCIÓN La región W es del tipo I; podemos describirla como el conjunto de (x, y, z) que satisfacen

$$-1 \leq x \leq 1, \qquad -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2},$$

y

$$-\sqrt{1-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}$$

(ver la figura 6.1.4). Describir W de esta manera es, con frecuencia, el paso más difícil en la evaluación de una integral triple. Una vez realizado esto de manera apropiada, queda sólo evaluar la integral triple dada usando una integral iterada equivalente. En este caso podemos aplicar la fórmula (3) para obtener

$$\int_W dV = \int_{-1}^{1} \int_{-(1-x^2)^{1/2}}^{(1-x^2)^{1/2}} \int_{-(1-x^2-y^2)^{1/2}}^{(1-x^2-y^2)^{1/2}} dz\, dy\, dx.$$

Manteniendo a y y x fijas, e integrando respecto a z, se tiene

$$\int_{-1}^{1} \int_{-(1-x^2)^{1/2}}^{(1-x^2)^{1/2}} \left[z \Big|_{-(1-x^2-y^2)^{1/2}}^{(1-x^2-y^2)^{1/2}} \right] dy\, dx$$

$$= 2\int_{-1}^{1} \left[\int_{-(1-x^2)^{1/2}}^{(1-x^2)^{1/2}} (1 - x^2 - y^2)^{1/2}\, dy \right] dx.$$

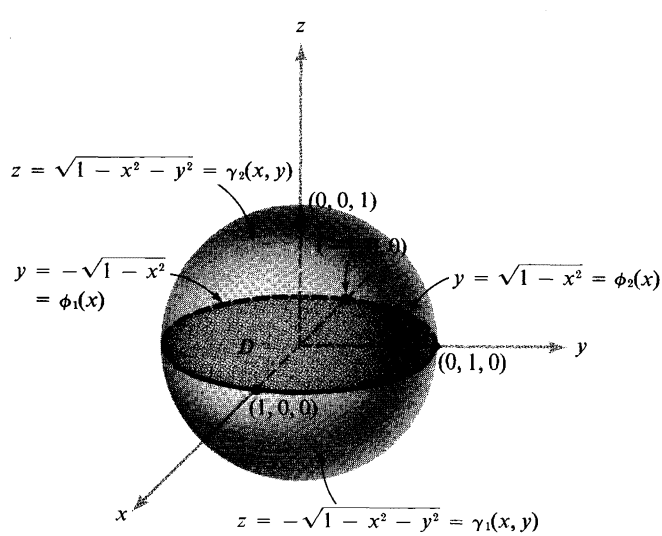


Figura 6.1.4 La bola unitaria expresada como región del tipo I.

Ahora, como x está fija en la integral dy, esta integral se puede expresar como $\int_{-a}^{a}(a^2 - y^2)^{1/2}\,dy$, donde $a = (1 - x^2)^{1/2}$. Esta integral representa el área de una región semicircular de radio a, de modo que

$$\int_{-a}^{a}(a^2 - y^2)^{1/2}\,dy = \frac{a^2}{2}\pi.$$

(Es cierto, pudimos haber evaluado directamente la integral usando la tabla de integrales al final del libro, pero este truco ahorra bastante esfuerzo.) Así,

$$\int_{-(1-x^2)^{1/2}}^{(1-x^2)^{1/2}}(1 - x^2 - y^2)^{1/2}\,dy = \frac{1 - x^2}{2}\pi$$

de modo que

$$\begin{aligned}
2\int_{-1}^{1}\int_{-(1-x^2)^{1/2}}^{(1-x^2)^{1/2}}(1 - x^2 - y^2)^{1/2}\,dy\,dx &= 2\int_{-1}^{1}\pi\frac{1 - x^2}{2}\,dx \\
&= \pi\int_{-1}^{1}(1 - x^2)\,dx \\
&= \pi\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}\pi. \qquad \blacktriangle
\end{aligned}$$

EJEMPLO 2 *Sea W la región acotada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ y la superficie $z = x^2 + y^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. Calcular $\int_W x\,dx\,dy\,dz$.*

SOLUCIÓN La región W está esbozada en la figura 6.1.5(a). Para escribir esto como una región del tipo I, sean $\gamma_1(x, y) = x^2 + y^2$, $\gamma_2(x, y) = 2$, $\phi_1(x) = 0$, $\phi_2(x) = \sqrt{2 - x^2}$, $a = 0$ y $b = \sqrt{2}$. Así, por la fórmula (3),

$$\begin{aligned}
\int_W x\,dx\,dy\,dz &= \int_0^{\sqrt{2}}\left[\int_0^{(2-x^2)^{1/2}}\left(\int_{x^2+y^2}^{2} x\,dz\right)dy\right]dx \\
&= \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{(2-x^2)^{1/2}} x(2 - x^2 - y^2)\,dy\,dx \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} x\left[(2 - x^2)^{3/2} - \frac{(2 - x^2)^{3/2}}{3}\right]dx \\
&= \int_0^{\sqrt{2}}\frac{2x}{3}(2 - x^2)^{3/2}\,dx = \left.\frac{-2(2 - x^2)^{5/2}}{15}\right|_0^{\sqrt{2}} \\
&= 2\cdot\frac{2^{5/2}}{15} = \frac{8\sqrt{2}}{15}.
\end{aligned}$$

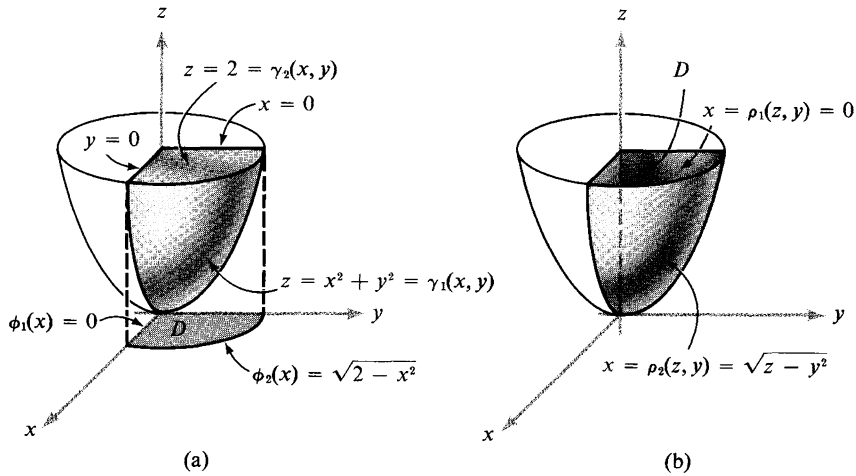


Figura 6.1.5 (a) Región de tipo I en $\mathbf{R}^3$ sobre un dominio D. (b) Aquí D, el área sombreada, es el conjunto de (y, z) con $0 \leq z \leq 2$ y $0 \leq y \leq \sqrt{z}$.

También podemos evaluar la integral al escribir W como una región del tipo II. Vemos que W se puede expresar como el conjunto de (x, y, z) con $\rho_1(y, z) = 0 \leq x \leq (z - y^2)^{1/2} = \rho_2(y, z)$ y $(y, z) \in D$, donde D es el subconjunto del plano yz con $0 \leq z \leq 2$ y $0 \leq y \leq z^{1/2}$ (ver la figura 6.1.5(b)). Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int_W x\,dx\,dy\,dz &= \int_D \left[\int_{\rho_1(y,z)}^{\rho_2(y,z)} x\,dx\right] dy\,dz \\
&= \int_0^2 \left[\int_0^{z^{1/2}} \left(\int_0^{\sqrt{z-y^2}} x\,dx\right) dy\right] dz \\
&= \int_0^2 \int_0^{z^{1/2}} \left(\frac{z-y^2}{2}\right) dy\,dz = \frac{1}{2}\int_0^2 \left(z^{3/2} - \frac{z^{3/2}}{3}\right) dz \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{2}{3} z^{3/2}\,dz = \left[\frac{2}{15} z^{5/2}\right]_0^2 = \frac{2}{15}\cdot 2^{5/2} = \frac{8\sqrt{2}}{15}. \qquad \blacktriangle
\end{aligned}$$

EJERCICIOS

1. Evaluar $\int_W x^2\,dV$, donde $W = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$.

2. Evaluar $\int_W e^{-xy} y\,dV$, donde $W = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$.

3. Evaluar $\int_W (2x + 3y + z)\,dV$, donde $W = [1,2] \times [-1,1] \times [0,1]$.

4. Integrar ze^{x+y} sobre $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$.

5. Evaluar $\int_W x^2 \cos z \, dV$ donde W es la región acotada por los planos $z = 0$, $z = \pi$, $y = 0$, $y = 1$, $x = 0$ y $x + y = 1$.

6. Hallar el volumen de la región acotada por $z = x^2 + 3y^2$ y $z = 9 - x^2$.

7. Evaluar $\int_0^1 \int_0^{2x} \int_{x^2+y^2}^{x+y} dz\, dy\, dx$ y esbozar la región de integración.

8. Hallar el volumen del sólido acotado por las superficies $x^2 + 2y^2 = 2$, $z = 0$ y $x + y + 2z = 2$.

9. Hallar el volumen del sólido de revolución $z^2 \geq x^2 + y^2$ encerrado por la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

10. Hallar el volumen de la región acotada por las superficies $z = x^2 + y^2$ y $z = 10 - x^2 - 2y^2$. Esbozar.

11. Hallar el volumen acotado por el paraboloide $z = 2x^2 + y^2$ y el cilindro $z = 4 - y^2$.

12. Evaluar $\int_0^{\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\sec\phi} \operatorname{sen} 2\phi \, d\rho\, d\phi\, d\theta$.

13. Calcular la integral de la función $f(x,y,z) = z$ sobre la región W en el primer octante de $\mathbf{R}^3$ acotada por los planos $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 2$, $2y + x = 6$ y el cilindro $y^2 + z^2 = 4$.

14. Cambiar el orden de integración en

$$\int_0^1 \int_0^x \int_0^y f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx$$

para obtener otras cinco formas de la respuesta. Esbozar la región de integración.

15. Sea W un conjunto acotado cuya frontera está formada por gráficas de funciones continuas. Supongamos que W es simétrica en el plano xy: $(x,y,z) \in W$ implica que $(x,y,-z) \in W$. Suponer que f es una función continua acotada en W y $f(x,y,z) = -f(x,y,-z)$. Probar que $\int_W f(x,y,z)\, dV = 0$.

16. Usar el resultado del ejercicio 15 para probar que $\int_W (1 + x + y)\, dV = 4\pi/3$, donde W, la bola unitaria, es el conjunto de (x,y,z) con $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

17. Evaluar $\iiint_S xyz\, dx\, dy\, dz$, donde S es la región determinada por las condiciones $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ y $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

18. Sea B la región determinada por las condiciones $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ y $0 \leq z \leq xy$.

(a) Hallar el volumen de B (b) Evaluar $\iiint_B x\, dx\, dy\, dz$.

(c) Evaluar $\iiint_B y\,dx\,dy\,dz$.

(d) Evaluar $\iiint_B z\,dx\,dy\,dz$.

(e) Evaluar $\iiint_B xy\,dx\,dy\,dz$.

19. Para cada una de las siguientes regiones W, hallar los límites apropiados $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$, $\gamma_1(x,y)$ y $\gamma_2(x,y)$ y escribir la integral triple sobre la región W como una integral iterada en la forma

$$\iiint_B f\,dV = \int_a^b \left\{ \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \left[\int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right] dy \right\} dx.$$

(a) $W = \{(x,y,z) | \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1\}$
(b) $W = \{(x,y,z) | \frac{1}{2} \le z \le 1 \text{ y } x^2+y^2+z^2 \le 1\}$

20. Sea B la región acotada por los planos $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y=1$ y $z=x+y$.

(a) Hallar el volumen de B.

(b) Evaluar $\iiint_B x\,dx\,dy\,dz$.

(c) Evaluar $\iiint_B y\,dx\,dy\,dz$.

21. Sean f continua y B_ϵ la bola de radio ϵ con centro en el punto (x_0, y_0, z_0). Sea $|B_\epsilon|$ el volumen de B_ϵ. Probar que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{|B_\epsilon|} \int_{B_\epsilon} f(x,y,z)\,dV = f(x_0, y_0, z_0).$$

6.2 GEOMETRÍA DE LAS FUNCIONES DE $\mathbf{R}^2$ A $\mathbf{R}^2$

En esta sección nos ocuparemos del efecto de las funciones de $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}^2$ sobre los subconjuntos de $\mathbf{R}^2$. Esta comprensión geométrica será útil en la siguiente sección, cuando estudiemos la fórmula del cambio de variables para integrales múltiples.

Sea D^* un subconjunto de $\mathbf{R}^2$; suponer que consideramos una función continuamente diferenciable $T\colon D^* \to \mathbf{R}^2$, de modo que T lleva puntos en D^* a puntos en $\mathbf{R}^2$. Denotemos este conjunto de puntos imagen por D o por $T(D^*)$; entonces $D = T(D^*)$ es el conjunto de todos los puntos $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ tales que

$$(x,y) = T(x^*, y^*) \qquad \text{para algún} \qquad (x^*, y^*) \in D^*.$$

Una manera de entender la geometría de la función T es ver cómo *deforma* o cambia a D^*. Por ejemplo, la figura 6.2.1 ilustra una función T que tuerce ligeramente una región hasta convertirla en un disco.

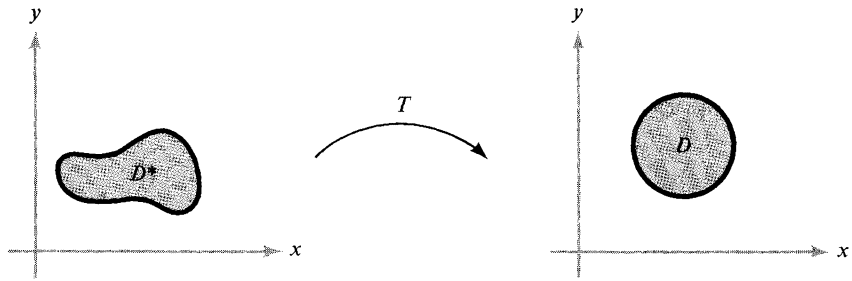


Figura 6.2.1 Función T de una región D^* a un disco D.

EJEMPLO 1 *Sea $D^* \subset \mathbf{R}^2$ el rectángulo $D^* = [0,1] \times [0,2\pi]$. Entonces todos los puntos en D^* son de la forma (r,θ), donde $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 1$. Sea T definida por $T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$. Hallar el conjunto imagen D.*

SOLUCIÓN Sea $(x,y) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$. Como $x^2 + y^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta = r^2 \leq 1$, el conjunto de puntos $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ tales que $(x,y) \in D$ tiene la propiedad de que $x^2+y^2 \leq 1$, y así D está contenido en el disco unitario. Además, cualquier punto (x,y) en el disco unitario se puede escribir como $(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$ para algún $0 \leq r \leq 1$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Así, D es el disco unitario (ver la figura 6.2.2.). ▲

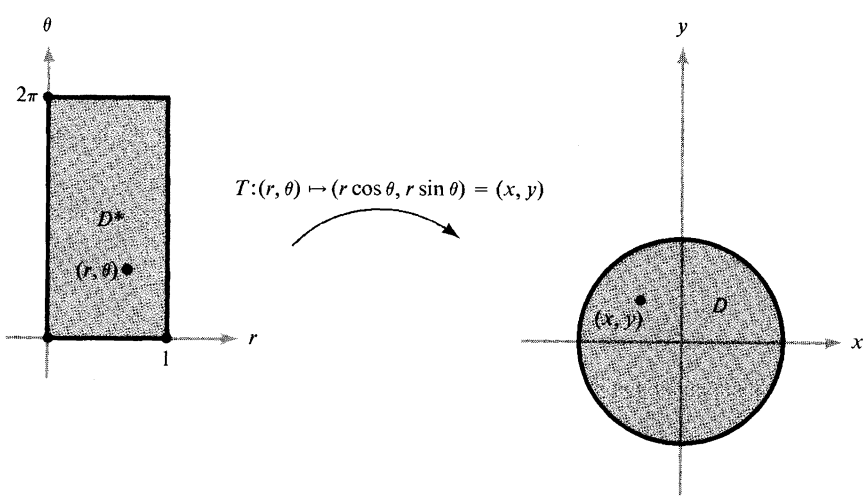


Figura 6.2.2 T da un cambio de variables a coordenadas polares. El círculo unitario es la imagen de un rectángulo.

EJEMPLO 2 *Sea T definida por $T(x,y) = ((x+y)/2, (x-y)/2)$. Sea $D^* = [-1,1] \times [-1,1] \subset \mathbf{R}^2$ un cuadrado con lado de longitud 2 y con centro en el origen. Determinar la imagen D obtenida al aplicar T a D^*.*

SOLUCIÓN Determinemos primero el efecto de T en la recta $\boldsymbol{\sigma}_1(t) = (t,1)$, donde $-1 \le t \le 1$. Tenemos $T(\boldsymbol{\sigma}_1(t)) = ((t+1)/2, (t-1)/2)$. La correspondencia $t \mapsto T(\boldsymbol{\sigma}_1(t))$ es una parametrización de la recta $y = x-1$, $0 \le x \le 1$, pues $(t-1)/2 = (t+1)/2 - 1$ (ver la figura 6.2.3). Sean

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_2(t) &= (1,t), & -1 \le t \le 1 \\ \boldsymbol{\sigma}_3(t) &= (t,-1), & -1 \le t \le 1 \\ \boldsymbol{\sigma}_4(t) &= (-1,t), & -1 \le t \le 1 \end{aligned}$$

parametrizaciones de los otros lados del cuadrado D^*. Usando el mismo argumento que antes, vemos que $T \circ \boldsymbol{\sigma}_2$ es una parametrización de la recta $y = 1-x$, $0 \le x \le 1$, $T \circ \boldsymbol{\sigma}_3$ es la recta $y = x+1$, $-1 \le x \le 0$ y $T \circ \boldsymbol{\sigma}_4$ es la recta $y = -x-1$, $-1 \le x \le 0$. A estas alturas parece razonable pensar que T va a "girar" el cuadrado D^* para colocarlo sobre el cuadrado D cuyos vértices son $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$ (figura 6.2.4). Para probar que así sucede, sea $-1 \le \alpha \le 1$ y sea L_α (figura 6.2.3) una recta fija parametrizada por $\boldsymbol{\sigma}(t) = (\alpha, t)$, $-1 \le t \le 1$; entonces $T(\boldsymbol{\sigma}(t)) = ((\alpha+t)/2, (\alpha-t)/2)$ es una parametrización de la recta $y = -x+\alpha$, $(\alpha-1)/2 \le x \le (\alpha+1)/2$. Esta recta comienza, para $t=-1$, en el punto $((\alpha-1)/2, (1+\alpha)/2)$ y termina en el punto $((1+\alpha)/2, (\alpha-1)/2)$; como puede verificarse fácilmente, estos puntos están sobre las rectas $T \circ \boldsymbol{\sigma}_3$ y $T \circ \boldsymbol{\sigma}_1$, respectivamente. Así, cuando α varía entre -1 y 1, L_α barre el cuadrado D^*, mientras que $T(L_\alpha)$ barre el cuadrado D determinado por los vértices $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ y $(0,-1)$. ▲

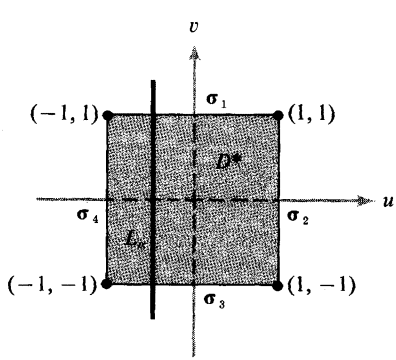


Figura 6.2.3 Dominio de la transformación T del ejemplo 2.

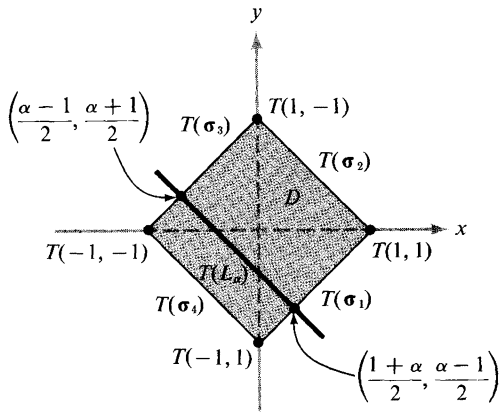


Figura 6.2.4 Efecto de T sobre la región D^*.

El teorema siguiente proporciona una manera fácil de describir la imagen $T(D^*)$.

TEOREMA 1 *Sea A una matriz de 2×2 con $\det A \neq 0$ y T una transformación lineal de $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}^2$ dada por $T(x) = Ax$ (multiplicación de matrices); ver el ejemplo 4, sección 2.4. Entonces T transforma paralelogramos en paralelogramos y vértices en vértices. Más aún, si $T(D^*)$ es un paralelogramo, D^* debe ser un paralelogramo.*

La demostración del teorema 1 se deja para el ejercicio 10 al final de esta sección. Este teorema simplifica el resultado del ejemplo 2, pues basta hallar los vértices de $T(D^*)$ y después conectarlos mediante rectas.

Aunque no podemos visualizar la gráfica de una función $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, es útil saber cómo deforma subconjuntos. Sin embargo, la simple consideración de estas deformaciones no nos da una idea completa del comportamiento de T. Podemos abundar en la caracterización de T usando el concepto de correspondencia biunívoca (uno a uno).

DEFINICIÓN *La función T es* **uno a uno** *en D^* si para (u,v) y $(u',v') \in D^*$, $T(u,v) = T(u',v')$ implica que $u = u'$ y $v = v'$.*

Geométricamente, esto significa que dos puntos diferentes de D^* no van a dar al mismo punto de D bajo T. Por ejemplo, la función $T(x,y) = (x^2 + y^2, y^4)$ no es uno a uno porque $T(1,-1) = (2,1) = T(1,1)$, aunque $(1,-1) \neq (1,1)$. En otras palabras, una función es uno a uno cuando no manda puntos *distintos* al *mismo* punto.

EJEMPLO 3 *Considerar la función $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ del ejemplo 1, definida por $T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$. Mostrar que T no es uno a uno si su dominio es todo $\mathbf{R}^2$.*

SOLUCIÓN Si $\theta_1 \neq \theta_2$, entonces $T(0,\theta_1) = T(0,\theta_2)$, de modo que T no puede ser uno a uno. Esta observación implica que si L es el lado del rectángulo $D^* = [0,1] \times [0,2\pi]$ donde $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $r = 0$ (figura 6.2.5), entonces T manda toda L a un solo punto, el centro del disco unitario D. (Sin embargo, si consideramos el conjunto $S^* = (0,1] \times [0,2\pi)$, entonces $T: S^* \to S$ es uno a uno (ver el ejercicio 1). Es evidente que al determinar si una función es uno a uno, debe considerarse cuidadosamente el dominio escogido.) ▲

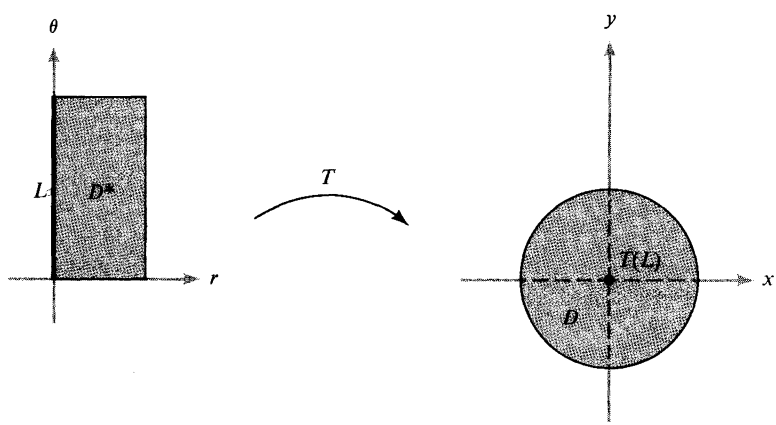


Figura 6.2.5 La transformación en coordenadas polares T lleva la recta L al punto $(0,0)$.

EJEMPLO 4 *Mostrar que la función $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ del ejemplo 2, es uno a uno.*

SOLUCIÓN Suponer que $T(x,y) = T(x',y')$; entonces

$$\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right) = \left(\frac{x'+y'}{2}, \frac{x'-y'}{2}\right)$$

y tenemos

$$x + y = x' + y',$$
$$x - y = x' - y'.$$

Sumando, tenemos

$$2x = 2x'.$$

Así, $x = x'$ y por lo tanto $y = y'$, lo cual muestra que T es uno a uno (con dominio $\mathbf{R}^2$). En realidad, como T es lineal y $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, donde A es una matriz de 2×2, bastaría mostrar que $\det A \neq 0$ (ver el ejercicio 8). ▲

En los ejemplos 1 y 2 hemos determinado la imagen $D = T(D^*)$ de una región D^* bajo una función T. Lo que nos interesará en la siguiente sección será, en parte, el problema inverso, a saber: dada D y una función uno a uno T de $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}^2$, hallar D^* tal que $T(D^*) = D$.

Antes de examinar con más detalle esta cuestión, introducimos el concepto de "suprayectividad".

DEFINICIÓN *La función T es* ***sobre*** *D si para cada punto $(x, y) \in D$ existe al menos un punto (u, v) en el dominio de T tal que $T(u, v) = (x, y)$.*

Así, si T es sobre, podemos resolver la ecuación $T(u, v) = (x, y)$ para (u, v), dado que $(x, y) \in D$. Si T es, además, uno a uno, esta solución es única.

Para transformaciones lineales T de $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}^2$ (o $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^n$), resulta que los conceptos de biunívoca y suprayectiva son equivalentes (ver los ejercicios 8 y 9).

Si tenemos dada una región D y una función T, la determinación de una región D^* tal que $T(D^*) = D$ será posible sólo cuando para todo $(x, y) \in D$ exista un (u, v) en el dominio de T tal que $T(u, v) = (x, y)$ (esto es, T debe ser sobre D). El siguiente ejemplo muestra que esto no siempre es posible.

EJEMPLO 5 Sea $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ dada por $T(u, v) = (u, 0)$. Sea $D = [0, 1] \times [0, 1]$. Como T lleva todo $\mathbf{R}^2$ a uno de los ejes, es imposible hallar D^* tal que $T(D^*) = D$. ▲

EJEMPLO 6 *Sea T definida como en el ejemplo 2 y sea D el cuadrado cuyos vértices son $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$. Hallar D^* con $T(D^*) = D$.*

SOLUCIÓN Como T es lineal y $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, donde A es una matriz de 2×2 que satisface $\det A \neq 0$, sabemos que $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ es sobre (ver ejercicios 8 y 9), y así, es posible hallar D^*. Por el teorema 1, D^* debe ser un paralelogramo. Para hallar D^* basta hallar los cuatro puntos que van a dar a los vértices de D; entonces, al conectar estos puntos, habremos hallado D^*. Para el vértice $(1, 0)$ de D, debemos resolver $T(x, y) = (1, 0) = (x + y)/2, (x - y)/2$ de modo que $(x + y)/2 = 1$, $(x - y)/2 = 0$. Así, $(x, y) = (1, 1)$ es un vértice de D^*. Resolviendo para los otros vértices, hallamos que $D^* = [-1, 1] \times [-1, 1]$. ▲

EJEMPLO 7 *Sea D la región en el primer cuadrante que está entre los arcos de los círculos $x^2 + y^2 = a^2$ y $x^2 + y^2 = b^2$, $0 < a < b$ (ver la figura 6.2.6). Estos círculos tienen ecuaciones $r = a$ y $r = b$ en coordenadas polares. Sea T la transformación a coordenadas polares dada por $T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) = (x, y)$. Hallar D^* tal que $T(D^*) = D$.*

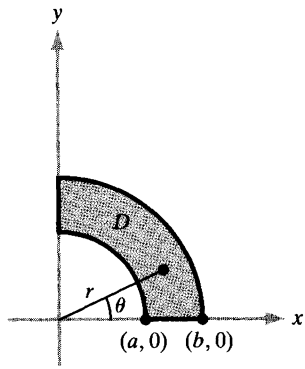


Figura 6.2.6 Buscamos una región D^* en el plano θr, cuya imagen bajo la transformación a coordenadas polares sea D.

SOLUCIÓN En la región D, $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$; y como $r^2 = x^2 + y^2$, vemos que $a \leq r \leq b$. Claramente, para esta región θ varía entre $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Así, si $D^* = [a, b] \times [0, \pi/2]$, no es difícil ver que $T(D^*) = D$ y T es uno a uno. ▲

OBSERVACIÓN El teorema de la función inversa estudiado en la sección 4.4 es importante para este material. En él se asegura que si el determinante de $\mathbf{D}T(u_0, v_0)$ (que es la matriz de las derivadas parciales de T evaluada en (u_0, v_0)) es diferente de cero, entonces para (u, v) cerca de (u_0, v_0) y (x, y) cerca de $(x_0, y_0) = T(u_0, v_0)$, la ecuación $T(u, v) = (x, y)$ se puede *resolver de manera única* para (u, v) como funciones de (x, y). En particular, por unicidad, T es uno a uno cerca de (u_0, v_0); además, T es sobre una vecindad de (x_0, y_0), pues $T(u, v) = (x, y)$ se puede resolver para (u, v) si (x, y) está cerca de (x_0, y_0). Si D^* y D son regiones elementales y $T: D^* \to D$ tiene la propiedad de que el determinante de $\mathbf{D}T(u, v)$ es diferente de cero para cualquier (u, v) en D^* y T manda la frontera de D^* de una manera uno a uno y sobre en la frontera de D, entonces T es uno a uno y sobre de D^* en D. (Esta demostración rebasa el ámbito de este libro.)

EJERCICIOS

1. Sea $S^* = (0, 1] \times [0, 2\pi)$ y definir $T(r, \theta) = (r \cos\theta, r \operatorname{sen}\theta)$. Determinar el conjunto imagen S. Mostrar que T es uno a uno en S^*.

2. Definir

$$T(x^*, y^*) = \left(\frac{x^* - y^*}{\sqrt{2}}, \frac{x^* + y^*}{\sqrt{2}} \right).$$

Mostrar que T rota el cuadrado unitario $D^* = [0, 1] \times [0, 1]$.

3. Sea $D^* = [0,1] \times [0,1]$ y definir T en D^* por $T(u,v) = (-u^2 + 4u, v)$. Hallar D. ¿Es T uno a uno?

4. Sea D^* el paralelogramo acotado por las rectas $y = 3x - 4$, $y = 3x$, $y = \frac{1}{2}x$ y $y = \frac{1}{2}(x+4)$. Sea $D = [0,1] \times [0,1]$. Hallar T tal que D es la imagen de D^* bajo T.

5. Sea $D^* = [0,1] \times [0,1]$ y definir T en D^* por $T(x^*, y^*) = (x^*y^*, x^*)$. Determinar el conjunto imagen D. ¿Es T uno a uno? De no ser así, ¿podemos eliminar algún subconjunto de D^* de modo que en el resto T sea uno a uno?

6. Sea D^* el paralelogramo con vértices en $(-1,3)$, $(0,0)$, $(2,-1)$ y $(1,2)$ y $D = [0,1] \times [0,1]$. Hallar T tal que D sea el conjunto imagen de D^* bajo T.

7. Sea $T\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definida por $(\rho, \phi, \theta) \mapsto (x, y, z)$, donde

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \quad y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \quad z = \rho \cos \phi.$$

Sea D^* el conjunto de puntos (ρ, ϕ, θ) tal que $\phi \in [0, \pi]$, $\theta \in [0, 2\pi]$ y $\rho \in [0,1]$. Hallar $D = T(D^*)$. ¿Es T uno a uno? De no ser así, ¿podemos eliminar algún subconjunto de D^* (como lo hicimos en el ejercicio 1, a D^* del ejemplo 1) de modo que en el resto T sea uno a uno?

En los ejercicios 8 y 9 sea $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, donde A es una matriz de 2×2.

8. Mostrar que T es uno a uno si y sólo si el determinante de A es diferente de cero.

9. Mostrar que $\det A \neq 0$ si y sólo si T es suprayectiva.

10. Suponer que $T\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ es lineal; $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, donde A es una matriz de 2×2. Mostrar que si $\det A \neq 0$, T manda paralelogramos a paralelogramos. (IDEA: El paralelogramo general en $\mathbf{R}^2$ se puede describir por el conjunto de puntos $\mathbf{q} = \mathbf{p} + \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}$ para λ y $\mu \in [0,1]$, donde $\mathbf{p}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son vectores en $\mathbf{R}^2$ con $\mathbf{v}$ de modo que no sea múltiplo escalar de $\mathbf{w}$.)

11. Suponer que $T\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ es como en el ejercicio 10 y que $T(P^*) = P$ es un paralelogramo. Mostrar que P^* es un paralelogramo.

6.3 TEOREMA DEL CAMBIO DE VARIABLES

Dadas dos regiones D y D^* del tipo 1 o 2 en $\mathbf{R}^2$, una función diferenciable T en D^* con imagen D, esto es, $T(D^*) = D$ y cualquier función integrable con valores reales, $f\colon D \to \mathbf{R}$, quisiéramos expresar $\int_D f(x,y)\,dA$ como una integral sobre D^* de la función compuesta $f \circ T$. En esta sección veremos cómo hacerlo.

Suponer que la región D^* es un subconjunto de $\mathbf{R}^2$ del tipo 1 con coordenadas variables designadas por (u,v). Más aún, suponer que D es un subconjunto del plano xy, del tipo 1. La función T está dada por dos funciones coordenadas:

$$T(u,v) = (x(u,v), y(u,v)) \qquad \text{para} \qquad (u,v) \in D^*.$$

Como primera conjetura podríamos tener que

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy \stackrel{?}{=} \int_{D^*} f(x,(u,v),y(u,v))\,du\,dv, \tag{1}$$

donde $f \circ T(u,v) = f(x(u,v),y(u,v))$ es la función compuesta definida en D^*. Sin embargo, si consideramos la función $f\colon D \to \mathbf{R}^2$ donde $f(x,y) = 1$, entonces la ecuación (1) implicaría

$$A(D) = \int_D dx\,dy \stackrel{?}{=} \int_{D^*} du\,dv = A(D^*). \tag{2}$$

Es fácil ver que la ecuación (2) se cumplirá sólo para algunos casos particulares y no para una función general T. Por ejemplo, definir T mediante $T(u,v) = (-u^2+4u,v)$. Restringir T al cuadrado unitario $D^* = [0,1]\times[0,1]$ en el plano uv (ver la figura 6.3.1). Entonces, como en el ejercicio 3, sección 6.2, T manda D^* sobre $D = [0,3]\times[0,1]$. Claramente $A(D) \neq A(D^*)$, de modo que la fórmula (2) *no es válida.*

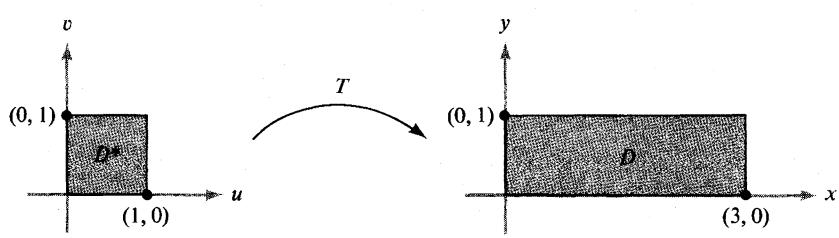


Figura 6.3.1 La función $T\colon (u,v) \mapsto (-u^2+4u,v)$ manda al cuadrado D^* sobre el rectángulo D.

Lo que se necesita es una medida de cómo la transformación $T\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ distorsiona el área de la región. Esto está dado por el *determinante jacobiano*, que se define como sigue.

DEFINICIÓN *Sea $T\colon D^* \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ una transformación C^1 dada por $x = x(u,v)$ y $y = y(u,v)$. El* **jacobiano** *de T, que se escribe $\partial(x,y)/\partial(u,v)$, es el determinante de la matriz derivada $\mathbf{D}T(x,y)$ de T:*

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

EJEMPLO 1 La función de $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}^2$ que transforma coordenadas polares en coordenadas cartesianas está dada por

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

y su jacobiano es

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\,\theta) = r. \qquad \blacktriangle$$

Si hacemos las restricciones adecuadas a la función T, podemos mostrar que el área de $D = T(D^*)$ se obtiene integrando el valor absoluto del jacobiano $\partial(x,y)/\partial(u,v)$ sobre D^*; esto es, tenemos la ecuación

$$A(D) = \int_D dx\,dy = \int_{D^*} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv. \tag{3}$$

Para ilustrar: del ejemplo 1 en la sección 6.2, tomar $T\colon D^* \to D$, donde $D = T(D^*)$ es el conjunto de (x,y) con $x^2 + y^2 \leq 1$ y $D^* = [0,1] \times [0,2\pi]$, y $T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$. Por la fórmula (3),

$$A(D) = \int_{D^*} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| dr\,d\theta = \int_{D^*} r\,dr\,d\theta \tag{4}$$

(aquí, r y θ juegan el papel de u y v). De los cálculos anteriores se sigue que

$$\int_{D^*} r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta = \pi$$

es el área del disco unitario D, confirmando en este caso la fórmula (3). De hecho, podemos recordar del curso de cálculo del primer año que la ecuación (4) es la fórmula correcta para el área de una región en coordenadas polares.

No es fácil probar de manera rigurosa la afirmación (3), de que el determinante jacobiano es una medida de cómo distorsiona el área una transformación. Sin embargo, visto de manera adecuada, es plausible.

Recordar que $A(D) = \int_D dx\,dy$ se obtuvo al dividir D en rectángulos pequeños, sumando sus áreas y tomando el límite de esta suma conforme el tamaño de los subrectángulos tiende a cero (ver el ejemplo 3, sección 5.3). El problema es que T puede mandar rectángulos en regiones cuya área no sea fácil de calcular. Una herramienta útil para ello es la derivada de T, que sabemos (del capítulo 2), da la mejor aproximación lineal a T.

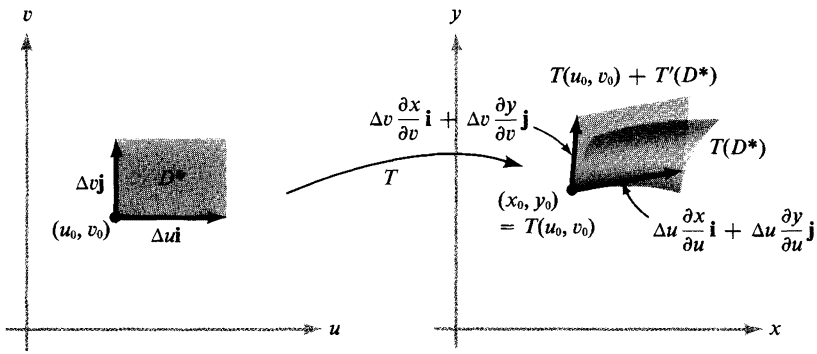


Figura 6.3.2 Efecto de la transformación T en un rectángulo pequeño D^*.

Considerar un pequeño rectángulo D^* en el plano uv según se muestra en la figura 6.3.2. Denotemos por T' la derivada de T evaluada en (u_0, v_0), de modo que T' es una matriz de 2×2. De nuestro trabajo en el capítulo 2 (ver la página 124) sabemos que una buena aproximación a $T(u, v)$ está dada por

$$T(u_0, v_0) + T'\begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix},$$

donde $\Delta u = u - u_0$ y $\Delta v = v - v_0$. Pero esta correspondencia manda D^* a un paralelogramo con vértice en $T(u_0, v_0)$ y con lados adyacentes dados por los vectores

$$T'(\Delta u\mathbf{i}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ 0 \end{bmatrix} = \Delta u \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \end{bmatrix} = \Delta u \mathbf{T}_u$$

$$T'(\Delta v\mathbf{j}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta v \end{bmatrix} = \Delta v \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \Delta v \mathbf{T}_v$$

donde

$$\mathbf{T}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{T}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j}$$

están evaluados en (u_0, v_0).

Sabemos de la sección 1.3, que el área del paralelogramo con lados iguales a los vectores $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ y $c\mathbf{i} + d\mathbf{j}$ es igual al valor absoluto del determinante

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}.$$

Así, el área de $T(D^*)$ es aproximadamente igual al valor absoluto de

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}\Delta u & \frac{\partial x}{\partial v}\Delta v \\ \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u & \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \Delta u \Delta v = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| \Delta u \Delta v$$

evaluado en (u_0, v_0). Pero el valor absoluto de esto es precisamente $|\partial(x,y)/\partial(u,v)|\,\Delta u\,\Delta v$.

Este hecho y un argumento relacionado con una partición hará plausible la fórmula (3). En efecto, si partimos D^* en rectángulos pequeños con lados de longitud Δu y Δv, las imágenes de estos rectángulos están aproximadas por los paralelogramos con lados $\mathbf{T}_u \Delta u$ y $\mathbf{T}_v \Delta v$ y, por lo tanto, con área $|\partial(x,y)/\partial(u,v)|\,\Delta u\,\Delta v$. Así, el área de D^* es aproximadamente $\sum \Delta u\,\Delta v$, donde la suma se toma sobre todos los rectángulos R dentro de D^* (ver la figura 6.3.3). Por lo tanto el área de $T(D^*)$ es aproximadamente la suma $\sum |\partial(x,y)/\partial(u,v)|\,\Delta u\,\Delta v$. En el límite, la suma se convierte en

$$\int_{D^*} \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\, dv.$$

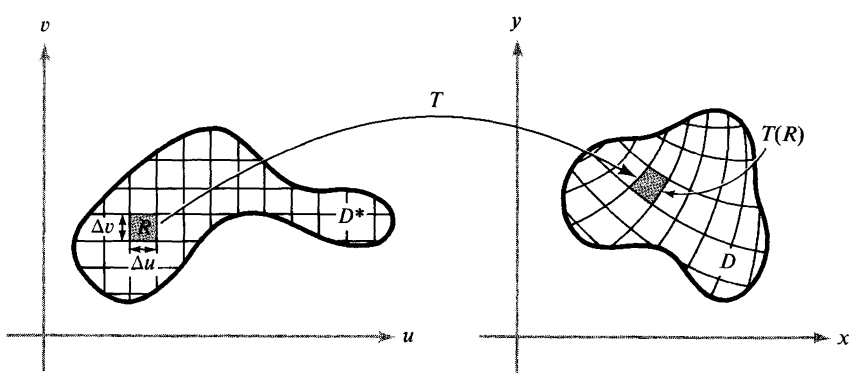


Figura 6.3.3 El área del rectángulo pequeño R es $\Delta u\,\Delta v$. El área de $T(R)$ es aproximadamente $|\partial(x,y)/\partial(u,v)|\,\Delta u\,\Delta v$.

Demos otro argumento para el caso particular (4) de la fórmula (3), esto es, el caso de coordenadas polares. Considerar una región D en el plano xy y una malla correspondiente a una partición de las variables r y θ (figura 6.3.4). El área de la región sombreada es aproximadamente igual a $(\Delta r)(r_{jk}\Delta\theta)$, pues la longitud de arco de un segmento de un círculo de radio r subtendiendo un ángulo ϕ es $r\phi$. El área total es entonces el límite de $\sum r_{jk}\Delta r\,\Delta\theta$; esto es, $\int_{D^*} r\,dr\,d\theta$. La idea clave es que el j-ésimo "rectángulo polar" en la malla tiene área aproximadamente igual a $r_{jk}\,\Delta r\,\Delta\theta$. (Para n grande, el j-ésimo rectángulo polar se ve como un

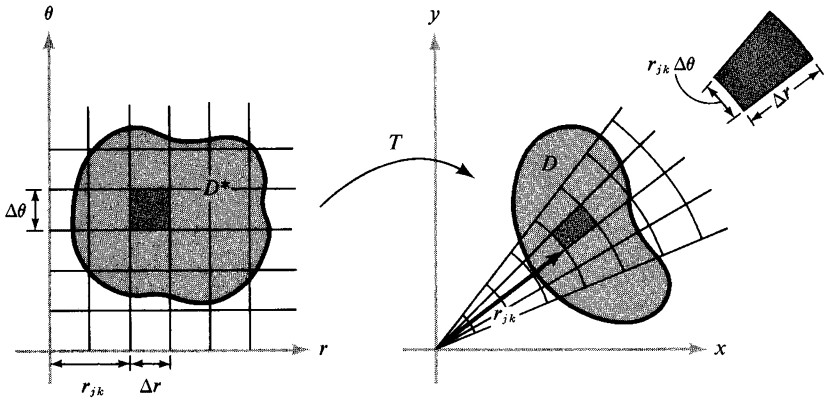


Figura 6.3.4 D^* va a dar a D bajo la función de coordenadas polares T.

rectángulo con lados de longitud $r_{jk}\,\Delta\theta$ y Δr.) Esto deberá arrojar alguna luz sobre por qué decimos que el "elemento de área $\Delta x\,\Delta y$" se transforma en el "elemento de área $r\,\Delta r\,\Delta\theta$." El ejemplo siguiente explica estas ideas para un caso particular.

EJEMPLO 2 *Sea la región elemental D en el plano xy acotada por la gráfica de una ecuación polar $r = f(\theta)$, donde $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$ y $f(\theta) \geq 0$ (ver la figura 6.3.5). En el plano $r\theta$ consideramos la región D^* del tipo 2, donde $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$ y $0 \leq r \leq f(\theta)$. Bajo la transformación $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, la región D^* va a dar sobre la región D. Usar (3) para calcular el área de D.*

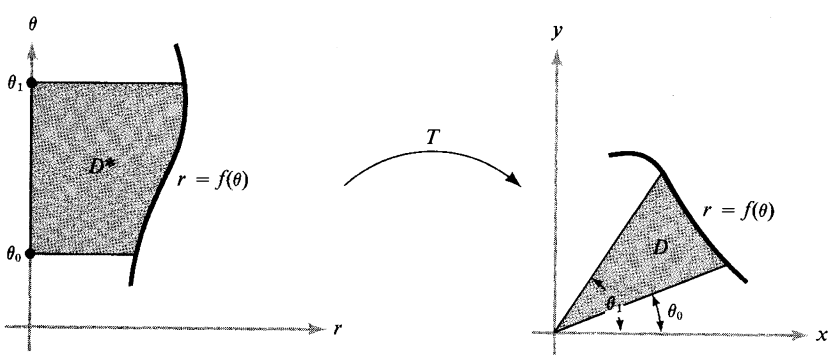


Figura 6.3.5 Efecto sobre la región D^* de la función de coordenadas polares.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} A(D) = \int_D dx\,dy &= \int_{D^*} \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right| dr\,d\theta \\ &= \int_{D^*} r\,dr\,d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \left[\int_0^{f(\theta)} r\,dr \right] d\theta \\ &= \int_{\theta_0}^{\theta_1} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{f(\theta)} d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{[f(\theta)]^2}{2}\,d\theta. \end{aligned}$$

Esta fórmula para $A(D)$ debe ser familiar por el estudio del cálculo de una variable. ▲

Antes de enunciar la fórmula del cambio de variables, que es la culminación de este estudio, recordemos el teorema correspondiente de cálculo de una variable:

$$\int_a^b f(x(u)) \frac{dx}{du}\,du = \int_{x(a)}^{x(b)} f(x)\,dx, \tag{5}$$

donde f es continua y $u \mapsto x(u)$ es continuamente diferenciable en $[a,b]$.

DEMOSTRACIÓN Sea F una antiderivada de f; esto es, $F' = f$, lo cual es posible por el teorema fundamental del cálculo. El lado derecho de la ecuación (5) se vuelve

$$\int_{x(a)}^{x(b)} f(x)\,dx = F(x(b)) - F(x(a)).$$

Para evaluar el lado izquierdo de la ecuación (5), sea $G(u) = F(x(u))$. Por la regla de la cadena, $G'(u) = F'(x(u))x'(u) = f(x(u))x'(u)$. Entonces, de nuevo por el teorema fundamental,

$$\int_a^b f(x(u))x'(u)\,du = \int_a^b G'(u)\,du = G(b) - G(a) = F(x(b)) - F(x(a)),$$

según se requirió. ■

Supongamos ahora que la *función* de clase C^1 $u \mapsto x(u)$ es uno a uno en $[a,b]$. Así, debemos tener $dx/du \geq 0$ en $[a,b]$ o $dx/du \leq 0$ en $[a,b]$. (Si dx/du es positiva y después negativa, la función $x = x(u)$ crece y después baja, y así, no es uno a uno; se aplica un enunciado análogo para el caso en que dx/du sea negativa y después positiva.) Denotemos por I^* el intervalo $[a,b]$ y por I el intervalo cerrado con extremos $x(a)$ y $x(b)$. (Así, $I = [x(a), x(b)]$ si $u \mapsto x(u)$ es creciente e $I = [x(b), x(a)]$ si $u \mapsto x(u)$ es decreciente.) Con esta notación podemos reescribir la fórmula (5) como

$$\int_{I^*} f(x(u)) \left| \frac{dx}{du} \right| du = \int_I f(x)\,dx.$$

Ésta es la fórmula que se generaliza para integrales dobles: I^* se vuelve D^*, I se vuelve D, y $|dx/du|$ es reemplazada por $|\partial(x,y)/\partial(u,v)|$. Enunciemos formalmente el resultado (se omite la demostración técnica).

TEOREMA 2: CAMBIO DE VARIABLES PARA INTEGRALES DOBLES *Sean D y D^* regiones elementales en el plano y sea $T: D^* \to D$ de clase C^1; suponer que T es uno a uno en D^*. Más aún, suponer que $D = T(D^*)$. Entonces, para cualquier función integrable $f: D \to \mathbf{R}$, tenemos*

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{D^*} f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\,dv. \tag{6}$$

Uno de los propósitos del teorema de cambio de variable es proporcionar un método mediante el cual se puedan simplificar algunas integrales dobles. Es posible hallar una integral $\int_D f\,dA$ en la cual sea complicado el integrando f o la región D, y sea difícil la evaluación directa. Por lo tanto, se escoge T de modo que la integral sea fácil de evaluar con el nuevo integrando $f \circ T$ o con la nueva región D^* (definida por $T(D^* = D)$. Desafortunadamente, el problema en la realidad puede complicarse si no se escoge T con cuidado.

EJEMPLO 3 *Sea P el paralelogramo acotado por $y = 2x$, $y = 2x - 2$, $y = x$ y $y = x + 1$ (ver la figura 6.3.6). Evaluar $\int_P xy\,dx\,dy$ haciendo el cambio de variables*

$$x = u - v, \qquad y = 2u - v,$$

esto es, $T(u,v) = (u - v, 2u - v)$.

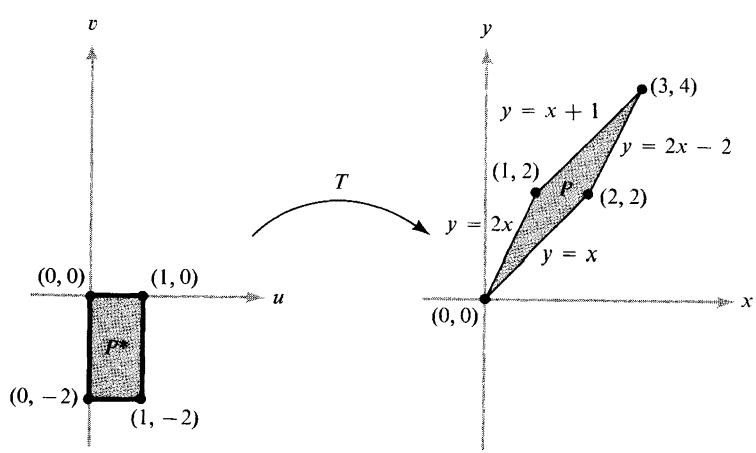


Figura 6.3.6 Efecto de $T(u,v) = (u - v, 2u - v)$ en el rectángulo P^*.

SOLUCIÓN La transformación T es uno a uno (ver el ejercicio 8, sección 6.2) y está diseñada de modo que manda al *rectángulo* P^* acotado por $v = 0$, $v = -2$, $u = 0$ y $u = 1$ sobre P. Al usar T se simplifica la región de integración de P a P^*. Más aún,

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\det\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\right| = 1.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int_P xy\,dx\,dy &= \int_{P^*} (u-v)(2u-v)\,du\,dv \\
&= \int_{-2}^{0}\int_0^1 (2u^2 - 3vu + v^2)\,du\,dv \\
&= \int_{-2}^{0}\left[\frac{2}{3}u^3 - \frac{3u^2v}{2} + v^2u\right]_0^1 dv \\
&= \int_{-2}^{0}\left[\frac{2}{3} - \frac{3}{2}v + v^2\right] dv \\
&= \left[\frac{2}{3}v - \frac{3}{4}v^2 + \frac{v^3}{3}\right]_{-2}^{0} = -\left[\frac{2}{3}(-2) - 3 - \frac{8}{3}\right] \\
&= -[-\tfrac{12}{3} - 3] = 7. \qquad \blacktriangle
\end{aligned}$$

EJEMPLO 4 *Evaluar* $\int_D \log(x^2+y^2)\,dx\,dy$, *donde* D *es la región en el primer cuadrante que está entre los arcos de los círculos (figura 6.3.7)*

$$x^2 + y^2 = a^2, \qquad x^2 + y^2 = b^2 \qquad (0 < a < b).$$

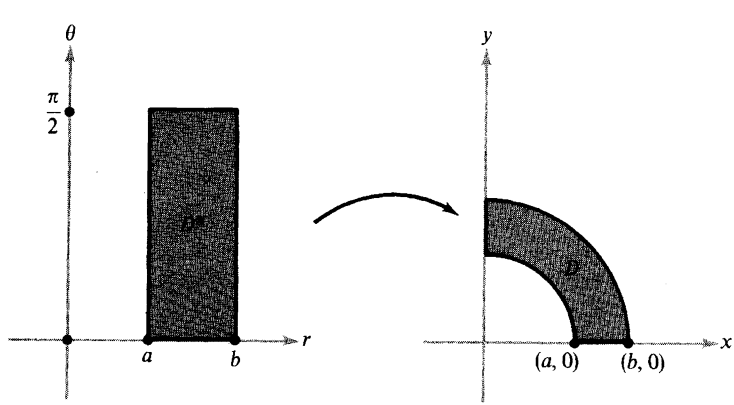


Figura 6.3.7 La función de coordenadas polares manda a un rectángulo D^* sobre parte de un anillo D.

SOLUCIÓN Estos círculos tienen las sencillas ecuaciones $r = a$ y $r = b$ en coordenadas polares. Más aún, $r^2 = x^2 + y^2$ aparece en el integrando. Así, un cambio a coordenadas polares simplificará tanto el integrando como la región de integración. Según el ejemplo 7, sección 6.2, la transformación a coordenadas polares

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

manda el rectángulo D^*, dado por $a \le r \le b$, $0 \le \theta \le \frac{1}{2}\pi$, sobre la región D. Esta transformación es uno a uno en D^*, de modo que por el teorema 2, tenemos

$$\int_D \log(x^2 + y^2)\,dx\,dy = \int_{D^*} \log r^2 \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| dr\,d\theta.$$

Ahora bien, $|\partial(x,y)/\partial(r,\theta)| = r$, como ya se vio; entonces la integral del lado derecho se convierte en

$$\int_a^b \int_0^{\pi/2} r\log r^2\,d\theta\,dr = \frac{\pi}{2}\int_a^b r\log r^2\,dr = \frac{\pi}{2}\int_a^b 2r\log r\,dr.$$

Aplicando integración por partes, o usando la fórmula

$$\int x\log x\,dx = \frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4}$$

de la tabla de integrales al final del libro, obtenemos el resultado

$$\frac{\pi}{2}\int_a^b 2r\log r\,dr = \frac{\pi}{2}\left[b^2\log b - a^2\log a - \frac{1}{2}(b^2 - a^2)\right]. \qquad \blacktriangle$$

Supongamos que consideramos el rectángulo D^* *definido por* $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le r \le a$ en el plano $r\theta$. Entonces la transformación T dada por $T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$ manda D^* sobre el disco D, con ecuación $x^2 + y^2 \le a^2$, en el plano xy. Esta transformación representa el cambio de coordenadas cartesianas a coordenadas polares. Sin embargo, T no satisface los requerimientos del teorema del cambio de variables, pues no es uno a uno en D^*: en particular, T manda todos los puntos con $r = 0$ a $(0,0)$ (ver la figura 6.3.8 y el ejemplo 3 de la sección 6.2). Sin embargo, el teorema del cambio de variables se cumple en este caso. Básicamente, la razón es que el conjunto de puntos donde T no es uno a uno está en un lado de D^*, que es la gráfica de una curva suave y por lo tanto, para los propósitos de integración, puede despreciarse. En suma, la fórmula

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{D^*} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)r\,dr\,d\theta \tag{7}$$

se cumple cuando T manda D^* de manera biunívoca a D, excepto quizá en puntos de la frontera de D^*. El ejemplo 2 proporciona un ejemplo sencillo de

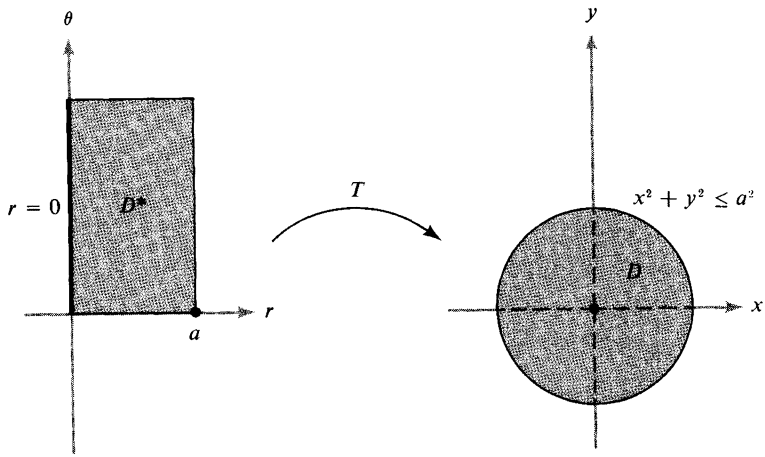


Figura 6.3.8 La imagen del rectángulo D^* bajo la transformación de coordenadas polares es el disco D.

esto cuando $f(x, y)$ es constante, igual a 1. Consideraremos ahora un ejemplo más difícil.

EJEMPLO 5 *Evaluar* $\int_R \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy$ *donde* $R = [0, 1] \times [0, 1]$.

SOLUCIÓN Esta integral doble es igual al volumen de la región tridimensional mostrada en la figura 6.3.9. Como se le presenta, es difícil evaluar esta integral. Como el integrando es una función sencilla de $r^2 = x^2 + y^2$, intentamos de nuevo un cambio de variables a coordenadas polares. Esto traerá una simplificación del integrando, pero, desafortunadamente, no en el dominio de integración. Sin embargo, la simplificación es suficiente para permitirnos evaluar la integral. Para aplicar el teorema 2 con coordenadas polares, nos referimos a la figura 6.3.10. El lector puede verificar que R es la imagen bajo $T(r, \theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$ de la región $D^* = D_1^* \cup D_2^*$ donde para D_1^* tenemos $0 \le \theta \le \frac{1}{4}\pi$ y $0 \le r \le \sec\theta$; para D_2^* tenemos $\frac{1}{4}\pi \le \theta \le \frac{1}{2}\pi$, $0 \le r \le \csc\theta$. La transformación T manda D_1^* sobre un triángulo T_1 y D_2^* sobre un triángulo T_2. La transformación T es uno a uno excepto cuando $r = 0$, de modo que se puede aplicar el teorema 2. Por la simetría de $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ en R, podemos ver que

$$\int_R \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy = 2 \int_{T_1} \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy.$$

Aplicando la fórmula (7), obtenemos

$$\int_{T_1} \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy = \int_{D_1^*} \sqrt{r^2}\, r\, dr\, d\theta = \int_{D_1^*} r^2\, dr\, d\theta.$$

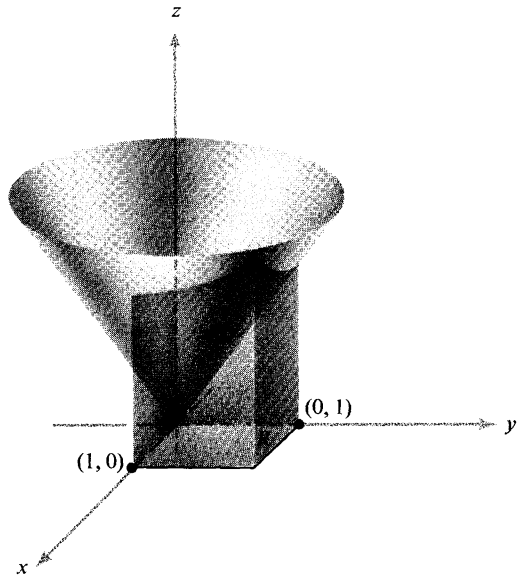


Figura 6.3.9 Volumen de la región bajo $x = \sqrt{x^2 + y^2}$ y sobre $R = [0, 1] \times [0, 1]$.

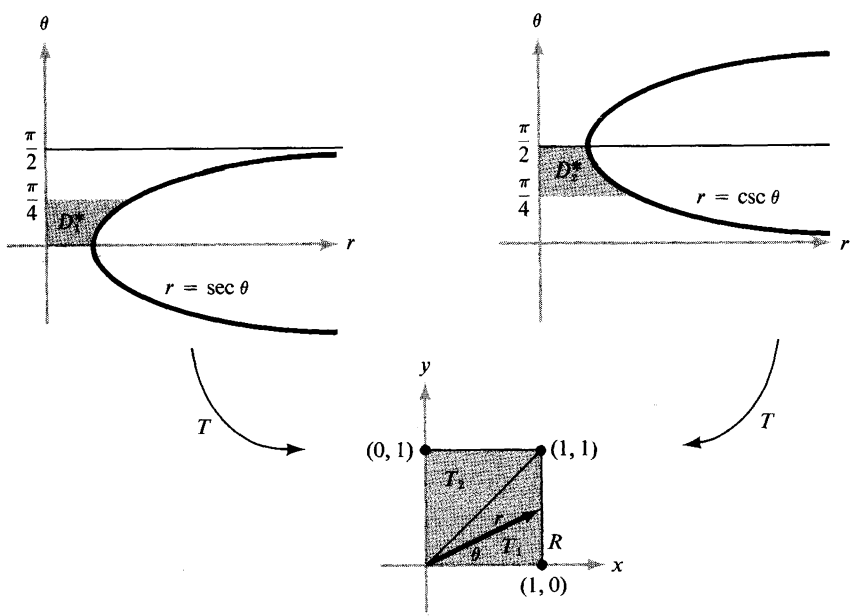


Figura 6.3.10 La transformación en coordenadas polares manda D_1^* al triángulo T_1 y D_2^* a T_2.

A continuación usamos integración iterada para obtener

$$\int_{D_1^*} r^2\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi/4}\left[\int_0^{\sec\theta} r^2\,dr\right]d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/4}\sec^3\theta\,d\theta.$$

Consultando una tabla de integrales (ver al final del libro) para hallar $\int \sec^3 x\,dx$, tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4}\sec^3\theta\,d\theta &= \left[\frac{\sec\theta\tan\theta}{2}\right]_0^{\pi/4} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\sec\theta\,d\theta\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\sec\theta\,d\theta.\end{aligned}$$

Consultando, de nuevo, la tabla para $\int \sec x\,dx$, hallamos

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\sec\theta\,d\theta = \frac{1}{2}[\log|\sec\theta+\tan\theta|]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}\log(1+\sqrt{2}).$$

Combinando estos resultados y recordando el factor $\frac{1}{3}$, obtenemos

$$\int_{D_1^*} r^2\,dr\,d\theta = \frac{1}{3}\left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\log(1+\sqrt{2})\right] = \frac{1}{6}[\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})].$$

Multiplicando por 2, obtenemos la respuesta

$$\int_R \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \frac{1}{3}[\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})]. \qquad \blacktriangle$$

También hay una fórmula de cambio de variables para integrales triples, que enunciamos a continuación. Primero debemos definir el jacobiano de una transformación de $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^3$ —es una extensión sencilla del caso de dos variables.

DEFINICIÓN *Sea $T: W \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ una función C^1 definida por las ecuaciones $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$, $z = z(u,v,w)$. Entonces el* ***jacobiano*** *de T, que se denota por $\partial(x,y,z)/\partial(u,v,w)$ es el determinante*

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w}\\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}.$$

El valor absoluto de este determinante es igual al volumen del paralelepípedo determinado por los vectores

$$\mathbf{T}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k}$$
$$\mathbf{T}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k}$$
$$\mathbf{T}_w = \frac{\partial x}{\partial w}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial w}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial w}\mathbf{k}$$

(ver la sección 1.3). Así como en el caso de dos variables, el jacobiano mide cómo la transformación T distorsiona su dominio. Entonces, para integrales de volumen (triples), la fórmula del cambio de variable toma la forma:

$$\int_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$
$$= \int_{D^*} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| du\,dv\,dw, \tag{8}$$

donde D^* es una región elemental en el espacio uvw correspondiente a D en el espacio xyz, bajo un cambio de coordenadas $T\colon (u,v,w) \mapsto (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$, siempre que T sea de clase C^1 y uno a uno, excepto quizá en un conjunto que sea la unión de gráficas de funciones de dos variables.

Apliquemos la fórmula (8) para coordenadas cilíndricas y esféricas (ver la sección 1.4). Primero calculamos el jacobiano de la función que define el cambio de coordenadas. Como

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\operatorname{sen}\theta, \qquad z = z,$$

tenemos

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Así, obtenemos la fórmula

$$\int_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{D^*} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z) r\,dr\,d\theta\,dz. \tag{9}$$

A continuación consideramos el sistema de coordenadas esféricas. Recordar que está dado por

$$x = \rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta, \qquad y = \rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \qquad z = \rho\cos\phi.$$

Por lo tanto, tenemos

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)} = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\phi\cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & \rho\cos\phi\cos\theta \\ \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & \rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\operatorname{sen}\theta \\ \cos\phi & 0 & -\rho\operatorname{sen}\phi \end{vmatrix}$$

Desarrollando a lo largo del último renglón, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)} &= \cos\phi \begin{vmatrix} -\rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & \rho\cos\phi\cos\theta \\ \rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\operatorname{sen}\theta \end{vmatrix} \\ &\quad - \rho\operatorname{sen}\phi \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\phi\cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & \rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta \end{vmatrix} \\ &= -\rho^2\cos^2\phi\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}^2\theta - \rho^2\cos^2\phi\operatorname{sen}\phi\cos^2\theta \\ &\quad - \rho^2\operatorname{sen}^3\phi\cos^2\theta - \rho^2\operatorname{sen}^3\phi\operatorname{sen}^2\theta \\ &= -\rho^2\cos^2\phi\operatorname{sen}\phi - \rho^2\operatorname{sen}^3\phi \\ &= -\rho^2\operatorname{sen}\phi. \end{aligned}$$

Llegamos así a la fórmula

$$\begin{aligned} &\int_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \\ &\qquad = \int_{D^*} f(\rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \rho\cos\phi)\rho^2\operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi. \end{aligned} \tag{10}$$

Para probar la validez de la fórmula (10), se debe mostrar que la transformación S en el conjunto D^* es uno a uno excepto en un conjunto que sea la unión de un número finito de gráficas de funciones continuas. Dejaremos esta verificación para el ejercicio 20.

EJEMPLO 6 *Evaluar* $\int_D \exp(x^2+y^2+z^2)^{3/2}\,dV$, *donde* D *es la bola unitaria en* $\mathbf{R}^3$.

SOLUCIÓN Notar primero que no podemos integrar fácilmente esta función usando integrales iteradas (¡intentarlo!). Tratemos entonces con un cambio de variable. Parece apropiada la transformación a coordenadas esféricas, pues así toda la cantidad $x^2+y^2+z^2$ se puede reemplazar por una variable, a saber ρ^2. Si D^* es la región tal que

$$0 \le \rho \le 1, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi, \qquad 0 \le \phi \le \pi,$$

podemos aplicar la fórmula (10) y escribir

$$\int_D \exp(x^2+y^2+z^2)^{3/2}\,dV = \int_{D^*} \rho^2 e^{\rho^3}\operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi.$$

Esta integral es igual a la integral iterada

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{\rho^3} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\theta \, d\phi \, d\rho &= 2\pi \int_0^1 \int_0^\pi e^{\rho^3} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\phi \, d\rho \\ &= -2\pi \int_0^1 \rho^2 e^{\rho^3} [\cos\phi]_0^\pi \, d\rho \\ &= 4\pi \int_0^1 e^{\rho^3} \rho^2 \, d\rho = \frac{4}{3}\pi \int_0^1 e^{\rho^3} (3\rho^2) \, d\rho \\ &= [\tfrac{4}{3}\pi e^{\rho^3}]_0^1 = \frac{4}{3}\pi(e-1). \qquad \blacktriangle\end{aligned}$$

EJEMPLO 7 *Sea D la bola de radio R y centro $(0,0,0)$ en $\mathbf{R}^3$. Hallar el volumen de D.*

SOLUCIÓN El volumen de D es $\int_D dx\,dy\,dz$. Esta integral se puede evaluar al reducirla a integrales iteradas (ejemplo 1, sección 6.1) o considerando D como un volumen de revolución, pero la evaluaremos aquí usando coordenadas esféricas. Obtenemos

$$\begin{aligned}\int_D dx\,dy\,dz &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi \\ &= \frac{R^3}{3} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\phi \, d\theta \, d\phi = \frac{2\pi R^3}{3} \int_0^\pi \operatorname{sen}\phi \, d\phi \\ &= \frac{2\pi R^3}{3} \{-[\cos(\pi) - \cos(0)]\} = \frac{4\pi R^3}{3},\end{aligned}$$

que es la conocida fórmula para el volumen de una esfera sólida. ▲

EJERCICIOS

1. Sea D el círculo unitario. Evaluar

$$\int_D \exp(x^2 + y^2) \, dx \, dy$$

haciendo un cambio de variables a coordenadas polares.

2. Sea D la región $0 \le y \le x$ y $0 \le x \le 1$. Evaluar

$$\int_D (x + y) \, dx \, dy$$

haciendo el cambio de variables $x = u + v$, $y = u - v$. Verificar la respuesta obtenida evaluando directamente la integral, usando una integral iterada.

3. Sea $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ la función definida por $T(u,v) = (4u, 2u+3v)$. Sea D^* el rectángulo $[0,1] \times [1,2]$. Hallar $D = T(D^*)$ y evaluar

(a) $\int_D xy\,dx\,dy$ $\boxed{\text{(b)}}$ $\int_D (x-y)\,dx\,dy$

haciendo un cambio de variables para evaluarlas como integrales sobre D^*.

4. Repetir el ejercicio 3 para $T(u,v) = (u, v(1+u))$.

5. Evaluar

$$\int_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{1+x+2y}}$$

donde $D = [0,1] \times [0,1]$, haciendo $T(u,v) = (u, v/2)$ y evaluando una integral sobre D^*, donde $T(D^*) = D$.

6. Definir $T(u,v) = (u^2 - v^2, 2uv)$. Sea D^* el conjunto de (u,v) con $u^2 + v^2 \leq 1$, $u \geq 0$, $v \geq 0$. Hallar $T(D^*) = D$. Evaluar $\int dx\,dy$.

$\boxed{\textbf{7.}}$ Sea $T(u,v)$ como en el ejercicio 6. Haciendo ese cambio de variables, evaluar

$$\int_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

8. Calcular $\int_R \frac{1}{x+y}\,dy\,dx$, donde R es la región acotada por $x = 0$, $y = 0$, $x+y = 1$, $x+y = 4$, usando la función $T(u,v) = (u - uv, uv)$.

9. Evaluar $\int_D (x^2+y^2)^{3/2}\,dx\,dy$ donde D es el disco $x^2 + y^2 \leq 4$.

10. Sea D^* una región del tipo 1 en el plano uv acotado por

$$v = g(u), \qquad v = h(u) \leq g(u)$$

para $a \leq u \leq b$. Sea $T\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ la transformación dada por

$$x = u, \qquad y = \psi(u,v),$$

donde ψ es de clase C^1 y $\partial\psi/\partial v$ nunca es cero. Suponer que $T(D^*) = D$ es una región del tipo 1; mostrar que si $f\colon D \to \mathbf{R}$ es continua, entonces

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{D^*} f(u, \psi(u,v)) \left|\frac{\partial\psi}{\partial v}\right| du\,dv.$$

$\boxed{\textbf{11.}}$ Usar integrales dobles para hallar el área dentro de la curva $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$.

12. (a) Expresar $\int_0^1 \int_0^{x^2} xy\,dy\,dx$ como una integral sobre el triángulo D^*, que es el conjunto de (u, v) donde $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq u$ (IDEA: Hallar una función T uno a uno, de D^* sobre la región dada de integración.)

(b) Evaluar esta integral directamente, sobre D^*.

13. Integrar $ze^{x^2+y^2}$ sobre el cilindro $x^2 + y^2 \leq 4$, $2 \leq z \leq 3$.

14. Sea D el disco unitario. Expresar $\int_D (1 + x^2 + y^2)^{3/2}\,dx\,dy$ como una integral sobre el rectángulo $[0, 1] \times [0, 2\pi]$ y evaluar.

15. Usando coordenadas polares, hallar el área acotada por la *lemniscata* $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$.

16. Rehacer el ejercicio 11 de la sección 5.3 usando un cambio de variables y comparando el esfuerzo realizado con cada método.

17. Calcular $\int_R (x+y)^2 e^{x-y}\,dx\,dy$ donde R es la región acotada por $x+y = 1$, $x+y = 4$, $x - y = -1$ y $x - y = 1$.

18. Sea $T\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definida por

$$T(u, v, w) = (u \cos v \cos w,\ u \operatorname{sen} v \cos w,\ u \operatorname{sen} w).$$

(a) Mostrar que T es sobre la esfera unitaria; esto es, todo (x, y, z) con $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ se puede escribir como $(x, y, z) = T(u, v, w)$ para algún (u, v, w).

(b) Mostrar que T no es uno a uno.

19. Integrar $x^2 + y^2 + z^2$ sobre el cilindro $x^2 + y^2 \leq 2$, $-2 \leq z \leq 3$.

20. Mostrar que la función de cambio de coordenadas a esféricas $S(\rho, \theta, \phi) = (\rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \phi)$ es uno a uno excepto en un conjunto que es unión de un número finito de gráficas de funciones continuas.

21. Sea B la bola unitaria. Evaluar

$$\int_B \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{2 + x^2 + y^2 + z^2}}$$

haciendo el cambio de variables apropiado.

22. Evaluar $\iint_A 1/(x^2 + y^2)^2\,dx\,dy$ donde A está determinada por las condiciones $x^2 + y^2 \leq 1$ y $x + y \geq 1$.

23. Evaluar $\displaystyle\int_S \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$, donde S es el sólido acotado por las dos esferas $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, donde $0 < b < a$.

24. Evaluar $\iint_D x^2\,dx\,dy$ donde D está determinado por las dos condiciones $0 \le x \le y$ y $x^2 + y^2 \le 1$.

25. Integrar $\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,e^{-(x^2+y^2+z^2)}$ sobre la región descrita en el ejercicio 23.

26. Evaluar lo siguiente usando coordenadas cilíndricas.

(a) $\iiint_B z\,dx\,dy\,dz$ donde B es la región dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, sobre el plano xy y debajo del cono $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$

(b) $\iiint_D (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}\,dx\,dy\,dz$ donde D es la región determinada por las condiciones $\frac{1}{2} \le z \le 1$ y $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$

27. Evaluar $\iint_B (x + y)\,dx\,dy$ donde B es el rectángulo en el plano xy con vértices en $(0,1)$, $(1,0)$, $(3,4)$ y $(4,3)$.

28. Evaluar $\iint_D (x+y)\,dx\,dy$ donde D es el cuadrado con vértices en $(0,0)$, $(1,2)$, $(3,1)$ y $(2,-1)$.

29. Sea E el elipsoide $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) \le 1$, donde a, b y c son positivos.

(a) Hallar el volumen de E.

(b) Evaluar $\iiint_E [(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2)]\,dx\,dy\,dz$. (IDEA: Cambiar variables y después usar coordenadas esféricas.)

30. Usando coordenadas esféricas (ver la sección 1.4), calcular la integral de $f(\rho, \phi, \theta) = 1/\rho$ sobre la región en el primer octante de $\mathbf{R}^3$ que está acotada por los conos $\phi = \pi/4$, $\phi = \arctan 2$ y la esfera $\rho = \sqrt{6}$.

***31.** La función $T(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$ transforma el rectángulo $1 \le u \le 2$, $1 \le v \le 3$ del plano uv en una región R del plano xy.

(a) Mostrar que T es uno a uno.

(b) Hallar el área de R usando la fórmula del cambio de variables.

***32.** Denotemos por R la región dentro de $x^2 + y^2 = 1$ pero fuera de $x^2 + y^2 = 2y$ con $x \ge 0$, $y \ge 0$.

(a) Esbozar esta región.

(b) Sea $u = x^2 + y^2$, $v = x^2 + y^2 - 2y$. Esbozar la región D en el plano uv que corresponde a R bajo este cambio de coordenadas.

(c) Calcular $\int_R xe^y\,dx\,dy$ usando este cambio de coordenadas.

***33.** Sea D la región acotada por $x^{3/2} + y^{3/2} = a^{3/2}$, para $x \ge 0$, $y \ge 0$ y los ejes coordenados $x = 0$, $y = 0$. Expresar $\int_D f(x, y)\,dx\,dy$ como una integral sobre el triángulo D^*, que es el conjunto de puntos $0 \le u \le a$, $0 \le v \le a - u$. (No intentar evaluarla.)

6.4 APLICACIONES DE LAS INTEGRALES DOBLES Y TRIPLES

En esta sección estudiaremos como aplicaciones: valores promedio, centros de masa, momentos de inercia y potencial gravitacional.

Si $x_1, \ldots, x_n$ son n números, su *promedio* está definido por $[x_i]_{\text{prom}} = (x_1 + \cdots + x_n)/n = (1/n)\sum_{i=1}^n x_i$. Este concepto nos lleva a definir el *valor promedio*

de una función de una variable en el intervalo $[a, b]$ por

$$[f]_{\text{prom}} = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}.$$

Asimismo, para funciones de dos variables, la razón de la integral al área de D,

$$[f]_{\text{prom}} = \frac{\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy}{\iint\limits_D dx\,dy}. \tag{1}$$

se llama *valor promedio* de f sobre D.

EJEMPLO 1 *Hallar el valor promedio de* $f(x,y) = x\,\text{sen}^2(xy)$ *en* $D = [0,\pi] \times [0,\pi]$.

SOLUCIÓN Primero calculamos

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy &= \int_0^\pi \int_0^\pi x\,\text{sen}^2(xy)\,dx\,dy \\
&= \int_0^\pi \left[\int_0^\pi \frac{1-\cos(2xy)}{2}\,x\,dy\right] dx = \int_0^\pi \left[\frac{y}{2} - \frac{\text{sen}(2xy)}{4x}\right] x\Big|_{y=0}^{\pi} dx \\
&= \int_0^\pi \left[\frac{\pi x}{2} - \frac{\text{sen}(2\pi x)}{4}\right] dx = \left[\frac{\pi x^2}{4} + \frac{\cos(2\pi x)}{8\pi}\right]\Bigg|_0^\pi \\
&= \frac{\pi^3}{4} + \frac{\cos(2\pi^2) - 1}{8\pi}.
\end{aligned}$$

Así, este valor promedio de f, por la fórmula (1), es

$$\frac{\pi^3/4 + [\cos(2\pi^2) - 1]/8\pi}{\pi^2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\cos(2\pi^2) - 1}{8\pi^3} \approx 0.7839. \qquad \blacktriangle$$

Si se colocan $m_1, \ldots, m_n$ masas en los puntos $x_1, \ldots, x_n$ sobre el eje x, su *centro de masa* se define como

$$\overline{x} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}. \tag{2}$$

Esta definición surge de la observación siguiente: si tratamos de balancear masas en una palanca (figura 6.4.1), el punto de equilibrio $\overline{x}$ ocurre donde el momento total (masa por la distancia al punto de equilibrio) es cero, esto es, donde

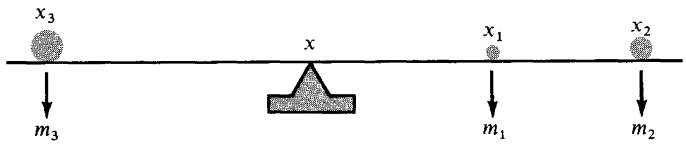


Figura 6.4.1 La palanca está equilibrada si $\sum(x_i - \overline{x})m_i = 0$.

$\sum m_i(x_i - \overline{x}) = 0$; un principio físico que se remonta a Newton asegura que esta condición significa que no hay tendencia a que la palanca gire.

Para una densidad de masa continua $\rho(x)$ a lo largo de la palanca, el análogo de la fórmula (2) es

$$\overline{x} = \frac{\int x\rho(x)\,dx}{\int \rho(x)\,dx}. \tag{3}$$

Para placas bidimensionales, esto se generaliza (ver la figura 6.4.2) a

$$\overline{x} = \frac{\iint\limits_D x\rho(x,y)\,dx\,dy}{\iint\limits_D \rho(x,y)\,dx\,dy} \quad \text{y} \quad \overline{y} = \frac{\iint\limits_D y\rho(x,y)\,dx\,dy}{\iint\limits_D \rho(x,y)\,dx\,dy}. \tag{4}$$

donde, de nuevo, $\rho(x,y)$ es la densidad de masa.

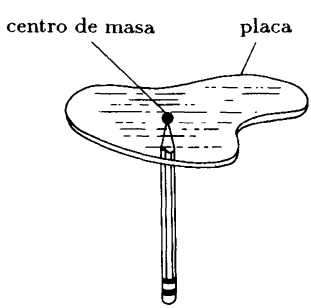


Figura 6.4.2 La placa se equilibra cuando se coloca sobre su centro de masa.

EJEMPLO 2 *Hallar el centro de masa del rectángulo* $[0,1] \times [0,1]$ *si la densidad de masa es* e^{x+y}.

SOLUCIÓN Calculamos primero la masa total:

$$\iint_D e^{x+y}\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^1 e^{x+y}\,dx\,dy = \int_0^1 (e^{x+y}|_{x=0}^1)\,dy$$

$$= \int_0^1 (e^{1+y} - e^y)\,dy$$

$$= (e^{1+y} - e^y)|_{y=0}^1 = e^2 - e - (e-1) = e^2 - 2e + 1.$$

El numerador en la fórmula (4) para $\overline{x}$ es

$$\int_0^1 \int_0^1 xe^{x+y}\,dx\,dy = \int_0^1 (xe^{x+y} - e^{x+y})|_{x=0}^1\,dy$$

$$= \int_0^1 [e^{1+y} - e^{1+y} - (0e^y - e^y)]\,dy$$

$$= \int_0^1 e^y\,dy = e^y|_{y=0}^1 = e - 1,$$

de modo que

$$\overline{x} = \frac{e-1}{e^2 - 2e + 1} = \frac{e-1}{(e-1)^2} = \frac{1}{e-1} \approx 0.582.$$

Se pueden intercambiar los papeles de x y y en todos estos cálculos, entonces también $\overline{y} = 1/(e-1) \approx 0.582$. ▲

Para una región W en el espacio con densidad de masa $\rho(x, y, z)$, estas fórmulas se generalizan como sigue:

$$\text{volumen} = \iiint_W dx\,dy\,dz, \tag{5}$$

$$\text{masa} = \iiint_W \rho(x, y, z)dx\,dy\,dz. \tag{6}$$

$$\text{centro de masa} = (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}),$$

donde

$$\overline{x} = \frac{\iiint_W x\rho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz}{\text{masa}},$$

$$\overline{y} = \frac{\iiint_W y\rho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz}{\text{masa}}, \tag{7}$$

$$\overline{z} = \frac{\iiint_W z\rho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz}{\text{masa}}.$$

El *valor promedio* de una función f en una región W está definido por

$$[f]_{\text{prom}} = \frac{\iiint\limits_W f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_W dx\,dy\,dz}. \tag{8}$$

EJEMPLO 3 *El cubo* $[1,2] \times [1,2] \times [1,2]$ *tiene densidad de masa* $\rho(x,y,z) = (1+x)e^z y$. *Hallar la masa de la caja.*

SOLUCIÓN La masa de la caja es, por la fórmula (6),

$$\begin{aligned}
&\int_1^2 \int_1^2 \int_1^2 (1+x)e^z y\,dx\,dy\,dz \\
&= \int_1^2 \int_1^2 \left[\left(x + \frac{x^2}{2}\right) e^z y\right]_{x=1}^{x=2} dy\,dz = \int_1^2 \int_1^2 \frac{5}{2} e^z y\,dy\,dz \\
&= \int_1^2 \frac{15}{4} e^z\,dz = \left[\frac{15}{4} e^z\right]_{x=1}^{x=2} \\
&= \frac{15}{4}(e^2 - e). \qquad \blacktriangle
\end{aligned}$$

Si una región y su densidad de masa son simétricas según una reflexión en un plano, entonces el centro de masa está en ese plano. Por ejemplo, en la fórmula (7) para $\overline{x}$, si la región y la densidad de masa son simétricas en el plano yz, entonces el integrando es impar en x, de modo que $\overline{x} = 0$. Esta manera de usar la simetría se ilustra en el ejemplo siguiente. (Ver además el ejercicio 17.)

EJEMPLO 4 *Hallar el centro de masa de la región hemisférica* W *definida por las desigualdades* $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $z \geq 0$. *(Suponer que la densidad es constante.)*

SOLUCIÓN Por simetría, el centro de masa debe estar en el eje z, de modo que $\overline{x} = \overline{y} = 0$. Para hallar $\overline{z}$ debemos calcular, por la fórmula (7), $I = \iiint_W z\,dx\,dy\,dz$. El hemisferio es de los tipos I, II y III; lo consideraremos de tipo III. Entonces la integral I se convierte en ...

$$I = \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \int_{-\sqrt{1-y^2-z^2}}^{\sqrt{1-y^2-z^2}} z\,dx\,dy\,dz.$$

Como z es constante para las integraciones en x y en y, podemos sacarla de los signos de integral y obtener

$$I = \int_0^1 z \left(\int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \int_{-\sqrt{1-y^2-z^2}}^{\sqrt{1-y^2-z^2}} z\,dx\,dy \right) dz.$$

En lugar de calcular explícitamente las dos integrales interiores, observamos que se trata ni más ni menos que de la integral doble $\iint_D dx\,dy$ sobre el disco $x^2+y^2 \leq 1-z^2$, considerado como región del tipo 2. El área de este disco es $\pi(1-z^2)$, de modo que

$$I = \pi \int_0^1 z(1-z^2)\,dz = \pi \int_0^1 (z-z^3)\,dz = \pi \left[\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

El volumen del hemisferio es $\frac{2}{3}\pi$, de modo que $\overline{z} = (\pi/4)/(\frac{2}{3}\pi) = \frac{3}{8}$. ▲

EJEMPLO 5 *La temperatura en los puntos del cubo* $W = [-1,1] \times [-1,1] \times [-1,1]$ *es proporcional al cuadrado de la distancia al origen.*

(a) *¿Cuál es la temperatura promedio?*
(b) *¿En qué puntos del cubo la temperatura es igual a la temperatura promedio?*

SOLUCIÓN (a) Sea c la constante de proporcionalidad de modo que $T = c(x^2+y^2+z^2)$ y la temperatura promedio es $[T]_{\text{prom}} = \frac{1}{8}\iiint_W T\,dx\,dy\,dz$, pues el volumen del cubo es 8. Así,

$$[T]_{\text{prom}} = \frac{c}{8}\int_{-1}^1\int_{-1}^1\int_{-1}^1 (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz.$$

La integral triple es la suma de las integrales de x^2, y^2 y z^2. Como x, y y z entran de manera simétrica en la descripción del cubo, las tres integrales serán iguales, de modo que

$$[T]_{\text{prom}} = \frac{3c}{8}\int_{-1}^1\int_{-1}^1\int_{-1}^1 z^2\,dx\,dy\,dz = \frac{3c}{8}\int_{-1}^1 z^2\left(\int_{-1}^1\int_{-1}^1 dx\,dy\right)dz.$$

La integral interior es igual al área del cuadrado $[-1,1]\times[-1,1]$. El área de ese cuadrado es 4, de modo que

$$[T]_{\text{prom}} = \frac{3c}{8}\int_{-1}^1 4z^2\,dz = \frac{3c}{2}\left(\frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^1 = c.$$

(b) La temperatura es igual a la temperatura promedio cuando $c(x^2+y^2+z^2) = c$, esto es, en la esfera $x^2+y^2+z^2 = 1$, que está inscrita en el cubo W. ▲

Otro concepto importante en mecánica, que se necesita para estudiar la dinámica de un cuerpo rígido en rotación, es el de *momento de inercia*. Si el sólido W tiene densidad uniforme ρ, el *momento de inercia* alrededor del eje x está

definido por

$$I_x = \iiint_W \rho(y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz. \tag{9}$$

De manera análoga,

$$I_y = \iiint_W \rho(x^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz, \qquad I_z = \iiint_W \rho(x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz. \tag{9}$$

El momento de inercia mide la respuesta de un cuerpo a intentos de girarlo; es análogo a la masa de un cuerpo, que mide su respuesta al intento de moverlo. Sin embargo, a diferencia del movimiento de traslación, los momentos de inercia dependen de la forma y no sólo de la masa total. (Es más difícil poner a girar un mástil que una bola compacta con la misma masa).

EJEMPLO 6 *Calcular el momento de inercia I_z del sólido arriba del plano xy acotado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, suponiendo que a y la densidad de masa son constantes.*

SOLUCIÓN El paraboloide y el cilindro se intersecan en el plano $z = a^2$. Usando coordenadas cilíndricas, hallamos de (9), que

$$I_z = \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^{r^2} \rho r^2 \cdot r\, dz\, d\theta\, dr = \rho \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^{r^2} r^3\, dz\, d\theta\, dr = \frac{\pi \rho a^6}{3}. \qquad \blacktriangle$$

Una interesante aplicación física de la integración triple es la determinación de campos gravitacionales de objetos sólidos. En el ejemplo 6, sección 2.5, se mostró que el campo de fuerza gravitacional $\mathbf{F}(x, y, z)$ de una partícula es el negativo del gradiente de una función $V(x, y, z)$ llamada potencial gravitacional. Si hay una masa puntual M en (x, y, z), entonces el potencial gravitacional que actúa sobre una masa m en (x_1, y_1, z_1) debido a esta masa, es $GmM[(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2]^{-1/2}$, donde G es la constante de gravitación universal.

Si nuestro objeto atractor es un dominio extendido W con densidad de masa $\rho(x, y, z)$, podemos pensarlo como formado de regiones infinitesimales con forma de caja con masas $dm = \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ localizadas en los puntos (x, y, z). El potencial gravitacional total para W se obtiene, entonces, "sumando" los potenciales de las masas infinitesimales —esto es, como una integral triple (ver la figura 6.4.3.):

$$V(x_1, y_1, z_1) = Gm \iiint_W \frac{\rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}}. \tag{10}$$

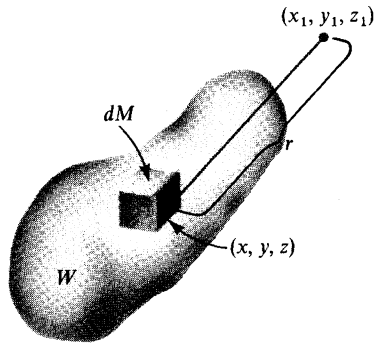


Figura 6.4.3 El potencial gravitacional actuando sobre una masa m en (x_1, y_1, z_1) surge de la masa $dM = \rho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$ en (x, y, z) es $[Gm\rho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz]/r$.

NOTA HISTÓRICA

La teoría de los campos de fuerzas gravitacionales y de potenciales gravitacionales fue desarrollada por Isaac Newton (1642–1727). Newton detuvo la publicación de sus teorías gravitacionales por largo tiempo. El resultado de que un planeta esférico tiene el mismo campo gravitacional que tendría si su masa estuviera concentrada en el centro del planeta, apareció por primera vez en su famoso trabajo *Philosophia Naturalis, Principia Mathematica*, cuya primera edición apareció en 1687. Resolveremos el problema de Newton usando integrales múltiples y coordenadas esféricas; es notable que en la solución publicada por Newton usa sólo geometría euclidiana.

EJEMPLO 7 *Sea W una región de densidad constante y masa total M. Mostrar que el potencial gravitacional está dado por*

$$V(x_1, y_1, z_1) = \left[\frac{1}{r}\right]_{\text{prom}} GMm,$$

donde $[1/r]_{\text{prom}}$ es el promedio sobre W de

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}}.$$

SOLUCIÓN De acuerdo con la fórmula (10),

$$\begin{aligned}
V(x_1, y_1, z_1) &= Gm \iiint_W \frac{\rho\, dx\, dy\, dz}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}} \\
&= Gm\rho \iiint_W \frac{dx\, dy\, dz}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}} \\
&= Gm[\rho \text{ volumen } (W)] \frac{\displaystyle\iiint_W \frac{dx\, dy\, dz}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}}}{\text{volumen } (W)} \\
&= GmM \left[\frac{1}{r}\right]_{\text{prom}}
\end{aligned}$$

como se requería. ▲

Usemos ahora la fórmula (10) y coordenadas esféricas para hallar el potencial gravitacional $V(x_1, y_1, z_1)$ para la región W entre las esferas concéntricas $\rho = \rho_1$ y $\rho = \rho_2$, suponiendo que la densidad es constante. Antes de evaluar la integral en la fórmula (10), hacemos algunas observaciones que simplificarán los cálculos. Como G, m y la densidad son constantes, podemos ignorarlas al principio. Como el cuerpo atractor W es simétrico respecto a rotaciones alrededor del origen, el potencial $V(x_1, y_1, z_1)$ debe, a su vez, ser simétrico —así, $V(x_1, y_1, z_1)$ depende sólo de la distancia $R = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ al origen—. Nuestros cálculos serán más sencillos si vemos el punto $(0, 0, R)$ en el eje z (ver la figura 6.4.4). Así, nuestra integral es

$$V(0, 0, R) = \iiint_W \frac{dx\, dy\, dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-R)^2}}.$$

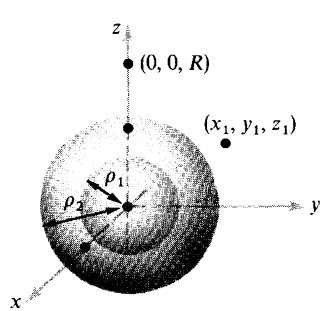


Figura 6.4.4 El potencial gravitacional en (x_1, y_1, z_1) es igual al de $(0, 0, R)$, donde $R = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$.

En coordenadas esféricas, W se describe mediante las desigualdades $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq \phi \leq \pi$, de modo que

$$V(0,0,R) = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\theta \, d\phi \, d\rho}{\sqrt{\rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) + (\rho\cos\phi - R)^2}}.$$

Reemplazando $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta$ por 1, de modo que el integrando ya no incluya θ, podemos integrar sobre θ para obtener

$$\begin{aligned} V(0,0,R) &= 2\pi \int_{\rho_1}^{\rho_2} \int_0^{\pi} \frac{\rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\phi \, d\rho}{\sqrt{\rho^2 \operatorname{sen}^2\phi + (\rho\cos\phi - R)^2}} \\ &= 2\pi \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho^2 \left(\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\phi \, d\phi}{\sqrt{\rho^2 - 2R\rho\cos\phi + R^2}} \right) d\rho. \end{aligned}$$

La integral interior se evalúa fácilmente usando la sustitución $u = -2R\rho\cos\phi$. Obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2R\rho} \int_{-2R\rho}^{2R\rho} (\rho^2 + u + R^2)^{-1/2} \, du &= \frac{2}{2R\rho} (\rho^2 + u + R)^{1/2} \Big|_{-2R\rho}^{2R\rho} \\ &= \frac{1}{R\rho} [(\rho^2 + 2R\rho + R^2)^{1/2} - (\rho^2 - 2R\rho + R^2)^{1/2} \\ &= \frac{1}{R\rho} \{[(\rho + R)^2]^{1/2} - [(\rho - R)^2]^{1/2}\} \\ &= \frac{1}{R\rho} (\rho + R - |\rho - R|). \end{aligned}$$

La expresión $\rho + R$ siempre es positiva, pero $\rho - R$ puede no serlo, de modo que debemos mantener el signo de valor absoluto. (Aquí hemos usado la fórmula $\sqrt{x^2} = |x|$.) Sustituyendo en la fórmula para V, obtenemos

$$\begin{aligned} V(0,0,R) &= 2\pi \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\rho^2}{R\rho} (\rho + R - |\rho - R|) \, d\rho \\ &= \frac{2\pi}{R} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho(\rho + R - |\rho - R|) \, d\rho. \end{aligned}$$

Consideraremos ahora dos posibilidades para R, correspondientes al potencial gravitacional para objetos fuera y dentro de la bola hueca W.

Si $R \geq \rho_2$ (esto es, si (x_1, y_1, z_1) está fuera de W), entonces $|\rho - R| = R - \rho$ para todo ρ en el intervalo $[\rho_1, \rho_2]$, de modo que

$$\begin{aligned} V(0,0,R) &= 2\pi \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho[\rho + R - (R - \rho)] \, d\rho \\ &= \frac{4\pi}{R} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho^2 \, d\rho = \frac{1}{R} \frac{4\pi}{3} (\rho_2^3 - \rho_1^3). \end{aligned}$$

El factor $(4\pi/3)(\rho_2^3 - \rho_1^3)$ es precisamente el volumen de W. Colocando de nuevo las constantes G, m y la densidad de masa, hallamos que *el potencial gravitacional es GmM/R, donde M es la masa de W. Así, V es precisamente como si toda la masa de W estuviera concentrada en el punto central.*

Si $R \leq \rho_1$ (esto es, si (x_1, y_1, z_1) está dentro del hueco), entonces $|\rho - R| = \rho - R$ para ρ en $[\rho_1, \rho_2]$, y

$$V(0,0,R) = (Gm)\frac{2\pi}{R}\int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho[\rho + R - (\rho - R)]\,d\rho = (Gm)4\pi\int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho\,d\rho = (Gm)2\pi(\rho_2^2 - \rho_1^2).$$

El resultado es independiente de R, de modo que el potencial V es constante dentro del hueco. Como la fuerza gravitacional es menos el gradiente de V, concluimos que *¡no existe fuerza gravitacional dentro de un planeta uniforme hueco!*

Dejamos al lector calcular $V(0,0,R)$ para el caso $\rho_1 < R < \rho_2$.

Un argumento similar muestra que el potencial gravitacional fuera de cualquier cuerpo simétrico esférico de masa M (aunque su densidad sea variable) es $V = GMm/R$, donde R es la distancia a su centro (que es el centro de masa).

EJEMPLO 8 *Hallar el potencial gravitacional actuando en una unidad de masa de una estrella esférica con masa $M = 3.02 \times 10^{30}$ kg a una distancia de 2.25×10^{11} m de su centro ($G = 6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$).*

SOLUCIÓN El potencial es

$$V = \frac{GM}{R} = \frac{6.67 \times 10^{-11} \times 3.02 \times 10^{30}}{2.25 \times 10^{11}} = 8.95 \times 10^8\,\mathrm{m^2/s^2}. \qquad \blacktriangle$$

EJERCICIOS

1. Hallar el promedio de $f(x,y) = y \operatorname{sen} xy$ sobre $D = [0,\pi] \times [0,\pi]$.

2. Hallar el promedio de $f(x,y) = e^{x+y}$ sobre el triángulo con vértices $(0,0)$, $(0,1)$ y $(1,0)$.

3. Hallar el centro de masa de la región entre $y = x^2$ y $y = x$ si la densidad es $x + y$.

4. Hallar el centro de masa de la región entre $y = 0$ y $y = x^2$, donde $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

5. Una placa de oro grabada D está definida por $0 \leq x \leq 2\pi$ y $0 \leq y \leq \pi$ (centímetros) y tiene una densidad de masa $\rho(x,y) = y^2 \operatorname{sen}^2 4x + 2$ (gramos por centímetro cuadrado). Si el oro cuesta 7 dls por gramo, ¿cuánto vale el oro en la placa?

6. En el ejercicio 5, ¿cuál es la densidad de masa promedio en gramos por centímetro cuadrado?

7. (a) Hallar la masa de la caja $[0, \frac{1}{2}] \times [0, 1] \times [0, 2]$, suponiendo que la densidad es uniforme.

(b) Igual que en la parte (a), pero con una densidad de masa $\rho(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + z + 1$.

8. Hallar la masa del sólido acotado por el cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ y el cono $z^2 = x^2 + y^2$ si la densidad es $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

9. Hallar el centro de masa de la región acotada por $x + y + z = 2$, $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$.

10. Hallar el centro de masa del cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$, $1 \leq z \leq 2$, si la densidad es $\rho = (x^2 + y^2)z^2$.

11. Hallar el valor promedio de $\operatorname{sen}^2 \pi z \cos^2 \pi x$ sobre el cubo $[0, 2] \times [0, 4] \times [0, 6]$.

12. Hallar el valor promedio de e^{-z} sobre la bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

13. Un sólido con densidad constante está acotado por arriba por el plano $z = a$ y por debajo por el cono descrito en coordenadas esféricas por $\phi = k$, donde k es una constante $0 < k < \pi/2$. Dar una integral para su momento de inercia alrededor del eje z.

14. Hallar el momento de inercia alrededor del eje y para la bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ si la densidad de masa es una constante ρ.

15. Hallar el potencial gravitacional sobre una masa m de un planeta esférico con masa $M = 3 \times 10^{26}$ kg, a una distancia de 2×10^8 m de su centro.

16. Hallar la fuerza gravitacional ejercida sobre un objeto de 70 kg en la posición indicada en el ejercicio 15.

17. Un cuerpo W en coordenadas xyz es *simétrico respecto a un plano* si para toda partícula a un lado del plano existe una partícula de igual masa localizada en su reflejo, donde el plano es el espejo.

(a) Estudiar los planos de simetría para el cuerpo de un automóvil.

(b) Sea el plano de simetría el plano xy, y denotemos por W^+ y W^- las partes de W arriba y abajo del plano, respectivamente. Por hipótesis, la densidad de masa $\rho(x, y, z)$ satisface $\rho(x, y, -z) = \rho(x, y, z)$. Justificar estos pasos:

$$\begin{aligned}
\bar{z} \cdot \iiint_W \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz &= \iiint_W z\rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \\
&= \iiint_{W^+} z\rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz + \iiint_{W^-} z\rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \\
&= \iiint_{W^+} z\rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz + \iiint_{W^+} -z\rho(u, v, -w)\, du\, dv\, dw = 0.
\end{aligned}$$

(c) Explicar por qué la parte (b) prueba que si un cuerpo es simétrico respecto a un plano, entonces su centro de masa está en ese plano.

(d) Deducir esta ley de la mecánica: *Si un cuerpo es simétrico en dos planos, entonces su centro de masa está en su recta de intersección.*

18. Una placa rectangular uniforme de acero, de lados a y b, gira alrededor de su centro de gravedad con velocidad angular constante ω.

(a) La energía cinética es igual a $\frac{1}{2}(\text{masa})(\text{velocidad})^2$. Argumentar que la energía cinética de cualquier elemento de masa $\rho\, dx\, dy$ ($\rho =$ constante) está dada por $\rho(\omega^2/2)(x^2+y^2)\, dx\, dy$, siempre que el origen $(0,0)$ esté colocado en el centro de gravedad de la placa.

(b) Justificar la fórmula para la energía cinética:

$$\text{E.C.} = \iint_{\text{placa}} \rho \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2)\, dx\, dy.$$

(c) Evaluar la integral, suponiendo que la placa está descrita por $-a/2 \le x \le a/2$ y $-b/2 \le y \le b/2$.

19. Como ya se sabe, la densidad de un planeta típico no es constante en todo el planeta. Suponer que el planeta T. S. R. tiene un radio de 5×10^8 cm y una densidad de masa (en gramos por centímetro cúbico)

$$\rho(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{3 \times 10^4}{r}, & r \ge 10^4 \text{ cm}, \\ 3, & r \le 10^4 \text{ cm}, \end{cases}$$

donde $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Hallar una fórmula para el potencial gravitacional afuera de T. S. R.

SECCIÓN OPTATIVA

*6.5 INTEGRALES IMPROPIAS

En el capítulo 5 y en las secciones anteriores de este capítulo, definimos la integral de funciones de dos y tres variables y enunciamos criterios que nos garantizaban en qué caso f era integrable sobre un conjunto D. Recordar que una de las hipótesis del teorema 2 (sección 5.2) era que f estaba acotada. El ejemplo siguiente muestra cómo es posible que la suma S_n no converja si f no está acotada.

Sean R el cuadrado unitario $[0,1] \times [0,1]$ y $f\colon R \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} & x \ne 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Claramente, f no está acotada en R, pues, conforme x se acerca a cero, f se vuelve arbitrariamente grande. Sea R_{ij} una partición regular de R y formemos la suma mostrada en la fórmula (1) de la sección 5.2,

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(\mathbf{c}_{ij})\, \Delta x\, \Delta y.$$

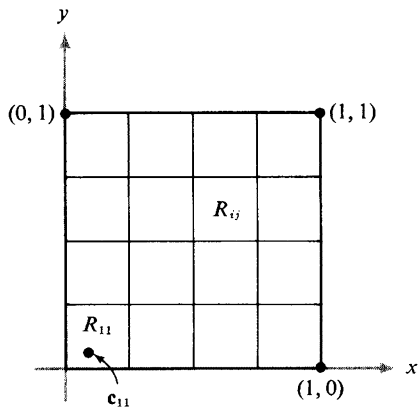


Figura 6.5.1 Localización de R_{11} en una partición de $[0,1] \times [0,1]$.

Sea R_{11} el subrectángulo que contiene a $(0,0)$ (ver la figura 6.5.1), y escoger algún $\mathbf{c}_{11} \in R_{11}$. Para n fija, podemos hacer S_n tan grande como queramos al escoger $\mathbf{c}_{11}$ más y más cerca de $(0,0)$; entonces, $\lim_{n\to\infty} S_n$ no puede ser *independiente* de la selección de $\mathbf{c}_{ij}$.

Sin embargo, evaluemos formalmente la integral iterada de f, siguiendo las reglas para integrar una función de una variable. Tenemos

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}\,dy = \int_0^1 [2\sqrt{x}]_0^1\,dy$$
$$= \int_0^1 2\,dy = 2.$$

Más aún, si invertimos el orden de integración, también obtenemos

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{x}}\,dx = 2.$$

Así, en cierto sentido, esta función es integrable. La pregunta es: ¿en qué sentido?

Recordemos del cálculo de una variable cómo se trata la integral impropia $\int_0^1 dx/\sqrt{x}$: $1/\sqrt{x}$ no está acotada en el intervalo $(0,1)$, pero $\lim_{\delta\to 0} \int_\delta^1 dx/\sqrt{x} = 2$ y *definimos* $\int_0^1 (dx/\sqrt{x})$ como este límite. De manera análoga, para el caso de dos variables permitiremos que la función no esté acotada en ciertos puntos de la frontera de su dominio y definiremos la integral impropia mediante un proceso de límite.

Específicamente, supongamos que la región D es del tipo 1 y $f\colon D \to \mathbf{R}$ es continua y acotada excepto en ciertos puntos de la frontera. *Para simplificar la exposición, supondremos primero que f es no negativa.* Supondremos, además, que D está descrita por $a \le x \le b$, $\phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)$. Escojamos números δ y $\eta > 0$ tales que $D_{\eta,\delta}$ sea el subconjunto de D formado por los puntos (x,y) con $a+\eta \le x \le b-\eta$,

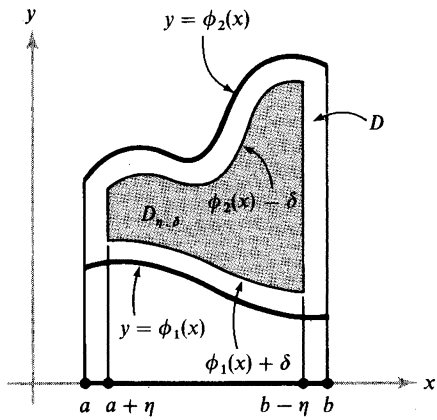


Figura 6.5.2 Dominio encogido $D_{\eta,\delta}$ para integrales impropias.

$\phi_1(x) + \delta \leq y \leq \phi_2(x) - \delta$ (figura 6.5.2), donde η y δ se escogen lo suficientemente pequeños para que $D_{\eta,\delta} \subset D$. (Si $\phi_1(a) = \phi_2(a)$ o $\phi_1(b) = \phi_2(b)$, debemos modificar esto ligeramente, pues en este caso $D_{\eta,\delta}$ puede no ser un subconjunto de D (ver el ejemplo 2).) Como f es continua y acotada en $D_{\eta,\delta}$, existe la integral $\int_{D_{\eta,\delta}} f$. Podemos preguntar ahora qué sucede cuando la región $D_{\eta,\delta}$ se expande hasta llenar la región D, esto es, cuando $(\eta, \delta) \to (0, 0)$.

Si existe

$$\underset{(\eta,\delta)\to(0,0)}{\text{límite}} \int_{D_{\eta,\delta}} f\, dA,$$

definimos que $\int_D f$ sea igual a este límite y decimos que es la *integral impropia* de f sobre D. Esta definición es análoga a la definición de integral impropia para una función de una variable.

Como f es integrable sobre $D_{\eta,\delta}$, podemos aplicar el teorema de Fubini para obtener

$$\int_{D_{\eta,\delta}} f\, dA = \int_{a+\eta}^{b-\eta} \int_{\phi_1(x)+\delta}^{\phi_2(x)-\delta} f(x, y)\, dy\, dx. \tag{1}$$

Por lo tanto, si f es integrable sobre D,

$$\int_D f\, dA = \underset{(\eta,\delta)\to(0,0)}{\text{límite}} \int_{a+\eta}^{b-\eta} \int_{\phi_1(x)+\delta}^{\phi_2(x)-\delta} f(x, y)\, dy\, dx.$$

Puede ser conveniente trabajar con los límites iterados

$$\underset{\eta\to 0}{\text{límite}} \int_{a+\eta}^{b-\eta} \left[\underset{\delta\to 0}{\text{límite}} \int_{\phi_1(x)+\delta}^{\phi_2(x)-\delta} f(x, y)\, dy \right] dx \tag{2}$$

si es que existen estos límites. De existir, denotamos la expresión (2) por

$$\int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

y la llamamos la *integral iterada impropia* de f sobre D. Como suponemos que $f \geq 0$, la existencia de los límites mostrados en la expresión (2) implica la existencia del límite doble que define $\int_D f\,dA$; por lo tanto, la expresión (2) es igual a $\int_D f\,dA$ en este caso. Usando técnicas más avanzadas, es posible mostrar que si f es integrable, entonces, si la integral iterada impropia existe, es igual a $\int_D f\,dA$; esto es, se puede usar la expresión (2) para evaluar la integral impropia. La definición es análoga cuando D es una región del tipo 2.

Finalmente, consideremos el caso en que D es una región del tipo 3 y f no está acotada en puntos de ∂D. Por ejemplo, suponer que D es el conjunto de puntos (x,y) con

$$a \leq x \leq b, \qquad \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)$$

y también es el conjunto de puntos (x,y) con

$$c \leq y \leq d, \qquad \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y).$$

Si f es integrable y existen

$$\int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy \qquad \text{y} \qquad \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

entonces se puede mostrar que ambas integrales iteradas son iguales y su valor común es $\int_D f\,dA$. Éste es el *teorema de Fubini para integrales impropias.*

EJEMPLO 1 *Evaluar* $\int_D f(x,y)\,dy\,dx$ *donde* $f(x,y) = 1/\sqrt{1-x^2-y^2}$ *y* D *es el disco unitario* $x^2+y^2 \leq 1$.

SOLUCIÓN Podemos describir a D como el conjunto de puntos (x,y) con $-1 \leq x \leq 1$, $-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$. Ahora bien, como ∂D es el conjunto de puntos (x,y) con $x^2+y^2=1$, f no está definida en ningún punto de ∂D, pues en esos puntos el denominador de f es 0. Calculamos la integral iterada impropia y obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{(1-x^2)}}^{\sqrt{(1-x^2)}} \frac{dy\,dx}{\sqrt{1-x^2-y^2}} &= \int_{-1}^{1} \left[\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}\right)\right]_{y=-\sqrt{(1-x^2)}}^{\sqrt{(1-x^2)}} dx \\
&= \int_{-1}^{1} [\operatorname{sen}^{-1}(1) - \operatorname{sen}^{-1}(-1)]\,dx \\
&= \int_{-1}^{1} dx = 2\pi. \qquad \blacktriangle
\end{aligned}$$

En este ejemplo usamos el hecho enunciado anteriormente de que la integral iterada impropia es igual a la integral impropia de $1/(\sqrt{1-x^2-y^2})$ sobre el disco unitario.

EJEMPLO 2 *Sea $f(x,y) = 1/(x-y)$ y sea D el conjunto de (x,y) con $0 \le x \le 1$ y $0 \le y \le x$. Mostrar que f no es integrable sobre D.*

SOLUCIÓN Como el denominador de f es cero en la recta $y = x$, f no está acotada en parte de la frontera de D. Sea $0 < \eta < 1$ y $0 < \delta < \eta$ y sea $D_{\eta,\delta}$ el conjunto de (x,y) con $\eta \le x \le 1-\eta$ y $\delta \le y \le x - \delta$ (figura 6.5.3). Escogemos $\delta < \eta$ para garantizar que $D_{\eta,\delta}$ está contenido en D. Considerar

$$\begin{aligned}
\int_{D_{\eta,\delta}} f\,dA &= \int_{\eta}^{1-\eta} \int_{\delta}^{x-\delta} \frac{1}{x-y}\,dy\,dx \\
&= \int_{\eta}^{1-\eta} [-\log(x-y)]_{y=\delta}^{x-\delta}\,dx \\
&= \int_{\eta}^{1-\eta} [-\log(\delta) + \log(x-\delta)]\,dx \\
&= [-\log\delta] \int_{\eta}^{1-\eta} dx + \int_{\eta}^{1-\eta} \log(x-\delta)\,dx \\
&= -(1-2\eta)\log\delta + [(x-\delta)\log(x-\delta) - (x-\delta)]_{\eta}^{1-\eta}.
\end{aligned}$$

En el último paso usamos el hecho de que $\int \log u\,du = u\log u - u$. Continuando el conjunto anterior de igualdades, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{D_{\eta,\delta}} f\,dA = &-(1-2\eta)\log\delta + (1-\eta-\delta)\log(1-\eta-\delta) \\
&-(1-\eta-\delta) - (\eta-\delta)\log(\eta-\delta) + (\eta-\delta).
\end{aligned}$$

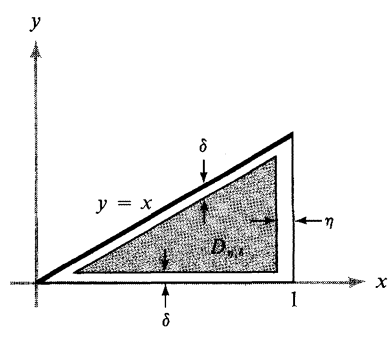


Figura 6.5.3 Dominio encogido $D_{\eta,\delta}$ para un dominio triangular D.

Cuando $(\eta, \delta) \to (0,0)$, el segundo término converge a $1 \log 1 = 0$, y el tercero y quinto términos convergen a -1 y 0, respectivamente. Sea $\nu = \eta - \delta$. Como $\nu \log \nu \to 0$ cuando $\nu \to 0$ (este límite se prueba usando la regla de l'Hopital, del curso de cálculo), vemos que el cuarto término va a cero cuando $(\eta, \delta) \to (0,0)$. Es el primer término el que nos causará problemas. Ahora bien,

$$-(1-2\eta)\log\delta = -\log\delta + 2\eta\log\delta. \tag{3}$$

y no es difícil ver que esto no converge cuando $(\eta, \delta) \to (0,0)$. Por ejemplo, sea $\eta = 2\delta$; entonces la expresión (3) se convierte en

$$-\log\delta + 4\delta\log\delta.$$

Como antes, $4\delta\log\delta \to 0$ cuando $\delta \to 0$, pero $-\log\delta \to +\infty$ cuando $\delta \to 0$, lo cual muestra que la expresión (3) no converge. Por lo tanto, $\underset{(\eta,\delta)\to(0,0)}{\text{límite}} \int_{D_{\eta,\delta}} f\,dA$ no existe, de modo que f no es integrable. ▲

La teoría de las integrales impropias de funciones que no sean de un solo signo, necesariamente es más complicada. En la figura 6.5.2 debemos tomar por separado los límites izquierdo y derecho, de arriba y de abajo. Esto es análogo a las integrales impropias de una variable sobre intervalos donde la integral es impropia tanto en el extremo izquierdo como en el derecho del intervalo.

Es importante considerar las integrales impropias, pues surgen de problemas naturales. Por ejemplo, como veremos más adelante, una de las fórmulas para calcular el área de superficie de un hemisferio nos obliga a considerar la integral impropia del ejemplo 1.

EJERCICIOS

1. Evaluar las siguientes integrales, en caso de que existan.

(a) $\displaystyle\int_D \frac{1}{\sqrt{xy}}\,dA, \qquad D = [0,1]\times[0,1]$

(b) $\displaystyle\int_D \frac{1}{\sqrt{|x-y|}}\,dx\,dy, \qquad D = [0,1]\times[0,1]$ (IDEA: Dividir D en dos partes.)

$\boxed{\text{(c)}}$ $\int_D (y/x)\,dx\,dy.$ $\quad D$ acotada por $x = 1$, $x = y$ y $x = 2y$

(d) $\int_0^1 \int_0^{e^y} \log x\,dx\,dy$

2. $\boxed{\text{(a)}}$ Analizar cómo se definiría $\int_D f\,dA$ si D es una región no acotada, por ejemplo, el conjunto de (x,y) tales que $a \le x < \infty$ y $\phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)$, donde están dadas $\phi_1 \le \phi_2$ (figura 6.5.4).

(b) Evaluar $\int_D xye^{-(x^2+y^2)}dx\,dy$ si $x \ge 0$, $0 \le y \le 1$.

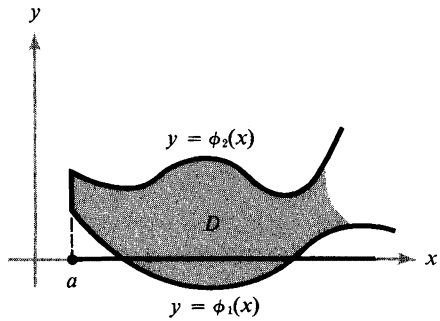


Figura 6.5.4 Región D no acotada.

3. Usando el ejercicio 2, integrar de dos maneras e^{-xy} para $x \geq 0$, $1 \leq y \leq 2$ (suponer que se cumple el teorema de Fubini) para mostrar que

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}\, dx = \log 2.$$

4. Mostrar que existe la integral $\int_0^1 \int_0^a (x/\sqrt{a^2 - y^2})\, dy\, dx$, y calcular su valor.

5. Analizar cuándo existe la integral

$$\int_D \frac{x + y}{x^2 + 2xy + y^2}\, dx\, dy$$

donde $D = [0, 1] \times [0, 1]$. Si existe, calcular su valor.

6. Sea f una función no negativa que puede ser no acotada y discontinua en la frontera de una región elemental D. Sea g una función similar tal que $f(x, y) \leq g(x, y)$ donde ambas estén definidas. Suponer que existe $\int_D g(x, y)\, dA$. Hacer ver de manera informal que esto implica la existencia de $\int_D f(x, y)\, dA$.

7. Usar el ejercicio 6 para mostrar que existe

$$\int_D \frac{\operatorname{sen}^2(x - y)}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\, dy\, dx$$

donde D es el disco unitario $x^2 + y^2 \leq 1$.

8. Sea f como en el ejercicio 6 y sea g una función tal que $0 \leq g(x, y) \leq f(x, y)$ siempre que ambas estén definidas. Suponer que $\int_D g(x, y)\, dA$ no existe. Hacer ver de manera informal que no puede existir $\int_D f(x, y)\, dA$.

9. Usar el ejercicio 8 para mostrar que no existe

$$\int_D \frac{e^{x^2+y^2}}{x-y}\,dy\,dx$$

donde D es el conjunto de (x, y) con $0 \le x \le 1$ y $0 \le y \le x$.

***10.** Un cambio de variables puede ayudar para hallar el valor de una integral impropia sobre la región no acotada $\mathbf{R}^2$. Evaluar

$$\int_{\mathbf{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

cambiando a coordenadas polares. ¿Se podría evaluar esta integral de manera directa (ver el ejercicio 2, sección 6.5)?

***11.** Sea W el primer octante de la bola $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$, donde $x \ge 0$, $y \ge 0$ y $z \ge 0$. Evaluar la integral impropia

$$\int_W \frac{(x^2+y^2+z^2)^{1/4}}{\sqrt{z+(x^2+y^2+z^2)^2}}\,dx\,dy\,dz$$

cambiando variables.

***12.** Sea D la región no acotada definida como el conjunto de (x, y, z) con $x^2+y^2+z^2 \ge 1$. Hacer un cambio de variables para evaluar la integral impropia

$$\int_D \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^2}.$$

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 6

Evaluar las integrales en los ejercicios 1 a 8.

1. $\int_0^1 \int_1^2 \int_2^3 \cos[\pi(x+y+z)]\,dx\,dy\,dz$.

2. $\int_0^1 \int_0^x \int_0^y (y + xz)\,dz\,dy\,dx$.

3. $\iiint_R (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$; R es la región acotada por $x+y+z = a$ (donde $a > 0$), $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$.

4. $\iiint_W z\,dx\,dy\,dz$; W es la región acotada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 1$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$, con $x \ge 0$, $y \ge 0$.

5. $\iiint_W x^2 \cos z\,dx\,dy\,dz$; W es la región acotada por $z = 0$, $z = \pi$, $y = 0$, $y = 1$, $x = 0$ y $x + y = 1$.

6. $\int_0^2 \int_0^x \int_0^{x+y} dz\, dy\, dx$.

7. $\iiint_W (1 - z^2)\, dx\, dy\, dz$; W es la pirámide con vértice superior en $(0,0,1)$ y vértices de la base en $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ y $(1,1)$.

8. $\iiint_W (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz$; W es la misma pirámide del ejercicio 7.

9. Hallar el volumen dentro de las superficies $x^2 + y^2 = z$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

10. Hallar el volumen encerrado por el cono $x^2 + y^2 = z^2$ y el plano $2z - y - 2 = 0$.

11. A través de una esfera de radio 2 se perfora un hoyo cilíndrico de diámetro 1. Suponiendo que el eje del cilindro pase por el centro de la esfera, hallar el volumen del sólido que queda.

12. Sean C_1 y C_2 dos cilindros de extensión infinita, de diámetro 2 y con ejes sobre los ejes x y y respectivamente. Hallar el volumen de $C_1 \cap C_2$.

13. Hallar el volumen acotado por $x/a + y/b + z/c = 1$ y los planos coordenados.

14. Hallar el volumen determinado por $z \leq 6 - x^2 - y^2$ y $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$.

15. El *tetraedro* definido por $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ y $x + y + z \leq 1$ se va a cortar en n segmentos de igual volumen, por planos paralelos al plano $x + y + z = 1$. ¿Dónde se deberán cortar las rebanadas?

16. Evaluar cada una de las integrales iteradas siguientes:

(a) $\int_0^1 \int_0^z \int_0^y xy^2 z^3\, dx\, dy\, dz$

(b) $\int_0^1 \int_0^y \int_0^{x/\sqrt{3}} \frac{x}{x^2+z^2}\, dz\, dx\, dy$

(c) $\int_1^2 \int_1^z \int_{1/y}^2 yz^2\, dx\, dy\, dz$

17. Hallar el volumen del "cono de helado" definido por las desigualdades $x^2 + y^2 \leq \frac{1}{5}z^2$, $0 \leq z \leq 5 + \sqrt{5 - x^2 - y^2}$.

18. En las partes (a) a (d), hacer el cambio de variables indicado. (No evaluar.)

(a) $\int_0^1 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{(1-y^2)}}^{\sqrt{(1-y^2)}} (x^2 + y^2)^{1/2}\, dx\, dy\, dz$, coordenadas cilíndricas

(b) $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{(1-y^2)}}^{\sqrt{(1-y^2)}} \int_{-\sqrt{(4-x^2-y^2)}}^{\sqrt{(4-x^2-y^2)}} xyz\, dz\, dx\, dy$, coordenadas cilíndricas

(c) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{(2-y^2)}}^{\sqrt{(2-y^2)}} \int_{\sqrt{(x^2+y^2)}}^{\sqrt{(4-x^2-y^2)}} z^2\, dz\, dx\, dy$, coordenadas esféricas

(d) $\int_0^1 \int_0^{\pi/4} \int_0^{2\pi} \rho^3 \operatorname{sen} 2\phi\, d\theta\, d\phi\, d\rho$, coordenadas rectangulares

19. Evaluar

$$\iiint_S \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$

donde S es el sólido acotado por las esferas $x^2+y^2+z^2=a^2$ y $x^2+y^2+z^2=b^2$, donde $a>b>0$.

20. Escribir la integral iterada $\int_0^1\int_{1-x}^1\int_x^1 f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$ como una integral sobre una región en $\mathbf{R}^3$ y después reescribirla en otros cinco posibles órdenes de integración.

21. (a) Evaluar la integral

$$\int_0^\infty \int_0^y xe^{-y^3}\,dx\,dy$$

(b) Evaluar $\iint_B (x^4+2x^2y^2+y^4)\,dx\,dy$, donde B es la parte del disco de radio 2 (con centro en $(0,0)$ en el primer cuadrante).

***22.** En el ejercicio 2, sección 6.5, estudiamos integrales sobre regiones no acotadas. Usar el cambio a coordenadas polares para mostrar que $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}$. (IDEA: Usar el teorema de Fubini (se puede suponer que se cumple) para mostrar que

$$\left(\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx\right)^2=\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

y usar el ejercicio 10, sección 6.5.)

***23.** Hallar $\int_{\mathbf{R}^3} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ donde $f(x,y,z)=\exp[-(x^2+y^2+z^2)^{3/2}]$.

24. Evaluar $\iiint_D (x^2+y^2+z^2)xyz\,dx\,dy\,dz$ sobre cada una de las regiones siguientes.
(a) la esfera $D=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le R^2\}$
(b) la semiesfera $D=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le R^2 \text{ y } z\ge 0\}$
(c) el octante $D=\{(x,y,z)|x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0 \text{ y } x^2+y^2+z^2\le R^2\}$

25. Sea C la región con forma de cono $\{(x,y,z)|\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1\}$ y evaluar la integral $\iiint_C (1+\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy\,dz$.

26. Sean ρ, θ y ϕ coordenadas esféricas en $\mathbf{R}^3$ y suponer que una superficie que rodea al origen se describe por medio de una función continua $\rho=f(\theta,\phi)$. Mostrar que el volumen encerrado por la superficie es

$$V=\tfrac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^\pi [f(\theta,\phi)]^3 \operatorname{sen}\phi\,d\phi\,d\theta.$$

Suponer que (1) $f(0,\phi)=f(2\pi,\phi)$; (2) $f(\theta,\phi)>0$ para $0\le\phi\le\pi$ y $0\le\theta\le 2\pi$ y (3) $f(0,0)$ y $f(0,\pi)$ son constantes.

***27.** Evaluar $\iint_B \exp[(y-x)/(y+x)]\,dx\,dy$ donde B es el interior del triángulo con vértices en $(0,0)$, $(0,1)$ y $(1,0)$.

28. Sea E el elipsoide sólido $E = \{(x, y, z) | (x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) \leq 1\}$, donde $a > 0$, $b > 0$ y $c > 0$. Evaluar

$$\iiint xyz\, dx\, dy\, dz$$

(a) Sobre todo el elipsoide; y
(b) Sobre la parte que esté en el primer octante:

$$x \geq 0, \qquad y \geq 0 \qquad \text{y} \qquad z \geq 0, \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

29. Sea B la región en el primer cuadrante acotada por las curvas $xy = 1$, $xy = 3$, $x^2 - y^2 = 1$ y $x^2 - y^2 = 4$. Evaluar $\iint_B (x^2 + y^2)\, dx\, dy$.

30. Suponer que la densidad de un sólido de radio R está dada por $(1 + d^3)^{-1}$, donde d es la distancia al centro de la esfera. Hallar la masa total de la esfera.

31. La densidad del material de un casco esférico cuyo radio interior es 1 m y cuyo radio exterior es 2 m, es $0.4d^2$ g/cm^3, donde d es la distancia en metros al centro de la esfera. Hallar la masa total del casco.

32. ¿Flotaría el casco del ejercicio 31 si se dejara caer en un tanque grande de agua pura? ¿Qué sucedería si hay una filtración en el casco? (Suponer que la densidad del agua es exactamente 1 g/cm^3.)

33. La temperatura en los puntos del cubo $C = \{(x, y, z) | -1 \leq x \leq 1, \ -1 \leq y \leq 1 \text{ y } -1 \leq z \leq 1\}$ es $32d^2$, donde d es la distancia al origen.
(a) ¿Cuál es la temperatura promedio?
(b) ¿En cuáles puntos del cubo es la temperatura igual a la temperatura promedio?

34. Usar coordenadas cilíndricas para hallar el centro de masa de la región definida por

$$y^2 + z^2 \leq \tfrac{1}{4}, \qquad (x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \qquad x \leq 1.$$

35. Hallar el centro de masa del hemisferio sólido

$$V = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2 \text{ y } z \geq 0\}$$

si la densidad es constante.

***36.** Hallar $\int_{\mathbf{R}^3} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ donde

$$f(x, y, z) = \frac{1}{[1 + (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}]^{3/2}}.$$

***37.** Suponer que D es la región no acotada de $\mathbf{R}^2$ dada por el conjunto de (x, y) con $0 \leq x < \infty$, $0 \leq y \leq x$. Sea $f(x, y) = x^{-3/2} e^{y-x}$. ¿Existe la integral impropia $\int_D f(x, y)\, dx\, dy$?

38. Evaluar $\iint_B e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$ donde B esté formado por los (x, y) que satisfagan $x^2 + y^2 \leq 1$ y $y \leq 0$.

*$\boxed{39.}$ Usar las ideas en el ejercicio 2, sección 6.5, para evaluar $\int_{\mathbf{R}^2} f(x, y)\,dx\,dy$, donde $f(x, y) = 1/(1 + x^2 + y^2)^{3/2}$ (IDEA: Se puede suponer que el teorema de Fubini y el del cambio de variables se cumplen para integrales propias.)

***40.** Si el mundo fuera bidimensional, las leyes de la física predecirían que el potencial gravitacional de una masa puntual proporcional al logaritmo de la distancia al punto. Usando coordenadas polares, escribir una integral que dé el potencial gravitacional de un disco de densidad constante.

41. La *rigidez flexural* EI de una viga uniforme es el producto de su módulo de elasticidad de Young E y el momento de inercia I de la sección transversal de la viga en x, con respecto a la recta horizontal l que pasa por el centro de gravedad de esta sección transversal. Aquí

$$I = \iint_R [d(x, y)]^2\,dx\,dy.$$

donde $d(x, y) =$ la distancia de (x, y) a l y $R =$ sección transversal de la viga considerada.

(a) Suponer que la sección transversal R es el rectángulo $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 2$ y l es el eje x. Hallar I.

(b) Suponer que la sección transversal R es un círculo de radio 4 y l es el eje x. Hallar I, usando coordenadas polares.

7 INTEGRALES SOBRE TRAYECTORIAS Y SUPERFICIES

Mantengo: (1) Que las partes pequeñas del espacio son de naturaleza análoga a pequeñas colinas que hay en una superficie más o menos plana. (2) Que esta propiedad de curvada o distorsionada se transmite de manera continua de una porción a otra del espacio, como si fuera una onda. (3) Que esta variación de la curvatura del espacio es lo que realmente sucede en el fenómeno que llamamos movimiento de materia, ya sea ponderable o etéreo. (4) Que en este mundo físico no ocurre sino esta variación, sujeta, quizá, a la ley de continuidad.

W.K. CLIFFORD (1870)

En los capítulos 5 y 6 hemos estudiado la integración sobre regiones en $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$. Aprendimos a evaluar integrales como

$$\int_D f(x,y)\,dA,$$

donde D es una región en $\mathbf{R}^2$. En este capítulo estudiaremos la integración sobre trayectorias y superficies. Esto es fundamental para entender el capítulo 8; en ese capítulo se usarán los resultados de cálculo diferencial vectorial (capítulo 3) y cálculo integral vectorial (este capítulo) para demostrar los teoremas de Green, Gauss y Stokes, y se examinarán algunas aplicaciones físicas importantes.

7.1 LA INTEGRAL DE TRAYECTORIA

En esta sección se introduce el concepto de integral de trayectoria; ésta es una de las muchas maneras en que se pueden generalizar las integrales de funciones de una variable, a funciones de varias variables. Además de aquéllas presentadas en los capítulos 5 y 6, hay otras generalizaciones que se estudiarán en secciones posteriores.

Suponer que tenemos dada una función escalar $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, de modo que f manda puntos en $\mathbf{R}^3$ a números reales. Será útil definir la integral de una función f a lo largo de una trayectoria $\boldsymbol{\sigma}: I = [a, b] \to \mathbf{R}^3$, donde $\boldsymbol{\sigma}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Para relacionar este concepto con algo tangible, suponer que la imagen de $\boldsymbol{\sigma}$ representa un alambre. Podemos suponer que $f(x, y, z)$ denota la densidad de masa en (x, y, z) y la integral de f será la masa total del alambre. Al hacer que $f(x, y, z)$ sea la temperatura, podemos usar la integral para determinar la temperatura promedio a lo largo del alambre.

DEFINICIÓN *La* ***integral de trayectoria****, o* ***integral de*** $f(x, y, z)$ ***a lo largo de la trayectoria*** $\boldsymbol{\sigma}$*, está definida cuando* $\boldsymbol{\sigma}: I = [a, b] \to \mathbf{R}^3$ *es de clase* C^1 *y cuando la función compuesta* $t \mapsto f(x(t), y(t), z(t))$ *es continua en* I*. Definimos esta integral por la ecuación*

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}} f\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|\, dt.$$

A veces, $\int_{\boldsymbol{\sigma}} f\, ds$ *se denota por*

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}} f(x, y, z)\, ds$$

o

$$\int_a^b f(\boldsymbol{\sigma}(t)) \|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|\, dt.$$

Si $\boldsymbol{\sigma}(t)$ sólo es C^1 a trozos o $f(\boldsymbol{\sigma}(t))$ es continua a trozos, definimos $\int_{\boldsymbol{\sigma}} f\, ds$ rompiendo $[a, b]$ en piezas sobre las cuales $f(\boldsymbol{\sigma}(t)) \|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|$ sea continua, y sumando las integrales sobre las piezas.

Nótese primero que cuando $f = 1$, estamos simplemente reenunciando la definición de longitud de arco de $\boldsymbol{\sigma}$ (ver la sección 3.2), y segundo, que basta que f esté definida en la curva imagen C de $\boldsymbol{\sigma}$, y no necesariamente en todo el espacio, para que tenga sentido la definición anterior.

EJEMPLO 1 *Sea* $\boldsymbol{\sigma}$ *la hélice* $\boldsymbol{\sigma}: [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^3$, $t \mapsto (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ *(ver la figura 3.1.8), y sea* $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$*. Evaluar la integral* $\int_{\boldsymbol{\sigma}} f(x, y, z)\, ds$*.*

SOLUCIÓN

$$\|\boldsymbol{\sigma}'(t)\| = \sqrt{\left[\frac{d(\cos t)}{dt}\right]^2 + \left[\frac{d(\operatorname{sen} t)}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dt}{dt}\right]^2}$$
$$= \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}.$$

Sustituimos x, y y z para obtener

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t + t^2 = 1 + t^2$$

a lo largo de $\boldsymbol{\sigma}$. Esto conduce a

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}} f(x, y, z)\, ds = \int_0^{2\pi} (1 + t^2)\sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}\left[t + \frac{t^3}{3}\right]_0^{2\pi}$$
$$= \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}(3 + 4\pi^2). \qquad \blacktriangle$$

Para motivar la definición de la integral de trayectoria, consideraremos sumas S_N del "tipo Riemann" de la misma manera general como definimos longitud de arco en la sección 3.2. Para simplificar, sea $\boldsymbol{\sigma}$ de clase C^1 en I. Subdividir el intervalo $I = [a, b]$ por medio de una partición

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b.$$

Esto produce una descomposición de $\boldsymbol{\sigma}$ en trayectorias $\boldsymbol{\sigma}_i$ (figura 7.1.1) definidas en $[t_i, t_{i+1}]$ para $0 \le i \le N - 1$. Denotar la longitud de arco de $\boldsymbol{\sigma}_i$ por Δs_i; así,

$$\Delta s_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|\, dt.$$

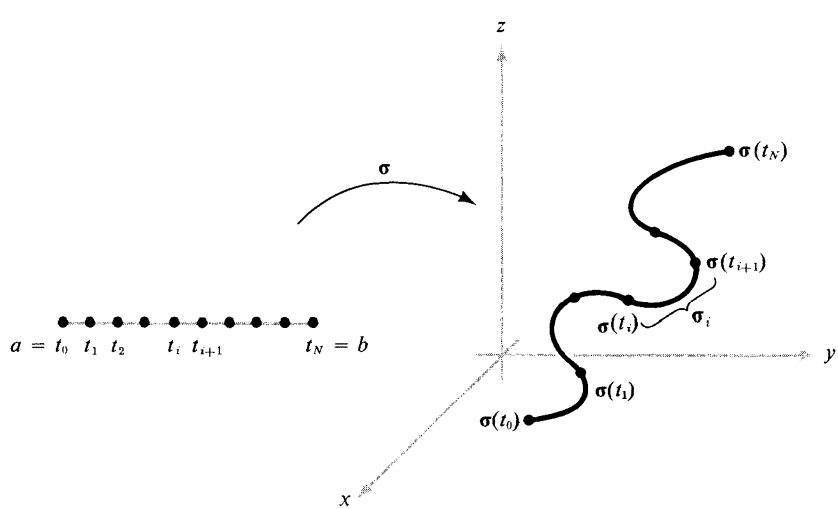


Figura 7.1.1 Rompiendo $\boldsymbol{\sigma}$ en pequeñas $\boldsymbol{\sigma}_i$.

Cuando N es grande, la longitud de arco Δs_i es pequeña y $f(x, y, z)$ es aproximadamente constante para puntos en σ_i. Consideramos las sumas

$$S_N = \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta s_i,$$

donde $(x_i, y_i, z_i) = \sigma(t)$ para algún $t \in [t_i, t_{i+1}]$. Estas sumas son básicamente sumas de Riemann, y de su teoría se puede mostrar que

$$\lim_{N\to 0} S_N = \int_I f(x(t), y(t), z(t))\|\sigma'(t)\|\,dt = \int_\sigma f(x, y, z)\,ds.$$

Así, *la integral de trayectoria se puede expresar como límite de sumas de Riemann.*

Un caso particular importante de la integral de trayectoria se presenta cuando la trayectoria σ describe una curva plana. Suponer que todos los puntos $\sigma(t)$ están en el plano xy y que f es una función de dos variables con valores reales. La integral de trayectoria de f a lo largo de σ es

$$\int_\sigma f(x, y)\,ds = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt.$$

Cuando $f(x, y) \geq 0$, esta integral tiene una interpretación geométrica como el "área de una valla". Podemos construir una "valla" cuya base sea la imagen de σ y altura $f(x, y)$ en (x, y) (figura 7.1.2). Si σ recorre sólo una vez la imagen de σ, la integral $\int_\sigma f(x, y)\,ds$ representa el área de un lado de la valla. El lector deberá

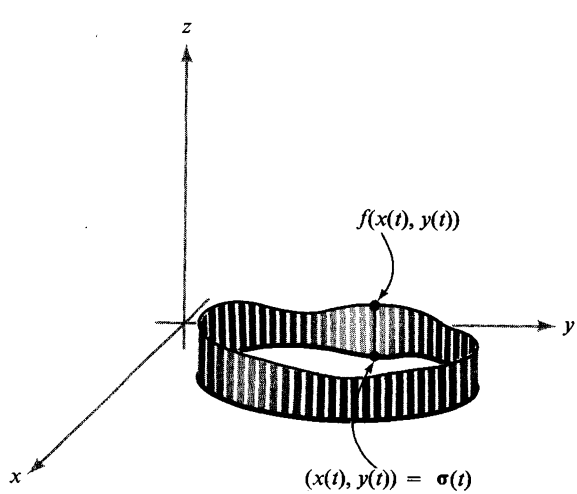


Figura 7.1.2 La integral de trayectoria como área de una valla.

intentar justificar esta interpretación, usando un argumento similar al utilizado para justificar la fórmula de longitud de arco.

EJEMPLO 2 *La tía de Tom Sawyer le ha pedido que blanquee ambos lados de la vieja valla mostrada en la figura 7.1.3. Tom estima que por dejar que alguien blanquee en su lugar 25 pies^2 de valla, la víctima voluntaria le pagaría 5 centavos. ¿Cuánto puede ganar Tom, suponiendo que su tía le proporcione sin costo el blanqueador?*

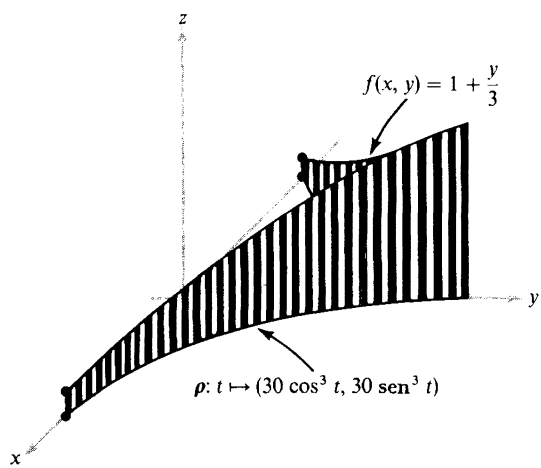


Figura 7.1.3 La valla de Tom Sawyer.

SOLUCIÓN Según la figura 7.1.3, la base de la valla en el primer cuadrante es la trayectoria $\rho\colon [0, \pi/2] \to \mathbf{R}^2$, $t \mapsto (30\cos^3 t, 30 \operatorname{sen}^3 t)$, y la altura de la valla en (x, y) es $f(x, y) = 1 + y/3$. El área de un lado de la mitad de la valla es igual a la *integral* $\int_\rho f(x, y)\, ds = \int_\rho (1 + y/3)\, ds$. Como $\rho'(t) = (-90\cos^2 t \operatorname{sen} t, 90 \operatorname{sen}^2 t \cos t)$, tenemos $\|\rho'(t)\| = 90 \operatorname{sen} t \cos t$. Así, la integral es

$$\begin{aligned}
\int_\rho \left(1 + \frac{y}{3}\right) ds &= \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{30 \operatorname{sen}^3 t}{3}\right) 90 \operatorname{sen} t \cos t\, dt \\
&= 90 \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} t + 10 \operatorname{sen}^4 t) \cos t\, dt \\
&= 90 \left[\frac{\operatorname{sen}^2 t}{2} + 2 \operatorname{sen}^5 t\right]_0^{\pi/2} = 90(\tfrac{1}{2} + 2) = 225,
\end{aligned}$$

que es el área en el primer cuadrante. Por lo tanto, el área de un lado de la valla es de 450 pies^2. Como hay que blanquear ambos lados, debemos multiplicar por 2 para hallar el área total, que es de 900 pies^2. Al dividir entre 25 y después de multiplicar por 5, vemos que Tom puede ganar hasta \$1.80 por el trabajo. ▲

Esto concluye nuestro estudio de integración de funciones *escalares* sobre trayectorias. En la siguiente sección nos ocuparemos de integración de *campos vectoriales* sobre trayectorias y en el capítulo 8 veremos más aplicaciones de la integral de trayectoria, cuando estudiemos análisis vectorial.

EJERCICIOS

1. Sea $f(x,y,z) = y$ y $\sigma(t) = (0,0,t), 0 \le t \le 1$. Probar que $\int_\sigma f\,ds = 0$.

2. Evaluar las siguientes integrales de trayectorias $\int_\sigma f(x,y,z)\,ds$, donde
(a) $f(x,y,z) = x + y + z$ y $\sigma: t \mapsto (\operatorname{sen} t, \cos t, t), t \in [0, 2\pi]$
(b) $f(x,y,z) = \cos z, \sigma$ como en la parte (a)
(c) $f(x,y,z) = x\cos z, \sigma: t \mapsto t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, t \in [0,1]$

3. Evaluar las siguientes integrales de trayectorias $\int_\sigma f(x,y,z)\,ds$, donde
(a) $f(x,y,z) = \exp\sqrt{z}$ y $\sigma: t \mapsto (1, 2, t^2), t \in [0,1]$
(b) $f(x,y,z) = yz$ y $\sigma: t \mapsto (t, 3t, 2t), t \in [1,3]$
(c) $f(x,y,z) = (x+y)/(y+z)$ y $\sigma: t \mapsto (t, \frac{2}{3}t^{3/2}, t), t \in [1,2]$

4. (a) Mostrar que la integral de trayectoria de $f(x,y)$ a lo largo de una trayectoria dada en coordenadas polares por $r = r(\theta)$, $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$ es

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta.$$

(b) Calcular la longitud de arco de $r = 1 + \cos\theta$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

5. Sea $f: \mathbf{R}^3 \backslash \{\text{plano } xz\} \to \mathbf{R}$ definida por $f(x,y,z) = 1/y^3$. Evaluar $\int_\sigma f(x,y,z)\,ds$ donde $\sigma: [1,e] \to \mathbf{R}^3$ está dada por $\sigma(t) = (\log t)\mathbf{i} + t\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

6. Escribir el límite siguiente como una integral de trayectoria de $f(x,y,z) = xy$ sobre alguna trayectoria σ en $[0,1]$ y evaluar:

$$\operatorname*{límite}_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N-1} (t_i^*)(t_{i+1}^2 - t_i^2)$$

(aquí $t_1, \ldots, t_N$ es una partición de $[0,1]$ y $t_i \le t_i^* \le t_{i+1}$).

7. Sea $f(x,y) = 2x - y$, $x = t^4$, $y = t^4$, $-1 \le t \le 1$.
(a) Calcular la integral de f a lo largo de esta trayectoria e interpretar geométricamente la respuesta.
(b) Evaluar la función longitud de arco $s(t)$ y rehacer la parte (a) en términos de s (quizá convenga consultar el ejercicio 2 de la sección 3.2).

En los ejercicios 8 a 11 se trata la aplicación de la integral de trayectoria al problema de definir el valor promedio de una función escalar a lo largo de una trayectoria. Definir el número

$$\frac{\int_\sigma f(x,y,z)\,ds}{l(\sigma)}$$

como el ***valor promedio*** *de f a lo largo de σ. Aquí, $l(\sigma)$ es la longitud de la trayectoria:*

$$l(\sigma) = \int_\sigma \|\sigma'(t)\|\, dt.$$

(Esto es análogo al promedio de una función sobre una región, según se definió en la sección 6.4)

8. (a) Justificar la fórmula $[\int_\sigma f(x,y,z)\, ds]/l(\sigma)$ para el valor promedio de f a lo largo de σ, usando sumas de Riemann.

(b) Mostrar que el valor promedio de f a lo largo de σ en el ejemplo 1 es $(1+\frac{4}{3}\pi^2)$.

(c) En el ejercicio 2(a) y (b) anterior, hallar el valor promedio de f sobre las curvas dadas.

9. Hallar la coordenada y promedio de los puntos en el semicírculo parametrizado por $\rho\colon [0,\pi] \to \mathbf{R}^3$, $\theta \mapsto (0, a \operatorname{sen}\theta, a\cos\theta)$; $a > 0$.

10. Suponer que el semicírculo en el ejercicio 9 está hecho de alambre con densidad uniforme de 2 gramos por unidad de longitud.

(a) ¿Cuál es la masa total del alambre?

(b) ¿Dónde está el centro de masa de esta configuración de alambre? (Consultar la sección 6.4.)

11. Sea σ la trayectoria dada por $\sigma(t) = (t^2, t, 3)$ para $t \in [0,1]$.

(a) Hallar $l(\sigma)$, la longitud de la trayectoria.

(b) Hallar la coordenada y promedio a lo largo de la trayectoria σ.

12. Si $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ es continuamente diferenciable a trozos, sea la *longitud de la gráfica* de f en $[a,b]$ definida como la longitud de la trayectoria $t \mapsto (t, f(t))$ para $t \in [a,b]$.

(a) Mostrar que la longitud de la gráfica de f en $[a,b]$ es

$$\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx.$$

(b) Hallar la longitud de la gráfica de $y = \log x$ de $x = 1$ a $x = 2$.

13. Hallar la masa de un alambre que sigue la intersección de la esfera $x^2+y^2+z^2 = 1$ y el plano $x+y+z = 0$ si la densidad en (x,y,z) está dada por $\rho(x,y,z) = x^2$ gramos por unidad de longitud del alambre.

14. Evaluar $\int_\sigma f\, ds$ donde $f(x,y,z) = z$ y $\sigma(t) = (t\cos t, t \operatorname{sen} t, t)$ para $0 \le t \le t_0$.

7.2 INTEGRALES DE LÍNEA

Si $\mathbf{F}$ es un campo de fuerza en el espacio, entonces una partícula de prueba (por ejemplo, una pequeña unidad de carga en un campo de fuerza eléctrico o una masa unitaria en un campo gravitacional), experimentará la fuerza $\mathbf{F}$. Suponer que la partícula se mueve a lo largo de la imagen de una trayectoria σ mientras actúa sobre ella $\mathbf{F}$. Un concepto fundamental es el de *trabajo realizado* por $\mathbf{F}$ sobre la partícula conforme traza la trayectoria σ. Si σ es un desplazamiento en línea recta dado por el vector $\mathbf{d}$ y $\mathbf{F}$ es una fuerza constante, entonces el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ al mover la partícula a lo largo de la trayectoria es $\mathbf{F}\cdot\mathbf{d}$:

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{d} = (\text{fuerza}) \times (\text{desplazamiento en la dirección de la fuerza}).$$

De manera más general, si la trayectoria está curvada podemos imaginar que está hecha de una sucesión de desplazamientos rectos infinitesimales, o que está aproximado por un número finito de desplazamientos rectos. Entonces (como en la deducción de las fórmulas para longitud de arco en la sección 3.2 y la integral de trayectoria en la sección 7.1) llegamos a la siguiente fórmula para el trabajo realizado por el campo de fuerza $\mathbf{F}$ sobre una partícula que se mueve a lo largo de una trayectoria $\boldsymbol{\sigma}\colon [a,b] \to \mathbf{R}^3$:

$$\text{trabajo realizado por } \mathbf{F} = \int_a^b \mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \cdot \boldsymbol{\sigma}'(t)\, dt.$$

Sin dar una demostración rigurosa podemos justificar la deducción como sigue. Conforme t varía sobre un pequeño intervalo t a $t + \Delta t$, la partícula se mueve de $\boldsymbol{\sigma}(t)$ a $\boldsymbol{\sigma}(t + \Delta t)$, un vector de desplazamiento de $\Delta \mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma}(t + \Delta t) - \boldsymbol{\sigma}(t)$ (ver la figura 7.2.1).

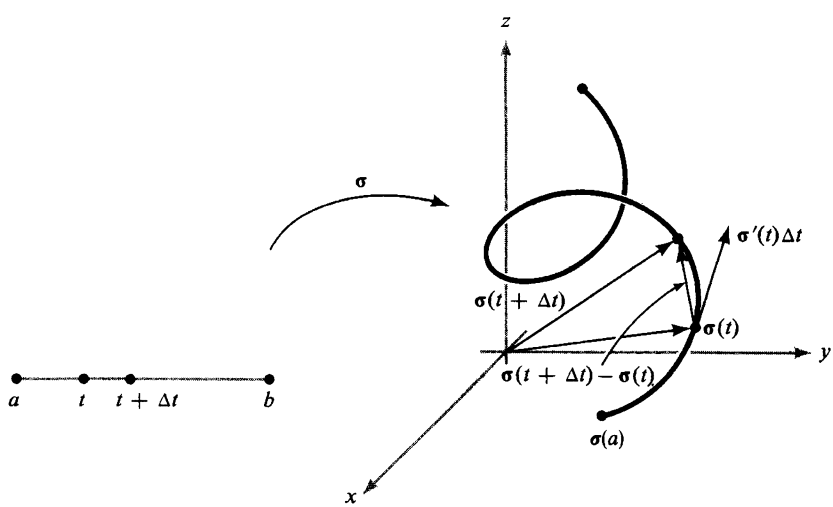


Figura 7.2.1 Para Δt pequeño, $\Delta \mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma}(t + \Delta t) - \boldsymbol{\sigma}(t) \approx \boldsymbol{\sigma}'(t)\, \Delta t$.

De la definición de derivada, obtenemos la aproximación $\Delta \mathbf{s} \approx \boldsymbol{\sigma}'(t)\, \Delta t$. El trabajo realizado al ir de $\boldsymbol{\sigma}(t)$ a $\boldsymbol{\sigma}(t + \Delta t)$ es, por lo tanto, aproximadamente

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \cdot \Delta \mathbf{s} \approx \mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \cdot \boldsymbol{\sigma}'(t)\, \Delta t.$$

Si subdividimos el intervalo $[a,b]$ en n partes iguales $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, con $\Delta t = t_{i+1} - t_i$, entonces el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ es aproximadamente

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}(t_i)) \cdot \Delta \mathbf{s} = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}(t_i)) \cdot \boldsymbol{\sigma}'(t_i)\, \Delta t.$$

Cuando $n \to \infty$, esta aproximación se vuelve cada vez mejor, de modo que es razonable definir trabajo como el límite de la suma anterior cuando $n \to \infty$. Pero este límite está dado por la integral

$$\int_a^b \mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \cdot \boldsymbol{\sigma}'(t)\, dt.$$

Este análisis nos conduce a la siguiente definición.

DEFINICIÓN *Sea* $\mathbf{F}$ *un campo vectorial en* $\mathbf{R}^3$ *que sea continuo sobre la trayectoria* C^1, $\boldsymbol{\sigma}\colon [a,b] \to \mathbf{R}^3$. *Definimos* $\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, *la* ***integral de línea*** *de* $\mathbf{F}$ *a lo largo de* $\boldsymbol{\sigma}$, *por la fórmula*

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \cdot \boldsymbol{\sigma}'(t)\, dt;$$

esto es, integramos el producto punto de $\mathbf{F}$ *con* $\boldsymbol{\sigma}'$ *sobre el intervalo* $[a,b]$.

Como sucede con las funciones escalares, también podemos definir $\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ *si* $\mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \cdot \boldsymbol{\sigma}'(t)$ *sólo es continua a trozos.*

Hay otra fórmula útil para la integral de línea en el caso de trayectorias $\boldsymbol{\sigma}$ que satisfagan $\boldsymbol{\sigma}'(t) \neq \mathbf{0}$, a saber: si $\mathbf{T}(t) = \boldsymbol{\sigma}'(t)/\|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|$ denota al vector tangente unitario, tenemos

$$\begin{aligned}
\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_a^b \mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \cdot \boldsymbol{\sigma}'(t)\, dt && \text{(por definición)} \\
&= \int_a^b \left[\mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}'(t)}{\|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|}\right] \|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|\, dt && \text{(cancelando } \|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|) \\
&= \int_a^b [\mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \cdot \mathbf{T}(t)] \|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|\, dt && (1)
\end{aligned}$$

En esta fórmula se dice que $\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ es igual a algo parecido a la integral de trayectoria de la componente tangencial $\mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \cdot \mathbf{T}(t)$ de $\mathbf{F}$ a lo largo de $\boldsymbol{\sigma}$. De hecho, la última parte de la fórmula (1) es análoga a la integral de trayectoria de una función escalar f a lo largo de $\boldsymbol{\sigma}$. [NOTA: si $\boldsymbol{\sigma}$ no se interseca a sí misma (es decir, si $\boldsymbol{\sigma}(t_1) = \boldsymbol{\sigma}(t_2)$ implica $t_1 = t_2$), entonces cada punto P de C (la curva imagen de $\boldsymbol{\sigma}$) se puede escribir de manera única como $\boldsymbol{\sigma}(t)$ para algún t. Si definimos $f(\mathrm{P}) = f(\boldsymbol{\sigma}(t)) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{T}(t)$, f es una función definida en C y, por definición, su integral de trayectoria a lo largo de $\boldsymbol{\sigma}$ está dada por la fórmula (1) y no hay ninguna dificultad. No obstante, si $\boldsymbol{\sigma}$ se interseca a sí misma, no podemos definir f como función en C, como antes (¿por qué?), incluso en este caso es útil pensar en el lado derecho de la fórmula (1) como una integral de trayectoria.]

Para calcular una integral de línea en cualquier caso particular, podemos usar la definición original o podemos integrar la componente tangencial de $\mathbf{F}$ a lo largo de $\boldsymbol{\sigma}$, como prescribe la fórmula (1), depende de qué sea más fácil o más apropiado.

EJEMPLO 1 *Sea* $\boldsymbol{\sigma}(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, t)$, *con* $0 \leq t \leq 2\pi$. *Sea* $\mathbf{F}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. *Calcular* $\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$.

SOLUCIÓN Aquí, $\mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}(t)) = \mathbf{F}(\operatorname{sen} t, \cos t, t) = (\operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ y $\boldsymbol{\sigma}'(t) = (\cos t)\mathbf{i} - (\operatorname{sen} t)\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Por lo tanto,

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \cdot \boldsymbol{\sigma}'(t) = \operatorname{sen} t \cos t - \cos t \operatorname{sen} t + t = t,$$

de modo que

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} t\, dt = 2\pi^2. \qquad \blacktriangle$$

Otra manera común de escribir integrales de línea es

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\boldsymbol{\sigma}} F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz,$$

donde F_1, F_2 y F_3 son las componentes del campo vectorial $\mathbf{F}$. A la expresión $F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz$ la llamamos *forma diferencial.** Por *definición*, la integral de una forma diferencial es

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}} F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz = \int_a^b \left(F_1 \frac{dx}{dt} + F_2 \frac{dy}{dt} + F_3 \frac{dz}{dt}\right) dt = \int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

EJEMPLO 2 *Evaluar* $\int_{\boldsymbol{\sigma}} x^2\, dx + xy\, dy + dz$, *donde* $\boldsymbol{\sigma}\colon [0,1] \to \mathbf{R}^3$ *está dada por* $\boldsymbol{\sigma}(t) = (t, t^2, 1) = (x(t), y(t), z(t))$.

SOLUCIÓN Calculamos $dx/dt = 1$, $dy/dt = 2t$, $dz/dt = 0$; por lo tanto

$$\begin{aligned}\int_{\boldsymbol{\sigma}} x^2\, dx + xy\, dy + dz &= \int_0^1 \left([x(t)]^2 \frac{dx}{dt} + [x(t)y(t)]\frac{dy}{dt}\right) dt \\ &= \int_0^1 (t^2 + 2t^4)\, dt \\ &= [\tfrac{1}{3}t^3 + \tfrac{2}{5}t^5]_0^1 = \tfrac{11}{15}. \qquad \blacktriangle\end{aligned}$$

EJEMPLO 3 *Evaluar la integral* $\int_{\boldsymbol{\sigma}} \cos z\, dx + e^x\, dy + e^y\, dz$, *donde* $\boldsymbol{\sigma}(t) = (1, t, e^t)$ *y* $0 \le t \le 2$.

SOLUCIÓN Calculamos $dx/dt = 0$, $dy/dt = 1$, $dz/dt = e^t$, de modo que

$$\begin{aligned}\int_{\boldsymbol{\sigma}} \cos z\, dx + e^x\, dy + e^y\, dz &= \int_0^2 (0 + e + e^{2t})\, dt \\ &= [et + \tfrac{1}{2}e^{2t}]_0^2 = 2e + \tfrac{1}{2}e^4 - \tfrac{1}{2}. \qquad \blacktriangle\end{aligned}$$

*Ver la sección 8.6 para un breve estudio de la teoría general de formas diferenciales.

EJEMPLO 4 *Sea σ la trayectoria*

$$x = \cos^3\theta, \qquad y = \operatorname{sen}^3\theta, \qquad z = \theta, \qquad 0 \le \theta \le \frac{7\pi}{2}$$

(ver la figura 7.2.2). Evaluar la integral $\int_\sigma (\operatorname{sen} z\, dx + \cos z\, dy - (xy)^{1/3}\, dz)$.

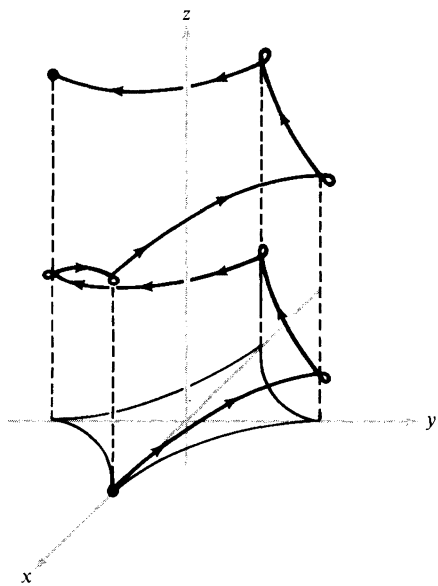


Figura 7.2.2 La imagen de la trayectoria $x = \cos^3\theta$, $y = \operatorname{sen}^3\theta$, $z = \theta$; $0 \le \theta \le 7\pi/2$.

SOLUCIÓN En este caso tenemos

$$\frac{dx}{d\theta} = -3\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta, \qquad \frac{dy}{d\theta} = 3\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta, \qquad \frac{dz}{d\theta} = 1,$$

de modo que la integral es

$$\begin{aligned}
&\int_\sigma \operatorname{sen} z\, dx + \cos z\, dy - (xy)^{1/3}\, dz \\
&\quad = \int_0^{7\pi/2} (-3\cos^2\theta \operatorname{sen}^2\theta + 3\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta - \cos\theta\operatorname{sen}\theta)\, d\theta \\
&\quad = -\int_0^{7\pi/2} \cos\theta\operatorname{sen}\theta\, d\theta = -\left[\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2\theta\right]_0^{7\pi/2} = -\tfrac{1}{2}. \qquad \blacktriangle
\end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Suponer que $\mathbf{F}$ es el campo de fuerza vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = x^3\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Parametrizar el círculo de radio a en el plano yz haciendo que $\sigma(\theta)$ tenga componentes

$$x = 0, \qquad y = a\cos\theta, \qquad z = a\operatorname{sen}\theta, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

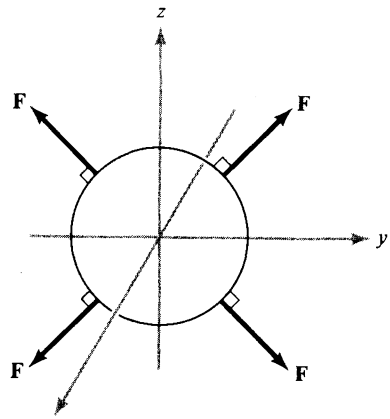


Figura 7.2.3 Campo vectorial $\mathbf{F}$ normal a un círculo en el plano yz.

Como $\mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}(\theta)) \cdot \boldsymbol{\sigma}'(\theta) = 0$, el campo de fuerza $\mathbf{F}$ es normal al círculo en todo punto sobre el círculo, de modo que $\mathbf{F}$ no realizará trabajo sobre la partícula que se mueve a lo largo de éste (figura 7.2.3). Por lo tanto el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ debe ser 0. Podemos verificar esto mediante computación directa:

$$\begin{aligned} W &= \int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\boldsymbol{\sigma}} x^3\, dx + y\, dy + z\, dz \\ &= \int_0^{2\pi} (0 - a^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta + a^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta)\, d\theta = 0. \qquad \blacktriangle \end{aligned}$$

EJEMPLO 6 Si consideramos el campo y la curva del ejemplo 4, vemos que el trabajo realizado por el campo es $-\frac{1}{2}$, una cantidad negativa. Esto significa que el campo impide el movimiento a lo largo de la trayectoria. ▲

La integral de línea $\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ depende no sólo del campo $\mathbf{F}$ sino también de la trayectoria $\boldsymbol{\sigma}\colon [a, b] \to \mathbf{R}^3$. En general, si $\boldsymbol{\sigma}$ y $\boldsymbol{\rho}$ son dos trayectorias diferentes en $\mathbf{R}^3$, $\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \neq \int_{\boldsymbol{\rho}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$. Por otro lado, veremos que $\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \pm \int_{\boldsymbol{\rho}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ se cumple para todo campo vectorial $\mathbf{F}$ si $\boldsymbol{\rho}$ es lo que llamamos una *reparametrización de* $\boldsymbol{\sigma}$.

DEFINICIÓN *Sea $h\colon I \to I_1$ una función de clase C^1 con valores reales que sea una correspondencia biunívoca entre un intervalo $I = [a, b]$ sobre otro intervalo $I_1 = [a_1, b_1]$. Sea $\boldsymbol{\sigma}\colon I_1 \to \mathbf{R}^3$ una trayectoria C^1 a trozos. Entonces a la composición*

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\sigma} \circ h\colon I \to \mathbf{R}^3$$

le llamamos **reparametrización** *de $\boldsymbol{\sigma}$.*

Esto significa que $\rho(t) = \sigma(h(t))$, de modo que h cambia la variable; de manera alternativa, se puede pensar en h como un cambio en la rapidez con que se mueve un punto a lo largo de la trayectoria. En efecto, observar que $\rho'(t) = \sigma'(h(t))h'(t)$, de modo que el vector velocidad para σ se multiplica por el factor escalar $h'(t)$.

Está implícito en la definición que h debe mandar extremos a extremos; esto es, $h(a) = a_1$ y $h(b) = b_1$, o bien $h(a) = b_1$ y $h(b) = a_1$. Distinguimos así dos tipos de reparametrización. Si $\sigma \circ h$ es una reparametrización de σ, entonces

$$\sigma \circ h(a) = \sigma(a_1) \qquad \text{y} \qquad \sigma \circ h(b) = \sigma(b_1)$$

o

$$\sigma \circ h(a) = \sigma(b_1) \qquad \text{y} \qquad \sigma \circ h(b) = \sigma(a_1).$$

En el primer caso, se dice que la reparametrización *preserva la orientación*, y una partícula que trace la trayectoria $\sigma \circ h$ se mueve en la misma dirección que una partícula que trace σ. En el segundo caso, la reparametrización se describe como que *invierte la orientación*, y una partícula que trace la trayectoria $\sigma \circ h$ se mueve en dirección opuesta a la de la partícula que traza σ (figura 7.2.4).

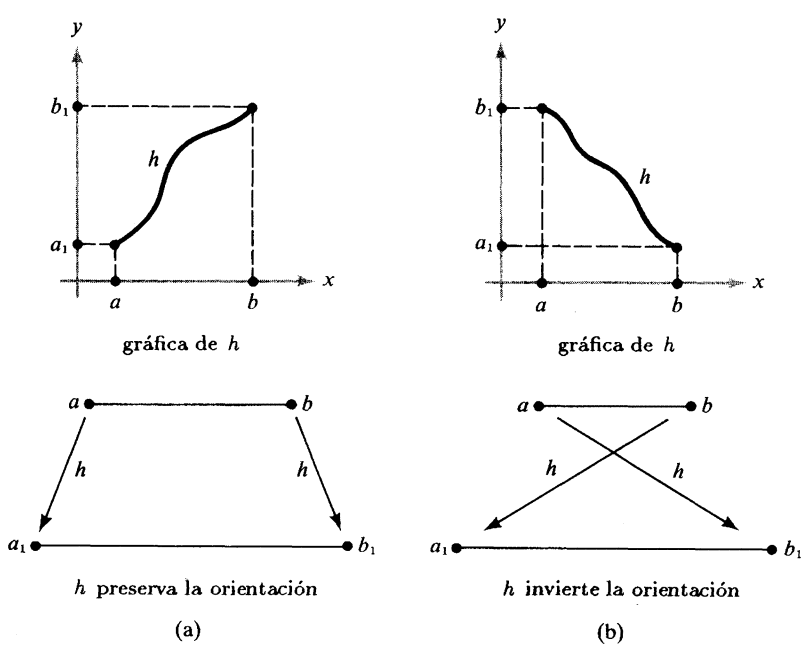


Figura 7.2.4 Ilustración de una reparametrización que preserva la orientación (a), y de una parametrización que invierte la orientación (b).

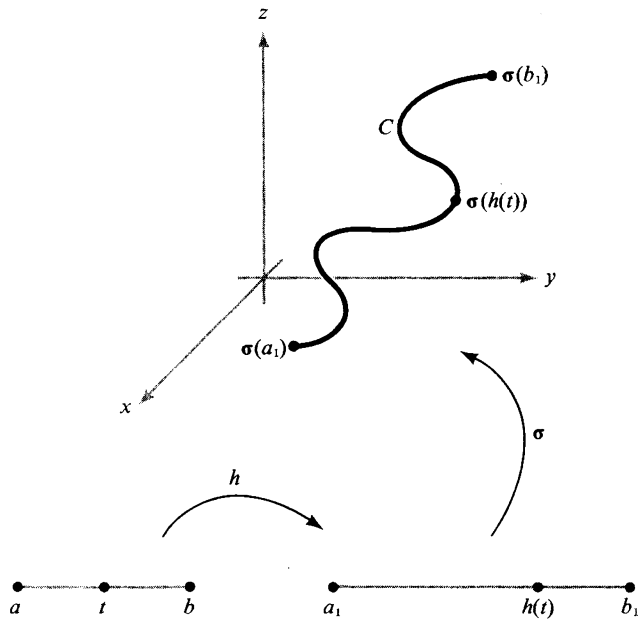


Figura 7.2.5 La trayectoria $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\sigma} \circ h$ es una reparametrización de $\boldsymbol{\sigma}$.

Por ejemplo, si C es la imagen de una trayectoria $\boldsymbol{\sigma}$, como se muestra en la figura 7.2.5, esto es, $C = \boldsymbol{\sigma}([a_1, b_1])$, y h preserva la orientación, entonces $\boldsymbol{\sigma} \circ h(t)$ irá de $\boldsymbol{\sigma}(a_1)$ a $\boldsymbol{\sigma}(b_1)$ conforme t va de a a b; y si h invierte la orientación, $\boldsymbol{\sigma} \circ h(t)$ irá de $\boldsymbol{\sigma}(b_1)$ a $\boldsymbol{\sigma}(a_1)$ conforme t va de a a b.

EJEMPLO 7 Sea $\boldsymbol{\sigma}: [a, b] \to \mathbf{R}^3$ cualquier trayectoria C^1 a trozos. Entonces:

(a) La trayectoria $\boldsymbol{\sigma}_{\text{op}}: [a, b] \to \mathbf{R}^3$, $t \mapsto \boldsymbol{\sigma}(a + b - t)$, es una reparametrización de $\boldsymbol{\sigma}$ correspondiente a la función $h: [a, b] \to [a, b]$, $t \mapsto a + b - t$; llamamos $\boldsymbol{\sigma}_{\text{op}}$ la *trayectoria opuesta* a $\boldsymbol{\sigma}$. Esta reparametrización invierte la orientación.

(b) La trayectoria $\boldsymbol{\rho}: [0, 1] \to \mathbf{R}^3$, $t \mapsto \boldsymbol{\sigma}(a + (b - a)t)$, es una reparametrización de $\boldsymbol{\sigma}$ que preserva la orientación, correspondiente al cambio de coordenadas $h: [0, 1] \to [a, b]$, $t \mapsto a + (b - a)t$. ▲

TEOREMA 1 *Sea* $\mathbf{F}$ *un campo vectorial continuo en la trayectoria* C^1 $\boldsymbol{\sigma}: [a_1, b_1] \to \mathbf{R}^3$, *y sea* $\boldsymbol{\rho}: [a, b] \to \mathbf{R}^3$ *una reparametrización de* $\boldsymbol{\sigma}$. *Si* $\boldsymbol{\rho}$ *preserva la orientación, entonces*

$$\int_{\boldsymbol{\rho}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$

y si $\boldsymbol{\rho}$ invierte la orientación, entonces

$$\int_{\boldsymbol{\rho}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

DEMOSTRACIÓN Por hipótesis, tenemos una función h tal que $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\sigma} \circ h$. Por la regla de la cadena,

$$\boldsymbol{\rho}'(t) = \boldsymbol{\sigma}'(h(t))h'(t),$$

de modo que

$$\int_{\boldsymbol{\rho}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b [\mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}(h(t))) \cdot \boldsymbol{\sigma}'(h(t))]h'(t)\, dt.$$

Cambiando variables con $s = h(t)$ (ver la sección 6.3), obtenemos

$$\int_{h(a)}^{h(b)} \mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}(s)) \cdot \boldsymbol{\sigma}'(s)\, ds = \begin{cases} \int_{a_1}^{b_1} \mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}(s)) \cdot \boldsymbol{\sigma}'(s)\, ds = \int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} & \text{si } \boldsymbol{\rho} \text{ preserva la orientación} \\ \int_{b_1}^{a_1} \mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}(s)) \cdot \boldsymbol{\sigma}'(s)\, ds = -\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} & \text{si } \boldsymbol{\rho} \text{ invierte la orientación} \end{cases}$$

■

El teorema 1 también se cumple para trayectorias C^1 a trozos, como podemos ver si rompemos los intervalos en segmentos en los cuales las trayectorias sean de clase C^1 y sumamos las integrales sobre intervalos separados.

Así, si es conveniente reparametrizar una trayectoria cuando se evalúa una integral, el teorema 1 asegura que el valor de la integral no se afectará, excepto, quizá, por el signo, dependiendo de la orientación.

EJEMPLO 8 *Sean $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ y $\boldsymbol{\sigma}\colon [-5, 10] \to \mathbf{R}^3$ definida por $t \mapsto (t, t^2, t^3)$. Evaluar $\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ y $\int_{\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{op}}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$.*

SOLUCIÓN Para $\boldsymbol{\sigma}$, tenemos $dx/dt = 1$, $dy/dt = 2t$, $dz/dt = 3t^2$ y $\mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}(t)) = t^5\mathbf{i} + t^4\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_{-5}^{10} \left(F_1 \frac{dx}{dt} + F_2 \frac{dy}{dt} + F_3 \frac{dz}{dt} \right) dt \\ &= \int_{-5}^{10} (t^5 + 2t^5 + 3t^5)\, dt = [t^6]_{-5}^{10} = 984{,}375. \end{aligned}$$

Por otro lado, para

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{op}}\colon [-5, 10] \to \mathbf{R}^3, t \mapsto \boldsymbol{\sigma}(5 - t) = (5 - t, (5 - t)^2, (5 - t)^3),$$

tenemos $dx/dt = -1$, $dy/dt = -10 + 2t = -2(5-t)$, $dz/dt = -75 + 30t - 3t^2 = -3(5-t)^2$ y $\mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}_{\text{op}}(t)) = (5-t)^5\mathbf{i} + (5-t)^4\mathbf{j} + (5-t)^3\mathbf{k}$. Por lo tanto

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}_{\text{op}}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{-5}^{10} [-(5-t)^5 - 2(5-t)^5 - 3(5-t)^5]\, dt$$
$$= [(5-t)^6]_{-5}^{10} = -984{,}375. \qquad \blacktriangle$$

Estamos interesados en reparametrizaciones porque si la imagen de una $\boldsymbol{\sigma}$ particular puede ser representada de muchas maneras, queremos estar seguros de que las integrales sobre esta imagen no dependen de la parametrización particular. Por ejemplo, para algunos problemas el círculo unitario se puede representar de manera conveniente por la función $\boldsymbol{\rho}$ dada por

$$x(t) = \cos 2t, \qquad y(t) = \operatorname{sen} 2t, \qquad 0 \le t \le \pi.$$

El teorema 1 garantiza que cualquier integral calculada para esta representación será igual que cuando se representa al círculo por la función $\boldsymbol{\sigma}$ dada por

$$x(t) = \cos t, \qquad y(t) = \operatorname{sen} t, \qquad 0 \le t \le 2\pi,$$

pues $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\sigma} \circ h$, donde $h(t) = 2t$, y así, $\boldsymbol{\rho}$ es una reparametrización de $\boldsymbol{\sigma}$. Sin embargo, nótese que la función $\boldsymbol{\gamma}$ dada por

$$x(t) = \cos t, \qquad y(t) = \operatorname{sen} t, \qquad 0 \le t \le 4\pi.$$

no es una reparametrización de $\boldsymbol{\sigma}$. Aunque recorre la misma imagen (el círculo), lo hace dos veces. (¿Por qué esto implica que $\boldsymbol{\gamma}$ no es una reparametrización de $\boldsymbol{\sigma}$?)

La integral de línea es una *integral orientada,* por cuanto ocurre un cambio de signo (como lo vimos en el teorema 1) si se invierte la orientación de la curva. La integral de trayectoria no tiene esta propiedad. Esto se sigue del hecho de que al cambiar t por $-t$ (inversión de la orientación) sólo se cambia el signo de $\boldsymbol{\sigma}'(t)$, no su longitud. Ésta es una de las diferencias entre la integral de línea y la integral de trayectoria. En el teorema siguiente, demostrado mediante el mismo método que el teorema 1, se muestra que las integrales de trayectoria no cambian bajo reparametrizaciones —incluyendo a las que invierten la orientación.

TEOREMA 2 *Sea $\boldsymbol{\sigma}$ una trayectoria C^1 a trozos, f una función continua (con valores reales) definida en la imagen de $\boldsymbol{\sigma}$, y sea $\boldsymbol{\rho}$ cualquier reparametrización de $\boldsymbol{\sigma}$. Entonces*

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}} f(x,y,z)\, ds = \int_{\boldsymbol{\rho}} f(x,y,z)\, ds. \tag{2}$$

Consideraremos a continuación una técnica útil para evaluar integrales de línea. Recordar que un campo vectorial $\mathbf{F}$ es un *campo vectorial gradiente* si $\mathbf{F} = \nabla f$ para alguna función f con valores reales. Así,

$$\mathbf{F} = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}.$$

Suponer que G, $g\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ son funciones continuas con valores reales, con $G' = g$. Entonces, por el teorema fundamental del cálculo,

$$\int_a^b g(x)\,dx = G(b) - G(a).$$

Así, el valor de la integral de g depende sólo del valor de G en los puntos extremos del intervalo $[a,b]$. Como ∇f representa la derivada de f, podemos preguntarnos si $\int_\sigma \nabla f \cdot d\mathbf{s}$ está determinada completamente por el valor de f en los extremos $\sigma(a)$ y $\sigma(b)$. La respuesta está contenida en la siguiente *generalización del teorema fundamental del cálculo.*

TEOREMA 3 *Suponer que $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ es de clase C^1 y que $\sigma\colon [a,b] \to \mathbf{R}^3$ es una trayectoria C^1 a trozos. Entonces*

$$\int_\sigma \nabla f \cdot d\mathbf{s} = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a)).$$

DEMOSTRACIÓN Aplicar la regla de la cadena a la función compuesta

$$F\colon t \mapsto f(\sigma(t))$$

para obtener

$$F'(t) = (f \circ \sigma)'(t) = \nabla f(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t).$$

La función F es una función con valores reales de la variable t, de modo que por el teorema fundamental del cálculo,

$$\int_a^b F'(t)\,dt = F(b) - F(a) = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a)).$$

Por lo tanto,

$$\int_\sigma \nabla f \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \nabla f(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\,dt = \int_a^b F'(t)\,dt = F(b) - F(a)$$
$$= f(\sigma(b)) - f(\sigma(a)). \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 9 *Sea σ la trayectoria $\sigma(t) = (t^4/4, \operatorname{sen}^3(t\pi/2), 0)$, $t \in [0,1]$. Evaluar*

$$\int_\sigma y\,dx + x\,dy$$

(lo cual significa $\int_\sigma y\,dx + x\,dy + 0\,dz$).

SOLUCIÓN Reconocemos $y\,dx + x\,dy$, o de manera equivalente, el campo vectorial $y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$, como el gradiente de la función $f(x,y,z) = xy$. Así,

$$\int_\sigma y\,dx + x\,dy = f(\sigma(1)) - f(\sigma(0)) = \tfrac{1}{4}\cdot 1 - 0 = \tfrac{1}{4}. \qquad \blacktriangle$$

Obviamente, si podemos identificar el integrando como un gradiente, la evaluación de la integral será mucho más fácil. Por ejemplo, el lector deberá tratar de obtener de manera directa la integral anterior. En cálculo de una variable, toda integral es, en principio, obtenible hallando una antiderivada. Sin embargo, para campos vectoriales esto no siempre es cierto, pues el campo vectorial no necesariamente es un gradiente. Este punto será examinado con detalle en la sección 8.3.

Hemos visto cómo definir integrales de trayectoria (integrales de funciones escalares) e integrales de línea (integrales de funciones vectoriales) sobre curvas parametrizadas. También hemos visto que nuestro trabajo se simplifica si escogemos de manera sensata una parametrización. Como estas integrales son independientes de la parametrización (excepto, quizá, por el signo), parece natural expresar la teoría de manera que sea independiente de la parametrización y sea, así, más "geométrica". Lo haremos brevemente y de manera algo informal en el siguiente análisis.

DEFINICIÓN *Definimos* ***curva simple*** *C como la imagen de una función C^1 a trozos $\sigma: I \to \mathbf{R}^3$ y que sea uno a uno en un intervalo I; σ se llama* ***parametrización*** *de C. Así, una curva simple es aquella que no se interseca a sí misma (figura 7.2.6). Si $I = [a,b]$, llamamos a $\sigma(a)$ y $\sigma(b)$* ***extremos*** *de la curva. Cada*

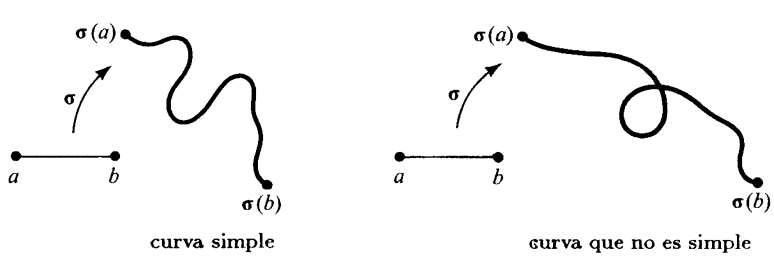


Figura 7.2.6 A la izquierda se muestra una curva simple, no se interseca a sí misma. A la derecha tenemos una curva que se interseca a sí misma, luego no es simple.

curva simple C tiene dos orientaciones o direcciones asociadas con ella. Si P *y* Q *son los extremos de la curva, entonces podemos considerar C como dirigida ya sea de* P *a* Q *o de* Q *a* P. *La curva simple C junto con un sentido de dirección se llama* **curva simple orientada** *o* **curva simple dirigida** *(figura 7.2.7).*

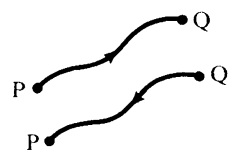


Figura 7.2.7 Hay dos sentidos de dirección posibles en una curva que une P y Q.

EJEMPLO 10 Si $I = [a, b]$ es un intervalo cerrado en el eje x, entonces I, como curva, tiene dos orientaciones: una correspondiente al movimiento de a a b (izquierda a derecha) y el otro correspondiente al movimiento de b a a (derecha a izquierda). Si f es una función con valores reales, continua en I, entonces denotando I con la primera orientación como I^+ e I con la segunda orientación por I^-, tenemos

$$\int_{I^+} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx = -\int_{I^-} f(x)\,dx. \qquad \blacktriangle$$

DEFINICIÓN *Por* **curva cerrada simple** *entenderemos la imagen de una función C^1 a trozos $\sigma\colon [a, b] \to \mathbf{R}^3$ que sea uno a uno en $[a, b)$ y satisfaga $\sigma(a) = \sigma(b)$ (figura 7.2.8). Si σ satisface la condición $\sigma(a) = \sigma(b)$ pero no necesariamente es uno a uno en $[a, b)$, llamamos a su imagen* **curva cerrada**. *Las curvas cerradas simples tienen dos orientaciones, correspondientes a las dos direcciones de movimiento posibles a lo largo de la curva (figura 7.2.9).*

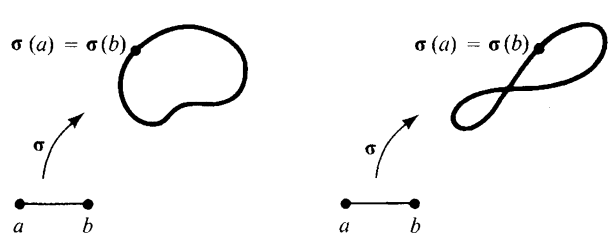


Figura 7.2.8 Curva cerrada simple (izquierda) y curva cerrada que no es simple (derecha).

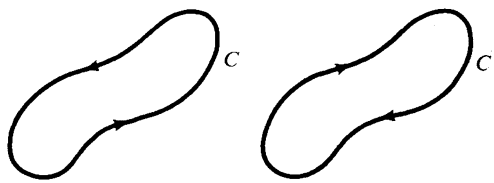


Figura 7.2.9 Dos orientaciones posibles para una curva cerrada simple C.

Si C es una curva simple orientada o una curva cerrada simple orientada, podemos definir, sin ambigüedad,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_\sigma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \qquad \text{y} \qquad \int_C f\, ds = \int_\sigma f\, ds, \tag{3}$$

donde σ es cualquier parametrización que preserve la orientación de C. En virtud de los teoremas 1 y 2, estas integrales no dependen de la selección de σ en tanto σ sea uno a uno (excepto, quizá, en los extremos). (No hemos demostrado que cualesquiera dos trayectorias uno a uno σ y η con la misma imagen deben ser reparametrizaciones una de otra, pero se omitirá este detalle técnico.) El punto que queremos señalar aquí es que, no obstante que *para facilitar la integración a lo largo de una curva ésta debe estar parametrizada, no es necesario incluir la parametrización en la notación de la integral.*

Una curva cerrada simple dada se puede parametrizar de muchas maneras. La figura 7.2.10 muestra a C representada como la imagen de una función ρ, con $\rho(t)$ avanzando en una dirección prescrita alrededor de una curva orientada C conforme t varía de a a b. Nótese que $\rho'(t)$ también apunta en esta dirección. La rapidez con la que recorremos C puede variar de una parametrización a otra, pero la integral no, de acuerdo con los teoremas 1 y 2.

Deberá tomarse la siguiente precaución respecto a estas observaciones. Es posible que dos funciones σ y η tengan la misma imagen, e induzcan la misma

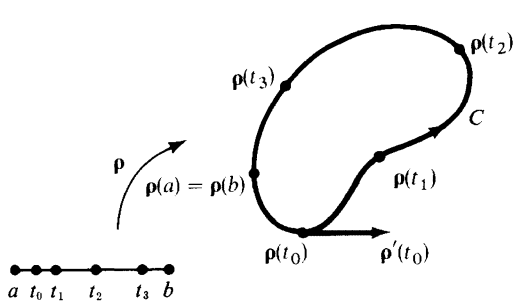


Figura 7.2.10 Conforme t va de a a b, $\rho(t)$ se mueve alrededor de la curva C en alguna dirección fija.

orientación en la imagen, tales que

$$\int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \neq \int_{\eta} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Como ejemplo, sea $\sigma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$ y $\eta(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} 2t, 0)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, con $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, 0, 0)$. Entonces

$$\int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} F_1(\sigma(t)) \frac{dx}{dt}\, dt$$

(los términos que contienen F_2 y F_3 son cero)

$$= -\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t\, dt = -\pi.$$

Pero $\int_{\eta} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -2\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 2t\, dt = -2\pi$. Claramente σ y η tienen la misma imagen, a saber, el círculo unitario en el plano xy, y más aún, recorren el círculo unitario en la misma dirección; sin embargo, $\int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \neq \int_{\eta} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$. La razón para esto es que σ es uno a uno pero η no (η recorre el círculo unitario dos veces en dirección contraria a la que giran las manecillas del reloj); por lo tanto, η no es una parametrización del círculo unitario, como una curva cerrada simple.
Si $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ es un campo vectorial, entonces en notación de formas diferenciales escribimos

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_C P\, dx + Q\, dy + R\, dz.$$

Si C^- es la misma curva que C, pero con orientación opuesta, entonces

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -\int_{C^-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Si C es una curva (o curva orientada) formada por varias curvas (orientadas) componentes C_i, $i = 1, \ldots, k$, como en la figura 7.2.11, entonces escribiremos $C = C_1 + C_2 + \cdots + C_k$. Como podemos parametrizar C parametrizando las

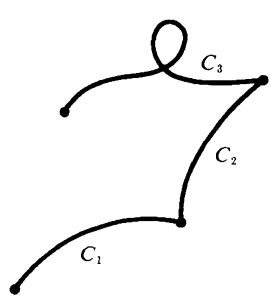


Figura 7.2.11 Una curva se puede formar con varias componentes.

piezas $C_1, \ldots, C_k$ por separado, obtenemos

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \cdots + \int_{C_k} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}. \tag{4}$$

Una razón para escribir una curva como suma de componentes es que puede ser más fácil parametrizar individualmente las componentes C_i, que parametrizar toda C. Si ése es el caso, la fórmula (4) proporciona una manera conveniente de evaluar $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$.

EJEMPLO 11 *Considerar C, el perímetro del cuadrado unitario en $\mathbf{R}^2$, orientado en el sentido contrario al que giran las manecillas del reloj (ver figura 7.2.12). Evaluar la integral $\int_C x^2\,dx + xy\,dy$.*

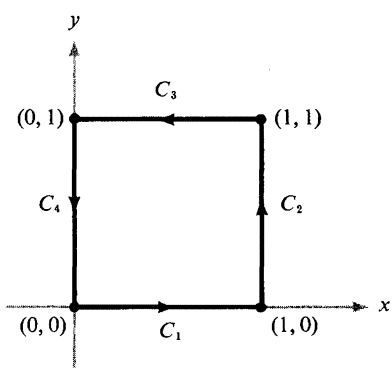


Figura 7.2.12 Perímetro del cuadrado unitario, parametrizado en cuatro piezas.

SOLUCIÓN Evaluamos la integral usando una parametrización conveniente de C que induzca la orientación dada. Por ejemplo:

$$\sigma\colon [0,4] \to \mathbf{R}^2, \qquad t \mapsto \begin{cases} (t,0) & 0 \le t \le 1 \\ (1, t-1) & 1 \le t \le 2 \\ (3-t, 1) & 2 \le t \le 3 \\ (0, 4-t) & 3 \le t \le 4. \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_C x^2\,dx + xy\,dy &= \int_0^1 (t^2 + 0)\,dt + \int_1^2 [0 + (t-1)]\,dt \\ &\quad + \int_2^3 [-(3-t)^2 + 0]\,dt + \int_3^4 (0+0)\,dt \\ &= \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2} + (-\tfrac{1}{3}) + 0 = \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Reevaluemos esta integral de línea, usando la fórmula (4) y parametrizando por separado las C_i. Nótese que la curva $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$, donde C_i son

las curvas orientadas ilustradas en la figura 7.2.12. Se pueden parametrizar como sigue:

$$C_1: \boldsymbol{\sigma}_1(t) = (t, 0), 0 \leq t \leq 1$$
$$C_2: \boldsymbol{\sigma}_2(t) = (1, t), 0 \leq t \leq 1$$
$$C_3: \boldsymbol{\sigma}_3(t) = (1-t, 1), 0 \leq t \leq 1$$
$$C_4: \boldsymbol{\sigma}_4(t) = (0, 1-t), 0 \leq t \leq 1$$

de modo que

$$\int_{C_1} x^2\,dx + xy\,dy = \int_0^1 t\,dt = \tfrac{1}{3}$$
$$\int_{C_2} x^2\,dx + xy\,dy = \int_0^1 t\,dt = \tfrac{1}{2}$$
$$\int_{C_3} x^2\,dx + xy\,dy = \int_0^1 -(1-t)^2\,dt = -\tfrac{1}{3}$$
$$\int_{C_4} x^2\,dx + xy\,dy = \int_0^1 0\,dt = 0.$$

Así, de nuevo,

$$\int_C x^2\,dx + xy\,dy = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} + 0 = \tfrac{1}{2}. \quad \blacktriangle$$

EJEMPLO 12 Una aplicación interesante de la integral de línea es la formulación matemática de la ley de Ampère, que relaciona corrientes eléctricas con sus efectos magnéticos.* Suponer que $\mathbf{H}$ denota un campo magnético en $\mathbf{R}^3$, y sea C una curva cerrada orientada en $\mathbf{R}^3$. Con las unidades físicas apropiadas, la ley de Ampère asegura que

$$\int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = I,$$

donde I es la corriente neta que pasa por cualquier superficie acotada por C (ver la figura 7.2.13). $\blacktriangle$

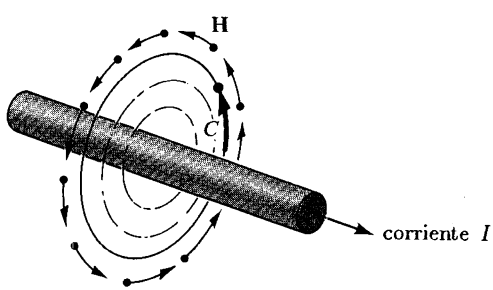


Figura 7.2.13 El campo magnético $\mathbf{H}$ que rodea a un alambre que lleve una corriente I satisface la ley de Ampère: $\int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = I$.

*El descubrimiento de que las corrientes eléctricas producen efectos magnéticos fue realizado por Oersted alrededor de 1820. Ver cualquier libro elemental de física para un estudio de los fundamentos físicos de estas ideas.

Finalmente, mencionemos que la integral de línea tiene otro significado físico importante, específicamente, la interpretación de $\int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s}$ donde $\mathbf{V}$ es el campo de velocidad de un fluido, que estudiaremos en la sección 8.2. Así, con ayuda de las integrales de línea es posible analizar una amplia variedad de conceptos físicos, desde la noción de trabajo hasta campos electromagnéticos y movimientos de fluidos.

EJERCICIOS

1. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Evaluar la integral de $\mathbf{F}$ a lo largo de cada una de las trayectorias siguientes:

(a) $\sigma(t) = (t, t, t)$, $0 \le t \le 1$ (b) $\sigma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$, $0 \le t \le 2\pi$

(c) $\sigma(t) = (\operatorname{sen} t, 0, \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$ (d) $\sigma(t) = (t^2, 3t, 2t^3)$, $-1 \le t \le 2$

2. Evaluar cada una de las integrales siguientes:

(a) $\int_\sigma x\,dy - y\,dx$, $\sigma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $0 \le t \le 2\pi$

(b) $\int_\sigma x\,dx + y\,dy$, $\sigma(t) = (\cos \pi t, \operatorname{sen} \pi t)$, $0 \le t \le 2$

(c) $\int_\sigma yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$, donde σ está formada por los segmentos de recta que unen a $(1, 0, 0)$ a $(0, 1, 0)$ a $(0, 0, 1)$

(d) $\int_\sigma x^2\,dx - xy\,dy + dz$, donde σ es la parábola $z = x^2$, $y = 0$ de $(-1, 0, 1)$ a $(1, 0, 1)$.

3. Considerar la fuerza $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Calcular el trabajo realizado al mover una partícula a lo largo de la parábola $y = x^2$, $z = 0$, de $x = -1$ a $x = 2$.

4. Sea σ una trayectoria suave.

(a) Suponer que $\mathbf{F}$ es perpendicular a $\sigma'(t)$ en $\sigma(t)$. Mostrar que

$$\int_\sigma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

(b) Si $\mathbf{F}$ es paralelo a $\sigma'(t)$ en $\sigma(t)$, mostrar que

$$\int_\sigma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_\sigma \|\mathbf{F}\|\,ds.$$

(Por paralelo a $\sigma'(t)$ se entiende que $\mathbf{F}(\sigma(t)) = \lambda(t)\sigma'(t)$, donde $\lambda(t) > 0$.)

5. Suponer que σ tiene longitud l y $\|\mathbf{F}\| \le M$. Probar que

$$\left| \int_\sigma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \right| \le Ml.$$

6. Evaluar $\int_\sigma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ donde $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ y $\sigma(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$.

7. Evaluar $\int_\sigma y\,dx + (3y^3 - x)\,dy + z\,dz$ para cada una de las trayectorias $\sigma(t) = (t, t^n, 0)$, $0 \le t \le 1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

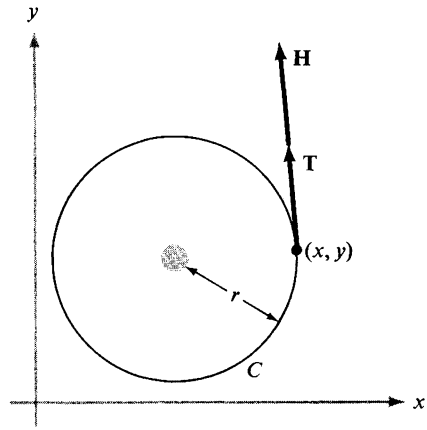


Figura 7.2.14 Sección plana de un alambre largo y una curva C alrededor del alambre.

8. Este ejercicio se refiere al ejemplo 12. Sea L un alambre muy largo, en la figura 7.2.14 se muestra una sección plana (con el plano perpendicular al alambre). Suponer que este plano es el xy. Los experimentos muestran que $\mathbf{H}$ es tangente a todo círculo en el plano xy cuyo centro es el eje de L, y que la magnitud de $\mathbf{H}$ es constante en dichos círculos C. Así, $\mathbf{H} = H\mathbf{T}$, donde $\mathbf{T}$ es un vector tangente unitario a C y H es algún escalar. Usando esta información, mostrar que $H = I/2\pi r$, donde r es el radio del círculo C e I es la corriente que fluye por el alambre.

9. La imagen de $t \mapsto (\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, en el plano se muestra en la figura 7.2.15. Evaluar la integral del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ alrededor de esta curva.

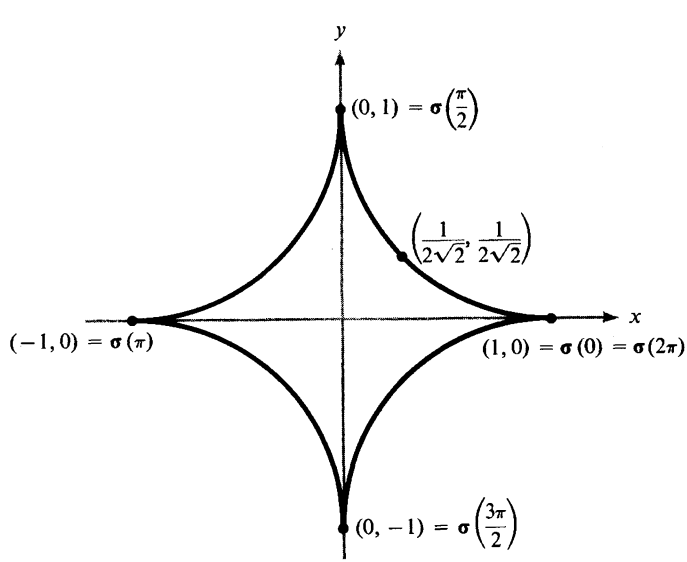


Figura 7.2.15 Hipocicloide $\sigma(t) = (\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t)$ (ejercicio 9).

10. Suponer que σ y ψ son dos trayectorias con los mismos extremos y $\mathbf{F}$ es un campo vectorial. Mostrar que $\int_\sigma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_\psi \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ es equivalente a $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = 0$, donde C es la curva cerrada obtenida al moverse primero alrededor de σ y después alrededor de ψ en la dirección opuesta.

11. Sea $\sigma(t)$ una trayectoria y $\mathbf{T}$ el vector tangente unitario. ¿Qué es $\int_\sigma \mathbf{T}\cdot d\mathbf{s}$?

12. Sea $\mathbf{F} = (z^3 + 2xy)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + 3xz^2\mathbf{k}$. Mostrar que la integral de $\mathbf{F}$ a lo largo del perímetro del cuadrado unitario con vértices $(\pm 1, \pm 1, 5)$ es cero.

13. Usando la trayectoria del ejercicio 9, observar que una función $\sigma\colon [a,b] \to \mathbf{R}^3$ de clase C^1 puede tener una imagen que no se vea "suave". ¿Creen que podría suceder esto si $\sigma'(t)$ fuera siempre distinto de cero?

14. ¿Cuál es el valor de la integral de un campo gradiente alrededor de una curva cerrada C?

15. Evaluar $\int_C 2xyz\,dx + x^2z\,dy + x^2y\,dz$, donde C es una curva orientada simple que conecta $(1,1,1)$ con $(1,2,4)$.

16. Suponer que $\nabla f(x,y,z) = 2xyze^{x^2}\mathbf{i} + ze^{x^2}\mathbf{j} + ye^{x^2}\mathbf{k}$. Si $f(0,0,0) = 5$, hallar $f(1,1,2)$.

17. Considerar el campo de fuerza gravitacional (con $G = m = M = 1$) definido [para $(x,y,z) \neq (0,0,0)$] por

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{-1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}).$$

Mostrar que el trabajo realizado por la fuerza gravitacional conforme una partícula se mueve de (x_1, y_1, z_1) a (x_2, y_2, z_2) a lo largo de cualquier trayectoria, depende sólo de los radios $R_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ y $R_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$.

***18.** Una ciclista sube una montaña a lo largo de la trayectoria que se muestra en la figura 7.2.16. Realiza una revolución alrededor de la montaña para llegar a la cima,

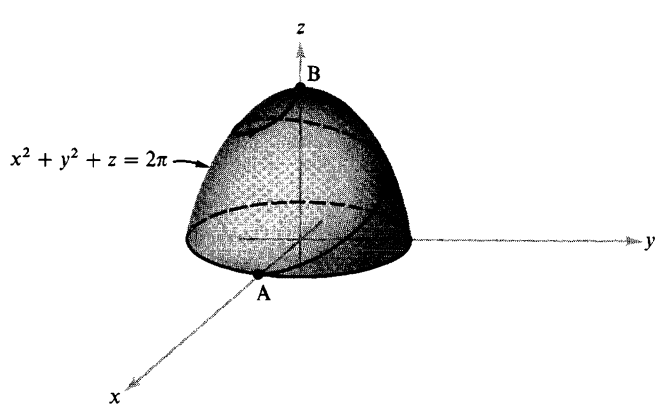


Figura 7.2.16 ¿Cuánto trabajo se realiza al subir en bicicleta esta montaña?

mientras que su velocidad de subida es constante. Durante el viaje, ella ejerce una fuerza descrita por el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = z^2\mathbf{i} + 3y^2\mathbf{j} + 2x\mathbf{k}.$$

¿Cuál es el trabajo realizado por la ciclista al viajar de A a B?

***19.** Sea $\sigma: [a, b] \to \mathbf{R}^3$ una trayectoria tal que $\sigma'(t) \neq \mathbf{0}$. Cuando se cumple esta condición se dice que σ es *regular*. Sea la función f definida por $f(x) = \int_a^x \|\sigma'(t)\|\, dt$.

(a) ¿Cuál es df/dx?

(b) Usando la respuesta a la parte (a), probar que $f: [a, b] \to [0, L]$, donde L es la longitud de σ, tiene una inversa diferenciable $g: [0, L] \to [a, b]$ que satisface $f \circ g(s) = s$, $g \circ f(x) = x$. (Pueden usar el teorema de la sección 4.4. de la función inversa para una variable.)

(c) Calcular dg/ds.

(d) Recordar que una trayectoria $s \mapsto \rho(s)$ es de rapidez unitaria, o parametrizada por la longitud de arco, si $\|\sigma'(s)\| = 1$. Mostrar que la reparametrización de σ dada por $\rho(s) = \sigma \circ g(s)$ es de rapidez unitaria. Concluir que cualquier trayectoria regular se puede reparametrizar por medio de la longitud de arco. (Así, por ejemplo, las fórmulas de Frenet en el ejercicio 11 de la sección 3.2 pueden aplicarse a la reparametrización ρ.)

***20.** A lo largo de una "trayectoria termodinámica" C en el espacio (V, T, P),

(i) El calor ganado es $\int_C \Lambda_V\, dV + K_V\, dT$; donde Λ_V y K_V son funciones de (V, T, P), dependiendo del sistema físico particular.

(ii) El trabajo realizado es $\int_C P\, dV$.

Para un gas de van der Waals,

$$P(V, T) = \frac{RT}{(V - b)} - \frac{a}{V^2}$$

$$J\Lambda_V = \frac{RT}{(V - b)}$$

$$K_V = \text{constante}$$

donde R, b, a y J son constantes conocidas. Inicialmente el gas está a una temperatura T_0 y tiene volumen V_0.

(a) Un proceso *adiabático* es un movimiento termodinámico $(V(t), T(t), P(t))$ para el cual

$$\frac{dT}{dV} = \frac{dT/dt}{dV/dt} = -\frac{\Lambda_V}{K_V}.$$

Si el gas de van der Waals se somete a un proceso adiabático en el cual se duplica el volumen hasta $2V_0$, calcular el

(1) calor ganado;
(2) trabajo realizado; y
(3) volumen, temperatura y presión final.

(b) Después del proceso indicado en la parte (a), el gas se enfría (o calienta) a volumen constante hasta alcanzar la temperatura original T_0. Calcular el

(1) calor ganado;
(2) trabajo realizado; y
(3) volumen, temperatura y presión final.

(c) Después del proceso indicado en la parte (b), se comprime el gas hasta que regresa a su volumen original V_0. La temperatura se mantiene constante durante el proceso. Calcular el

(1) calor ganado;
(2) trabajo realizado; y
(3) volumen, temperatura y presión final.

(d) Para el proceso cíclico (a), (b) y (c), calcular el

(1) calor total ganado y
(2) trabajo total realizado.

7.3 SUPERFICIES PARAMETRIZADAS

En las secciones 7.1 y 7.2 hemos estudiado integrales de funciones escalares y vectoriales a lo largo de curvas. Pasamos ahora a integrales sobre superficies y comenzaremos por estudiar la geometría de las superficies.

Ya conocemos un tipo de superficie, a saber, la gráfica de una función $f(x, y)$. En el capítulo 2 se hizo un estudio exhaustivo de gráficas, y sabemos calcular sus planos tangentes. Sin embargo, nos limitaríamos indebidamente si nos restringiéramos a este caso. Por ejemplo, muchas superficies se presentan como superficies de nivel de funciones. Suponer que nuestra superficie S es el conjunto de puntos (x, y, z) donde $x - z + z^3 = 0$. Aquí S es una hoja que se dobla sobre sí misma (respecto al plano xy) (ver la figura 7.3.1). Obviamente, nos gustaría llamar a S superficie, pues se trata de un plano con un doblez. Sin embargo, S *no* es la gráfica de alguna función $z = f(x, y)$, pues esto significa que para cada $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ debe haber un z_0 con $(x_0, y_0, z_0) \in S$. Como se ilustra en la figura 7.3.1, se viola esta condición.

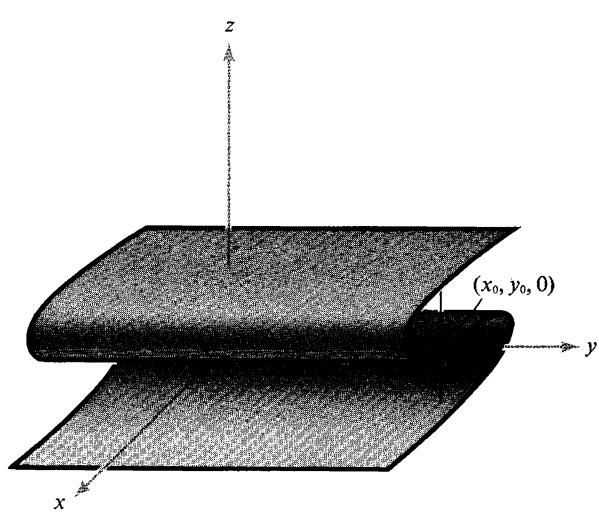


Figura 7.2.1 Una superficie que no es la gráfica de una función $z = f(x, y)$.

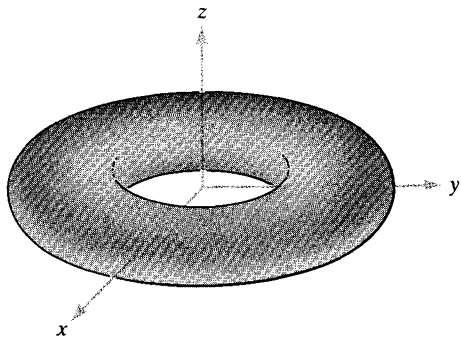


Figura 7.3.2 El toro no es la gráfica de una función de la forma $z = f(x, y)$.

Otro ejemplo es el toro, o la superficie de una dona, dibujada en la figura 7.3.2. Cualquiera diría que el toro es una superficie; sin embargo, por el mismo razonamiento anterior, un toro no puede ser la gráfica de una función diferenciable de dos variables. Estas observaciones nos impulsan a extender nuestra definición de superficie. La motivación para la definición que sigue se debe, en parte, a que se puede pensar una superficie como algo que se puede obtener a partir del plano "enrollando", "doblando" y "empujando". Por ejemplo, para obtener un toro, tomamos una parte del plano y la enrollamos (ver la figura 7.3.3), después tomamos los "extremos" y hacemos que se junten (figura 7.3.4).

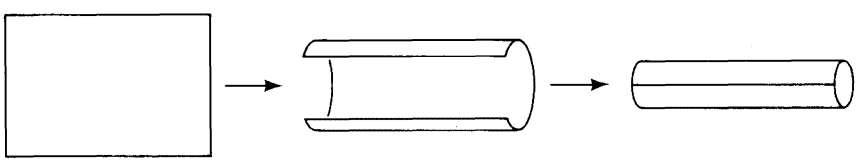


Figura 7.3.3 El primer paso para obtener un toro a partir de un rectángulo: hacer un cilindro.

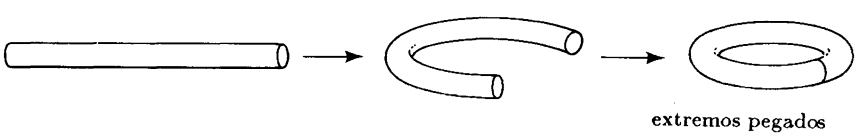


Figura 7.3.4 Doblar el cilindro y pegar los extremos para obtener un toro.

Con superficies, así como con curvas, queremos hacer distinción entre una función (parametrización) y su imagen (un objeto geométrico).

DEFINICIÓN *Una* ***superficie parametrizada*** *es una función* $\mathbf{\Phi}: D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, *donde* D *es algún dominio en* $\mathbf{R}^2$. *La* ***superficie*** S *correspondiente a la función* $\mathbf{\Phi}$ *es su imagen:* $S = \mathbf{\Phi}(D)$. *Podemos escribir*

$$\mathbf{\Phi}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Si $\mathbf{\Phi}$ *es diferenciable o es de clase* C^1 *(que equivale a decir que* $x(u, v)$, $y(u, v)$ *y* $z(u, v)$ *son funciones diferenciables o* C^1 *de* (u, v) *—ver el capítulo 2—), llamamos a* S ***superficie diferenciable*** *o* C^1.

Podemos pensar que $\mathbf{\Phi}$ tuerce o dobla la región D en el plano para producir la superficie S (ver la figura 7.3.5). Así, cada punto (u, v) en D se convierte en un rótulo para un punto $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ en S.

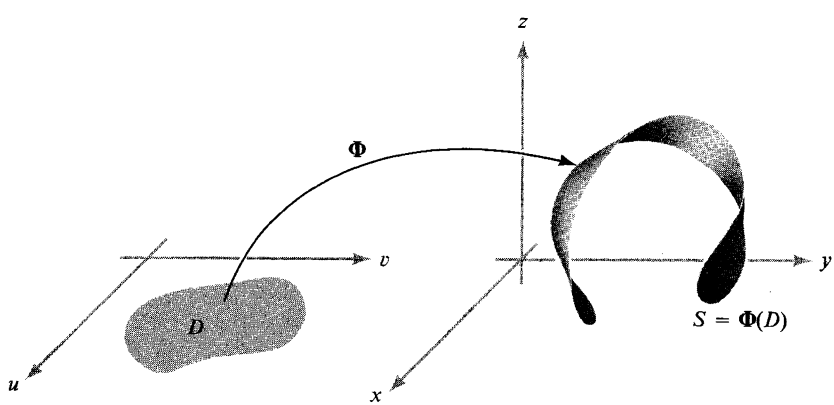


Figura 7.3.5 $\mathbf{\Phi}$ "tuerce" y "dobla" D sobre la superficie $S = \mathbf{\Phi}(D)$.

Suponer que $\mathbf{\Phi}$ es diferenciable en $(u_0, v_0) \in \mathbf{R}^2$. Fijando u en u_0 obtenemos una función $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ dada por $t \mapsto \mathbf{\Phi}(u_0, t)$, cuya imagen es una curva sobre la superficie (figura 7.3.6). Por los capítulos 2 y 3 sabemos que el vector tangente a esta curva en el punto $\mathbf{\Phi}(u_0, v_0)$ está dado por

$$\mathbf{T}_v = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{k}.$$

De manera análoga, si fijamos v y consideramos la curva $t \mapsto \mathbf{\Phi}(t, v_0)$, obtenemos el vector tangente a esta curva en $\mathbf{\Phi}(u_0, v_0)$, dado por

$$\mathbf{T}_u = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{k}.$$

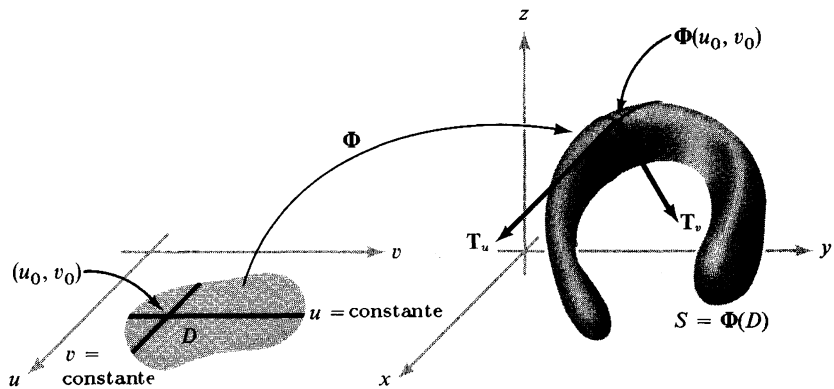


Figura 7.3.6 Los vectores $\mathbf{T}_u$ y $\mathbf{T}_v$ son tangentes a curvas sobre la superficie S y por lo tanto, son tangentes a S.

Como los vectores $\mathbf{T}_u$ y $\mathbf{T}_v$ son tangentes a dos curvas sobre la superficie en $\mathbf{\Phi}(u_0, v_0)$, deben determinar el plano tangente a la superficie en este punto; esto es, $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$ debe ser normal a la superficie.

Decimos que la superficie S es *suave** *en* $\mathbf{\Phi}(u_0, v_0)$ si $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v \neq \mathbf{0}$ en (u_0, v_0); la superficie es *suave* si es suave en todos los puntos $\mathbf{\Phi}(u_0, v_0) \in S$. El vector distinto de cero $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$ es *normal* a S (recordar que el producto vectorial de $\mathbf{T}_u$ y $\mathbf{T}_v$ es perpendicular al plano generado por $\mathbf{T}_u$ y $\mathbf{T}_v$); el hecho de que sea distinto de cero asegura que existirá un plano tangente. Intuitivamente, una superficie suave no tiene "esquinas".†

EJEMPLO 1 *Considerar la superficie dada por las ecuaciones*

$$x = u \cos v, \qquad y = u \operatorname{sen} v, \qquad z = u, \qquad u > 0.$$

¿Es diferenciable esta superficie? ¿Es suave?

---

*Estrictamente hablando, la suavidad depende de la parametrización $\mathbf{\Phi}$ y no sólo de su imagen S. Por lo tanto, esta terminología es algo imprecisa; sin embargo, es descriptiva y no deberá causar confusión. (Ver el ejercicio 15.)

†En la sección 4.4 hemos mostrado que las superficies de nivel $f(x, y, z) = 0$ eran, en realidad, gráficas de funciones de dos variables en alguna vecindad de un punto (x_0, y_0, z_0) que satisface $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$. Esto unificó dos concepciones de superficie. De nuevo, usando el teorema de la función implícita, es posible asimismo mostrar que la imagen de una superficie parametrizada $\mathbf{\Phi}$ en la vecindad de un punto (u_0, v_0) donde $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v \neq \mathbf{0}$ es también la gráfica de una función de dos variables. Así, todas las definiciones de superficie son consistentes. (Ver el ejercicio 16.)

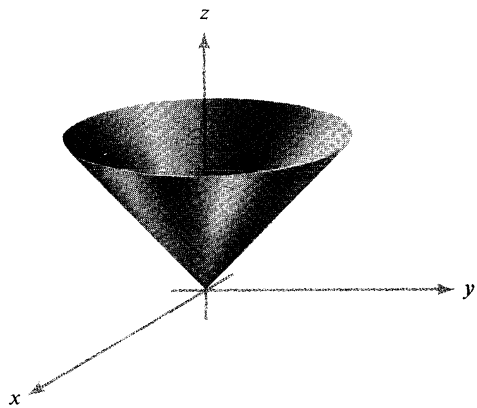


Figura 7.3.7 La superficie $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ es un cono.

SOLUCIÓN Estas ecuaciones describen la superficie $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (elevar al cuadrado las ecuaciones para x, y y z para verificarlo), que se muestra en la figura 7.3.7. Esta superficie es un cono con "punta" en $(0,0,0)$; es una superficie diferenciable, pues cada función componente es diferenciable como función de u y v. Sin embargo, *la superficie no es suave en* $(0,0,0)$. Para verlo, calcular $\mathbf{T}_u$ y $\mathbf{T}_v$ en $(0,0) \in \mathbf{R}^2$:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_u &= \frac{\partial x}{\partial u}(0,0)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(0,0)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(0,0)\mathbf{k} \\ &= (\cos 0)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} 0)\mathbf{j} + \mathbf{k} = \mathbf{i} + \mathbf{k},\end{aligned}$$

y, de manera análoga,

$$\mathbf{T}_v = 0(-\operatorname{sen} 0)\mathbf{i} + 0(\cos 0)\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

Así, $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v = \mathbf{0}$, de modo que por definición, la superficie no es suave en $(0,0,0)$. ▲

Resumamos nuestras conclusiones en una definición formal:

DEFINICIÓN *Si una superficie parametrizada* $\mathbf{\Phi}: D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ *es* ***suave*** *en* $\mathbf{\Phi}(u_0, v_0)$, *esto es, si* $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v \neq \mathbf{0}$ *en* (u_0, v_0), *definimos el* ***plano tangente*** *de la superficie en* $\mathbf{\Phi}(u_0, v_0)$ *como el plano determinado por los vectores* T_u *y* T_v. *Así,* $\mathbf{n} = \mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$ *es un vector normal, y una ecuación del plano tangente en* (x_0, y_0, z_0) *a la superficie está dado por*

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \mathbf{n} = 0, \tag{1}$$

donde $\mathbf{n}$ *se evalúa en* (u_0, v_0). *Si* $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3) = n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k}$, *entonces la fórmula* (1) *se convierte en*

$$n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0. \tag{1'}$$

EJEMPLO 2 *Sea* $\mathbf{\Phi}: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ *dada por*

$$x = u\cos v, \qquad y = u \operatorname{sen} v, \qquad z = u^2 + v^2.$$

¿Dónde existe un plano tangente? Hallar el plano tangente en $\mathbf{\Phi}(1, 0)$.

SOLUCIÓN Calculamos

$$\mathbf{T}_u = (\cos v)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} v)\mathbf{j} + 2u\mathbf{k}$$
$$\mathbf{T}_v = -u(\operatorname{sen} v)\mathbf{i} + u(\cos v)\mathbf{j} + 2v\mathbf{k}$$

y el plano tangente en $\mathbf{\Phi}(u, v)$ es el conjunto de vectores que pasan por $\mathbf{\Phi}(u, v)$, perpendiculares a

$$\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v = (-2u^2 \cos v + 2v \operatorname{sen} v, -2u^2 \operatorname{sen} v - 2v \cos v, u)$$

si este vector es distinto de cero. Como $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$ es igual a $\mathbf{0}$ en $(u, v) = (0, 0)$, no existe plano tangente en $\mathbf{\Phi}(0, 0) = (0, 0, 0)$. Sin embargo, podemos hallar una ecuación del plano tangente en todos los otros puntos, donde $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v \neq \mathbf{0}$. En el punto $\mathbf{\Phi}(1, 0) = (1, 0, 1)$,

$$\mathbf{n} = \mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v = (-2, 0, 1) = -2\mathbf{i} + \mathbf{k}.$$

Como tenemos el vector $\mathbf{n}$ normal a la superficie y un punto $(1, 0, 1)$ en la superficie, podemos usar la fórmula (1′) para obtener una ecuación del plano tangente:

$$-2(x - 1) + (z - 1) = 0;$$

esto es,

$$z = 2x - 1. \qquad \blacktriangle$$

EJEMPLO 3 *Suponer que una superficie* S *es la gráfica de una función diferenciable* $g: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. *Mostrar que la superficie es suave en todos los puntos* $(u_0, v_0, g(u_0, v_0)) \in \mathbf{R}^3$.

SOLUCIÓN Escribir S en forma paramétrica como sigue:

$$x = u, \qquad y = v, \qquad z = g(u, v),$$

que es lo mismo que $z = g(x, y)$. Entonces

$$\mathbf{T}_u = \mathbf{i} + \frac{\partial g}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{T}_v = \mathbf{j} + \frac{\partial g}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{k},$$

y para $(u_0, v_0) \in \mathbf{R}^2$,

$$\mathbf{n} = \mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v = -\frac{\partial g}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{j} + \mathbf{k} \neq \mathbf{0}. \tag{2}$$

Esto es distinto de cero pues el coeficiente de $\mathbf{k}$ es 1; en consecuencia, la parametrización $(u, v) \mapsto (u, v, g(u, v))$ es suave en todos los puntos. Más aún, el plano tangente a S en $(x_0, y_0, z_0) = (u_0, v_0, g(u_0, v_0))$ está dado por la fórmula (1), como

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \left(-\frac{\partial g}{\partial u}, -\frac{\partial g}{\partial v}, 1\right) = 0,$$

donde las derivadas parciales están evaluadas en (u_0, v_0). Recordando que $x = u$ y $y = v$, podemos escribir esto como

$$z - z_0 = \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)(x - x_0) + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)(y - y_0), \tag{3}$$

donde $\partial g/\partial x$ y $\partial g/\partial y$ están evaluadas en (x_0, y_0). ▲

Este ejemplo también muestra que la definición de plano tangente para superficies parametrizadas concuerda con la obtenida cuando las superficies son gráficas, pues la ecuación (3) es la misma fórmula que dedujimos (en el capítulo 2) para el plano tangente a S en el punto $(x_0, y_0, z_0) \in S$; ver la página 124.

También es útil considerar superficies suaves a trozos, esto es, superficies compuestas de cierto número de imágenes de superficies parametrizadas suaves. Por ejemplo, la superficie de un cubo en $\mathbf{R}^3$ es este tipo de superficie. Estas superficies se estudian en la sección 7.4.

EJEMPLO 4 *Hallar una parametrización para el hiperboloide de una hoja:*

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

SOLUCIÓN Como x y y aparecen en la combinación $x^2 + y^2$, la superficie es invariante bajo rotación alrededor del eje z, de modo que es natural escribir

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

Entonces $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ se vuelve $r^2 - z^2 = 1$. Esto se puede parametrizar convenientemente por

$$r = \cosh u, \qquad z = \operatorname{senh} u.$$

Así, una parametrización es

$$\begin{aligned} x &= (\cosh u)(\cos\theta) \\ y &= (\cosh u)(\operatorname{sen}\theta) \\ z &= \operatorname{senh} u, \end{aligned}$$

donde $0 \leq \theta < 2\pi$, $-\infty < u < \infty$. ▲

EJERCICIOS

En los ejercicios 1 al 3, hallar una ecuación para el plano tangente a la superficie dada en el punto especificado.

1. $x = 2u, \qquad y = u^2 + v, \qquad z = v^2$, en $(0, 1, 1)$

2. $x = u^2 - v^2, \qquad y = u + v, \qquad z = u^2 + 4v$, en $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 2)$

3. $x = u^2, \qquad y = u \operatorname{sen} e^v, \qquad z = \frac{1}{3} u \cos e^v$, en $(13, -2, 1)$

4. ¿Son suaves las superficies en los ejercicios 1 y 2?

5. Hallar una expresión para un vector unitario normal a la superficie

$$x = \cos v \operatorname{sen} u, \qquad y = \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, \qquad z = \cos u$$

para u en $[0, \pi]$ y v en $[0, 2\pi]$. Identificar esta superficie.

6. Repetir el ejercicio 5 para la superficie

$$x = 3\cos\theta \operatorname{sen}\phi, \qquad y = 2\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \qquad z = \cos\phi$$

para θ en $[0, 2\pi]$ y ϕ en $[0, \pi]$.

7. Repetir el ejercicio 5 para la superficie

$$x = \operatorname{sen} v, \qquad y = u, \qquad z = \cos v$$

para $0 \leq v \leq 2\pi$ y $-1 \leq u \leq 3$.

8. Repetir el ejercicio 5 para la superficie

$$x = (2 - \cos v)\cos u, \qquad y = (2 - \cos v)\operatorname{sen} u, \qquad z = \operatorname{sen} v$$

para $-\pi \leq u \leq \pi$, $-\pi \leq v \leq \pi$. ¿Es suave esta superficie?

9. (a) Desarrollar una fórmula para el plano tangente a la superficie $x = h(y, z)$.
(b) Obtener una fórmula similar para $y = k(x, z)$.

10. Hallar la ecuación del plano tangente a cada superficie en el punto indicado.
(a) $x = u^2, y = v^2, z = u^2 + v^2, u = 1, v = 1$
(b) $z = 3x^2 + 8xy, x = 1, y = 0$
(c) $x^3 + 3xy + z^2 = 2, x = 1, y = \frac{1}{3}, z = 0$

11. Considerar la superficie en $\mathbf{R}^3$ parametrizada por

$$\Phi(r, \theta) = (r\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, \theta), \qquad 0 \leq r \leq 1 \qquad \text{y} \qquad 0 \leq \theta \leq 4\pi.$$

(a) Esbozar y describir la superficie.
(b) Hallar una expresión para una normal unitaria a la superficie.
(c) Hallar una ecuación para el plano tangente a la superficie en el punto (x_0, y_0, z_0).
*(d) Si (x_0, y_0, z_0) es un punto sobre la superficie, mostrar que el segmento de recta horizontal de longitud unitaria que va del eje z a (x_0, y_0, z_0) está contenido en la superficie y en el plano tangente a la superficie en (x_0, y_0, z_0).

12. Dada una esfera de radio 2 con centro en el origen, hallar la ecuación para el plano que es tangente a ella en el punto $(1, 1, \sqrt{2})$, considerando la esfera como:
(a) Una superficie parametrizada por $\Phi(\theta, \phi) = (2\cos\theta\operatorname{sen}\phi, 2\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, 2\cos\phi)$;
(b) Una superficie de nivel de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; y
(c) La gráfica de $g(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

13. (a) Hallar una parametrización para el hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 25$.
(b) Hallar una expresión para una normal unitaria a esta superficie.
(c) Hallar una ecuación para el plano tangente a la superficie en $(x_0, y_0, 0)$, donde $x_0^2 + y_0^2 = 25$.
(d) Mostrar que las rectas $(x_0, y_0, 0) + t(-y_0, x_0, 25)$ y $(x_0, y_0, 0) + t(y_0, -x_0, 25)$ están sobre la superficie y en el plano tangente hallado en la parte (c).

***14.** Una superficie parametrizada se describe mediante una función diferenciable $\Phi\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$. De acuerdo con el capítulo 2, la derivada deberá dar una aproximación lineal que proporcione una representación del plano tangente. Este ejercicio demuestra que, en efecto, así sucede.
(a) Mostrar que la imagen de la transformación lineal $\mathbf{D}\Phi(u_0, v_0)$ es el plano generado por $\mathbf{T}_u$ y $\mathbf{T}_v$. ($\mathbf{T}_u$ y $\mathbf{T}_v$ están evaluados en (u_0, v_0).)
(b) Mostrar que $\mathbf{w} \perp \mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$ si y sólo si $\mathbf{w}$ está en la imagen de $\mathbf{D}\Phi(u_0, v_0)$.
(c) Mostrar que el plano tangente según se definió en esta sección, es el mismo que el "plano parametrizado"

$$(u, v) \mapsto \Phi(u_0, v_0) + \mathbf{D}\Phi(u_0, v_0)\begin{bmatrix} u - u_0 \\ v - v_o \end{bmatrix}.$$

*15. Considerar las superficies $\mathbf{\Phi}_1(u,v) = (u,v,0)$ y $\mathbf{\Phi}_2(u,v) = (u^3, v^3, 0)$.

(a) Mostrar que la imagen de $\mathbf{\Phi}_1$ y $\mathbf{\Phi}_2$ es el plano xy.

(b) Mostrar que $\mathbf{\Phi}_1$ describe una superficie suave, pero que $\mathbf{\Phi}_2$ no. Concluir que el concepto de suavidad de una superficie S depende de la existencia de cuando menos una parametrización suave para S.

(c) Probar que el plano tangente de S está bien definido independientemente de parametrización suave (uno a uno) (necesitarán usar el teorema de la función inversa, de la sección 4.4).

(d) Después de estas observaciones, ¿creen poder hallar alguna parametrización suave del cono de la figura 7.3.7?

*16. Sea $\mathbf{\Phi}$ una superficie suave; esto es, $\mathbf{\Phi}$ es de clase C^1 y $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v \neq \mathbf{0}$ en (u_0, v_0).

(a) Usar el teorema de la función implícita (sección 4.4) para mostrar que la imagen de $\mathbf{\Phi}$ cerca de (u_0, v_0) es la gráfica de una función C^1 de dos variables, digamos $z = f(x,y)$. (Esto se cumplirá si la componente z de $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$ es distinta de cero.)

(b) Mostrar que el plano tangente en $\mathbf{\Phi}(u_0, v_0)$ definido por el plano generado por $\mathbf{T}_u$ y $\mathbf{T}_v$ coincide con el plano tangente a la gráfica de $z = f(x,y)$ en este punto.

7.4 ÁREA DE UNA SUPERFICIE

Antes de proceder con integrales de superficie en general, consideremos primero el problema de calcular el área de una superficie, así como hemos considerado el problema de hallar la longitud de arco de una curva antes de estudiar integrales de trayectoria.

En la sección 7.3, definimos una superficie parametrizada S como la *imagen* de una función $\mathbf{\Phi}: D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, escrita como $\mathbf{\Phi}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$. A la función $\mathbf{\Phi}$ se le llamó parametrización de S y se dijo que S era suave en $\mathbf{\Phi}(u,v) \in S$ si $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v \neq \mathbf{0}$, donde

$$\mathbf{T}_u = \frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u,v)\mathbf{k}$$

y

$$\mathbf{T}_v = \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u,v)\mathbf{k}.$$

Recordemos que una superficie suave (hablando informalmente) es una que no tiene esquinas ni cortes.

En el resto de este capítulo y en el siguiente, consideraremos sólo superficies suaves a trozos que sean uniones de imágenes de superficies parametrizadas $\mathbf{\Phi}_i: D_i \to \mathbf{R}^3$ para las que:

(i) D_i es una región elemental en el plano;

(ii) $\mathbf{\Phi}_i$ es de clase C^1 y uno a uno, excepto, quizá, en la frontera de D_i; y

(iii) S_i, la imagen de $\mathbf{\Phi}_i$ es suave, excepto, quizá, en un número finito de puntos.

DEFINICIÓN *Definimos el* ***área de superficie**** $A(S)$ *de una superficie parametrizada por*

$$A(S) = \int_D \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| \, du \, dv \tag{1}$$

donde $\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|$ *es la norma de* $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$. *Si* S *es una unión de superficies* S_i, *su área es la suma de las áreas de las* S_i.

Como puede verificar fácilmente el lector, tenemos que

$$\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| = \sqrt{\left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\right]^2} \tag{2}$$

donde

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

y así sucesivamente. Entonces, la fórmula (1) se convierte en

$$A(S) = \int_D \sqrt{\left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\right]^2} \, du \, dv. \tag{3}$$

Podemos justificar esta definición analizando la integral $\int_D \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| \, du \, dv$ en términos de sumas de Riemann. Por simplicidad, supongamos que D es un rectángulo; consideremos la n-ésima partición regular de D, y sea R_{ij} el ij-ésimo rectángulo en la partición, con vértices (u_i, v_j), (u_{i+1}, v_j), (u_i, v_{j+1}) y (u_{i+1}, v_{j+1}), $0 \le i \le n-1$, $0 \le j \le n-1$. Denotar los valores de $\mathbf{T}_u$ y $\mathbf{T}_v$ en (u_i, v_j) por $\mathbf{T}_{u_i}$ y $\mathbf{T}_{v_j}$. Podemos pensar los vectores $\Delta u \mathbf{T}_{u_i}$ y $\Delta v \mathbf{T}_{v_j}$ como tangentes a la superficie en $\mathbf{\Phi}(u_i, v_j) = (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})$, donde $\Delta u = u_{i+1} - u_i$, $\Delta v = v_{j+1} - v_j$. Entonces estos vectores forman un paralelogramo P_{ij} que está en el plano tangente a la superficie en (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}) (ver la figura 7.4.1). Tenemos entonces una "cubierta de retazos" de la superficie mediante los P_{ij}. Para n grande, el área de P_{ij} es una buena aproximación al área de $\mathbf{\Phi}(R_{ij})$. Como el área del paralelogramo generado por dos vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ es $\|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2\|$ (ver el capítulo 1), vemos que

$$A(P_{ij}) = \|\Delta u \mathbf{T}_{u_i} \times \Delta v \mathbf{T}_{v_j}\| = \|\mathbf{T}_{u_i} \times \mathbf{T}_{v_j}\| \, \Delta u \, \Delta v.$$

---

*Como todavía no estudiamos la independencia de la parametrización, puede parecer que $A(S)$ depende de la parametrización $\mathbf{\Phi}$. En la sección 7.6 estudiaremos la independencia de la parametrización; el uso de esta notación no deberá causar confusión.

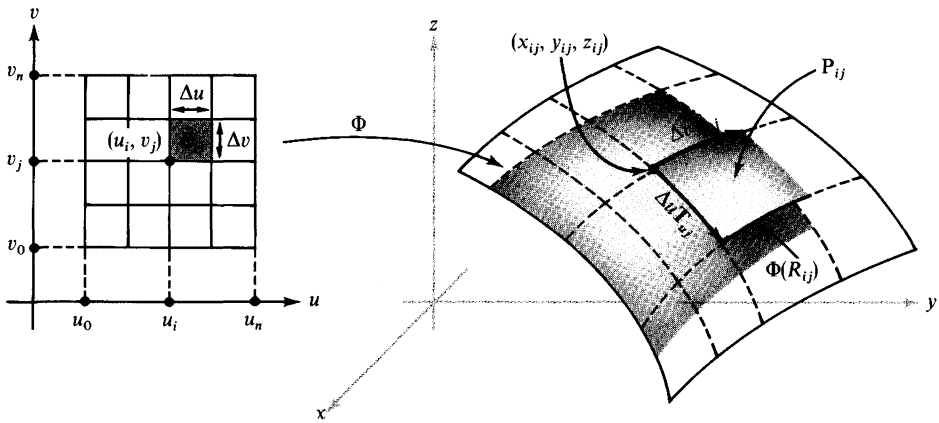


Figura 7.4.1 $\|\mathbf{T}_{u_i} \times \mathbf{T}_{v_j}\| \, \Delta u \, \Delta v$ es igual al área de un paralelogramo que aproxima el área de un retazo en una superficie $S = \mathbf{\Phi}(D)$.

Por lo tanto, el área de la cubierta de retazos es

$$A_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} A(P_{ij}) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \|\mathbf{T}_{u_i} \times \mathbf{T}_{v_j}\| \, \Delta u \, \Delta v.$$

Cuando $n \to \infty$, las sumas A_n convergen a la integral

$$\int_D \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| \, du \, dv.$$

Como A_n deberá aproximar cada vez mejor el área de la superficie, conforme $n \to \infty$, tenemos en la fórmula (1) una definición razonable de $A(S)$.

EJEMPLO 1 *Sea D la región determinada por $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 1$ y sea la función $\mathbf{\Phi}: D \to \mathbf{R}^3$ definida por*

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r \operatorname{sen}\theta, \qquad z = r$$

una parametrización de un cono S (ver la figura 7.3.7). Hallar su área de superficie.

SOLUCIÓN En la fórmula (3),

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r,$$

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -r\cos\theta$$

y

$$\frac{\partial(x,z)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = r\operatorname{sen}\theta,$$

de modo que el integrando del área es

$$\|\mathbf{T}_r \times \mathbf{T}_\theta\| = \sqrt{r^2 + r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta} = r\sqrt{2}.$$

Claramente, $\|\mathbf{T}_r \times \mathbf{T}_\theta\|$ se anula para $r = 0$, pero $\mathbf{\Phi}(0,\theta) = (0,0,0)$ para cualquier θ. Así $(0,0,0)$ es el único punto donde la superficie no es suave. Tenemos

$$\begin{aligned}\int_D \|\mathbf{T}_r \times \mathbf{T}_\theta\|\, dr\, d\theta &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{2}r\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\, d\theta = \sqrt{2}\pi.\end{aligned}$$

Para confirmar que ésta es el área de $\mathbf{\Phi}(D)$ debemos verificar que $\mathbf{\Phi}$ es uno a uno (para puntos que no estén en la frontera de D). Sea D^0 el conjunto de (r,θ) con $0 < r < 1$ y $0 < \theta < 2\pi$. Por lo tanto D^0 es D sin su frontera. Para ver que $\mathbf{\Phi}\colon D^0 \to \mathbf{R}^3$ es uno a uno, suponer que $\mathbf{\Phi}(r,\theta) = \mathbf{\Phi}(r',\theta')$ para (r,θ) y $(r',\theta') \in D^0$. Entonces

$$r\cos\theta = r'\cos\theta', \qquad r\operatorname{sen}\theta = r'\operatorname{sen}\theta', \qquad r = r'.$$

De estas ecuaciones se sigue que $\cos\theta = \cos\theta'$ y $\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta'$. Así, $\theta = \theta'$ o bien $\theta = \theta' + 2\pi n$. Pero este segundo caso es imposible, pues tanto θ como θ' pertenecen al intervalo abierto $(0, 2\pi)$ y por ello no pueden estar a 2π radianes de distancia. Esto prueba que fuera de la frontera, $\mathbf{\Phi}$ es uno a uno. (¿Es $\mathbf{\Phi}\colon D \to \mathbf{R}^3$ uno a uno?) En futuros ejemplos, por lo general no verificaremos que la parametrización sea uno a uno cuando resulte intuitivamente claro. ▲

EJEMPLO 2 *Una* ***helicoide*** *se define como* $\mathbf{\Phi}\colon D \to \mathbf{R}^3$, *donde*

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\operatorname{sen}\theta, \qquad z = \theta$$

y D *es la región donde* $0 \le \theta \le 2\pi$ *y* $0 \le r \le 1$ *(figura 7.4.2). Hallar su área.*

SOLUCIÓN Calculamos $\partial(x,y)/\partial(r,\theta) = r$, como antes, y

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \operatorname{sen}\theta,$$

$$\frac{\partial(x,z)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos\theta.$$

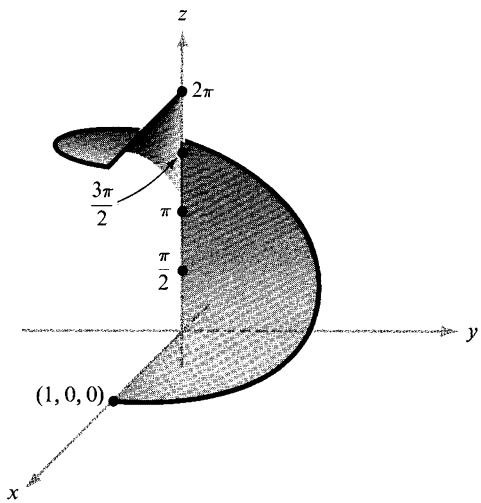


Figura 7.4.2 La helicoide $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, $z = \theta$.

El integrando de área es, por lo tanto, $\sqrt{r^2+1}$, que nunca se anula, de modo que la superficie es suave. El área de la helicoide es

$$\int_D \|\mathbf{T}_r \times \mathbf{T}_\theta\|\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{r^2+1}\, dr\, d\theta = 2\pi\int_0^1 \sqrt{r^2+1}\, dr.$$

Después de algunos cálculos (usando la tabla de integrales), hallamos que esta integral es igual a

$$\pi[\sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2})]. \qquad \blacktriangle$$

Una superficie S dada en la forma $z = f(x,y)$, donde $(x,y) \in D$, admite la parametrización

$$x = u, \qquad y = v, \qquad z = f(u,v)$$

para $(u,v) \in D$. Cuando f es de clase C^1, esta parametrización es suave, y la fórmula para el área de superficie se reduce a

$$A(S) = \int_D \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dA \tag{4}$$

después de aplicar las fórmulas

$$\mathbf{T}_u = \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial u}\mathbf{k}, \qquad \mathbf{T}_v = \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial v}\mathbf{k}$$

y

$$\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v = -\frac{\partial f}{\partial u}\mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial v}\mathbf{j} + \mathbf{k} = -\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k},$$

según se observó en el ejemplo 2 de la sección 7.3.

Suplemento: Área de superficie e integrales impropias

En la fórmula (4) supusimos que $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ eran funciones continuas (y, por lo tanto, acotadas) en D. Sin embargo, es importante considerar áreas de superficies para las cuales $(\partial f/\partial x)(x_0, y_0)$ o $(\partial f/\partial y)(x_0, y_0)$ se vuelven arbitrariamente grandes cuando (x_0, y_0) tiende a la frontera de D. Por ejemplo, considerar el hemisferio

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2},$$

donde D es la región $x^2 + y^2 \leq 1$ (ver la figura 7.4.3). Tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}. \tag{5}$$

La frontera de D es el círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$, de modo que, cuando (x, y) se acerca a ∂D, el valor de $x^2 + y^2$ tiende a 1. Por lo tanto, los denominadores en el par de ecuaciones (5) tienden a cero.

Para tratar con casos como éstos, definimos el área $A(S)$ de una superficie S descrita por $z = f(x, y)$ sobre una región D, donde f es diferenciable con posibles discontinuidades de $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ en ∂D, como

$$A(S) = \int_D \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dA$$

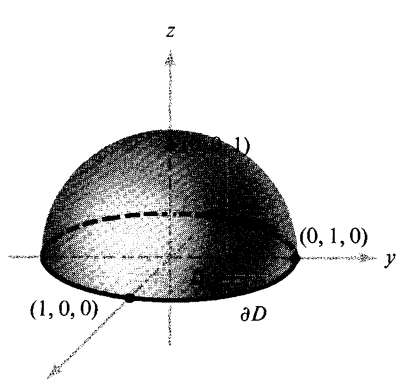


Figura 7.4.3 El hemisferio $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

siempre que $\sqrt{(\partial f/\partial x)^2 + (\partial f/\partial y)^2 + 1}$ sea integrable sobre D, *aun si la integral es impropia;* de hecho, ésta es una de las razones por las que introdujimos el concepto de integral impropia en el capítulo 6.

EJEMPLO 3 *Calcular el área de la superficie de la esfera S descrita por la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.*

SOLUCIÓN Calcularemos el área del hemisferio superior S^+, donde

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \qquad z \geq 0,$$

y después multiplicamos nuestro resultado por 2. Tenemos, por lo tanto,

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \qquad x^2 + y^2 \leq 1.$$

Sea D la región $x^2 + y^2 \leq 1$. Entonces, aplicando la fórmula (4) y haciendo los cálculos de las ecuaciones (5) anteriores, obtenemos

$$\begin{aligned} A(S^+) &= \int_D \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dA \\ &= \int_D \sqrt{\frac{x^2}{1 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{1 - x^2 - y^2} + 1}\, dA \\ &= \int_D \frac{1}{1 - x^2 - y^2}\, dy\, dx, \end{aligned}$$

que es una integral impropia. Sin embargo, podemos aplicar el teorema de Fubini en este caso para obtener la integral impropia iterada

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \int_{-(1-x^2)^{1/2}}^{(1-x^2)^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\, dy\, dx &= \int_{-1}^{1} \left[\operatorname{sen}^{-1} \frac{y}{(1 - x^2)^{1/2}} \right]_{-(1-x^2)^{1/2}}^{(1-x^2)^{1/2}} dx \\ &= \int_{-1}^{1} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) dx = \int_{-1}^{1} \pi\, dx = 2\pi. \end{aligned}$$

Así, el área de toda la esfera es 4π. Para otra manera de calcular esta área sin integrales impropias, ver el ejercicio 1. ▲

En la mayoría de los libros de cálculo de una variable, se muestra que el área de la superficie lateral generada al girar la gráfica de una función $y = f(x)$ alrededor del eje x, está dada por

$$A_x = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx. \tag{6}$$

Si se gira la gráfica alrededor del eje y, tenemos

$$A_y = 2\pi \int_a^b |x|\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx. \tag{7}$$

Deduciremos la fórmula (6) usando los métodos desarrollados anteriormente; se puede obtener la fórmula (7) de manera análoga (ejercicio 10).

Para deducir la fórmula (6) a partir de la fórmula (3), debemos dar una parametrización de S. Definir la parametrización por

$$x = u, \qquad y = f(u)\cos v, \qquad z = f(u)\operatorname{sen} v$$

sobre la región D dada por

$$a \le u \le b, \qquad 0 \le v \le 2\pi.$$

Ésta es, en efecto, una parametrización de S, porque para u fija,

$$(u, f(u)\cos v, f(u)\operatorname{sen} v)$$

traza un círculo de radio $|f(u)|$ con centro en $(u, 0, 0)$ (figura 7.4.4).

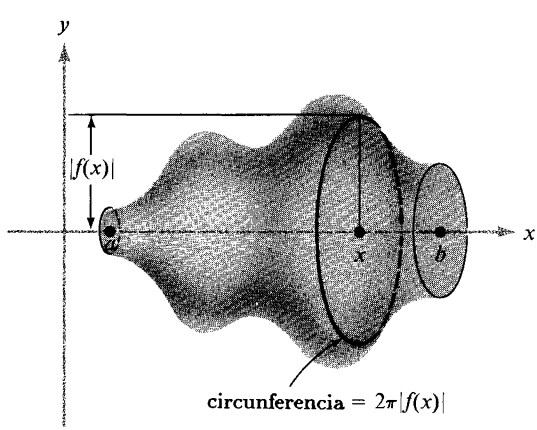


Figura 7.4.4 La curva $y = f(x)$ girada alrededor del eje x.

Calculamos

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -f(u)\operatorname{sen} v, \qquad \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} = f(u)f'(u), \qquad \frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)} = f(u)\cos v,$$

de modo que por la fórmula (3)

$$\begin{aligned}
A(S) &= \int_D \sqrt{\left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\right]^2}\, du\, dv \\
&= \int_D \sqrt{[f(u)]^2 \operatorname{sen}^2 v + [f(u)]^2[f'(u)]^2 + [f(u)]^2 \cos^2 v}\, du\, dv \\
&= \int_D |f(u)|\sqrt{1+[f'(u)]^2}\, du\, dv \\
&= \int_a^b \int_0^{2\pi} |f(u)|\sqrt{1+[f'(u)]^2}\, dv\, du \\
&= 2\pi \int_a^b |f(u)|\sqrt{1+[f'(u)]^2}\, du,
\end{aligned}$$

que es la fórmula (6).

Si S es la superficie de revolución, entonces $2\pi|f(x)|$ es la circunferencia de la sección transversal vertical a S en el punto x (figura 7.4.4). Observar que podemos escribir

$$2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx = \int_\sigma 2\pi|f(x)|\, ds,$$

donde la expresión de la derecha es la integral de $2\pi|f(x)|$ a lo largo de la trayectoria dada por $\sigma\colon [a,b] \to \mathbf{R}^2$, $t \mapsto (t, f(t))$. Por lo tanto, la superficie lateral de un sólido de revolución se obtiene integrando la circunferencia que corta transversalmente a lo largo de la trayectoria determinada por la función dada.

NOTA HISTÓRICA

El cálculo fue inventado (¿o descubierto?) por Isaac Newton (1647–1727) alrededor de 1669 y por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) alrededor de 1684. A principios del siglo XVIII, los matemáticos estaban interesados en el problema de hallar trayectorias de longitud más corta sobre una superficie, mediante métodos de cálculo. En ese tiempo, las superficies eran consideradas fronteras de sólidos definidos por desigualdades (la bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ está acotada por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$).

Christian Huygens (1629–1695) fue la primera persona desde Arquímedes en dar resultados acerca de las áreas de superficies particulares más allá de la esfera, y obtuvo las áreas de partes de superficies de revolución, tales como el paraboloide y el hiperboloide.

El brillante y prolífico matemático Leonhard Euler (1707–1783) presentó el primer trabajo fundamental sobre la teoría de las superficies en 1760 con "Recherches sur la courbure des surfaces", y fue quizás en este trabajo, que por primera vez se definió una superficie como una gráfica $z = f(x,y)$. Euler estaba interesado en estudiar la curvatura de superficies, y en 1771 introdujo el concepto de superficie paramétrica que se describe en esta sección.

Después de una rápida evolución del cálculo al principio del siglo XVIII, se desarrollaron fórmulas para las longitudes de curvas y de áreas de superficies. Aunque no sabemos cuándo aparecieron por primera vez las fórmulas de área presentadas en esta

sección, estamos seguros de que eran conocidas al final del siglo XVIII. Los conceptos subyacentes de longitud de una curva y de área de una superficie se entendían intuitivamente antes de este tiempo, y el uso de fórmulas del cálculo para obtener áreas fue considerado un gran avance.

Augustin Louis Cauchy (1789–1857) fue el primero en dar el paso para definir las cantidades de longitud y de área de superficie mediante integrales, como lo hicimos en este libro. La cuestión de definir el área de superficie independiente de las integrales se planteó un poco más adelante, pero dio lugar a muchos problemas difíciles que no fueron resueltos de manera adecuada hasta este siglo.

Terminamos esta sección describiendo el fascinante problema clásico de Plateau, que tiene una larga historia en matemáticas. El físico belga Joseph Plateau (1801–1883) realizó muchos experimentos entre 1830 y 1869 acerca de la tensión superficial y fenómenos capilares, experimentos que tuvieron un enorme impacto en ese tiempo, y fueron repetidos por físicos notables del siglo XIX, como Michael Faraday (1791–1867).

Si se sumerge un alambre en una solución de jabón o glicerina, entonces se suele obtener una película de jabón tendida sobre el alambre. En la figura 7.4.5 se dan algunos ejemplos, aunque quizá los lectores prefieran realizar el experimento. Plateau hizo la pregunta matemática: para una frontera dada (alambre), ¿cómo se prueba la existencia de dicha superficie (película de jabón) y cuántas superficies puede haber? El principio físico subyacente es que la naturaleza tiende a minimizar el área; esto es, la superficie que se forma deberá ser una superficie de área mínima entre todas las superficies posibles que tengan la curva dada como frontera.

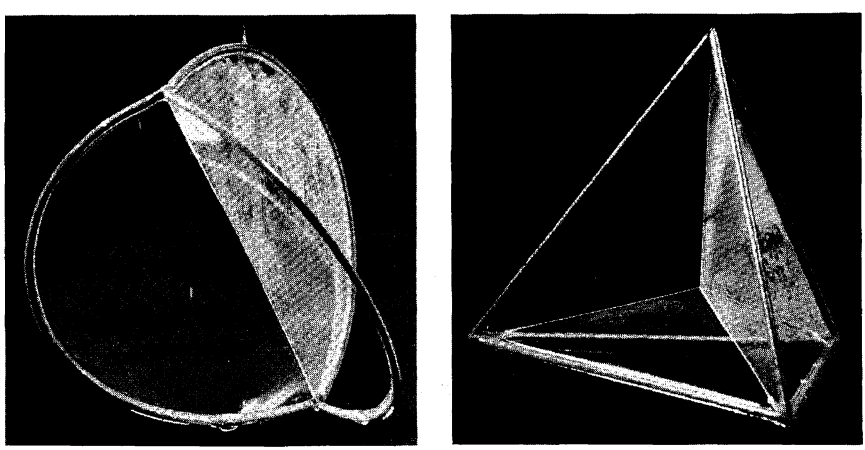


Figura 7.4.5 Dos películas de jabón tendidas sobre los alambres. (*Fritz Goro*)

Plateau formuló el problema de manera particular. Sea $D \subset \mathbf{R}^2$ el disco unitario definido por $\{(x,y)|x^2+y^2 \leq 1\}$; sea $S^1 = \partial D$ su frontera. Más aún, suponer que $\sigma\colon [0,2\pi] \to \mathbf{R}^3$ es una curva cerrada simple con $\Gamma = \sigma([0,2\pi])$, y que su imagen representa un alambre en $\mathbf{R}^3$ (figura 7.4.6).

Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de todas las funciones $\Phi\colon D \to \mathbf{R}^3$ tales que $\Phi(\partial D) = \Gamma$, Φ es de clase C^1 y Φ es uno a uno en ∂D. Cada $\Phi \in \mathcal{S}$ representa una superficie paramétrica

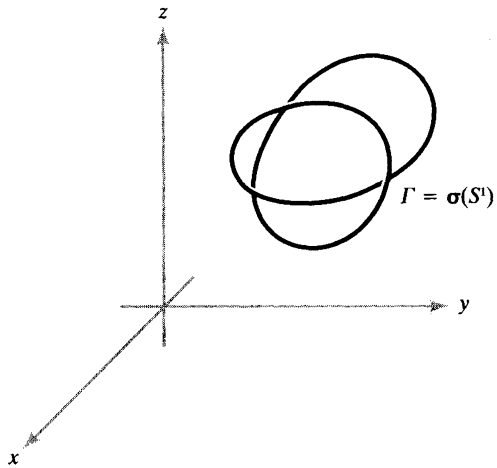


Figura 7.4.6 Γ va a ser la frontera de una película de jabón.

C^1 "semejante" al disco y que "abarca" el alambre Γ.

Las películas de jabón de la figura 7.4.5 no son como discos, pero representan un sistema de superficies semejantes al disco. La figura 7.4.7 muestra un contorno que acota a una superficie semejante al disco, y a una que no lo es.

Para cada $\mathbf{\Phi} \in \mathcal{S}$ tenemos el área de la superficie imagen, $A(\mathbf{\Phi}) = \int_D \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| \, du \, dv$. Así el área es una función que asigna a cada superficie paramétrica su

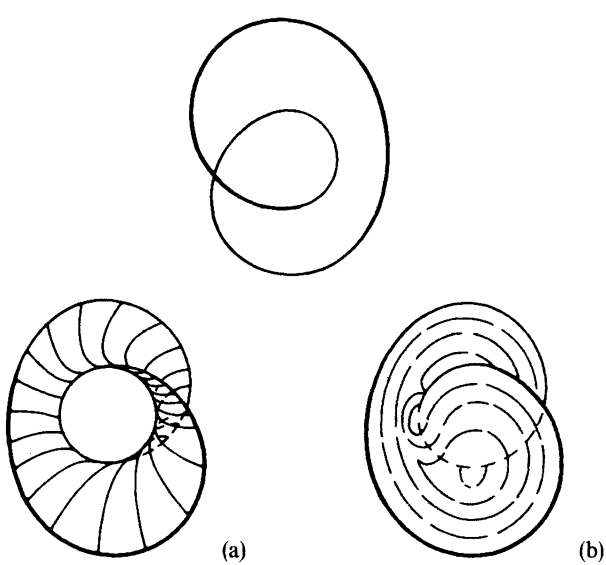


Figura 7.4.7 Superficies de película de jabón; (b) es semejante al disco, pero (a) no.

área. Plateau se preguntó si A tiene un mínimo en $\mathcal{S}$; esto es, ¿existe Φ_0 tal que $A(\Phi_0) \leq A(\Phi)$ para toda $\Phi \in \mathcal{S}$? Desafortunadamente, los métodos de este libro no son adecuados para resolver este problema. Podemos atacar cuestiones de hallar mínimos de funciones con valores reales de varias variables, ¡pero de ninguna manera se puede pensar el conjunto $\mathcal{S}$ como una región en $\mathbf{R}^n$, *cualquiera* que sea n! El conjunto $\mathcal{S}$ es, en realidad, un espacio de funciones, y el problema de hallar mínimos de funciones como A, definidas en dichos conjuntos, es parte de un tema llamado "cálculo de variaciones", que es casi tan antiguo como el mismo cálculo. Es, además, una disciplina íntimamente relacionada con ecuaciones diferenciales parciales.

Plateau mostró que si existe un mínimo

$$\Phi_0(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

tendría que satisfacer (después de normalizaciones adecuadas), las ecuaciones diferenciales parciales

(i) $\nabla^2 \Phi_0 = 0$

(ii) $\dfrac{\partial \Phi_0}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial \Phi_0}{\partial v} = 0$

(iii) $\left\| \dfrac{\partial \Phi_0}{\partial u} \right\| = \left\| \dfrac{\partial \Phi_0}{\partial v} \right\|$

donde $\|\mathbf{w}\|$ denota la "norma" o longitud del vector $\mathbf{w}$.

Por más de 70 años, matemáticos tales como Riemann, Weierstrass, H.A. Schwarz, Darboux y Lebesgue buscaron una solución al reto lanzado por Plateau. En 1931 se resolvió por fin el problema, cuando Jesse Douglas mostró que sí existía dicha Φ_0. Sin embargo, muchas preguntas acerca de películas de jabón permanecen sin respuesta, y esta área de investigación sigue activa hoy día.

Para mayor información acerca de este tema fascinante, el lector puede consultar S. Hildebrandt y A. Tromba, *Mathematics and Optimal Form*, Scientific American Books, Nueva York, 1985.

EJERCICIOS

1. Hallar el área de la superficie de la esfera unitaria S representada paramétricamente por $\Phi: D \to S \subset \mathbf{R}^3$, donde D es el rectángulo $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \phi \leq \pi$ y Φ está dada por las ecuaciones

$$x = \cos\theta \operatorname{sen}\phi, \qquad y = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \qquad z = \cos\phi.$$

Nótese que podemos representar toda la esfera de manera paramétrica, pero no la podemos representar en la forma $z = f(x,y)$. Comparar con el ejemplo 3.

2. ¿Qué pasaría en el ejercicio 1 si permitimos que ϕ varíe de $-\pi/2$ a $\pi/2$? ¿De 0 a 2π? ¿Por qué obtenemos respuestas diferentes?

3. Hallar el área de la helicoide del ejemplo 2 si el dominio D es $0 \leq r \leq 1$ y $0 \leq \theta \leq 3\pi$.

4. El toro T se puede representar paramétricamente por la función $\Phi: D \to \mathbf{R}^3$, donde Φ está dada por las funciones coordenadas $x = (R + \cos\phi)\cos\theta$, $y = (R + \cos\phi)\operatorname{sen}\theta$, $z = \operatorname{sen}\phi$; D es el rectángulo $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, esto es, $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le \phi \le 2\pi$ y $R > 1$ está fijo (ver la figura 7.4.8). Mostrar que $A(T) = (2\pi)^2 R$, primero usando la fórmula (3) y después la fórmula (7).

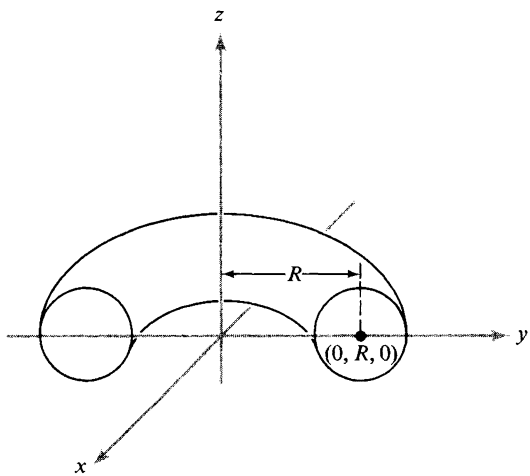


Figura 7.4.8 Sección transversal de un toro.

5. Sea $\Phi(u, v) = (u - v, u + v, uv)$ y sea D el disco unitario en el plano uv. Hallar el área de $\Phi(D)$.

6. Hallar el área de la parte de la esfera unitaria cortada por el cono $z \ge \sqrt{x^2 + y^2}$ (ver el ejercicio 1).

7. Mostrar que la superficie $x = 1/\sqrt{y^2 + z^2}$, $1 \le x < \infty$, ¡se puede llenar pero no pintar!

8. Hallar una parametrización de la superficie $x^2 - y^2 = 1$, donde $x > 0$, $-1 \le y \le 1$ y $0 \le z \le 1$. Usar la respuesta para expresar el área de la superficie como integral.

9. Representar el elipsoide E:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

paramétricamente y escribir la integral para su área de superficie $A(E)$. (No evaluar la integral).

10. Sea la curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, girada alrededor del eje y. Mostrar que el área de la superficie barrida es

$$A = 2\pi \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}|x|\,dx.$$

Interpretar usando longitud de arco y altura inclinada.

11. Hallar el área de la superficie obtenida al girar la curva $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$, alrededor del eje y.

12. Usar la fórmula (4) para calcular el área de superficie del cono en el ejemplo 1.

13. Hallar el área de la superficie definida por $x + y + z = 1$, $x^2 + 2y^2 \leq 1$.

14. Mostrar que para los vectores $\mathbf{T}_u$ y $\mathbf{T}_v$ tenemos la fórmula

$$\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| = \sqrt{\left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\right]^2}.$$

15. Calcular el área de la superficie dada por

$$x = r\cos\theta, \qquad y = 2r\cos\theta, \qquad z = \theta, \qquad 0 \leq r \leq 1, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Esbozar.

16. Probar el *teorema de Pappus*: Sea $\boldsymbol{\sigma}\colon [a,b] \to \mathbf{R}^2$ una trayectoria C^1 cuya imagen está en el semiplano derecho y es una curva cerrada simple. El área de la superficie lateral generada al rotar la imagen de $\boldsymbol{\sigma}$ alrededor del eje y es igual a $2\pi\overline{x}l(\boldsymbol{\sigma})$, donde $\overline{x}$ es el valor promedio de las coordenadas x de los puntos sobre $\boldsymbol{\sigma}$ y $l(\boldsymbol{\sigma})$ es la longitud de $\boldsymbol{\sigma}$. (Ver los ejercicios 8 al 11, sección 7.1, para un estudio de los valores promedio.)

17. El cilindro $x^2 + y^2 = x$ divide la esfera unitaria S en dos regiones S_1 y S_2, donde S_1 está dentro del cilindro y S_2 afuera. Hallar la razón de las áreas $A(S_2)/A(S_1)$.

18. Suponer que una superficie S que es la gráfica de una función $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D \subset \mathbf{R}^2$, también se puede describir como el conjunto de $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ con $F(x,y,z) = 0$ (una superficie de nivel). Deducir una fórmula para $A(S)$ que incluya sólo a F.

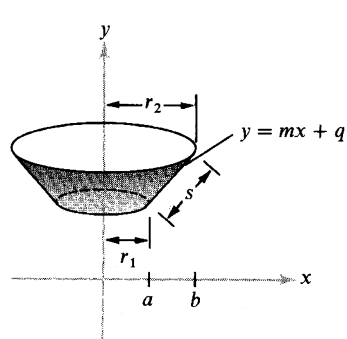


Figura 7.4.9 Segmento de recta girado alrededor del eje y se vuelve un frustum de cono.

19. Calcular el área del frustum mostrado en la figura 7.4.9 usando (a) sólo geometría y (b) una fórmula para el área de la superficie.

20. Se perfora un hoyo cilíndrico de radio 1 a través de una bola sólida de radio 2 para formar un acoplador anular, como se muestra en la figura 7.4.10. Hallar el volumen y el área de la superficie exterior de este acoplador.

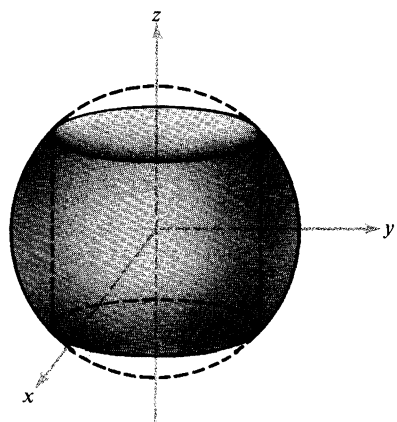


Figura 7.4.10 Hallar el área de la superficie y el volumen de la región sombreada.

21. Hallar el área de la gráfica de la función $f(x,y) = \frac{2}{3}(x^{3/2} + y^{3/2})$ que está sobre el dominio $[0,1] \times [0,1]$.

22. Expresar el área de superficie de las gráficas siguientes sobre la región indicada D como integral doble. No evaluar.

(a) $(x+2y)^2$; $D = [-1,2] \times [0,2]$

(b) $xy + x/(y+1)$; $D = [1,4] \times [1,2]$

(c) $xy^3 e^{x^2y^2}$; $D =$ círculo unitario con centro en el origen.

(d) $y^3 \cos^2 x$; $D =$ triángulo con vértices $(-1,1)$, $(0,2)$ y $(-1,1)$.

7.5 INTEGRALES DE FUNCIONES ESCALARES SOBRE SUPERFICIES

Ahora estamos preparados para definir la integral de una función *escalar* f *sobre una superficie* S. Este concepto es una generalización natural del área de una superficie, que corresponde a la integral sobre S de la función escalar $f(x,y,z) = 1$. Esto es muy parecido a considerar la integral de trayectoria como una generalización de la longitud de arco. En la siguiente sección trataremos con la integral de una función *vectorial* $\mathbf{F}$ sobre una superficie. Estos conceptos jugarán un papel crucial en análisis vectorial, tema tratado en el capítulo final.

Comencemos con una superficie S parametrizada por una función $\mathbf{\Phi}: D \to S \subset \mathbf{R}^3$, $\mathbf{\Phi}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$.

DEFINICIÓN *Si $f(x, y, z)$ es una función continua con valores reales definida en S, definimos la* ***integral de f sobre*** *S como*

$$\int_S f(x, y, z)\, dS = \int_S f\, dS = \int_D f(\mathbf{\Phi}(u, v))\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|\, du\, dv, \tag{1}$$

donde $\mathbf{T}_u$ y $\mathbf{T}_v$ tienen el mismo significado que en las secciones 7.3 y 7.4. Desarrollando, la ecuación (1) se vuelve

$$\int_S f\, dS = \int_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\sqrt{\left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}\right]^2}\, du\, dv. \tag{2}$$

Así, si f es idénticamente 1, recobramos la fórmula (3) del área, de la sección 7.4. Como el área de superficie, la integral de superficie es independiente de la parametrización particular usada. Esto se estudiará en la sección 7.6.

Podemos obtener un conocimiento intuitivo de esta integral al considerarla como límite de sumas. Sea D un rectángulo partido en n^2 rectángulos R_{ij}. Sea $S_{ij} = \mathbf{\Phi}(R_{ij})$ *la parte de la superficie* $\mathbf{\Phi}(D)$ correspondiente a R_{ij} (ver la figura 7.5.1), y sea $A(S_{ij})$ el área de esta parte de la superficie. Para n grande, f será aproximadamente constante en S_{ij}, y formamos la suma

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} f(\mathbf{\Phi}(u_i, v_j))A(S_{ij}), \tag{3}$$

donde $(u_i, v_j) \in R_{ij}$. De la sección 7.4 tenemos una fórmula para $A(S_{ij})$:

$$A(S_{ij}) = \int_{R_{ij}} \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|\, du\, dv,$$

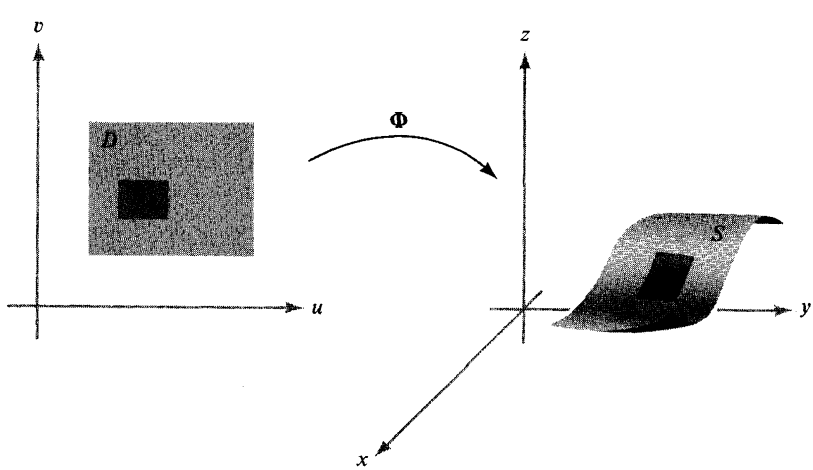


Figura 7.5.1 $\mathbf{\Phi}$ lleva una parte R_{ij} de D a una parte de S.

la cual, por el teorema del valor medio para integrales, es igual a $\|\mathbf{T}_{u_i^*} \times \mathbf{T}_{v_j^*}\| \Delta u \, \Delta v$ para algún punto (u_i^*, v_j^*) en R_{ij}. Por lo tanto, la suma se vuelve

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(\mathbf{\Phi}(u_i, v_j)) \|\mathbf{T}_{u_i^*} \times \mathbf{T}_{v_j^*}\| \, \Delta u \, \Delta v,$$

que es una suma aproximante para la última integral en la fórmula (1). Por lo tanto, $\lim_{n \to \infty} S_n = \int_S f \, dS$. Nótese que cada término en la suma de la fórmula (3) es el valor de f en algún punto $\mathbf{\Phi}(u_i, v_j)$ por el área de S_{ij}. Comparen esto con la interpretación de sumas de Riemann de la integral de trayectoria de la sección 7.1.

Si S es unión de superficies parametrizadas S_i, $i = 1, \ldots, N$, que no se intersecan excepto, quizá, a lo largo de curvas que definen sus fronteras, entonces la integral de f sobre S está definida por

$$\int_S f \, dS = \sum_{i=1}^{n} \int_{S_i} f \, dS,$$

como debería esperarse. Por ejemplo, la integral sobre la superficie de un cubo se puede expresar como la suma de las integrales sobre los seis lados.

EJEMPLO 1 *Suponer que se describe una helicoide como en el ejemplo 2, sección 7.4, y sea f dada por $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$. Hallar $\int_S f \, dS$.*

SOLUCIÓN Como antes,

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = r, \qquad \frac{\partial(y, z)}{\partial(r, \theta)} = \operatorname{sen} \theta, \qquad \frac{\partial(x, z)}{\partial(r, \theta)} = \cos \theta.$$

Además, $f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta, \theta) = \sqrt{r^2 + 1}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_S f(x, y, z) \, dS &= \int_D f(\mathbf{\Phi}(r, \theta)) \|\mathbf{T}_r \times \mathbf{T}_\theta\| \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{r^2 + 1} \sqrt{r^2 + 1} \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \tfrac{4}{3} \, d\theta = \tfrac{8}{3} \pi. \qquad \blacktriangle \end{aligned}$$

Suponer que S es la gráfica de una función C^1, $z = g(x, y)$. Recordar de la sección 7.4, que podemos parametrizar S por

$$x = u, \qquad y = v, \qquad z = g(u, v).$$

En este caso

$$\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2},$$

de modo que

$$\int_S f(x,y,z)\,dS = \int_D f(x,y,g(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy. \tag{4}$$

EJEMPLO 2 *Sea S la superficie definida por $z = x^2 + y$, donde D es la región $0 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$. Evaluar $\int_S x\,dS$.*

SOLUCIÓN Si hacemos $z = g(x,y) = x^2 + y$, la fórmula (4) da

$$\begin{aligned}
\int_S x\,dS &= \int_D x\sqrt{1+\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy \\
&= \int_{-1}^{1}\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2+1}\,dx\,dy \\
&= \frac{1}{8}\int_{-1}^{1}\left[\int_0^1 (2+4x^2)^{1/2}(8x\,dx)\right]dy \\
&= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}\int_{-1}^{1}[(2+4x^2)^{3/2}]_0^1\,dy \\
&= \frac{1}{12}\int_{-1}^{1}(6^{3/2}-2^{3/2})\,dy = \tfrac{1}{6}(6^{3/2}-2^{3/2}) \\
&= \sqrt{6}-\frac{\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}\left(\sqrt{3}-\frac{1}{3}\right). \qquad \blacktriangle
\end{aligned}$$

EJEMPLO 3 *Evaluar $\int_S z^2\,dS$, donde S es la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.*

SOLUCIÓN Para este problema es conveniente representar la esfera paramétricamente mediante las ecuaciones $x = \cos\theta \operatorname{sen}\phi$, $y = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi$, $z = \cos\phi$, sobre la región D en el plano $\theta\phi$ dada por $0 \le \phi \le \pi$, $0 \le \theta \le 2\pi$. De la ecuación (1) obtenemos

$$\int_S z^2\,dS = \int_D (\cos\phi)^2\|\mathbf{T}_\theta \times \mathbf{T}_\phi\|\,d\theta\,d\phi.$$

Ahora bien, haciendo algo de cálculos [usar la fórmula (2) de la sección 7.4] se muestra que

$$\|\mathbf{T}_\theta \times \mathbf{T}_\phi\| = |\operatorname{sen}\phi|,$$

de modo que

$$\begin{aligned}
\int_S z^2\,dS &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cos^2\phi|\operatorname{sen}\phi|\,d\phi\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cos^2\phi\operatorname{sen}\phi\,d\phi\,d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}[-\cos^3\phi]_0^{\pi}\,d\theta \\
&= \frac{2}{3}\int_0^{2\pi}d\theta = \frac{4\pi}{3}. \qquad \blacktriangle
\end{aligned}$$

Desarrollaremos ahora una fórmula para integrales de superficie cuando la superficie se puede representar como una gráfica. Para ello, sea S la gráfica de $z = g(x, y)$ y consideremos la fórmula (4). Aseguramos que

$$\int_S f(x, y, z)\, dS = \int_D \frac{f(x, y, g(x, y))}{\cos\theta}\, dx\, dy, \tag{5}$$

donde θ es el ángulo que forma la normal a la superficie con el vector unitario $\mathbf{k}$ en el punto $(x, y, g(x, y))$ (ver la figura 7.5.2). Al describir la superficie por la ecuación $\phi(x, y, z) = z - g(x, y) = 0$, un vector normal es $\nabla\phi$; esto es,

$$\mathbf{n} = -\frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

(ver el ejemplo 3 de la sección 7.3, o recordar que la normal a una superficie con ecuación $g(x, y, z) =$ constante es ∇g.) Así,

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{1}{\sqrt{(\partial g/\partial x)^2 + (\partial g/\partial y)^2 + 1}}.$$

Al sustituir esta fórmula en la ecuación (4) da la ecuación (5).

El resultado es, de hecho, geométricamente obvio, pues si un rectángulo pequeño en el plano xy tiene área ΔA, entonces el área de la parte sobre ella, en la superficie, es $\Delta S = \Delta A/\cos\theta$ (figura 7.5.2). Este enfoque nos puede ayudar a recordar la fórmula (5) y a aplicarla a problemas.

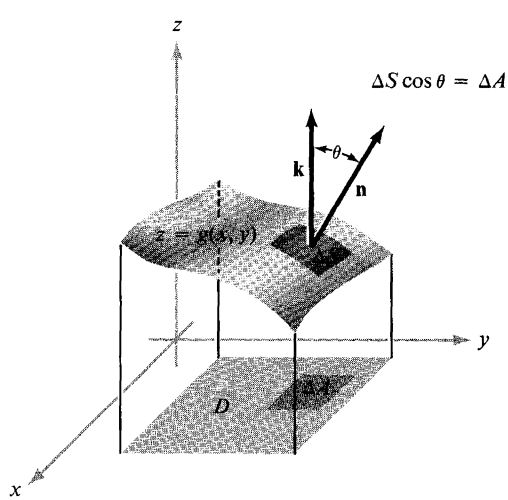


Figura 7.5.2 El área de un retazo de área ΔS sobre un retazo ΔA es $\Delta S = \Delta A/\cos\theta$, donde θ es el ángulo que forma la normal $\mathbf{n}$ con $\mathbf{k}$.

EJEMPLO 4 *Calcular* $\int_S x\,dS$, *donde* S *es el triángulo con vértices* $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ *y* $(0,0,1)$ *(Ver la figura 7.5.3).*

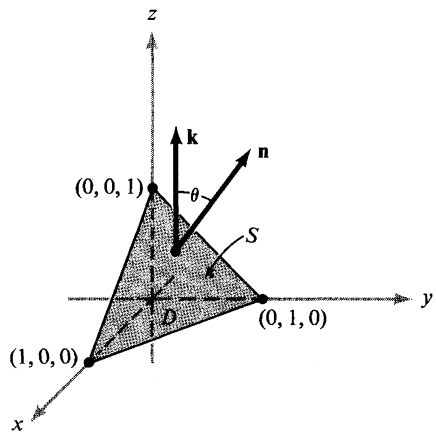


Figura 7.5.3 Al calcular una integral de superficie específica, se halla una fórmula para la normal $\mathbf{n}$ y se calcula el ángulo θ al prepararse para la fórmula (5).

SOLUCIÓN Esta superficie es el plano descrito por la ecuación $x + y + z = 1$. Como la superficie es un plano, el ángulo θ es constante y un vector normal unitario es $\mathbf{n} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$. Así, $\cos\theta = \mathbf{n}\cdot\mathbf{k} = 1/\sqrt{3}$ y por la ecuación (5),

$$\int_S x\,dS = \sqrt{3}\int_D x\,dx\,dy,$$

donde D es el dominio en el plano xy. Pero

$$\sqrt{3}\int_D x\,dx\,dy = \sqrt{3}\int_0^1\int_0^{1-x} x\,dy\,dx = \sqrt{3}\int_0^1 x(1-x)\,dx = \frac{\sqrt{3}}{6}. \qquad \blacktriangle$$

Las integrales de funciones sobre superficies son útiles para calcular la masa de una superficie, cuando se conoce la función m de densidad de masa. La masa total de una superficie con densidad de masa (por unidad de área) m está dada por

$$M(S) = \int_S m(x,y,z)\,dS. \tag{6}$$

EJEMPLO 5 *Sea* $\mathbf{\Phi}: D \to \mathbf{R}^3$ *la parametrización de la helicoide* $S = \mathbf{\Phi}(D)$ *del ejemplo 2 de la sección 7.4. Recordar que* $\mathbf{\Phi}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, \theta)$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le r \le 1$. *Suponer que* S *tiene densidad de masa en* $(x,y,z) \in S$ *igual al doble de la distancia de* (x,y,z) *al eje central (ver la figura 7.4.2), esto es,*

$m(x, y, z) = 2\sqrt{x^2 + y^2} = 2r$, *en el sistema de coordenadas cilíndricas. Hallar la masa total de la superficie.*

SOLUCIÓN Aplicando la fórmula (6),

$$M(S) = \int_S 2\sqrt{x^2 + y^2}\, dS = \int_S 2r\, dS = \int_D 2r\|\mathbf{T}_r \times \mathbf{T}_\theta\|\, dr\, d\theta.$$

Del ejemplo 2 de la sección 7.4, vemos que $\|\mathbf{T}_r \times \mathbf{T}_\theta\| = \sqrt{1 + r^2}$. Así,

$$\begin{aligned} M(S)) &= \int_D 2r\sqrt{1 + r^2}\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r\sqrt{1 + r^2}\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} [\tfrac{2}{3}(1 + r^2)^{3/2}]_0^1\, d\theta = \int_0^{2\pi} \tfrac{2}{3}(2^{3/2} - 1)\, d\theta \\ &= \frac{4\pi}{3}(2^{3/2} - 1). \qquad \blacktriangle \end{aligned}$$

EJERCICIOS

1. Calcular $\int_S xy\, dS$ donde S es la superficie del tetraedro con lados $z = 0$, $y = 0$, $x + z = 1$ y $x = y$.

2. Sea $\mathbf{\Phi}: D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ una parametrización de una superficie S definida por

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v)$$

(a) Sean

$$\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right),$$

esto es, $\partial\mathbf{\Phi}/\partial u = \mathbf{T}_u$ y $\partial\mathbf{\Phi}/\partial v = \mathbf{T}_v$, y hagamos

$$E = \left\|\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u}\right\|^2, \qquad F = \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v}, \qquad G = \left\|\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v}\right\|^2.$$

Mostrar que el área de superficie de S es $\int_D \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$. En esta notación, ¿cómo podemos expresar $\int_S f\, dS$ para una función general f?

(b) ¿En qué se convierte la fórmula si los vectores $\partial\mathbf{\Phi}/\partial u$ y $\partial\mathbf{\Phi}/\partial v$ son ortogonales?

(c) Usar las partes (a) y (b) para calcular el área de superficie de una esfera de radio a.

3. Evaluar $\int_S z\, dS$, donde S es el hemisferio superior de radio a, esto es, el conjunto de (x, y, z) con $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

4. Evaluar $\int_S (x + y + z)\, dS$, donde S es la frontera de la bola unitaria B; esto es, S es el conjunto de (x, y, z) con $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. (IDEA: Usar la simetría del problema.)

5. Evaluar $\int_S xyz\,dS$, donde S es el triángulo con vértices $(1,0,0)$, $(0,2,0)$ y $(0,1,1)$.

6. Sea una superficie S definida de manera implícita por $F(x,y,z)=0$ para (x,y) en un dominio D de $\mathbf{R}^2$. Mostrar que

$$\int_S \left|\frac{\partial F}{\partial z}\right| dS = \int_D \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}\,dx\,dy$$

Comparar con el ejercicio 18 de la sección 7.4.

7. Evaluar $\int_S z\,dS$, donde S es la superficie $z = x^2+y^2$, $x^2+y^2 \le 1$.

8. Evaluar $\int_S z^2\,dS$, donde S es la frontera del cubo $C = [-1,1]\times[-1,1]\times[-1,1]$. (IDEA: Hacer cada cara por separado y sumar los resultados.)

9. Hallar la masa de una superficie esférica S de radio R tal que en cada punto $(x,y,z)\in S$ la densidad de masa es igual a la distancia de (x,y,z) a algún punto fijo $(x_0,y_0,z_0)\in S$.

10. Una superficie metálica S tiene la forma de un hemisferio $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, $0\le x^2+y^2\le R^2$. La densidad de masa en $(x,y,z)\in S$ está dada por $m(x,y,z)=x^2+y^2$. Hallar la masa total de S.

11. Sea S la esfera de radio R.

(a) Argumentar por simetría que

$$\int_S x^2\,dS = \int_S y^2\,dS = \int_S z^2\,dS.$$

(b) Usar este hecho y algo de inteligencia para evaluar, con muy pocos cálculos, la integral

$$\int_S x^2\,dS.$$

(c) ¿Ayuda esto en el ejercicio 10?

12. (a) Usar sumas de Riemann para justificar la fórmula

$$\frac{1}{A(S)}\int_S f(x,y,z)\,dS$$

para el *valor promedio* de f sobre la superficie S.

(b) En el ejemplo 3 de esta sección, mostrar que el promedio de $f(x,y,z)=z^2$ es $\frac{1}{3}$.

(c) Definir el *centro de gravedad* $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ de una superficie S de modo que $\overline{x}$, $\overline{y}$ y $\overline{z}$ sean los valores promedio de las coordenadas x, y y z en S. Mostrar que el centro de gravedad del triángulo en el ejemplo 4 de esta sección es $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$.

13. Hallar las coordenadas x, y y z del centro de gravedad del octante de la esfera sólida de radio R, con centro en el origen, determinado por $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. (IDEA: Escribir este octante como una superficie parametrizada —ver el ejemplo 3 de esta sección y el ejercicio 12.)

14. Hallar la coordenada z del centro de gravedad (coordenada z promedio) de la superficie de un hemisferio ($z \leq 0$) con radio r (ver el ejercicio 12). Argumentar por simetría que las coordenadas x y y promedio son, ambas, cero.

***15.** Sea la *funcional de Dirichlet* para una superficie parametrizada $\mathbf{\Phi}: D \to \mathbf{R}^3$ definida por*

$$J(\mathbf{\Phi}) = \frac{1}{2}\int_D \left(\left\| \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v} \right\|^2 \right) du\, dv.$$

Usando el ejercicio 15 de la sección 1.5, argumentar que el área $A(\mathbf{\Phi}) \leq J(\mathbf{\Phi})$ y la igualdad se cumple si

(a) $\left\| \dfrac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} \right\|^2 = \left\| \dfrac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v} \right\|^2$ y

(b) $\dfrac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v} = 0.$

Comparar estas ecuaciones con el ejercicio 2 y las observaciones al final de la sección 7.4. Una parametrización $\mathbf{\Phi}$ que satisface las condiciones (a) y (b) se llama *conforme*.

***16.** Sean $D \subset \mathbf{R}^2$ y $\mathbf{\Phi}: D \to \mathbf{R}^2$ una función suave $\mathbf{\Phi}(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ que satisface las condiciones (a) y (b) del ejercicio 15. Mostrar que x y y satisfacen las *ecuaciones de Cauchy-Riemann* $\partial x/\partial u = \partial y/\partial v$, $\partial x/\partial v = -\partial y/\partial u$ o las *ecuaciones conjugadas de Cauchy-Riemann* $\partial x/\partial u = -\partial y/\partial v$, $\partial x/\partial v = \partial y/\partial u$. Concluir que $\nabla^2 \mathbf{\Phi} = 0$ (i.e., cada componente de $\mathbf{\Phi}$ es armónica).

17. (a) Calcular el área de la parte del cono $x^2 + y^2 = z^2$ con $z \geq 0$ que está dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$, donde R es una constante positiva.

(b) ¿Cuál es el área de la parte de la esfera que está dentro del cono?

***18.** Sea S una esfera de radio r y $\mathbf{p}$ un punto dentro o fuera de la esfera (pero no en ella). Mostrar que

$$\int_S \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|}\, dS = \begin{cases} 4\pi r & \text{si } \mathbf{p} \text{ está dentro de } S \\ 4\pi r^2/d & \text{si } \mathbf{p} \text{ está fuera de } S \end{cases}$$

donde d es la distancia de $\mathbf{p}$ al centro de la esfera y la integración es sobre x.

19. Hallar el área de superficie de la parte del cilindro $x^2 + z^2 = a^2$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 2ay$ y también en el octante positivo ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$). Suponer que $a > 0$.

---

*La funcional de Dirichlet jugó un papel importante en las matemáticas del siglo XIX. El matemático Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866) la usó para desarrollar su teoría de funciones complejas y para dar una demostración del famoso teorema de la función de Riemann. Todavía se usa de manera extensiva como herramienta en el estudio de ecuaciones diferenciales parciales.

7.6 INTEGRALES DE SUPERFICIE DE FUNCIONES VECTORIALES

En esta sección nos ocuparemos de integrales de funciones *vectoriales* sobre superficies. La definición que damos aquí es una extensión natural de la dada para funciones escalares estudiadas en la sección 7.5.

DEFINICIÓN *Sea* $\mathbf{F}$ *un campo vectorial definido en* S*, imagen de una superficie parametrizada* $\mathbf{\Phi}$*. La* ***integral de superficie*** *de* $\mathbf{F}$ *sobre* $\mathbf{\Phi}$*, denotada por*

$$\int_{\mathbf{\Phi}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}, \qquad \text{o a veces por} \qquad \iint_{\mathbf{\Phi}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

se define por

$$\int_{\mathbf{\Phi}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v)\, du\, dv,$$

donde $\mathbf{T}_u$ *y* $\mathbf{T}_v$ *se definen como en la sección 7.3 (ver la página 442 y la figura 7.6.1).*

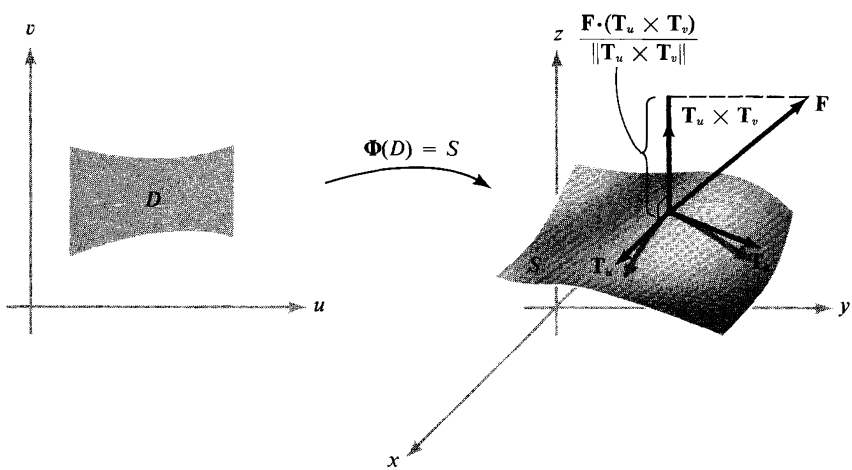


Figura 7.6.1 Significado geométrico de $\mathbf{F} \cdot (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v)$.

EJEMPLO 1 *Sea* D *el rectángulo en el plano* $\theta\phi$ *definido por*

$$0 \le \theta \le 2\pi, \qquad 0 \le \phi \le \pi,$$

y sea la superficie S *definida por la parametrización* $\mathbf{\Phi}: D \to \mathbf{R}^3$ *dada por*

$$x = \cos\theta \operatorname{sen}\phi, \qquad y = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \qquad z = \cos\phi.$$

(Así, θ y ϕ son los ángulos de coordenadas esféricas, y S es la esfera unitaria parametrizada por $\mathbf{\Phi}$.) Sea $\mathbf{r}$ *el vector de posición* $\mathbf{r}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. *Calcular* $\int_{\mathbf{\Phi}} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}$.

SOLUCIÓN Primero hallamos

$$\mathbf{T}_\theta = (-\operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta)\mathbf{i} + (\operatorname{sen}\phi\cos\theta)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{T}_\phi = (\cos\theta\cos\phi)\mathbf{i} + (\operatorname{sen}\theta\cos\phi)\mathbf{j} - (\operatorname{sen}\phi)\mathbf{k}$$

entonces

$$\mathbf{T}_\theta \times \mathbf{T}_\phi = (-\operatorname{sen}^2\phi\cos\theta)\mathbf{i} - (\operatorname{sen}^2\phi\operatorname{sen}\theta)\mathbf{j} - (\operatorname{sen}\phi\cos\phi)\mathbf{k}.$$

Después calculamos

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}\cdot(\mathbf{T}_\theta \times \mathbf{T}_\phi) &= (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})\cdot(\mathbf{T}_\theta \times \mathbf{T}_\phi) \\
&= [(\cos\theta\operatorname{sen}\phi)\mathbf{i} + (\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi)\mathbf{j} + (\cos\phi)\mathbf{k}] \\
&\quad \cdot(-\operatorname{sen}\phi)[(\operatorname{sen}\phi\cos\theta)\mathbf{i} + (\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta)\mathbf{j} + (\cos\phi)\mathbf{k}] \\
&= (-\operatorname{sen}\phi)(\operatorname{sen}^2\phi\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\phi\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\phi) \\
&= -\operatorname{sen}\phi.
\end{aligned}$$

Así,

$$\int_{\mathbf{\Phi}} \mathbf{r}\cdot d\mathbf{S} = \int_D -\operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta = \int_0^{2\pi} (-2)\, d\theta = -4\pi. \qquad \blacktriangle$$

Se puede esbozar una analogía entre la integral de superficie $\int_{\mathbf{\Phi}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ y la integral de línea $\int_\sigma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$. Recordar que la integral de línea es una integral orientada. Necesitábamos el concepto de orientación de una curva para extender la definición de $\int_\sigma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ a integrales de línea $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ sobre curvas orientadas. Extendemos la definición de $\int_{\mathbf{\Phi}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ a superficies orientadas de manera similar; esto es, dada una superficie S parametrizada por una función $\mathbf{\Phi}$, queremos definir $\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int_{\mathbf{\Phi}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ y mostrar que es independiente de la parametrización, excepto, quizá, por el signo. Para lograrlo necesitamos el concepto de orientación de una superficie.

DEFINICIÓN *Una* ***superficie orientada*** *es una superficie de dos lados, uno de ellos el* ***lado exterior o positivo****; y el otro el* ***lado interior o negativo****.* En cada punto* $(x, y, z) \in S$ *hay dos vectores normales unitarios* $\mathbf{n}_1$ *y* $\mathbf{n}_2$, *donde* $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$ *(ver la figura 7.6.2). Cada una de estas normales se puede asociar con un lado de la superficie. Así, para especificar un lado de una superficie* S,

*Usamos el término "lado" en sentido intuitivo. Este concepto se puede desarrollar de manera rigurosa. Además, la selección del lado llamado "exterior", a menudo es impuesto por la superficie misma, como, por ejemplo, en el caso de una esfera. En otros casos, la denominación es algo arbitraria (ver la parte de superficie ilustrada en la figura 7.6.2).

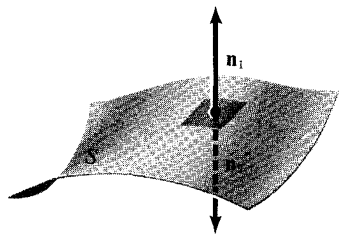


Figura 7.6.2 Las dos posibles normales unitarias a una superficie en un punto

en cada punto escogemos un vector normal unitario $\mathbf{n}$ *que apunta hacia afuera desde el lado positivo de* S *en ese punto.*

Esta definición supone que nuestra superficie tiene dos lados. Daremos un ejemplo de una superficie con un solo lado. El primer ejemplo conocido de dicho tipo de superficie fue la cinta de Möbius (debido al matemático y astrónomo alemán A. F. Möbius, quien, junto con el matemático J. B. Listing, la descubrió en 1858). En las figuras 7.6.3 y 7.6.4 se presenta dicha superficie. En cada punto de M hay dos normales unitarias, $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$. Sin embargo, $\mathbf{n}_1$ no determina un lado único de M, y tampoco $\mathbf{n}_2$. Para ver esto de manera intuitiva, podemos deslizar $\mathbf{n}_2$ alrededor de la curva cerrada C (figura 7.6.3). Cuando $\mathbf{n}_2$ regrese a un punto fijo p de C, coincidirá con $\mathbf{n}_1$, mostrando que tanto $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ apuntan desde el mismo lado de M y, en consecuencia, M tiene un solo lado.

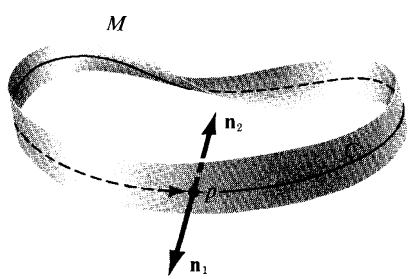


Figura 7.6.3 Cinta de Möbius: deslizar $\mathbf{n}_2$ alrededor de C una vez; cuando $\mathbf{n}_2$ regrese a su punto inicial, $\mathbf{n}_2$ coincidirá con $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$.

La figura 7.6.4 es una cinta de Möbius dibujada por el conocido matemático y artista del siglo XX, M. C. Escher. Presenta hormigas caminando a lo largo de la banda de Möbius. Después de una vuelta alrededor de la banda (sin cruzar por un lado) terminan en el "lado opuesto" de la superficie.

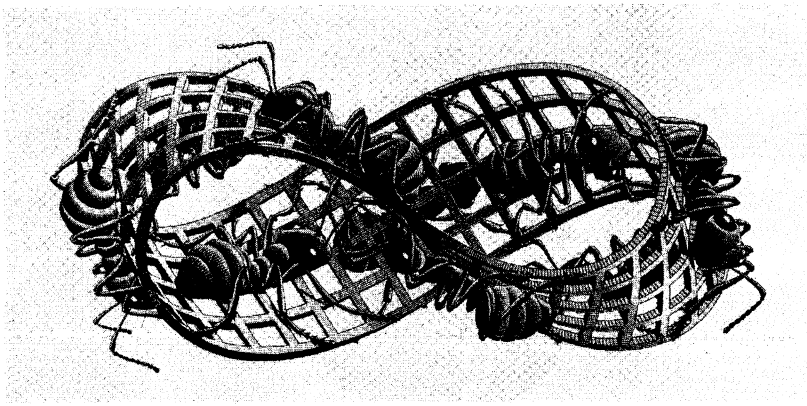


Figura 7.6.4 Hormigas caminando sobre una cinta de Möbius. (*Moebius Strip II, 1963, por M. C. Escher. Escher Foundation, Haags Gemeentemuseum, La Haya.*)

Sea $\mathbf{\Phi}: D \to \mathbf{R}^3$ una parametrización de una superficie orientada S y suponer que S es suave en $\mathbf{\Phi}(u_0, v_0)$, $(u_0, v_0) \in D$; i.e., está definido el vector normal unitario $(\mathbf{T}_{u_0} \times \mathbf{T}_{v_0})/\|\mathbf{T}_{u_0} \times \mathbf{T}_{v_0}\|$. Si $\mathbf{n}(\mathbf{\Phi}(u_0, v_0))$ denota la normal unitaria a S en $\mathbf{\Phi}(u_0, v_0)$ apuntando desde el lado positivo de S a ese punto, se sigue que $(\mathbf{T}_{u_0} \times \mathbf{T}_{v_0})/\|\mathbf{T}_{u_0} \times \mathbf{T}_{v_0}\| = \pm\mathbf{n}(\mathbf{\Phi}(u_0, v_0))$. Se dice que la parametrización $\mathbf{\Phi}$ *preserva la orientación* si $(\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v)/\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| = \mathbf{n}(\mathbf{\Phi}(u, v))$ en todo $(u, v) \in D$ para los cuales S es suave en $\mathbf{\Phi}(u, v)$. En otras palabras, $\mathbf{\Phi}$ preserva la orientación si el vector $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$ apunta hacia afuera desde el lado exterior de la superficie. Si $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$ apunta hacia afuera desde el lado interior de la superficie en todos los puntos $(u, v) \in D$ para los que S es suave en $\mathbf{\Phi}(u, v)$, entonces se dice que $\mathbf{\Phi}$ *invierte la orientación*. Usando la notación anterior, esta condición corresponde a la selección de $(\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v)/\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| = \mathbf{n}(\mathbf{\Phi}(u, v))$.

Se sigue de este análisis que la banda de Möbius no puede ser parametrizada por una sola parametrización. (La esfera del ejemplo 1 puede ser parametrizada por una sola parametrización, pero no por una que sea uno a uno en todas partes —ver el análisis al principio de la sección 7.4.)

EJEMPLO 2 Podemos dar a la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ en $\mathbf{R}^3$ (figura 7.6.5) una orientación seleccionando el vector unitario $\mathbf{n}(x, y, z) = \mathbf{r}$, donde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, que apunta hacia afuera desde el lado exterior de la superficie. Esta selección corresponde a nuestra concepción intuitiva del exterior de la esfera.

Ahora que la esfera S es una superficie orientada, considerar la parametrización $\mathbf{\Phi}$ de S dada en el ejemplo 1. El producto cruz de los vectores tangentes $\mathbf{T}_\theta$ y $\mathbf{T}_\phi$ —esto es, una normal a S— está dado por

$$(-\operatorname{sen}\phi)[(\cos\theta \operatorname{sen}\phi)\mathbf{i} + (\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi)\mathbf{j} + (\cos\phi)\mathbf{k}] = -\mathbf{r}\operatorname{sen}\phi.$$

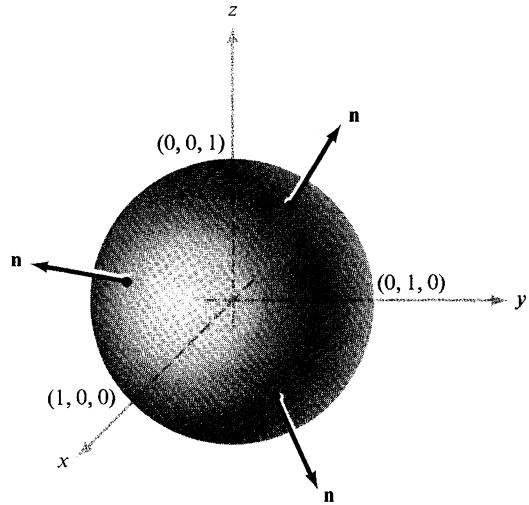


Figura 7.6.5 La esfera unitaria orientada por su normal exterior $\mathbf{n}$.

Como $-\operatorname{sen}\phi \leq 0$ para $0 \leq \phi \leq \pi$, este vector normal apunta hacia adentro desde la esfera. Así, la parametrización $\mathbf{\Phi}$ dada invierte la orientación. ▲

EJEMPLO 3 Sea S una superficie descrita por $z = f(x, y)$. Hay dos vectores normales unitarios a S en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, a saber, $\pm\mathbf{n}$, donde

$$\mathbf{n} = \frac{-\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\mathbf{i} - \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right]^2 + \left[\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right]^2 + 1}}.$$

Podemos orientar todas estas superficies* tomando el lado positivo de S como el lado desde el cual apunta $\mathbf{n}$ (figura 7.6.6). Así, el lado positivo de dicha superficie está determinado por la normal unitaria $\mathbf{n}$ con componente $\mathbf{k}$ positiva. Si parametrizamos esta superficie por $\mathbf{\Phi}(u, v) = (u, v, f(u, v))$, entonces $\mathbf{\Phi}$ preservará la orientación. ▲

Enunciaremos ahora, sin demostración, un teorema que muestra que la integral sobre una superficie orientada es independiente de la parametrización. La demostración de este teorema es análoga a la del teorema 1 (sección 7.2); el

*Si hubiéramos dado una definición rigurosa de orientación, podríamos usar este argumento para mostrar que todas las superficies $z = f(x, y)$ son, de hecho, orientables; esto es, que tienen "dos lados".

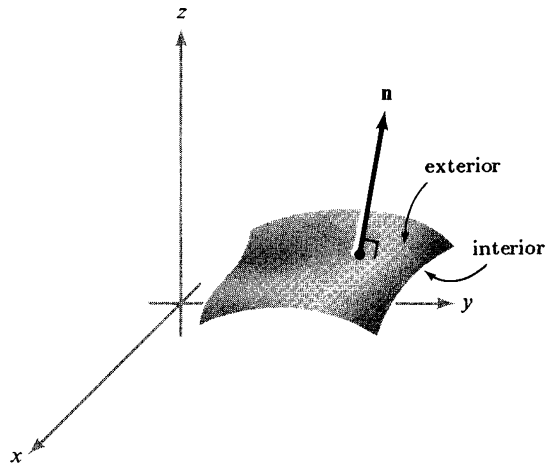


Figura 7.6.6 n apunta desde el exterior de la superficie.

meollo de la demostración está en la fórmula de cambio de variables —esta vez aplicada a integrales dobles.

TEOREMA 4 *Sea S una superficie orientada y sean $\mathbf{\Phi}_1$ y $\mathbf{\Phi}_2$ dos parametrizaciones suaves que preserven la orientación, con $\mathbf{F}$ un campo vectorial continuo definido en S. Entonces*

$$\int_{\mathbf{\Phi}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\mathbf{\Phi}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Si $\mathbf{\Phi}_1$ preserva la orientación y $\mathbf{\Phi}_2$ la invierte, entonces

$$\int_{\mathbf{\Phi}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -\int_{\mathbf{\Phi}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Si f es una función continua con valores reales definida en S, y si $\mathbf{\Phi}_1$ y $\mathbf{\Phi}_2$ son parametrizaciones de S, entonces

$$\int_{\mathbf{\Phi}_1} f\, dS = \int_{\mathbf{\Phi}_2} f\, dS.$$

Si $f = 1$, obtenemos

$$A(S) = \int_{\mathbf{\Phi}_1} dS = \int_{\mathbf{\Phi}_2} dS,$$

mostrando así que el área es independiente de la parametrización.

Podemos entonces usar sin ambigüedad la notación

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\mathbf{\Phi}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

(o una suma de dichas integrales, si S es unión de superficies parametrizadas que se intersecan sólo a lo largo de sus curvas frontera) donde $\mathbf{\Phi}$ es una parametrización que preserva la orientación. El teorema 4 garantiza que el valor de la integral no depende de la selección de $\mathbf{\Phi}$.

Recordar de la fórmula (1) de la sección 7.2 que una integral de línea $\int_\sigma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ se puede pensar como la integral de trayectoria de la componente tangencial de $\mathbf{F}$ a lo largo de σ (aunque para el caso en que σ se interseca a sí misma, la integral obtenida no es, técnicamente, una integral de trayectoria.) Una situación similar se cumple en nuestro contexto, para las integrales de superficie, pues hemos supuesto que las funciones $\mathbf{\Phi}$ que definen la superficie S son uno a uno excepto, quizás, en la frontera de D, lo cual puede ser ignorado para propósitos de integración. Así, al definir integrales sobre superficies en este libro suponemos que las superficies no se intersecan.

Para una superficie suave orientada S y una parametrización $\mathbf{\Phi}$ que preserva la orientación de S, podemos expresar $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ como integral de una función f con valores reales, sobre la superficie. Sea $\mathbf{n} = (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v)/\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|$ la normal unitaria que apunta al exterior de S. Entonces

$$\begin{aligned}
\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\mathbf{\Phi}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \int_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v)\, du\, dv \\
&= \int_D \mathbf{F} \cdot \left(\frac{\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v}{\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|} \right) \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|\, du\, dv \\
&= \int_D (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|\, du\, dv = \int_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS = \int_S f\, dS,
\end{aligned}$$

donde $f = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$. Así, hemos probado el siguiente teorema.

TEOREMA 5 *$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, la integral de superficie de $\mathbf{F}$ sobre S, es igual a la integral de la componente normal de $\mathbf{F}$ sobre la superficie. En breve,*

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Esta observación a menudo puede ahorrar mucho esfuerzo computacional, como lo demuestra el ejemplo 4.

El significado geométrico y físico de la integral de superficie se puede entender expresándola como un límite de sumas de Riemann. Por sencillez, supongamos que D es un rectángulo. Fijar una parametrización $\mathbf{\Phi}$ de S que preserve la orientación y partamos la región D en n^2 piezas D_{ij}, $0 \leq i \leq n-1$, $0 \leq j \leq n-1$. Denotemos por Δu la longitud del lado horizontal de D_{ij} y por Δv la longitud del

lado vertical de D_{ij}. Sean (u, v) un punto en D_{ij} y $(x, y, z) = \mathbf{\Phi}(u, v)$, el punto correspondiente en la superficie. Consideremos el paralelogramo con lados $\Delta u\, \mathbf{T}_u$ y $\Delta v\, \mathbf{T}_v$ que está en el plano tangente a S en (x, y, z) y el paralelepípedo formado por $\mathbf{F}$, $\Delta u\, \mathbf{T}_u$ y $\Delta v\, \mathbf{T}_v$. El volumen del paralelepípedo es el valor absoluto del triple producto

$$\mathbf{F} \cdot (\Delta u \mathbf{T}_u \times \Delta v \mathbf{T}_v) = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v)\, \Delta u\, \Delta v.$$

El vector $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$ es normal a la superficie en (x, y, z) y apunta hacia afuera desde el exterior de la superficie. Así, el número $\mathbf{F} \cdot (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v)$ es positivo cuando el paralelepípedo está en el exterior de la superficie (figura 7.6.7).

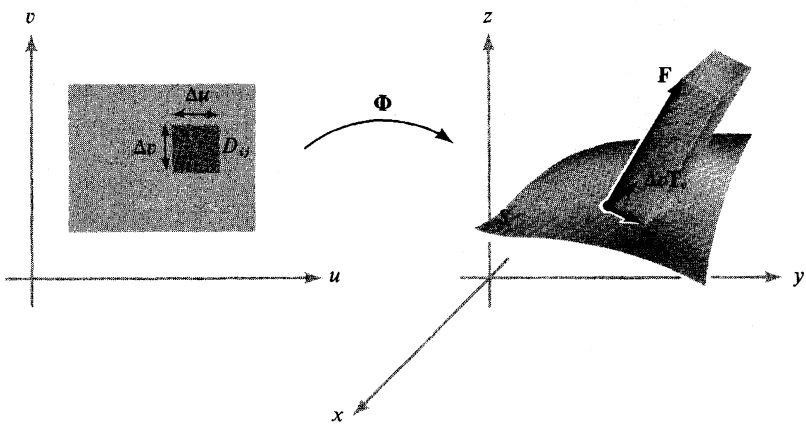


Figura 7.6.7 $\mathbf{F} \cdot (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v) > 0$ cuando el paralelepípedo formado por $\Delta v\, \mathbf{T}_v$, $\Delta u \mathbf{T}_u$ y $\mathbf{F}$ está en el "exterior" de la superficie S.

En general, el paralelepípedo está en aquel lado de la superficie desde donde apunta $\mathbf{F}$. Si pensamos $\mathbf{F}$ como el campo de velocidad de un fluido, $\mathbf{F}(x, y, z)$ apunta en la dirección en la cual el fluido se mueve a través de la superficie cerca de (x, y, z). Más aún, el número

$$|\mathbf{F} \cdot (\mathbf{T}_u \Delta u \times \mathbf{T}_v \Delta v)|$$

mide la cantidad de fluido que pasa a través del paralelogramo tangente por unidad de tiempo. Como el signo de $\mathbf{F} \cdot (\Delta u\, \mathbf{T}_u \times \Delta v\, \mathbf{T}_v)$ es positivo si el vector $\mathbf{F}$ apunta hacia afuera en (x, y, z) y negativo si $\mathbf{F}$ apunta hacia adentro, $\sum_{i,j} \mathbf{F} \cdot (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v)\, \Delta u\, \Delta v$ es una medida aproximada de la cantidad neta de fluido que fluye hacia afuera a través de la superficie por unidad de tiempo. (Recordar que "afuera" o "adentro" depende de la parametrización escogida. La figura 7.6.8 ilustra $\mathbf{F}$ dirigida hacia afuera y hacia adentro, dados $\mathbf{T}_u$ y $\mathbf{T}_v$.) Por lo tanto, *la integral* $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ *es la cantidad neta de fluido que fluye a través de la superficie por unidad de tiempo, esto es, la tasa de flujo.* Por lo tanto, esta integral también se llama *flujo* de $\mathbf{F}$ a través de la superficie.

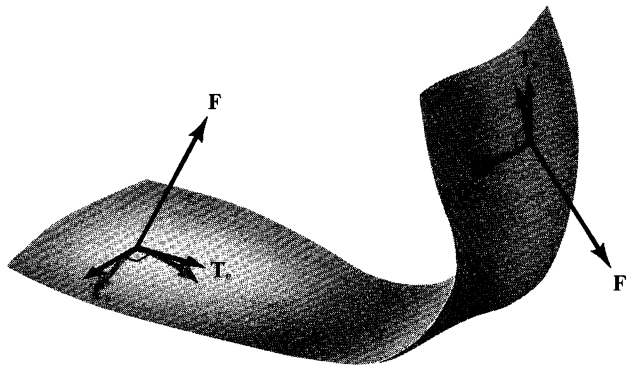


Figura 7.6.8 Cuando $\mathbf{F} \cdot (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v) > 0$ (izquierda), $\mathbf{F}$ apunta hacia afuera; cuando $\mathbf{F} \cdot (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v) < 0$ (derecha), $\mathbf{F}$ apunta hacia adentro.

En el caso en que $\mathbf{F}$ representa un campo magnético o eléctrico, $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ también se conoce como flujo. El lector quizá conozca las leyes físicas (como la de Faraday) que relaciona el flujo de un campo vectorial con la circulación (o corriente) en un lazo circundante. Ésta es la base histórica y física del teorema de Stokes, que estudiaremos en la sección 8.2. El principio correspondiente en mecánica de fluidos se llama teorema de circulación de Kelvin.

Las integrales de superficie también se aplican al estudio de flujo de calor. Sea $T(x, y, z)$ la temperatura en un punto $(x, y, z) \in W \subset \mathbf{R}^3$, donde W es alguna región y T es una función C^1. Entonces

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\mathbf{k}$$

representa el gradiente de temperatura, y el calor "fluye" según el campo vectorial $-k\nabla T = \mathbf{F}$, donde k es una constante positiva (ver la sección 8.5). Por lo tanto $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ es la tasa total de flujo de calor o flujo a través de la superficie S.

EJEMPLO 4 *Suponer que una función de temperatura está dada por $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ y sea S la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ orientada con la normal exterior (ver el ejemplo 2). Hallar el flujo de calor a través de la superficie S si $k = 1$.*

SOLUCIÓN Tenemos

$$\mathbf{F} = -\nabla T(x, y, z) = -2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}.$$

En S, $\mathbf{n}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ es la normal "exterior" unitaria a S en (x, y, z) y $f(x, y, z) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -2x^2 - 2y^2 - 2z^2 = -2$ es la componente normal de $\mathbf{F}$. En el teorema 5 podemos ver que la integral superficie de $\mathbf{F}$ es igual a la integral de su componente normal $f = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ sobre S. Así, $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_S f\, d\mathbf{S} =$

$-2\int_S dS = -2A(S) = -2(4\pi) = -8\pi$. El flujo de calor se dirige hacia el centro de la esfera (¿por qué hacia el centro?). Claramente, nuestra observación de que $\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int_S f\,dS$ nos ha ahorrado considerable tiempo de computación.

En este ejemplo, $\mathbf{F}(x, y, z) = -2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}$ podría también representar un campo eléctrico, en cuyo caso $\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = -8\pi$ sería el flujo eléctrico a través de S. ▲

EJEMPLO 5 Hay una importante ley física, debida al gran matemático y físico K. F. Gauss, que relaciona el flujo de un campo eléctrico $\mathbf{E}$ sobre una superficie "cerrada" S (por ejemplo, una esfera o un elipsoide) con la carga neta Q encerrada por la superficie, a saber,

$$\int_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = Q \tag{1}$$

(ver la figura 7.6.9). La ley de Gauss se estudiará en detalle en el capítulo 8. Esta ley es análoga a la ley de Ampère (ver el ejemplo 12, sección 7.2).

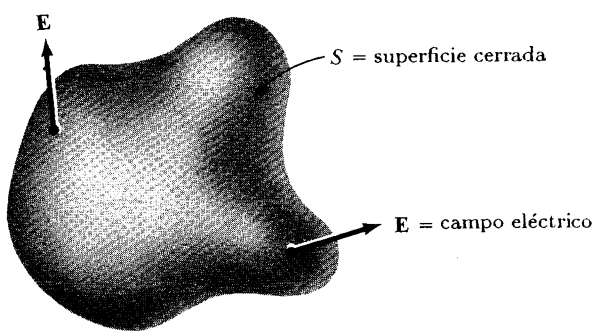


Figura 7.6.9 Ley de Gauss: $\int_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = Q$, donde Q es la carga neta dentro de S.

Suponer que $\mathbf{E} = E\mathbf{n}$; esto es, $\mathbf{E}$ es múltiplo escalar constante de la normal unitaria a S. Entonces la ley de Gauss, la ecuación (1) anterior, se vuelve

$$\int_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \int_S E\,dS = E\int_S dS = Q$$

pues $E = \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}$. Así,

$$E = \frac{Q}{A(S)}. \tag{2}$$

En el caso de que S sea la esfera de radio R, la ecuación (2) sea convierte en

$$E = \frac{Q}{4\pi R^2} \tag{3}$$

(ver la figura 7.6.10).

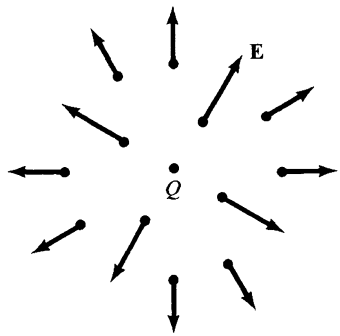


Figura 7.6.10 Campo $\mathbf{E}$ debido a una carga puntual Q es $\mathbf{E} = Q\mathbf{n}/4\pi R^2$.

Supongamos ahora que $\mathbf{E}$ surge de una carga puntual aislada Q. Por simetría, se sigue que $\mathbf{E} = E\mathbf{n}$, donde $\mathbf{n}$ es la normal unitaria a cualquier esfera con centro en Q. Por lo tanto se cumple la ecuación (3). Considerar una segunda carga puntual Q_0 situada a una distancia R de Q. La fuerza $\mathbf{F}$ que actúa sobre esta segunda carga Q_0 está dada por

$$\mathbf{F} = \mathbf{E}Q_0 = EQ_0\mathbf{n} = \frac{QQ_0}{4\pi R^2}\mathbf{n}.$$

Si F es la magnitud de $\mathbf{F}$, tenemos

$$F = \frac{QQ_0}{4\pi R^2},$$

que es la conocida *ley de Coulomb* para la fuerza entre dos cargas puntuales.* ▲

Deduzcamos las fórmulas de integrales de superficie para gráficas de funciones. Considerar la superficie S descrita por $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, donde S está orientada de modo que

$$\mathbf{n} = \frac{-\dfrac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} - \dfrac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}}$$

apunta hacia afuera. Hemos visto que podemos parametrizar S por $\mathbf{\Phi}: D \to \mathbf{R}^3$ dada por $\mathbf{\Phi}(x, y) = (x, y, f(x, y))$. En este caso, $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ se puede describir de

*A veces vemos la fórmula $F = (1/4\pi\epsilon_0)QQ_0/R^2$. La constante adicional ϵ_0 aparece cuando se usan unidades MKS para medir la carga. Nosotros usamos unidades CGS, o gaussianas.

manera particularmente simple. Tenemos

$$\mathbf{T}_x = \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{k}, \qquad \mathbf{T}_y = \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{k}.$$

Así, $\mathbf{T}_x \times \mathbf{T}_y = -(\partial f/\partial x)\mathbf{i} - (\partial f/\partial y)\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Si $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ es un campo vectorial continuo, obtenemos la fórmula

$$\begin{aligned}\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} &= \int_D \mathbf{F}\cdot(\mathbf{T}_x \times \mathbf{T}_y)\,dx\,dy \\ &= \int_D \left[F_1\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\right) + F_2\left(-\frac{\partial f}{\partial y}\right) + F_3\right] dx\,dy. \qquad (4)\end{aligned}$$

EJEMPLO 6 *Las ecuaciones*

$$z = 12, \qquad x^2 + y^2 \leq 25$$

describen un disco de radio 5 *que está en el plano* $z = 12$. *Supongamos que* $\mathbf{r}$ *es el campo vectorial*

$$\mathbf{r}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Calcular $\int_S \mathbf{r}\cdot d\mathbf{S}$.

SOLUCIÓN Lo haremos de tres maneras. Primero, tenemos $\partial z/\partial x = \partial z/\partial y = 0$, pues $z = 12$ es constante en el disco, de modo que

$$\mathbf{r}(x, y, z)\cdot(\mathbf{T}_x \times \mathbf{T}_y) = \mathbf{r}(x, y, z)\cdot(\mathbf{i}\times\mathbf{j}) = \mathbf{r}(x, y, z)\cdot\mathbf{k} = z$$

y entonces, usando la definición original al principio de esta sección, la integral se convierte en

$$\int_S \mathbf{r}\cdot d\mathbf{S} = \int_D z\,dx\,dy = \int_D 12\,dx\,dy = 12(\text{área de } D) = 300\pi.$$

Una segunda solución: como el disco es paralelo al plano xy, la normal unitaria exterior es $\mathbf{k}$. Entonces $\mathbf{n}(x, y, z) = \mathbf{k}$ y $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = z$. Sin embargo, $\|\mathbf{T}_x \times \mathbf{T}_y\| = \|\mathbf{k}\| = 1$, y como ya sabemos del análisis anterior al teorema 5, página 478, que

$$\int_S \mathbf{r}\cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}\,dS = \int_S z\,dS = \int_D 12\,dx\,dy = 300\pi.$$

Tercero, podemos resolver este problema usando directamente la fórmula (4), con $f(x, y) = 12$ y D el disco $x^2 + y^2 \leq 25$:

$$\int_S \mathbf{r}\cdot d\mathbf{S} \int_D (x\cdot 0 + y\cdot 0 + 12)\,dx\,dy = 12(\text{área de } D) = 300\pi. \qquad \blacktriangle$$

EJERCICIOS

1. Sea la temperatura de un punto en $\mathbf{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = 3x^2 + 3z^2$. Calcular el flujo de calor a través de la superficie $x^2 + z^2 = 2$, $0 \leq y \leq 2$, si $k = 1$.

2. Calcular el flujo de calor a través de la esfera unitaria S si $T(x, y, z) = x$ (ver el ejemplo 4). ¿Pueden interpretar físicamente su respuesta?

3. Sea S la superficie cerrada formada por el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$ y su base $x^2+y^2 \leq 1$ $z = 0$. Sea $\mathbf{E}$ el campo eléctrico definido por $\mathbf{E}(x, y, z) = 2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+2z\mathbf{k}$. Hallar el flujo eléctrico a través de S. (IDEA: Romper S en dos partes S_1 y S_2 y evaluar $\int_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ y $\int_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ por separado.)

4. Sea el campo de velocidad de un fluido descrito por $\mathbf{F} = \sqrt{y}\mathbf{j}$ (medido en metros por segundo). Calcular cuántos metros cúbicos de fluido por segundo están cruzando la superficie $x^2 + z^2 = y$, $0 \leq y \leq 1$, en la dirección en que y crece.

5. Evaluar $\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$, donde S es la superficie $x^2 + y^2 + 3z^2 = 1$, $z \leq 0$ y $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + zx^3y^2\mathbf{k}$. (Hacer que n, la normal unitaria, apunte hacia arriba.)

6. Evaluar $\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F} = (x^2 + y - 4)\mathbf{i} + 3xy\mathbf{j} + (2xz + z^2)\mathbf{k}$ y S es la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z \geq 0$. (Hacer que n, la normal unitaria, apunte hacia arriba.)

7. Calcular la integral $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde S es la superficie de la semibola $x^2+y^2+z^2 \leq 1$, $z \geq 0$ y $\mathbf{F} = (x + 3y^5)\mathbf{i} + (y + 10xz)\mathbf{j} + (z - xy)\mathbf{k}$. (Hacer que n, la normal unitaria, apunte hacia arriba.)

8. Están construyendo un restaurante en la ladera de una montaña. Los planos del arquitecto se muestran en la figura 7.6.11.

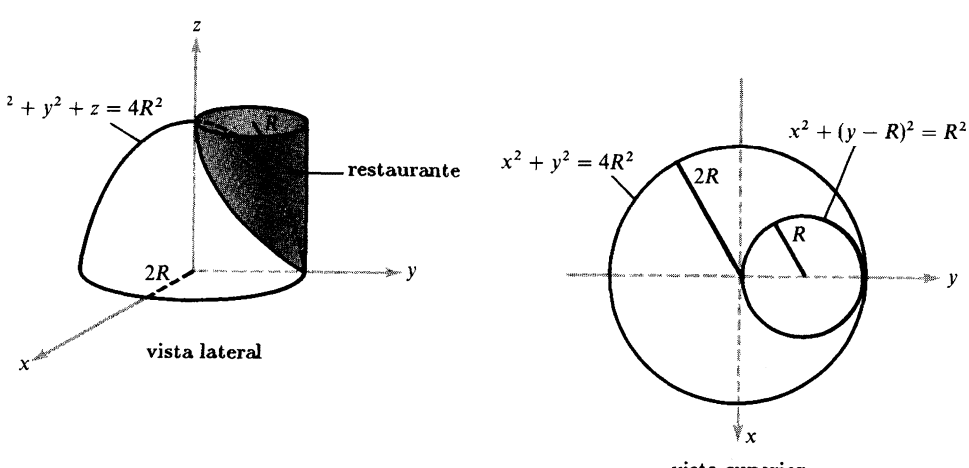


Figura 7.6.11 Planos del restaurante.

(a) La pared vertical curvada del restaurante será hecha de vidrio. ¿Cuál será el área de superficie de esta pared?

(b) El ingeniero consultor informa al planificador que para ser costeable, el volumen del interior debe exceder $\pi R^4/2$. ¿Para qué R satisface este requerimiento la estructura propuesta?

(c) Durante un típico día de verano los alrededores del restaurante están sujetos a un campo de temperatura dado por

$$T(x, y, z) = 3x^2 + (y - R)^2 + 16z^2.$$

Una densidad de flujo de calor $\mathbf{V} = -k\nabla T$ (k es una constante que depende del grado de aislamiento a usarse) a través de todos los lados del restaurante (incluyendo el techo y el contacto con la montaña) produce un flujo de calor. ¿Cuál es el flujo total de calor? (La respuesta dependerá de R y k.)

9. Hallar el flujo de $\mathbf{\Phi}(x, y, z) = 3xy^2\mathbf{i} + 3x^2y\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ afuera de la esfera unitaria.

10. Evaluar la integral de superficie $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dA$ donde $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i}+\mathbf{j}+z(x^2+y^2)^2\mathbf{k}$ y ∂S es la superficie del cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.

11. Sea S la superficie de la esfera unitaria. Sean $\mathbf{F}$ un campo vectorial y F_r su componente radial. Probar que

$$\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int_{\theta=1}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\pi} F_r \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta$$

¿Cuál es la fórmula correspondiente para funciones f con valores reales?

***12.** Probar el teorema del valor medio para integrales de superficie: si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial continuo, entonces

$$\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = [\mathbf{F}(Q)\cdot\mathbf{n}(Q)]A(S)$$

para algún punto $Q \in S$, donde $A(S)$ es el área de S. [IDEA: Probarlo primero para funciones reales, reduciendo el problema a una integral doble: mostrar que si $g \geq 0$, entonces

$$\int_D fg\,dA = f(Q)\int_D g\,dA$$

para algún $Q \in D$ (hacerlo considerando $(\int_D fg\,dA)/(\int_D g\,dA)$ y usando el teorema del valor intermedio).]

13. Obtener una fórmula como la del ejercicio 11 para la integración sobre la superficie de un cilindro.

14. Sea S una superficie en $\mathbf{R}^3$ que sea en realidad un subconjunto D del plano xy. Mostrar que la integral de una función escalar $f(x, y, z)$ sobre S se reduce a la integral doble de $f(x, y, z)$ sobre D. ¿En qué se convierte la integral de superficie de un campo vectorial sobre S? (Asegurarse de que la respuesta sea compatible con el ejemplo 6.)

15. Sea el campo de velocidad de un fluido, descrito por $\mathbf{F} = \mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ (medido en metros por segundo). Calcular cuántos metros cúbicos de fluido por segundo cruzan la superficie descrita por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$.

16. (a) Un fluido uniforme que fluye verticalmente hacia abajo (lluvia fuerte) se describe por el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, , z) = (0, 0, -1)$. Hallar el flujo total a través del cono $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $x^2 + y^2 \leq 1$.

(b) Debido al fuerte viento, la lluvia cae de lado, de manera que forma un ángulo de 45°, y se describe por $\mathbf{F}(x, y, z) = -(\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$. ¿Cuál es ahora el flujo a través del cono?

17. Para $a > 0$, $b > 0$ y $c > 0$, sea S la mitad superior del elipsoide

$$S = \left\{ (x, y, z) \middle| \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, z \geq 0 \right\}$$

con la orientación determinada por la normal hacia arriba. Calcular $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ donde $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3, 0, 0)$.

18. Si S es el hemisferio superior $\{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$ orientado por la normal que apunta hacia afuera de la esfera, calcular $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ para las partes (a) y (b).

(a) $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

(b) $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

(c) Para cada uno de los campos vectoriales anteriores, calcular $\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$ y $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ donde C es el círculo unitario en el plano xy recorrido en dirección contraria a la que giran las manecillas del reloj (según se ve desde el eje z positivo). (Nótese que C es la frontera de S. El fenómeno ilustrado aquí se estudiará con más detalle en el capítulo siguiente, usando el teorema de Stokes.)

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 7

1. Integrar $f(x, y, z) = xyz$ a lo largo de las trayectorias siguientes:

(a) $\sigma(t) = (e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t, 3), 0 \leq t \leq 2\pi$

(b) $\sigma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t), 0 \leq t \leq 2\pi$

(c) $\sigma(t) = \frac{3}{2}t^2\mathbf{i} + 2t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}, 0 \leq t \leq 1$

(d) $\sigma(t) = t\mathbf{i} + (1/\sqrt{2})t^2\mathbf{j} + \frac{1}{3}t^3\mathbf{k}, 0 \leq t \leq 1$

2. Calcular la integral de f a lo largo de la trayectoria σ en cada uno de los casos siguientes:

(a) $f(x, y, z) = x + y + yz; \sigma(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, t) 0 \leq t \leq 2\pi$

(b) $f(x, y, z) = x + cos^2 z; \sigma(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, t), 0 \leq t \leq 2\pi$

(c) $f(x, y, z) = x + y + z; \sigma(t) = (t, t^2, \frac{2}{3}t^3), 0 \leq t \leq 1$

3. Calcular cada una de las integrales de línea siguientes

(a) $\int_C (\operatorname{sen} \pi x)\, dy - (\cos \pi y)\, dz$, donde C es el triángulo cuyos vértices son $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$, en ese orden

(b) $\int_C (\operatorname{sen} z)\, dx + (\cos z)\, dy - (xy)^{1/3}\, dz$, donde C es la trayectoria parametrizada por $\sigma(\theta) = (\cos^3 \theta, \operatorname{sen}^3 \theta, \theta)$, $0 \leq \theta \leq 7\pi/2$

4. Si $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ es ortogonal a $\boldsymbol{\sigma}'(t)$ en cada punto de la curva $\mathbf{x} = \boldsymbol{\sigma}(t)$, ¿qué se puede decir acerca de $\int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$?

5. Hallar el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 - y^2)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$ al mover una partícula en sentido contrario al que giran las manecillas del reloj, alrededor del cuadrado con esquinas en $(0, 0)$, $(a, 0)$, (a, a) y $(0, a)$, $a > 0$.

6. Un anillo con la forma de la curva $x^2 + y^2 = a^2$ está formado por un alambre delgado que pesa $|x| + |y|$ gramos por unidad de longitud en (x, y). Hallar la masa del anillo.

7. Hallar una parametrización para cada una de las superficies siguientes;
(a) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y = 12$
(b) $2x^2 + y^2 + z^2 - 8x = 1$
(c) $4x^2 + 9y^2 - 2z^2 = 8$

8. Hallar el área de la superficie definida por $\mathbf{\Phi}\colon (u, v) \mapsto (x, y, z)$ donde

$$x = h(u, v) = u + v, \qquad y = g(u, v) = u, \qquad z = f(u, v) = v;$$

$0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 1$. Esbozar.

9. Escribir una fórmula para el área de superficie de $\mathbf{\Phi}\colon (r, \theta) \mapsto (x, y, z)$ donde

$$x = r\cos\theta, \qquad y = 2r\,\mathrm{sen}\,\theta, \qquad z = r;$$

$0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Esbozar.

10. Suponer que $z = f(x, y)$ y que $(\partial f/\partial x)^2 + (\partial f/\partial y)^2 = c$, $c > 0$. Mostrar que el área de la gráfica de f que está sobre una región D en el plano xy es $\sqrt{1 + c}$ multiplicado por el área de D.

11. Calcular la integral de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sobre la superficie del ejercicio de repaso 8.

12. Hallar $\int_S f\,dS$ en cada uno de los casos siguientes:
(a) $f(x, y, z) = x$; S es la parte del plano $x + y + z = 1$ en el octante positivo $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$
(b) $f(x, y, z) = x^2$; S es la parte del plano $x = z$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$
(c) $f(x, y, z) = x$; S es la parte del cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ con $0 \le z \le \sqrt{x^2 + y^2}$

13. Calcular la integral de $f(x, y, z) = xyz$ sobre el rectángulo con vértices $(1, 0, 1)$, $(2, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$ y $(2, 1, 0)$.

14. Calcular la integral de $x + y$ sobre la superficie de la esfera unitaria.

15. Calcular la integral de superficie de x sobre el triángulo con vértices $(1, 1, 1)$, $(2, 1, 1)$ y $(2, 0, 3)$.

16. Un paraboloide de revolución S está parametrizado por $\mathbf{\Phi}(u, v) = (u \cos v, u \operatorname{sen} v, u^2)$, $0 \leq u \leq 2$, $0 \leq v \leq 2\pi$.

(a) Hallar una ecuación en x, y y z que describa la superficie.

(b) ¿Cuál es el significado geométrico de los parámetros u y v?

(c) Hallar un vector unitario ortogonal a la superficie en $\mathbf{\Phi}(u, v)$.

(d) Hallar la ecuación para el plano tangente en $\mathbf{\Phi}(u_0, v_0) = (1, 1, 2)$ y expresar la respuesta de las dos maneras siguientes:

(i) parametrizada por u y v; y

(ii) en términos de x, y y z.

(e) Hallar el área de S.

17. Sea $f(x, y, z) = xe^y \cos \pi z$.

(a) Calcular $\mathbf{F} = \nabla f$.

(b) Evaluar $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ donde $\mathbf{c}(t) = (3\cos^4 t, 5 \operatorname{sen}^7 t, 0)$, $0 \leq t \leq \pi$.

18. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Evaluar $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ donde S es el hemisferio superior de la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

19. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Evaluar $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ donde $\mathbf{c}(t) = (e^t, t, t^2)$, $0 \leq t \leq 1$.

20. Sea $\mathbf{F} = \nabla f$ para una función escalar dada. Sea $\mathbf{c}(t)$ una curva cerrada, esto es, $\mathbf{c}(b) = \mathbf{c}(a)$. Mostrar que $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$.

21. Considerar la superficie $\mathbf{\Phi}(u, v) = (u^2 \cos v, u^2 \operatorname{sen} v, u)$. Calcular la normal unitaria en $u = 1$, $v = 0$. Calcular la ecuación del plano tangente en este punto.

22. Sea S la parte del cono $z^2 = x^2 + y^2$ con z entre 1 y 2 orientada por la normal apuntando hacia afuera del cono. Calcular $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ donde $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$.

23. Sea $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$ que representa el campo de velocidad de un fluido (velocidad medida en metros por segundo). Calcular cuántos metros cúbicos de fluido por segundo cruzan el plano xy a través del cuadrado $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

24. Mostrar que el área de superficie de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ que está arriba del rectángulo $[-a, a] \times [-a, a]$, donde $2a^2 < 1$, en el plano xy es

$$A = 2 \int_{-a}^{a} \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{a}{\sqrt{1 - x^2}} \right) dx.$$

25. Sean S una superficie y C una curva cerrada, frontera de S. Verificar la igualdad

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

si $\mathbf{F}$ es un campo gradiente (usar el ejercicio de repaso 20).

26. Calcular $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, -y)$ y S es la superficie cilíndrica definida por $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$, con normal apuntando hacia afuera del cilindro.

27. Sea S la parte del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ entre los planos $z = 0$ y $z = x + 3$. Calcular lo siguiente:

(a) $\int_S x^2\, dS$ (b) $\int_S y^2\, dS$ $\boxed{\text{(c)}}$ $\int_S z^2\, dS$

28. Sea Γ la curva de intersección del plano $z = ax + by$ con el cilindro $x^2 + y^2 = 1$. Hallar todos los valores de los números reales a y b tales que $a^2 + b^2 = 1$ y

$$\int_\Gamma y\, dx + (z - x)\, dy - y\, dz = 0.$$

29. Una hélice circular que está sobre el cilindro $x^2 + y^2 = R^2$, con pendiente p, se puede describir paramétricamente mediante

$$x = R\cos\theta, \qquad y = R\,\mathrm{sen}\,\theta, \qquad z = p\theta, \qquad \theta \geq 0.$$

Una partícula se desliza bajo la acción de la gravedad (que actúa paralelamente al eje z), sin fricción, a lo largo de la hélice. Si la partícula empieza a la altura $z_0 > 0$, entonces, cuando alcanza la altura z, $0 \leq z \leq z_0$, a lo largo de la hélice, su rapidez está dada por

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{(z_0 - z)2g},$$

donde s es la longitud de arco a lo largo de la hélice, g es la constante de gravedad y t es tiempo.

(a) Hallar la longitud de la parte de la hélice entre los planos $z = z_0$ y $z = z_1$, $0 \leq z_1 < z_0$.

(b) Calcular el tiempo T_0 que tarda la partícula en alcanzar el plano $z = 0$.

8 TEOREMAS INTEGRALES DEL ANÁLISIS VECTORIAL

Toda la teoría del movimiento de fluidos se ha reducido a la solución de fórmulas analíticas.

L. EULER

Ahora estamos preparados para vincular el cálculo diferencial vectorial (ver capítulo 3) y el cálculo integral vectorial (ver capítulo 7). Esto se hará mediante los importantes teoremas de Green, Gauss y Stokes. También señalaremos algunas aplicaciones físicas de estos teoremas al estudio de electricidad y magnetismo, hidrodinámica, conducción de calor y ecuaciones diferenciales (lo último mediante una breve introducción a la teoría del potencial).

NOTA HISTÓRICA

Muchos de estos teoremas básicos tuvieron su origen en la física. Por ejemplo, el teorema de Green, descubierto alrededor de 1828, surgió en relación con la teoría del potencial (ésta incluye potenciales eléctricos y gravitacionales). El teorema de Gauss —teorema de la divergencia— surgió en relación con la electroestática (en realidad debería darse crédito conjunto por este teorema al matemático ruso Ostrogradsky). El teorema de Stokes fue sugerido por primera vez en una carta a Stokes del físico Lord Kelvin en 1850 y fue usado por Stokes en el examen para el premio Smith en 1854.

8.1 TEOREMA DE GREEN

El teorema de Green relaciona una integral de línea a lo largo de una curva cerrada C en el plano $\mathbf{R}^2$, con una integral doble sobre la región encerrada por C.

Este importante resultado será generalizado en las siguientes secciones, a curvas y superficies en $\mathbf{R}^2$. Nos referiremos a integrales de línea alrededor de curvas que son fronteras de regiones elementales del tipo 1, 2 o 3 (ver la sección 5.3). Para entender las ideas de esta sección, quizá sea necesario referirse a la sección 7.2.

Una curva cerrada simple C que es la frontera de una región del tipo 1, 2 o 3 tiene dos orientaciones —en sentido contrario al que giran las manecillas del reloj (positiva) y en el sentido en que giran las manecillas del reloj (negativa)—. Denotamos C con la orientación en sentido contrario al que giran las manecillas del reloj por C^+, y con la orientación en el sentido en que giran las manecillas del reloj por C^- (figura 8.1.1).

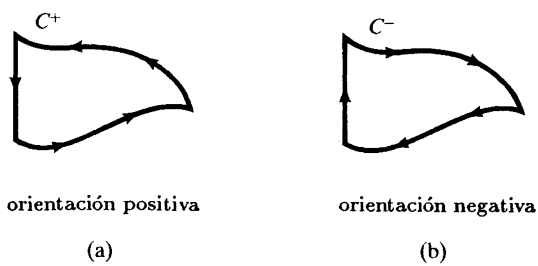


Figura 8.1.1 (a) Orientación positiva de C y (b) orientación negativa de C.

La frontera C de una región del tipo 1 se puede descomponer en partes superior e inferior, C_1 y C_2, y (si es posible) partes verticales izquierda y derecha, B_1 y B_2. Entonces escribimos, siguiendo la figura 8.1.2,

$$C^+ = C_1^+ + B_2^+ + C_2^- + B_1^-,$$

donde los signos de suma denotan las curvas orientadas en la dirección izquierda a derecha o de abajo hacia arriba, y los signos de resta denotan las curvas orientadas de derecha a izquierda o de arriba hacia abajo.

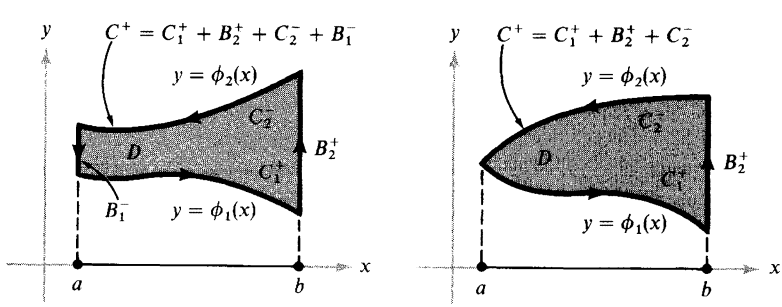


Figura 8.1.2 Dos ejemplos que muestran cómo romper la frontera orientada de manera positiva de una región D del tipo 1 en componentes orientadas.

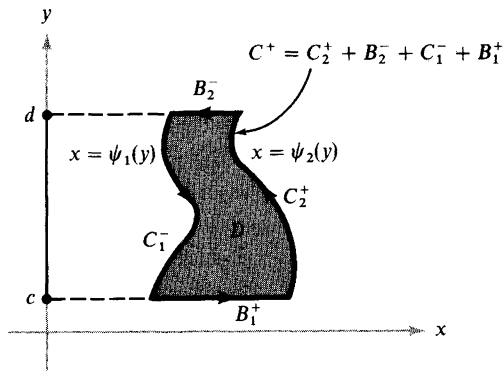


Figura 8.1.3 Ejemplo que muestra cómo romper la frontera orientada de manera positiva de una región D del tipo 2 en componentes orientadas.

Podemos hacer descomposiciones similares de la frontera de una región de tipo 2 en partes izquierda y derecha, y partes horizontal superior e inferior (si es posible) (figura 8.13).

De manera análoga, la frontera de una región del tipo 3 tiene dos descomposiciones —una en mitades superior e inferior, la otra en mitades izquierda y derecha.

Probaremos ahora dos lemas como preparación para el teorema de Green.

LEMA 1 *Sea D una región del tipo 1 y sea C su frontera. Suponer que $P: D \to \mathbf{R}$ es de clase C^1. Entonces*

$$\int_{C^+} P\,dx = -\int_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy.$$

(El lado izquierdo denota la integral de línea $\int_{C^+} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ donde $Q = 0$ y $R = 0$.)

DEMOSTRACIÓN Suponer que D está descrita por

$$a \le x \le b \qquad \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x).$$

Descomponemos C^+ escribiendo $C^+ = C_1^+ + B_2^+ + C_2^- + B_1^-$ (ver la figura 8.1.2). Por el teorema de Fubini podemos evaluar la integral doble como una integral iterada y después usar el teorema fundamental de cálculo:

$$\begin{aligned}\int_D \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy &= \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dy\,dx \\ &= \int_a^b [P(x,\phi_2(x)) - P(x,\phi_1(x))]\,dx.\end{aligned}$$

Sin embargo, como C_1^+ se puede parametrizar por $x \mapsto (x, \phi_1(x))$, $a \leq x \leq b$, y C_2^+ se puede parametrizar por $x \mapsto (x, \phi_2(x))$, $a \leq x \leq b$, tenemos

$$\int_a^b P(x, \phi_1(x))\, dx = \int_{C_1^+} P(x, y)\, dx$$

y

$$\int_a^b P(x, \phi_2(x))\, dx = \int_{C_2^+} P(x, y)\, dx.$$

Así, al invertir orientaciones,

$$-\int_a^b P(x, \phi_2(x))\, dx = \int_{C_2^-} P(x, y)\, dx.$$

Por lo tanto

$$\int_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = -\int_{C_1^+} P\, dx - \int_{C_2^-} P\, dx.$$

Como x es constante en B_2^+ y B_1^-, tenemos

$$\int_{B_2^+} P\, dx = 0 = \int_{B_1^-} P\, dx,$$

de modo que

$$\begin{aligned}\int_{C+} P\, dx &= \int_{C_1^+} P\, dx + \int_{B_2^+} P\, dx + \int_{C_2^-} P\, dx + \int_{B_1^-} P\, dx \\ &= \int_{C_1^+} P\, dx + \int_{C_2^-} P\, dx.\end{aligned}$$

Así,

$$\int_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = -\int_{C_1^+} P\, dx - \int_{C_2^-} P\, dx = -\int_{C+} P\, dx. \qquad \blacksquare$$

Probaremos ahora el lema análogo intercambiando los papeles de x y y.

LEMA 2 *Sea D una región del tipo 2 con frontera C. Entonces, si $Q: D \to \mathbf{R}$ es C^1,*

$$\int_{C+} Q\, dy = \int_D \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy.$$

El signo negativo no se presenta aquí, pues invertir el papel de x y y corresponde a un cambio de orientación para el plano.

DEMOSTRACIÓN Suponer que D está dada por

$$\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), \qquad c \leq y \leq d.$$

Usando la notación de la figura 8.1.3, tenemos

$$\int_{C^+} Q\,dy = \int_{C_1^- + B_1^+ + C_2^+ + B_2^-} Q\,dy = \int_{C_2^+} Q\,dy + \int_{C_1^-} Q\,dy,$$

donde C_2^+ es la curva parametrizada por $y \mapsto (\psi_2(y), y)$, $c \leq y \leq d$, y C_1^+ es la curva $y \mapsto (\psi_1(y), y)$, $c \leq y \leq d$. Aplicando el teorema de Fubini y el teorema fundamental del cálculo, obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy &= \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy \\
&= \int_c^d [Q(\psi_2(y), y) - Q(\psi_1(y), y)]\,dy \\
&= \int_{C_2^+} Q\,dy - \int_{C_1^+} Q\,dy = \int_{C_2^+} Q\,dy + \int_{C_1^-} Q\,dy \\
&= \int_{C^+} Q\,dy. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Los lemas 1 y 2, en conjunto, prueban el siguiente teorema importante.

TEOREMA 1: TEOREMA DE GREEN *Sea D una región del tipo 3 y sea C su frontera. Suponer que $P: D \to \mathbf{R}$ y $Q: D \to \mathbf{R}$ son de clase C^1. Entonces*

$$\int_{C^+} P\,dx + Q\,dy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy.$$

La orientación correcta (positiva) para las curvas frontera de una región D se puede recordar mediante este recurso: *si caminan a lo largo de la curva C con la orientación correcta, la región D estará a su izquierda* (ver la figura 8.1.4).

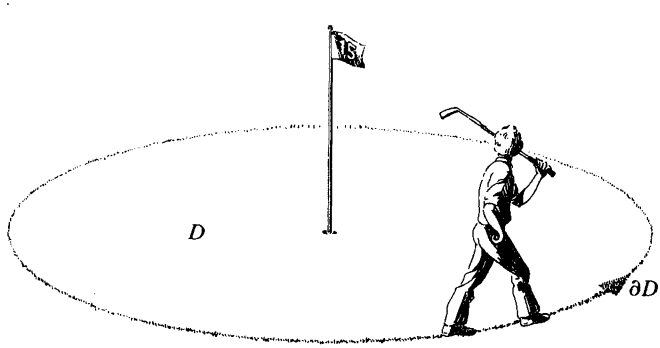
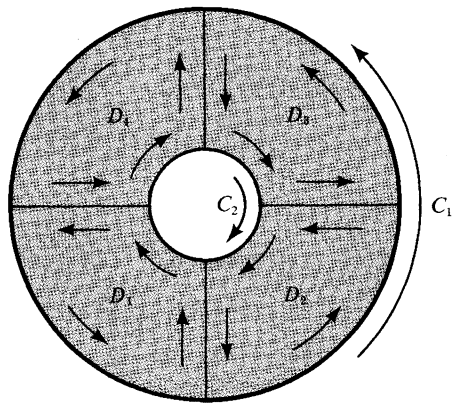


Figura 8.1.4 Orientación correcta para la frontera de una región D.

El teorema de Green se aplica en realidad a cualquier región "decente" en $\mathbf{R}^2$. En el ejercicio 8 indicamos una generalización del teorema de Green para regiones que no son del tipo 3, pero que se pueden descomponer en partes, cada una del



$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$

Figura 8.1.5 El teorema de Green se aplica a $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$.

tipo 3. Se muestra un ejemplo en la figura 8.1.5. La región D es un anillo; su frontera está formada por dos curvas $C = C_1 + C_2$ con las orientaciones indicadas. (Notar que para la región interior la orientación correcta es *en el sentido en que giran las manecillas del reloj:* ¡el recurso de la figura 8.1.4 aún sirve para recordar la orientación!) Si se aplica el teorema 1 a cada una de las regiones D_1, D_2, D_3 y D_4 y se suman los resultados, se obtendrá la igualdad del teorema de Green para D y su curva frontera C.

Usemos la notación ∂D para la curva orientada C^+, esto es, la curva frontera de D orientada en el sentido correcto, según se describió en el recurso de la figura 8.1.4. Entonces podemos escribir el teorema de Green como

$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy.$$

El teorema de Green es muy útil, pues relaciona una integral de línea alrededor de la frontera de una región, con una integral de área sobre el interior de la región, y en muchos casos es más fácil evaluar la integral de línea que la integral de área. Por ejemplo, si sabemos que P se anula en la frontera, podemos concluir de manera inmediata que $\int_D (\partial P/\partial y)\,dx\,dy = 0$ aunque $\partial P/\partial y$ no necesariamente se anule en el interior. (¿Pueden construir dicha P en el cuadrado unitario?)

EJEMPLO 1 *Verificar el teorema de Green para $P(x,y) = x$ y $Q(x,y) = xy$ donde D es el disco unitario $x^2 + y^2 \leq 1$.*

SOLUCIÓN Lo hacemos evaluando directamente ambos lados en el teorema de Green. La frontera de D es el círculo unitario parametrizado por $x = \cos t$,

$y = \operatorname{sen} t$, $0 \le t \le 2\pi$, de modo que

$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \int_0^{2\pi} [(\cos t)(-\operatorname{sen} t) + \cos t \operatorname{sen} t \cos t]\,dt$$
$$= \left[\frac{\cos^2 t}{2}\right]_0^{2\pi} + \left[-\frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{2\pi} = 0.$$

Por otro lado,

$$\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_D y\,dx\,dy.$$

lo cual es cero por simetría. Así, se verifica el teorema de Green en este caso. ▲

Podemos usar el teorema de Green para obtener una fórmula para el área de una región acotada por una curva cerrada simple (ver también el ejercicio 20).

TEOREMA 2 *Si C es una curva cerrada simple que acota una región para la cual se aplica el teorema de Green, entonces el área de la región D acotada por $C = \partial D$ es*

$$A = \frac{1}{2}\int_{\partial D} x\,dy - y\,dx.$$

DEMOSTRACIÓN Sean $P(x,y) = -y$ y $Q(x,y) = x$; entonces, por el teorema de Green tenemos

$$\frac{1}{2}\int_{\partial D} x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_D \left[\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y}\right] dx\,dy$$
$$= \frac{1}{2}\int_D [1+1]\,dx\,dy = \int_D dx\,dy = A. \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 2 *Calcular el área de la región encerrada por la hipocicloide definida por $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, usando la parametrización*

$$x = a\cos^3\theta, \qquad y = a\operatorname{sen}^3\theta, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

(ver la figura 8.1.6).

SOLUCIÓN

$$A = \frac{1}{2}\int_{\partial D} x\,dy - y\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [(a\cos^3\theta)(3a\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta) - (a\operatorname{sen}^3\theta)(-3a\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta)]\,d\theta$$
$$= \frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}^2\theta\cos^4\theta + \cos^2\theta\operatorname{sen}^4\theta)\,d\theta = \frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta\,d\theta$$
$$= \frac{3}{8}a^2\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 2\theta\,d\theta = \frac{3}{8}a^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-\cos 4\theta}{2}\right)d\theta$$
$$= \frac{3}{16}a^2\int_0^{2\pi} d\theta - \frac{3}{16}a^2\int_0^{2\pi}\cos 4\theta\,d\theta = \frac{3}{8}\pi a^2. \qquad \blacksquare$$

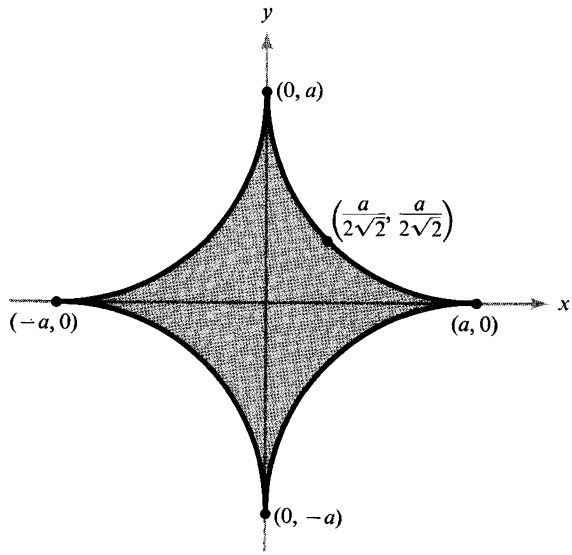


Figura 8.1.6 La hipocicloide $x = a\cos^3\theta$, $y = a\,\mathrm{sen}^3\,\theta$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

La forma del enunciado del teorema de Green contenido en el teorema 1 no es la que generalizaremos en las secciones siguientes. Podemos reescribir con elegancia el teorema, en lenguaje de campos vectoriales.

TEOREMA 3: FORMA VECTORIAL DEL TEOREMA DE GREEN *Sea $D \subset \mathbf{R}^2$ una región de tipo 3 y sea ∂D su frontera (orientada en sentido contrario al que giran las manecillas del reloj). Sea $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ un campo vectorial C^1 en D. Entonces*

$$\int_{\partial D} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_D (\mathrm{rot}\,\mathbf{F})\cdot\mathbf{k}\,dA = \int_D (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{k}\,dA$$

(ver figura 8.1.7).

Este resultado se sigue fácilmente del teorema 1 después de interpretar los diferentes símbolos. Pedimos al lector proporcionar los detalles en el ejercicio 14.

EJEMPLO 3 *Sea $\mathbf{F} = (xy^2, y + x)$. Integrar $(\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{k}$ sobre la región en el primer cuadrante acotado por las curvas $y = x^2$ y $y = x$.*

SOLUCIÓN *Método 1.* Aquí calculamos

$$\nabla\times\mathbf{F} = \left(0, 0, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) = (1 - 2xy)\mathbf{k}.$$

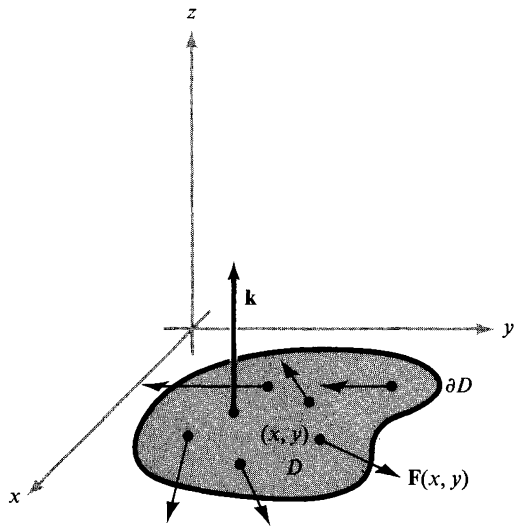


Figura 8.1.7 Forma vectorial del teorema de Green.

Así, $(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = 1 - 2xy$. Esto se puede integrar sobre la región dada D (ver la figura 8.1.8) usando una integral iterada como sigue:

$$\begin{aligned}\iint_D (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\, dx\, dy &= \int_0^1 \int_{x^2}^{x} (1 - 2xy)\, dy\, dx \\ &= \int_0^1 [y - xy^2]_{x^2}^{x}\, dx \\ &= \int_0^1 [x - x^3 - x^2 + x^5]\, dx = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{12}.\end{aligned}$$

Método 2. Aquí usamos el teorema 3 para obtener

$$\iint_D (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\, dx\, dy = \int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

La integral de línea de $\mathbf{F}$ a lo largo de la curva $y = x$ de izquierda a derecha es

$$\int_0^1 F_1\, dx + F_2\, dy = \int_0^1 (x^3 + 2x)\, dx = \tfrac{1}{4} + 1 = \tfrac{5}{4}.$$

A lo largo de la curva $y = x^2$ obtenemos

$$\int_0^1 F_1\, dx + F_2\, dy = \int_0^1 x^5\, dx + (x + x^2)(2x\, dx) = \tfrac{1}{6} + \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{2} = \tfrac{4}{3}.$$

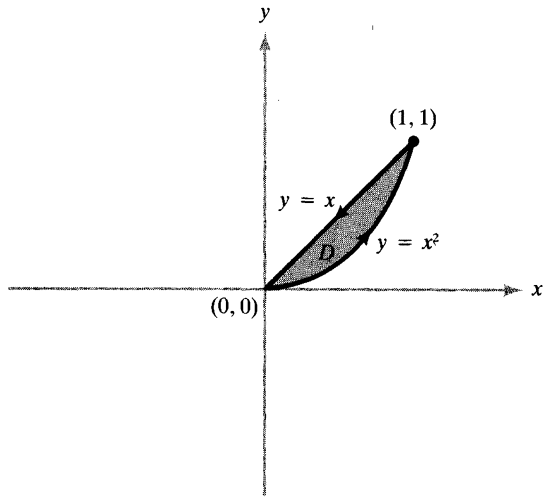


Figura 8.1.8 Región acotada por las curvas $y = x^2$ y $y = x$.

Así, recordando que la integral a lo largo de $y = x$ se va a tomar de derecha a izquierda, como en la figura 8.1.8,

$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \tfrac{4}{3} - \tfrac{5}{4} = \tfrac{1}{12}. \qquad \blacktriangle$$

Hay todavía otra forma del teorema de Green que puede generalizarse a $\mathbf{R}^3$.

TEOREMA 4: TEOREMA DE LA DIVERGENCIA EN EL PLANO *Sea $D \subset \mathbf{R}^2$ una región del tipo 3 y sea ∂D su frontera. Denotemos por $\mathbf{n}$ la normal unitaria exterior a ∂D. Si $\boldsymbol{\sigma}\colon [a,b] \to \mathbf{R}^2$, $t \mapsto \boldsymbol{\sigma}(t) = (x(t), y(t))$ es una parametrización orientada de manera positiva de ∂D, $\mathbf{n}$ está dado por*

$$\mathbf{n} = \frac{(y'(t), -x'(t))}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}},$$

(ver la figura 8.1.9). Sea $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ un campo vectorial C^1 en D. Entonces

$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \int_D \operatorname{div} \mathbf{F}\, dA.$$

DEMOSTRACIÓN Como $\boldsymbol{\sigma}'(t) = (x'(t), y'(t))$ es tangente a ∂D, resulta claro que $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}' = 0$, de modo que $\mathbf{n}$ es normal a la frontera. El signo de $\mathbf{n}$ se escoge para hacer que corresponda a la dirección *exterior* (en lugar de la interior). Por la

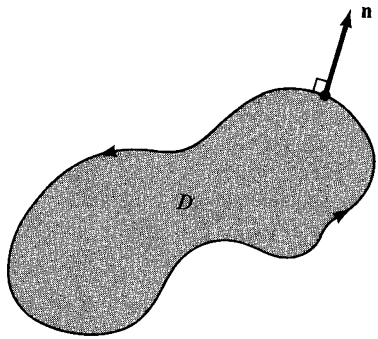


Figura 8.1.9 n es la normal unitaria exterior a ∂D.

definición de integral de trayectoria (ver la sección 7.2),

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS &= \int_a^b \frac{P(x(t),y(t))y'(t)-Q(x(t),y(t))x'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt\\ &= \int_a^b [P(x(t),y(t))y'(t)-Q(x(t),y(t))x'(t)]\,dt\\ &= \int_{\partial D} P\,dy - Q\,dx.\end{aligned}$$

Por el teorema de Green, esto es igual a

$$\int_D \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_D \operatorname{div}\mathbf{F}\,dA. \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 4 *Sea* $\mathbf{F} = y^3\mathbf{i} + x^5\mathbf{j}$. *Calcular la integral de la componente normal de* $\mathbf{F}$ *alrededor del cuadrado unitario.*

SOLUCIÓN Esto se puede hacer usando el teorema de la divergencia. En efecto,

$$\int_{\partial D} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = \int_D \operatorname{div}\mathbf{F}\,dA.$$

Pero $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$, de modo que la integral es cero. ▲

EJERCICIOS

1. Evaluar $\int_C y\,dx - x\,dy$ donde C es la frontera del cuadrado $[-1,1]\times[-1,1]$ orientado en dirección contraria a la que giran las manecillas del reloj (usar el teorema de Green).

2. Hallar el área del disco D de radio R usando el teorema de Green.

3. Verificar el teorema de Green para el disco D con centro $(0,0)$ y radio R y las funciones:

(a) $P(x,y) = xy^2, Q(x,y) = -yx^2$
(b) $P(x,y) = x+y, Q(x,y) = y$
(c) $P(x,y) = xy = Q(x,y)$
(d) $P(x,y) = 2y, Q(x,y) = x$

4. Usando el teorema de la divergencia, mostrar que $\int_{\partial D} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, ds = 0$, donde $\mathbf{F}(x,y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ y D es el disco unitario. Verificar esto directamente.

5. Hallar el área acotada por un arco de la cicloide $x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta)$, $y = a(1-\cos\theta)$, $a > 0$, $0 \le \theta \le 2\pi$ y el eje x (usar el teorema de Green).

6. Bajo las condiciones del teorema de Green, probar que

(a) $$\int_{\partial D} PQ\,dx + PQ\,dy = \int_D \left[Q\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) + P\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right)\right] dx\,dy$$

(b) $$\int_{\partial D} \left(Q\frac{\partial P}{\partial x} - P\frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx + \left(P\frac{\partial Q}{\partial y} - Q\frac{\partial P}{\partial y}\right) dy = 2\int_D \left(P\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial y} - Q\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}\right) dx\,dy$$

7. Evaluar $\int_C (2x^3 - y^3)\,dx + (x^3 + y^3)\,dy$, donde C es el círculo unitario, y verificar el teorema de Green para este caso.

8. Probar la siguiente generalización del teorema de Green: Sea D una región en el plano xy cuya frontera consta de un número finito de curvas cerradas simples orientadas. Suponer que por medio de un número finito de segmentos paralelos a los ejes coordenados, D puede descomponerse en un número finito de regiones D_i de tipo 3 con la frontera de cada D_i orientada en sentido contrario al que giran las manecillas del reloj (ver la figura 8.1.5). Entonces, si P y Q son de clase C^1 en D,

$$\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy,$$

donde ∂D es la frontera orientada de D. (IDEA: Aplicar el teorema de Green a cada D_i.)

9. Verificar el teorema de Green para el integrando del ejercicio 7 ($P = 2x^3 - y^3$, $Q = x^3 + y^3$) y la región anular D descrita por $a \le x^2 + y^2 \le b$, con fronteras orientadas como en la figura 8.1.5.

10. Sea D una región para la cual se cumple el teorema de Green. Suponer que f es armónica; esto es,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

en D. Probar que

$$\int_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial y}\,dx - \frac{\partial f}{\partial x}\,dy = 0.$$

11. (a) Verificar el teorema de la divergencia para $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ y D el disco unitario $x^2 + y^2 \leq 1$.

(b) Evaluar la integral de la componente normal de $2xy\mathbf{i} - y^2\mathbf{j}$ alrededor de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

12. Sea $P(x, y) = -y/(x^2 + y^2)$, $Q(x, y) = x/(x^2 + y^2)$. Suponiendo que D sea el disco unitario, investigar por qué falla el teorema de Green para esta P y Q.

13. Usar el teorema de Green para evaluar $\int_{C^+}(y^2 + x^3)\,dx + x^4\,dy$, donde C^+ es el perímetro de $[0, 1] \times [0, 1]$ en dirección contraria a la que giran las manecillas del reloj.

14. Verificar el teorema 3.

15. Usar el teorema 2 para calcular el área dentro de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

16. Usar el teorema 2 para recobrar la fórmula $A = \frac{1}{2}\int_a^b r^2\,d\theta$ para una región en coordenadas polares.

17. Esbozar la demostración del teorema de Green para la región mostrada en la figura 8.1.10.

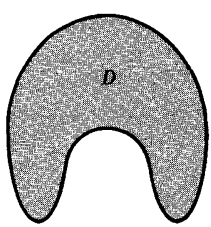


Figura 8.1.10 Probar el teorema de Green para esta región.

18. Probar la identidad

$$\int_{\partial D} \phi\,\nabla\phi \cdot \mathbf{n}\,ds = \int_D (\phi\nabla^2\phi + \nabla\phi \cdot \nabla\phi)\,dA.$$

19. Usar el teorema de Green para hallar el área de un lazo de la rosa de cuatro hojas $r = 3\,\mathrm{sen}\,2\theta$. (IDEA: $x\,dy - y\,dx = r^2\,d\theta$.)

20. Mostrar que si C es una curva cerrada simple que acota una región en la cual se aplica el teorema de Green, entonces el área de la región D acotada por C es

$$A = \int_{\partial D} x\,dy = -\int_{\partial D} y\,dx.$$

Mostrar cómo esto implica el teorema 2.

Los ejercicios 21 al 29 ilustran la aplicación del teorema de Green a ecuaciones diferenciales parciales. Se ocupan de manera particular de las soluciones a la ecuación de Laplace, esto es, de funciones armónicas. (Ver la sección 8.5 para resultados adicionales). Para estos ejercicios, sea D una región abierta en $\mathbf{R}^2$, con frontera ∂D. Sea $u\colon D \cup \partial D \to \mathbf{R}$ una función continua de clase C^2 en D. Suponer que $\mathbf{p} \in D$ y que los discos cerrados $B_\rho = B_\rho(\mathbf{p})$ de radio ρ con centro en $\mathbf{p}$ están contenidos en D para $0 < \rho \leq R$. Definir $I(\rho)$ por

$$I(\rho) = \frac{1}{\rho} \int_{\partial B_\rho} u\, ds.$$

***21.** Mostrar que $\lim\limits_{\rho \to 0} I(\rho) = 2\pi u(\mathbf{p})$.

***22.** Denotemos por $\mathbf{n}$ la normal unitaria exterior a ∂B_ρ y $\partial u/\partial n = \nabla u \cdot \mathbf{n}$. Mostrar que

$$\int_{\partial B_\rho} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = \iint_{B_\rho} \nabla^2 u\, dA.$$

***23.** Mostrar que $I'(\rho) = \dfrac{1}{\rho} \displaystyle\iint_{B_\rho} \nabla^2 u\, dA$.

***24.** Suponer que u satisface la ecuación de Laplace: $\nabla^2 u = 0$ en D. Usar los ejercicios anteriores para mostrar que

$$u(\mathbf{p}) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B_R} u\, ds.$$

(Esto expresa el hecho de que el valor de una función armónica en un punto es el promedio de sus valores en la circunferencia de cualquier disco con centro en él.)

***25.** Usar el ejercicio 24 para mostrar que si u es armónica (i.e., si $\nabla^2 u = 0$), entonces $u(\mathbf{p})$ se puede expresar como una integral de área

$$u(\mathbf{p}) = \frac{1}{\pi R^2} \iint_{B_R} u\, dA.$$

***26.** Suponer que u es una función armónica definida en D (i.e., $\nabla^2 u = 0$ en D) y que u tiene una máximo (o mínimo) local en un punto $\mathbf{p}$ en D.

(a) Mostrar que u debe ser constante en algún disco con centro en $\mathbf{p}$. (IDEA: Usar los resultados del ejercicio 25).

(b) Suponer que D es arco-conexa (i.e., para cualesquiera dos puntos $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ en D, existe una trayectoria continua $\boldsymbol{\sigma}\colon [0,1] \to D$ tal que $\boldsymbol{\sigma}(0) = \mathbf{p}$ y $\boldsymbol{\sigma}(1) = \mathbf{q}$), y que el máximo o mínimo en $\mathbf{p}$ es absoluto; así, $u(\mathbf{q}) \leq u(\mathbf{p})$ o $u(\mathbf{q}) \geq u(\mathbf{p})$ para todo $\mathbf{q}$ en D. Mostrar que u debe ser constante en D.

(El resultado en este ejercicio se llama *principio fuerte del máximo* o *mínimo* para funciones armónicas. Comparar esto con los ejercicio 34 al 38 de la sección 4.2.)

***27.** Se dice que una función es *subarmónica* en D si $\nabla^2 u \geq 0$ donde sea, en D. Se dice que es *supraarmónica* si $\nabla^2 u \leq 0$.

(a) Deducir un principio fuerte del máximo para funciones subarmónicas.

(b) Deducir un principio fuerte del mínimo para funciones supraarmónicas.

***28.** Suponer que D es el disco $\{(x,y)|x^2+y^2<1\}$ y C es el círculo $\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$. En la sección 8.5 mostraremos que si f es una función con valores reales continua en C, entonces existe una función continua u en $D \cup C$ que coincide con f en C y es armónica en D. Esto es, f tiene una extensión armónica al disco. Suponiendo esto, mostrar lo siguiente:

(a) Si q es una función continua no constante en $D \cup C$ que es subarmónica (pero no armónica) en D, entonces existe una función continua u en $D \cup C$ que es armónica en D tal que u coincide con q en C y $q < u$ donde sea, en D.

(b) La misma afirmación se cumple si se reemplaza "subarmónica" con "supraarmónica" y "$q < u$" por "$q > u$".

***29.** Sea D como en el ejercicio 28. Sea $f: D \to \mathbf{R}$ continua. Mostrar que una solución a la ecuación $\nabla^2 u = 0$ que satisface $u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in \partial D$ es única.

***30.** Usar el teorema de Green para probar la fórmula de cambio de variables en el siguiente caso especial:

$$\int_D dx\,dy = \int_{D^*} \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\,dv$$

para una transformación $(u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v))$.

8.2 TEOREMA DE STOKES

El teorema de Stokes relaciona la integral de línea de un campo vectorial alrededor de una curva cerrada simple C en $\mathbf{R}^3$, con la integral sobre una superficie S de la cual C es la frontera. En este aspecto, se parece mucho al teorema de Green.

Comencemos recordando algunos hechos del capítulo 7. Considerar una superficie S que sea la gráfica de una función $f(x,y)$, de modo que S está parametrizada por

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u,v) = f(x,y) \end{cases}$$

para (u,v) en algún dominio D. La integral de una función vectorial $\mathbf{F}$ sobre S se desarrolló en la sección 7.6 como

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_D \left[F_1 \left(-\frac{\partial z}{\partial x} \right) + F_2 \left(-\frac{\partial z}{\partial y} \right) + F_3 \right] dx\,dy, \tag{1}$$

donde $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$.

En la sección 8.1 supusimos que las regiones D consideradas eran del tipo 3; esto fue un requerimiento esencial para la demostración del teorema de Green, pero notamos que el teorema es válido para una clase más amplia de regiones. En esta sección supondremos que D es una región cuya frontera es una curva cerrada simple a la cual se puede aplicar el teorema de Green. Según se explicó en la sección 8.1, para aplicar el teorema de Green se necesita escoger una orientación de la frontera de D; pues bien, la orientación que haga que se cumpla el teorema se llamará *positiva*. Recordar que si D es del tipo 3, entonces la orientación positiva es en sentido contrario al que giran las manecillas del reloj.

Suponer que $\boldsymbol{\sigma}: [a,b] \to \mathbf{R}^2$, $\boldsymbol{\sigma}(t) = (x(t), y(t))$ es una parametrización de ∂D en dirección positiva. Definimos entonces *curva frontera* ∂S como la curva cerrada simple orientada que es la imagen de la función $\boldsymbol{\eta}: t \mapsto (x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$ con la orientación inducida por $\boldsymbol{\eta}$ (figura 8.2.1).

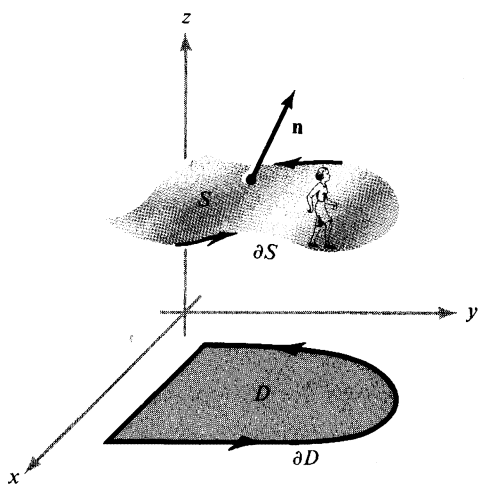


Figura 8.2.1 Orientación inducida en ∂S: Conforme se camina alrededor de la frontera, la superficie debe estar a la izquierda.

Para recordar esta orientación (esto es, la dirección positiva) de ∂S, imaginar un "observador" caminando a lo largo de la frontera de la superficie donde la normal apunta para el mismo lado que su cabeza; se estará moviendo en la dirección positiva si la superficie está a su izquierda. Esta orientación de ∂S suele llamarse *orientación inducida por una normal* $\mathbf{n}$ *"hacia arriba"*.

Ahora estamos preparados para enunciar y probar uno de las resultados fundamentales de esta sección.

TEOREMA 5: TEOREMA DE STOKES PARA GRÁFICAS *Sea S la superficie orientada definida por una función C^2, $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$, y sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial C^1 en S. Entonces, si ∂S denota la curva frontera orientada de S según se definió*

antes, tenemos

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Recordar que $\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ es la integral alrededor de ∂S de la componente tangencial de $\mathbf{F}$, mientras que $\int_S \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S}$ es la integral sobre S de $\mathbf{G} \cdot \mathbf{n}$, la componente normal de $\mathbf{G}$ (ver las secciones 7.2 y 7.6). Así, el teorema de Stokes dice que la integral de *la componente normal del rotacional de un campo vectorial* $\mathbf{F}$ *sobre una superficie* S, *es igual a la integral de la componente tangencial de* $\mathbf{F}$ *alrededor de la frontera* ∂S.

DEMOSTRACIÓN Si $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$, entonces

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

Por lo tanto, usamos la fórmula (1) para escribir

$$\begin{aligned}\int_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_D \Bigg[&\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right) \\ &+ \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\left(-\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\Bigg] dA. \qquad (2)\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\eta} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\eta} F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz,$$

donde $\eta\colon [a, b] \to \mathbf{R}^3$, $\eta(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$ es la parametrización que preserva la orientación de la curva cerrada simple orientada ∂S estudiada anteriormente. Así,

$$\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \left(F_1 \frac{dx}{dt} + F_2 \frac{dy}{dt} + F_3 \frac{dz}{dt}\right) dt. \qquad (3)$$

Pero, por la regla de la cadena

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (3), obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_a^b \left[\left(F_1 + F_3 \frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{dx}{dt} + \left(F_2 + F_3 \frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{dy}{dt}\right] dt \\ &= \int_{\sigma} \left(F_1 + F_3 \frac{\partial z}{\partial x}\right) dx + \left(F_2 + F_3 \frac{\partial z}{\partial y}\right) dy \\ &= \int_{\partial D} \left(F_1 + F_3 \frac{\partial z}{\partial x}\right) dx + \left(F_2 + F_3 \frac{\partial z}{\partial y}\right) dy. \qquad (4)\end{aligned}$$

Aplicando el teorema de Green a la ecuación (4) se obtiene (suponemos que el teorema de Green se aplica a D)

$$\int_D \left[\frac{\partial(F_2 + F_3\partial z/\partial y)}{\partial x} - \frac{\partial(F_1 + F_3\partial z/\partial x)}{\partial y}\right] dA.$$

Usamos ahora la regla de la cadena, recordando que F_1, F_2 y F_3 son funciones de x, y y z, y que z es función de x y y, para obtener

$$\int_D \left[\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + F_3\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)\right.$$
$$\left. - \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} + F_3\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right)\right] dA.$$

Los últimos dos términos en cada paréntesis se cancelan entre sí, y podemos rearreglar los términos para obtener la integral de la ecuación (2), lo cual completa la demostración. ■

EJEMPLO 1 *Sea* $\mathbf{F} = ye^z\mathbf{i} + xe^z\mathbf{j} + xye^z\mathbf{k}$. *Mostrar que la integral de* $\mathbf{F}$ *alrededor de una curva cerrada simple orientada* C *que es la frontera de una superficie* S *es* 0. *(Suponer que* S *es la gráfica de una función, como en el teorema 5.)*

SOLUCIÓN En efecto, por el teorema de Stokes, $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$. Pero calculamos

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ ye^z & xe^z & xye^z \end{vmatrix} = \mathbf{0}.$$

de modo que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$. (De manera alternativa, podemos observar que $\mathbf{F} = \nabla(xye^z)$, de modo que su integral alrededor de una curva cerrada es cero.) ▲

EJEMPLO 2 *Usar el teorema de Stokes para evaluar la integral de línea*

$$\int_C -y^3\,dx + x^3\,dy - z^3\,dz,$$

donde C *es la intersección del cilindro* $x^2 + y^2 = 1$ *y el plano* $x + y + z = 1$, *y la orientación de* C *corresponde al movimiento en sentido contrario al que giran las manecillas del reloj, en el plano* xy.

SOLUCIÓN La curva C acota la superficie S definida por $z = 1 - x - y = f(x, y)$ para (x, y) en $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ (figura 8.2.2). Hacemos $\mathbf{F} = -y^3\mathbf{i} + x^3\mathbf{j} -$

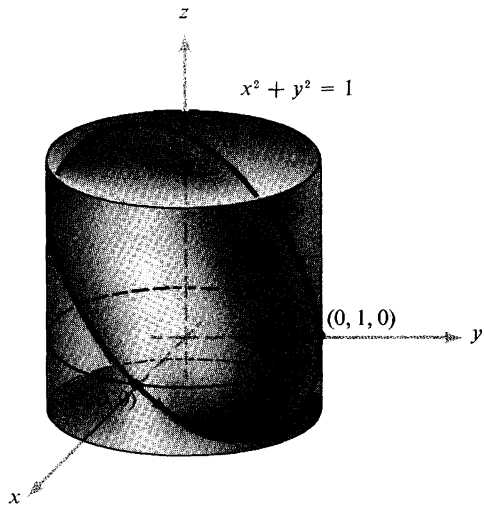


Figura 8.2.2 La curva C es la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $x + y + z = 1$.

$z^3\mathbf{k}$, que tiene rotacional $\nabla \times \mathbf{F} = (3x^2 + 3y^2)\mathbf{k}$. Entonces, por el teorema de Stokes, la integral de línea es igual a la integral de superficie

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}.$$

Pero $\nabla \times \mathbf{F}$ tiene sólo componente $\mathbf{k}$. Así, por la fórmula (1), tenemos

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_D (3x^2 + 3y^2)\, dx\, dy.$$

Esta integral se puede evaluar cambiando a coordenadas polares. Al hacerlo, obtenemos

$$3\int_D (x^2 + y^2)\, dx\, dy = 3\int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 \cdot r\, d\theta\, dr = 6\pi \int_0^1 r^3\, dr = \frac{6\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}.$$

Verifiquemos este resultado evaluando directamente la integral de línea

$$\int_C -y^3\, dx + x^3\, dy - z^3\, dz.$$

Podemos parametrizar la curva ∂D por las ecuaciones

$$x = \cos t, \qquad y = \operatorname{sen} t, \qquad z = 0, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Entonces la curva C está parametrizada por las ecuaciones

$$x = \cos t, \qquad y = \operatorname{sen} t, \qquad z = 1 - \operatorname{sen} t - \cos t, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Así,

$$\begin{aligned}
&\int_C -y^3\,dx + x^3\,dy - z^3\,dz \\
&\quad = \int_0^{2\pi} [(-\operatorname{sen}^3 t)(-\operatorname{sen} t) + (\cos^3 t)(\cos t) \\
&\qquad - (1 - \operatorname{sen} t - \cos t)^3(-\cos t + \operatorname{sen} t)]\,dt \\
&\quad = \int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \operatorname{sen}^4 t)\,dt - \int_0^{2\pi} (1 - \operatorname{sen} t - \cos t)^3(-\cos t + \operatorname{sen} t)\,dt.
\end{aligned}$$

El segundo integrando es de la forma $u^3\,du$, donde $u = 1 - \operatorname{sen} t - \cos t$, y así, la integral es igual a

$$\tfrac{1}{4}[(1 - \operatorname{sen} t - \cos t)^4]_0^{2\pi} = 0.$$

Entonces nos quedamos con $\int_0^{2\pi}(\cos^4 t + \operatorname{sen}^4 t)\,dt$.

Esto se puede evaluar usando las fórmulas (18) y (19) de la tabla de integrales. También podemos proceder como sigue. Usando las identidades trigonométricas

$$\operatorname{sen}^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}, \qquad \cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2},$$

reducimos la integral anterior a

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + \cos^2 2t)\,dt = \pi + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2 2t\,dt.$$

De nuevo usando el hecho de que

$$\cos^2 2t = \frac{1 + \cos 4t}{2},$$

hallamos que

$$\begin{aligned}
\pi + \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} (1 + \cos 4t)\,dt &= \pi + \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} dt + \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \cos 4t\,dt \\
&= \pi + \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{3\pi}{2}. \qquad \blacktriangle
\end{aligned}$$

Para simplificar la demostración del anterior teorema de Stokes, supusimos que la superficie S podría describirse como la gráfica de una función $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, donde D es alguna región a la que se aplica el teorema de Green. Sin embargo, sin mucho más esfuerzo podemos obtener un teorema más general para superficies parametrizadas orientadas S. La dificultad principal radica en la definición de ∂S.

Suponer que $\mathbf{\Phi}: D \to \mathbf{R}^3$ es una parametrización de una superficie S y $\boldsymbol{\sigma}(t) = (u(t), v(t))$ es una parametrización de ∂D. Podríamos sentirnos tentados a definir ∂S como la curva parametrizada por $t \mapsto \boldsymbol{\eta}(t) = \mathbf{\Phi}(u(t), v(t))$. Sin embargo, con esta definición, ∂S podría no ser la frontera de S en ningún sentido geométrico razonable.

Por ejemplo, llegaríamos a la conclusión de que la frontera de la esfera unitaria S parametrizada mediante coordenadas esféricas en $\mathbf{R}^3$, es la mitad del gran círculo en S que está en el plano xz, pero es claro que en un sentido geométrico S es una superficie suave (ni puntas ni cúspides) sin fronteras ni lados (ver la figura 8.2.3 y el ejercicio 20). Así, este gran círculo es, en cierto sentido, la frontera "falsa" de S.

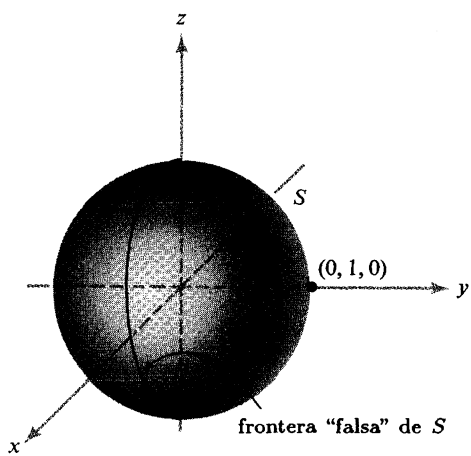


Figura 8.2.3 La superficie S es una parte de una esfera.

Podemos eludir esta dificultad suponiendo que $\mathbf{\Phi}$ es uno a uno en todo D. Entonces la imagen de ∂D bajo $\mathbf{\Phi}$, a saber, $\mathbf{\Phi}(\partial D)$, será la frontera geométrica de $S = \mathbf{\Phi}(D)$. Si $\boldsymbol{\sigma}(t) = (u(t), v(t))$ es una parametrización de ∂D en dirección positiva, definimos ∂S como la curva cerrada simple orientada que es la imagen de la función $\boldsymbol{\eta}: t \mapsto \mathbf{\Phi}(u(t), v(t))$ con la orientación de ∂S inducida por $\boldsymbol{\eta}$ (ver la figura 8.2.1).

TEOREMA 6: TEOREMA DE STOKES PARA SUPERFICIES PARAMETRIZADAS *Sea S una superficie orientada definida por una parametrización uno a uno $\mathbf{\Phi}: D \subset \mathbf{R}^2 \to S$. Denotemos por ∂S la frontera orientada de S y sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial C^1 en S. Entonces*

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Esto se demuestra de la misma manera que el teorema 5.

EJEMPLO 3 *Sea S la superficie mostrada en la figura 8.2.4, con la orientación indicada. Sea $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + e^{xz}\mathbf{k}$. Evaluar $\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$.*

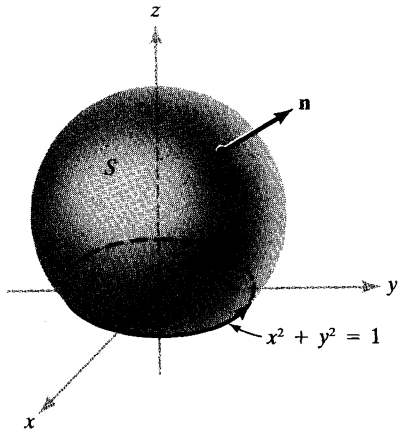


Figura 8.2.4 La frontera de una superficie S parametrizada por $\mathbf{\Phi}: D \to \mathbf{R}^3$ es la imagen de la frontera de D sólo si $\mathbf{\Phi}$ es uno a uno en D.

SOLUCIÓN Ésta es una superficie parametrizada y pudo ser parametrizada usando coordenadas esféricas basadas en el centro de la esfera. Sin embargo, no necesitamos hallar explícitamente $\mathbf{\Phi}$ para resolver este problema. Por el teorema 6, $\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, de modo que si parametrizamos ∂S por $x(t) = \cos t$, $y(t) = \operatorname{sen} t$, $0 \le t \le 2\pi$, determinamos

$$\begin{aligned}\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^{2\pi} \left(y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt} \right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen}^2 t - \cos^2 t)\, dt = -\int_0^{2\pi} dt = -2\pi\end{aligned}$$

y entonces $\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot dS = -2\pi$. ▲

Usemos ahora el teorema de Stokes para justificar la interpretación física de $\nabla \times \mathbf{F}$ en términos de ruedas con aspas propuesta en el capítulo 3. Parafraseando el teorema 6, tenemos

$$\int_S (\operatorname{rot} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_S (\operatorname{rot} \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\partial S} F_T\, ds,$$

donde F_T es la componente tangencial de $\mathbf{F}$. Esto significa que la integral de la componente normal del rotacional de un campo vectorial sobre una superficie orientada S, es igual a la integral de línea de $\mathbf{F}$ a lo largo de ∂S, lo cual, a su vez, es igual a la integral de trayectoria de la componente tangencial de $\mathbf{F}$ sobre ∂S.

Supongamos que $\mathbf{V}$ representa un campo vectorial de velocidad de un fluido. Considerar un punto P y un vector unitario $\mathbf{n}$. Denotemos por S_ρ el disco de radio ρ y centro P, el cual es perpendicular a $\mathbf{n}$. Por el teorema de Stokes,

$$\int_{S_\rho} \operatorname{rot} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_\rho} \operatorname{rot} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_{\partial S_\rho} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s},$$

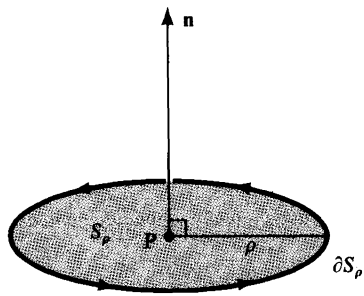


Figura 8.2.5 Una normal **n** induce una orientación en la frontera ∂S_ρ del disco S_ρ.

donde ∂S_ρ tiene la orientación inducida por **n** (ver la figura 8.2.5). No es difícil mostrar (ver el ejercicio 12, sección 7.6) que existe un punto Q en S_ρ tal que

$$\int_{S_\rho} \operatorname{rot} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, dS = [\operatorname{rot} \mathbf{V}(\mathrm{Q}) \cdot \mathbf{n}] A(S_\rho)$$

(éste es el teorema del valor medio para integrales, su demostración es como en la página 340, donde $A(S_\rho) = \pi\rho^2$ es el área de S_ρ, $\operatorname{rot} \mathbf{V}(\mathrm{Q})$ es el valor de $\operatorname{rot} \mathbf{V}$ en Q, y **n** también se evalúa en Q. Así,

$$\begin{aligned}
\operatorname*{límite}_{\rho \to 0} \frac{1}{A(S_\rho)} \int_{\partial S_\rho} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} &= \operatorname*{límite}_{\rho \to 0} \frac{1}{A(S_\rho)} \int_{S_\rho} (\operatorname{rot} \mathbf{V}) \cdot d\mathbf{S} \\
&= \operatorname*{límite}_{\rho \to 0} \operatorname{rot} \mathbf{V}(\mathrm{Q}) \cdot \mathbf{n}(\mathrm{Q}) \\
&= \operatorname{rot} \mathbf{V}(\mathrm{P}) \cdot \mathbf{n}(\mathrm{P}).
\end{aligned}$$

Así,*

$$\operatorname{rot} \mathbf{V}(\mathrm{P}) \cdot \mathbf{n}(\mathrm{P}) = \operatorname*{límite}_{\rho \to 0} \frac{1}{A(S_\rho)} \int_{\partial S_\rho} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s}. \tag{5}$$

Hagamos una pausa para considerar el significado físico de $\int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s}$ cuando **V** es el campo de velocidad de un fluido. Suponer, por ejemplo, que **V** apunta en dirección tangente a la curva orientada C (figura 8.2.6). Entonces, claramente $\int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} > 0$, y las partículas en C tienden a rotar en sentido contrario al que giran las manecillas del reloj. Si **V** apunta en dirección opuesta, $\int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} < 0$. Si **V** es perpendicular a C, entonces las partículas no giran en C y $\int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} = 0$. En general, al ser $\int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s}$ la integral de la componente tangencial de **V**, representa la cantidad neta de giro del fluido en dirección contraria a la que giran las manecillas

*Algunos textos de física adoptan la ecuación (5) como *definición* de rotacional, y la usan para "demostrar" fácilmente el teorema de Stokes. Sin embargo esto aumenta el peligro de caer en un razonamiento circular, pues para demostrar que la ecuación (5) define en realidad un vector "rot **V**(P)" se requiere el teorema de Stokes, o algún argumento similar.

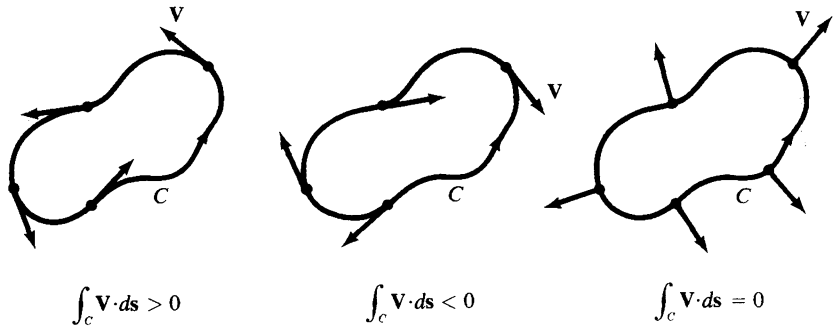


Figura 8.2.6 Significado intuitivo de los signos posibles de $\int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s}$.

del reloj alrededor de C. Por lo tanto, nos referimos a $\int_C \mathbf{V}\cdot d\mathbf{s}$ como la *circulación* de $\mathbf{V}$ alrededor de C (ver la figura 8.2.7).

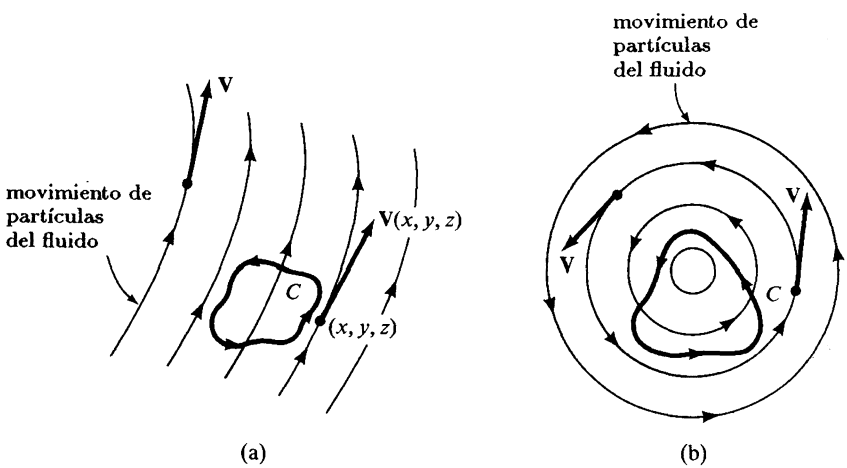


Figura 8.2.7 Circulación de una campo vectorial (campo de velocidad de un fluido): (a) circulación alrededor de C es cero; (b) circulación diferente de cero alrededor de C ("remolino").

Estos resultados nos permiten ver lo que significa rot $\mathbf{V}$ para el movimiento de un fluido. La circulación $\int_{\partial S_\rho} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s}$ es la velocidad neta del fluido alrededor de ∂S_ρ, de modo que rot $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$ representa el efecto de giro o rotación del fluido alrededor del eje $\mathbf{n}$. De manera más precisa, la fórmula (5) dice que

> rot $\mathbf{V}(\mathrm{P})\cdot\mathbf{n}(\mathrm{P})$ *es la circulación de* $\mathbf{V}$ *por unidad de área en* P *en una superficie perpendicular a* $\mathbf{n}(\mathrm{P})$.

Observar que la magnitud de rot $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$ se maximiza cuando $\mathbf{n} = \text{rot}\,\mathbf{V}/\|\text{rot}\,\mathbf{V}\|$. Por lo tanto, el efecto de rotación en P es mayor alrededor del eje paralelo a rot $\mathbf{V}/\|\text{rot}\,\mathbf{V}\|$. Así, rot $\mathbf{V}$ se llama, acertadamente, *vector de vorticidad*.

EJEMPLO 4: LEY DE FARADAY Una ley básica de la teoría electromagnética es que si $\mathbf{E}(t,x,y,z)$ y $\mathbf{H}(t,x,y,z)$ representan los campos magnético y eléctrico en el tiempo t, entonces $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{H}/\partial t$ donde $\nabla \times \mathbf{E}$ se calcula manteniendo t fija y $\partial \mathbf{H}/\partial t$ se calcula manteniendo x, y y z constantes.

Usemos el teorema de Stokes para determinar lo que esto significa físicamente. Supongamos que S es una superficie a la que se aplica el teorema de Stokes. Entonces

$$\int_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$
$$= -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S}.$$

(La última igualdad se puede justificar si $\mathbf{H}$ es de clase C^1.) Así, obtenemos

$$\int_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S}.$$

Esta igualdad se conoce como *ley de Faraday*. La cantidad $\int_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ representa el *voltaje* alrededor de ∂S, y si ∂S fuera un alambre, una corriente fluiría en proporción a este voltaje. Además, $\int_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S}$ se llama *flujo* de $\mathbf{H}$, o flujo magnético. Así, la ley de Faraday dice que *el voltaje alrededor de un lazo es igual al negativo de la tasa de cambio del flujo magnético a través del lazo.* ▲

EJERCICIOS

1. Rehacer el ejercicio 5 de la sección 7.6 (página 484) usando el teorema de Stokes.

2. Rehacer el ejercicio 6 de la sección 7.6 (página 484) usando el teorema de Stokes.

3. Verificar el teorema de Stokes para el hemisferio superior $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $z \geq 0$, y el campo vectorial radial $\mathbf{F}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

4. Sea S una superficie con frontera ∂S, y suponer que $\mathbf{E}$ es un campo eléctrico perpendicular a ∂S. Mostrar que el flujo magnético inducido a través de S es constante en el tiempo. (IDEA: Usar la ley de Faraday.)

5. Sea S la superficie cilíndrica con tapa mostrada en la figura 8.2.8. S es la unión de dos superficies S_1 y S_2, donde S_1 es el conjunto de (x,y,z) con $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$ y S_2 es el conjunto de (x,y,z) con $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$, $z \geq 1$. Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = (zx + z^2y + x)\mathbf{i} + (z^3yx + y)\mathbf{j} + z^4x^2\mathbf{k}$. Calcular $\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$. (IDEA: El teorema de Stokes se cumple para esta superficie.)

6. Sea σ formada por las rectas que unen $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$ y sea S el triángulo con estos vértices. Verificar el teorema de Stokes directamente con $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$.

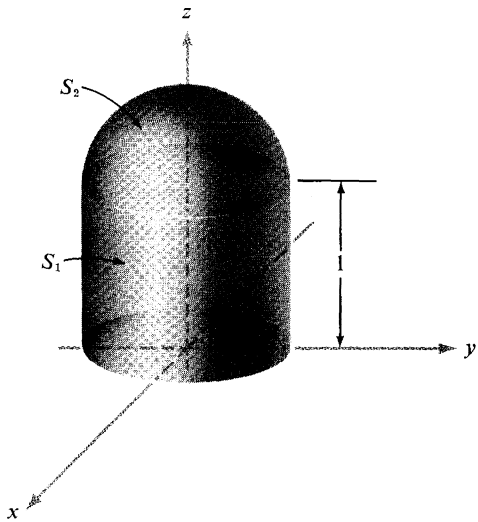


Figura 8.2.8 El cilindro cubierto es la unión de S_1 y S_2.

7. Evaluar la integral $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$, donde S es la parte de la superficie de una esfera definida por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $x + y + z \geq 1$, donde $\mathbf{F} = \mathbf{r} \times (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

8. Mostrar que los cálculos en el ejercicio 7 se pueden simplificar observando que $\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\partial \Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ para cualquier otra superficie Σ. Al escoger Σ de manera apropiada, puede ser fácil calcular $\int_\Sigma (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$. Mostrar que así sucede si se toma Σ como la parte del plano $x + y + z = 1$ dentro del círculo ∂S.

9. Calcular la integral de superficie $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$, donde S es la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geq 0$ y $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} - y^3\mathbf{j}$.

10. Hallar $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$ donde S es el elipsoide $x^2 + y^2 + 2z^2 = 10$ y $\mathbf{F} = (\operatorname{sen} xy)\mathbf{i} + e^x\mathbf{j} - yz\mathbf{k}$.

11. Sea $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + zx^3y^2\mathbf{k}$. Evaluar $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dA$, donde S es la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \leq 0$.

12. Un globo aerostático tiene la forma esférica truncada mostrada en la figura 8.2.9. Los gases calientes escapan por la cubierta porosa con campo vectorial de velocidad

$$\mathbf{V}(x, y, z) = \nabla \times \mathbf{\Phi}(x, y, z) \text{ donde } \mathbf{\Phi}(x, y, z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

Si $R = 5$, calcular la tasa de flujo del volumen de los gases que pasan a través de la superficie.

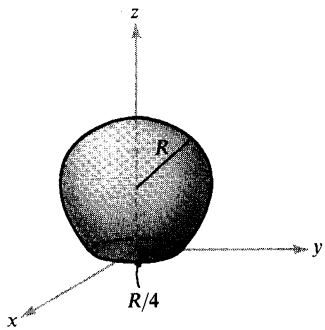


Figura 8.2.9 Globo aerostático.

13. Probar que la ley de Faraday implica $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{H}/\partial t$.

14. Sea S una superficie y sea $\mathbf{F}$ perpendicular a la tangente a la frontera de S. Mostrar que

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

¿Qué significa esto físicamente si $\mathbf{F}$ es un campo eléctrico?

15. Considerar dos superficies S_1 y S_2 con la misma frontera ∂S. Describir con dibujos cómo deben orientarse S_1 y S_2 para asegurar que

$$\int_{S_1} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_2} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}.$$

16. Para una superficie S y un vector fijo $\mathbf{v}$, probar que

$$2\int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_{\partial S} (\mathbf{v} \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s},$$

donde $\mathbf{r}(x, y, z) = (x, y, z)$.

17. Argumentar informalmente que si S es una superficie cerrada, entonces

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

(ver el ejercicio 15). (Una *superficie cerrada* es aquella que forma la frontera de una región en el espacio; así, por ejemplo, una esfera es una superficie cerrada.)

18. Si C es una curva cerrada que es la frontera de una superficie S, y f y g son funciones C^2, mostrar que

(a) $\int_C f\nabla g \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\nabla f \times \nabla g) \cdot d\mathbf{S}$

(b) $\int_C (f\nabla g + g\nabla f) \cdot d\mathbf{s} = 0.$

19. (a) Si C es una curva cerrada que es la frontera de una superficie S y $\mathbf{v}$ es un vector constante, mostrar que

$$\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

(b) Mostrar que esto es cierto aun si C no es la frontera de una superficie S.

20. Demostrar que la parametrización $\mathbf{\Phi}: D \to \mathbf{R}^3$, $D = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$, $\mathbf{\Phi}(\phi, \theta) = (\cos\theta \operatorname{sen}\phi, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \cos\phi)$ de la esfera unitaria, manda la frontera de D a la mitad de un círculo mayor en S.

21. Verificar el teorema 6 para la helicoide $\mathbf{\Phi}(r, \theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, \theta)$, $(r, \theta) \in [0, 1] \times [0, \pi/2]$ y el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (z, x, y)$.

22. Probar el teorema 6.

23. Sea $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + (2xy + x)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Sea C el círculo $x^2 + y^2 = 1$ y S el disco $x^2 + y^2 \leq 1$ dentro del plano $z = 0$.

(a) Determinar el flujo de $\mathbf{F}$ hacia afuera de S.

(b) Determinar la circulación de $\mathbf{F}$ alrededor de C.

(c) Hallar el flujo de $\nabla \times \mathbf{F}$. Verificar directamente el teorema de Stokes en este caso.

***24.** La ley de Faraday relaciona la integral de línea del campo eléctrico alrededor de un lazo C con la integral de superficie de la tasa de cambio del campo magnético sobre una superficie S con frontera C. Considerando básica la ecuación $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial\mathbf{H}/\partial t$, la ley de Faraday es consecuencia del teorema de Stokes, como vimos en el ejemplo 4.

Suponer que tenemos dados campos eléctricos y magnéticos en el espacio que satisfacen $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial\mathbf{H}/\partial t$. Suponer que C es la frontera de la banda de Möbius mostrada en las figuras 7.6.3 y 7.6.4. Como no es posible orientar la banda de Möbius, no se aplica el teorema de Stokes. ¿En qué se convierte la ley de Faraday? ¿Pueden imaginar a qué es igual $\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$?

25. Integrar $\nabla \times \mathbf{F}$, $\mathbf{F} = (3y, -xz, -yz^2)$ sobre la parte de la superficie $2z = x^2 + y^2$ debajo del plano $z = 2$, directamente y usando el teorema de Stokes.

8.3 CAMPOS CONSERVATIVOS

Vimos en la sección 7.2 que en el caso de un campo de fuerza gradiente $\mathbf{F} = \nabla f$, las integrales de línea de $\mathbf{F}$ se evaluaron como sigue:

$$\int_\sigma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a)).$$

El valor de la integral depende sólo de los extremos $\sigma(b)$ y $\sigma(a)$ de la trayectoria. En otras palabras, si usáramos otra trayectoria con los mismos extremos, obtendríamos la misma respuesta. Esto nos conduce a decir que la integral es *independiente de la trayectoria.*

Los campos gradientes son importantes en problemas físicos. Usualmente, $V = -f$ representa un potencial de energía (gravitacional, eléctrico y así sucesivamente) y $\mathbf{F}$ representa una fuerza.* Considerar el ejemplo de una partícula de masa m en el campo de la Tierra; en este caso se toma f como GmM/r o $V = -GmM/r$, donde G es la constante gravitacional, M es la masa de la Tierra y r es la distancia al centro de la Tierra. La fuerza correspondiente es $\mathbf{F} = (GmM/r^3)\mathbf{r} = (GmM/r^2)\mathbf{n}$, donde $\mathbf{n}$ es el vector radial unitario. (Estudiaremos este caso más adelante.) Nótese que $\mathbf{F}$ no está definido en el punto $r = 0$.

Deseamos caracterizar los campos vectoriales que se pueden escribir como un gradiente. Nuestra labor se simplifica de manera considerable gracias al teorema de Stokes.

TEOREMA 7 *Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial C^1 definido en $\mathbf{R}^3$ excepto, quizás, en un número finito de puntos. Las siguientes condiciones sobre $\mathbf{F}$ son equivalentes:*

(i) *Para cualquier curva cerrada simple orientada C, $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$.*

(ii) *Para cualesquiera dos curvas cerradas simples orientadas C_1 y C_2 que tengan los mismos extremos.*

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

(iii) *$\mathbf{F}$ es el gradiente de alguna función f; esto es, $\mathbf{F} = \nabla f$ (y si $\mathbf{F}$ tiene un punto excepcional donde no está definido, tampoco f está definido ahí).*

(iv) $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Un campo vectorial que satisfaga una (y por lo tanto, todas) de las condiciones (i)–(iv) se llama *campo vectorial conservativo.*†

DEMOSTRACIÓN Probaremos la siguiente cadena de implicaciones, lo cual probará el teorema:

$$\text{(i)} \Rightarrow \text{(ii)} \Rightarrow \text{(iii)} \Rightarrow \text{(iv)} \Rightarrow \text{(i)}.$$

Primero mostraremos que la condición (i) implica la condición (ii). Suponer que $\boldsymbol{\sigma}_1$ y $\boldsymbol{\sigma}_2$ son parametrizaciones que representan a C_1 y C_2, con los mismos extremos. Construir la curva cerrada $\boldsymbol{\sigma}$ obtenida recorriendo primero $\boldsymbol{\sigma}_1$ y después $-\boldsymbol{\sigma}_2$ (figura 8.3.1), o, simbólicamente, la curva $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2$. Suponiendo que $\boldsymbol{\sigma}$

*Si se usa el signo de resta, entonces V es decreciente en dirección de $\mathbf{F}$. Así, una partícula sobre la que actúe $\mathbf{F}$ se mueve en dirección que decrezca el potencial.

†En el plano $\mathbf{R}^2$ no se permiten puntos excepcionales (ver el ejercicio 12). El teorema 7 se puede probar de la misma manera si $\mathbf{F}$ está definido y es de clase C^1 sólo en un conjunto abierto convexo en $\mathbf{R}^2$ o $\mathbf{R}^3$. (Un conjunto D es convexo si P y Q $\in D$ implica que la recta que une a P y Q pertenece a D.)

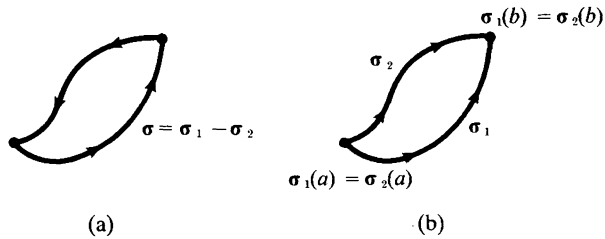


Figura 8.3.1 Construcción de una curva cerrada simple orientada $\sigma_1 - \sigma_2$ (a) a partir de dos curvas simples orientadas (b).

es simple, la condición (i) da

$$\int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\sigma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} - \int_{\sigma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0,$$

de modo que se cumple la condición (ii). (Si σ no es simple, se requiere un argumento adicional, omitido aquí.)

A continuación probaremos que la condición (ii) implica la condición (iii). Sea C cualquier curva orientada simple que une a un punto como $(0,0,0)$ con (x,y,z), y suponer que C está representada por la parametrización σ (si $(0,0,0)$ es el punto excepcional de $\mathbf{F}$, podemos escoger un punto de inicio de σ diferente sin que se afecte la argumentación). Definir $f(x,y,z)$ como $\int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$. Por la hipótesis (ii), $f(x,y,z)$ es independiente de C. Mostraremos que $\mathbf{F} = \operatorname{grad} f$. En efecto, escogemos σ como la trayectoria mostrada en la figura 8.3.2, de modo que

$$f(x,y,z) = \int_0^x F_1(t,0,0)\,dt + \int_0^y F_2(x,t,0)\,dt + \int_0^z F_3(x,y,t)\,dt,$$

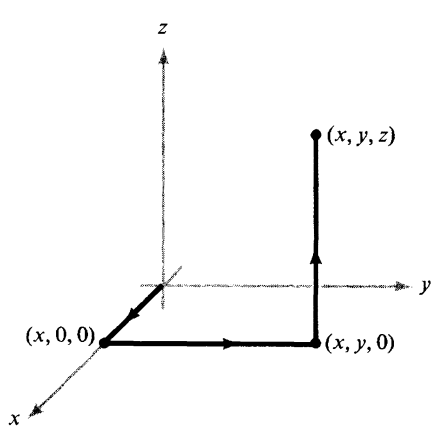


Figura 8.3.2 Trayectoria que une $(0,0,0)$ con (x,y,z).

donde $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$. Se sigue de manera inmediata, que $\partial f/\partial z = F_3$. Permutando x, y y z, podemos mostrar similarmente, que $\partial f/\partial x = F_1$ y $\partial f/\partial y = F_2$; esto es, $\nabla f = \mathbf{F}$. Tercero, la condición (iii) implica la condición (iv) pues, como ya se demostró en la sección 3.4,

$$\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}.$$

Finalmente, sean σ una representación de una curva cerrada C y S cualquier superficie cuya frontera sea σ (si $\mathbf{F}$ tiene puntos excepcionales, escoger S de manera de evitarlos). La figura 8.3.3 indica que probablemente siempre se pueda hallar dicha superficie; sin embargo, una demostración formal de ello requeriría del desarrollo de ideas matemáticas más sofisticadas que las presentadas aquí. Por el teorema de Stokes,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_\sigma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_S (\operatorname{rot} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS.$$

Como $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$, esta integral se anula, de modo que condición (iv) $\Rightarrow$ condición (i). ■

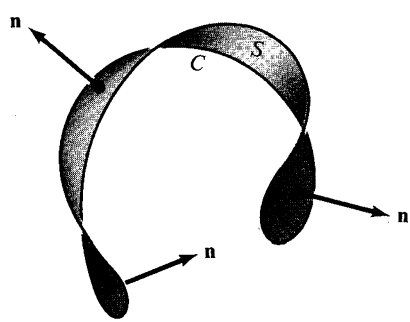


Figura 8.3.3 Superficie S que genera una curva C.

Hay varias interpretaciones físicas útiles de $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$. Ya vimos que una es el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ al mover una partícula a lo largo de C. Una segunda interpretación es el concepto de circulación, que vimos al final de la sección anterior. En este caso pensamos $\mathbf{F}$ como el campo de velocidad de un fluido; esto es, a cada punto P en el espacio, $\mathbf{F}$ asigna el vector velocidad del fluido en P. Tomar C como una curva cerrada, y sea $\Delta\mathbf{s}$ una pequeña cuerda dirigida de C. Entonces $\mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{s}$ es aproximadamente la componente tangencial de $\mathbf{F}$ por $\|\Delta\mathbf{s}\|$. La integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ es la componente neta tangencial alrededor de C. Esto significa que si colocamos una pequeña rueda con aspas en el fluido, girará si la circulación del fluido fuera diferente de cero, o $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \neq 0$ (ver la figura 8.3.4). Así, con frecuencia nos referimos a la integral de línea

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

como la *circulación* de $\mathbf{F}$ alrededor de C.

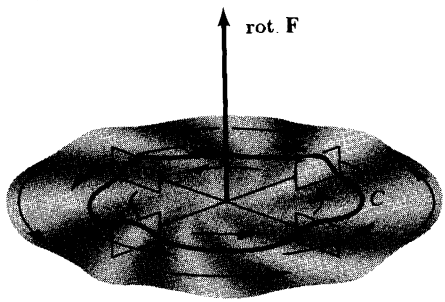


Figura 8.3.4 $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \neq 0$ implica que una rueda con aspas en un fluido con campo de velocidad $\mathbf{F}$ girará alrededor de su eje.

Hay una interpretación similar en teoría electromagnética: Si $\mathbf{F}$ representa un campo eléctrico, entonces una corriente fluirá alrededor de un lazo C si $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \neq 0$.

Por el teorema 7, un campo $\mathbf{F}$ no tiene circulación si y sólo si $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. De aquí, un campo vectorial $\mathbf{F}$ con $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$ se llama *irrotacional*. Hemos probado entonces que un campo vectorial en $\mathbf{R}^3$ es irrotacional si y sólo si es el campo gradiente de alguna función, esto es, si y sólo si $\mathbf{F} = \nabla f$. La función f se llama *potencial* para $\mathbf{F}$.

EJEMPLO 1 *Considerar el campo vectorial* $\mathbf{F}$ *en* $\mathbf{R}^3$ *definido por*

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} + (z \cos yz + x)\mathbf{j} + (y \cos yz)\mathbf{k}.$$

Mostrar que $\mathbf{F}$ *es irrotacional y hallar un potencial escalar para* $\mathbf{F}$.

SOLUCIÓN Calculamos $\nabla \times \mathbf{F}$:

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & x + z \cos yz & y \cos yz \end{vmatrix} \\
&= (\cos yz - yz \operatorname{sen} yz - \cos yz + yz \operatorname{sen} yz)\mathbf{i} + (0 - 0)\mathbf{j} + (1 - 1)\mathbf{k} \\
&= 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = \mathbf{0},
\end{aligned}$$

de modo que $\mathbf{F}$ es irrotacional. Podemos hallar un potencial escalar de varias maneras.

Método 1. Con la técnica usada en el teorema 7 para probar que la condición (ii) implica la condición (iii), podemos hacer

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \int_0^x F_1(t,0,0)\,dt + \int_0^y F_2(x,t,0)\,dt + \int_0^z F_3(x,y,t)\,dt \\ &= \int_0^x 0\,dt + \int_0^y x\,dt + \int_0^z y\cos yt\,dt \\ &= 0 + xy + \operatorname{sen} yz = xy + \operatorname{sen} yz. \end{aligned}$$

Se verifica fácilmente que, como se requiere, $\nabla f = \mathbf{F}$:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k} = y\mathbf{i} + (x + z\cos yz)\mathbf{j} + (y\cos yz)\mathbf{k}.$$

Método 2. Como sabemos que existe f, sabemos que es posible resolver el sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x + z\cos yz, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = y\cos yz,$$

para $f(x,y,z)$. Éstas son equivalentes a las ecuaciones simultáneas

(a) $f(x,y,z) = xy + h_1(y,z)$

(b) $f(x,y,z) = \operatorname{sen} yz + xy + h_2(x,z)$

(c) $f(x,y,z) = \operatorname{sen} yz + h_3(x,y)$

para funciones h_1, h_2 y h_3, independientes de x, y y z (respectivamente). Cuando $h_1(y,z) = \operatorname{sen} yz$, $h_2(x,z) = 0$ y $h_3(x,y) = xy$, las tres ecuaciones concuerdan, de modo que forman un potencial para $\mathbf{F}$. Sin embargo, sólo intuimos los valores de h_1, h_2 y h_3. Para deducir de manera más sistemática la fórmula para f, notamos que como $f(x,y,z) = xy + h_1(y,z)$ y $\partial f/\partial z = y\cos yz$, tenemos que

$$\frac{\partial h_1(y,z)}{\partial z} = y\cos yz$$

o

$$h_1(y,z) = \int y\cos yz\,dz + g(y) = \operatorname{sen} yz + g(y).$$

Por lo tanto, sustituyendo esto en la ecuación (a) obtenemos

$$f(x,y,z) = xy + \operatorname{sen} yz + g(y);$$

pero por la ecuación (b),

$$g(y) = h_2(x,z).$$

Debido a que el lado derecho de esta ecuación es una función de x y z y el lado izquierdo es una función sólo de y, concluimos que deben ser iguales a alguna constante C. Así,

$$f(x, y, z) = xy + \operatorname{sen} yz + C$$

y hemos determinado f salvo por una constante. ▲

EJEMPLO 2 *Una masa M en el origen en $\mathbf{R}^3$ ejerce una fuerza sobre una masa m localizada en $\mathbf{r} = (x, y, z)$ con magnitud GmM/r^2 y dirigida hacia el origen. Aquí G es la constante gravitacional, que depende de las unidades de medición, y $r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Si recordamos que $-\mathbf{r}/r$ es un vector unitario dirigido hacia el origen, entonces podemos escribir el campo de fuerza como*

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\frac{GmM\mathbf{r}}{r^3}.$$

Mostrar que $\mathbf{F}$ es irrotacional y hallar un potencial escalar para $\mathbf{F}$. (Nótese que $\mathbf{F}$ no está definido en el origen, pero aun así se aplica el teorema 7 pues permite un punto excepcional.)

SOLUCIÓN Primero verifiquemos que $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Por la fórmula 11 de la tabla 3.1, de la sección 3.5, obtenemos

$$\nabla \times \mathbf{F} = -GmM\left[\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right) \times \mathbf{r} + \frac{1}{r^3}\nabla \times \mathbf{r}\right].$$

Pero $\nabla(1/r^3) = -3\mathbf{r}/r^5$ (ver el ejercicio 8, sección 3.5), de modo que el primer término se anula pues $\mathbf{r} \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$. El segundo término se anula pues

$$\nabla \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right))\mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

De aquí, $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ (para $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$).

Si recordamos la fórmula $\nabla(r^n) = nr^{n-2}\mathbf{r}$ (ejercicio 8, sección 3.5), entonces, por inspección, podemos obtener un potencial escalar para $\mathbf{F}$. Tenemos $\mathbf{F} = -\nabla\phi$, donde $\phi(x, y, z) = -GmM/r$ se llama *energía potencial gravitacional.*

(Observamos, de paso, que por el teorema 3 de la sección 7.2, el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ al mover una partícula de masa m de un punto P_1 a un punto P_2 está dado por

$$\phi(\mathrm{P}_1) - \phi(\mathrm{P}_2) = GmM\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right),$$

donde r_1 es la distancia radial de P_1 al origen, con r_2 definido de manera análoga.) ▲

Por la misma demostración, el teorema 7 también se cumple para campos vectoriales $\mathbf{F}$ de clase C^1 en $\mathbf{R}^2$. En este caso $\mathbf{F}$ no tiene puntos excepcionales; esto es, $\mathbf{F}$ es suave donde sea (ver el ejercicio 12). Nótese, sin embargo, que la conclusión *podría* cumplirse aun si hubiera puntos excepcionales, un ejemplo sería $(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})/(x^2 + y^2)^{3/2}$.

Si $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$, entonces

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k},$$

de modo que la condición $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ se reduce a

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Así, tenemos:

COROLARIO *Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial C^1 en $\mathbf{R}^2$ de la forma $P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ con $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$, entonces $\mathbf{F} = \nabla f$ para alguna f definida en $\mathbf{R}^2$.*

Insistimos en que este corolario puede ser falso si $\mathbf{F}$ deja de ser de clase C^1 incluso en un solo punto (se da un ejemplo en el ejercicio 12). Sin embargo, en $\mathbf{R}^3$ se permiten excepciones en puntos (ver el teorema 7).

EJEMPLO 3 (a) *Determinar si el campo vectorial*

$$\mathbf{F} = e^{xy}\mathbf{i} + e^{x+y}\mathbf{j}$$

es un campo gradiente.

(*b*) *Repetir la parte* (a) *para*

$$\mathbf{F} = (2x\cos y)\mathbf{i} - (x^2 \operatorname{sen} y)\mathbf{j}.$$

SOLUCIÓN (a) Aquí, $P(x, y) = e^{xy}$ y $Q(x, y) = e^{x+y}$, de modo que calculamos

$$\frac{\partial P}{\partial y} = xe^{xy}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = e^{x+y}.$$

Éstas no son iguales, de modo que $\mathbf{F}$ no puede tener una función de potencial.

(b) En este caso, hallamos

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -2x \operatorname{sen} y = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

de modo que $\mathbf{F}$ tiene una función de potencial f. Para calcular f resolvemos las ecuaciones

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\cos y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -x^2 \operatorname{sen} y.$$

Así,

$$f(x,y) = x^2\cos y + h_1(y)$$

y

$$f(x,y) = x^2\cos y + h_2(x).$$

Si h_1 y h_2 son la misma constante, entonces se satisfacen ambas ecuaciones, de modo que $f(x,y) = x^2\cos y$ es un potencial para $\mathbf{F}$. ▲

EJEMPLO 4 *Sea* $\boldsymbol{\sigma}\colon [1,2] \to \mathbf{R}^2$ *dada por*

$$x = e^{t-1}, \qquad y = \operatorname{sen}\frac{\pi}{t}.$$

Calcular la integral

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{\boldsymbol{\sigma}} 2x\cos y\,dx - x^2\operatorname{sen} y\,dy,$$

donde $\mathbf{F} = (2x\cos y)\mathbf{i} - (x^2\operatorname{sen} y)\mathbf{j}$.

SOLUCIÓN Los extremos son $\boldsymbol{\sigma}(1) = (1,0)$ y $\boldsymbol{\sigma}(2) = (e,1)$. Como $\partial(2x\cos y)/\partial y = \partial(-x^2\operatorname{sen} y)/\partial x$, $\mathbf{F}$ es irrotacional y por lo tanto, un campo vectorial gradiente (como vimos en el ejemplo 3). Así, por el teorema 7, podemos reemplazar $\boldsymbol{\sigma}$ por cualquier curva C^1 a trozos que tenga los mismos extremos, en particular, por la trayectoria poligonal de $(1,0)$ a $(e,0)$ a $(e,1)$. Así, la integral de línea debe ser igual a

$$\begin{aligned}\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} &= \int_1^e 2t\cos 0\,dt + \int_0^1 -e^2\operatorname{sen} t\,dt\\ &= (e^2-1) + e^2(\cos 1 - 1) = e^2\cos 1 - 1.\end{aligned}$$

De manera alternativa, usando el teorema 3 de la sección 7.2, tenemos

$$\begin{aligned}\int_{\boldsymbol{\sigma}} 2x\cos y\,dx - x^2\operatorname{sen} y\,dy &= \int_{\boldsymbol{\sigma}} \nabla f\cdot d\mathbf{s}\\ &= f(\boldsymbol{\sigma}(2)) - f(\boldsymbol{\sigma}(1)) = e^2\cos 1 - 1,\end{aligned}$$

pues $f(x,y) = x^2\cos y$ es una función de potencial para $\mathbf{F}$. Es evidente que esta técnica es más fácil que calcular directamente la integral. ▲

Concluimos esta sección con un teorema que es bastante parecido en espíritu al teorema 7. El teorema 7 fue motivado, en parte como un recíproco al resultado de que $\operatorname{rot}\nabla f = \mathbf{0}$ para cualquier función C^1 $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ —o, si $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$,

entonces $\mathbf{F} = \nabla f$—. También sabemos (fórmula 10 en la tabla 3.1, sección 3.5) que $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{G}) = 0$ para cualquier campo vectorial $\mathbf{G}$ de clase C^2. Podríamos plantearnos la validez del enunciado recíproco: Si $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$, ¿es $\mathbf{F}$ el rotacional de un campo vectorial $\mathbf{G}$? El siguiente teorema responde en sentido afirmativo.

TEOREMA 8 *Si* $\mathbf{F}$ *es un campo vectorial* C^1 *en* $\mathbf{R}^3$ *con* $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$, *entonces existe un campo vectorial* $\mathbf{G}$ *de clase* C^1 *tal que* $\mathbf{F} = \operatorname{rot}\mathbf{G}$.

La demostración se esboza en el ejercicio 16. Advertimos al lector que a diferencia de $\mathbf{F}$ en el teorema 7, al campo vectorial $\mathbf{F}$ del teorema 8 no se le permite tener un punto excepcional. Por ejemplo, el campo de fuerza gravitacional $\mathbf{F} = -(GmM\mathbf{r}/r^3)$ tiene la propiedad de que $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$ y sin embargo, no existe $\mathbf{G}$ para el cual $\mathbf{F} = \operatorname{rot}\mathbf{G}$ (ver el ejercicio 25). El teorema 8 no se aplica pues el campo de fuerza gravitacional $\mathbf{F}$ no está definido en $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^3$.

EJERCICIOS

1. Mostrar que cualesquiera dos funciones de potencial para un campo vectorial difieren, a lo más, en una constante.

2. (a) Sea $\mathbf{F}(x,y) = (xy, y^2)$ y sea σ la trayectoria $y = 2x^2$ que une $(0,0)$ con $(1,2)$ en $\mathbf{R}^2$. Evaluar $\int_\sigma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$.

(b) ¿Depende la integral en la parte (a) de la trayectoria que une $(0,0)$ con $(1,2)$?

3. Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = (2xyz + \operatorname{sen} x)\mathbf{i} + x^2z\mathbf{j} + x^2y\mathbf{k}$. Hallar una función f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

4. Evaluar $\int_\sigma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$, donde $\sigma(t) = (\cos^5 t, \operatorname{sen}^3 t, t^4)$, $0 \le t \le \pi$, y $\mathbf{F}$ es como en el ejercicio 3.

5. ¿Cuál es el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F} = -\mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|^3$ al mover una partícula de un punto $r_0 \in \mathbf{R}^3$ "hasta ∞", donde $\mathbf{r}(x,y,z) = (x,y,z)$?

6. En el ejercicio 5, mostrar que $\mathbf{F} = \nabla(1/r)$, $r \neq 0$, $r = \|\mathbf{r}\|$. ¿En qué sentido es la integral de $\mathbf{F}$ independiente de la trayectoria?

7. Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = xy\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. ¿Puede existir una función f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$?

***8.** Sea $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ y suponer que cada F_k satisface la condición de homogeneidad

$$F_k(tx, ty, tz) = tF_k(x,y,z), \qquad k = 1,2,3.$$

Suponer además que $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Probar que $\mathbf{F} = \nabla f$ donde

$$2f(x,y,z) = xF_1(x,y,z) + yF_2(x,y,z) + zF_3(x,y,z).$$

(IDEA: Usar el ejercicio de repaso 23, capítulo 2.)

9. Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = (e^x \operatorname{sen} y)\mathbf{i} + (e^x \cos y)\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$. Evaluar la integral $\int_\sigma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$, donde $\sigma(t) = (\sqrt{t}, t^3, \exp\sqrt{t})$, $0 \le t \le 1$.

10. Sea un fluido con campo de velocidad $\mathbf{F}(x,y,z) = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$. ¿Cuál es la circulación alrededor del círculo unitario en el plano xy? Interpretar la respuesta dada.

11. La masa de la Tierra es aproximadamente 6×10^{27} g y la del Sol es 330,000 veces mayor. La constante gravitacional es $6.7 \times 10^{-8}\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}^2 \cdot \mathrm{g}$. La distancia de la Tierra al Sol es alrededor de 1.5×10^{12} cm. Calcular, aproximadamente, el trabajo necesario para incrementar la distancia de la Tierra al Sol en 1 cm.

12. (a) Mostrar que $\int_C (x\,dy - y\,dx)/(x^2+y^2) = 2\pi$, donde C es el círculo unitario.

(b) Concluir que el campo vectorial asociado $[-y/(x^2+y^2)]\mathbf{i} + [x/(x^2+y^2)]\mathbf{j}$ no es un campo conservativo.

(c) Mostrar, sin embargo, que $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$. Contradice esto el corolario (de la página 524) del teorema 7? De no ser así, ¿por qué no?

13. Determinar cuál de los siguientes campos vectoriales $\mathbf{F}$ en el plano es el gradiente de una función escalar f. Si existe dicha f, hallarla.

(a) $\mathbf{F}(x,y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

(b) $\mathbf{F}(x,y) = xy\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$

(c) $\mathbf{F}(x,y) = (x^2+y^2)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$

14. Repetir el ejercicio 13 para los campos vectoriales siguientes:

(a) $\mathbf{F}(x,y) = (\cos xy - xy \operatorname{sen} xy)\mathbf{i} - (x^2 \operatorname{sen} xy)\mathbf{j}$

(b) $\mathbf{F}(x,y) = (x\sqrt{x^2y^2+1})\mathbf{i} + (y\sqrt{x^2y^2+1})\mathbf{j}$

(c) $\mathbf{F}(x,y) = (2x\cos y + \cos y)\mathbf{i} - (x^2 \operatorname{sen} y + x \operatorname{sen} y)\mathbf{j}$

15. Mostrar que los siguientes campos vectoriales son conservativos. Calcular $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ para la curva dada.

(a) $\mathbf{F} = (xy^2+3x^2y)\mathbf{i} + (x+y)x^2\mathbf{j}$; C es la curva que está formada por los segmentos de recta de $(1,1)$ a $(0,2)$ a $(3,0)$.

(b) $\mathbf{F} = \dfrac{2x}{y^2+1}\mathbf{i} - \dfrac{2y(x^2+1)}{(y^2+1)^2}\mathbf{j}$; C está parametrizada por $x = t^3 - 1$, $y = t^6 - t$, $0 \le t \le 1$.

(c) $\mathbf{F} = [\cos(xy^2) - xy^2 \operatorname{sen}(xy^2)]\mathbf{i} - 2x^2y \operatorname{sen}(xy^2)\mathbf{j}$; C es la curva (e^t, e^{t+1}), $-1 \le t \le 0$.

16. Probar el teorema 8. (IDEA: Definir $\mathbf{G} = G_1\mathbf{i} + G_2\mathbf{j} + G_3\mathbf{k}$ por

$$G_1(x,y,z) = \int_0^z F_2(x,y,t)\,dt - \int_0^y F_3(x,t,0)\,dt$$

$$G_2(x,y,z) = -\int_0^z F_1(x,y,t)\,dt$$

y $G_3(x,y,z) = 0$.)

17. ¿Es cada uno de los siguientes campos vectoriales el rotacional de algún otro campo vectorial? De ser así, hallar el campo vectorial.

(a) $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

(b) $\mathbf{F} = (x^2 + 1)\mathbf{i} + (z - 2xy)\mathbf{j} + y\mathbf{k}$

18. Sea $\mathbf{F} = xz\mathbf{i} - yz\mathbf{j} + y\mathbf{k}$. Verificar que $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$. Hallar $\mathbf{G}$ tal que $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$.

19. Repetir el ejercicio 18 para $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$.

20. Sea $\mathbf{F} = xe^y\mathbf{i} - (x\cos z)\mathbf{j} - ze^y\mathbf{k}$. Hallar $\mathbf{G}$ tal que $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$.

21. Sea $\mathbf{F} = (x\cos y)\mathbf{i} - (\operatorname{sen} y)\mathbf{j} + (\operatorname{sen} x)\mathbf{k}$. Hallar $\mathbf{G}$ tal que $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$.

22. Usando diferentes trayectorias de $(0,0,0)$ a (x,y,z), mostrar que la función f definida en la demostración del teorema 7 para "condición (ii) implica condición (iii)" satisface $\partial f/\partial x = F_1$ y $\partial f/\partial y = F_2$.

23. Sea $\mathbf{F}$ el campo vectorial en $\mathbf{R}^3$ dado por $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$.

(a) Mostrar que $\mathbf{F}$ es rotacional, esto es, que $\mathbf{F}$ no es irrotacional.

(b) Suponer que $\mathbf{F}$ representa el campo vectorial de velocidad de un fluido. Mostrar que si colocamos un corcho en este fluido, girará en un plano paralelo al plano xy, en una trayectoria circular alrededor del eje z.

(c) ¿En qué dirección gira el corcho?

***24.** Sea $\mathbf{G}$ el campo vectorial en $\mathbf{R}^3 \backslash \{\text{eje } z\}$ definido por

$$\mathbf{G} = \frac{-y}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{j}.$$

(a) Mostrar que $\mathbf{G}$ es irrotacional.

(b) Mostrar que el resultado del ejercicio 23(b) también se cumple para $\mathbf{G}$.

(c) ¿Cómo podemos resolver el hecho de que las trayectorias de $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$ sean iguales (circulares alrededor del eje z) pero que $\mathbf{F}$ sea rotacional y $\mathbf{G}$ no? (IDEA: La propiedad de ser rotacional es una condición local, esto es, una propiedad del fluido en la vecindad de un punto.)

***25.** Sea $\mathbf{F} = -(GmM\mathbf{r}/r^3)$ el campo de fuerza gravitacional definido en $\mathbf{R}^3 \backslash \{\mathbf{0}\}$.

(a) Mostrar que $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$.

(b) Mostrar que $\mathbf{F} \neq \operatorname{rot} \mathbf{G}$ para cualquier campo vectorial $\mathbf{G}$ de clase C^1 en $\mathbf{R}^3 \backslash \{\mathbf{0}\}$.

8.4 TEOREMA DE GAUSS

El teorema de Gauss asegura que el flujo de un campo vectorial hacia afuera de una superficie cerrada es igual a la integral de la divergencia de ese campo vectorial sobre el volumen encerrado por la superficie. Se trata de un resultado paralelo al teorema de Stokes y al de Green, en el sentido de que relaciona una integral sobre un objeto geométrico cerrado (curva o superficie) con una integral sobre una región contenida (superficie o volumen).

Comenzaremos pidiendo al lector que repase las diferentes regiones en el espacio que se introdujeron cuando estudiamos la integral de volumen; estas regiones se ilustran en la figura 6.1.3. Como lo indica la figura, la frontera de una región de tipo I, II o III en $\mathbf{R}^3$ es una superficie formada por un número finito (a lo más seis, por lo menos dos) de superficies que se pueden describir como gráficas de funciones de $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}$. Este tipo de superficie se llama *superficie cerrada*. Las superficies S_1, $S_2, \ldots$, S_N que componen dicha superficie cerrada se llaman sus *caras*.

EJEMPLO 1 El cubo en la figura 8.4.1(a) es una región del tipo IV (recordar que esto significa que es simultáneamente de los tipos I, II y III), con seis rectángulos que componen su frontera. La esfera es la frontera de una bola sólida, que es además una región del tipo IV. ▲

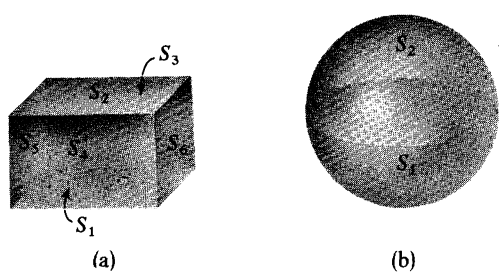


Figura 8.4.1 (a) Regiones del tipo IV y (b) las superficies S_i que componen sus fronteras.

Las superficies cerradas se pueden orientar de dos maneras. En la primera, la orientación exterior, la normal apunta hacia afuera en el espacio, y en la segunda, la orientación interior, la normal apunta hacia adentro de la región acotada (figura 8.4.2).

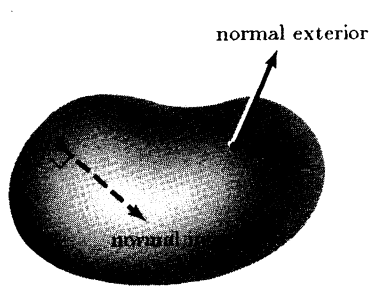


Figura 8.4.2 Dos posibles orientaciones para una superficie cerrada.

Suponer que S es una superficie cerrada orientada de alguna de estas dos maneras y $\mathbf{F}$ es un campo vectorial en S. Entonces, como lo definimos en la sección 7.6 (pág. 478).

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \sum_i \int_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Si S tiene la orientación exterior, la integral $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ mide el flujo total de $\mathbf{F}$ hacia afuera a través de S. Esto es, si pensamos $\mathbf{F}$ como el campo de velocidad de un fluido, $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ indica la cantidad de fluido que sale de la región acotada por S por unidad de tiempo. Si S tiene la orientación interior, la integral $\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS}$ mide el flujo total de $\mathbf{F}$ hacia adentro a través de S.

Recordemos otra manera común de escribir estas integrales de superficie, una manera que especifica explícitamente la orientación de S. Sea la orientación de S dada por un vector normal unitario $\mathbf{n}(x, y, z)$ en cada punto de S. Entonces tenemos la integral orientada

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS,$$

esto es, la integral de la componente normal de $\mathbf{F}$ sobre S. En el resto de esta sección, si S es una superficie cerrada que engloba una región Ω, adoptamos la convención de que $S = \partial\Omega$ tiene dada la orientación exterior, con normal unitaria exterior $\mathbf{n}(x, y, z)$ en cada punto $(x, y, z) \in S$. Más aún, denotamos la superficie con la orientación opuesta (interior) por $\partial\Omega_{\text{op}}$. Entonces la dirección normal unitaria asociada a esta orientación es $-\mathbf{n}$. Así,

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS = -\int_S [\mathbf{F} \cdot (-\mathbf{n})]\, dS = -\int_{\partial\Omega_{\text{op}}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

EJEMPLO 2 El cubo unitario Ω dado por

$$0 \le x \le 1, \qquad 0 \le y \le 1 \qquad 0 \le z \le 1$$

es una región en el espacio, del tipo IV (ver la figura 8.4.3). Escribimos las caras como

$$\begin{array}{lll}
S_1 : z = 0, & 0 \le x \le 1, & 0 \le y \le 1 \\
S_2 : z = 1, & 0 \le x \le 1, & 0 \le y \le 1 \\
S_3 : x = 0, & 0 \le y \le 1, & 0 \le z \le 1 \\
S_4 : x = 1, & 0 \le y \le 1, & 0 \le z \le 1 \\
S_5 : y = 0, & 0 \le x \le 1, & 0 \le z \le 1 \\
S_6 : y = 1, & 0 \le x \le 1, & 0 \le z \le 1
\end{array}$$

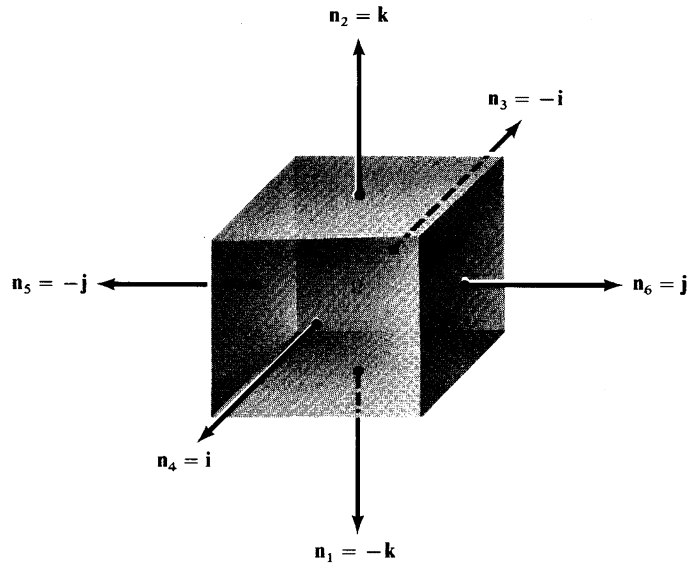


Figura 8.4.3 Orientación exterior en el cubo.

En la figura 8.4.3 vemos que

$$\mathbf{n}_2 = \mathbf{k} = -\mathbf{n}_1,$$
$$\mathbf{n}_4 = \mathbf{i} = -\mathbf{n}_3,$$
$$\mathbf{n}_6 = \mathbf{j} = -\mathbf{n}_5,$$

de modo que para un campo vectorial continuo $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$,

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = -\int_{S_1} F_3\, dS + \int_{S_2} F_3\, dS - \int_{S_3} F_1\, dS$$
$$+ \int_{S_4} F_1\, dS - \int_{S_5} F_2\, dS + \int_{S_6} F_2\, dS. \quad \blacktriangle$$

Llegamos ahora al último de los tres teoremas centrales de este capítulo. Este teorema relaciona integrales de superficie con integrales de volumen; en palabras, el teorema asegura que si Ω es una región en $\mathbf{R}^3$, entonces el flujo de un campo $\mathbf{F}$ hacia el exterior a través de la superficie cerrada $\partial\Omega$ es igual a la integral de $\operatorname{div}\mathbf{F}$ sobre Ω. (Ver la página 479 para la interpretación de las integrales de superficie en términos de flujo.)

TEOREMA 9: TEOREMA DE LA DIVERGENCIA DE GAUSS *Sea Ω una región en el espacio, del tipo IV. Denotar por $\partial\Omega$ la superficie cerrada orientada que acota a Ω.*

Sea $\mathbf{F}$ *un campo vectorial suave definido en* Ω. *Entonces*

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{F})\, dV = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

o, de manera alternativa,

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{F})\, dV = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS.$$

DEMOSTRACIÓN Si $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$, entonces por definición, $\operatorname{div} \mathbf{F} = \partial P/\partial x + \partial Q/\partial y + \partial R/\partial z$, de modo que podemos escribir (usando la aditividad de la integral de volumen)

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \int_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x}\, dV + \int_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y}\, dV + \int_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z}\, dV.$$

Por otro lado, la integral de superficie en cuestión es

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS &= \int_{\partial\Omega} (P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}) \cdot \mathbf{n}\, dS \\ &= \int_{\partial\Omega} P\mathbf{i} \cdot \mathbf{n}\, dS + \int_{\partial\Omega} Q\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}\, dS + \int_{\partial\Omega} R\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS.\end{aligned}$$

El teorema se sigue si logramos probar las tres igualdades

$$\int_{\partial\Omega} P\mathbf{i} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x}\, dV, \tag{1}$$

$$\int_{\partial\Omega} Q\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y}\, dV, \tag{2}$$

y

$$\int_{\partial\Omega} P\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z}\, dV. \tag{3}$$

Probaremos la ecuación (3); las otras dos igualdades se pueden probar de manera análoga.

Como Ω es una región del tipo I (así como también de los tipos II y III), existe un par de funciones

$$z = f_1(x, y), \qquad z = f_2(x, y),$$

cuyo dominio común es una región elemental D en el plano xy, tal que Ω es el conjunto de todos los puntos (x, y, z) que satisfacen

$$f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y), \qquad (x, y) \in D.$$

Por la fórmula (4) de la sección 6.1, tenemos

$$\int_\Omega \frac{\partial R}{\partial z}\, dV = \int_D \left(\int_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\, dz \right) dx\, dy,$$

de modo que

$$\int_\Omega \frac{\partial R}{\partial z}\, dV = \int_D [R(x,y,f_2(x,y)) - R(x,y,f_1(x,y))]\, dx\, dy. \tag{4}$$

La frontera de Ω es una superficie cerrada cuya tapa S_2 es la gráfica de $z = f_2(x,y)$, $(x,y) \in D$ y cuya parte inferior S_1 es la gráfica de $z = f_1(x,y)$, $(x,y) \in D$. Los otros cuatro lados de $\partial\Omega$ están formados por las superficies S_3, S_4, S_5 y S_6, cuyas normales son siempre perpendiculares al eje z. (Ver, por ejemplo, la figura 8.4.4. Notar que pueden faltar algunos de los otros cuatro lados —por ejemplo, si Ω es un bola sólida y $\partial\Omega$ es una esfera— pero esto no afectará el argumento.) Por definición,

$$\int_{\partial\Omega} R\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\, dS = \int_{S_1} R\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}_1\, dS + \int_{S_2} R\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}_2\, dS + \sum_{i=3}^{6} \int_{S_i} R\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}_i\, dS.$$

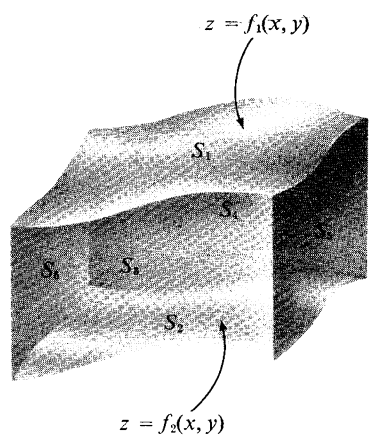


Figura 8.4.4 Una región Ω del tipo I para la cual $\int_{\partial\Omega} R\mathbf{k}\cdot dS = \int_\Omega (\partial R/\partial z)\, dV$. Los cuatro lados de $\partial\Omega$, que son S_3, S_4, S_5 y S_6 tienen normales perpendiculares al eje z.

Como en cada una de S_3, S_4, S_5 y S_6 la normal $\mathbf{n}_i$ es perpendicular a $\mathbf{k}$, tenemos $\mathbf{k}\cdot\mathbf{n} = 0$ a lo largo de estas caras, de modo que la integral se reduce a

$$\int_{\partial\Omega} R\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\, ds = \int_{S_1} R\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}_1\, dS + \int_{S_2} R\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}_2\, dS. \tag{5}$$

La superficie S_1 está definida por $z = f_1(x,y)$, de modo que

$$\mathbf{n}_1 = \frac{\dfrac{\partial f_1}{\partial x}\mathbf{i} + \dfrac{\partial f_1}{\partial y}\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2 + 1}}$$

(como S_1 es la parte inferior de Ω, para que $\mathbf{n}_1$ apunte hacia afuera debe tener componente $\mathbf{k}$ negativa; ver el ejemplo 2). Así,

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{k} = \frac{-1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2 + 1}}$$

y

$$\int_{S_1} R(\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_1)\, dS$$

$$= \int_D R(x, y, f_1(x, y)) \frac{-1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2 + 1}} \left(\sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2 + 1}\right) dA$$

$$= -\int_D R(x, y, f(x, y))\, dx\, dy. \tag{6}$$

Esta ecuación también se sigue de la fórmula (4), sección 7.5.

De manera análoga, en la cara superior S_2 tenemos

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2 + 1}},$$

de modo que

$$\int_{S_1} R(\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_2)\, dS = \int_D R(x, y, f_2(x, y))\, dx\, dy. \tag{7}$$

Al sustituir las ecuaciones (6) y (7) en la ecuación (5) y después comparar con la ecuación (4), obtenemos

$$\int_\Omega \frac{\partial R}{\partial z}\, dV = \int_{\partial\Omega} R(\mathbf{k} \cdot \mathbf{n})\, dS.$$

Las igualdades restantes (1) y (2), se pueden probar de la misma manera para completar la demostración. ■

El lector deberá notar que la demostración es análoga a la del teorema de Green. Por el procedimiento usado en el ejercicio 8 de la sección 8.1, podemos extender el teorema de Gauss a cualquier región que pueda partirse en subregiones del tipo IV. Esto incluye todas las regiones que nos interesan aquí. Como ejemplo, considerar la región entre dos superficies cerradas, una dentro de la otra. La superficie de esta región consta de dos partes orientadas según se muestra en la figura 8.4.5. Aplicaremos el teorema de la divergencia a dicha región cuando probemos la ley de Gauss en el teorema 10, más adelante.

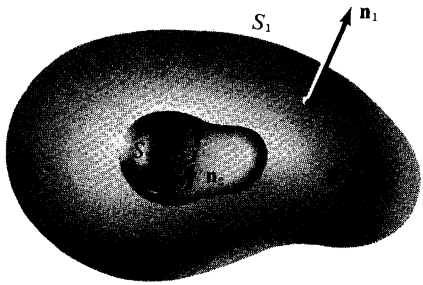


Figura 8.4.5 Región más general a la que se aplica el teorema de Gauss.

EJEMPLO 3 *Considerar* $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$. *Sea* S *la esfera unitaria definida por* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. *Evaluar* $\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$.

SOLUCIÓN Por el teorema de Gauss,

$$\int_\Omega (\operatorname{div} \mathbf{F})\, dV = \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS,$$

donde Ω es la bola acotada por la esfera. La integral de la izquierda es

$$2\int_\Omega (1 + y + z)\, dV = 2\int_\Omega dV + 2\int_\Omega y\, dV + 2\int_\Omega z\, dV.$$

Por simetría, podemos argumentar que $\int_\Omega y\, dV = \int_\Omega z\, dV = 0$ (como ejemplo, ver el ejercicio 15, sección 6.1). Así,

$$2\int_\Omega (1 + y + z)\, dV = 2\int_\Omega dV = \frac{8\pi}{3}$$

(como la bola unitaria tiene volumen $4\pi/3$; ver el ejemplo 1, sección 6.1). Los lectores se convencerán de lo difícil de manejar el cálculo directo de $\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$. ▲

EJEMPLO 4 *Usar el teorema de la divergencia para evaluar*

$$\int_{\partial W} (x^2 + y + z)\, dS,$$

donde W *es la bola sólida* $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

SOLUCIÓN Para poder aplicar el teorema de la divergencia de Gauss, debemos hallar algún campo vectorial

$$\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$$

en W con

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = x^2 + y + z.$$

En cualquier punto $(x, y, z) \in \partial W$, la normal unitaria exterior $\mathbf{n}$ a ∂W es

$$\mathbf{n} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

pues en ∂W, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y el radio vector $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ es normal a la esfera ∂W (figura 8.4.6). Por lo tanto, si $\mathbf{F}$ es el campo vectorial deseado, entonces

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = F_1 x + F_2 y + F_3 z.$$

Hacemos

$$F_1 x = x^2, \qquad F_2 y = y, \qquad F_3 z = z$$

y resolvemos para F_1, F_2 y F_3 para hallar que

$$\mathbf{F} = x\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Calculando div $\mathbf{F}$ obtenemos

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = 1 + 0 + 0 = 1.$$

Así, por el teorema de la divergencia de Gauss,

$$\int_{\partial W} (x^2 + y + z)\, dS = \int_W dV = \text{volumen } (W) = \frac{4}{3}\pi. \qquad \blacktriangle$$

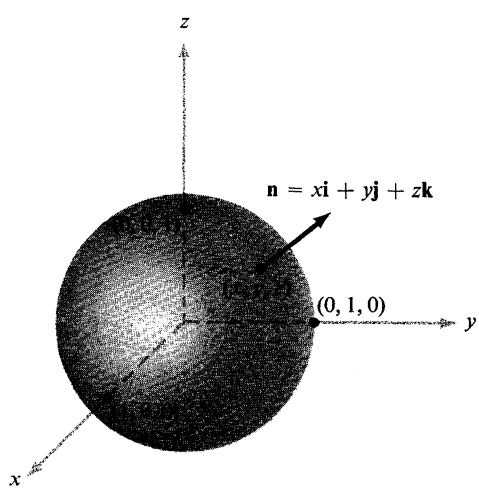


Figura 8.4.6 $\mathbf{n}$ es la normal unitaria a ∂W, la frontera de la bola W.

El significado físico de la divergencia es que en un punto P, $\operatorname{div}\mathbf{F}(\mathrm{P})$ es la tasa del flujo neto hacia el exterior en P por unidad de volumen. Esto se sigue del teorema de Gauss y del teorema del valor medio para integrales (así como del suplemento a la sección 3.4): Si Ω_ρ es una bola en $\mathbf{R}^3$ de radio ρ con centro en P, entonces existe un punto $\mathrm{Q} \in \Omega_\rho$ tal que

$$\int_{\partial\Omega_\rho} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \int_{\Omega_\rho} \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV = \operatorname{div}\mathbf{F}(\mathrm{Q})\cdot \text{volumen } (\Omega_\rho)$$

de modo que

$$\operatorname{div}\mathbf{F}(\mathrm{P}) = \lim_{\rho\to 0} \operatorname{div}\mathbf{F}(\mathrm{Q}) = \lim_{\rho\to 0} \frac{1}{V(\Omega_\rho)} \int_{\partial\Omega_\rho} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS.$$

Esto es análogo a la formulación del rotacional en términos de límite que se da al final de la sección 8.2. Así, si $\operatorname{div}\mathbf{F}(\mathrm{P}) > 0$, consideramos P como una *fuente*, pues hay un flujo neto hacia el exterior cerca de P. Si $\operatorname{div}\mathbf{F}(\mathrm{P}) < 0$, P se llama *sumidero* de $\mathbf{F}$.

Un campo vectorial $\mathbf{F}$ de clase C^1 definido en $\mathbf{R}^3$ se llama *sin divergencia* si $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$. Si $\mathbf{F}$ es sin divergencia, tenemos $\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = 0$ para todas las superficies cerradas S. El recíproco también se puede demostrar rápidamente usando el teorema de Gauss: Si $\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = 0$ para todas las superficies cerradas S, entonces $\mathbf{F}$ es sin divergencia. Si $\mathbf{F}$ es sin divergencia, vemos entonces que el flujo de $\mathbf{F}$ a través de cualquier superficie cerrada S es 0, de modo que si $\mathbf{F}$ es el campo de velocidad de un fluido, la cantidad neta de fluido que fluye hacia afuera de cualquier región será 0. Así, la misma cantidad de fluido debe fluir hacia adentro de la región que la que sale (en unidad de tiempo). Por lo tanto, un fluido con esta propiedad se llama *incompresible*. (En el ejercicio 22 se da una justificación adicional de esta terminología.)

EJEMPLO 5 *Evaluar* $\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$, *donde* $\mathbf{F}(x,y,z) = xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ *y* S *es la superficie del cilindro* $x^2+y^2=1$, *acotado por los planos* $z=1$ *y* $z=-1$ *e incluyendo las porciones* $x^2+y^2\le 1$ *cuando* $z=\pm 1$.

SOLUCIÓN Es posible calcular directamente esta integral pero, como en muchos otros casos, es más fácil usar el teorema de la divergencia.

Ahora, S es la frontera de la región Ω dada por $x^2+y^2\le 1$, $-1\le z\le 1$. Así, $\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int_\Omega (\operatorname{div}\mathbf{F})\,dV$. Más aún,

$$\begin{aligned}\int_\Omega (\operatorname{div}\mathbf{F})\,dV = \int_\Omega (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz &= \int_{-1}^{1}\left(\int_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)\,dx\,dy\right)dz \\ &= 2\int_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)\,dx\,dy.\end{aligned}$$

Antes de evaluar la integral doble notamos que la integral de superficie satisface $\int_{\partial\Omega}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = 2\int_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)\,dx\,dy > 0$. Esto significa que $\int_{\partial\Omega}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$, el

flujo neto de $\mathbf{F}$ hacia afuera del cilindro, es positivo, lo cual concuerda con el hecho de que $\operatorname{div}\mathbf{F} = x^2 + y^2 \geq 0$ dentro del cilindro.

Cambiamos variables a coordenadas polares para evaluar la integral doble:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\operatorname{sen}\theta, \qquad 0 \leq r \leq 1, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Tenemos, por lo tanto, $\partial(x,y)/\partial(r,\theta) = r$ y $x^2 + y^2 = r^2$. Así,

$$\int_{x^2+y^2\leq 1} (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 r^3\,dr\right)d\theta = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Por lo tanto, $\int_\Omega \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV = \pi$. ▲

Como señalamos antes, el teorema de la divergencia de Gauss se puede aplicar a regiones en el espacio más generales que las del tipo IV. Para concluir esta sección, usaremos esta observación para probar un resultado importante.

TEOREMA 10: LEY DE GAUSS *Sea M una región en $\mathbf{R}^3$ del tipo IV. Entonces si $(0,0,0) \notin \partial M$, tenemos*

$$\int_{\partial M} \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{r^3}\,dS = \begin{cases} 4\pi & \text{si} \quad (0,0,0) \in M \\ 0 & \text{si} \quad (0,0,0) \notin M \end{cases}$$

donde

$$\mathbf{r}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

y

$$r(x,y,z) = \|\mathbf{r}(x,y,z)\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

SECCIÓN OPTATIVA: DEMOSTRACIÓN DE LA LEY DE GAUSS

Primero suponer que $(0,0,0) \notin M$. Entonces $\mathbf{r}/r^3$ es un campo vectorial C^1 en M y ∂M, de modo que por el teorema de la divergencia

$$\int_{\partial M} \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{r^3}\,dS = \int_M \nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right)dV.$$

Pero $\nabla\cdot(\mathbf{r}/r^3) = 0$ para $r \neq 0$, como el lector puede verificar fácilmente (ver el ejercicio 8, sección 3.5). Así,

$$\int_{\partial M} \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{r^3}\,dS = 0.$$

Supongamos ahora que $(0,0,0) \in M$. No podemos seguir usando el método anterior pues $\mathbf{r}/r^3$ no es suave en M, en vista del denominador cero en $\mathbf{r} = (0,0,0)$. Como $(0,0,0) \in M$ y $(0,0,0) \notin \partial M$, existe $\epsilon > 0$ tal que la bola N de radio ϵ con centro en $(0,0,0)$ está completamente contenida en M. Ahora bien, sea Ω la región entre M y N. Entonces Ω tiene frontera $\partial N \cup \partial M = S$. Pero la orientación en ∂N inducida por la normal *exterior* en Ω es opuesta a la obtenida a partir de N (ver la figura 8.4.7). Ahora, $\nabla \cdot (\mathbf{r}/r^3) = 0$ en Ω, de modo que por el teorema de la divergencia (generalizado),

$$\int_S \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{r^3}\,dS = \int_\Omega \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) = 0.$$

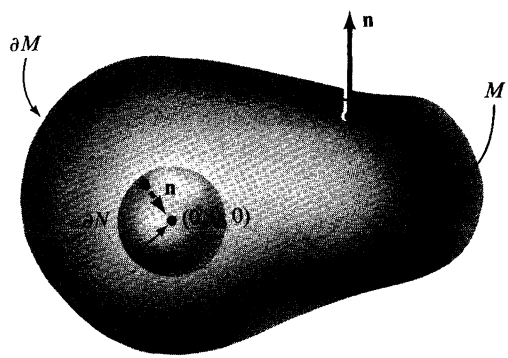


Figura 8.4.7 Orientación exterior inducida en S.

Como

$$\int_S \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{r^3}\,dS = \int_{\partial M} \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{r^3}\,dS + \int_{\partial N} \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{r^3}\,dS,$$

donde $\mathbf{n}$ es la normal exterior a S, tenemos

$$\int_{\partial M} \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{r^3}\,dS = -\int_{\partial N} \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{r^3}\,dS.$$

Ahora bien, en ∂N, $\mathbf{n} = -\mathbf{r}/r$ y $r = \epsilon$, pues ∂N es una esfera de radio ϵ, de modo que

$$-\int_{\partial N} \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{r^3}\,dS = \int_{\partial N} \frac{\epsilon^2}{\epsilon^4}\,dS = \frac{1}{\epsilon^2}\int_{\partial N} dS.$$

Pero $\int_{\partial N} dS = 4\pi\epsilon^2$, el área de superficie de la esfera de radio ϵ. Esto prueba el resultado. ■

EJEMPLO 6 La ley de Gauss tiene la siguiente interpretación física. El potencial debido a una carga puntual Q en $(0,0,0)$ está dado por

$$\phi(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi r} = \frac{Q}{4\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

y el campo eléctrico correspondiente es

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi = \frac{Q}{4\pi}\left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right).$$

Así, el teorema 10 asegura que el flujo eléctrico total $\int_{\partial M} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}$ (esto es, el flujo de $\mathbf{E}$ hacia afuera de una superficie cerrada ∂M) es igual a Q si la carga está dentro de M y cero de no ser así. (En el ejercicio 14 se da una generalización.) Nótese que aún si $(0,0,0) \notin M$, $\mathbf{E}$ continuará siendo diferente de cero en M.

Para una distribución continua de carga descrita por medio de una densidad de carga ρ, el campo $\mathbf{E}$ está relacionado con la densidad ρ mediante

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \nabla\cdot\mathbf{E} = \rho.$$

Así, por el teorema de Gauss,

$$\int_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \int_\Omega \rho\, dV = Q,$$

o el flujo hacia afuera de una superficie es igual a la carga total dentro. ▲

Suplemento a la Sección 8.4: Divergencia y rotacional en coordenadas polares y cilíndricas

Usamos el teorema de Gauss para deducir la fórmula

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2 F_\rho) + \frac{1}{\rho\operatorname{sen}\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}(\operatorname{sen}\phi F_\phi) + \frac{1}{\rho\operatorname{sen}\phi}\frac{\partial F_\theta}{\partial\theta} \tag{8}$$

para la divergencia de un campo vectorial $\mathbf{F}$ en coordenadas esféricas (ver el teorema 5 de la sección 3.5). El método es usar la fórmula

$$\operatorname{div}\mathbf{F}(\mathrm{P}) = \lim_{\Omega\to P}\frac{1}{V(\Omega)}\int_{\partial\Omega}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS, \tag{9}$$

donde Ω es una región con volumen $V(\Omega)$ que se encoge hasta un punto P (en el libro hemos tomado una bola Ω_ρ, pero podemos usar regiones con cualquier forma). Sea Ω

la región sombreada de la figura 3.5.3. Entonces para las dos caras ortogonales a la dirección radial, la integral de superficie en la ecuación (9) es, aproximadamente,

$$\begin{aligned} &F_\rho(\rho + d\rho, \phi, \theta) \times \text{área de la cara exterior} - F_\rho(\rho, \phi, \theta) \times \text{área de la cara interior} \\ &\quad \approx F_\rho(\rho + d\rho, \phi, \theta)(\rho + d\phi)^2 \operatorname{sen}\phi \, d\phi \, d\theta - F_\rho(\rho, \phi, \theta)\rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\phi \, d\theta \\ &\quad \approx \frac{\partial}{\partial \rho}(F_\rho \rho^2 \operatorname{sen}\phi) \, d\rho \, d\phi \, d\theta \end{aligned} \tag{10}$$

debido al teorema del valor medio para una variable. Dividiendo entre el volumen de la región Ω, a saber, $\rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$, vemos que la contribución al lado derecho de la ecuación (9) es

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2 F_\rho) \tag{11}$$

para estas caras. Asimismo, la contribución de las caras ortogonales a la dirección ϕ es $\dfrac{1}{\rho \operatorname{sen}\phi}\dfrac{\partial}{\partial \phi}(\operatorname{sen}\phi F_\phi)$, y para la dirección θ, $\dfrac{1}{\rho \operatorname{sen}\phi}\dfrac{\partial F_\theta}{\partial \theta}$. Sustituyendo en la ecuación (9) y tomando el límite se obtiene la ecuación (8).

La fórmula para rot $\mathbf{F}$ en coordenadas esféricas se puede deducir de manera análoga usando la fórmula (5) de la sección 8.2, a saber

$$\operatorname{rot}\mathbf{F}(\mathrm{P}) \cdot \mathbf{n}(\mathrm{P}) = \lim_{S \to \mathrm{P}} \frac{1}{A(S)} \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

La deducción de las fórmulas correspondientes en coordenadas cilíndricas es análoga.

EJERCICIOS

1. Sea S una superficie cerrada. Usar el teorema de Gauss para mostrar que si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial C^2, entonces $\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = 0$. (Comparar con el ejercicio 14 de la sección 8.2.)

2. Sea $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$. Evaluar la integral de superficie de $\mathbf{F}$ sobre la esfera unitaria.

3. Evaluar $\int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y Ω es el cubo unitario (en el primer octante). Realizar directamente los cálculos y verificar usando el teorema de la divergencia.

4. Repetir el ejercicio 3 para
(a) $\mathbf{F} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$
(b) $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

5. Sea $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$. Evaluar $\int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ para cada una de las siguientes regiones Ω:
(a) $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$
(b) $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$ y $x \geq 0$
(c) $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$ y $x \leq 0$

6. Repetir el ejercicio 5 para $\mathbf{F} = (x-y)\mathbf{i} + (y-z)\mathbf{j} + (z-x)\mathbf{k}$. (La solución sólo a la parte (b) está en la Guía de estudio de este libro.)

7. Sea S la superficie de la región Ω. Mostrar que

$$\int_S \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}\,dS = 3 \text{ volumen } (\Omega).$$

Intentar explicarlo geométricamente. (IDEA: Suponer que $(0,0,0) \in \Omega$ y considerar el cono oblicuo con vértice en $(0,0,0)$, base ΔS y altura $\|\mathbf{r}\|$. Su volumen es $\frac{1}{3}(\Delta S)(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n})$.)

8. Evaluar $\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F} = 3xy^2\mathbf{i} + 3x^2y\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ y S es la superficie de la esfera unitaria.

9. Evaluar $\iint_{\partial W} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dA$, donde $\mathbf{F}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$ y W es el cubo unitario en el primer octante. Efectuar directamente los cálculos y verificar usando el teorema de la divergencia.

10. Evaluar la integral de superficie $\iint_{\partial S} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dA$, donde $\mathbf{F}(x,y,z) = \mathbf{i}+\mathbf{j}+z(x^2+y^2)^2\mathbf{k}$ y ∂S es la superficie del cilindro $x^2+y^2 \le 1$, $0 \le z \le 1$.

11. Probar que

$$\iiint_W (\nabla f)\cdot\mathbf{F}\,dx\,dy\,dz = \iint_{\partial W} f\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dA - \iiint_W f\nabla\cdot\mathbf{F}\,dx\,dy\,dz.$$

12. Probar la identidad

$$\nabla\cdot(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = \mathbf{G}\cdot(\nabla\times\mathbf{F}) - \mathbf{F}\cdot(\nabla\times\mathbf{G}).$$

***13.** Mostrar que $\int_\Omega (1/r^2)\,dx\,dy\,dz = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}/r^2)\,dS$ donde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

14. Fijar los vectores $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k \in \mathbf{R}^3$ y los números ("cargas") $q_1,\ldots,q_k$. Definir $\phi(x,y,z) = \sum_{i=1}^k q_i/(4\pi\|\mathbf{r}-\mathbf{v}_i\|)$, donde $\mathbf{r} = (x,y,z)$. Mostrar que para una superficie cerrada S y $\mathbf{E} = -\nabla\phi$,

$$\int_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = Q,$$

donde Q es la carga total dentro de S. (Suponer que se aplica la ley de Gauss del teorema 10 y que ninguna de las cargas está en S.)

15. Probar las *identidades de Green*

$$\int_{\partial\Omega} f\nabla g\cdot\mathbf{n}\,d\mathbf{S} = \int_\Omega (f\nabla^2 g - \nabla f\cdot\nabla g)\,dV$$

y

$$\int_{\partial\Omega} (f\nabla g - g\nabla f)\cdot\mathbf{n}\,dS = \int_\Omega (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\,dV.$$

16. Suponer que $\mathbf{F}$ satisface $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$ y $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$. Mostrar que podemos escribir $\mathbf{F} = \nabla f$, donde $\nabla^2 f = 0$.

***17.** Sea ρ una función continua en $\mathbf{R}^3$ tal que $\rho(\mathbf{q}) = 0$ excepto para $\mathbf{q}$ en alguna región Ω. Sea $\mathbf{q} \in \Omega$ denotada por $\mathbf{q} = (x, y, z)$. El *potencial* de ρ se define como la función

$$\phi(\mathbf{p}) = \int_\Omega \frac{\rho(\mathbf{q})}{4\pi\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|}\, dV(\mathbf{q}),$$

donde $\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|$ es la distancia entre $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$.

(a) Usando el método del teorema 10, mostrar que $\int_{\partial W} \nabla\phi \cdot \mathbf{n}\, dS = -\int_W \rho\, dV$ para aquellas regiones W que puedan partirse en una unión finita de regiones del tipo IV.

(b) Mostrar que ϕ satisface la *ecuación de Poisson*

$$\nabla^2\phi = -\rho.$$

(IDEA: Usar la parte (a)). (Nótese que si ρ es una densidad de carga, entonces la integral que define a ϕ puede pensarse como la suma del potencial en $\mathbf{p}$ causado por las cargas puntuales distribuidas sobre Ω de acuerdo con la densidad ρ.)

18. Suponer que $\mathbf{F}$ es tangente a las superficies cerradas S de una región Ω. Probar que

$$\int_\Omega (\operatorname{div} \mathbf{F})\, dV = 0.$$

***19.** Usar la ley de Gauss y la simetría para probar que el campo eléctrico debido a una carga Q esparcida uniformemente sobre la superficie de una esfera, es el mismo fuera de la superficie que el campo desde una carga puntual Q situada en el centro de la esfera. ¿Cómo es el campo dentro de la esfera?

***20.** Reformular el ejercicio 19 en términos de campos gravitacionales.

21. Mostrar cómo se puede usar la ley de Gauss para resolver la parte (b) del ejercicio 25 en la sección 8.3.

***22.** *(Teorema del transporte).* Sea $\phi(\mathbf{x}, t)$ el flujo del campo vactorial $\mathbf{F}$ en $\mathbf{R}^3$ (ver la sección 3.4), y sea $J(\mathbf{x}, t)$ el jacobiano de la función $\phi_t\colon \mathbf{x} \mapsto \phi(\mathbf{x}, t)$ para t fija.

(a) Usando la demostración del teorema 3 de la sección 3.4, mostrar que

$$\frac{\partial}{\partial t} J(\mathbf{x}, t) = [\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x})] J(\mathbf{x}, t).$$

(b) Usando el teorema de cambio de variables y la parte (a), mostrar que si $f(x, y, z, t)$ es una función dada y $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ es cualquier región, entonces

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_t} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{\Omega_t} \left(\frac{Df}{Dt} + f \operatorname{div} \mathbf{F} \right) dx\, dy\, dz \quad \text{(ecuación de transporte)}$$

donde $\Omega_t = \phi_t(\Omega)$, la cual es la región moviéndose con el flujo, y donde $Df/Dt = \partial f/\partial t + \mathbf{D}_\mathbf{x} f \cdot \mathbf{F}$ es la derivada material (ejercicio 9, sección 3.3).

(c) Tomar $f = 1$ en la parte (b) y mostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$

(ii) $\text{volumen}(\Omega_t) = \text{volumen}(\Omega)$

(iii) $J(\mathbf{x}, t) = 1$

***23.** Sean ϕ, J, $\mathbf{F}$ y f como en el ejercicio 22. Probar que la forma vectorial del teorema del transporte, a saber,

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} (f\mathbf{F})\, dx\, dy\, dz = \int_{\Omega_t} \left[\frac{\partial}{\partial t}(f\mathbf{F}) + \mathbf{F}\cdot\nabla(f\mathbf{F}) + (f\mathbf{F})\operatorname{div}\mathbf{F}\right] dx\, dy\, dz,$$

donde $\mathbf{F}\cdot\nabla(f\mathbf{F})$ denota la matriz derivada de 3×3 $\mathbf{D}(f\mathbf{F})$, que opera en el vector columna $\mathbf{F}$; en coordenadas cartesianas, $\mathbf{F}\cdot\nabla\mathbf{G}$ es el vector cuya i-ésima componente es

$$\sum_{j=1}^{3} F_j \frac{\partial G^i}{\partial x_j}$$

(denominando (x, y, z) como (x_1, x_2, x_3)).

SECCIÓN OPTATIVA

*8.5 APLICACIONES A LA FÍSICA Y ECUACIONES DIFERENCIALES†

Podemos aplicar los conceptos desarrollados en este capítulo a la formulación de algunas teorías físicas. Primero estudiaremos la importante ecuación conocida como ecuación *de conservación*. En relación con fluidos, expresa la conservación de masa, y en la teoría electromagnética, la conservación de carga. Aplicaremos la ecuación a conducción de calor y a electromagnetismo.

Sea $\mathbf{V}(t, x, y, z)$ un campo vectorial C^1 en $\mathbf{R}^3$ para cada t y sea $\rho(t, x, y, z)$ una función C^1 con valores reales. Por *ley de conservación de masa* para $\mathbf{V}$ y ρ, entenderemos que la condición

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} \rho\, dV = -\int_{\partial\Omega} \mathbf{J}\cdot\mathbf{n}\, dS$$

vale para todas las regiones Ω en $\mathbf{R}^3$, donde $\mathbf{J} = \rho\mathbf{V}$; ver la figura 8.5.1.

---

†El lector encontrará útil referirse a H. M. Schey, *Div, Grad, Curl and All That*, W. W. Norton, Nueva York, 1973, para ver más ejemplos.

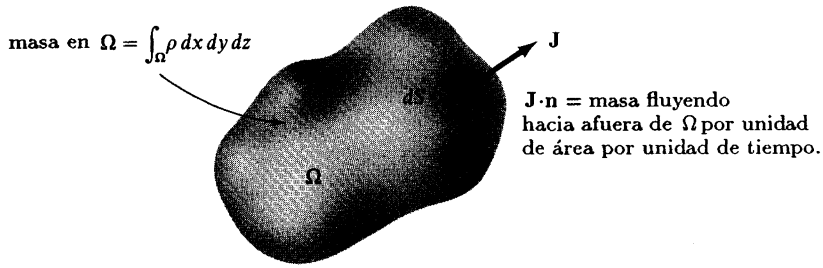


Figura 8.5.1 La tasa de cambio de la masa en Ω es igual a la tasa a la cual la masa cruza $\partial\Omega$.

Si pensamos ρ como una densidad de masa (ρ podría ser también densidad de carga), esto es, la masa por unidad de volumen, y $\mathbf{V}$ como el campo de velocidad de un fluido, la condición dice simplemente que la tasa de cambio de la masa total en Ω es igual a la tasa a la cual la masa fluye *hacia adentro* de Ω. Recordar que $\int_{\partial\Omega} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}\, dS$ se llama el flujo de $\mathbf{J}$. Necesitamos el resultado siguiente.

TEOREMA 11 *Para $\mathbf{V}$ y ρ definidos en $\mathbf{R}^3$, la ley de conservación de masa para $\mathbf{V}$ y ρ es equivalente a la condición*

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \tag{1}$$

esto es,

$$\rho \operatorname{div} \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \nabla \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{1'}$$

Aquí, $\operatorname{div} \mathbf{J}$ significa que calculamos $\operatorname{div} \mathbf{J}$ manteniendo a t fija, y $\partial\rho/\partial t$ significa que diferenciamos ρ respecto a t para x, y y z fijas.

DEMOSTRACIÓN Primero, observemos que $(d/dt) \int_\Omega \rho\, dx\, dy\, dz = \int_\Omega (\partial\rho/\partial t)\, dx\, dy\, dz$ y

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{J}\, dV,$$

debido al teorema de la divergencia. Así, la conservación de masa es equivalente a la condición

$$\int_\Omega \left(\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dx\, dy\, dz = 0.$$

Como esto debe cumplirse para todas las regiones Ω, es equivalente a $\operatorname{div} \mathbf{J} + \partial\rho/\partial t = 0$. ■

La ecuación $\operatorname{div} \mathbf{J} + \partial\rho/\partial t = 0$ se llama *ecuación de continuidad*. Ésta no es la única ecuación que gobierna el movimiento de un fluido, luego no determina el movimiento del fluido, pero es una ecuación que se debe cumplir. Más adelante en esta sección obtendremos las ecuaciones adicionales necesarias para determinar el flujo. Usando el teorema del transporte (ejercicio 22, sección 8.4), el lector puede verificar que la ecuación de continuidad es equivalente a la condición

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho\, dx\, dy\, dz = 0,$$

la cual dice que la masa de una región que se mueve con el fluido es constante en el tiempo. (La notación Ω_t se explica en el mismo ejercicio.)

Los fluidos gobernados por la ecuación de continuidad pueden ser compresibles. Si $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$ (caso incompresible) y ρ es constante, la ecuación (1′) se sigue de manera automática. Pero en general, incluso para fluidos incompresibles la ecuación no es automática, pues ρ puede depender de (x, y, z) y t. Así, aun si se cumple $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$, puede que $\operatorname{div}(\rho\mathbf{V}) \neq 0$ siga siendo cierto.

A continuación estudiaremos la ecuación de Euler para un fluido perfecto. Considerar un fluido no viscoso moviéndose en el espacio con un campo de velocidad $\mathbf{V}$. Cuando decimos que el fluido es "perfecto", queremos decir que si Ω es cualquier parte del fluido, actúan fuerzas de presión sobre la frontera de Ω, a lo largo de su normal. Suponemos que la fuerza por unidad de área que actúa sobre $\partial\Omega$ es $-p\mathbf{n}$, donde $p(x, y, z, t)$ es alguna función llamada *presión;* ver la figura 8.5.2. Así, la fuerza de presión total que actúa sobre Ω es

$$\mathbf{F}_{\partial\Omega} = \text{fuerza} = -\int_{\partial\Omega} p\mathbf{n}\, dS.$$

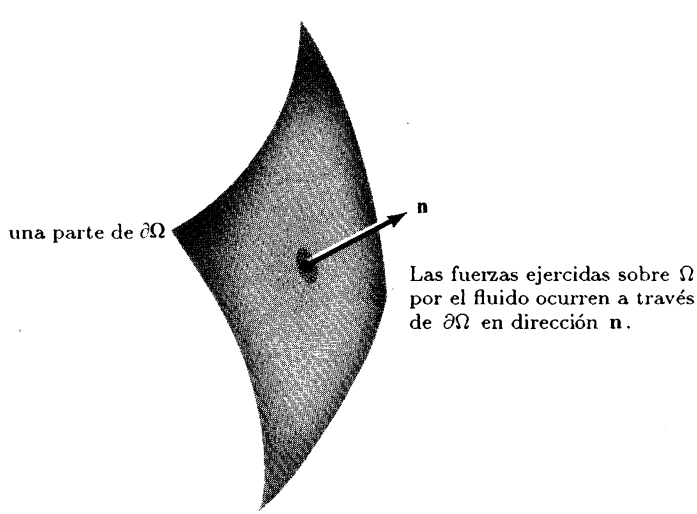


Figura 8.5.2 La fuerza que actúa sobre $\partial\Omega$ por unidad de área es $-p\mathbf{n}$.

Ésta es una cantidad *vectorial;* la i-ésima componente de $\mathbf{F}_{\partial\Omega}$ es la integral de la i-ésima componente de $p\mathbf{n}$ sobre la superficie $\partial\Omega$ (entonces, esto es la integral de superficie de una función con valores reales). Si $\mathbf{e}$ es cualquier vector fijo en el espacio, tenemos

$$\mathbf{F}_{\partial\Omega} \cdot \mathbf{e} = -\int_{\partial\Omega} p\mathbf{e} \cdot \mathbf{n}\, dS,$$

que es la integral de un escalar sobre $\partial\Omega$. Por el teorema de la divergencia y la identidad 8 de la tabla 3.1,

$$\begin{aligned} \mathbf{e} \cdot \mathbf{F}_{\partial\Omega} &= -\int_{\Omega} \operatorname{div}(p\mathbf{e})\, dx\, dy\, dz \\ &= -\int_{\Omega} (\operatorname{grad} p) \cdot \mathbf{e}\, dx\, dy\, dz, \end{aligned}$$

de modo que

$$\mathbf{F}_{\partial\Omega} = -\int_{\Omega} \nabla p\, dx\, dy\, dz.$$

Ahora aplicaremos la segunda ley de Newton a una región en movimiento Ω_t. Aquí, $\Omega_t = \phi_t(\Omega)$, donde $\phi_t(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}, t)$ denota el flujo de $\mathbf{V}$. La tasa de cambio del momento de Ω_t es igual a la fuerza que actúa sobre ella:

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho\mathbf{V}\, dx\, dy\, dz = \mathbf{F}_{\partial\Omega_t} = \int_{\Omega_t} \nabla p\, dx\, dy\, dz.$$

Aplicamos la forma vectorial del teorema del transporte al lado izquierdo (ejercicio 23, sección 8.4) para obtener

$$\int_{\Omega_t} \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{V}) + \mathbf{V} \cdot (\rho\mathbf{V}) + \rho\mathbf{V} \operatorname{div} \mathbf{V}\right] dx\, dy\, dz = -\int_{\Omega_t} \nabla p\, dx\, dy\, dz.$$

Como Ω_t es arbitrario, esto es equivalente a

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{V}) + \mathbf{V} \cdot \nabla(\rho\mathbf{V}) + \rho\mathbf{V} \operatorname{div} \mathbf{V} = -\nabla p.$$

Al simplificar usando la ecuación de continuidad de la fórmula (1′) obtenemos

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla\mathbf{V}\right) = -\nabla p. \tag{2}$$

Ésta es la *ecuación de Euler para un fluido perfecto.* Para fluidos compresibles, p es una función dada de ρ (por ejemplo, para muchos gases, $p = A\rho^{\gamma}$ para constantes A y γ). Si, por otro lado, el fluido es incompresible, p se determina a partir de la condición $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$. Las ecuaciones (1) y (2) gobiernan entonces por completo el movimiento del fluido.

NOTA HISTÓRICA

Las ecuaciones que describen el movimiento de un fluido fueron deducidas por primera vez por Leonhard Euler en 1755, en un artículo titulado "General Principles of the Motion of Fluids." Euler realizó trabajo fundamental en mecánica así como en matemáticas puras; esencialmente él inició el tema de mecánica analítica (en oposición a los métodos geométricos usados por Newton). A él se deben las ecuaciones de un cuerpo rígido (ecuación que se aplica, por ejemplo, a un satélite que se desploma) y la formulación de varias ecuaciones básicas de la mecánica en términos de valores mínimos de funciones. Euler escribió el primer libro de texto de cálculo y contribuyó, de hecho, a todas las ramas de las matemáticas. Escribió varios libros y cientos de artículos de investigación después de quedar totalmente ciego, y a su muerte, en 1783, estaba trabajando en un nuevo tratado sobre mecánica de fluidos. Las ecuaciones de Euler para un fluido fueron finalmente modificadas por Navier y Stokes para incluir efectos de viscosidad; las ecuaciones resultantes de Navier-Stokes se describen en virtualmente todo libro de mecánica de fluidos. A Stokes se debe además, por supuesto, el teorema de Stokes, uno de los principales resultados en este libro.

Pasemos ahora a la *ecuación de calor*, una de las ecuaciones más importantes de las matemáticas aplicadas. Ha sido, y sigue siendo, uno de los motivos principales para el estudio de ecuaciones diferenciales parciales.

Vamos a expresarnos de manera intuitiva. Si $T(t, x, y, z)$ (una función C^2) denota la temperatura de un cuerpo en el tiempo t, entonces ∇T representa el gradiente de temperatura: el calor "fluye" según el campo vectorial $-\nabla T = \mathbf{F}$. Nótese que ∇T apunta en la dirección en que crece T (capítulo 3). Como el calor fluye de lo caliente a lo frío, hemos insertado un signo de resta. La densidad de energía, esto es, la energía por unidad de volumen, es $c\rho_0 T$, donde c es una constante (calor específico) y ρ_0 es la densidad de masa, que se supone constante. (Aceptamos estas afirmaciones de la física elemental). El *vector de flujo de energía* es $\mathbf{J} = k\mathbf{F}$, donde k es una constante llamada *conductividad.*

Proponemos que se conserve la energía. Formalmente esto significa que $\mathbf{J}$ y $\rho = c\rho_0 T$ deberán obedecer la ley de conservación de masa, con ρ jugando el papel de "masa" (nótese que es densidad de energía, no de masa); esto es,

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} \rho\, dV = -\int_{\partial\Omega} \mathbf{J}\cdot\mathbf{n}\, dS.$$

Por el teorema 11, esta afirmación es equivalente a

$$\operatorname{div}\mathbf{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0.$$

Pero $\operatorname{div}\mathbf{J} = \operatorname{div}(-k\nabla T) = -k\nabla^2 T$. (Recordar que $\nabla^2 T = \partial^2 T/\partial x^2 + \partial^2 T/\partial y^2 + \partial^2 T/\partial z^2$ y ∇^2 es el operador de Laplace.) A continuación, tenemos $\partial\rho/\partial t = \partial(c\rho_0 T)/$

$\partial t = c\rho_0(\partial T/\partial t)$. Así, la ecuación (1) se convierte, en este caso, en

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{c\rho_0}\nabla^2 T = \kappa \nabla^2 T, \tag{3}$$

donde $\kappa = k/c\rho_0$ se llama *difusividad*. La ecuación (3) es la importante ecuación de calor.

Así como las ecuaciones (1) y (2) gobiernan el flujo de un fluido ideal, la ecuación (3) gobierna la conducción de calor, en el sentido siguiente. Si $T(0, x, y, z)$ es una distribución de temperatura inicial dada, entonces está determinada una única $T(t, x, y, z)$ que satisfaga la ecuación (3). En otras palabras, la condición inicial en $t = 0$, nos da el resultado para $t > 0$. Nótese que si T no cambia con el tiempo (caso estacionario), entonces se debe tener $\nabla^2 T = 0$ (ecuación de Laplace).

Estudiemos ahora las *ecuaciones de Maxwell*, que gobiernan los campos electromagnéticos. La forma de estas ecuaciones depende de las unidades físicas que se empleen, y al cambiar unidades se introducen factores como 4π, la velocidad de la luz y así sucesivamente. Consideraremos el sistema en el que las ecuaciones de Maxwell sean más sencillas.

Sean $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ funciones C^1 de (t, x, y, z) que son campos vectoriales para cada t. Van a satisfacer (por definición) las ecuaciones de Maxwell con densidad de carga $\rho(t, x, y, z)$ y densidad de corriente $\mathbf{J}(t, x, y, z)$ cuando se cumpla lo siguiente:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \qquad \text{(ley de Gauss)}, \tag{4}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \qquad \text{(no hay fuentes magnéticas)}, \tag{5}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \mathbf{0} \qquad \text{(ley de Faraday)}, \tag{6}$$

y

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{J} \qquad \text{(ley de Ampère)}. \tag{7}$$

De estas leyes, las ecuaciones (4) y (6) se estudiaron en las secciones 8.4 y 8.2 en forma integral; históricamente, surgieron en estas formas como leyes físicamente observadas. La ley de Ampère se mencionó como caso especial en el ejemplo 12, sección 7.2.

Físicamente, se interpreta $\mathbf{E}$ como el *campo eléctrico* y $\mathbf{H}$ como el *campo magnético*. Conforme avanza el tiempo t, estos campos interactúan de acuerdo con las ecuaciones anteriores, entre sí y con cualesquiera cargas y corrientes que estén presentes. Por ejemplo, la propagación de ondas electromagnéticas en el vacío está gobernada por estas ecuaciones con $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ y $\rho = 0$.

Como $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$, podemos aplicar el teorema 8 de la sección 8.3 para concluir que $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$ para algún campo vectorial $\mathbf{A}$. (Estamos suponiendo que $\mathbf{H}$ está definido en todo $\mathbf{R}^3$ para cada tiempo t.) Este campo vectorial $\mathbf{A}$ no es único, y podemos usar igualmente $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f$ para cualquier función $f(t, x, y, z)$ pues $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$. (Esta libertad en la selección de $\mathbf{A}$ se llama *libertad de medición*.) Para cualquier selección

de $\mathbf{A}$ tenemos, por la ecuación (6),

$$\begin{aligned}\mathbf{0} = \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \mathbf{A} \\ &= \nabla \times \mathbf{E} + \nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right).\end{aligned}$$

Entonces, aplicando el teorema 7, sección 8.3, tenemos una función ϕ con valores reales definida en $\mathbf{R}^3$, tal que

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\phi.$$

Sustituyendo esta ecuación y $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$ en la ecuación (7) y usando la siguiente identidad de la tabla 3.1,

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A},$$

obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) - \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\phi\right) \\ &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\phi).\end{aligned}$$

Así,

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mathbf{J} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\phi),$$

esto es,

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mathbf{J} + \nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\partial \phi}{\partial t}\right). \tag{8}$$

Usando de nuevo la ecuación $\mathbf{E} + \partial\mathbf{A}/\partial t = -\nabla\phi$ y la ecuación $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$, obtenemos,

$$\rho = \nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \left(-\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = -\nabla^2\phi - \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{A})}{\partial t},$$

esto es,

$$\nabla^2\phi = -\rho - \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{A})}{\partial t}. \tag{9}$$

Ahora, aprovechemos la libertad que tenemos para escoger $\mathbf{A}$. Impongamos la "condición"

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0. \tag{10}$$

Debemos estar seguros de que podemos hacerlo. Supongamos que tenemos dado $\mathbf{A}_0$ y una ϕ_0 correspondiente; ¿podemos escoger un nuevo $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \nabla f$ y después una nueva ϕ tal que $\nabla \cdot \mathbf{A} + \partial\phi/\partial t = 0$? Con este nuevo $\mathbf{A}$, la nueva ϕ es $\phi_0 - \partial f/\partial t$; dejamos la verificación como un ejercicio para el lector. Entonces la condición (10) sobre f se convierte en

$$0 = \nabla \cdot (\mathbf{A}_0 + \nabla f) + \frac{\partial(\phi_0 - \partial f/\partial t)}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{A}_0 + \nabla^2 f + \frac{\partial \phi_0}{\partial t} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

o

$$\nabla^2 f - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -\left(\nabla \cdot \mathbf{A}_0 + \frac{\partial \phi_0}{\partial t}\right). \tag{11}$$

Así, para poder escoger $\mathbf{A}$ y ϕ que satisfagan $\nabla \cdot \mathbf{A} + \partial\phi/\partial t = 0$, debemos poder despejar f de la ecuación (11). En efecto, es posible hacerlo bajo estas condiciones generales, aunque no lo probemos aquí. La ecuación (11) se llama la *ecuación de onda u homogénea.*

Si aceptamos que $\mathbf{A}$ y se pueden escoger de modo que satisfagan $\nabla \cdot \mathbf{A} + \partial\phi/\partial t = 0$, entonces las ecuaciones (8) y (9) para $\mathbf{A}$ y ϕ se convierten en

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mathbf{J}; \tag{8'}$$

$$\nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\rho. \tag{9'}$$

La ecuación (9′) se sigue de la ecuación (9) al sustituir $\nabla \cdot \mathbf{A}$ por $-\partial\phi/\partial t$. Así aparece de nuevo la ecuación de onda.

Recíprocamente, si $\mathbf{A}$ y ϕ satisfacen las ecuaciones $\nabla \cdot \mathbf{A} + \partial\phi/\partial t = 0$, $\nabla^2\phi - \partial^2\phi/\partial t^2 = -\rho$ y $\nabla^2 \mathbf{A} - \partial^2 \mathbf{A}/\partial t^2 = -\mathbf{J}$, entonces $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial\mathbf{A}/\partial t$ y $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$ satisfacen las ecuaciones de Maxwell. *Este procedimiento reduce entonces las ecuaciones de Maxwell al estudio de la ecuación de onda.**

Esto es una ventaja, pues las soluciones a la ecuación de onda se han estudiado bastante bien (se aprende a resolverla en la mayoría de los cursos sobre ecuaciones diferenciales). Para indicar la naturaleza ondulatoria de las soluciones, observar por ejemplo, que para cualquier función f,

$$\phi(t, x, y, z) = f(x - t)$$

resuelve la ecuación de onda $\nabla^2\phi - (\partial^2\phi/\partial t^2) = 0$. Esta solución simplemente propaga la gráfica de f como una onda; así, podemos conjeturar que las soluciones de las ecuaciones de Maxwell son de naturaleza ondulatoria. Históricamente, ésta fue la gran aportación de Maxwell, y pronto condujo al descubrimiento de las ondas de radio, realizado por Hertz.

---

*Hay variaciones de este procedimiento. Para mayores detalles ver, por ejemplo, G. F. D. Duff y D. Naylor, *Differential Equations of Applied Mathematics*, Wiley, Nueva York, 1966, o libros acerca de teoría electromagnética, como el de J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, Wiley, Nueva York, 1962.

A continuación mostraremos cómo se puede usar el análisis vectorial para resolver ecuaciones diferenciales mediante un método llamado *teoría del potencial* o *método de la función de Green*. La presentación será bastante informal; el lector puede consultar las referencias mencionadas en el pie de página anterior para obtener mayor información.

Supongamos que se desea resolver la ecuación de Poisson $\nabla^2 u = \rho$ para $u(x, y, z)$, donde $\rho(x, y, z)$ es una función dada (esta ecuación surge de la ley de Gauss si $\mathbf{E} = \nabla u$).

Una función $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ que tiene las propiedades

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \qquad \text{y} \qquad \nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \tag{12}$$

(en esta expresión $\mathbf{y}$ *se mantiene fija*), esto es, que resuelve la ecuación diferencial reemplazando ρ por δ, se llama *función de Green* para esta ecuación diferencial. Aquí $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ representa la función delta de Dirac, "definida" por†

(i) $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0 \qquad \text{para} \qquad \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$

y

(ii) $\int_{\mathbf{R}^3} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})\, d\mathbf{y} = 1.$

Ésta tiene la siguiente propiedad operacional, que se sigue formalmente de las condiciones (i) y (ii): para cualquier función continua $f(\mathbf{x})$,

$$\int_{\mathbf{R}^3} f(\mathbf{y})\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})\, d\mathbf{y} = f(\mathbf{x}). \tag{13}$$

Esto se denomina a veces *propiedad de separación* de δ.

TEOREMA 12 *Si $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ satisface las ecuaciones diferenciales $\nabla^2 u = \rho$ con ρ reemplazado por $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, entonces*

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{R}^3} G(\mathbf{x}, \mathbf{y})\rho(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} \tag{14}$$

es una solución de $\nabla^2 u = \rho$.

DEMOSTRACIÓN Para ver esto, notar que

$$\begin{aligned} \nabla^2 \int_{\mathbf{R}^3} G(\mathbf{x}, \mathbf{y})\rho(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} &= \int_{\mathbf{R}^3} (\nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y}))\rho(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} \\ &= \int_{\mathbf{R}^3} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})\rho(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} \qquad \text{por (12)} \\ &= \rho(\mathbf{x}) \qquad \text{por (13).} \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

---

†Ésta no es una definición precisa; sin embargo basta suponer que δ es una expresión simbólica con la propiedad operacional mostrada en la ecuación (13). Ver las referencias en la nota al pie de página anterior para una definición más cuidadosa de δ.

La "función" $\rho(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})$ representa una carga unitaria concentrada en un solo punto (ver las condiciones (i) y (ii) anteriores). Así, $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *representa el potencial en* $\mathbf{x}$ *debido a una carga colocada en* $\mathbf{y}$.

Afirmamos que la ecuación (12) se satisface si escogemos

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}. \tag{15}$$

Claramente, $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$. Para verificar la segunda parte de la ecuación (12), debemos verificar que $\nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ tenga las siguientes dos propiedades formales de la función δ:

(i) $\nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \qquad \text{para} \qquad \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$

y

(ii) $\int_{\mathbf{R}^3} \nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{y} = 1.$

La propiedad (i) es cierta, pues el gradiente de G es

$$\nabla G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mathbf{r}}{4\pi r^3},$$

donde $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ es el vector que va de $\mathbf{y}$ a $\mathbf{x}$ y $r = \|\mathbf{r}\|$ (ver el ejercicio 8, sección 3.5), y por lo tanto, para $r \neq 0$, $\nabla \cdot \nabla G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ (como en el ejercicio mencionado). Para la propiedad (ii), sea B una bola alrededor de $\mathbf{x}$; por la propiedad (i),

$$\int_{\mathbf{R}^3} \nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{y} = \int_B \nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{y}.$$

Esto, a su vez, es igual a

$$\int_{\partial B} \nabla G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}\, dS,$$

por el teorema de Gauss. Así, por el teorema 10,

$$\int_{\partial B} \nabla G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_{\partial B} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{4\pi r^3}\, dS = 1,$$

lo cual prueba la propiedad (ii).

Así, *una solución de* $\nabla^2 u = \rho$ *es*

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{R}^3} \frac{-\rho(\mathbf{y})}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}\, d\mathbf{y}, \tag{16}$$

por el teorema 12.

En dos dimensiones se puede mostrar de manera análoga que

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi}\log\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|, \tag{17}$$

de modo que una solución a $\nabla^2 u = \rho$ es

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}^3} \rho(\mathbf{y})\log\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|\,d\mathbf{y}. \tag{18}$$

Pasemos ahora al problema de uso de funciones de Green para resolver la ecuación de Poisson en una región acotada con condiciones de la frontera dadas. Para ello necesitamos la primera y segunda identidades de Green, que se pueden obtener del teorema de la divergencia (ver el ejercicio 15, sección 8.4). Comenzamos con la identidad

$$\int_V \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV = \int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS,$$

donde V es una región en el espacio, S es su frontera y $\mathbf{n}$ es el vector normal unitario exterior en cualquier punto de S. Al reemplazar $\mathbf{F}$ por $f\nabla g$, donde f y g son funciones escalares, obtenemos

$$\int_V \nabla f\cdot\nabla g\,dV + \int_V f\nabla^2 g\,dV = \int_S f\frac{\partial g}{\partial n}\,dS, \tag{19}$$

donde $\partial g/\partial n = \nabla g\cdot\mathbf{n}$. Ésta es la *primera identidad de Green.* Si simplemente permutamos f y g y restamos el resultado de la ecuación (19), obtenemos la *segunda identidad de Green,*

$$\int_V (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\,dV = \int_S \left(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n}\right)\,dS. \tag{20}$$

Ésta es la identidad que usaremos.

Considerar la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 u = \rho$$

en alguna región V, y las correspondientes ecuaciones para la función de Green

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = G(\mathbf{y},\mathbf{x}) \qquad \text{y} \qquad \nabla^2 G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}).$$

Al insertar u y G en la ecuación (20), obtenemos

$$\int_V (u\nabla^2 G - G\nabla^2 u)\,dV = \int_S \left(u\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial u}{\partial n}\right)\,dS.$$

Escogiendo $\mathbf{y}$ como nuestra variable de integración y usando $G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = G(\mathbf{y},\mathbf{x})$, esto se convierte en

$$\int_V [u(\mathbf{y})\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - G(\mathbf{x},\mathbf{y})\rho(\mathbf{y})]\,d\mathbf{y} = \int_S \left(u\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial u}{\partial n}\right) dS;$$

y por la ecuación (13),

$$u(\mathbf{x}) = \int_V G(\mathbf{x},\mathbf{y})\rho(\mathbf{y})\,d\mathbf{y} + \int_S \left(u\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial u}{\partial n}\right) dS. \tag{21}$$

Nótese que para una región no acotada esto se vuelve idéntico a nuestro resultado anterior, la ecuación (14), para todo el espacio. La ecuación (21) nos permite despejar u en una región acotada donde $\rho = 0$, al incorporar las condiciones que u debe satisfacer en S.

Si $\rho = 0$, la ecuación (21) se reduce a

$$u = \int_S \left(u\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial u}{\partial n}\right) dS,$$

o, por completo, a

$$u(\mathbf{x}) = \int_S \left[u(\mathbf{y})\frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{x},\mathbf{y}) - G(\mathbf{x},\mathbf{y})\frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{y})\right] dS(\mathbf{y}), \tag{22}$$

donde u aparece en ambos lados de la ecuación. El punto crucial es que la evaluación de la integral sólo requiere que conozcamos el comportamiento de u en S. Por lo común, u está dada en la frontera (para el *problema de Dirichlet*) o $\partial u/\partial n$ está dada en la frontera (para un *problema de Neumann*). Si conocemos u en la frontera, queremos hacer que $G\partial u/\partial n$ se anule en la frontera para poder evaluar la integral. Por lo tanto, si u está dada en S debemos hallar G tal que $G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ se anule cuando $\mathbf{y}$ esté en S. Ésta se llama *función de Dirichlet-Green para la región* V. Recíprocamente, si $\partial u/\partial n$ está dada en S, debemos hallar G tal que $\partial G/\partial n$ se anule en S. Ésta es la *función de Neumann-Green.*

Así, una función de Dirichlet-Green $G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ está definida para $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ en el volumen V y satisface las tres condiciones:

(a) $G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = G(\mathbf{y},\mathbf{x})$,
(b) $\nabla^2 G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$,

y

(c) $G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$ cuando $\mathbf{y}$ está en S, la frontera de la región V.

(Notar que por la condición (a), en las condiciones (b) y (c), las variables $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ se pueden intercambiar sin variar la condición.)

Quizá resulte sorprendente que la *condición* (a) *es en realidad una consecuencia de las condiciones* (b) *y* (c), *siempre que* (b) *y* (c) *también se cumplan al intercambiar* $\mathbf{x}$ *y* $\mathbf{y}$.

Para verlo, fijemos $\mathbf{y}$ y usemos la ecuación (20) con $f(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ y $g(\mathbf{x}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$. Por la condición (b), $\nabla^2 f(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ y $\nabla^2 g(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, y por la condición (c), f y g se anulan en S. Así, la ecuación (20) se convierte en

$$\int_V [f(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - g(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})]\, dV = 0$$

o

$$f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}) = 0.$$

Así, $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$. Esto significa, en efecto, que no es necesario verificar la condición (a). (A este resultado también se le conoce como *principio de reciprocidad.*)

Entonces, resolver un problema particular de Dirichlet o Neumann se convierte en la tarea de hallar la función de Green apropiada. Haremos esto modificando la función de Green para ecuaciones de Laplace en todo $\mathbf{R}^2$ o $\mathbf{R}^3$, a saber, las ecuaciones (16) y (17).

Como ejemplo, usaremos ahora el método bidimensional de la función de Green para construir la función de Dirichlet-Green para el disco de radio R (ver la figura 8.5.3). Esto nos permitirá resolver $\nabla^2 u = 0$ (o bien $\nabla^2 u = \rho$) con u dada en el círculo frontera.

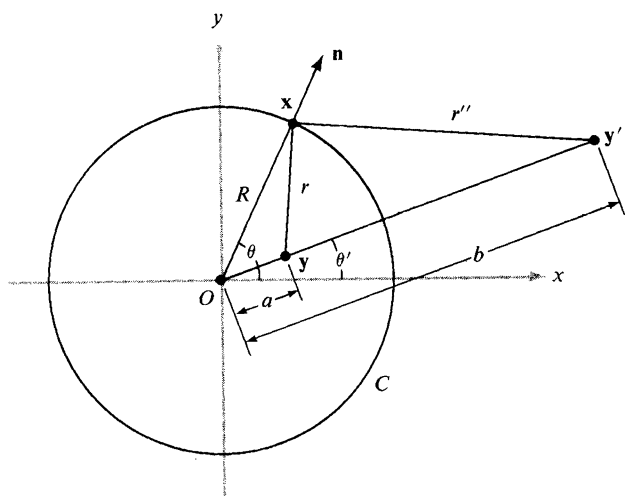


Figura 8.5.3 Geometría de la construcción de la función de Green para un disco.

En la figura 8.5.3 hemos trazado el punto $\mathbf{x}$ sobre la circunferencia, pues es ahí donde queremos que se anule G.* La función de Green $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ que hallaremos será válida,

*De acuerdo con el procedimiento anterior, se supone que $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ se anula cuando $\mathbf{x}$ o $\mathbf{y}$ está en C. Hemos escogido $\mathbf{x}$ en C para comenzar.

por supuesto, para todo $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ en el disco. El punto $\mathbf{y}'$ representa la "reflexión" del punto $\mathbf{y}$ en la región fuera del círculo, tal que $ab = R^2$. Ahora bien, cuando $\mathbf{x} \in C$, por la semejanza de los triángulos $\mathbf{x}O\mathbf{y}$ y $\mathbf{x}O\mathbf{y}'$,

$$\frac{r}{R} = \frac{r''}{b}$$

o

$$r = \frac{r''R}{b} = \frac{r''a}{R}.$$

Por lo tanto, si escogemos nuestra función de Green como

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi}\left(\log r - \log \frac{r''a}{R}\right). \tag{23}$$

vemos que G es cero si $\mathbf{x}$ está sobre C. Como $r''a/R$ se reduce a r cuando $\mathbf{y}$ está sobre C, G también se anula cuando $\mathbf{y}$ está sobre C. Si podemos demostrar que G satisface $\nabla^2 G = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ en el círculo, entonces habremos probado que G es, en efecto, la función de Dirichlet-Green. De la ecuación (17) sabemos que $\nabla^2(\log r)/2\pi = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, de modo que

$$\nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}'),$$

pero $\mathbf{y}'$ siempre está fuera del círculo, de modo que $\mathbf{x}$ nunca puede ser igual a $\mathbf{y}'$ y $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}')$ siempre es cero. De aquí,

$$\nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

y así G es la función de Dirichlet-Green para el círculo.

Ahora consideraremos el problema de resolver

$$\nabla^2 u = 0$$

en este círculo si $u(R, \theta) = f(\theta)$ es la condición dada a la frontera. Por la ecuación (22) tenemos una solución

$$u = \int_C \left(u\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial u}{\partial n}\right) dS.$$

Pero $G = 0$ en C, de modo que nos quedamos con la integral

$$u = \int_C u\frac{\partial G}{\partial n}\, dS,$$

donde podemos reemplazar u por $f(\theta)$, pues la integral es alrededor de C. Así, la tarea de resolver el problema de Dirichlet en el círculo se reduce a la búsqueda de $\partial G/\partial n$. De la ecuación (23) podemos escribir

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n} - \frac{1}{r''}\frac{\partial r''}{\partial n}\right).$$

Ahora

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \nabla r \cdot \mathbf{n}$$

y

$$\nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r},$$

donde $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$, de modo que

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{r} = \frac{r\cos(nr)}{r} = \cos(nr),$$

donde (nr) representa el ángulo entre $\mathbf{n}$ y $\mathbf{r}$. Asimismo,

$$\frac{\partial r''}{\partial n} = \cos(nr'').$$

En el triángulo $\mathbf{x}\mathbf{y}O$ tenemos, por la ley de los cosenos,

$$a^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cos(nr),$$

y en el triángulo $\mathbf{x}\mathbf{y}'O$, tenemos

$$b^2 = (r'')^2 + R^2 - 2r''R\cos(nr''),$$

de modo que

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \cos(nr) = \frac{R^2 + r^2 - a^2}{2rR}$$

y

$$\frac{\partial r''}{\partial n} = \cos(nr'') = \frac{R^2 + (r'')^2 - b^2}{2r''R}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{R^2 + r^2 - a^2}{2r^2R} - \frac{R^2 + (r'')^2 - b^2}{2(r'')^2R}\right].$$

Usando la relación entre r y r'' cuando $\mathbf{x}$ está sobre C, obtenemos

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\mathbf{x}\in C} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{R^2-a^2}{Rr^2}\right).$$

Así, la solución se puede escribir como

$$u = \frac{1}{2\pi}\int_C f(\theta)\frac{R^2-a^2}{Rr^2}\,ds.$$

Escribamos esto en forma más explícita y tratable. En primer lugar, nótese que en el triángulo $\mathbf{x}\mathbf{y}O$ podemos escribir

$$r = [a^2 + R^2 - 2aR\cos(\theta-\theta')]^{1/2},$$

donde θ y θ' son los ángulos polares en los espacios $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ respectivamente. En segundo lugar, nuestra solución debe ser válida para todo $\mathbf{y}$ en el círculo; por lo tanto, la distancia de $\mathbf{y}$ al origen debe ser ahora una variable, que llamaremos r'. Finalmente, notemos que $ds = R\,d\theta$ en C, de modo que podemos escribir la solución en coordenadas polares como

$$u(r',\theta') = \frac{R^2-(r')^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\theta)\,d\theta}{(r')^2+R^2-2r'R\cos(\theta-\theta')}.$$

Esto se conoce como la *fórmula de Poisson en dos dimensiones.** Como ejercicio, el lector deberá usar esto para escribir la solución a $\nabla^2 u = \rho$ con u una función dada $f(\theta)$ en la frontera.

EJERCICIOS

1. (a) Dar los detalles de la afirmación que aparece en la página 546, de que

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t}\rho\,dx\,dy\,dz = 0$$

es equivalente a la ley de conservación de masa.

---

*Hay varias maneras de deducir esta famosa fórmula. Para el método de variables complejas, ver J. Marsden y M. Hoffman, *Basic Complex Analysis*, 2a ed., Freeman, Nueva York, 1987, página 195. Para el método de las series de Fourier ver J. Marsden, *Elementary Classical Analysis*, Freeman, Nueva York, 1974, página 466.

(b) Usando la parte (a) y el teorema del cambio de variables, mostrar que $\rho(\mathbf{x}, t)$ se puede expresar en términos del jacobiano $J(\mathbf{x}, t)$ de la función de flujo $\phi(\mathbf{x}, t)$ y $\rho(\mathbf{x}, 0)$ con la ecuación

$$\rho(\mathbf{x}, t)J(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, 0).$$

(c) ¿Qué se puede concluir de la parte (b) para un flujo incompresible?

2. Sea $\mathbf{V}$ un campo vectorial con flujo $\phi(\mathbf{x}, t)$ y que $\mathbf{V}$ y ρ satisfagan la ley de conservación de masa. Sea Ω_t la región transportada con el flujo. Probar la siguiente versión del teorema del transporte (ver el ejercicio 22, sección 8.4):

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho f \, dx\, dy\, dz = \int_{\Omega_t} \rho \frac{Df}{Dt}\, dx\, dy\, dz.$$

3. (*Ley de Bernoulli*) (a) Sean $\mathbf{V}$ y ρ que satisfagan la ley de conservación de masa y la ecuación (2) (ecuación de Euler para un fluido perfecto). Suponer que $\mathbf{V}$ es irrotacional y, por lo tanto, que $\mathbf{V} = \nabla\phi$ para una función ϕ. Mostrar que si C es una trayectoria que conecta dos puntos P_1 y P_2, entonces

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\|\mathbf{V}\|^2\right)\Bigg|_{P_1}^{P_2} + \int_C \frac{dp}{\rho} = 0.$$

(IDEA: Se requerirá la identidad

$$(\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V} = \tfrac{1}{2}\nabla(\|\mathbf{V}\|^2) + (\nabla\times\mathbf{V})\times\mathbf{V}$$

de la tabla 3.1, sección 3.5.)

(b) Si en la parte (a), $\mathbf{V}$ es estacionario —esto es, $\partial\mathbf{V}/\partial t = 0$— y ρ es constante, mostrar que

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{V}\|^2 + \frac{p}{\rho}$$

es constante en el espacio. Deducir que, en esta situación, *se asocia presión más alta con rapidez de fluido más lenta.*

4. Usando el ejercicio 3, mostrar que si ϕ satisface la ecuación de Laplace $\nabla^2\phi = 0$, entonces $\mathbf{V} = \nabla\phi$ es una solución estacionaria de la ecuación de Euler para un fluido *incompresible* perfecto con densidad constante.

5. Verificar que las ecuaciones de Maxwell implican la ecuación de continuidad para $\mathbf{J}$ y ρ.

6. Denotemos por H el semiplano superior $z \geq 0$. Para un punto $\mathbf{x} = (x, y, z)$ en H, sea $R(\mathbf{x}) = (x, y, -z)$, la reflexión de $\mathbf{x}$ en el plano xy. Sea $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -1/4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ la función de Green para todo $\mathbf{R}^3$.

(a) Verificar que la función $\tilde{G}$ definida por

$$\tilde{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - G(R(\mathbf{x}), \mathbf{y})$$

es la función de Green para el laplaciano en H.

(b) Escribir una fórmula para la solución u del problema

$$\nabla^2 u = \rho \qquad \text{en} \qquad H,$$
$$u(x, y, 0) = \phi(x, y).$$

7. (a) Con la notación como en la figura 8.5.3, mostrar que el problema de Dirichlet para la esfera de radio R en tres dimensiones tiene función de Green

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{R}{ar''} - \frac{1}{r}\right).$$

(b) Probar la fórmula de Poisson en tres dimensiones:

$$u(\mathbf{y}) = \frac{R(R^2 - a^2)}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(\theta, \phi) \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, d\phi}{(R^2 + a^2 - 2Ra\cos\gamma)^{3/2}}$$

donde $f(\theta, \phi)$ es la función dada en la esfera frontera, $\|\mathbf{y}\| = a$ y γ es el ángulo entre $\mathbf{y}$ y el punto $\mathbf{x} = (R\cos\theta \operatorname{sen}\phi, R\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, R\cos\phi)$ en la superficie de la esfera.

En los ejercicios 8 al 14 dar algunos ejemplos de aplicaciones del cálculo vectorial a *ondas de choque*.*

8. Considerar la ecuación

$$u_t + uu_x = 0$$

para una función $u(x, t)$, $-\infty < x < \infty$, $t \geq 0$, donde $u_t = \partial u/\partial t$ y $u_x = \partial u/\partial x$. Sea $u(x, 0) = u_0(x)$ el valor dado de u en $t = 0$. Las curvas $(x(s), t(s))$ en el plano xt definido por

$$\dot{x} = u, \qquad \dot{t} = 1$$

se llaman *curvas características* (el punto arriba de la letra denota la derivada respecto a s).

(a) Demostrar que u es constante a lo largo de cada curva característica, mostrando que $\dot{u} = 0$.

(b) Demostrar que las pendientes de las curvas características están dadas por $dt/dx = 1/u$, y usarlo para probar que las curvas características son rectas determinadas por los datos iniciales.

(c) Suponer que $x_1 < x_2$ y $u_0(x_1) > u_0(x_2) > 0$. Mostrar que las dos características que pasan por los puntos $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$ se intersecan en un punto $\mathrm{P} = (\bar{x}, \bar{t})$, con $\bar{t} > 0$. Mostrar que esto, junto con el resultado de la parte (a) implica que la solución no puede ser continua en P (ver la figura 8.5.4).

(d) Calcular $\bar{t}$.

---

*Para mayores detalles consultar A. J. Chorin y J. E. Marsden, *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, Springer-Verlag, Nueva York, 1979, y P. D. Lax, "The Formation and Decay of Shock Waves," *Am. Math. Monthly* 79 (1972): 227–241. Agradecemos a Joel Smoller el haber sugerido esta serie de ejercicios.

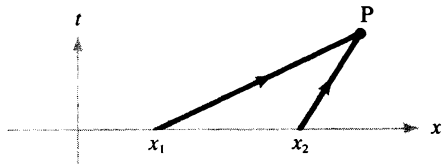


Figura 8.5.4 Características de la ecuación $u_t + uu_x = 0$.

9. Repetir el ejercicio 8 para la ecuación

$$u_t + f(u)_x = 0. \tag{24}$$

donde $f'' > 0$ y $f'(u_0(x_2)) > 0$. Las características se definen ahora mediante $\dot{x} = f'(u)$, $\dot{t} = 1$. Decimos que la ecuación (24) está en *forma de divergencia*. (Este ejercicio muestra que, en general, es imposible hallar una solución continua —¡independientemente de la suavidad de f!)

10. (*Soluciones débiles*) Como las ecuaciones de la forma del ejercicio 9 surgen en muchas aplicaciones físicas (dinámica de gases, magnetohidrodinámica, óptica no lineal (lasers)) y debido a que sería agradable que existiera una solución para todo tiempo (t), es deseable tratar de encontrar el sentido de la ecuación, reinterpretándola cuando se desarrollan discontinuidades. Para ello, sea $\phi = \phi(x,t)$ una función de clase C^1. Sea D un rectángulo en el plano xt determinado por $-a \le x \le a$ y $0 \le t \le T$, tal que $\phi(x,t) = 0$ para $x = \pm a$, $x = T$ y para toda (x,t) en el semiplano superior fuera de D. Sea u una solución "legítima" de la ecuación (24).

(a) Mostrar que

$$\iiint\limits_{t\ge 0} [u\phi_t + f(u)\phi_x]\,dx\,dt + \int_{t=0} u_0(x)\phi(x,0)\,dx = 0. \tag{25}$$

(IDEA: Comenzar con $\iint_D [u_t + f(u)_x]\phi\,dx\,dt = 0$.) Así, si u es una solución suave, entonces la ecuación (25) se cumple para toda ϕ según se describió anteriormente. Llamamos a la función u una *solución débil* de la ecuación (24) si la ecuación (25) se cumple para dichas ϕ.

(b) Mostrar que si u es una solución débil que sea C^1 en un conjunto abierto Ω en la mitad superior del plano xt, entonces u es una solución legítima de la ecuación (24) en Ω.

11. (*Condición de salto*, también conocida en dinámica de gases como condición de Rankine-Hugoniot.) La definición de una solución débil dada en el ejercicio 10, claramente admite soluciones discontinuas. Sin embargo, el lector determinará ahora que no es admisible todo tipo de discontinuidad, pues hay una conexión entre la curva de discontinuidad y los valores de la solución en ambos lados de la discontinuidad.

Sea u una solución (débil) de la ecuación (24) y suponer que Γ es una curva suave en el plano xt tal que u "salta" a través de la curva Γ; esto es, u es de clase C^1 excepto por una discontinuidad de salto a través de Γ. Llamamos a Γ una *onda de choque*. Escoger un punto $\mathrm{P} \in \Gamma$ y construir, cerca de P, un "rectángulo" $D = D_1 \cup D_2$, según se muestra en la figura 8.5.5. Escoger ϕ que se anule en D y fuera de D.

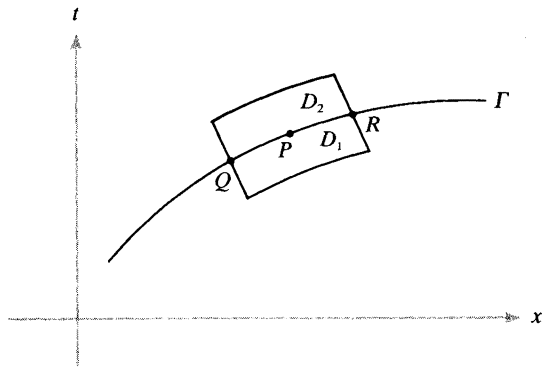


Figura 8.5.5 La solución u salta en valor de u_1 a u_2 a través de Γ.

(a) Mostrar que

$$\iint_D [u\phi_t + f(u)\phi_x]\,dx\,dt = 0$$

y

$$\iint_{D_i} [u\phi_t + f(u)\phi_x]\,dx\,dt = \iint_{D_i} [(u\phi)_t + (f(u)\phi)_x]\,dx\,dt.$$

(b) Suponer que u salta en valor de u_1 a u_2 a través de Γ, de modo que cuando (x,t) tiende a un punto (x_0,t_0) en Γ de ∂D_i, $u(x,t)$ tiende al valor $u_i(x_0,t_0)$. Mostrar que

$$0 = \int_{\partial D_1} \phi\{-u\,dx + f(u)\,dt\} + \int_{\partial D_2} \phi\{-u\,dx + f(u)\,dt\}$$

y deducir que

$$0 = \int_\Gamma \phi\{[-u]\,dx + [f(u)]\,dt\}$$

donde $[\alpha(u)] = \alpha(u_2) - \alpha(u_1)$ denota el salto en la cantidad $\alpha(u)$ a través de Γ.

(c) Si la curva Γ define x implícitamente como una función de t y ∂D interseca Γ en $\mathrm{Q} = (x(t_1), t_1)$ y $\mathrm{R} = (x(t_2), t_2)$, mostrar que

$$0 = \int_{\mathrm{Q}}^{\mathrm{R}} \phi\{[-u]\,dx + [f(u)]\,dt\} = \int_{t_1}^{t_2} \phi\left\{[-u]\frac{dx}{dt} + [f(u)]\right\}\,dt.$$

(d) Mostrar que en el punto P sobre Γ,

$$[u]\cdot s = [f(u)], \tag{26}$$

donde $s = dx/dt$ en P. El número s se llama *rapidez* de la discontinuidad. La ecuación (26) se llama *condición de salto;* es la relación que cualquier solución discontinua satisfirá.

12. (*Pérdida de la unicidad*) Un inconveniente para aceptar soluciones débiles es la pérdida de unicidad. (En dinámica de gases, algunas soluciones matemáticas son extrañas y rechazadas según bases físicas. Por ejemplo, las soluciones discontinuas de ondas de choque de rarefacción son rechazadas porque indican que la entropía *decrece* a través de la discontinuidad.)

Considerar la ecuación

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0, \qquad \text{con datos iniciales} \qquad u(x,0) = \begin{cases} -1, & x \geq 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$$

Mostrar que para todo $\alpha \geq 1$, u_α es una solución débil, donde u_α está definida por

$$u_\alpha(x,t) = \begin{cases} 1, & x \leq \dfrac{1-\alpha}{2}t \\ -\alpha, & \dfrac{1-\alpha}{2}t \leq x \leq 0 \\ \alpha, & 0 \leq x \leq \dfrac{\alpha-1}{2}t \\ -1, & \dfrac{\alpha-1}{2}t < x \end{cases}$$

(Se puede mostrar que si $f'' > 0$, se puede recuperar la unicidad imponiendo restricciones adicionales a las soluciones. Así, existe una única solución que satisface las condiciones de "entropía"

$$\frac{u(x+a,t) - u(x,t)}{a} \leq \frac{E}{t}$$

para alguna $E > 0$ y toda $a \neq 0$. Entonces para t fija, $u(x,t)$ sólo puede "saltar hacia abajo" conforme x crece. En nuestro ejemplo, esto se cumple sólo para la solución con $\alpha = 1$.)

13. (La solución a la ecuación (24) depende de la forma particular de la divergencia usada.) La ecuación $u_t + uu_x = 0$ se puede escribir en las dos formas de divergencia

$$u_t + (\tfrac{1}{2}u^2)_x = 0 \tag{i}$$

$$(\tfrac{1}{2}u^2)_t + (\tfrac{1}{3}u^3)_x = 0 \tag{ii}$$

Mostrar que una solución débil de la ecuación (i) no necesariamente es una solución débil de la ecuación (ii). (IDEA: Las ecuaciones tienen diferentes condiciones de salto: en la ecuación (i) $s = \frac{1}{2}(u_2 + u_1)$, mientras que en la ecuación (ii) $s = \frac{2}{3}(u_2^2 + u_1u_2 + u_1^2)/(u_2 + u_1)$.)

14. (*No invariancia de soluciones débiles bajo transformaciones no lineales*) Considerar la ecuación (24) donde $f'' > 0$.

(a) Mostrar que la transformación $v = f'(u)$ lleva esta ecuación a

$$v_t + vv_x = 0. \tag{27}$$

(b) Mostrar que la transformación anterior *no* necesariamente manda soluciones discontinuas de la ecuación (24) a soluciones discontinuas de la ecuación (27). (IDEA: Verificar las condiciones de salto; para la ecuación (27), $s[v] = \frac{1}{2}[v^2]$ implica $s[f'(u)] = \frac{1}{2}[f'(u)^2]$; para la ecuación (24), $s[u] = [f(u)]$.)

15. (*Requiere conocimiento de números complejos*) Mostrar que la fórmula de Poisson en dos dimensiones se puede escribir como

$$u(r', \theta') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) \frac{r^2 - |z'|^2}{|re^{i\theta} - z'|^2} \, d\theta,$$

donde $z' = r'e^{i\theta'}$.

16. Para una distribución de carga estacionaria y una distribución de corriente sin divergencia, los campos eléctrico y magnético $\mathbf{E}(x, y, z)$ y $\mathbf{H}(x, y, z)$ satisfacen

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \text{ y } \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}.$$

Aquí, $\rho = \rho(x, y, z)$ y $\mathbf{J}(x, y, z)$ se suponen conocidas. (Las constantes ϵ y μ, que aparecen usualmente, se han tomado iguales a la unidad por medio de selección de unidades.) La radiación que producen los campos a través de la superficie S, se determina por un campo vectorial de densidad de flujo de radiación, llamado campo vectorial de *Poynting*,

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}.$$

$\boxed{\text{(a)}}$ Si S es una superficie *cerrada*, mostrar que el flujo de radiación a través de S dado por el campo anterior, está dado por

$$\int_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = -\int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \, dV,$$

donde V es la región encerrada por S.

(b) Los ejemplos de dichos campos son

$$\mathbf{E}(x, y, z) = z\mathbf{j} + y\mathbf{k},$$
$$\mathbf{H}(x, y, z) = -xy\mathbf{i} + x\mathbf{j} + yz\mathbf{k}.$$

Hallar el flujo del campo vectorial de Poynting a través de la cubierta semiesférica mostrada en la figura 8.5.6. (Nótese que es una superficie *abierta*.)

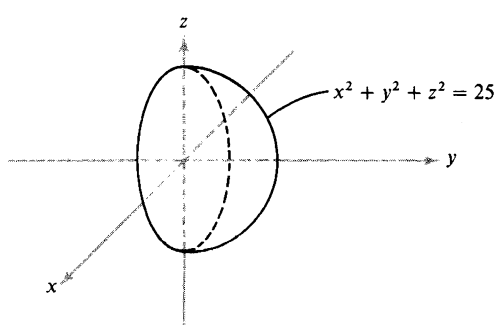


Figura 8.5.6 Superficie para el ejercicio 16(b).

(c) Los campos de la parte (b) producen un campo vectorial de Poynting que pasa a través de la superficie toroidal mostrada en la figura 8.5.7. ¿Cuál es el flujo a través de este toro?

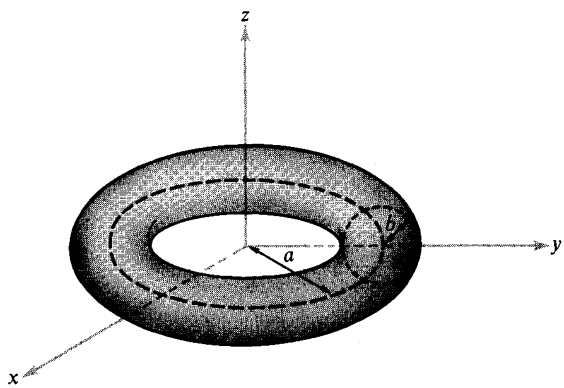


Figura 8.5.7 La superficie para el ejercicio 16(c).

SECCIÓN OPTATIVA

*8.6 FORMAS DIFERENCIALES

La teoría de las formas diferenciales proporciona una manera conveniente y elegante de expresar los teoremas de Green, Stokes y Gauss. De hecho, el uso de formas diferenciales muestra que todos estos teoremas son manifestaciones de una sola teoría matemática subyacente y proporciona el lenguaje necesario para generalizarlos a n dimensiones. En esta sección haremos una exposición muy elemental de la teoría de las formas. Como nuestro objetivo principal es mostrar que los teoremas de Green, Stokes y Gauss se pueden unificar bajo un solo teorema, nos daremos por satisfechos con algo menos que la versión más fuerte de estos teoremas. Más aún, introduciremos formas de manera puramente axiomática y no constructiva, evadiendo así la tremenda cantidad de preliminares algebraicos formales que por lo general se requieren para su construcción. Para el purista, nuestro enfoque estará lejos de estar completo, pero podrá ser comprensible para el estudiante. Esperamos que esto motive a algunos estudiantes a escarbar más en la teoría de las formas diferenciales.

Comenzaremos introduciendo el concepto de 0-forma.

DEFINICIÓN *Sea K un conjunto abierto en $\mathbf{R}^3$. Una* ***0-forma*** *en K es una función con valores reales $f: K \to \mathbf{R}$. Cuando diferenciamos f una vez, se supone que es de clase C^1, y de clase C^2 cuando la diferenciamos dos veces.*

Dadas dos 0-formas f_1 y f_2 en K, podemos sumarlas de la manera usual para obtener una nueva 0-forma $f_1 + f_2$, o multiplicarlas para obtener la 0-forma $f_1 f_2$.

EJEMPLO 1 $f_1(x, y, z) = xy + yz$ y $f_2(x, y, z) = y \operatorname{sen} xz$ son 0-formas en $\mathbf{R}^3$.

$$(f_1 + f_2)(x, y, z) = xy + yz + y \operatorname{sen} xz$$

y

$$(f_1 f_2)(x, y, z) = y^2 x \operatorname{sen} xz + y^2 z \operatorname{sen} xz. \quad \blacktriangle$$

DEFINICIÓN *Las* ***1-formas básicas*** *son las expresiones dx, dy y dz. En este momento las consideramos sólo símbolos formales. Una* ***1-forma*** *ω en un conjunto abierto K es una combinación lineal formal*

$$\omega = P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz,$$

o simplemente

$$\omega = P\, dx + Q\, dy + R\, dz,$$

donde P, Q y R son funciones con valores reales, definidas en K. Por la expresión $P\, dx$ entendemos la 1-forma $P\, dx + 0 \cdot dy + 0 \cdot dz$ y de manera similar para $Q\, dy$ y $R\, dz$. Además el orden de $P\, dx$, $Q\, dy$ y $R\, dz$ no tiene importancia, de modo que

$$P\, dx + Q\, dy + R\, dz = R\, dz + P\, dx + Q\, dy, \text{ etc.}$$

Dadas dos 1-formas $\omega_1 = P_1\, dx + Q_1\, dy + R_1\, dz$ y $\omega_2 = P_2\, dx + Q_2\, dy + R_2\, dz$, podemos sumarlas para obtener una nueva 1-forma $\omega_1 + \omega_2$, definida por

$$\omega_1 \omega_2 = (P_1 + P_2)\, dx + (Q_1 + Q_2)\, dy + (R_1 + R_2)\, dz,$$

y dada una 0-forma f, podemos formar la 1-forma $f\omega_1$ definida por

$$f\omega_1 = (fP_1)\, dx + f(Q_1)\, dy + (fR_1)\, dz.$$

EJEMPLO 2 Sean $\omega_1 = (x + y^2)\, dx + (zy)\, dy + (e^{xyz})\, dz$ y $\omega_2 = \operatorname{sen} y\, dx + \operatorname{sen} x\, dy$ 1-formas. Entonces

$$\omega_1 + \omega_2 = (x + y^2 + \operatorname{sen} y)\, dx + (zy + \operatorname{sen} x)\, dy + (e^{xyz})\, dz.$$

Si $f(x, y, z) = x$, entonces

$$f\omega_2 = x \operatorname{sen} y\, dx + x \operatorname{sen} x\, dy. \quad \blacktriangle$$

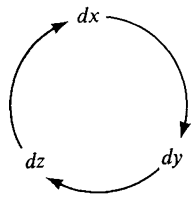


Figura 8.6.1 El orden cíclico de dx, dy y dz.

DEFINICIÓN *Las* ***2-formas básicas*** *son las expresiones formales $dx\,dy$, $dy\,dz$ y $dz\,dx$. Estas expresiones deben pensarse como los productos de dx y dy, dy y dz, y dz y dx.*

Una ***2-forma*** *η en K es una expresión formal*

$$\eta = F\,dx\,dy + G\,dy\,dz + H\,dz\,dx,$$

donde F, G y H son funciones reales definidas en K. El orden de $F\,dx\,dy$, $G\,dy\,dz$ y $H\,dz\,dx$ no es importante; por ejemplo,

$$F\,dx\,dy + G\,dy\,dz + H\,dz\,dx = H\,dz\,dx + F\,dx\,dy + G\,dy\,dz, \text{ etc.}$$

En este punto es útil notar que en una 2-forma, las 1-formas básicas dx, dy y dz siempre aparecen en pares cíclicos (ver la figura 8.6.1), esto es, $dx\,dy$, $dy\,dz$ y $dz\,dx$.

Por analogía con las 0-formas y las 1-formas, podemos sumar dos 2-formas

$$\eta_i = F_i\,dx\,dy + G_i\,dy\,dz + H_i\,dz\,dx,$$

$i = 1$ y 2, para obtener una nueva 2-forma,

$$\eta_1 + \eta_2 = (F_1 + F_2)\,dx\,dy + (G_1 + G_2)\,dy\,dz + (H_1 + H_2)\,dz\,dx.$$

De manera análoga, si f es una 0-forma y si η es una 2-forma, podemos tomar el producto

$$f\eta = (fF)\,dx\,dy + (fG)\,dy\,dz + (fH)\,dz\,dx.$$

Finalmente, por la expresión $F\,dx\,dy$ entenderemos la 2-forma $F\,dx\,dy + 0 \cdot dy\,dz + 0 \cdot dz\,dx$.

EJEMPLO 3 Las expresiones

$$\eta_1 = x^2\,dx\,dy + y^3 x\,dy\,dz + \operatorname{sen} zy\,dz\,dx$$

y

$$\eta_2 = y\,dy\,dz$$

son 2-formas. Su suma es

$$\eta_1 + \eta_2 = x^2\,dx\,dy + (y^3x + y)\,dy\,dz + \operatorname{sen} zy\,dz\,dx.$$

Si $f(x, y, z) = xy$, entonces

$$f\eta_2 = xy^2\,dy\,dz. \quad \blacktriangle$$

DEFINICIÓN *Una **3-forma básica** es una expresión formal $dx\,dy\,dz$ (en orden cíclico, figura 8.6.1). Una **3-forma** ν en un conjunto abierto $K \subset \mathbf{R}^3$ es una expresión de la forma $\nu = f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$, donde f es una función con valores reales definida en K.*

Podemos sumas dos 3-formas y multiplicarlas por 0-formas de la manera obvia. Parece no haber diferencia entre una 0-forma y una 3-forma, pues ambas incluyen una sola función con valores reales. Pero las distinguiremos con un propósito que se aclarará más adelante, cuando multipliquemos y diferenciemos formas.

EJEMPLO 4 Sean $\nu_1 = y\,dx\,dy\,dz$, $\nu_2 = e^{x^2}\,dx\,dy\,dz$ y $f(x, y, z) = xyz$. Entonces $\nu_1 + \nu_2 = (y + e^{x^2})\,dx\,dy\,dz$ y $f\nu_1 = y^2xz\,dx\,dy\,dz$. $\blacktriangle$

Aunque podemos sumar dos 0-formas, dos 1-formas, dos 2-formas o dos 3-formas, no necesitamos sumar una k-forma y una j-forma si $k \neq j$. Por ejemplo, no necesitaremos escribir

$$f(x, y, z)\,dx\,dy + g(x, y, z)\,dz$$

Ahora que hemos definido estos objetos formales (formas), resulta válido preguntarnos para qué sirven, cómo se usan y, quizá lo más importante, qué significan. La respuesta a la primera pregunta se aclarará conforme sigamos avanzando, pero de manera inmediata podemos describir cómo usarlas e interpretarlas.

Una función con valores reales definida en un dominio K en $\mathbf{R}^3$ es una regla que asigna a cada punto en K un número real. Las formas diferenciales son, en cierto sentido, generalizaciones de las funciones con valores reales que hemos estudiado en cálculo. De hecho, las 0-formas en un conjunto abierto K son simplemente funciones en K. Así, una 0-forma f manda puntos de K a números reales.

Preferimos interpretar las k-formas diferenciales (para $k \geq 1$), no como funciones definidas en puntos de K, sino como funciones definidas en objetos geométricos tales como curvas y superficies. Muchos de los antiguos geómetras griegos consideraron a las rectas y curvas formadas por infinidad de puntos, y a los planos y superficies formados

por infinidad de curvas. En consecuencia hay al menos cierta justificación histórica para aplicar esta jerarquía geométrica a la interpretación de las formas diferenciales.

Dado un subconjunto abierto $K \subset \mathbf{R}^3$, distinguiremos cuatro tipos de subconjuntos de K (ver la figura 8.6.2):

(i) puntos en K,

(ii) curvas simples orientadas y curvas C cerradas simples orientadas, en K,

(iii) superficies orientadas $S \subset K$,

(iv) subregiones elementales (de tipos I al IV) $R \subset K$.

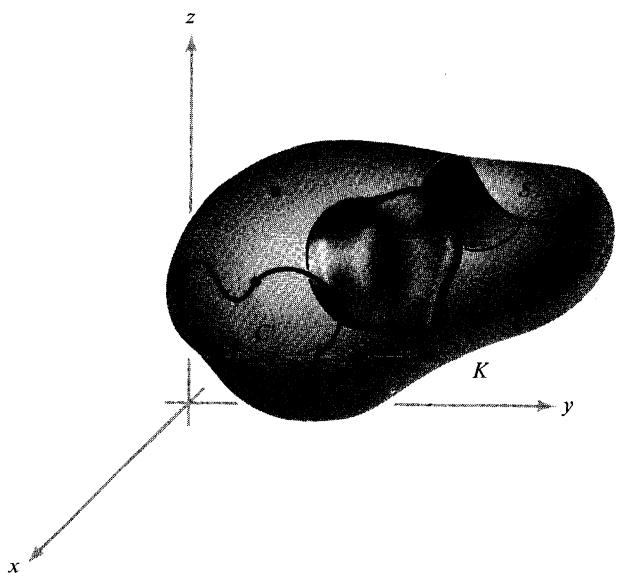


Figura 8.6.2 Los cuatro tipos geométricos de subconjuntos de un conjunto abierto $K \subset \mathbf{R}^3$ a los que se aplica la teoría de las formas.

Comenzaremos con las 1-formas. Sea

$$\omega = P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz$$

una 1-forma en K y sea C una curva orientada simple como en la figura 8.6.2. El número real que ω asigna a C está dado por la fórmula

$$\int_C \omega = \int_C P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz. \tag{1}$$

Recordar (ver la sección 7.2) que esta integral se evalúa como sigue. Sea $\boldsymbol{\sigma}\colon [a,b] \to K$, $\boldsymbol{\sigma}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ una parametrización que preserva la orientación de C. Entonces

$$\int_C \omega = \int_{\boldsymbol{\sigma}} \omega = \int_a^b \left[P(x(t), y(t), z(t)) \cdot \frac{dx}{dt} + Q(x(t), y(t), z(t)) \cdot \frac{dy}{dt} + R(x(t), y(t), z(t)) \cdot \frac{dz}{dt} \right] dt.$$

El teorema 1 de la sección 7.2 garantiza que $\int_C \omega$ no depende de la selección de la parametrización $\boldsymbol{\sigma}$.

Podemos entonces interpretar una 1-forma ω en K como una regla que asigna un número real a cada curva orientada $C \subset K$; una 2-forma η, de manera similar, se verá como una regla que asigna un número real a cada superficie orientada $S \subset K$; y una 3-forma ν será una regla que asigne un número real a cada subregión elemental K. Las reglas para asociar números reales con curvas, superficies y regiones están contenidas por entero en las expresiones formales que hemos definido.

EJEMPLO 5 Sea $\omega = xy\,dx + y^2\,dy + dz$ una 1-forma en $\mathbf{R}^3$ y sea C la curva simple orientada en $\mathbf{R}^3$ descrita por la parametrización $\boldsymbol{\sigma}(t) = (t^2, t^3, 1)$, $0 \le t \le 1$. C está orientada escogiendo la dirección positiva de C como la dirección en la que $\boldsymbol{\sigma}(t)$ recorre C conforme t va de 0 a 1. Entonces, por la fórmula (1),

$$\int_C \omega = \int_0^1 [t^5(2t) + t^6(3t^2) + 0]\,dt = \int_0^1 (2t^6 + 3t^8)\,dt = \tfrac{13}{21}.$$

Así, esta 1-forma ω asigna a cada curva simple orientada y a cada curva cerrada simple orientada C en $\mathbf{R}^3$ el número $\int_C \omega$. ▲

Una 2-forma η en un conjunto abierto $K \subset \mathbf{R}^3$ se puede interpretar de manera análoga como una función que asocia con cada superficie orientada $S \subset K$ un número real. Esto se logra por medio del concepto de integración de 2-formas sobre superficies. Sea

$$\eta = F(x,y,z)\,dx\,dy + G(x,y,z)\,dy\,dz + H(x,y,z)\,dz\,dx$$

una 2-forma en K, y sea $S \subset K$ una superficie orientada parametrizada por una función $\boldsymbol{\Phi}\colon D \to \mathbf{R}^3$, $D \subset \mathbf{R}^2$, $\boldsymbol{\Phi}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ (ver la sección 7.3).

DEFINICIÓN *Si S es dicha superficie y η es una 2-forma en K, definimos $\int_S \eta$ por la fórmula*

$$\begin{aligned}\int_S \eta &= \int_S F\,dx\,dy + G\,dy\,dz + H\,dz\,dx \\ &= \int_D \left[F(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} + G(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} \right. \\ &\quad \left. + H(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} \right] du\,dv, \qquad (2)\end{aligned}$$

donde

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \qquad \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \qquad \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Si S está compuesta de varias piezas S_i, $i = 1, \ldots, k$ como en la figura 8.4.4, cada una con su propia parametrización $\mathbf{\Phi}_i$, definimos

$$\int_S \eta = \sum_{i=1}^{k} \int_{S_i} \eta.$$

Debemos verificar que $\int_S \eta$ no depende de la selección de la parametrización $\mathbf{\Phi}$. Este resultado está esencialmente contenido (aunque no es obvio) en el teorema 4, sección 7.6.

EJEMPLO 6 *Sea $\eta = z^2\, dx\, dy$ una 2-forma en $\mathbf{R}^3$, y sea S la semiesfera unitaria superior en $\mathbf{R}^3$. Hallar $\int_S \eta$.*

SOLUCIÓN Parametricemos S mediante

$$\mathbf{\Phi}(u,v) = (\operatorname{sen} u \cos v, \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \cos u),$$

donde $(u,v) \in D = [0, \pi/2] \times [0, 2\pi]$. Entonces, por la fórmula (2),

$$\int_S \eta = \int_D \cos^2 u \left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right] du\, dv,$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} &= \begin{vmatrix} \cos u \cos v & -\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \\ \cos u \operatorname{sen} v & \operatorname{sen} u \cos v \end{vmatrix} \\ &= \operatorname{sen} u \cos u \cos^2 v + \cos u \operatorname{sen} u \operatorname{sen}^2 v = \operatorname{sen} u \cos u. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_S \eta &= \int_D \cos^2 u \cos u \operatorname{sen} u\, du\, dv \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^3 u \operatorname{sen} u\, du\, dv = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{\cos^4 u}{4}\right]_0^{\pi/2} dv = \frac{\pi}{2}. \qquad \blacktriangle \end{aligned}$$

EJEMPLO 7 *Evaluar $\int_S x\, dy\, dz + y\, dx\, dy$, donde S es la superficie orientada descrita por la parametrización $x = u + v$, $y = u^2 - v^2$, $z = uv$, $(u,v) \in D = [0,1] \times [0,1]$.*

SOLUCIÓN Por definición, tenemos

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ v & u \end{vmatrix} = 2(u^2+v^2);$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2u & -2v \end{vmatrix} = -2(u+v).$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
&\int_S x\,dy\,dz + y\,dx\,dy \\
&\quad = \int_D [(u+v)(2)(u^2+v^2) + (u^2-v^2)(-2)(u+v)]\,du\,dv \\
&\quad = 4\int_D (v^3+uv^2)\,du\,dv = 4\int_0^1\int_0^1 (v^3+uv^2)\,du\,dv \\
&\quad = 4\int_0^1 \left[uv^3 + \frac{u^2v^2}{2}\right]_0^1 dv = 4\int_0^1 \left(v^3+\frac{v^2}{2}\right) dv \\
&\quad = \left[v^4 + \frac{2v^3}{3}\right]_0^1 = 1+\frac{2}{3} = \frac{5}{3}. \qquad \blacktriangle
\end{aligned}$$

Finalmente, debemos interpretar las 3-formas como funciones en las subregiones elementales (de tipos I a IV) de K. Sea $\nu = f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ una 3-forma y sea $R \subset K$ una subregión elemental de K. Entonces a cada $R \subset K$ asignamos el número

$$\int_R \nu = \int_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz, \tag{3}$$

que es simplemente la integral triple ordinaria de f sobre R, según se describe en la sección 6.1.

EJEMPLO 8 *Suponer que* $\nu = (x+z)\,dx\,dy\,dz$ *y* $R = [0,1]\times[0,1]\times[0,1]$. *Evaluar* $\int_R \nu$.

SOLUCIÓN Calculamos:

$$\begin{aligned}
\int_R \nu &= \int_R (x+z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (x+z)\,dx\,dy\,dz \\
&= \int_0^1\int_0^1 \left[\frac{x^2}{2}+zx\right]_0^1 dy\,dz = \int_0^1\int_0^1 \left(\frac{1}{2}+z\right) dy\,dz = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}+z\right) dz \\
&= \left[\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2}\right]_0^1 = 1. \qquad \blacktriangle
\end{aligned}$$

Estudiaremos ahora el álgebra (o reglas de multiplicación) de formas, que, junto con la diferenciación de formas, nos permitirán enunciar los teoremas de Green, Stokes y Gauss en términos de formas diferenciales.

Si ω es una k-forma y η es una l-forma en K, $0 \leq k+l \leq 3$, existe un producto llamado *producto exterior* $\omega \wedge \eta$ de ω y η que es una $k+l$-forma en K. El producto exterior satisface las leyes siguientes:

(i) Para cada k existe una k-forma 0, cero, con la propiedad de que $0 + \omega = \omega$ para toda k-forma ω y $0 \wedge \eta = 0$ para toda l-forma η si $0 \leq k + l \leq 3$.

(ii) (*Distributividad*) Si f es una 0-forma, entonces

$$(f\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta = f(\omega_1 \wedge \eta) + (\omega_2 \wedge \eta).$$

(iii) (*Anticonmutatividad*) $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl}(\eta \wedge \omega)$.

(iv) (*Asociatividad*) Si ω_1, ω_2 y ω_3 son k_1, k_2 y k_3 formas, respectivamente, con $k_1 + k_2 + k_3 \leq 3$, entonces

$$\omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3) = (\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3.$$

(v) (*Homogeneidad respecto a funciones*) Si f es una 0-forma, entonces

$$\omega \wedge (f\eta) = (f\omega) \wedge \eta = f(\omega \wedge \eta).$$

Nótese que las reglas (ii) y (iii) en realidad implican la regla (v).

(vi) Se cumplen las siguientes reglas de multiplicación para 1-formas:

$$\begin{gathered}
dx \wedge dy = dx\,dy \\
dy \wedge dx = -dx\,dy = (-1)(dx \wedge dy) \\
dy \wedge dz = dy\,dz = (-1)(dx \wedge dy) \\
dz \wedge dx = dz\,dx = (-1)(dx \wedge dz) \\
dx \wedge dx = 0, \qquad dy \wedge dy = 0, \qquad dz \wedge dz = 0 \\
dx \wedge (dy \wedge dz) = (dx \wedge dy) \wedge dz = dx\,dy\,dz.
\end{gathered}$$

(vii) Si f es una 0-forma y ω es cualquier k-forma, entonces $f \wedge \omega = f\omega$.

Usando las leyes (i) a la (vii), podemos hallar ahora un producto único de cualquier l-forma η y cualquier k-forma ω, si $0 \leq k + l \leq 3$.

EJEMPLO 9 *Mostrar que* $dx \wedge dy\,dz = dx\,dy\,dz$.

SOLUCIÓN Por la regla (vi), $dy\,dz = dy \wedge dz$. Por lo tanto,

$$dx \wedge dy\,dz = dx \wedge (dy \wedge dz) = dx\,dy\,dz. \qquad \blacktriangle$$

EJEMPLO 10 *Si* $\omega = x\,dx + y\,dy$ *y* $\eta = zy\,dx + xz\,dy + xy\,dz$, *hallar* $\omega \wedge \eta$.

SOLUCIÓN Calculando $\omega \wedge \eta$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\omega \wedge \eta &= (x\,dx + y\,dy) \wedge (zy\,dx + xz\,dy + xy\,dz) \\
&= [(x\,dx + y\,dy) \wedge (zy\,dx)] + [(x\,dx + y\,dy) \wedge (xz\,dy)] \\
&\quad + [(x\,dx + y\,dy) \wedge (xy\,dz)] \\
&= xyz(dx \wedge dx) + zy^2(dy \wedge dx) + x^2z(dx \wedge dy) + xyz(dy \wedge dy) \\
&\quad + x^2y(dx \wedge dz) + xy^2(dy \wedge dz) \\
&= -zy^2\,dx\,dy + x^2z\,dx\,dy - x^2y\,dz\,dx + xy^2\,dy\,dz \\
&= (x^2z - y^2z)\,dx\,dy - x^2y\,dz\,dx + xy^2\,dy\,dz. \qquad \blacktriangle
\end{aligned}$$

EJEMPLO 11 *Si* $\omega = x\,dx - y\,dy$ *y* $\eta = x\,dy\,dz + z\,dx\,dy$, *hallar* $\omega \wedge \eta$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
\omega \wedge \eta &= (x\,dx - y\,dy) \wedge (x\,dy\,dz + z\,dx\,dy) \\
&= [(x\,dx - y\,dy) \wedge (x\,dy\,dz)] + [(x\,dx - y\,dy) \wedge (z\,dx\,dy)] \\
&= (x^2\,dx \wedge dy\,dz) - (zy\,dy \wedge dy\,dz) + (xz\,dx \wedge dx\,dy) - (yz\,dy \wedge dx\,dy) \\
&= [x^2\,dx \wedge (dy \wedge dy)] - [yz\,dy \wedge (dy \wedge dz)] \\
&\quad + [xz\,dx \wedge (dx \wedge dy)] - [yz\,dy \wedge (dx \wedge dz)] \\
&= x^2\,dx\,dy\,dz - [xy(dy \wedge dy) \wedge dz] \\
&\quad + [xz(dx \wedge dx) \wedge dy] - [yz(dy \wedge dx) \wedge dy] \\
&= x^2\,dx\,dy\,dz - xy(0 \wedge dz) + xz(0 \wedge dy) + [yz(dy \wedge dy) \wedge dx] \\
&= x^2\,dx\,dy\,dz. \qquad \blacktriangle
\end{aligned}$$

El último paso importante en el desarrollo de esta teoría es mostrar cómo diferenciar formas. La derivada de una k-forma es una $(k+1)$-forma si $k < 3$ y la derivada de una 3-forma siempre es cero. Si ω es una k-forma, denotaremos la derivada de ω por $d\omega$. La operación d tiene las propiedades siguientes:

(1) Si $f\colon K \to \mathbf{R}$ es un 0-forma, entonces

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz.$$

(2) (*Linealidad*) Si ω_1 y ω_2 son k-formas, entonces

$$d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2.$$

(3) Si ω es una k-forma y η es una l-forma,

$$d(\omega \wedge \eta) = (d\omega \wedge \eta) + (-1)^k(\omega \wedge d\eta).$$

(4) $d(d\omega) = 0$ y $d(dx) = d(dy) = d(dz) = 0$, o simplemente, $d^2 = 0$.

Las propiedades (1) a (4) proporcionan información suficiente para permitirnos diferenciar de manera única cualquier forma.

EJEMPLO 12 *Sea $\omega = P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy$ una 1-forma en algún conjunto abierto $K \subset \mathbf{R}^3$. Hallar $d\omega$.*

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
&d[P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy] \\
&= d[P(x,y,z) \wedge dx] + d[Q(x,y,z) \wedge dy] && \text{(usando 2)} \\
&= (dP \wedge dx) + [P \wedge d(dx)] + (dQ \wedge dy) + [Q \wedge d(dy)] && \text{(usando 3)} \\
&= (dP \wedge dx) + (dQ \wedge dy) && \text{(usando 4)} \\
&= \left(\frac{\partial P}{\partial x}\,dx + \frac{\partial P}{\partial y}\,dy + \frac{\partial P}{\partial z}\,dz\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\,dx + \frac{\partial Q}{\partial y}\,dy + \frac{\partial Q}{\partial z}\,dz\right) \wedge dy && \text{(usando 1)} \\
&= \left(\frac{\partial P}{\partial x}\,dx \wedge dx\right) + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\,dy \wedge dx\right) + \left(\frac{\partial P}{\partial z}\,dz \wedge dx\right) \\
&\quad + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\,dx \wedge dy\right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\,dy \wedge dy\right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial z}\,dz \wedge dy\right) \\
&= -\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial P}{\partial z}\,dz\,dx + \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy - \frac{\partial Q}{\partial z}\,dy\,dz \\
&= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy + \frac{\partial P}{\partial z}\,dz\,dx - \frac{\partial Q}{\partial z}\,dy\,dz. \qquad \blacktriangle
\end{aligned}$$

EJEMPLO 13 *Sea f una 0-forma. Usando sólo las reglas de diferenciación (1) a (3) y el hecho de que $d(dx) = d(dy) = d(dz) = 0$, mostrar que $d(df) = 0$.*

SOLUCIÓN Por la regla (1),

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz$$

de modo que

$$d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\,dx\right) + d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\,dy\right) + d\left(\frac{\partial f}{\partial z}\,dz\right).$$

Trabajando sólo con el primer término, usando la regla (3), obtenemos

$$\begin{aligned} d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\,dx\right) &= d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\wedge dx\right) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\wedge dx + \frac{\partial f}{\partial x}\wedge d(dx) \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}\,dz\right)\wedge dx + 0 \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\,dy\wedge dx + \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}\,dz\wedge dx \\ &= -\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}\,dz\,dx. \end{aligned}$$

De manera análoga, hallamos que

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\,dy\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\,dx\,dy - \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}\,dy\,dz$$

y

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial z}\,dz\right) = -\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\,dz\,dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\,dy\,dz.$$

Al sumarlos obtenemos $d(df) = 0$ por la igualdad de las derivadas parciales mixtas. ▲

EJEMPLO 14 *Mostrar que $d(dx\,dy)$, $d(dy\,dz)$ y $d(dz\,dx)$ son cero.*

SOLUCIÓN Para probar el primer caso, usamos la propiedad (3):

$$d(dx\,dy) = d(dx\wedge dy) = [d(dx)\wedge dy - dx\wedge d(dy)] = 0.$$

Los otros casos son similares. ▲

EJEMPLO 15 *Si $\eta = F(x,y,z)\,dx\,dy + G(x,y,z)\,dy\,dz + H(x,y,z)\,dz\,dx$, hallar $d\eta$.*

SOLUCIÓN Por la propiedad (2)

$$d\eta = d(F\,dx\,dy) + d(G\,dy\,dz) + d(H\,dz\,dx).$$

Calcularemos $d(F\,dx\,dy)$. Usando de nuevo la propiedad (3), obtenemos

$$d(F\,dx\,dy) = d(F\wedge dx\,dy) = dF\wedge(dx\,dy) + F\wedge d(dx\,dy).$$

Por el ejemplo 14, $d(dx\,dy) = 0$, de modo que nos queda

$$\begin{aligned} dF \wedge (dx\,dy) &= \left(\frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy + \frac{\partial F}{\partial z}\,dz\right) \wedge (dx \wedge dy) \\ &= \left[\frac{\partial F}{\partial x}\,dx \wedge (dx \wedge dy)\right] + \left[\frac{\partial F}{\partial y}\,dy \wedge (dx \wedge dy)\right] + \left[\frac{\partial F}{\partial z}\,dz \wedge (dx \wedge dy)\right]. \end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned} dx \wedge (dx \wedge dy) &= (dx \wedge dx) \wedge dy = 0 \wedge dy = 0, \\ dy \wedge (dx \wedge dy) &= -dy \wedge (dy \wedge dx) \\ &= -(dy \wedge dy) \wedge dx = 0 \wedge dx = 0 \end{aligned}$$

y

$$dz \wedge (dx \wedge dy) = (-1)^2 (dx \wedge dy) \wedge dz = dx\,dy\,dz.$$

En consecuencia

$$d(F\,dx\,dy) = \frac{\partial F}{\partial z}\,dx\,dy\,dz.$$

De manera análoga, hallamos que

$$d(G\,dy\,dz) = \frac{\partial G}{\partial x}\,dx\,dy\,dz \qquad \text{y} \qquad d(H\,dz\,dx) = \frac{\partial H}{\partial y}\,dx\,dy\,dz.$$

Por lo tanto

$$d\eta = \left(\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y}\right) dx\,dy\,dz. \qquad \blacktriangle$$

Hemos desarrollado todos los conceptos necesarios para reformular los teoremas de Green, Stokes y Gauss en el lenguaje de formas.

TEOREMA 13: TEOREMA DE GREEN *Sea D una región elemental en el plano xy, con ∂D con orientación contraria a la que giran las manecillas del reloj. Suponer que $\omega = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ es una 1-forma en algún conjunto abierto K en $\mathbf{R}^3$ que contenga a D. Entonces*

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega.$$

Aquí $d\omega$ es una 2-forma en K y D es, de hecho, una superficie en $\mathbf{R}^3$, parametrizada por $\mathbf{\Phi}\colon D \to \mathbf{R}^3$, $\mathbf{\Phi}(x,y) = (x,y,0)$. Como P y Q *no* son, explícitamente, funciones de z, entonces $\partial P/\partial z$ y $\partial Q/\partial z = 0$ y por el ejemplo 12, $d\omega = (\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)\,dx\,dy$. En

consecuencia, el teorema 13 significa nada más que

$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

que es precisamente el teorema de Green presentado en la sección 8.1. Entonces se cumple el teorema 13. Asimismo, tenemos los siguientes teoremas.

TEOREMA 14: TEOREMA DE STOKES *Sea S una superficie orientada en $\mathbf{R}^3$ con una frontera formada por una curva cerrada simple ∂S (figura 8.6.3) orientada según la frontera de S (ver la figura 8.2.1). Suponer que ω es una 1-forma en algún conjunto abierto K que contiene a S. Entonces*

$$\int_{\partial S} \omega = \int_S d\omega.$$

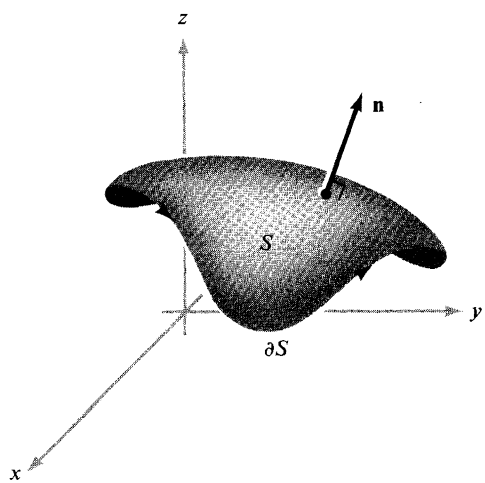


Figura 8.6.3 Superficie orientada en la que se aplica el teorema de Stokes.

TEOREMA 15: TEOREMA DE GAUSS *Sea $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ una región elemental con $\partial\Omega$ con la orientación exterior (ver sección 8.4). Si η es una 2-forma en alguna región K que contiene a Ω, entonces*

$$\int_{\partial\Omega} \eta = \int_\Omega d\eta.$$

Quizá los lectores ya notaron la fuerte analogía en los enunciados de estos teoremas. En las formulaciones para campos vectoriales hemos usado divergencia para regiones en $\mathbf{R}^3$ (teorema de Gauss), rotacional para superficies en $\mathbf{R}^3$ (teorema de Stokes) y

en $\mathbf{R}^3$ (teorema de Gauss), rotacional para superficies en $\mathbf{R}^3$ (teorema de Stokes) y regiones en $\mathbf{R}^2$ (teorema de Green). Aquí usamos sólo el concepto unificado de derivada de una forma diferencial para los tres teoremas; y, de hecho, podemos enunciar todos los teoremas como uno, si introducimos un poco más de terminología.

Por una *2-variedad orientada con frontera* en $\mathbf{R}^3$ entenderemos una superficie en $\mathbf{R}^3$ cuya frontera es una curva cerrada simple con una orientación como la que se decribió en la sección 8.2. Por una *3-variedad orientada con frontera* en $\mathbf{R}^3$ entenderemos una región elemental en $\mathbf{R}^3$ (suponemos que su frontera, que es una superficie, está dotada con la orientación exterior que se estudió en la sección 8.4). Al siguiente teorema unificado le llamamos "teorema de Stokes", de acuerdo con las convenciones vigentes.

TEOREMA 16: TEOREMA GENERAL DE STOKES *Sea M una k-variedad en $\mathbf{R}^3$ ($k = 2$ o 3) contenida en algún conjunto abierto K. Supongamos que ω es una $(k-1)$-forma en K. Entonces*

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega.$$

EJERCICIOS

1. Evaluar $\omega \wedge \eta$ si

(a) $\omega = 2x\,dx + y\,dy$
$\eta = x^3\,dx + y^2\,dy$

(b) $\omega = x\,dx - y\,dy$
$\eta = y\,dx + x\,dy$

(c) $\omega = x\,dx + y\,dy + z\,dz$
$\eta = z\,dx\,dy + x\,dy\,dz + y\,dz\,dx$

$\boxed{\text{(d)}}$ $\omega = xy\,dy\,dz + x^2\,dx\,dy$
$\eta = dx + dz$

(e) $\omega = e^{xyz}\,dx\,dy$
$\eta = e^{-xyz}\,dz$

2. Probar que

$$(a_1\,dx + a_2\,dy + a_3\,dz) \wedge (b_1\,dy\,dz + b_2\,dz\,dx + b_3\,dx\,dy) = \left(\sum_{i=1}^{3} a_i b_i\right) dx\,dy\,dz.$$

3. Hallar $d\omega$ en los siguientes ejemplos:

(a) $\omega = x^2y + y^3$

$\boxed{\text{(b)}}$ $\omega = y^2 \cos x\,dy + xy\,dx + dz$

(c) $\omega = xy\,dy + (x+y)^2\,dx$

(d) $\omega = x\,dx\,dy + z\,dy\,dz + y\,dz\,dx$

$\boxed{\text{(e)}}$ $\omega = (x^2 + y^2)\,dy\,dz$

(f) $\omega = (x^2 + y^2 + z^2)\,dz$

(g) $\omega = \dfrac{-x}{x^2+y^2}\,dx + \dfrac{y}{x^2+y^2}\,dy$

(h) $\omega = x^2y\,dy\,dz$

$\boxed{\textbf{4.}}$ Sea $\mathbf{V}\colon K \to \mathbf{R}^3$ un campo vectorial definido por $\mathbf{V}(x,y,z) = G(x,y,z)\mathbf{i} + H(x,y,z)\mathbf{j} + F(x,y,z)\mathbf{k}$, y sea η la 2-forma en K dada por

$$\eta = F\,dx\,dy + G\,dy\,dz + H\,dz\,dx.$$

Mostrar que $d\eta = (\operatorname{div} \mathbf{V})\,dx\,dy\,dz$.

5. Si $\mathbf{V} = A(x,y,z)\mathbf{i} + B(x,y,z)\mathbf{j} + C(x,y,z)\mathbf{k}$ es un campo vectorial en $K \subset \mathbf{R}^3$, definir la operación Forma_2: Campos vectoriales $\to$ 2-formas mediante

$$\text{Forma}_2(\mathbf{V}) = A\,dy\,dz + B\,dz\,dx + C\,dx\,dy.$$

(a) Mostrar que $\text{Forma}_2(\alpha\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2) = \alpha\text{Forma}_2(\mathbf{V}_1) + \text{Forma}_2(\mathbf{V}_2)$, donde α es un número real.

(b) Mostrar que $\text{Forma}_2(\text{rot}\,\mathbf{V}) = d\omega$, donde $\omega = A\,dx + B\,dy + C\,dz$.

6. Usando la versión en forma diferencial del teorema de Stokes, probar la versión en campo vectorial de la sección 8.2. Repetir para el teorema de Gauss.

7. Interpretar el teorema 16 en el caso $k = 1$.

8. Sea $\omega = (x+y)\,dz + (y+z)\,dx + (x+z)\,dy$, y sea S la parte superior de la esfera unitaria; esto es, S es el conjunto de (x,y,z) con $x^2+y^2+z^2 = 1$ y $z \geq 0$. ∂S es el círculo unitario en el plano xy. Evaluar $\int_{\partial S} \omega$ tanto directamente como mediante el teorema de Stokes.

9. Sea T el sólido triangular acotado por el plano xy, el plano xz, el plano yz y el plano $2x + 3y + 6z = 12$. Calcular

$$\int_{\partial T} F_1\,dx\,dy + F_2\,dy\,dz + F_3\,dz\,dx$$

directamente y por el teorema de Gauss, si

(a) $F_1 = 3y, F_2 = 18z, F_3 = -12$; y

(b) $F_1 = z, F_2 = x^2, F_3 = y$.

10. Evaluar $\int_S \omega$ donde $\omega = z\,dx\,dy + x\,dy\,dz + y\,dz\,dx$ y S es la esfera unitaria, directamente y por el teorema de Gauss.

11. Sea R una región elemental en $\mathbf{R}^3$. Mostrar que el volumen de R está dado por la fórmula

$$v(R) = \frac{1}{3}\int_{\partial R} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy.$$

12. En la sección 3.2 vimos que la longitud $l(\sigma)$ de una curva $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $a \leq t \leq b$, estaba dada por la fórmula

$$l(\sigma) = \int ds = \int_a^b \left(\frac{ds}{dt}\right) dt$$

donde, hablando informalmente

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$

o

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

Supongamos ahora que una superficie S está dada en forma parametrizada por $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $(u, v) \in D$. Mostrar que el área de S se puede expresar como

$$A(S) = \int_D dS$$

donde $(dS)^2 = (dx \wedge dy)^2 + (dy \wedge dz)^2 + (dz \wedge dx)^2$.
(IDEA:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}\, du + \frac{\partial x}{\partial v}\, dv,$$

y de manera similar para dy y dz. Usar la ley de las formas para las 1-formas básicas du y dv. Entonces dS resulta una función multiplicada por la 2-forma básica $du\, dv$, que podemos integrar sobre D.)

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 8

1. Sea $\mathbf{F} = 2yz\mathbf{i} + (-x + 3y + 2)\mathbf{j} + (x^2 + z)\mathbf{k}$. Evaluar $\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$, donde S es el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \leq z \leq 1$ (sin tapa ni parte inferior). ¿Qué sucede si se incluye la tapa y la parte inferior?

2. Sea Ω una región en $\mathbf{R}^3$ con frontera $\partial\Omega$. Probar la identidad

$$\int_{\partial\Omega} [\mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G})] \cdot d\mathbf{S} = \int_\Omega (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot (\nabla \times \mathbf{G})\, dV - \int_\Omega \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{G})\, dV.$$

3. Sea $\mathbf{F} = x^2y\mathbf{i} + z^8\mathbf{j} - 2xyz\mathbf{k}$. Evaluar la integral de $\mathbf{F}$ sobre la superficie del cubo unitario.

4. Verificar el teorema de Green para la integral de línea

$$\int_C x^2y\, dx + y\, dy$$

cuando C es la frontera de la región entre las curvas $y = x$ y $y = x^3$, $0 \leq x \leq 1$.

5. (a) Mostrar que $\mathbf{F} = (x^3 - 2xy^3)\mathbf{i} - 3x^2y^2\mathbf{j}$ es un campo vectorial gradiente.
(b) Evaluar la integral de $\mathbf{F}$ a lo largo de la trayectoria $x = \cos^3\theta$, $y = \operatorname{sen}^3\theta$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

6. ¿Pueden deducir el teorema de Green en el plano a partir del teorema de Gauss?

7. (a) Mostrar que $\mathbf{F} = 6xy(\cos z)\mathbf{i} + 3x^2(\cos z)\mathbf{j} - 3x^2y(\operatorname{sen} z)\mathbf{k}$ es conservativo (ver la sección 8.3).
(b) Hallar f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.
(c) Evaluar la integral de $\mathbf{F}$ a lo largo de la curva $x = \cos^3\theta$, $y = \operatorname{sen}^3\theta$, $z = 0$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

8. Sea $\mathbf{r}(x, y, z) = (x, y, z)$, $r = \|\mathbf{r}\|$. Mostrar que $\nabla^2(\log r) = 1/r^2$ y $\nabla^2(r^n) = n(n+1)r^{n-2}$.

9. Sea la velocidad de un fluido descrita por $\mathbf{F} = 6xz\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$. Calcular la tasa a la cual el fluido va saliendo del cubo unitario.

10. Sea $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + (x^2y - 2xy)\mathbf{j} - x^2z\mathbf{k}$. ¿Existe $\mathbf{G}$ tal que $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$?

11. Sean $\mathbf{a}$ un vector constante y $\mathbf{F} = \mathbf{a} \times \mathbf{r}$ [como siempre, $\mathbf{r}(x, y, z) = (x, y, z)$]. ¿Es $\mathbf{F}$ conservativo? De ser así, hallar un potencial para él.

***12.** Considerar el caso del flujo de un fluido incompresible con campo de velocidad $\mathbf{F}$ y densidad ρ.

(a) Si ρ es constante para cada t fija, entonces mostrar que ρ es constante también en t.

(b) Si ρ es constante en t, entonces mostrar que $\mathbf{F} \cdot \nabla_\rho = 0$.

13. (a) Sea $f(x, y, z) = 3xye^{z^2}$. Calcular ∇f.

(b) Sea $\boldsymbol{\sigma}(t) = (3\cos^3 t, \operatorname{sen}^2 t, e^t)$, $0 \le t \le \pi$. Evaluar

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}} \nabla f \cdot d\mathbf{s}.$$

(c) Verificar directamente el teorema de Stokes para campos vectoriales gradiente $\mathbf{F} = \nabla f$.

14. Usar el teorema de Green o evaluar de otra manera $\int_C x^3\,dy - y^3\,dx$, donde C es el círculo unitario ($x^2 + y^2 = 1$).

15. Evaluar la integral $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ donde $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ y donde S es la superficie de la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

16. (a) Enunciar el teorema de Stokes para superficies en $\mathbf{R}^3$.

(b) Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial en $\mathbf{R}^3$ que satisface $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Usar el teorema de Stokes para mostrar que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$ donde C es una curva cerrada.

17. Usar el teorema de Green para hallar el área del lazo de la curva $x = a \operatorname{sen}\theta \cos\theta$, $y = a \operatorname{sen}^2\theta$, para $a > 0$ y $0 \le \theta \le \pi$.

18. Evaluar $\int_C yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$ donde C es la curva de intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y la superficie $z = y^2$.

19. Evaluar $\int_C (x+y)\,dx + (2x-z)\,dy + (y+z)\,dz$ donde C es el perímetro del triángulo que conecta $(2, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$ y $(0, 0, 6)$, en ese orden.

20. ¿Cuáles de los siguientes campos son conservativos en $\mathbf{R}^3$? Para aquellos que lo sean, hallar una función f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

(a) $\mathbf{F}(x, y, z) = 3x^2y\mathbf{i} + x^3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

(b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + z)\mathbf{i} - (y + z)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k}$

$\boxed{\text{(c)}}$ $\mathbf{F}(x, y, z) = 2xy^3\mathbf{i} + x^2z^3\mathbf{j} + 3x^2yz^2\mathbf{k}$

21. Considerar los dos siguientes campos vectoriales en $\mathbf{R}^3$:

(i) $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2\mathbf{i} - z^2\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$

(ii) $\mathbf{G}(x, y, z) = (x^3 - 3xy^2)\mathbf{i} + (y^3 - 3x^2y)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

(a) ¿Cuál de estos campos (si es que hay) son conservativos en $\mathbf{R}^3$? (Esto es, ¿cuáles son campos gradientes?) Dar razones para la respuesta.

(b) Hallar potenciales para los campos que sean conservativos.

(c) Sea $\boldsymbol{\alpha}$ la trayectoria que va de $(0, 0, 0)$ a $(1, 1, 1)$ siguiendo las aristas del cubo $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$ de $(0, 0, 0)$ a $(0, 0, 1)$ a $(0, 1, 1)$ a $(1, 1, 1)$. Sea $\boldsymbol{\beta}$ la trayectoria de $(0, 0, 0)$ a $(1, 1, 1)$ directamente a lo largo de la diagonal del cubo. Hallar los valores de las integrales de línea

$$\int_{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}, \qquad \int_{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s}, \qquad \int_{\boldsymbol{\beta}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}, \qquad \int_{\boldsymbol{\beta}} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s}.$$

22. Considerar el campo vectorial *constante* $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ en $\mathbf{R}^3$.

(a) Hallar un campo escalar $\phi(x, y, z)$ en $\mathbf{R}^3$ tal que $\nabla\phi = \mathbf{F}$ en $\mathbf{R}^3$ y $\phi(0, 0, 0) = 0$.

(b) En la esfera Σ de radio 2 alrededor del origen, hallar los puntos en los cuales

(i) ϕ es un máximo y

(ii) ϕ es un mínimo.

(c) Calcular los valores máximo y mínimo de ϕ en Σ.

23. Suponer que $\nabla \cdot \mathbf{F}(x_0, y_0, z_0) > 0$. Mostrar que para una esfera S lo suficientemente pequeña, con centro en (x_0, y_0, z_0), el flujo de $\mathbf{F}$ hacia afuera de S es positivo.

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS CON NUMERACIÓN IMPAR

Algunas soluciones que requieren demostración están incompletas o se omiten.

SECCIÓN 1.1

1. 4; 17

3. $(-104 + 16a, -24 - 4b, -22 + 26c)$

5. $24\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = 24\mathbf{i}$

7. $x = 0,\ z = 0,\ y \in \mathbf{R}$; $x = 0,\ y = 0,\ z \in \mathbf{R}$; $y = 0,\ x, z \in \mathbf{R}$; $x = 0, y, z \in \mathbf{R}$

9. (b) Primero, la semejanza de $\Delta((0,0,0),(x,0,0),(x,y,0))$ con $\Delta((0,0,0),(\alpha x,0,0),(\alpha x,\alpha y,0))$ muestra que $(0,0,0)$, $(x,y,0)$ y $(\alpha x,\alpha y,0)$ son colineales. Segundo, la semejanza de $\Delta((0,0,0),(x,y,0),(x,y,z))$ con $\Delta((0,0,0),(\alpha x,\alpha y,0),(\alpha x,\alpha y,\alpha z))$ muestra que $(0,0,0)$, (x,y,z) y $(\alpha x,\alpha y,\alpha z)$ son colineales. Así, $(\alpha x,\alpha y,\alpha z)$ está en la dirección apropiada para $\alpha\mathbf{v}$. Finalmente, usar el teorema de Pitágoras para mostrar que la longitud es correcta.

11. $\{(2s, 7s + 2t, 7t) | s \in \mathbf{R}, t \in \mathbf{R}\}$

13. $\mathbf{l}(t) = -\mathbf{i} + (t-1)\mathbf{j} - \mathbf{k}$

15. $\mathbf{l}(t) = (2t-1)\mathbf{i} - \mathbf{j} + (3t-1)\mathbf{k}$

17. $\{s\mathbf{i} + 3s\mathbf{k} - 2t\mathbf{j} | 0 \le s \le 1, 0 \le t \le 1\}$

19. Si (x,y,z) está sobre la recta, entonces $x = 2 + t$, $y = -2 + t$ y $z = -1 + t$. Por lo tanto $2x - 3y + z - 2 = 4 + 2t + 6 - 3t - 1 + t - 2 = 7$, que no es cero. Por lo tanto ningún (x,y,z) satisface ambas condiciones.

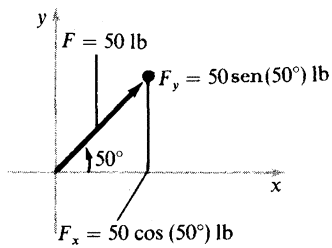
21. Si los vértices están en $\mathbf{0}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, los puntos medios de los lados están en $\frac{1}{2}\mathbf{v}$, $\frac{1}{2}\mathbf{w}$ y $\frac{1}{2}(\mathbf{v} + \mathbf{w})$ como en el ejemplo 7. Verificar estas ecuaciones: $(\frac{2}{3})(\frac{1}{2})(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \frac{1}{2}\mathbf{v} + \frac{1}{3}(\mathbf{w} - \frac{1}{2}\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\mathbf{w} + \frac{1}{3}(\mathbf{v} - \frac{1}{2}\mathbf{w})$.

23. $\{(x_0, y_0, z_0) + s\mathbf{a} + t\mathbf{b} | 0 \le s \le 1, 0 \le t \le 1\}$

25. $\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $\theta \approx 0.24$ radianes al noreste.

27. (a) 12:03 p.m. (b) 4.95 km

29.

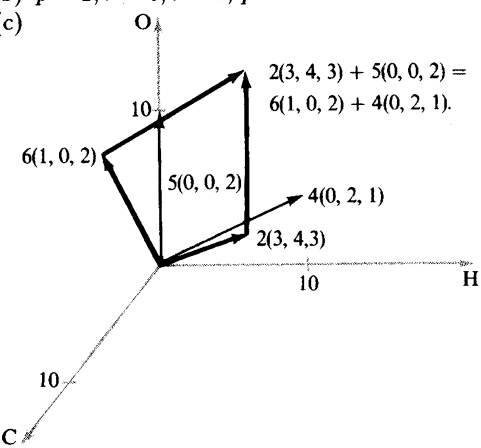


31. $(4.9, 4.9, 4.9)$ y $(-4.9, -4.9, 4.9)$N.

33. (a) Haciendo que las coordenadas x, y y z sean el número de átomos de C, H y O respectivamente, obtenemos $p(3,4,3) + q(0,0,2) = r(1,0,2) + s(0,2,1)$.

(b) $p = 2, r = 6, s = 4, q = 5$

(c)



SECCIÓN 1.2

1. (a) Escribir las expresiones en componentes y usar las propiedades asociativa y distributiva de los números.

(b) Usar la conmutatividad de la multiplicación de los números en las coordenadas.

3. 99°

5. No, es 75.7; sería cero sólo si los vectores fueran paralelos.

7. $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{5}, \|\mathbf{v}\| = \sqrt{2}, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -3$

9. $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{11}, \|\mathbf{v}\| = \sqrt{62}, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -14$

11. $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{14}, \|\mathbf{v}\| = \sqrt{26}, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -17$

13. En el Ejercicio 9, $\cos^{-1}(-14/\sqrt{11}\sqrt{62})$; en el Ejercicio 10, $\pi/2$; y en el Ejercicio 11, $\cos^{-1}(-17/2\sqrt{3}\sqrt{26})$

15. $-4(-\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})/3$

17. Cualquier (x, y, z) con $x + y + z = 0$

19. $\mathbf{F}_1 = -(F/2)(\mathbf{i} + \mathbf{j})$ y $\mathbf{F}_2 = (F/2)(\mathbf{i} - \mathbf{j})$

21. (a) $\mathbf{F} = (3\sqrt{2}\mathbf{i} + 3\sqrt{2}\mathbf{j})$ (b) ≈ 0.322 radianes (c) $18\sqrt{2}$

SECCIÓN 1.3

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -8; \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8; \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 8;$ etc.

3. $-3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

5. $\sqrt{35}$

7. 10

9. $\pm\mathbf{k}$

11. $\pm(113\mathbf{i} + 17\mathbf{j} - 103\mathbf{k})/\sqrt{23{,}667}$

13. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$; $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 6$; $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{6}$; $\|\mathbf{v}\| = 3$; $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$

15. (a) $x + y + z - 1 = 0$ (b) $x + 2y + 3z - 6 = 0$
(c) $5x + 2z = 25$ (d) $x + 2y - 3z = 13$

17. (a) Hacer lo primero obteniendo la coordenadas y después usarlas junto con $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = -(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \times \mathbf{A}$ para obtener lo segundo.

(b) Usar las identidades de la parte (a) para escribir la cantidad en términos de productos internos.

(c) Usar las identidades de la parte (a) y agrupar términos.

19. Calcular los resultados de la regla de Cramer y verificar que satisfagan la ecuación.

21. $x - 2y + 3z + 12 = 0$

23. $4x - 6y - 10z = 14$

25. $10x - 17y + z + 25 = 0$

27. Para el ejercicio 19, notar que $(2, -3, 1) \cdot (1, 1, 1) = 0$, de modo que la recta y el plano son paralelos y $(2, -2, -1)$ no está en el plano. Para el ejercicio 20, la recta y el plano son paralelos y $(1, -1, 2)$ *está* en el plano.

29. $\sqrt{2}/13$

31. Mostrar que $\mathbf{M}$ satisface las propiedades geométricas de $\mathbf{R} \times \mathbf{F}$.

33. Mostrar que $n_1(\mathbf{N} \times \mathbf{a})$ y $n_2(\mathbf{N} \times \mathbf{b})$ tienen la misma magnitud y dirección.

35. Un método consiste en escribir todos los términos en el lado izquierdo y ver que los términos que incluyen λ se cancelen. Otro método es observar primero que el determinante es lineal en cada renglón o columna y que si cualquier renglón o columna se repite, la respuesta es cero. Entonces

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + \lambda a_1 & b_2 + \lambda b_1 & c_2 + \lambda c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

SECCIÓN 1.4

1. (a)

Cilíndricas

r	θ	z
1	45°	1
2	$\pi/2$	-4
0	45°	10
3	$\pi/6$	4
1	$-\pi/6$	0
2	$3\pi/4$	-2

Rectangulares

x	y	z
$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
0	2	-4
0	0	10
$3\sqrt{3}/2$	$3/2$	4
$\sqrt{3}/2$	$-\frac{1}{2}$	0
$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	-2

Esféricas

ρ	θ	ϕ
$\sqrt{2}$	45°	45°
$2\sqrt{5}$	$\pi/2$	$\pi - \arccos 2\sqrt{5}/5$
10	45°	0
5	$\pi/6$	$\arccos \frac{4}{5}$
1	$-\pi/6$	$\pi/2$
$2\sqrt{2}$	$3\pi/4$	$3\pi/4$

(b)

Rectangulares

x	y	z
2	1	-2
0	3	4
$\sqrt{2}$	1	1
$-2\sqrt{3}$	-2	3

Esféricas

ρ	θ	ϕ
3	$\arctan \frac{1}{2}$	$\pi/2 + \arccos \sqrt{5}/3$
5	$\pi/2$	$\operatorname{arcsen} \frac{3}{5}$
2	$\operatorname{arcsen} \sqrt{3}/3$	$\pi/3$
5	$7\pi/6$	$\arccos \frac{3}{5}$

Cilíndricas

r	θ	z
$\sqrt{5}$	$\arctan \frac{1}{2}$	-2
3	$\pi/2$	4
$\sqrt{3}$	$\operatorname{arcsen} \sqrt{3}/3$	1
4	$7\pi/6$	3

3. (a) Rotación en π alrededor del eje z. (b) Reflexión respecto al plano xy

5. No; (r, θ, ϕ) y $(-r, \theta + \pi, \pi - \phi)$ representan el mismo punto.

7. (a) $\mathbf{e}_\rho = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
$\mathbf{e}_\theta = (-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})/\sqrt{x^2 + y^2}$
$\mathbf{e}_\phi = (-xz\mathbf{i} - yz\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k})/r\rho$
(b) $\mathbf{e}_\theta \times \mathbf{j} = -y\mathbf{k}/\sqrt{x^2 + y^2}, \mathbf{e}_\phi \times \mathbf{j} = (xz/r\rho)\mathbf{k} \pm (r/\rho)\mathbf{i}$

9. (a) La longitud de $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ es $(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = \rho$
(b) $\cos\phi = z/(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ (c) $\cos\theta = x/(x^2 + y^2)^{1/2}$

11. $0 \le r \le a$, $0 \le \theta \le 2\pi$ significa que (r, θ, z) está dentro del cilindro con radio a y centro en el eje z, y $|z| \le b$ significa que no está a una distancia mayor que b del plano xy.

13. $-d/(6\cos\phi) \le \rho \le d/2$, $0 \le \phi \le 2\pi$, y $\pi - \cos^{-1}(\frac{1}{3}) \le \phi \le \pi$

15. Ésta es una superficie cuya sección transversal con cada superficie $z = c$ es una rosa de cuatro pétalos. Las hojas se encojen hasta cero conforme $|c|$ cambia de 0 a 1.

SECCIÓN 1.5

1. (ii) Expresar en componentes y usar la conmutatividad de la multiplicación de números.
(iii) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$ es una suma de cuadrados de números reales.
(iv) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$ es la suma de cuadrados de las componentes de $\mathbf{x}$. Esto puede ser 0 sólo si cada componente es 0.

3. $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| = 10 = \sqrt{5}\sqrt{20} = \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|$ por lo tanto $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \le \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|$ es verdadero
$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = 3\sqrt{5} = \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ por lo tanto $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ es verdadero

5. $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| = 5 < \sqrt{65} = \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|$ por lo tanto $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \le \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|$ es verdadero.
$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = \sqrt{28} < \sqrt{5} + \sqrt{13} = \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ por lo tanto $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ es verdadero.

7. $AB = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & 11 & 3 \\ -6 & 5 & 8 \end{bmatrix}, \det A = -5, \det B = -24,$

$\det AB = 120\ (= \det A \det B)$, $\det(A + B) = -61 (\neq \det A + \det B)$

9. IDEA: Para $k = 2$ usar la desigualdad del triángulo para demostrar que $\|\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2\| \le \|\mathbf{x}_1\| + \|\mathbf{x}_2\|$; después, para $k = i + 1$, notar que $\|\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{x}_{i+1}\| \le \|\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{x}_i\| + \|\mathbf{x}_{i+1}\|$.

11. (a) Verificar $n = 1$ y $n = 2$ directamente. Después reducir un determinante de $n \times n$ a una suma de determinantes de $(n-1) \times (n-1)$ y usar inducción.
(b) El argumento es análogo al de la parte (a). Suponer que se multiplica el primer renglón por λ. El primer término de la suma será λa_{11} multiplicado por un determinante de $(n-1) \times (n-1)$ sin factores de λ. Los otros términos obtenidos (al desarrollar por medio del primer renglón) son similares.

13. No necesariamente. Probar para $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

15. (a) La suma de dos funciones continuas y un múltiplo escalar de una función continua son continuas.

(b) (i) $(\alpha f + \beta g) \cdot k = \int_0^1 (\alpha f + \beta g)(x) h(x)\, dx$
$= \int_0^1 f(x)h(x)\, dx + \beta \int_0^1 g(x)h(x)\, dx$
$= \alpha f \cdot h + \beta g \cdot h.$

(ii) $f \cdot g = \int_0^1 f(x)g(x)\, dx = \int_0^1 g(x)f(x)\, dx = g \cdot f.$

En las condiciones (iii) y (iv) el integrando es un cuadrado perfecto. Por lo tanto la integral es no negativa y puede ser 0 sólo si el integrando es 0 donde sea. Si $f(x) \neq 0$ para algún x, entonces, por continuidad, sería positivo en una vecindad de x y la integral sería positiva.

17. Calcular la matriz producto en ambos órdenes.

19. $(\det A)(\det A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(I) = 1$

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 1

1. $\mathbf{v} + \mathbf{w} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$; $3\mathbf{v} = 9\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 15\mathbf{k}$; $6\mathbf{v} + 8\mathbf{w} = 26\mathbf{i} + 16\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$; $-2\mathbf{v} = -6\mathbf{i} - 8\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$; $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 4$; $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = 9\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$. En la figura se deberá presentar $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $3\mathbf{v}$, $6\mathbf{v}$, $8\mathbf{w}$, $6\mathbf{v} + 8\mathbf{w}$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ como proyección de $\mathbf{v}$ a lo largo de $\mathbf{w}$ y $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ como vector perpendicular tanto a $\mathbf{v}$ como a $\mathbf{w}$.

3. (a) $\mathbf{l}(t) = -\mathbf{i} + (2 + t)\mathbf{j} - \mathbf{k}$. (b) $\mathbf{l}(t) = (5t - 3)\mathbf{i} + (t + 1)\mathbf{j} - t\mathbf{k}$.
(c) $-2x + y + 2z = 9$.

5. (a) 0 (b) (5) (c) -10.

7. (a) $\pi/2$ (b) $5/2\sqrt{15}$ (c) $-10/\sqrt{6}\sqrt{17}$.

9. $\{st\mathbf{a} + s(1 - t)\mathbf{b} | 0 \leq t \leq 1 \text{ y } 0 \leq s \leq 1\}$.

11. Sean $\mathbf{v} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{w} = (b_1, b_2, b_3)$, y aplicar la desigualdad CBS.

13. El área es el valor absoluto de

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 + \lambda a_1 & b_2 + \lambda a_2 \end{vmatrix}.$$

(Se puede sumar un múltiplo de un renglón de un determinante a otro renglón sin cambiar su valor.) En el dibujo se deberán mostrar dos paralelogramos con la misma base y altura.

15. Los cosenos de las dos partes del ángulo son iguales, pues $\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}/\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{v}\| = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|)/\|\mathbf{v}\| = \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}/\|\mathbf{b}\|\,\|\mathbf{v}\|$.

17. $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{k}$; etc.

19. (a) IDEA: La longitud de la proyección del vector que conecta cualquier par de puntos, uno en cada recta, sobre $(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)/\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|$ es d.

(b) $\sqrt{2}$

21. (a) Notar que

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}.$$

(b) $\frac{1}{2}$

23.

Rectangulares	Esféricas	(se omite el dibujo)
(a) $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 1)$	(a) $(\sqrt{2}, \pi/4, \pi/4)$	
(b) $(3\sqrt{3}/2, \frac{3}{2}, -4)$	(b) $(5, \pi/6, \arccos(-\frac{4}{5}))$	
(c) $(0, 0, 1)$	(c) $(1, \pi/4, 0)$	
(d) $(0, -2, 1)$	(d) $(\sqrt{5}, -\pi/2, \arccos(\sqrt{5}/5))$	
(e) $(0, 2, 1)$	(e) $(\sqrt{5}, \pi/2, \arccos(\sqrt{5}/5))$	

25. $z = r^2 \cos 2\theta; \cos\phi = r \operatorname{sen}^2 \phi \cos 2\theta$

27. $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| = 6 < \sqrt{98} = \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|$; $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = \sqrt{33} < \sqrt{14} + \sqrt{7} = \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$

29. (a) La ley asociativa para multiplicación de matrices se puede verificar como sigue:

$$\begin{aligned}[(AB)C]_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} (AB)_{ik} C_{kj} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} A_{il} B_{lk} C_{kj} \\ &= \sum_{l=1}^{n} A_i (BC)_{lj} = [A(BC)]_{ij}.\end{aligned}$$

Usar esto considerando a C como vector columna.

(b) La matriz para la composición es la matriz producto.

31. $\mathbf{R}^n$ está generado por los vectores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. Si $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$, entonces $A\mathbf{v} = A[\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i] = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i) A\mathbf{e}_i$. Sea $a_{ij} = (A\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i)$, de modo que $A\mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{e}_i$. Entonces $A\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_k = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i) a_{ki}$. Esto es, si

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \qquad \text{entonces} \qquad A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix},$$

como se deseaba.

33. (a) $70 \cos\theta + 20 \operatorname{sen}\theta$ (b) $(21\sqrt{3} + 6)\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{k}$

35. Cada lado es igual a $2xy - 7yz + 5z^2 - 48x + 54y - 5z - 96$. (O intercambiar la primera y segunda columnas y después restar la primera de la segunda.)

37. Sumar el último renglón al primero y restarlo del segundo.

39. (a) $\dfrac{1}{6}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ (b) $\frac{1}{3}$

41. Usar el hecho de que $\|\mathbf{a}\|^2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$, desarrollar ambos lados y usar la definición de $\mathbf{c}$.

43. $(1/\sqrt{38})\mathbf{i} - (6/\sqrt{38})\mathbf{j} + (1/\sqrt{38})\mathbf{k}$

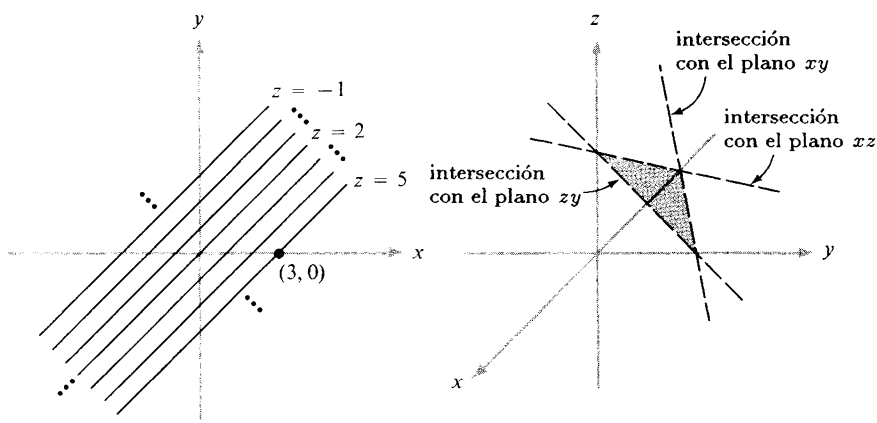
45. $(2/\sqrt{5})\mathbf{i} - (1/\sqrt{5})\mathbf{j}$

47. $(\sqrt{3}/2)\mathbf{i} + (1/2\sqrt{2})\mathbf{j} + (1/2\sqrt{2})\mathbf{k}$

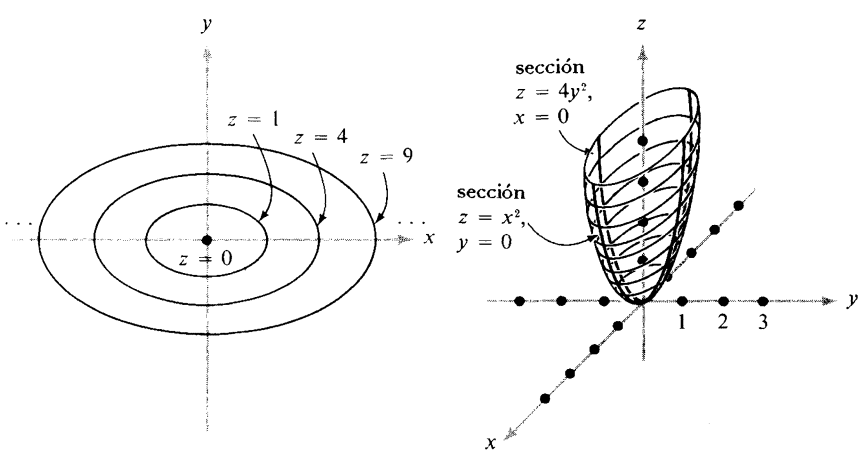
49. (a) $4\mathbf{k}$ (b) $20\sqrt{2}\mathbf{i} + 20\sqrt{2}\mathbf{j}$

SECCIÓN 2.1

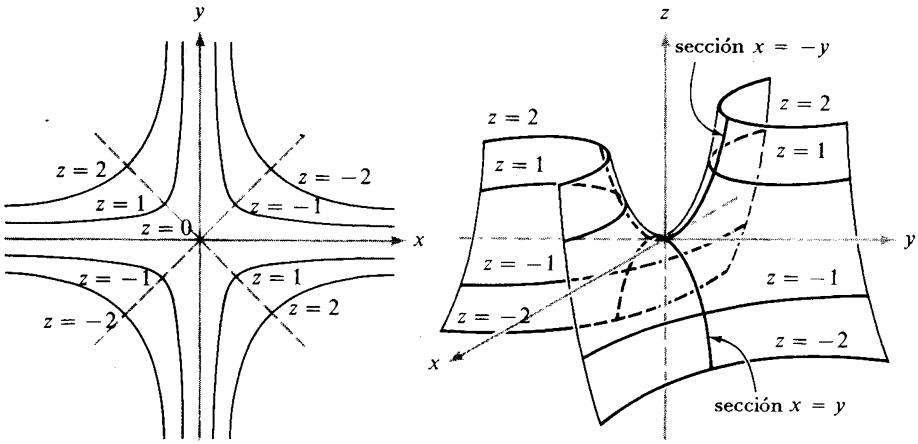
1. Las curvas de nivel y gráficas se esbozan a continuación. La gráfica en la parte (c) es un paraboloide hiperbólico como el del ejemplo 4 pero girado 45° y aplanado verticalmente en un factor de $\frac{1}{4}$. Para verlo, usar las variables $u = x + y$ y $v = x - y$. Entonces $z = (v^2 - u^2)/4$.



(a)



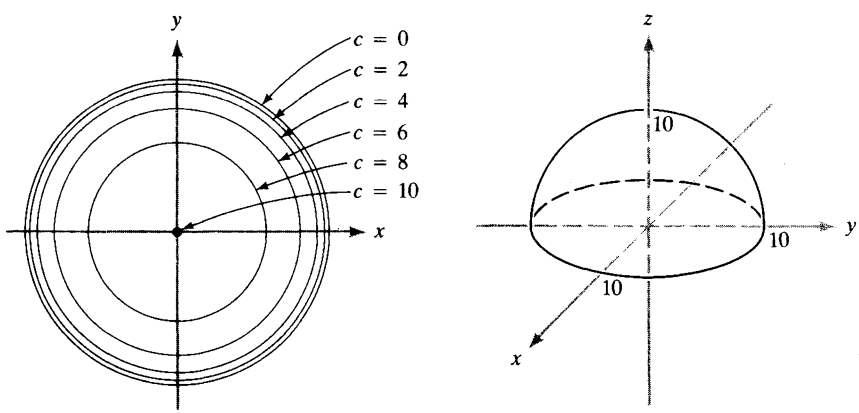
(b)



(c) $z = -xy$

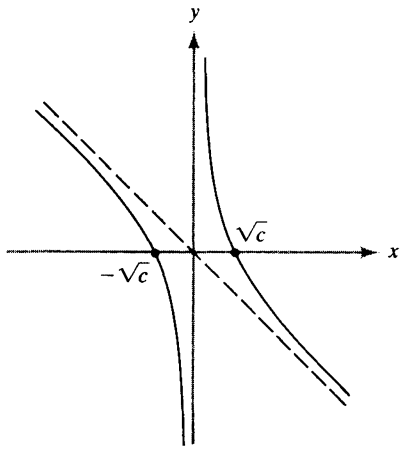
3. Para el ejemplo 2, $z = r(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta) + 2$, la forma depende de θ; para el ejemplo 3, $z = r^2$, la forma es independiente de θ; para el ejemplo 4, $z = r^2(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)$, la forma depende de θ.

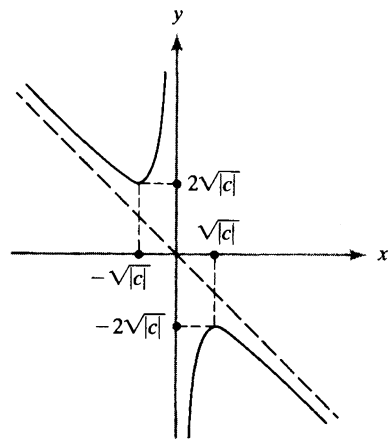
5. Las curvas de nivel son círculos $x^2 + y^2 = 100 - c^2$ cuando $c \leq 10$. La gráfica es el hemisferio superior de $x^2 + y^2 + z^2 = 100$.



7. Las curvas de nivel son círculos y la gráfica es un paraboloide de revolución. Ver el ejemplo 3 de esta sección.

9. Si $c = 0$, la curva de nivel es la recta $y = -x$ junto con la recta $\mathbf{x} = 0$. Si $c \neq 0$, entonces $y = -x + (c/x)$. La curva de nivel es una hipérbola con el eje y y la recta $y = -x$ como asíntotas. La gráfica es un paraboloide hipérbolico. Las secciones a lo largo de la recta $y = ax$ son las parábolas $z = (1 + a)x^2 = (1 + a)r^2/(1 + a^2)$.

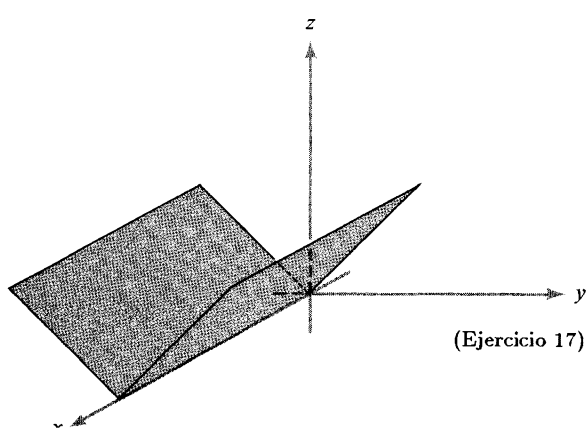




11. Si $c > 0$, la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ es vacía. Si $c = 0$, la superficie de nivel es el punto $(0, 0, 0)$. Si $c < 0$, la superficie de nivel es la esfera de radio $\sqrt{c}$ con centro en $(0, 0, 0)$. Una sección de la gráfica determinada por $z = a$ está dada por $t = -x^2 - y^2 - a^2$, que es un paraboloide de revolución abierto hacia abajo en el espacio xyt.

13. Si $c < 0$, la superficie de nivel es vacía. Si $c = 0$, la superficie de nivel es el eje z. Si $c > 0$, es el cilindro circular recto $x^2 + y^2 = c$ de radio $\sqrt{c}$, cuyo eje es el eje z. Una sección de la gráfica determinada por $z = a$ es el paraboloide de revolución $t = x^2 + y^2$. Una sección determinada por $x = b$ es un "canal" con sección transversal parabólica $t(y, z) = y^2 + b^2$.

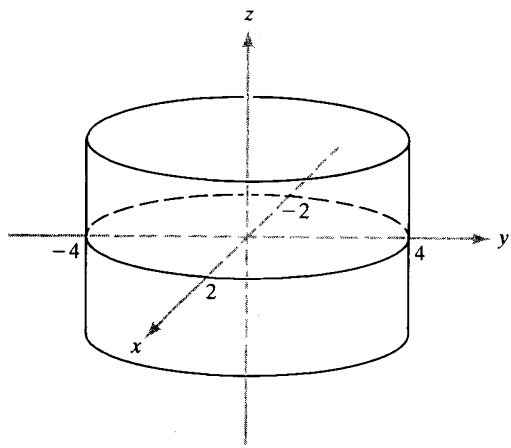
15. Haciendo $u = (x-z)/\sqrt{2}$ y $v = (x+z)/\sqrt{2}$ da los ejes u y v girados 45° alrededor del eje y desde los ejes x y z. Como $f = vy\sqrt{2}$, las superficies de nivel $f = c$ son "cilindros" perpendiculares al plano vy $(z = -x)$ cuyas secciones transversales son las hipérbolas $vy = c/\sqrt{2}$. La sección $S_{x=a} \cap$gráfica de f es paraboloide hiperbólico $t = (z + a)y$ en el espacio yzt (ver el ejercicio 1(c)). La sección $S_{y=b} \cap$gráfica de f es el plano $t = bx + bz$ en el espacio xzt. La sección $S_{z=b} \cap$gráfica de f es el paraboloide hiperbólico $t = y(x + b)$ en el espacio xyt.



(Ejercicio 17)

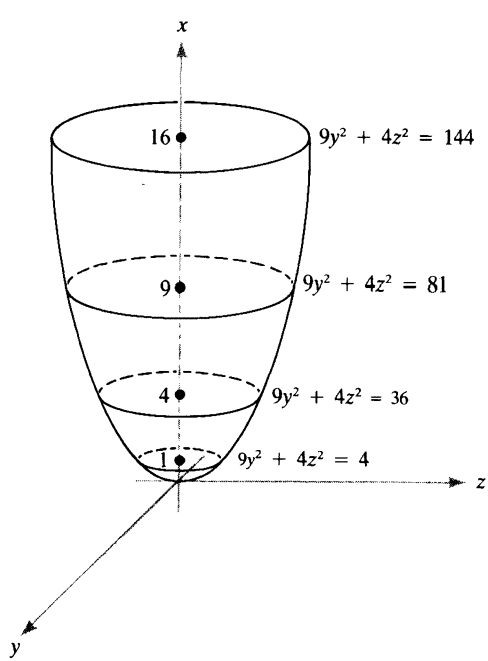
17. Si $c < 0$, la curva de nivel es vacía. Si $c = 0$, la curva de nivel es el eje x. Si $c > 0$, es el par de rectas paralelas $|y| = c$. Las secciones de la gráfica con x constante son curvas con forma de V $x = |y|$ en el espacio yz.

19. El valor de z no importa, de modo que obtenemos un "cilindro" de sección transversal elíptica paralelo al eje z que interseca al plano xy en la elipse $4x^2 + y^2 = 16$.

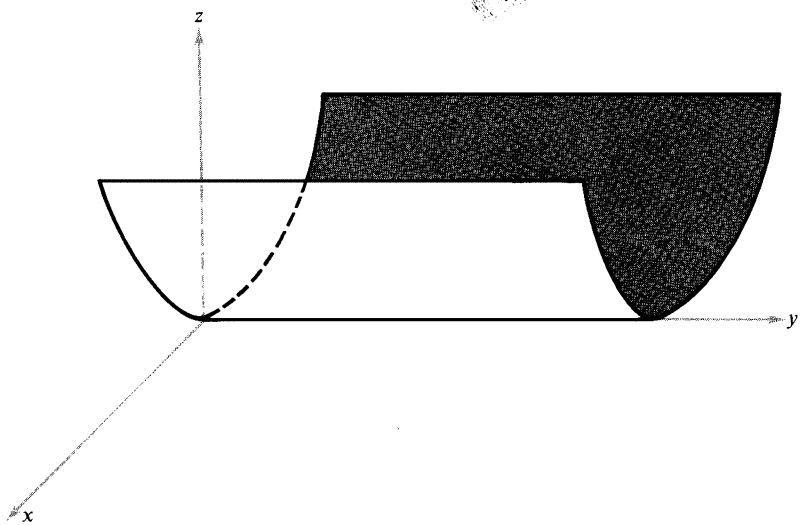


21. El valor de x no importa, de manera que obtenemos un "cilindro" paralelo al eje x de sección transversal hiperbólica que interseca el plano yz en la hipérbola $z^2 - y^2 = 4$.

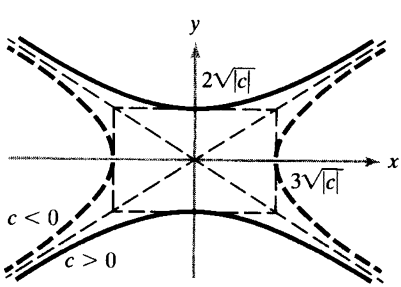
23. Un paraboloide elíptico con eje a lo largo del eje x



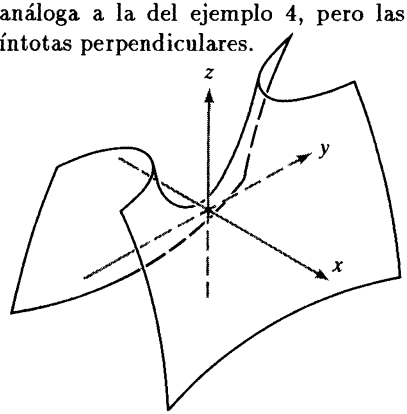
25. El valor de y no importa, de modo que obtenemos un "cilindro" de sección transversal parabólica.



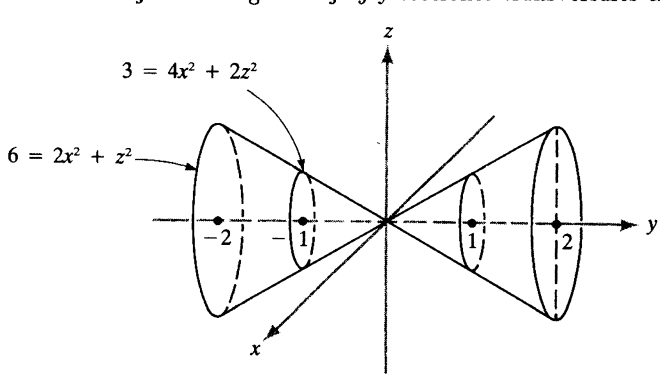
27. Ésta es una superficie de silla de montar análoga a la del ejemplo 4, pero las hipérbolas, que son curvas de nivel, no tienen asíntotas perpendiculares.



curvas de nivel

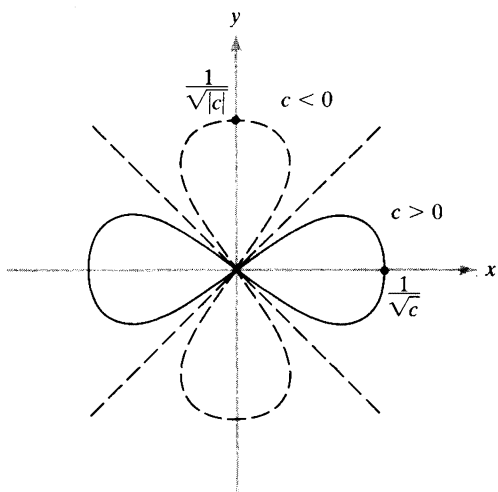


29. Un cono doble con ejes a lo largo del eje y y secciones transversales elípticas



31. Completar el cuadrado para obtener $(x+2)^2+(y-b/2)^2+(z+\frac{9}{2})^2 = (b^2+4b+97)/4$. Éste es un elipsoide con centro en $(-2, b/2, -\frac{9}{2})$ y ejes paralelos a los ejes coordenados.

33. Las curvas de nivel se describen por $\cos 2\theta = cr^2$. Si $c > 0$, entonces $-\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4$ o $3\pi/4 \leq \theta \leq 5\pi/4$. Si $c < 0$, entonces $\pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4$ o $5\pi/4 \leq \theta \leq 7\pi/4$. En cada caso se obtiene una figura con forma de 8, llamada *lemniscata,* que pasa por el origen. (Dichas formas fueron estudiadas primero por Jacques Bernoulli y a veces se les llama lemniscatas de Bernoulli.)



SECCIÓN 2.2

1. (a) Si $(x_0, y_0) \in A$, entonces $|x_0| < 1$ y $|y_0| < 1$. Sea $r < 1 - |x_0|$ y $r < 1 - |y_0|$. Probar que $D_r(x_0, y_0) \subset A$, ya sea analíticamente o trazando una figura.

(b) Si $(x_0, y_0) \in B$ y $0 < r \leq y_0$ (e.g., si $r = y_0/2$), entonces $D_r(x_0, y_0) \subset B$ (probarlo analíticamente o trazando una figura).

(c) Sea $r = \text{mín}(4 - \sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \sqrt{x_0^2 + y_0^2} - 2)$.

(d) Sea r el menor de los tres números usados en las partes (a), (b) y (c).

(e) Sea $r = \text{mín}(|x_0|, |y_0|)$.

3. Para $|x - 2| < \delta = \sqrt{\epsilon + 4} - 2$, tenemos $|x^2 - 4| = |x - 2|\,|x + 2| < \delta(\delta + 4) = \epsilon$. Por el teorema 3(iii), $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = (\lim\limits_{x \to 2} x)^2 = 2^2 = 4$.

5. (a) 5; (b) 0; (c) $2x$; (d) 1; (e) $-\frac{1}{2}$.

7. (a) 1; (b) $\|\mathbf{x}_0\|$; (c) $(1, e)$;

(d) El límite no existe; (ver por separado los límites para $x = 0$ y $y = 0$).

9. Componer $f(x, y) = xy$ con $g(t) = (\operatorname{sen} t)/t$ para $t \neq 0$ y $g(0) = 1$.

11. 0

13. Usar las partes (ii) y (iii) del teorema 4.

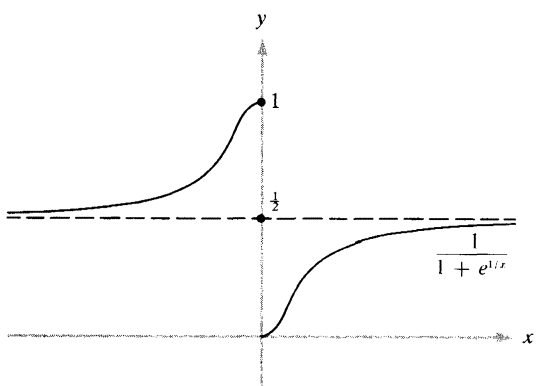
15. (a) Sea 1 el valor de la función en $(0, 0)$. (b) No.

17. Sea $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|/2$. Si $\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\| \leq r$, sea $f(\mathbf{z}) = \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|/r$. Si $\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\| > r$, sea $f(\mathbf{z}) = 1$.

19. (a) $\lim\limits_{x \to b^+} f(x) = L$ si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $x > b$ y $0 < x - b < \delta$ implican $|f(x) - L| < \epsilon$.

(b) $\lim\limits_{x \to 0^-} (1/x) = -\infty$, $\lim\limits_{t \to -\infty} e^t = 0$, de modo que $\lim\limits_{x \to 0^-} e^{1/x} = 0$. Por lo tanto $\lim\limits_{x \to 0^-} 1/(1 + e^{1/x}) = 1$. El otro límite es 0.

(c)



21. Si $\epsilon > 0$ y $\mathbf{x}_0$ están dados, sea $\delta = (\epsilon/K)^{1/\alpha}$. Entonces $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\| < K\delta^\alpha = \epsilon$ cuando $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$. Notar que la selección de δ no depende de x_0. Esto significa que f es *uniformemente continua.*

23. (a) Escoger $\delta < 1/500$. (b) Escoger $\delta < 0.002$.

SECCIÓN 2.3

1. (a) $\partial f/\partial x = y$; $\partial f/\partial y = x$
(b) $\partial f/\partial x = ye^{xy}$; $\partial f/\partial y = xe^{xy}$
(c) $\partial f/\partial x = \cos x \cos y - x \operatorname{sen} x \cos y$
$\partial f/\partial y = -x \cos x \operatorname{sen} y$
(d) $\partial f/\partial x = 2x[1 + \log(x^2 + y^2)]$;
$\partial f/\partial y = 2y[1 + \log(x^2 + y^2)]$; $(x, y) \neq (0, 0)$

3. (a) $\partial w/\partial x = (1+2x^2)\exp(x^2+y^2)$; $\partial w/\partial y = 2xy\exp(x^2+y^2)$
(b) $\partial w/\partial x = -4xy^2/(x^2-y^2)^2$; $\partial w/\partial y = 4yx^2/(x^2-y^2)^2$
(c) $\partial w/\partial x = ye^{xy}\log(x^2+y^2) + 2xe^{xy}/(x^2+y^2)$;
$\partial w/\partial y = xe^{xy}\log(x^2+y^2) + 2ye^{xy}/(x^2+y^2)$
(d) $\partial w/\partial x = 1/y$; $\partial w/\partial y = -x/y^2$
(e) $\partial w/\partial x = -y^2e^{xy}\operatorname{sen} ye^{xy}\operatorname{sen} x + \cos ye^{xy}\cos x$;
$\partial w/\partial y = (xye^{xy}+e^{xy})(-\operatorname{sen} ye^{xy}\operatorname{sen} x)$

5. $z = 6x+3y-11$

7. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} e^y & xe^y - \operatorname{sen} y \\ 1 & 0 \\ 1 & e^y \end{bmatrix}$;
(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & e^z \\ 2xy & x^2 & 0 \end{bmatrix}$
(d) $\begin{bmatrix} (y+xy^2)e^{xy} & (x+x^2y)e^{xy} \\ \operatorname{sen} y & x\cos y \\ 5y^2 & 10xy \end{bmatrix}$

9. En $z=1$

11. Ambos son xye^{xy}.

13. (a) $\nabla f = (e^{-x^2-y^2-z^2}(-2x^2+1), -2xye^{-x^2-y^2-z^2}, -2xze^{-x^2-y^2-z^2})$
(b) $\nabla f = (x^2+y^2+z^2)^{-2}(yz(y^2+z^2-x^2), xz(x^2+z^2-y^2), xy(x^2+y^2-z^2))$
(c) $\nabla f = (z^2e^x\cos y, -z^2e^x\operatorname{sen} y, 2ze^x\cos y)$

15. $2x+6y-z=5$

17. $-2\mathbf{k}$

19. Son constantes. Mostrar que la derivada es la matriz cero.

SECCIÓN 2.4

1. Usar las partes (i), (ii) y (iii) del teorema 10. La derivada en $\mathbf{x}$ es $2(f(\mathbf{x})+1)\mathbf{D}f(\mathbf{x})$.

3. (a) $h(x,y) = f(x,u(x,y)) = f(p(x),u(x,y))$. Aquí usamos p sólo como notación: $p(x)=x$.

$$\text{Desarrollado:}\quad \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \text{pues} \qquad \frac{dp}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1$$

JUSTIFICACIÓN: Llamar (p,u) a las variables de f. Para usar la regla de la cadena debemos expresar h como composición de funciones; i.e., hallar primero g tal que $h(x,y) = f(g(x,y))$. Sea $g(x,y) = (p(x),u(x,y))$. Por lo tanto, $\mathbf{D}h = (\mathbf{D}f)(\mathbf{D}g)$.

Entonces

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial x} & \dfrac{\partial h}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial p} & \dfrac{\partial f}{\partial u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x} & \dfrac{\partial g_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x} & \dfrac{\partial g_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial p} & \dfrac{\partial f}{\partial u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial p} + \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix}$$

de modo que $\dfrac{\partial h}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial p} + \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}$. Es posible obtener como respuesta $\dfrac{\partial h}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}$. Esto requiere una interpretación cuidadosa debido a la posible ambigüedad acerca del significado de $\partial f/\partial x$, es por ello que se usó el nombre p.

(b) $\dfrac{\partial h}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}$ (c) $\dfrac{\partial h}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial w}\dfrac{\partial w}{\partial x}$

5. Calcular cada uno de dos maneras; las respuestas son
(a) $(f \circ \mathbf{c})'(t) = e^t(\cos t - \operatorname{sen} t)$
(b) $(f \circ \mathbf{c})'(t) = 15t^4 \exp(3t^5)$
(c) $(f \circ \mathbf{c})'(t) = (e^{2t} - e^{-2t})[1 + \log(e^{2t} + e^{-2t})]$
(d) $(f \circ \mathbf{c})'(t) = (1 + 4t^2)\exp(2t^2)$

7. Usar el teorema 10(iii) y reemplazar matrices con vectores.

9. $(f \circ g)(x, y) = (\tan(e^{x-y} - 1) - e^{x-y}, e^{2(x-y)} - (x-y)^2)$ y $\mathbf{D}(f \circ g)(1, 1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

11. $\frac{1}{2}\cos(1)\cos(\log\sqrt{2})$

13. $-2\cos t \operatorname{sen} t\, e^{\operatorname{sen} t} + \operatorname{sen}^4 t + \cos^3 t\, e^{\operatorname{sen} t} - 3\cos^2 t \operatorname{sen}^2 t$.

15. $(2, 0)$

17. (a) $G(x, y(x)) = 0$ de modo que $\dfrac{\partial G}{\partial x} + \dfrac{\partial G}{\partial y}\dfrac{dy}{dx} = 0$.

(b) $\begin{bmatrix} \dfrac{dy_1}{dx} \\ \dfrac{dy_2}{dx} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \dfrac{\partial G_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial G_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial G_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial G_2}{\partial y_2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial G_1}{\partial x} \\ \dfrac{\partial G_2}{\partial x} \end{bmatrix}$ donde $^{-1}$ significa matriz inversa.

La primera componente de esta ecuación se lee

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{-\dfrac{\partial G_1}{\partial x}\dfrac{\partial G_2}{\partial y_2} + \dfrac{\partial G_2}{\partial x}\dfrac{\partial G_1}{\partial y_2}}{\dfrac{\partial G_1}{\partial y_1}\dfrac{\partial G_2}{\partial y_2} - \dfrac{\partial G_2}{\partial y_1}\dfrac{\partial G_1}{\partial y_2}}.$$

(c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2x}{3y^2 + e^y}$.

19. Aplicar la regla de la cadena a $\partial G/\partial T$ donde $G(t(T,P), P(T,P), V(T,P)) = P(V-b)e^{a/RVT} - RT$ es idénticamente 0; $t(T,P) = T$; y $p(T,P) = P$.

21. Definir $R_1(\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - [\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)]\mathbf{h}$.

23. Sean g_1 y g_2 funciones C^1 de $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}$ tales que $g_1(\mathbf{x}) = 1$ para $\|\mathbf{x}\| < \sqrt{2}/3$; $g_1(\mathbf{x}) = 0$ para $\|\mathbf{x}\| > 2\sqrt{2}/3$; $g_2(\mathbf{x}) = 1$ para $\|\mathbf{x} - (1,1,0)\| < \sqrt{2}/3$ y $g_2(\mathbf{x}) = 0$ para $\|\mathbf{x} - (1,1,0)\| > 2\sqrt{2}/3$. (Ver el ejercicio 22.) Sean

$$h_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } h_2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

y hacer $f(\mathbf{x}) = g_1(\mathbf{x})k_1(\mathbf{x}) + g_2(\mathbf{x})k_2(\mathbf{x})$.

25. Por el ejercicio 24 y el teorema 10(iii), cada componente de k es diferenciable y $\mathbf{D}k_i(\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}g_i(\mathbf{x}_0) + g_i(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$. Como $[\mathbf{D}g_i(\mathbf{x}_0)]\mathbf{y}$ es la i-ésima componente de $[\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)]y$ y $[\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)]\mathbf{y}$ es el número $\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{y}$, obtenemos $[\mathbf{D}k(\mathbf{x}_0)]\mathbf{y} = f(\mathbf{x}_0)[\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)]\mathbf{y} + [\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)]\mathbf{y}[g(\mathbf{x}_0)] = f(x_0)[\mathbf{D}g(x_0)]\mathbf{y} + [\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{y}]g(\mathbf{x}_0)$.

27. Hallar primero la fórmula para $(\partial/\partial x)(F(x,x))$, usando la regla de la cadena. Sea $F(x,z) = \int_0^x f(z,y)\,dy$ y usar el teorema fundamental del cálculo.

29. Demostración de la regla (iii):

$$\begin{aligned}
&\frac{|h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x}_0) - [f(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0) + g(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)](\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \\
&\quad \le |f(\mathbf{x}_0)| \frac{|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0) - \mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \\
&\qquad + |g(\mathbf{x}_0)| \frac{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \\
&\qquad + \frac{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \frac{|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|
\end{aligned}$$

Cuando $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$, los primeros dos términos van a 0 por la diferenciabilidad de f y g. El tercero también, porque $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)|/\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$ y $|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)|/\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$están acotados por una constante, digamos M, en alguna bola $D_r(\mathbf{x}_0)$. Para ver esto, escoger r suficientemente pequeño para que $[f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)]/\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$ diste en menos que 1 de $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)/\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$ si $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r$. Entonces tenemos $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)|/\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \le M_1 + |\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)|/\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = M_1 + |\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)|/\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \le M_1 + \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|$ por la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

La demostración de la regla (iv) se sigue de la regla (iii) y del caso especial de la regla del cociente, con f idénticamente 1; esto es, $\mathbf{D}(1/g)(\mathbf{x}_0) = [-1/g(\mathbf{x}_0)^2]\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)$. Para obtener esta respuesta, notar que en alguna bola pequeña $D_r(\mathbf{x}_0)$, $g(\mathbf{x}) > m > 0$.

Usar la desigualdad del triángulo y la de Schwarz para mostrar que

$$\begin{aligned}
&\frac{\left|\dfrac{1}{g(\mathbf{x}_0)} - \dfrac{1}{g(\mathbf{x})} + \dfrac{1}{g(\mathbf{x}_0)^2}\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\right|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} \\
&\quad \le \frac{1}{|g(\mathbf{x})|}\frac{1}{|g(\mathbf{x}_0)|}\frac{|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0) - \mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} \\
&\qquad + \frac{|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)|}{|g(\mathbf{x})|g(\mathbf{x}_0)^2}\frac{|\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} \\
&\quad \le \frac{1}{m^2}\frac{|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0) - \mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} + \frac{\|\nabla g(\mathbf{x}_0)\|}{m^3}|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)|
\end{aligned}$$

Estos dos últimos términos van a 0, pues g es diferenciable y continua.

SECCIÓN 2.5

1. $\nabla f(1,1,2)\cdot\mathbf{v} = (4,3,4)\cdot(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}, 0) = 2\sqrt{5}$

2. (a) $17e^e/13$ (b) $e/\sqrt{3}$ (c) 0

5. (a) $9x - 6y + z = -6$ (b) $z + y = \pi/2$ (c) $z = 1$

7. (a) $-\frac{1}{3\sqrt{3}}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$ (b) $2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ (c) $-\frac{2}{9}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$

9. $\mathbf{k}$

11. La gráfica de f es la superficie de nivel $0 = F(x,y,z) = f(x,y) - z$. Por lo tanto el plano tangente está dado por

$$\begin{aligned}
0 &= \nabla F(x_0,y_0,z_0)\cdot(x-x_0, y-y_0, z-z_0) \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), -1\right)\cdot(x-x_0, y-y_0, z-z_0)
\end{aligned}$$

Como $z_0 = f(x_0,y_0)$, esto es $z = f(x_0,y_0) + (\partial f/\partial x)(x_0,y_0)(x-x_0) + (\partial f/\partial y)(x_0,y_0)(y-y_0)$.

13. (a) $\nabla f = (x+y, z+x, x+y)$, $\mathbf{g}'(t) = (e^t, -\operatorname{sen} t, \cos t)$, $(f\circ\mathbf{g})'(1) = 2e\cos 1 + \cos^2 1 - \operatorname{sen}^2 1$

(b) $\nabla f = (yze^{xyz}, xze^{xyz}, xye^{xyz}), \mathbf{g}'(t) = [6, 6t, 3t^2], (f\circ\mathbf{g})'(1) = 108e^{18}$

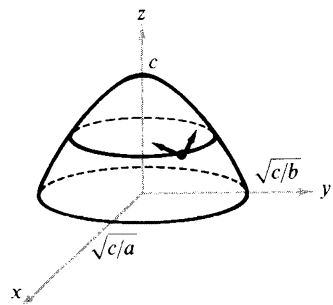
(c) $\nabla f = [1+\log(x^2+y^2+z^2)](x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}), \mathbf{g}' = (e^t, -e^{-t}, 1), (f\circ g)'(1) = [1+\log(e^2+e^{-2}+1)](e^2-e^{-2}+1)$

15. Sea $f(x,y,z) = 1/r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$; $\mathbf{r} = (x,y,z)$. Entonces calculamos $\nabla f = -(x^2+y^2+z^2)^{3/2}(x,y,z) = -(1/r^3)\mathbf{r}$.

17. $\nabla f = (g'(x), 0)$

19. $\mathbf{D}f(0,0,\ldots,0) = [0,\ldots,0]$

21. $\mathbf{d}_1 = [-(0.03+2by_1)/2a]\mathbf{i} + y_1\mathbf{j}$, $\mathbf{d}_2 = [-(0.03+2by_2)/2a]\mathbf{i} + y_2\mathbf{j}$, donde y_1 y y_2 son las soluciones de $(a^2+b^2)y^2 + 0.03by + \left(\dfrac{0.03^2}{4} - a^2\right) = 0$.



23. $\nabla V = \dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\left[\left(\dfrac{x+x_0}{r_2^1} - \dfrac{x-x_0}{r_2^2}\right)\mathbf{i} + 2y\left(\dfrac{1}{r_1^2} - \dfrac{1}{r_2^2}\right)\mathbf{j}\right]$

25. Cruza en $(2,2,0)$, $\sqrt{5}/10$ segundos después.

SECCIÓN 2.6

1. (a) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 24\dfrac{x^3y - xy^3}{(x^2+y^2)^4}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 24\dfrac{-x^3y + xy^3}{(x^2+y^2)^4}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{-6x^4 + 36x^2y^2 - 6y^4}{(x^2+y^2)^4}$$

(b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{2}{x^3}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = xe^{-y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = -e^{-y}$

(c) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -y^4\cos(xy^2)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x\,\mathrm{sen}(xy^2) - 4x^2y^2\cos(xy^2)$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = -2y\,\mathrm{sen}(xy^2) - 2xy^3\cos(xy^2)$$

(d) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^4e^{-xy^2} + 12x^2y^3$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2xe^{-xy^2} + 4x^2y^2e^{-xy^2} + 6yx^4$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = -2ye^{-xy^2} + 2xy^3e^{-xy^2} + 12x^3y^2$$

(e) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{2(\cos^2 x + e^{-y})\cos 2x + 2\operatorname{sen}^2 2x}{(\cos^2 x + e^{-y})^3}$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{e^{-y} - \cos^2 x}{e^y(\cos^2 x + e^{-y})^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{2\operatorname{sen} 2x}{e^y(\cos^2 x + e^{-y})^3}$$

3. (a) $\partial^2 z/\partial x^2 = 6,\ \partial^2 z/\partial y^2 = 4,$ $\partial^2 z/\partial x \partial y = \partial^2 z/\partial y \partial x = 0$ (b) $\partial^2 z/\partial x^2 = 0, \partial^2 z/\partial y^2 = 4x/3y^3,$ $\partial^2 z/\partial x \partial y = \partial^2 z/\partial y \partial x = -2/3y^2$

5. $f_{xy} = 2x + 2y,\ f_{yz} = 2z,\ f_{zx} = 0,\ f_{xyz} = 0$

7. Como f y $\partial f/\partial z$ son ambas de clase C^2, tenemos

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial x}.$$

9. $f_{xzw} = f_{zwx} = e^{xyz}[2xy\cos(xw) + x^2y^2z\cos(xw) - x^2yw\operatorname{sen}(xw)]$

11. (a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \arctan\dfrac{x}{y} + \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x^2}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2y^3}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{-2xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{-x\operatorname{sen}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{-y\operatorname{sen}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{x^2\operatorname{sen}\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{3/2}} - \frac{x^2\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} - \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{1/2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{y^2\operatorname{sen}\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{3/2}} - \frac{y^2\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} - \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{1/2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = xy\left[\frac{\operatorname{sen}\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{3/2}} - \frac{\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}\right]$$

(c) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -2x\exp(-x^2-y^2),\quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = -2y\exp(-x^2-y^2),$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (4x^2-2)\exp(-x^2-y^2),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (4y^2-2)\exp(-x^2-y^2),$$

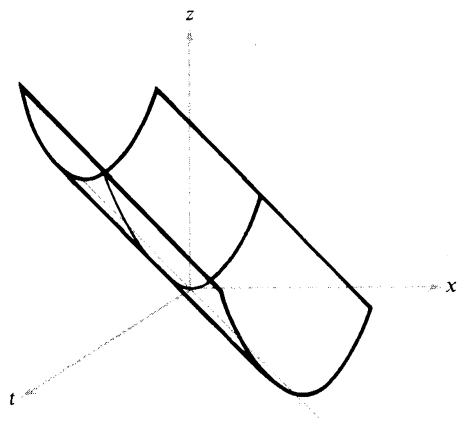
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4xy\exp(-x^2-y^2)$$

13. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\dfrac{dx}{dt}\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 + \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{d^2y}{dt^2}$, donde $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$

15. Evaluar las derivadas $\partial^2 u/\partial x^2$ y $\partial^2 u/\partial y^2$ y sumar.

17. (a) Evaluar las derivadas y comparar.

(b)



19. $V = -GmM/r = -GmM(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$. Verificar que

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = GmM(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}[3 - 3(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)^{-2/2}] = 0$$

SECCIÓN 2.7

1. $\mathbf{D}f(x, y, z) = \begin{bmatrix} e^x & 0 & 0 \\ 0 & -\operatorname{sen} y & 0 \\ 0 & 0 & \cos z \end{bmatrix}$;

$\mathbf{D}f$ es una matriz diagonal si cada función componente f_i depende sólo de x_i.

3. (a) Sea $A = B = C = \mathbf{R}$ con $f(x) = 0$ y $g(x) = 0$ si $x \neq 0$ y $g(0) = 1$. Entonces $w = 0$ y $g(f(x)) = 1$ para todo x.

(b) Si $\epsilon > 0$, sean δ_1 y δ_2 lo suficientemente pequeños para que $D_{\delta_1}(\mathbf{y}_0) \subset B$ y $\|g(\mathbf{y}) - \mathbf{w}\| < \epsilon$ cuando $\mathbf{y} \in B$ y $0 < \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\| < \delta_2$. Como $g(\mathbf{y}_0) = \mathbf{w}$, puede quitarse la restricción $0 < \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\|$. Sea δ lo suficientemente pequeño para que $\|f(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_0\| < \text{mín}(\delta_1, \delta_2)$ siempre que $\mathbf{x} \in A$ y $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$. Entonces para dicho $\mathbf{x}$, $\|f(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_0\| < \delta_1$, de modo que $f(\mathbf{x}) \in B$ y $g(f(\mathbf{x}))$ esté definida. Además $\|f(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_0\| < \delta_2$, de modo que $\|g(f(\mathbf{x})) - \mathbf{w}\| < \epsilon$.

5. Sea $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ y fijemos un índice k. Entonces

$$f(\mathbf{x}) = a_{kk}x_k^2 + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} a_{kj}x_kx_j + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} a_{kj}x_kx_j + [\text{términos que no incluyen a } x_k]$$

y, por lo tanto,

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = 2a_{kk}x_k + \sum_{i\neq k} a_{ki}x_i + \sum_{i\neq k} a_{ki}x_i = 2\sum_{j=1} a_{kj}x_j = (2\mathbf{A}\mathbf{x})_k.$$

Como las k-ésimas componentes concuerdan para cada k, $\nabla f(\mathbf{x}) = 2\mathbf{A}\mathbf{x}$.

7. La matriz $\mathbf{T}$ de las derivadas parciales se forma al colocar $\mathbf{D}g(x_0)$ y $\mathbf{D}h(y_0)$ uno a continuación de otro, de modo que $\mathbf{T}(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0) = \mathbf{D}g(x_0)(x - x_0) + \mathbf{D}h(y_0)(y - y_0)$. Usemos ahora la desigualdad del triángulo y el hecho de que $\|(x - x_0, y - y_0)\|$ es mayor que $|x - x_0|$ y que $|y - y_0|$ para mostrar que $\|f(x, y) - f(x_0, y_0) - \mathbf{T}(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0)\|/\|(x - x_0, y - y_0)\|$ va a 0.

9. Usar los teoremas de límites y el hecho de que la función $g(x) = \sqrt{|x|}$ es continua. (Probar el último enunciado.)

11. Para continuidad en $(0, 0)$ usar el hecho de que

$$\left|\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{1/2}}\right| \leq \frac{|xy|}{(x^2)^{1/2}} = |y|$$

o que $|xy| \leq (x^2 + y^2)/2$.

13. 0, ver el ejercicio 11.

15. Hacer que en la definición, $\mathbf{x}$ desempeñe el papel de $\mathbf{x}_0$ y $\mathbf{x} + \mathbf{h}$ el de $\mathbf{x}$.

17. El vector $\mathbf{a}$ toma el lugar de $\mathbf{x}_0$ en la definición de límite o en el teorema 6. En cualquier caso, el límite depende sólo de los valores de $f(\mathbf{x})$ para $\mathbf{x}$ cerca de $\mathbf{x}_0$, no para $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$. Por lo tanto $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$ para $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$ es suficiente para igualar los límites.

19. (a) $\operatorname*{límite}_{\mathbf{x}\to 0}(f_1 + f_2)(\mathbf{x})/\|\mathbf{x}\| = \operatorname*{límite}_{\mathbf{x}\to 0} f_1(\mathbf{x})/\|\mathbf{x}\| + \operatorname*{límite}_{\mathbf{x}\to 0} f_2(\mathbf{x})/\|\mathbf{x}\| = 0$.

(b) Sea $\epsilon > 0$. Como f es $o(\mathbf{x})$, existe $\delta > 0$ tal que $\|f(\mathbf{x})/\|\mathbf{x}\|\| < \epsilon/c$ siempre que $0 < \|\mathbf{x}\| < \delta$. Entonces $\|(gf)(\mathbf{x})/\|\mathbf{x}\|\| \leq |g(\mathbf{x})|\,\|f(\mathbf{x})/\|\mathbf{x}\|\| < \epsilon$, de modo que $\operatorname*{límite}_{\mathbf{x}\to 0}(gf)(\mathbf{x})/\|\mathbf{x}\| = 0$.

(c) $\operatorname*{límite}_{x\to 0} f(x)/|x| = \operatorname*{límite}_{x\to 0} |x| = 0$, de modo que $f(x)$ es $o(x)$. Pero $\operatorname*{límite}_{x\to 0} g(x)/|x|$ no existe, pues $g(x)/|x| = \pm 1$ (cuando x es positivo o negativo). Por lo tanto $g(x)$ no es $o(x)$.

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 2

1. (a) Paraboloide elíptico.

(b) Sea $y' = y + 3$ y escribir $z = xy'$. Éste es un paraboloide hiperbólico (desplazado).

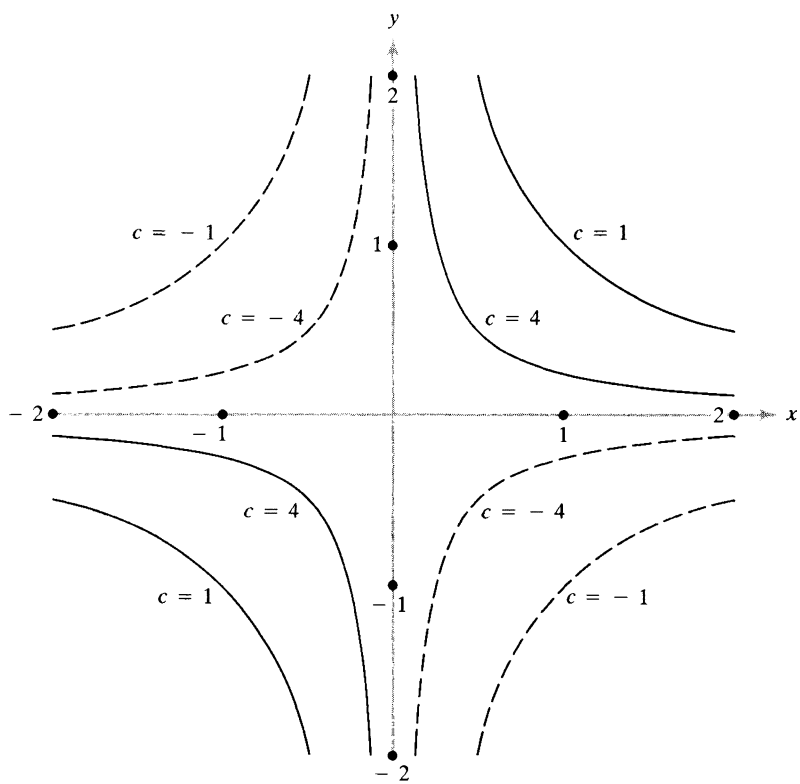
3. (a) $\mathbf{D}f(x,y) = \begin{bmatrix} 2xy & x^2 \\ -ye^{-xy} & -xe^{-xy} \end{bmatrix}$ (b) $\mathbf{D}f(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{D}f(x,y,z) = \begin{bmatrix} e^x & e^y & e^z \end{bmatrix}$ (d) $\mathbf{D}f(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

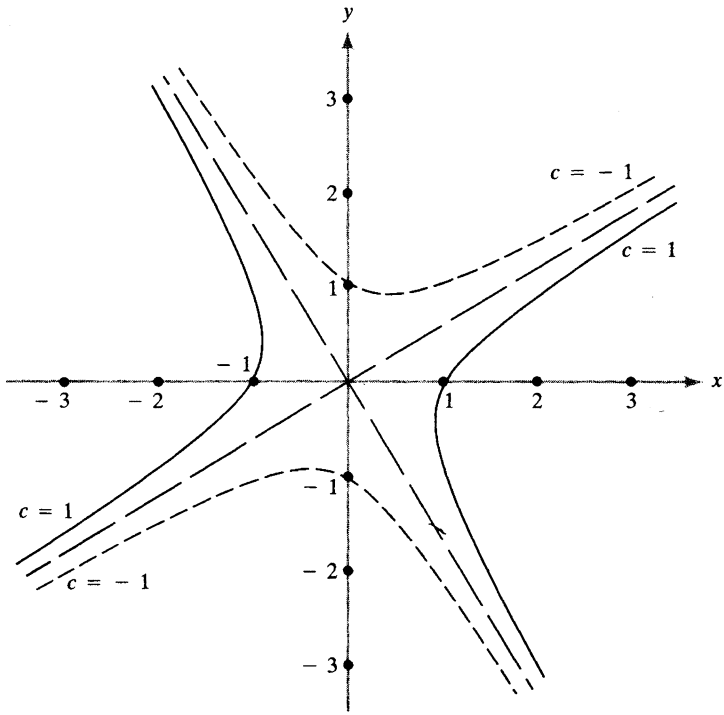
5. El plano tangente a una esfera en (x_0, y_0, z_0) es normal a la recta que va del centro a (x_0, y_0, z_0).

7. (a) $z = x - y + 2$ (b) $x = 4x - 8y - 8$
(c) $x + y + z = 1$ (d) $10x + 6y - 4z = 6 - \pi$
(e) $2z = \sqrt{2}x + \sqrt{2}y$ (f) $x + 2y - z = 2$

9. (a) Las curvas de nivel son hipérbolas $xy = 1/c$:



(b) $c = x^2 - xy - y^2 = \left(x - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}y\right)\left(x - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}y\right)$



11. (a) 0. (b) No existe el límite.

13. Si $\mathbf{F} = \nabla f$, entonces $\partial F_1/\partial y = \partial^2 f/\partial y \partial x$ y $\partial F_2/\partial x = \partial^2 f/\partial x \partial y$. Como $\mathbf{F}$ es de clase C^1, las segundas derivadas parciales de f son continuas y, por el teorema 15, iguales.

Si $F_1 = y \cos x$ y $F_2 = x \operatorname{sen} y$, entonces $\partial F_1/\partial y = \cos x$ y $\partial F_2/\partial x = \operatorname{sen} y$. Como no son iguales, $\mathbf{F}$ no es gradiente de nada.

15. (a) La recta $\mathbf{L}(t) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) + t(a, b, c)$ está en el plano $z = f(x_0, y_0)$ si $c = 0$ y es perpendicular a $\nabla f(x_0, y_0)$ si $a(\partial f/\partial x)(x_0, y_0) + b(\partial f/\partial y)(x_0, y_0) = 0$. En $\mathbf{L}$, tenemos

$$\begin{aligned} & f(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right](x - x_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right](y - y_0) \\ &= f(x_0, y_0) + at\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right] + bt\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right] \\ &= f(x_0, y_0) = z \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathbf{L}$ está en el plano tangente. Una normal unitaria hacia arriba, al plano tangente, es $\mathbf{p} = (1+\|\nabla f\|^2)^{-1/2}(-(\partial f/\partial x)(x_0, y_0), -(\partial f/\partial y)(x_0, y_0), 1)$. Por lo tanto $\cos\theta = \mathbf{p}\cdot\mathbf{k} = (1+\|\nabla f\|^2)^{-1/2}$, y $\tan\theta = \operatorname{sen}\theta/\cos\theta = \{\|\nabla f\|^2/(1+\|\nabla f\|^2)\}^{1/2}/(1+\|\nabla f\|^2)^{-1/2} = \|\nabla f\|$, según se afirmó.

(b) El plano tangente contiene a la recta horizontal que pasa por $(1,0,2)$ y es perpendicular a $\nabla f(1,0) = (5,0)$, esto es, paralela al eje y. Forma un ángulo de $\arctan(\|\nabla f(1,0)\|) = \arctan 5 \approx 78.7°$ respecto al plano xy.

17. $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ o $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$

19. Una normal unitaria es $(\sqrt{2}/10)(3,5,4)$. El plano tangente es $3x + 5y + 4z = 18$.

21. $4\mathbf{i} + 16\mathbf{j}$

23. (a) Como g es la composición $\lambda \mapsto \lambda x \mapsto f(\lambda x)$, la regla de la cadena da

$$g'(\lambda) = \mathbf{D}f(\lambda\mathbf{x}) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Así,

$$g'(1) = \mathbf{D}f(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}.$$

Pero también $g(\lambda) = \lambda^p f(\mathbf{x})$, de modo que $g'(\lambda) = p\lambda^{p-1} f(\mathbf{x})$ y $g'(1) = pf(\mathbf{x})$.

(b) $p = 1$

25 (a) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} + 2\frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

(b) $$g_{xx} + g_{yy} + g_{zz} = \frac{y^2 + z^2 - 2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} + \frac{x^2 - z^2 - 2y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} + \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = 0$$

(c) $$h_{xx} + h_{yy} + h_{zz} + h_{ww} = \frac{6x^2 - 2y^2 - 2z^2 - 2w^2}{(x^2+y^2+z^2+w^2)^3} + \frac{6y^2 - 2x^2 - 2z^2 - 2w^2}{(x^2+y^2+z^2+w^2)^3} + \frac{6z^2 - 2x^2 - 2y^2 - 2w^2}{(x^2+y^2+z^2+w^2)^3} + \frac{6w^2 - 2x^2 - 2y^2 - 2z^2}{(x^3+y^2+z^2+w^2)^3} = 0$$

27. Diferenciar directamente usando la regla de la cadena, o usar el ejercicio 23(a) con $p = 0$.

29. (a) Si $(x,y) \neq (0,0)$, entonces se calcula para (i) que $\partial f/\partial x = (y^3 - yx^2)/(x^2+y^2)^2$ y $\partial f/\partial y = (x^3 - xy^2)/(x^2+y^2)^2$. Si $x = y = 0$, usar directamente la definición para hallar que ambas derivadas parciales son 0.

(b) La fórmula (i) no es continua en $(0,0)$; la fórmula (ii) es diferenciable pero la derivada no es continua.

31. (a) Usar la regla de la cadena y suponer que f es de clase C^2, de modo que $\partial^2 f/\partial x \partial y = \partial^2 f/\partial y \partial x$.

(b) $$\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \operatorname{sen}\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(-r\operatorname{sen}\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$$
$$= (\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + (\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \|\nabla f\|^2$$

33. (a) $\sqrt{2}\pi/8$ (b) $-\operatorname{sen}\sqrt{2}$ (c) $-2\sqrt{2}e^{-2}$

35. $(-4e^{-1}, 0)$

37. (a) Ver el teorema 11.
(b) $g(u) = (\operatorname{sen} 3u)^2 + \cos 8u$
$g'(u) = 6\operatorname{sen} 3u\cos 3u - 8\operatorname{sen} 8u$
$g'(0) = 0$

$\nabla f = (2x, 1)$
$\nabla f(\mathbf{h}(0)) = \nabla f(0,1) = (0,1)$
$\mathbf{h}'(u) = (3\cos 3u, -8\operatorname{sen} 8u)$
$g'(0) = \nabla f(\mathbf{h}(0)) \cdot \mathbf{h}'(0) = (0,1)\cdot(3,0) = 0$

39. $t = \sqrt{14}(-3 + \sqrt{359})/70$

41. $\partial z/\partial x = 4(e^{-2x-2y+2xy})(1+y)/(e^{-2x-2y} - e^{2xy})^2$
$\partial z/\partial y = 4(e^{-2y-2x+2xy})(1+x)/(e^{-2x-2y} - e^{2xy})^2$

43. Notar que $y = x^2$, de modo que si y es constante, x no puede ser variable.

45. $[f'(t)g(t) + f(t)g'(t)]\exp[f(t)g(t)]$

47. $d[f(\sigma(t))]/dt = 2t/[(1+t^2+2\cos^2 t)(2-2t^2+t^4)]$
$-4t(t^2-1)\ln(1+t^2+2\cos^2 t)/(2-2t^2+t^4)^2$
$-4\cos t\operatorname{sen} t/[(1+t^2+2\cos^2 t)(2-2t^2+t^4)]$

49. Sean $x = f(t)$, $y = t$ y usar la regla de la cadena para diferenciar $u(x,y)$ con respecto a t.

51. (a) $n = PV/RT; P = nRT/V; T = PV/nR; V = nRT/P$.
(b) $\partial V/\partial T = nR/P; \partial T/\partial P = V/nR; \partial P/\partial V = -nRT/V^2$. Multiplicar, recordando que $PV = nRT$.

53. (a) Se puede despejar cualquiera de las variables en términos de las otras dos.
(b) $\partial T/\partial P = (V-\beta)/R$;
$\partial P/\partial V = -RT/(V-\beta)^2 + 2\alpha/V^3$;
$\partial V/\partial T = R/[(V-\beta)(RT/(V-\beta)^2 - 2\alpha/V^3)]$
(c) Multiplicar y cancelar factores.

55. (a) $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$
(b) La derivada direccional es 0 en la dirección

$$(x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j})/\sqrt{x_0^2 + y_0^2}.$$

(c) La curva de nivel que pasa por (x_0, y_0) debe ser tangente a la recta que pasa por $(0,0)$ y (x_0, y_0). Las curvas de nivel son rectas o semirrectas que salen del origen.

57. $f_{xx} + f_{yy} = 0$

SECCIÓN 3.1

1. (a) $\boldsymbol{\sigma}'(t) = (2\pi\cos 2\pi t, -2\pi \operatorname{sen} 2\pi t, 2-2t), \boldsymbol{\sigma}'(0) = (2\pi, 0, 2)$
(b) $\boldsymbol{\sigma}'(t) = (e^t, -\operatorname{sen} t, \cos t), \boldsymbol{\sigma}'(0) = (1, 0, 1)$
(c) $\boldsymbol{\sigma}'(t) = (2t, 3t^2-4, 0), \boldsymbol{\sigma}'(0) = (0, -4, 0)$
(d) $\boldsymbol{\sigma}'(t) = (2\cos 2t, 1/(1+t), 1),\ \boldsymbol{\sigma}'(0) = (2, 1, 1)$

3. (a) $\mathbf{v}(t) = -(\operatorname{sen} t)\mathbf{i} + 2(\cos 2t)\mathbf{j}, \mathbf{a}(t) = -(\cos t)\mathbf{i} - 4(\operatorname{sen} 4t)\mathbf{j}, \mathbf{l} = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$
(b) $\mathbf{v}(t) = (t\cos t + \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (-t\operatorname{sen} t + \cos t)\mathbf{j} + \sqrt{3}\mathbf{k}$
$\mathbf{a}(t) = (-t\operatorname{sen} t + 2\cos t)\mathbf{i} + (-t\cos t - 2\operatorname{sen} t)\mathbf{j}$
$\mathbf{l} = t(\mathbf{j} + \sqrt{3}\mathbf{k})$
(c) $\mathbf{v}(t) = \sqrt{2}\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} - e^{-t}\mathbf{k}, \mathbf{a}(t) = e^t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}, \mathbf{l}(t) = \mathbf{j} + \mathbf{k} + t(\sqrt{2}\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k})$
(d) $\mathbf{v}(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \sqrt{t}\mathbf{k}, \mathbf{a}(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}\mathbf{k}, \mathbf{l} = t(\mathbf{i} + \mathbf{j})$

5. $1\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{cm/s^2}$ en la dirección $-\mathbf{i}$

7. $\boldsymbol{\sigma}(t) = \left(\dfrac{t^2}{2}, e^t - 6, \dfrac{t^3}{3} + 1\right)$

9. El periodo $T = 5662\,\mathrm{s} = 1.57\,\mathrm{h}$.

11. $(8, 8, 0)$

13. Usar las partes (a) y (b) del ejercicio 12.

15. $\boldsymbol{\sigma}(t) \times \boldsymbol{\sigma}'(t)$ es normal al plano de la órbita en el tiempo t. Como en el ejercicio 14, su derivada es 0, de modo que el plano orbital es constante.

SECCIÓN 3.2

1. (a) 7 (b) $4\sqrt{2} - 2$
(c) $\frac{1}{2}\pi\sqrt{2+\pi^2} + \log(\pi + \sqrt{2+\pi^2}) - \frac{1}{2}\log 2$
(d) $\sqrt{21} + \frac{5}{4}[\log(4+\sqrt{21}) - \log\sqrt{5}]$
(e) $\frac{1}{2}\sqrt{5} + 2\log(1+\sqrt{5}) - 2\log 2$
(f) Usar la sustitución $u = e^t$ para demostrar que la integral es $2(e - e^{-1})$.
(g) $\frac{2}{3}[(t_1+2)^{3/2} - (t_0+2)^{3/2}]$

3. $3 + \log 2$

5. (a) Como α es estrictamente creciente, manda $[a, b]$ biunívocamente sobre $[\alpha(a), \alpha(b)]$. Por definición, $\mathbf{v}$ es la imagen de $\mathbf{c}$ si y sólo si existe t en $[a, b]$ con $\mathbf{c}(t) = \mathbf{v}$. Existe un punto s en $[\alpha(a), \alpha(b)]$ con $s = \alpha(t)$, de modo que $\mathbf{d}(s) = \mathbf{c}(t) = \mathbf{v}$. Por lo tanto la imagen de $\mathbf{c}$ está contenida en la de $\mathbf{d}$. Usar α^{-1} de manera análoga para la inclusión opuesta.
(b) $l_{\mathbf{d}} = \int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} \|\mathbf{d}'(s)\|\,ds = \int_{s=\alpha(a)}^{s=\alpha(b)} \|\mathbf{d}'(\alpha(t))\|\alpha'(t)\,dt$
$= \int_{t=a}^{t=b} \|\mathbf{d}'(\alpha(t))\alpha'(t)\|\,dt = \int_a^b \|\mathbf{c}'(t)\|\,dt = l_{\mathbf{c}}$.

7. (a) $l_{\boldsymbol{\sigma}} = \int_a^b \|\boldsymbol{\sigma}'(s)\|\,ds = \int_a^b ds = b - a$.
(b) $\mathbf{T}(s) = \boldsymbol{\sigma}'(s)/\|\boldsymbol{\sigma}'(s)\| = \boldsymbol{\sigma}'(s)$, de modo que $\mathbf{T}'(s) = \boldsymbol{\sigma}''(s)$. Entonces
$k = \|\mathbf{T}'\| = \|\boldsymbol{\sigma}''(s)\|$.
(c) Mostrar que si (i) $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ están en $\mathbf{R}^3$, $\|\mathbf{v}\times\mathbf{w}\| = \|\mathbf{w} - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}/\|\mathbf{v}\|^2)\mathbf{v}\|\cdot\|\mathbf{v}\|$. Usar esto para mostrar que si (ii) $\boldsymbol{\rho}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ nunca es $(0, 0, 0)$ y $\mathbf{f}(t) =$

$\rho(t)/\|\rho(t)\|$, entonces

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = \frac{1}{\|\rho(t)\|}\left[\rho'(t) - \frac{\rho(t)\cdot\rho'(t)}{\|\rho(t)\|^2}\rho(t)\right] \text{ y } \frac{d\mathbf{f}}{dt} = \frac{\|\rho(t)\times\rho'(t)\|}{\|\rho(t)\|^2}.$$

Con $\rho(t) = \sigma'(t)$, la condición (ii) da

$$\mathbf{T}'(t) = \frac{\sigma''(t)}{\|\sigma'(t)\|} - \frac{\sigma'(t)\cdot\sigma''(t)}{\|\sigma'(t)\|^3}\sigma'(t) \qquad \text{y} \qquad \|\mathbf{T}'(t)\| = \frac{\sigma'(t)\times\sigma''(t)\|}{\|\sigma'(t)\|^2}.$$

Si s es la longitud de arco de σ, $ds/dt = \|\sigma'(t)\|$, y por lo tanto

$$\left\|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right\| = \left\|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\ \frac{ds}{dt}\right\| = k\|\sigma'(t)\|.$$

Así

$$k = \frac{1}{\|\sigma'(t)\|}\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{\|\sigma'(t)\times\sigma''(t)\|}{\|\sigma'(t)\|^3}.$$

(Este resultado es útil para el ejercicio 9.)

(d) $1/\sqrt{2}$.

9. (a) Como σ está parametrizada por la longitud de arco, $\mathbf{T}(s) = \sigma'(s)$, y $\mathbf{N}(s) = \sigma''(s)/\|\sigma''(s)\|$. Usar los ejercicios 12 y 13 de la sección 3.1 y el ejercicio 7 para mostrar que

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \left(\sigma''\times\frac{\sigma''}{\|\sigma''\|}\right) + \sigma'\times\left(\frac{\sigma'''}{\|\sigma''\|} - \frac{\sigma''\cdot\sigma'''}{\|\sigma''\|^3}\sigma''\right)$$

y

$$\tau = -\frac{d\mathbf{B}}{ds}\cdot\mathbf{N} = -\frac{(\sigma'\times\sigma''')\cdot\sigma'''}{\|\sigma''\|^2} = \frac{(\sigma'\times\sigma'')\cdot\sigma'''}{\|\sigma''\|^2}.$$

(b) Obtener $\mathbf{T}'(t)$ y $\|\mathbf{T}'(t)\|$ como en el ejercicio 7. $\mathbf{B}$ es un vector unitario en la dirección de $\sigma'\times\mathbf{T}' = (\sigma'\times\sigma'')/\|\sigma'\|$, de modo que $\mathbf{B} = (\sigma'\times\sigma'')/\|\sigma'\times\sigma''\|$. Usar el resultado (ii) en la solución del ejercicio 7 con $\rho = \sigma'\times\sigma''$ y ejercicios 12 y 13 de la sección 3.1 para obtener $d\mathbf{B}/dt = (\sigma'\times\sigma''')/\|\sigma'\times\sigma''\| - \{[(\sigma'\times\sigma'')\cdot(\sigma'\times\sigma''')]/\|\sigma'\times\sigma''\|^3\}(\sigma'\times\sigma'')$, y los valores de $\mathbf{T}'$ y $\|\mathbf{T}'\|$ para obtener $\mathbf{N} = (\|\sigma'\|/\|\sigma'\times\sigma''\|)(\sigma'' - (\sigma'\times\sigma'')/\|\sigma'\|^2)$. Finalmente, usar la regla de la cadena y el producto interior de éstas para obtener

$$\tau = -\left[\frac{d\mathbf{B}}{ds}(s(t))\right]\cdot\mathbf{N}(s(t)) = -\frac{1}{|ds/dt|}\frac{d\mathbf{B}}{dt}\cdot\mathbf{N} = \frac{(\sigma'\times\sigma'')\cdot\sigma'''}{\|\sigma'\times\sigma''\|^2}.$$

(c) $-\sqrt{2}/2$

11. (a) $\mathbf{N}$ está definida como $\mathbf{T}'/\|\mathbf{T}'\|$, de modo que $\mathbf{T}' = \|\mathbf{T}'\|\mathbf{N} = k\mathbf{N}$. Como $\mathbf{T}\cdot\mathbf{T}' = 0$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ y $\mathbf{B}$ son una base ortonormal para $\mathbf{R}^3$. Al diferenciar $\mathbf{B}(s)\cdot\mathbf{B}(s) = 1$ y $\mathbf{B}(s)\cdot\mathbf{T}(s) = 0$ se muestra que $\mathbf{B}'\cdot\mathbf{B} = 0$ y $\mathbf{B}'\cdot\mathbf{T}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{T}' = 0$. Pero $\mathbf{T}'\cdot\mathbf{B} = \|\mathbf{T}'\|\mathbf{N}\cdot\mathbf{B} = 0$, de modo que también $\mathbf{B}'\cdot\mathbf{T} = 0$. Así, $\mathbf{B}' = (\mathbf{B}'\cdot\mathbf{T})+(\mathbf{B}'\cdot\mathbf{N})\mathbf{N}+(\mathbf{B}'\cdot\mathbf{B})\mathbf{B} = (\mathbf{B}'\cdot\mathbf{N})\mathbf{N} = -\tau\mathbf{N}$. También $\mathbf{N}'\cdot\mathbf{N} = 0$ pues $\mathbf{N}\cdot\mathbf{N} = 1$. Así, $\mathbf{N}' = (\mathbf{N}'\cdot\mathbf{T})\mathbf{T} + (\mathbf{N}'\cdot\mathbf{B})\mathbf{B}$. Pero al diferenciar $\mathbf{N}\cdot\mathbf{T} = 0$ y $\mathbf{N}\cdot\mathbf{B} = 0$ da $\mathbf{N}'\cdot\mathbf{T} = -\mathbf{N}\cdot\mathbf{T}' = -k$ y $\mathbf{N}'\cdot\mathbf{B} = -\mathbf{N}\cdot\mathbf{B}' = \tau$, de modo que se sigue la ecuación de enmedio.

(b) $\omega = -\tau\mathbf{i} = k\mathbf{k}$

SECCIÓN 3.3

1. (a) $\dfrac{dE}{dt} = \dfrac{1}{2}m \cdot 2\langle \mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t)\rangle + \langle \operatorname{grad} V(\mathbf{r}(t)), \mathbf{r}'(t)\rangle$
$= \langle \mathbf{r}'(t), -\operatorname{grad} V(\mathbf{r}(t))\rangle + \langle \operatorname{grad} V(\mathbf{r}(t)), \mathbf{r}'(t)\rangle = 0.$

(b) Usar los productos interiores hallados en la parte (a). Si V es constante, también $\|\mathbf{r}'(t)\|$ lo es.

3. $\dfrac{d}{dt}V(\mathbf{c}(t)) = \langle \nabla V(\mathbf{c}(t)), \mathbf{c}'(t)\rangle = -\langle \nabla V(\mathbf{c}(t)), \nabla V(\mathbf{c}(t))\rangle \leq 0$. Una partícula tiende a moverse hacia una región de menor energía potencial. (El agua fluye colina abajo.)

5. Usar el hecho de que $-\nabla T$ es perpendicular a la superficie $T =$ constante.

7. $\sigma'(t) = (2t, 2, 1/2\sqrt{t}) = \mathbf{F}(\sigma(t))$.

9. Si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\phi(\mathbf{x}, t) = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ y $f = f(x_1, x_2, x_3, t)$, entonces por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(f(\phi(\mathbf{x}, t), t)) &= \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\phi(\mathbf{x}, t), t)\frac{\partial \phi_i}{\partial t}(\mathbf{x}, t)\\ &= \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + [\nabla f(\phi(\mathbf{x}, t), t)] \cdot [\mathbf{F}(\phi(\mathbf{x}, t))].\end{aligned}$$

SECCIÓN 3.4

1. (a) $\mathbf{0}$; (b) $\mathbf{0}$; (c) $(10y - 8z, 6z - 10x, 8x - 6y)$

3. (a) $\nabla f = \mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|, \mathbf{r} = (x, y, z)$, $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$
(b) $\nabla f = (y + z, x + z, y + x)$, $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$
(c) $\nabla f = -2\mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|^4$, $r = (x, y, z)$, $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$

5. $\nabla \cdot \mathbf{F} = (\partial/\partial x)y + (\partial/\partial y)x = 0 + 0 = 0$

7. $\nabla f = (2xy^2, 2x^2y + 2yz^2, 2y^2z)$; $\nabla \times \nabla f = (4yz - 4yz, 0 - 0, 4xy - 4xy)$
$= (0, 0, 0)$

9. $\nabla \times \mathbf{F} = (0, 0, \operatorname{sen} y - \cos x)$. Si $\mathbf{F} = \nabla f$, entonces, como $\mathbf{F}$ es C^1, f sería de clase C^2, y $\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times \nabla f$ sería 0, pero no es así.

11. Por la regla del producto,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{w}}{dt}.$$

Sustituir la ecuación (7) en ésta. Para la última igualdad, usar $A^T\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot A\mathbf{w}$ del ejercicio 16, sección 1.5.

13. Por la selección de los ejes,

$$\mathbf{w} = \tfrac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{F})(\mathbf{0}) = \omega\mathbf{k}.$$

Por el ejemplo 2,

$$\mathbf{v} = -\omega y\mathbf{i} + \omega x\mathbf{j}$$

y por lo tanto

$$\mathbf{D}\mathbf{v}(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por otro lado, según las definiciones de W y $\nabla \times \mathbf{F}$,

$$\begin{aligned} W &= \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F_2}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -(\nabla \times \mathbf{F})_z & (\nabla \times \mathbf{F})_y \\ (\nabla \times \mathbf{F})_z & 0 & -(\nabla \times \mathbf{F})_x \\ -(\nabla \times \mathbf{F})_y & (\nabla \times \mathbf{F})_x & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Nuestra selección de ejes coordenados da

$$W = \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para interpretar el resultado notamos que el campo vectorial $\mathbf{v}$ representa una rotación alrededor de un eje fijo $\mathbf{w}$. El flujo $\psi(\mathbf{x}, t)$ de $\mathbf{v}$ hace girar puntos en este campo, y, para t fija, su derivada $\mathbf{D}_{\mathbf{x}}\psi(\mathbf{x}, t)$ también rota vectores. Sea $\mathbf{Y}$ un vector arbitrario y sea $\mathbf{Y}(t) = \mathbf{D}_{\mathbf{x}}\psi(\mathbf{x}, t)\mathbf{Y}$. Cuando t crece o decrece, $\mathbf{Y}(t)$ rota alrededor de $\mathbf{w}$ y

$$\left.\frac{d\mathbf{Y}}{dt}\right|_{t=0} = \mathbf{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{v}(\mathbf{0})\mathbf{Y}.$$

Esto da la tasa de cambio de $\mathbf{Y}$ conforme se transporta (rota) por $\mathbf{D}_{\mathbf{x}}\psi$. Por el ejercicio 11, la tasa de cambio de cualquier vector $\mathbf{X}$ en el origen que es transportado por la derivada del flujo $\phi(\mathbf{x}, t)$ de $\mathbf{F}$, está dada por

$$\left.\frac{d\mathbf{X}}{dt}\right|_{t=0} = \mathbf{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{0})\mathbf{X} = (S + W)\mathbf{X}.$$

Así, esta tasa de cambio de $\mathbf{X}$ tiene dos componentes: la matriz de deformación, que afecta productos interiores, y la matriz W. Así, *la matriz W es precisamente la tasa de cambio de los vectores conforme son sometidos a una rotación infinitesimal alrededor del eje* $(\operatorname{rot}\mathbf{F})(\mathbf{0}) = (\nabla \times \mathbf{F})(\mathbf{0})$ por la función $\mathbf{D}_{\mathbf{x}}\psi(\mathbf{x}, t)$.

[La matriz de deformación S incorpora todos los cambios de longitud y ángulo provocados por el flujo. En particular, los cambios de volumen están contenidos en S. De hecho, la traza de S es la divergencia: $\operatorname{tr} S = \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x})$. (La traza de una matriz es la suma de sus registros diagonales). La parte sin traza de S,

$$S' = S - \tfrac{1}{3}(\operatorname{tr} S)I$$

donde I es la identidad de 3×3, se llama *tijera*.]

15. La recta $\mathbf{x}+\lambda\mathbf{v}$ va a dar a la curva $\lambda \mapsto \phi(\mathbf{x}+\lambda\mathbf{v}, t)$ después de un tiempo t, la cual, para λ pequeño, se aproxima por su recta tangente, a saber, $\lambda \mapsto \phi(\mathbf{x}, t)+\mathbf{D}_{\mathbf{x}}\phi(\mathbf{x}, t)\cdot\lambda\mathbf{v}$.

SECCIÓN 3.5

1. Solamente (a)

3. Escribir cada expresión en términos de coordenadas.

5. (a) $2xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$ (b) $3y^2zx\mathbf{i} + (4xz - y^3z)\mathbf{j}$
(c) $4x^2z^2\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2y^3z^2x\mathbf{k}$ (d) $4x^2z^2y + x^2$
(e) $-y^3zx^3\mathbf{i} + 2x^2y^4z\mathbf{j} + (2x^3z^2 - 2xy)\mathbf{k}$

7. No, considerar $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + \mathbf{k}$; $\nabla \times \mathbf{F} = y\mathbf{k}$, que no es perpendicular a $\mathbf{F}$.

9.
$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{F} &= (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z) \cdot (F_r\mathbf{e}_r + F_\theta\mathbf{e}_\theta + F_z\mathbf{e}_z) \\
&= \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}, \operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \\
&\quad \cdot [F_r(\cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}) + F_\theta(-\operatorname{sen}\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j}) + F_z\mathbf{k}] \\
&= \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)(F_r\cos\theta - F_\theta\operatorname{sen}\theta) \\
&\quad + \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)(F_r\operatorname{sen}\theta + F_\theta\cos\theta) + \frac{\partial F_z}{\partial z} \\
&= \frac{\partial F_r}{\partial r} + \frac{1}{r}F_r + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rF_r) + \frac{\partial F_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial}{\partial z}(rF_z)\right]
\end{aligned}$$

11. Pensar las coordenadas polares como coordenadas cilíndricas pero sin coordenada z, o igual a 0, para ver que las transformaciones requeridas son las dadas por el teorema 5. Usar primero la parte (i) de ese teorema para obtener ∇u, y después la parte (ii) para obtener $\nabla \cdot \nabla u$.

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 3

1. (a) 2; (b) 0; (c) 14

3. (a) $\nabla f = yz^2\mathbf{i} + xz^2\mathbf{j} + 2xyz\mathbf{k}$
(b) $\nabla \times \mathbf{F} = (x - y)\mathbf{i} - x\mathbf{k}$
(c) $(2xyz^3 - 3z^2xy^2)\mathbf{i} - (y^2z^3 - 2x^2y^2z)\mathbf{j} + (y^2z^3 - 2x^2yz^2)\mathbf{k}$

5.

	Velocidad	Aceleración	Rapidez	Recta Tangente
(a)	$(3, -e^{-1}, -\pi/2)$	$(6t, e^{-1}, 0)$	$\sqrt{9 + e^{-2} + \pi^2/4}$	$(2 + 3t, e^{-1} - te^{-1}, -\pi t/2)$
(b)	$(2\sqrt{\pi}, 0, 4\pi^{3/2})$	$(2, -4\pi, 12\pi)$	$\sqrt{4\pi + 16\pi^3}$	$(\pi - 1 + 2t\sqrt{\pi}, -1, \pi^2 + 4t\pi^{3/2})$
(c)	$(1, 1, 0)$	$(1, 0, -1)$	$\sqrt{2}$	$(t, t, 1)$
(d)	$(\frac{1}{25}, 1, 0)$	$(\frac{8}{125}, 0, 0)$	$\sqrt{625}/25$	$(\frac{4}{5} + t(\frac{1}{25}), 2 + t, 1)$

7. 35,880 km

9. $\mathbf{F} = (2m, 0, -m)$.

11. $(2\pi, 3\pi^2, -2\pi)$

13. (a) $\nabla \cdot \mathbf{F} = 2ye^z + x^2ye^z + 2z$; $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

(b) $f(x, y, z) = x^2ye^z + z^3/3 + C$. Como $\mathbf{F}$ es C^1, una f que funcione será C^2, de modo que $\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times \nabla f = 0$. Así, es necesario que $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ para que exista una solución a la parte (b).

15 $x(t) = 1/(1-t)$; $y(t) = 0$; $z(t) = e^t/(1-t)$; y
$\sigma'(t) = ((1-t)^{-2}, 0, (e^t/(1-t))(1 + 1/(1-t))) = (x(t)^2, 0, z(t)(1 + x(t))) = \mathbf{F}(\sigma(t)$

17. $1 + \ln 2$

SECCIÓN 4.1

1. $f(h_1, h_2) = h_1^2 + 2h_1h_2 + h_2^2$ ($R_2(\mathbf{h}, \mathbf{0}) = 0$ en este caso)

3. $f(h_1, h_2) = 1 + h_1 + h_2 + \dfrac{h_1^2}{2} + h_1h_2 + \dfrac{h_2^2}{2} + R_2(\mathbf{h}, 0)$

5. $f(h_1, h_2) = 1 + h_1h_2 + R_2(\mathbf{h}, \mathbf{0})$

7. (a) Mostrar que $|R_k(x, a)| \leq AB^{k+1}/(k+1)!$ para constantes A, B y x en un intervalo fijo $[a, b]$. Probar que $R_k \to 0$ conforme $k \to \infty$. (Usar la convergencia de la serie $\sum c^k/k! = e^c$ y usar el teorema de Taylor.)

(b) La única dificultad posible es en $x = 0$. Usar la regla de L'Hôpital para mostrar que

$$\lim_{t \to \infty} p(t)e^t = \infty$$

para todo polinomio $p(t)$. Usando esto, probar que $\lim\limits_{x \to 0^+} p(x)e^{-1/x} = 0$ para toda función racional $p(x)$ y usarlo para mostrar que $f^{(k)}(0) = 0$ para todo k.

(c) $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ es analítica en $\mathbf{x}_0$ si la serie

$$f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} h_ih_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) + \cdots$$

$$+ \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{n} h_{i_1} h_{i_2} \cdots h_{i_k} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(\mathbf{x}_0) + \cdots$$

converge a $f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h})$ para todo $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_n)$ en un disco suficientemente pequeño $\|\mathbf{h}\| < \epsilon$. La función f es analítica si para todo $R > 0$ existe una constante M tal que $|(\partial^k f/\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k})(\mathbf{x})| < M^k$ para cada derivada de orden k-ésimo en todo $\mathbf{x}$ que satisfaga $\|\mathbf{x}\| \leq R$.

(d) $$f(x,y) = 1 + x + y + \frac{1}{2}(x^2 + 2xy + y^2) + \cdots + \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j} x^j y^{k-j} + \cdots$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(x+y)^k.$$

SECCIÓN 4.2

1. $(0,0)$; punto silla.

3. Los puntos críticos están sobre la recta $y = -x$; son mínimos locales pues $f(x,y) = (x+y)^2 \geq 0$, y son iguales a cero sólo cuando $x = -y$.

5. $(0,0)$; punto silla.

7. $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$; mínimo local.

9. $(0,0)$; máximo local. (El criterio falla, pero usar el hecho de que $\cos z \leq 1$.)
$(\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2})$, mínimo local.
$(0, \sqrt{\pi})$, mínimo local.

11. No hay puntos críticos. **13.** $(1,1)$ es un mínimo local.

15. $(0, n\pi)$; puntos críticos, no hay máximos o mínimos locales.

17. (a) $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ se anulan en $(0,0)$.
(b) Mostrar que $f(g(t)) = 0$ en $t = 0$ y que $f(g(t)) \geq 0$ si $|t| < |b|/3a^2$.
(c) f es negativa en la parábola $y = 2x^2$.

19. Los puntos críticos están sobre la recta $y = x$ y son mínimos locales (ver el ejercicio 3).

21. Minimizar $S = 2xy + 2yz + 2xz$ con $z = V/xy$, V el volumen constante.

23. 40, 40, 40

25. El único punto crítico es $(0,0,0)$. Es un mínimo, pues

$$f(x,y,z) \geq \frac{x^2+y^2}{2} + z^2 + xy = \frac{1}{2}(x+y)^2 + z^2 \geq 0.$$

27. $(1, \frac{3}{2})$ es un punto silla; $(5, \frac{27}{2})$ es un mínimo local.

29. $\frac{3}{2}$ es el máximo absoluto y 0 es el mínimo absoluto.

31. -2 es el mínimo absoluto; 2 es el máximo absoluto.

33. $(\frac{1}{2}, 4)$ es un mínimo local.

35. Si $u_n(x,y) = u(x,y) + (1/n)e^x$, entonces $\nabla^2 u_n = (1/n)e^x > 0$. Así, u_n es estrictamente subarmónica y puede tener su máximo sólo en ∂D, digamos, en $\mathbf{p}_n = (x_n, y_n)$. Si $(x_0, y_0) \in D$, verificar que esto implica $u(x_n, y_n) > u(x_0, y_0) - e/n$. Así, debe existir un punto $\mathbf{q} = (x_\infty, y_\infty)$ en ∂D tal que arbitrariamente cerca de $\mathbf{q}$ podemos hallar un (x_n, y_n) para n tan grande como se quiera. Deducir por la continuidad de u, que $u(x_\infty, y_\infty) \geq u(x_0, y_0)$.

37. Seguir el método del ejercicio 35.

39. (a) Si existiera x_1 con $f(x_1) < f(x_0)$, entonces el máximo de f en el intervalo entre x_0 y x sería otro punto crítico.

(b) Verificar (i) por medio del criterio de la segunda derivada; para (ii), f va a $-\infty$ conforme $y \to \infty$ y $x = -y$.

SECCIÓN 4.3

1. Máximo en $\sqrt{\frac{2}{3}}(1,-1,1)$, mínimo en $\sqrt{\frac{2}{3}}(-1,1,-1)$

3. Máximo en $(\sqrt{3}, 0)$, mínimo en $(-\sqrt{3}, 0)$

5. Máximo en $\left(\frac{9}{\sqrt{70}}, \frac{4}{\sqrt{70}}\right)$, mínimo en $\left(-\frac{9}{\sqrt{70}}, -\frac{4}{\sqrt{70}}\right)$

7. El valor mínimo 4 se alcanza en $(0,2)$. Usar una ilustración en vez de multiplicadores de Lagrange.

9. $(0,0,2)$ es un mínimo de f.

11. $\frac{3}{2}$ es el máximo absoluto y 0 es el mínimo absoluto.

13. El diámetro deberá ser igual a la altura, $20/\sqrt[3]{2\pi}$ cm.

15. La longitud horizontal es $\sqrt{qA/p}$, la longitud vertical es $\sqrt{pA/q}$.

17. Para el ejercicio 1, los hessianos limitados requeridos son

$$|\overline{H}_2| = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & -2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & -2\lambda \end{vmatrix} = 8\lambda(x^2+y^2),$$

$$|\overline{H}_3| = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y & 2z \\ 2x & -2\lambda & 0 & 0 \\ 2y & 0 & -2\lambda & 0 \\ 2z & 0 & 0 & -2\lambda \end{vmatrix} = -16\lambda(x^2+y^2+z^2).$$

En $\sqrt{\frac{2}{3}}(1,-1,1)$ el multiplicador de Lagrange es $\lambda = \sqrt{6}/4 > 0$, que indica un máximo en $\sqrt{\frac{2}{3}}(1,-1,1)$ y $\lambda = -\sqrt{6}/4 < 0$ indica un mínimo en $\sqrt{\frac{2}{3}}(-1,1,-1)$. En el ejercicio 5, $|\overline{H}| = 24\lambda(4x^2+6y^2)$, de modo que $\lambda = \sqrt{70}/12 > 0$ indica un máximo en $(9/\sqrt{70}, 4\sqrt{70})$ y $\lambda = -\sqrt{70}/12 < 0$ indica un mínimo en $(-9/\sqrt{70}, -4/\sqrt{70})$.

19. 11,664 pulg^3

21. (a) $\nabla f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

(b) S está definida por la función de restricción $g(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$. Como $\nabla g(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}$ no es $\mathbf{0}$, se aplica el teorema 8. En $\mathbf{x}$ que sea extremo de f, existe $\lambda/2$ tal que $\nabla f(\mathbf{x}) = (\lambda/2)\nabla g(\mathbf{x})$. Esto es $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.

23. El mínimo es $(-1/\sqrt{2}, 0)$, el máximo es $(\frac{1}{4}, \pm\sqrt{7}/8)$, mínimo local en $(+1/\sqrt{2}, 0)$.

SECCIÓN 4.4

1. Usar el teorema 10 con $n = 1$. (Ver el ejemplo 1). La recta (i) está dada por $0 = (x - x_0, y - y_0) \cdot \nabla f(x_0, y_0) = (x - x_0)(\partial F/\partial x)(x_0, y_0) + (y - y_0)(\partial F/\partial y)(x_0, y_0)$. Para la recta (ii) el teorema 10 da $dy/dx = -(\partial F/\partial x)/(\partial F/\partial y)$, de modo que las rectas concuerdan y están dadas por

$$y = y_0 - \frac{(\partial F/\partial x)(x_0, y_0)}{(\partial F/\partial y)(x_0, y_0)}(x - x_0).$$

3. (a) Si $x < -\frac{1}{4}$ podemos despejar y en términos de x usando la fórmula cuadrática.

(b) $\partial F/\partial y = 2y + 1$ no es cero para $\{y | y < -\frac{1}{2}\}$ y $\{y | y > -\frac{1}{2}\}$. Estas regiones corresponden a las mitades superior e inferior de una parábola horizontal con vértice en $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$ y a la selección del signo en la fórmula cuadrática. La derivada $dy/dx = -3/(2y + 1)$ es negativa en la mitad superior de la parábola y positiva en la inferior.

5. Sea $F(x, y, z) = x^3z^2 - z^3yx$; $\partial F/\partial z = 2x^3z = 3z^2yx \neq 0$ en $(1, 1, 1)$. Cerca del origen, con $x = y \neq 0$, obtenemos las soluciones $z = 0$ y $z = x$ de modo que no hay solución única. En $(1, 1)$, $\partial z/\partial x = \frac{3}{4}$ y $\partial z/\partial y = -\frac{3}{4}$.

7. Con $F_1 = y + x + uv$ y $F_2 = uxy + v$, el determinante en el teorema general de la función implícita es

$$\begin{vmatrix} \partial F_1/\partial u & \partial F_1/\partial v \\ \partial F_2/\partial u & \partial F_2/\partial v \end{vmatrix} = v - uxy,$$

que es 0 en $(0, 0, 0, 0)$. Así, no se aplica el teorema de la función implícita. Si tratamos en forma directa hallamos que $v = -uxy$, de modo que $x + y = u^2xy$. Para una selección particular de (x, y) cerca de $(0, 0)$ no hay soluciones para (u, v) o bien hay dos.

9. No. $f(x, y) = (-1, 0)$ tiene infinidad de soluciones, a saber $(x, y) = (0, y)$ para cualquier y.

11. (a) $x_0^2 + y_0^2 \neq 0$.

(b) $f'(z) = -z(x + 2y)/(x^2 + y^2)$; $\quad g'(z) = z(y - 2x)/(x^2 + y^2)$.

13. Multiplicar e igualar los coeficientes para obtener a_0, a_1 y a_2 como funciones de r_1, r_2 y r_3. Después calcular el determinante jacobiano $\partial(a_0, a_1, a_2)/\partial(r_1, r_2, r_3) = (r_3 - r_2)(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)$. Éste no es cero si tiene distintas raíces. Así, el teorema de la función inversa muestra que las raíces se pueden hallar como funciones de los

coeficientes en alguna vecindad de cualquier punto en el que las raíces sean distintas. Esto es, si las raíces r_1, r_2, r_3 de $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ son todas diferentes, entonces hay vecindades V de (r_1, r_2, r_3) y W de (a_0, a_1, a_2) tales que las raíces en V son funciones suaves de los coeficientes en W.

SECCIÓN 4.5

1. $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$

3. $(2, 1)$ es un equilibrio inestable.

5. Punto de equilibrio estable $(2 + m^2g^2)^{-1/2}(-1, -1, -mg)$

7. No hay puntos críticos; no hay máximo o mínimo

9. $(-1, 0, 1)$

11. En el óptimo, $QK/\alpha = pL/(1 - \alpha)$.

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 4

1. (a) Punto silla
(b) Si $|C| < 2$, mínimo; si $|C| > 2$, punto silla; si $C = \pm 2$, mínimo.

3. (a) 1 (b) $\sqrt{83}/6$

5. $z = \frac{1}{4}$

7. $(0, 0, \pm 1)$

9. Si $b \geq 2$, la distancia mínima es $2\sqrt{b-1}$; si $b \leq 2$, la distancia mínima es $|b|$.

11. No es estable

13. $f(-\frac{3}{2}, -\sqrt{3}/2) = 3\sqrt{3}/4$

15. $x = (20/3)\sqrt[3]{3}$; $y = 10\sqrt[3]{3}$; $z = 5\sqrt[3]{3}$

17. El determinante requerido en el teorema general de la función implícita no es cero, de modo que podemos resolver para u y v; $(\partial u/\partial x)(2, -1) = \frac{13}{32}$.

19. Se puede hallar una nueva base ortonormal con respecto a la cual la forma cuadrática dada por la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

tenga forma diagonal. Este cambio de base define nuevas variables ξ y η, que son funciones lineales de x y y. Con manipulaciones de álgebra lineal y la regla de la cadena se muestra que $Lv = \lambda(\partial^2 v/\partial \xi^2) + \mu(\partial^2 v/\partial \eta^2)$. Los números λ y μ son los valores

propios de A y son positivos, pues la forma cuadrática es definitivamente positiva. En un máximo, $\partial v/\partial\xi = \partial v/\partial\eta = 0$. Más aún, $\partial^2 v/\partial\xi^2 \leq 0$ y $\partial^2 v/\partial\eta^2 \leq 0$, pues si cualquiera fuera mayor que 0, la sección transversal de la gráfica en esa dirección tendría un mínimo. Entonces, $Lv \leq 0$, contradiciendo así la subarmonicidad estricta.

21. Invertir las desigualdades mostradas en los ejercicios 19 y 20.

23. Las ecuaciones para un punto crítico, $\partial s/\partial m = \partial s/\partial b = 0$, cuando se resuelven para m y b dan $m = (y_1 - y_2)/(x_1 - x_2)$ y $b = y_2x_1 - y_1x_2$. La recta $y = mx + b$ pasa entonces por (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

25. En un mínimo de s tenemos $0 = \partial s/\partial b = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - mx_i - b)$.

27. $y = \frac{9}{10}x + \frac{6}{5}$

SECCIÓN 5.1

1. (a) $\frac{13}{15}$; (b) $\pi + \frac{1}{2}$; (c) 1; (d) $\log 2 - \frac{1}{2}$.

3. Para mostrar que los volúmenes de los dos cilindros son iguales, mostrar que sus funciones de área son iguales.

5. $2r^3(\tan\theta)/3$

7. $\frac{26}{9}$

9. $(2/\pi)(e^2 + 1)$

11. $\frac{196}{15}$

SECCIÓN 5.2

1. (a) $\frac{7}{12}$; (b) $e - 2$; (c) $\frac{1}{9}\operatorname{sen} 1$; (d) $2\ln 4 - 2$

3. Si $f(x_0, y_0) > 0$, usar la continuidad para mostrar que existe un rectángulo pequeño R_1 que contiene a (x_0, y_0) con $f(x, y) > \frac{1}{2}f(x_0, y_0)$ en R_1. Sea $g(x, y)$ igual a $\frac{1}{2}f(x_0, y_0)$ en R_1 y 0 en el resto. Por el teorema 2, g es integrable. Usar las propiedades (iii) y (iv) de la integral para mostrar que esto implica que $\int_R f\,dx\,dy > \frac{1}{2}f(x_0, y_0)$ área (R_1).

5. Usar el teorema de Fubini para escribir

$$\int_R [f(x)g(y)]\,dx\,dy = \int_c^d g(y)\left[\int_a^b f(x)\,dx\right]dy,$$

y notar que $\int_a^b f(x)\,dx$ es una constante, de modo que puede sacarse.

7. $\frac{11}{6}$

9. Como $\int_0^1 dy = \int_0^1 2y\,dy = 1$, tenemos $\int_0^1[\int_0^1 f(x, y)\,dy]dx = 1$. En cualquier partición de $R = [0, 1]\times[0, 1]$ cada rectángulo R_{jk} contiene puntos $\mathbf{c}_{jk}^{(1)}$ con x racional y $\mathbf{c}_{jk}^{(2)}$ con x irracional. Si en la partición regular de orden n escogemos $\mathbf{c}_{jk} = \mathbf{c}_{jk}^{(1)}$ en aquellos

rectángulos con $0 \le y \le \frac{1}{2}$ y $\mathbf{c}_{jk} = \mathbf{c}_{jk}^{(2)}$ cuando $y > \frac{1}{2}$, las sumas de aproximación son las mismas que para

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & 0 \le y \le \frac{1}{2} \\ 2y & \frac{1}{2} < y \le 1 \end{cases}$$

Como g es integrable, las sumas de aproximación deben converger a $\int_R g\,dA = \frac{7}{8}$. Sin embargo, si hubiésemos escogido todos los $\mathbf{c}_{ij} = \mathbf{c}_{jk}^{(1)}$, todas las sumas de aproximación tendrían el valor 1.

11. La función f no está acotada, pues debe haber un volumen de -1 sobre cada uno de los cuadrados diagonales de área $1/[n(n+1)]^2$.

SECCIÓN 5.3

1. (a) $\frac{1}{3}$, ambos; (b) $\frac{5}{2}$, ambos (c) $(e^2-1)/4$, ambos; (d) $\frac{1}{35}$, ambos.

3. $A = \int_{-r}^{r}\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} dy\,dz = 2\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx = r^2[\operatorname{arcsen} 1 - \operatorname{arcsen}(-1)] = \pi r^2$.

5. $28{,}000\text{ft}^3$

7. 0

9. Tipo 1; $\pi/2$.

11. 50π

13. $\pi/24$

15. Calcular la integral primero respecto a y. Dividirlo en integrales sobre $[-\phi(x), 0]$ y $[0, \phi(x)]$ y cambiar variables en la primera integral o usar simetría.

17. Sea $\{R_{ij}\}$ una partición de un rectángulo R que contenga a D y sea f igual a 1 en D. Así, f^* es 1 en D y 0 en $R\backslash D$. Sea $\mathbf{c}_{jk} \in R\backslash D$ si R_{ij} no está totalmente contenido en D. La suma de aproximación de Riemann es la suma de las áreas de aquellos rectángulos de la partición contenidos en D.

SECCIÓN 5.4

1. (a) $\frac{1}{8}$; (b) $\pi/4$; (c) $\frac{17}{12}$;
(b) $G(b) - G(a)$, donde $dG/dy = F(y,y) - F(a,y)$ y $\partial F/\partial x = f(x,y)$.

3. Notar que el valor máximo de f en D es e y el valor mínimo de f en D es $1/e$. Usar las ideas presentadas en la demostración del teorema 4 para mostrar que

$$\frac{1}{e} \le \frac{1}{4\pi^2}\int f(x,y)\,dA \le e.$$

5. El valor más pequeño de $f(x,y) = 1/(x^2+y^2+1)$ en D es $\frac{1}{6}$, en $(1,2)$, de modo que

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy \ge \frac{1}{6}\cdot \text{área}\, D = 1.$$

El valor más grande es 1, en $(0,0)$, de modo que

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy \le 1\cdot \text{área}\, D = 6.$$

7. $\frac{4}{3}\pi abc$.

9. $\pi(20\sqrt{10} - 52)/3$.

11. $\sqrt{3}/4$

13. D se ve como una rebanada de pastel.

$$\int_0^1 \left[\int_0^x f(x,y)\,dy\right] dx + \int_1^{\sqrt{2}} \left[\int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,du\right] dx.$$

15. Usar la regla de la cadena y el teorema fundamental del cálculo.

SECCIÓN 5.5

1. Si $a \neq b$, tomar $\epsilon = |a-b|/2$.

3. Sea $e = 2d - c$, de modo que $d = (c+e)/2$. Considerar la "duplicación" de R hacia arriba, definida por $Q = R \cup R_1$, donde $R_1 = [a,b] \times [d,e]$. Si f se extiende a Q haciendo f igual a 0 en la parte añadida, entonces f es integrable sobre Q, por aditividad. La n-ésima partición regular de $[(a+b)/2, b] \times [c,d]$ es parte de la $2n$-ésima partición regular de Q. Para n grande, las sumas de Riemann para esa $2n$-ésima partición no pueden variar más de ϵ cuando cambiamos la selección de los puntos de los subrectángulos, en particular si cambiamos sólo aquellos en $[(a+b)/2, b] \times [c,d]$. Estos cambios corresponden a los cambios posibles para las sumas de Riemann para la n-ésima partición de $[(a+b)/2, b] \times [c,d]$. El argumento para la parte (b) es similar.

5. Sea $R = [a,b]\times[c,d]$ y $B = [e,f]\times[g,h]$. Como los rectángulos de una partición de R sólo se intersecan a lo largo de sus lados, sus áreas se pueden sumar, y b_n es el área de la unión de todos los subrectángulos de la n-ésima partición regular de R que interseca a B. Como está contenido en esta unión, área$(B) \leq b_n$. Por otro lado, si (x,y) está en la unión, entonces $e-(b-a)/n \leq x \leq f+(b-a)/n$ y $g-(d-c)/n \leq y \leq h+(d-c)/n$. Esto conduce a $b_n \leq$ área$(B) + 2[(b-a)(h-g)+(d-c)(f-e)]/n + 4(a-b)(d-c)/n^2$. Haciendo $n \to \infty$ y combinando las desigualdades se prueba la afirmación.

7. (a) La estrategia es ir de punto en punto dentro de $[a,b]$ a pasos cortos, sumando los cambios conforme se avanza. Dado $\epsilon > 0$, ϕ es uniformemente continua y por lo tanto, existe $\delta > 0$ tal que $|\phi(x) - \phi(y)| \leq \epsilon$ siempre que $|x-y| < \delta$. Tomar $x \in [a,b]$ e introducir puntos intermedios $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = x$ con $x_{i+1} - x_i < \delta$. Esto se puede hacer con no más de $[(b-a)/\delta] + 1$ segmentos. Por la desigualdad del triángulo,

$$|\phi(x) - \phi(a)| \leq \sum_{i=1}^{n} |\phi(x_i) - \phi(x_{i-1})| \leq \left(\frac{b-a}{\delta+1}\right)\epsilon.$$

Así $|\phi(x)| \leq |\phi(a)| + [(b-a)/(\delta+1)]\epsilon$ para todo x en $[a,b]$.

(b) Usar un argumento parecido al de la parte (a), moviéndose con pasos cortos dentro del rectángulo $[a,b] \times [c,d]$.

(c) Éste tiene su truco, pues D puede estar compuesto de varias piezas desconectadas de modo que no se puedan dar pasos cortos dentro de D. Sin embargo, dado ϵ, existe δ tal que $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq \epsilon$ cuando $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ están en D y $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| < \delta$, debido al principio del acotamiento uniforme. Como D está acotado, podemos hallar un "cubo"

grande R con lados de longitud L tal que $D \subset R$. Partir R en subcubos dividiendo cada arista en m partes. La diagonal de cada subcubo tiene longitud $\sqrt{n}L/m$. Si tomamos $m > \sqrt{n}L/\delta$, cualesquiera dos puntos en el mismo subcubo distan en menos que δ, y hay m^n *subcubos*. Si $R_1, \ldots, R_N$ son aquéllos que intersecan D, escoger $\mathbf{x}_i \in D \cap R_i$. Para cualquier $\mathbf{x} \in D$, tenemos $|f(\mathbf{x})| < \epsilon + \text{máx}(|f(\mathbf{x}_1)|, \ldots, |f(\mathbf{x}_n)|)$.

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 5

1. (a) $\frac{81}{2}$; (b) $\frac{29}{70}$; (c) $\frac{1}{4}e^2 - e + \frac{9}{4}$.

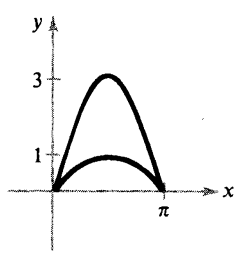
3. (a) $-\frac{1}{2}$; (b) $\pi^2/8$.

5. En la notación de la figura 5.3.1,

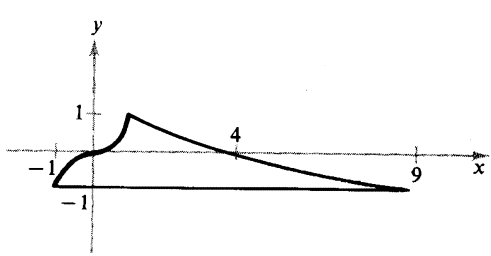
$$\iint_D dx\,dy = \int_a^b [\phi_2(x) - \phi_1(x)]\,dx.$$

7. **(a) 0; (b) $\pi/24$; (c) 0**

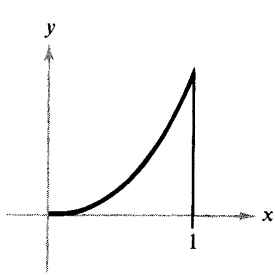
9. **Tipo 1; $2\pi + \pi^2$.**



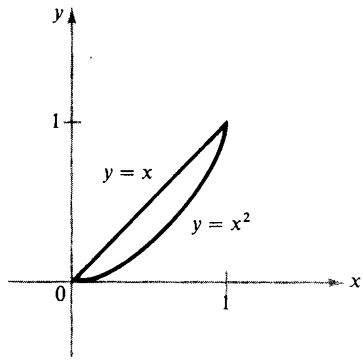
11. **Tipo 2; 104/45**



13. **Tipo 1; 33/140**



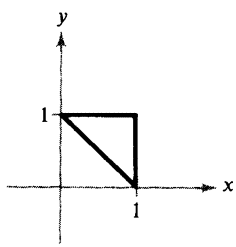
15. Tipo 1; 71/420



17. $\frac{1}{3}$

19. $\frac{19}{3}$

21. $\frac{11}{12}$.



23. La función $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ está entre 1 y $2^2 + 1 = 5$ en D, de modo que la integral está entre estos valores multiplicados por 4π, el área de D.

25. Intercambiar el orden de integración (el lector deberá hacer un dibujo en el plano (u, t)):

$$\int_0^x \int_0^t F(u)\,du\,dt = \int_0^x \int_u^x F(u)\,dt\,du$$
$$= \int_0^x (x-u)F(u)\,du.$$

SECCIÓN 6.1

1. $\frac{1}{3}$

3. 7

5. 0

7. $\frac{1}{6}$

9. $(4\pi/3)(1 - \sqrt{2}/2)$

11. 4π

13. $\frac{26}{3}$

15. Las condiciones sobre f y W muestran que la integral existe. Para hallar su valor se puede usar cualquier suma de aproximación de Riemann. Explicar cómo se pueden escoger puntos de las cajas de una partición de manera que las contribuciones de las cajas con z positivo se cancelen con las cajas con z negativa.

17. $\frac{1}{48}$

19. (a) $a = -1$; $b = 1$; $\phi_1(x) = -\sqrt{1-x^2}$; $\phi_2(x) = \sqrt{1-x^2}$;
$\gamma_1(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$; $\gamma_2(x,y) = 1$.
(b) $a = -\sqrt{3}/2$; $b = \sqrt{3}/2$; $\phi_1(x) = -\sqrt{\frac{3}{2}-x^2}$; $\phi_2(x) = \sqrt{\frac{3}{4}-x^2}$;
$\gamma_1(x,y) = \frac{1}{2}$; $\gamma_2(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$.

21. Dado $\epsilon_1 > 0$, la continuidad de f muestra que existe $\epsilon_2 > 0$ tal que $\epsilon < \epsilon_2$ implica $f(x_0,y_0,z_0) - \epsilon_1 < f(x,y,z) < f(x_0,y_0,z_0) + \epsilon_1$, siempre que $(x,y,z) \in B_\epsilon$. La integración da

$$|B_\epsilon|(f(x_0,y_0,z_0) - \epsilon_1) < \int_{B_\epsilon} f(x,y,z)dV < |B_\epsilon|(f(x_0,y_0,z_0) + \epsilon_1).$$

Ahora, dividir entre $|B_\epsilon|$ y hacer $\epsilon \to 0$.

SECCIÓN 6.2

1. $S =$ al disco unitario menos su centro.

3. $D = [0,3] \times [0,1]$; sí.

5. La imagen es el triángulo con vértices $(0,0)$, $(0,1)$ y $(1,1)$. T no es uno a uno, pero puede hacerse si eliminamos la parte $x^* = 0$.

7. D es el conjunto de (x,y,z) con $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ (la bola unitaria). T no es uno a uno, pero sí lo es en $(0,1] \times [0,\pi] \times (0,2\pi]$.

9. Mostrar que T es sobre, equivale a mostrar que el sistema $ax+by=e$, $cx+dy=f$ siempre se puede resolver para x y y, donde

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Cuando se hace esto por eliminación o por la regla de Cramer, la cantidad entre la cual se debe dividir es $\det A$. Así, si $\det A \neq 0$, siempre se pueden resolver las ecuaciones.

11. Como $\det A \neq 0$, T manda a $\mathbf{R}^2$ de manera biunívoca sobre $\mathbf{R}^2$. Sea T^{-1} la transformación inversa. Mostrar que T^{-1} tiene matriz A^{-1} y $\det(A^{-1}) = 1/\det A$, donde $\det A \neq 0$. Por el ejercicio 10, $P^* = T^{-1}(P)$ es un paralelogramo.

SECCIÓN 6.3

1. $\pi(e-1)$

3. D es la región $0 \leq x \leq 4$; $\frac{1}{2}x + 3 \leq y \leq \frac{1}{2}x + 6$; (a) 140; (b) -42.

5. D^* es la región $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2$; $\frac{2}{3}(9 - 2\sqrt{2} - 3\sqrt{3})$.

7. π

9. $\dfrac{64\pi}{5}$

11. $3\pi/2$

13. $\dfrac{5\pi}{2}(e^4 - 1)$

15. $2a^2$

17. $\dfrac{21}{2}\left(e - \dfrac{1}{e}\right)$

19. $100\pi/3$

21. $4\pi[\sqrt{3}/2 - \log(1+\sqrt{3}) + \log 2]$

23. $4\pi \ln(b/a)$

25. $2\pi[(b^2+1)e^{-b^2} - (a^2+1)e^{-a^2}]$

27. 24 (usar el cambio de variables $x = 3u - v + 1, y = 3u + v$).

29. (a) $\frac{4}{5}\pi abc$; (b) $\frac{4}{3}\pi abc$.

31. (b) $\dfrac{160}{3}$

33. $\frac{4}{9}a^{2/3}\int_{D^*} f((au^2)^{1/3}, (av^2)^{1/3})u^{-1/3}v^{-1/3}\,du\,dv$

SECCIÓN 6.4

1. $[\pi^2 - \operatorname{sen}(\pi^2)]/\pi^3$

3. $(\frac{11}{18}, \frac{65}{126})$

5. \$503.06

7. (a) ρ, donde ρ es la densidad de masa (constante). (b) $\frac{37}{12}$

9. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

11. $\frac{1}{4}$

13. Al hacer d la densidad, el momento de inercia es $d\int_0^k \int_0^{2\pi} \int_0^{a\sec\phi} \rho^4 \operatorname{sen}^3\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi$.

15. $(1.00 \times 10^8)m$

17. (a) El único plano de simetría para el cuerpo de un automóvil es el que divide los lados derecho e izquierdo del carro.

(b) $\bar{z} \cdot \iiint_W \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ es la coordenada z del centro de masa multiplicada por la masa de W. Al rearreglar la fórmula para $\bar{z}$ se obtiene la primera línea de la ecuación. El paso siguiente está justificado por la propiedad aditiva de las integrales. Por simetría, podemos reemplazar z con $-z$ e integrar en la región sobre el plano xy. Finalmente, podemos factorizar el signo menos y sacarlo de la segunda integral, y como $\rho(x,y,z) = \rho(u,v,-w)$, restamos la segunda integral de ella misma. Así, la respuesta es 0.

(c) En la parte (b), mostramos que $\bar{z}$ multiplicada por la masa de W es 0. Como la masa debe ser positiva, $\bar{z}$ debe ser 0.

(d) Por la parte (c), el centro de masa debe estar en ambos planos.

19. $(4.71 \times 10^{22})G/R$

SECCIÓN 6.5

1. (a) 4; (b) $\frac{8}{3}$; (c) $\frac{3}{16}$; (d) $2-e$.

3. Al integrar $\iint e^{-xy}\,dx\,dy$ primero respecto a x y después respecto a y, se obtiene $\log 2$. Invirtiendo el orden se obtiene la integral del lado derecho de la desigualdad enunciada en el ejercicio.

5. Integrar sobre $[\epsilon,1]\times[\epsilon,1]$ y hacer $\epsilon \to 0$ para mostrar que existe la integral impropia y es igual a $2\log 2$.

7. Usar el hecho de que

$$\frac{\operatorname{sen}^2(x-y)}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \le \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

9. Usar el hecho de que $e^{x^2+y^2}/(x-y) \ge 1/(x-y)$ en la región dada.

11. $\frac{2\pi}{9}[(1+a^3)^{3/2} - a^{9/2} - 1]$

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 6

1. 0

3. $a^5/20$

5. 0

7. $\frac{4}{3}$

9. $\frac{1}{3}\pi(4\sqrt{2}-\frac{7}{2})$

11. $(5\pi/16)\sqrt{15}$

13. $abc/6$

15. Cortar con los planos $x+y+z=\sqrt[3]{k/n}$, $1 \le k \le n-1$, k un entero.

17. $(25+10\sqrt{5})\pi/3$

19. $4\pi\ln(a/b)$

21. (a) $\frac{1}{6}$ (b) $16\pi/3$

23. $4\pi/3$

25. $\pi/2$

27. $(e-e^{-1})/4$ (Usar el cambio de variables $u=y-x$, $v=y+x$.)

29. 3 (Usar el cambio de variables $u=x^2-y^2$, $v=xy$.)

31. $(9.92)\times 10^6)\pi$ gramos

33. (a) 32.
(b) Esto ocurre en los puntos de la esfera unitaria $x^2+y^2+z^2=1$ inscrita en el cubo.

35. $(0,0,\frac{3}{8})$

37. Trabajar primero la integral respecto a y en la región $D_{\epsilon,L}=\{(x,y) \mid \epsilon \le x \le L,\ 0 \le y \le x\}$ para obtener $I_{\epsilon,L}=\iint_{D_{\epsilon,L}} f\,dx\,dy = \int_\epsilon^L x^{-3/2}(1-e^{-x})\,dx$. El integrando es positivo, de modo que $I_{\epsilon,L}$ crece cuando $\epsilon \to 0$ y $L \to \infty$. Acotar superiormente $1-e^{-x}$

mediante x, para $0 < x < 1$, y por 1 para $1 < x < \infty$ para ver que $I_{\epsilon,L}$ permanece acotada y por lo tanto debe converger. La integral impropia existe.

39 2π

41. (a) $\frac{32}{3}$ (b) 64π

SECCIÓN 7.1

1. $\int_\sigma f(x,y,z)\,ds = \int_I f(x(t),y(t),z(t))\|\sigma'(t)\|\,dt = \int_0^1 0\cdot 1\,dt = 0.$

3. (a) 2 (b) $52\sqrt{14}$ (c) $\frac{16}{3} - 2\sqrt{3}$

5. $-\frac{1}{3}(1+1/e^2)^{3/2} + \frac{1}{3}(2^{3/2})$

7. (a) La trayectoria sigue la línea recta de $(0,0)$ a $(1,1)$ y regresa a $(0,0)$ en el plano xy. Sobre la trayectoria, la gráfica de f es una recta que va de $(0,0,0)$ a $(1,1,1)$. La integral es el área del triángulo resultante cubierto dos veces, y es igual a $\sqrt{2}$.

(b) $s(t) = \begin{cases} \sqrt{2}(1-t^4) & \text{cuando} \quad -1 \le t \le 0 \\ \sqrt{2}(1+t^4) & \text{cuando} \quad 0 < t \le 1 \end{cases}$

La trayectoria es

$$\sigma(s) = \begin{cases} (1 - s/\sqrt{2})(1,1) & \text{cuando} \quad 0 \le s \le \sqrt{2} \\ (s/(\sqrt{2}-1))(1,1) & \text{cuando} \quad \sqrt{2} \le s \le 2\sqrt{2} \end{cases}$$

y $\int_\sigma f\,ds = \sqrt{2}$.

9. $2a/\pi$

11. (a) $[2\sqrt{5} + \log(2+\sqrt{5})]/4$ (b) $(5/\sqrt{5}-1)/[6\sqrt{5} + 3\log(2+\sqrt{5})]$

13. La trayectoria es un círculo unitario con centro en $(0,0,0)$ en el plano $x+y+z = 0$, de modo que se puede parametrizar por $\sigma(\theta) = (\cos\theta)\mathbf{v} + (\operatorname{sen}\theta)\mathbf{w}$, donde $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son vectores unitarios ortogonales en ese plano. Por ejemplo, se puede hacer con $\mathbf{v} = (1/\sqrt{2})(-1,0,1)$ y $\mathbf{w} = (1/\sqrt{6})(1,-2,1)$. La masa total es de $2\pi/3$ gramos.

SECCIÓN 7.2

1. (a) $\frac{3}{2}$; (b) 0; (c) 0; (d) 147.

3. 9

5. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, $|\mathbf{F}(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)| \le \|\mathbf{F}(\sigma(t))\|\,\|\sigma'(t)\|$ para toda t. Así,

$$\left|\int_\sigma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}\right| = \left|\int_a^b \mathbf{F}(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)\,dt\right| \le \int_a^b |\mathbf{F}(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)|\,dt$$

$$\le \int_a^b \|\mathbf{F}(\sigma(t))\|\,\|\sigma'(t)\|\,dt \le M\int_a^b \|\sigma'(t)\|\,dt = Ml.$$

7. $\frac{3}{4} - (n-1)/(n+1)$

9. 0

11. La longitud de $\boldsymbol{\sigma}$

13. Si $\boldsymbol{\sigma}'(t)$ nunca es 0, entonces el vector unitario $\mathbf{T}(t) = \boldsymbol{\sigma}'(t)/\|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|$ es una función continua de t, de modo que es una tangente a la curva que gira de forma suave. La respuesta es no.

15. 7

17. Sea la trayectoria dada por $(x, y, z) = \boldsymbol{\sigma}(t)$, donde $\boldsymbol{\sigma}(t_1) = (x_1, y_1, z_1)$ y $\boldsymbol{\sigma}(t_2) = (x_2, y_2, z_2)$. Pensar x, y y z como funciones de t. Entonces $\boldsymbol{\sigma}'(t) = (dx/dt)\mathbf{i} + (dy/dt)\mathbf{j} + (dz/dt)\mathbf{k}$, de modo que el trabajo es

$$\begin{aligned}
W &= \int_{a_1}^{t_2} \frac{-1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}\right) dt \\
&= -\int_{t_1}^{t_2} \frac{x(dx/dt) + y(dy/dt) + z(dz/dt)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\, dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} -\frac{\frac{1}{2}(d/dt)(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\, dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}\, dt = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}\Big|_{\boldsymbol{\sigma}(t_1)}^{\boldsymbol{\sigma}(t_2)} \\
&= (x_2^2+y_2^2+z_2^2)^{-1/2} - (x_1^2+y_1^2+z_1^2)^{-1/2} = \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}.
\end{aligned}$$

Así, el trabajo realizado por el campo gravitacional cuando una partícula se mueve de (x_1, y_1, z_1) a (x_2, y_2, z_2) es $1/R_2 - 1/R_1$. Nótese que, en este caso, el trabajo es independiente de la trayectoria que une a los dos puntos.

SECCIÓN 7.3

1. $z = 2(y-1) + 1$

3. $18(z-1) - 4(y+2) - (x-13) = 0$ o $18z - 4y - x - 13 = 0$.

5. El vector $\mathbf{n} = (\cos v \operatorname{sen} u, \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, \cos u) = (x, y, z)$. La superficie es la esfera unitaria con centro en el origen.

7. $\mathbf{n} = -(\operatorname{sen} v)\mathbf{i} - (\cos v)\mathbf{k}$; la superficie es un cilindro.

9. (a) $x = x_0 + (y - y_0)(\partial h/\partial y)(y_0, z_0) + (z - z_0)(\partial h/\partial z)(y_0, z_0)$ describe el plano tangente a $x = h(y, z)$ en $(x_0, y_0, z_0), x_0 = h(y_0, z_0)$.

(b) $y = y_0 + (x - x_0)(\partial k/\partial x)(x_0, z_0) + (z - z_0)(\partial k/\partial z)(x_0, z_0)$.

11. (a) La superficie es una helicoide. Parece una rampa en espiral alrededor del eje z. (Ver el ejemplo 2 de la sección 7.4) Da dos vueltas, pues θ va hasta 4π.

(b) $\mathbf{n} = \pm(1/\sqrt{1+r^2})(\operatorname{sen}\theta, -\cos\theta, r)$

(c) $y_0x - x_0y + (x_0^2 + y_0^2)z = (x_0^2 + y_0^2)z_0$.

(d) Si $(x_0, y_0, z_0) = (r_0\cos\theta_0, r_0\operatorname{sen}\theta_0, \theta_0)$, entonces al representar el segmento de recta como $\{(r\cos\theta_0, r\operatorname{sen}\theta_0, \theta_0) \mid 0 \le r \le 1\}$ se muestra que la recta está en la superficie. Al representar la recta como $\{(tx_0, ty_0, z_0) \mid 0 \le t \le 1/(x_0^2 + y_0^2)\}$ y sustituir en el resultado de la parte (c), se muestra que está en el plano tangente en (x_0, y_0, z_0).

13. (a) Usando coordenadas cilíndricas se obtiene la parametrización $\mathbf{\Phi}(z, \theta) = ((25 + z^2)\cos\theta, (25 + z^2)\operatorname{sen}\theta, z)$, $-\infty < z < \infty$, $0 \le \theta \le 2\pi$ como una posible solución.

(b) $\mathbf{n} = (1/\sqrt{1+4z^2})(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, -2z)$.

(c) $x_0x + y_0y = 25$.

(d) Sustituir las coordenadas a lo largo de estas rectas en la ecuación que define la superficie y en el resultado de la parte (c).

15. (a) $u \mapsto u$, $v \mapsto v$, $u \mapsto u^3$ y $v \mapsto v^3$, todas mandan a $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$.

(b) $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v = (0, 0, 1)$ para $\mathbf{\Phi}_1$ y esto nunca es $\mathbf{0}$. $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v = 9u^2v^2(0, 0, 1)$ para $\mathbf{\Phi}_2$ y esto es $\mathbf{0}$ a lo largo de los ejes u y v.

(c) Queremos mostrar que cualesquiera dos parametrizaciones de una superficie que sean suaves cerca de un punto, darán ahí el mismo plano tangente. Así, suponer que $\mathbf{\Phi}: D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ y $\mathbf{\Psi}: B \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ son superficies parametrizadas tales que

$$\mathbf{\Phi}(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0) = \mathbf{\Psi}(s_0, t_0) \tag{i}$$

y

$$(\mathbf{T}_u^{\mathbf{\Phi}} \times \mathbf{T}_v^{\mathbf{\Phi}})|_{u_0,v_0)} \neq \mathbf{0} \qquad \text{y} \qquad (\mathbf{T}_s^{\mathbf{\Psi}} \times \mathbf{T}_t^{\mathbf{\Psi}})|_{(s_0,t_0)} \neq \mathbf{0}, \tag{ii}$$

de modo que $\mathbf{\Phi}$ y $\mathbf{\Psi}$ son suaves y uno a uno en vecindades de (u_0, v_0) y (s_0, t_0), que bien podemos suponer que son D y B. Suponer, además, que "describen la misma superficie", esto es, $\mathbf{\Phi}(D) = \mathbf{\Phi}(B)$. Para ver que dan el mismo plano tangente en (x_0, y_0, z_0) mostrar que tienen vectores normales paralelos. Para ello, mostrar que existe un conjunto abierto C con $(u_0, v_0) \in C \subset D$ y una función diferenciable $f: C \to B$ tal que $\mathbf{\Phi}(u, v) = \mathbf{\Psi}(f(u, v))$ para $(u, v) \in C$. Una vez hecho esto, con cálculos de rutina se muestra que los vectores normales están relacionados por $\mathbf{T}_u^{\mathbf{\Phi}} \times \mathbf{T}_v^{\mathbf{\Phi}} = [\partial(s, t)/\partial(u, v)]\mathbf{T}_s^{\mathbf{\Psi}} \times \mathbf{T}_t^{\mathbf{\Psi}}$.

Para ver que existe dicha f, nótese que como $\mathbf{T}_s^{\mathbf{\Psi}} \times \mathbf{T}_t^{\mathbf{\Psi}} \neq \mathbf{0}$, al menos uno de los determinantes de 2×2 en el producto cruz es distinto de cero. Suponer, por ejemplo, que

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial s} \\ \dfrac{\partial x}{\partial t} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Usar ahora el teorema de la función inversa para escribir (s, t) como función diferenciable de (x, y) en alguna vecindad de (x_0, y_0).

(d) No.

SECCIÓN 7.4

1. 4π

3. $\frac{3}{2}\pi[\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})]$

5. $\frac{1}{3}\pi(6\sqrt{6}-8)$

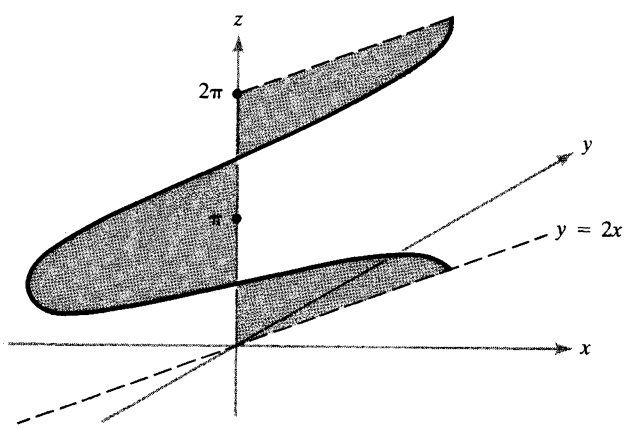
7. La integral para el volumen converge, mientras que la del área diverge.

9. $A(E)=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{a^2b^2\operatorname{sen}^2\phi\cos^2\phi+b^2c^2\operatorname{sen}^4\phi\cos^2\phi+a^2c^2\operatorname{sen}^4\phi\operatorname{sen}^2\theta}\,d\phi\,d\theta$

11. $(\pi/6)(5\sqrt{5}-1)$

13. $(\pi/2)\sqrt{6}$

15. $4\sqrt{5}$; para θ fijo, (x,y,z) se mueve a lo largo del segmento de recta horizontal $y=2x$, $z=\theta$ desde el eje z hacia afuera, hasta un radio de $\sqrt{5}|\cos\theta|$ en el primer cuadrante si $\cos\theta>0$ y hacia adentro del tercer cuadrante si $\cos\theta<0$.



17. $(2\pi+4)/(2\pi-4)$

19. $\pi(a+b)\sqrt{1+m^2}(b-a)$

21. $\frac{4}{15}(9\sqrt{3}-8\sqrt{2}+1)$

SECCIÓN 7.5

1. $\dfrac{5\sqrt{2}+3}{24}$

3. πa^3

5. $\sqrt{6}/30$

7. $\dfrac{\pi}{4}\left(\dfrac{5\sqrt{5}}{3}+\dfrac{1}{15}\right)$

9. $16\pi R^3/3$

11. (a) La esfera se ve igual desde los tres ejes, de modo que las tres integrales deberán ser la misma cantidad con diferente denominación de los ejes.
(b) $4\pi R^4/3$
(c) $4\pi R^4/3$

13. $(R/2, R/2, R/2)$

15. Como $\|\partial\Phi/\partial u\|^2 - 2\|\partial\Phi/\partial u\|\,\|\partial\Phi/\partial v\| + \|\partial\Phi/\partial v\|^2 = (\|\partial\Phi/\partial u\| - \|\partial\Phi/\partial v\|)^2 \geq 0$, tenemos $\|\partial\Phi/\partial u \times \partial\Phi/\partial v\| = \|\partial\Phi/\partial u\|\,\|\partial\Phi/\partial v\|\,|\operatorname{sen}\theta(u,v)| \leq \frac{1}{2}(\|\partial\Phi/\partial u\|^2 + \|\partial\Phi/\partial v\|^2)$, donde θ es ángulo entre $\partial\Phi/\partial u$ y $\partial\Phi/\partial v$. Esto conduce a $A(\Phi) \leq J(\Phi)$. Al suponer la continuidad dada, la igualdad se cumple sólo si $\|\partial\Phi/\partial u\|\,\|\partial\Phi/\partial v\|\,|\operatorname{sen}\theta| = \frac{1}{2}(\|\partial\Phi/\partial u\|^2 + \|\partial\Phi/\partial v\|^2) = \frac{1}{2}(\|\partial\Phi/\partial u\| - \|\partial\Phi/\partial v\|)^2 + \|\partial\Phi/\partial u\|\,\|\partial\Phi/\partial v\|$ en cada punto. Esto puede ocurrir si $|\operatorname{sen}\theta| = 1$ y si $\|\partial\Phi/\partial u\| = \|\partial\Phi/\partial v\|$. Así, $\cos\theta = 0$; esto es, $\partial\Phi/\partial u \cdot \partial\Phi/\partial v = 0$.

17. (a) $\sqrt{2}\pi r^2$; (b) $2\pi r^2$.

19. $2a^2$

SECCIÓN 7.6

1. $\pm 48\pi$ (el signo depende de la orientación)

3. 4π

5. 2π (o -2π, si se escoge una orientación diferente)

7. $-2\pi/3$

9. $12\pi/5$

11. Con la parametrización usual en coordenadas esféricas, $\mathbf{T}_\theta \times \mathbf{T}_\phi = -\operatorname{sen}\phi\,\mathbf{r}$ (ver el ejemplo 1). Así,

$$\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint \mathbf{F}\cdot(\mathbf{T}_\phi \times \mathbf{T}_\theta)\,d\phi\,d\theta = \iint (\mathbf{F}\cdot\mathbf{r})\operatorname{sen}\phi\,d\phi\,d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} F_r \operatorname{sen}\phi\,d\phi\,d\theta$$

y

$$\int_S f\,dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f\operatorname{sen}\phi\,d\phi\,d\theta.$$

13. Para un cilindro de radio $R = 1$ y la componente normal F_r,

$$\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int_a^b\int_0^{2\pi} F_r\,d\theta\,dz.$$

15. $2\pi/3$

17. $\frac{2}{3}a^3bc\pi$

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 7

1. (a) $3\sqrt{2}(1-e^{6\pi})/13$ (b) $-\pi/\sqrt{2}/2$
(c) $(236{,}158\sqrt{26}-8)/35\cdot(25)^3$ (d) $8\sqrt{2}/189$

3. (a) $2/\pi+1$ (b) $-\frac{1}{2}$

5. $2a^3$

7. (a) Una esfera de radio 5 con centro en $(2,3,0)$;
$\mathbf{\Phi}(\theta,\phi)=(2+5\cos\theta\ \operatorname{sen}\phi, 3+5\operatorname{sen}\theta\ \operatorname{sen}\phi, 5\cos\phi)$;
$0\le\theta\le 2\pi;\ 0\le\phi\le\pi$

(b) Un elipsoide con centro en $(2,0,0)$;
$\mathbf{\Phi}(\theta,\phi)=(2+(1/\sqrt{2})3\ \cos\theta\ \operatorname{sen}\phi, 3\operatorname{sen}\theta\ \operatorname{sen}\phi, 3\cos\phi)$;
$0\le\theta<2\pi,\ 0\le\phi<\pi$

(c) Un hiperboloide elíptico de una hoja;
$\mathbf{\Phi}(\theta,z)=(\frac{1}{2}\sqrt{8+2z^2}\ \cos\theta, \frac{1}{3}\sqrt{8+2z^2}\ \operatorname{sen}\theta, z)$;
$0\le\theta<2\pi,\ -\infty<z<\infty$

9. $A(\mathbf{\Phi})=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{3\cos^2\theta+5}\,d\theta$; $\mathbf{\Phi}$ describe la parte superior de un cono con secciones transversales horizontales elípticas.

11. $11\sqrt{3}/6$

13. $\sqrt{2}/3$

15. $5\sqrt{5}/6$

17. (a) $(e^y\cos\pi z, xe^y\cos\pi z, -\pi xe^y\operatorname{sen}\pi z)$ (b) 0

19. $\frac{1}{2}(e^2+1)$

21. $\mathbf{n}=(1/\sqrt{5})(-1,0,2), 2z-x=1$

23. 0

25. Si $\mathbf{F}=\nabla\phi$, entonces $\nabla\times\mathbf{F}=\mathbf{0}$ (al menos si ϕ es de clase C^2: ver el teorema 1, sección 3.4). En el teorema 3 de la sección 7.2 se muestra que $\int_{\mathbf{c}}\nabla\phi\cdot d\mathbf{s}=0$, pues $\mathbf{c}$ es una curva cerrrada.

27. (a) 24π (b) 24π (c) 60π

29. (a) $\sqrt{R^2+p^2}(z_0-z_1)$ (b) $(R^2+p^2)\sqrt{z_0/2g}$

SECCIÓN 8.1

1. -8

3. (a) 0 (b) $-\pi R^2$ (c) 0 (d) $-\pi R^2$

5 $3\pi a^2$

7. $3\pi/2$

9 $3\pi(b^2-a^2)/2$

11. (a) 2π (b) 0

13 0

15. πab

17. Un segmento de recta horizontal divide la región en tres regiones a las que se aplica el teorema de Green; usar ahora el ejercicio 8 o la técnica mostrada en la figura 8.1.5.

19. $9\pi/8$

21. Si $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|u(\mathbf{q}) - u(\mathbf{p})| < \epsilon$ siempre que $||\mathbf{p} - \mathbf{q}| = \rho < \delta$. Parametrizar $\partial B_\rho(\mathbf{p})$ por $\mathbf{q}(\theta) = \mathbf{p} + \rho(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$. Entonces

$$|I(\rho) - 2\pi u(\mathbf{p})| \leq \int_0^{2\pi} |u(\mathbf{q}(\theta)) - u(\mathbf{p})|\, d\theta \leq 2\pi\epsilon.$$

23. Parametrizar $\partial B_\rho(\mathbf{p})$ como se hizo en el ejercicio 21. Si $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$, entonces $I(\rho) = \int_0^{2\pi} u(p_1 + \rho\cos\theta, p_2 + \rho\operatorname{sen}\theta)\, d\theta$. La diferenciación bajo el signo de integral da

$$\frac{dI}{d\rho} = \int_0^{2\pi} \nabla u \cdot (\cos\theta, sen\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} \nabla u \cdot \mathbf{n}\, d\theta = \frac{1}{\rho}\int_{\partial B_\rho} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\, ds = \frac{1}{\rho}\int_{B_\rho} \nabla^2 u\, dA$$

(la última igualdad usa el ejercicio 22).

25. Usando el ejercicio 24,

$$\iint_{B_R} u\, dA = \int_0^R \int_0^{2\pi} u[\mathbf{p} + \rho(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)]\rho\, d\theta\, d\rho$$

$$= \int_0^R \left(\int_{\partial B_\rho} u\, ds \right) d\rho = \int_0^R 2\pi\rho u(\mathbf{p})\, d\rho = \pi R^2 u(\mathbf{p})$$

27. Suponer que u es subarmónica. Probamos las afirmaciones correspondientes al ejercicio 26(a) y (b). El argumento para funciones supraarmónicas es bastante parecido, pero con las desigualdades invertidas.

Suponer que $\nabla^2 u \geq 0$ y $u(\mathbf{p}) \geq u(\mathbf{q})$ para todo $\mathbf{q}$ en $B_R(\mathbf{p})$. Por el ejercicio 23, $I'(\rho) \geq 0$ para $0 < \rho \leq R$, de modo que en el ejercicio 24 se muestra que $2\pi u(\mathbf{p}) \leq I(\rho) \leq I(R)$ para $0 < \rho \leq R$. Si $u(\mathbf{q}) > u(\mathbf{p})$ para algún $\mathbf{q} = \mathbf{p} + \rho(\cos\theta_0, \operatorname{sen}\theta_0) \in B_R(\mathbf{p})$, entonces por continuidad, existe un arco $[\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta]$ en $\partial B_\rho(\mathbf{p})$ donde $u < u(\mathbf{p}) - d$ para alguna $d > 0$. Esto significaría que

$$2\pi u(\mathbf{p}) \leq I(\rho) = \frac{1}{\rho}\int_0^{2\pi} u[\mathbf{p} + \rho(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)]\rho\, d\theta$$

$$\leq (2\pi - 2\delta)u(\mathbf{p}) + 2\delta[u(\mathbf{p}) - d] \leq 2\pi u(\mathbf{p}) - 2\delta d.$$

Esta contradicción muestra que debemos tener $u(\mathbf{q}) = u(\mathbf{p})$ para todo $\mathbf{q}$ en $B_B(\mathbf{p})$.

Si el máximo en $\mathbf{p}$ es absoluto para D, en el último párrafo se muestra que $u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{p})$ para todo $\mathbf{x}$ en algún disco alrededor de $\mathbf{p}$. Si $\boldsymbol{\sigma}\colon [0,1) \to D$ es una trayectoria de $\mathbf{p}$ a $\mathbf{q}$, entonces $u(\boldsymbol{\sigma}(t)) = u(\mathbf{p})$ para todo t en algún intervalo $[0, b)$. Sea b_0 el mayor $b \in [0,1]$ tal que $u(\boldsymbol{\sigma}(t)) = u(\mathbf{p})$ para todo $t \in [0, b)$. (Hablando estrictamente, esto requiere la noción de mínima cota superior, de un buen libro de cálculo.) Como u es continua, $u(\boldsymbol{\sigma}(b_0)) = u(\mathbf{p})$. Si $b_0 \neq 1$, entonces el último párrafo se aplicaría a $\boldsymbol{\sigma}(b_0)$ y u es constantemente igual a $u(\mathbf{p})$ en un disco alrededor de $\boldsymbol{\sigma}(b_0)$. En particular, existe $\delta > 0$ tal que $u(\boldsymbol{\sigma}(t)) = u(\boldsymbol{\sigma}(b_0)) = u(\mathbf{p})$ en $[0, b_0 + \delta)$. Esto contradice la maximalidad de b_0, de modo que debemos tener $b_0 = 1$. Esto es, $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p})$. Como $\mathbf{q}$ era un punto arbitrario en D, u es constante en D.

29. Suponer que $\nabla u_1^2 = 0$ y $\nabla^2 u_2 = 0$ son dos soluciones. Sea $\phi = u_1 - u_2$. Entonces $\nabla^2\phi = 0$ y $\phi(x) = 0$ para todo $x \in \partial D$. Considerar la integral $\int_D \phi\nabla^2\rho = -\int_D \nabla_\rho \cdot \mathbf{v}\rho$. Así, $\int_D \nabla\phi \cdot \nabla\phi = 0$, lo cual implica que $\nabla\phi = \mathbf{0}$, de modo que ϕ es una función constante y por lo tanto debe ser idénticamente cero.

SECCIÓN 8.2

1. -2π

3. Cada integral en el teorema de Stokes es cero.

5. 0

7. $-4\pi/\sqrt{3}$

9. 0

11. 2π

13. Al usar la ley de Faraday, $\int_S [\nabla \times \mathbf{E} + \partial \mathbf{H}/\partial t] \cdot d\mathbf{S} = 0$ para cualquier superficie S. Si el integrando fuera un vector distinto de cero en algún punto, entonces por continuidad la integral sobre algún disco pequeño con centro en ese punto y manteniéndose perpendicular a ese vector, sería distinta de cero.

15. Las orientaciones de $\partial S_1 = \partial S_2$ deben concordar.

17. Suponer que C es un lazo cerrado sobre una superficie, trazado de manera que divide la superficie en dos piezas S_1 y S_2. Para la superficie de una dona (toro) se deben usar dos lazos cerrados; ¿pueden entender por qué? Entonces C acota tanto a S_1 como a S_2, pero con orientación positiva respecto a una y negativa respecto a otra. Por lo tanto,

$$\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_1} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_2} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} - \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

19. (a) Si $C = \partial S$, $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \nabla \times \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{0} \cdot d\mathbf{s} = 0$.

(b) $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}'(t)\, dt = \mathbf{v} \cdot \int_a^b \boldsymbol{\sigma}'(t)\, dt = \mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\sigma}(b) - \boldsymbol{\sigma}(a))$, donde $\boldsymbol{\sigma}\colon [a, b] \to \mathbf{R}^3$ es una parametrización de C. (La integral vectorial es aquel vector cuyas componentes son las integrales de las funciones componentes.) Si C es cerrada, la última expresión es 0.

21. Las dos integrales dan $\pi/4$.

23. (a) 0 (b) π (c) π

25. 20π

SECCIÓN 8.3

1. Si $\mathbf{F} = \nabla f = \nabla g$ y C es una curva de $\mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$, entonces $(f - g)(\mathbf{w}) - (f - g)(\mathbf{v}) = \int_C \nabla(f - g) \cdot d\mathbf{s} = 0$, de modo que $f - g$ es constante.

3. $x^2yz - \cos x + C$

5. $-1/\|\mathbf{r}_0\|$

7. No; $\nabla \times \mathbf{F} = (0, 0, x) \neq \mathbf{0}$.

9. $e \operatorname{sen} 1 + \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{3}$

11. 3.54×10^{29} ergs

13. (a) $f = x^2/2 + y^2/2 + C$. (b) $\mathbf{F}$ no es un campo gradiente.
(c) $f = \frac{1}{3}x^3 + xy^2 + C$.

15. Usando el Teorema 7 en cada caso.
(a) $-\frac{3}{2}$ (b) -1 (c) $\cos(e^2) - \cos(1/e)/e$

17. (a) No (b) $(\frac{1}{2}z^2, xy - z, x^2y)$ o $(\frac{1}{2}z^2 - 2xyz - \frac{1}{2}y^2, -x^2z - z, 0)$

19. $\frac{1}{3}(z^3\mathbf{i} + x^3\mathbf{j} + y^3\mathbf{k})$

21. $-(z \operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x, xz \cos y, 0)$ (Son posibles otras respuestas.)

23. (a) $\nabla \times \mathbf{F} = (0,0,2) \neq \mathbf{0}$.

(b) Sea $\boldsymbol{\sigma}(t)$ la trayectoria de un objeto en el fluido. Entonces $\mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}(t)) = \boldsymbol{\sigma}'(t)$. Sea $\boldsymbol{\sigma}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Entonces $x' = -y$, $y' = x$ y $z' = 0$, de modo que z es constante y el movimiento es paralelo al plano xy. Además $x'' + x = 0$, $y'' + y = 0$. Así, $x = A\cos t + B \operatorname{sen} t$ y $y = C\cos t + D \operatorname{sen} t$. Sustituyendo estos valores en $x' = -y$, $y' = x$, obtenemos $C = -B$, $D = A$, de modo que $x^2 + y^2 = A^2 + B^2$ y tenemos un círculo.

(c) En sentido contrario al que giran las manecillas del reloj.

25. (a) $\mathbf{F} = -\dfrac{GmM}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x,y,z)$;

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{F} &= -GmM\left[\frac{x^2+y^2+z^2-3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} + \frac{x^2+y^2+z^2-3y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right.\\ &\quad \left. + \frac{x^2+y^2+z^2-3z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right]\\ &= 0\end{aligned}$$

(b) Sea S la esfera unitaria, S_1 el hemisferio superior, S_2 el hemisferio inferior y C el círculo unitario. Si $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$, entonces

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s} - \int_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

Pero $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -GmM \int_S (\mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|^3) \cdot \mathbf{n}\, dS = -4\pi GmM$, pues $\|\mathbf{r}\| = 1$ y $\mathbf{r} = \mathbf{n}$ en S. Así, es imposible que $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$.

SECCIÓN 8.4

1. $$\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F})\, dV = \int_V \left[\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z}\right) + \left(\frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial z}\right)\right] dV.$$

Esto es 0 si $\mathbf{F}$ es de clase C^2, pues las segundas derivadas mixtas de sus funciones componentes son iguales.

3. 3

5. (a) 0 (b) $\frac{4}{15}$ (c) $-\frac{4}{15}$

7. Si $S = \partial\Omega$, entonces $\int_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}\, ds = \int_\Omega \nabla \cdot \mathbf{r}\, dV = \int_\Omega 3\, dV = 3\text{volumen}(\Omega)$.

9. 1

11. Aplicar el teorema de la divergencia a $f\boldsymbol{\Phi}$ usando $\nabla \cdot (f\boldsymbol{\Phi}) = \nabla f \cdot \boldsymbol{\Phi} + f \nabla \cdot \boldsymbol{\Phi}$.

13. Si $\mathbf{F} = \mathbf{r}/r^2$, entonces $\nabla \cdot \mathbf{F} = 1/r^2$. Si $(0,0,0) \notin \Omega$, el resultado se sigue del teorema de Gauss. Si $(0,0,0) \in \Omega$, calculamos la integral quitando una pequeña bola

$B_\epsilon = \{(x, y, z) \mid (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} < \epsilon\}$ alrededor del origen y después haciendo $\epsilon \to 0$:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{1}{r^2}\, dV &= \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\Omega\setminus B_\epsilon} \frac{1}{r^2}\, dV = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\partial(\Omega\setminus B_\epsilon)} \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{r^2}\, dS \\ &= \lim_{\epsilon\to 0} \left(\int_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{r^2}\, dS - \int_{\partial B_\epsilon} \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{r^2}\, dS \right) = \lim_{\epsilon\to 0} \left(\int_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{r^2}\, dS - 4\pi\epsilon \right) \\ &= \int_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{r^2}\, dS.\end{aligned}$$

La integral sobre ∂B_ϵ se obtiene con el teorema 10 (ley de Gauss), pues $r = \epsilon$ donde sea en B_ϵ.

15. Usar la fórmula 8 de la tabla 3.1 y el teorema de la divergencia para la parte (a). Usar la fórmula 18 para la parte (b).

17. (a) Si $\phi(\mathbf{p}) = \int_\Omega \rho(\mathbf{q})/(4\pi\|\mathbf{p}-\mathbf{q}\|)\, dV(\mathbf{q})$, entonces

$$\begin{aligned}\nabla\phi(\mathbf{p}) &= \textstyle\int_\Omega [\rho(\mathbf{q})/4\pi] \nabla_{\mathbf{p}}(1/\|\mathbf{p}-\mathbf{q}\|)\, dV(\mathbf{q}) \\ &= -\int_\Omega [\rho(\mathbf{q})/4\pi][(\mathbf{p}-\mathbf{q})/\|\mathbf{p}-\mathbf{q}\|^3]\, dV(\mathbf{q}),\end{aligned}$$

donde $\nabla_{\mathbf{p}}$ significa el gradiente respecto a las coordenadas de $\mathbf{p}$ y la integral es el vector cuyas componentes son las tres integrales componentes. Si $\mathbf{p}$ varía en $V \cup \partial V$ y $\mathbf{n}$ es la normal unitaria exterior a ∂V, podemos tomar el producto interior usando estas componentes y juntar las partes como

$$\nabla\phi(\mathbf{p})\cdot\mathbf{n} = -\int_\Omega \frac{\rho(\mathbf{p})}{4\pi} \frac{1}{\|\mathbf{p}-\mathbf{q}\|^3} (\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{n}\, dV(\mathbf{q}).$$

Así,

$$\int_{\partial V} \nabla\phi(\mathbf{p})\cdot\mathbf{n}\, dV(\mathbf{p}) = -\int_{\partial V} \left(\int_{\partial\Omega} \frac{\rho(\mathbf{q})}{4\pi} \frac{1}{\|\mathbf{p}-\mathbf{q}\|^3} (\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{n}\, d\mathbf{q} \right) dV(\mathbf{p}).$$

Esencialmente, hay aquí cinco variables de integración, tres que colocan a $\mathbf{q}$ en Ω y dos que colocan a $\mathbf{p}$ en ∂V. Usar el teorema de Fubini para obtener

$$\int_{\partial V} \nabla\phi\cdot\mathbf{n}\cdot\, dS = -\int_\Omega \frac{\rho(\mathbf{q})}{4\pi} \left[\int_{\partial V} \frac{(\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{n}}{\|\mathbf{p}-\mathbf{q}\|^3}\, dS(\mathbf{p}) \right] dV(\mathbf{q}).$$

Si V es una región de tipo IV, el teorema 10 dice que la integral interior es 4π si $\mathbf{q} \in V$ y 0 si $\mathbf{q} \notin V$. Así,

$$\int_{\partial V} \nabla\phi\cdot\mathbf{n}\, dS = -\int_{\Omega\cap V} \rho(\mathbf{q})\, dV(\mathbf{q}).$$

Como $\rho = 0$ fuera de Ω,

$$\int_{\partial V} \nabla\phi\cdot\mathbf{n}\, dS = -\int_V \rho(\mathbf{q})\, dV(\mathbf{q}).$$

Si V no es del tipo IV, subdividirla en una suma de dichas regiones. La ecuación se cumple en cada parte y, después de sumarlas, las integrales en la frontera a lo largo de fronteras interiores orientadas de manera apropiada se cancelan, dejando el resultado deseado.

(b) Por el teorema 9, $\int_{\partial V} \nabla\phi \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla^2\phi\, dV$, de modo que $\int_V \nabla^2\phi\, dV = -\int_V \rho\, dV$. Como tanto ρ como $\nabla^2\phi$ son continuas y esto se cumple para regiones arbitrariamente pequeñas, debemos tener $\nabla^2\phi = -\rho$.

19. Si la carga Q se esparce de manera uniforme sobre la esfera S de radio R con centro en el origen, la densidad de carga por unidad de área debe ser $Q/4\pi R^2$. Si $\mathbf{p}$ es un punto que no está en S y $\mathbf{q} \in S$, entonces la contribución al campo eléctrico en $\mathbf{p}$ debido a la carga cerca de $\mathbf{q}$ se dirige a lo largo del vector $\mathbf{p} - \mathbf{q}$. Como la carga está uniformemente distribuida, la componente tangencial de esta contribución se cancelará con la de un punto simétrico en el otro lado de la esfera a la misma distancia de $\mathbf{p}$. (Dibujar la figura.) El campo total resultante debe ser radial. Como S se ve igual desde cualquier punto a distancia $\|\mathbf{p}\|$ del origen, el campo debe depender sólo del radio, y ser de la forma $\mathbf{E} = f(r)\mathbf{r}$.

Si vemos la esfera Σ de radio $\|\mathbf{p}\|$, tenemos

$$\begin{aligned}(\text{carga dentro de } \Sigma) &= \int_\Sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_\Sigma f(\|\mathbf{p}\|)\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}\, dS \\ &= f(\|\mathbf{p}\|)\|\mathbf{p}\| \text{ área } \Sigma = 4\pi\|\mathbf{p}\|^3 f(\|\mathbf{p}\|).\end{aligned}$$

Si $\|\mathbf{p}\| < R$, no hay carga dentro de Σ; si $\|\mathbf{p}\| > R$, la carga dentro de Σ es Q, de modo que

$$\mathbf{E}(\mathbf{p}) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{Q}{\|\mathbf{p}\|^3}\mathbf{p} & \text{si} \quad \|\mathbf{p}\| > R \\ 0 & \text{si} \quad \|\mathbf{p}\| < R \end{cases}$$

21. Por el teorema 10, $\int_{\partial M} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi$ para cualquier superficie que encierre al origen. Pero si $\mathbf{F}$ fuera el rotacional de algún campo, entonces la integral sobre dicha superficie cerrada tendría que ser 0.

23. Si v_i es la i-ésima componente de un vector $\mathbf{v}$, entonces el ejercicio 22(b) da

$$\begin{aligned}\left[\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} f\mathbf{F}\, dx\, dy\, dz\right]_i &= \frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} (f\mathbf{F})_i\, dx\, dy\, dz = \frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} f\mathbf{F}_i\, dx\, dy\, dz \\ &= \int_{\Omega_t} \left[\frac{D(fF_i)}{Dt} + (fF_i)\operatorname{div}\mathbf{F}\right] dx\, dy\, dz \\ &= \int_{\Omega_t} \left[\frac{\partial}{\partial t}(fF_i) + \mathbf{D}_x(fF_i)\cdot\mathbf{F} + (f\mathbf{F}_i)\operatorname{div}\mathbf{F}\right] dx\, dy\, dz \\ &= \int_{\Omega_t} \left[\frac{\partial}{\partial t}(f\mathbf{F}_i) + \nabla(fF_i)\cdot\mathbf{F} + (fF_i)\operatorname{div}\right] dx\, dy\, dz \\ &= \int_{\Omega_t} \left\{\frac{\partial}{\partial t}(f\mathbf{F}) + [\mathbf{D}(f\mathbf{F})\mathbf{F}]_i + [(f\mathbf{F})\operatorname{div}\mathbf{F}]_i\right\} dx\, dy\, dt \\ &= \int_{\Omega_t} \left[\frac{\partial}{\partial t}(f\mathbf{F}) + \mathbf{D}(f\mathbf{F})\mathbf{F} + (f\mathbf{E})\operatorname{div}\mathbf{F}\right]_i dx\, dy\, dz \\ &= \left[\int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t}(f\mathbf{F}) + \mathbf{D}(f\mathbf{F}) + (f\mathbf{F})\operatorname{div}\mathbf{F}\, dx\, dy\, dz\right]_i \\ &= \left[\int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial}{\partial t}(f\mathbf{F}) + (\mathbf{F}\cdot\nabla)(f\mathbf{F}) + (f\mathbf{F})\operatorname{div}\mathbf{F}\right) dx\, dy\, dt\right]_i .\end{aligned}$$

SECCIÓN 8.5

1. (a) Por el ejercicio 22, sección 8.4,

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho\, dV = \int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_\rho \cdot \mathbf{V} + \rho \operatorname{div} \mathbf{V}\right) dV.$$

Por el teorema 11, la ley de conservación para $\mathbf{V}$ es equivalente a enunciar que el integrando de la derecha es idénticamente 0, lo cual implica que la integral de la izquierda es 0. Recíprocamente, si Ω es una región pequeña, también lo es Ω_t. Si las integrales de la derecha son 0 para todas las regiones suficientemente pequeñas, entonces el integrando debe ser 0 (por continuidad).

(b) Para cada tiempo t, el cambio de variables $(u, v, w) = \phi((x, y, z), t)$ da

$$\int_{\Omega_t} \rho(u, v, w, 0)\, dx\, dy\, dz = \int_{\Omega} \rho(x, y, z, t) \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}\, dx\, dy\, dz.$$

Por la parte (a), el lado izquierdo es constante en el tiempo y por lo tanto es igual a su valor en $t = 0$:

$$\int_{\Omega} \rho(x, y, z, 0)\, dx\, dy\, dz = \int_{\Omega} (x, y, z, t) J(x, y, z, t)\, dx\, dy\, dz.$$

Como esto se cumple para todas las regiones pequeñas, los integrandos deben ser iguales, por continuidad.

(c) Por el ejercicio 22, sección 8.4, $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$ implica $J(\mathbf{x}, t) = 1$. Aplicando esto a la parte (b), $\rho(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, 0)$. La densidad en cada punto es constante en el tiempo, de modo que $\partial\rho/\partial t = 0$ y la ley de conservación se convierte en $\mathbf{V} \cdot \nabla\rho = 0$. El flujo es perpendicular al gradiente de ρ, de modo que las líneas de flujo están en superficies de densidad constante.

3. (a) Como $\mathbf{V} = \nabla\phi$, $\nabla \times \mathbf{V} = \mathbf{0}$ y, por lo tanto, $(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} = \frac{1}{2}\nabla(\|\mathbf{V}\|^2)$, la ecuación de Euler se convierte en

$$-\frac{\nabla p}{\rho} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \frac{1}{2}\nabla(\|\mathbf{V}\|^2) = \nabla\left(\frac{d\phi}{dt} + \frac{1}{2}\|\mathbf{V}\|^2\right)$$

Si $\boldsymbol{\sigma}$ es una trayectoria de P_1 a P_2, entonces

$$-\int_{\boldsymbol{\sigma}} \frac{1}{\rho}\, dp = -\int \frac{1}{\rho} \nabla p \cdot \boldsymbol{\sigma}'(t)\, dt = \int_{\boldsymbol{\sigma}} \nabla\left(\frac{d\phi}{dt} + \frac{1}{2}\|\mathbf{V}\|^2\right) \cdot \boldsymbol{\sigma}'(t)\, dt$$

$$= \left(\frac{d\phi}{dt} + \frac{1}{2}\|\mathbf{V}\|^2\right)\Bigg|_{P_1}^{P_2}$$

(b) Si $d\mathbf{V}/dt = \mathbf{0}$ y ρ es constante, entonces $\frac{1}{2}\nabla(\|\mathbf{V}\|^2) = -(\nabla p)/\rho = -\nabla(p/\rho)$ y por lo tanto $\nabla(\frac{1}{2}\|\mathbf{V}\|^2 + p/\rho) = \mathbf{0}$.

5. Por la ley de Ampère, $\nabla \cdot \mathbf{J} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \nabla \cdot (\partial\mathbf{E}/\partial t) = -\nabla \cdot (\partial\mathbf{E}/\partial t) = -(\partial/\partial t)(\nabla \cdot \mathbf{E})$. Por la ley de Gauss esto es $-\partial\rho/\partial t$. Así, $\nabla \cdot \mathbf{J} + \partial\rho/\partial t = 0$.

7. (a) Si $\mathbf{x} \in S$, entonces $r''a/R = r$, de modo que $G = 0$. En general, $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ y $r'' = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, por lo tanto

$$G = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{R}{a}\frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}'\|} - \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}\right) \quad \text{y} \quad \nabla_{\mathbf{x}} G = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{R}{a}\frac{\mathbf{y}' - \mathbf{x}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}'\|^3} - \frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3}\right)$$

y $\nabla_{\mathbf{x}}^2 G = 0$ cuando $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, como en el análisis de la ecuación (15) ($\mathbf{x} \neq \mathbf{y}'$, pues $\mathbf{x}$ está adentro de la esfera y $\mathbf{y}'$ está afuera). El teorema 10 da $\nabla^2 G = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - (R/a)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}')$, pero el segundo término es siempre 0, pues $\mathbf{x}$ nunca es $\mathbf{y}'$. Por lo tanto $\nabla^2 G = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ para x y y en la esfera.

(b) Si $\mathbf{x}$ está en la superficie de S, entonces $\mathbf{n} = \mathbf{x}/R$ es la normal unitaria exterior, y

$$\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{R}{a}\nabla\left(\frac{1}{r''}\right)\cdot\mathbf{n} - \nabla\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\mathbf{n}\right] = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{R}{a}\frac{\mathbf{y}'-\mathbf{x}}{\|\mathbf{y}'-\mathbf{x}\|^3} - \frac{\mathbf{y}-\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^3}\right)\cdot\mathbf{n}.$$

Si γ es el ángulo entre $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$, entonces $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = r^2 = R^2 + a^2 - 2aR\cos\gamma$ y $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}'\|^2 = r''^2 = R^2 + b^2 - 2bR\cos\gamma = (R^2/a^2)r^2$. Entonces

$$\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} = \frac{1}{4\pi r^3}\left[\frac{R}{a}\frac{\mathbf{y}'-\mathbf{x}}{(R/a)^3} - (\mathbf{y}-\mathbf{x})\right]\cdot\mathbf{n}.$$

Pero $\mathbf{x}\cdot\mathbf{n} = R$ y $\mathbf{n} = \mathbf{x}/R$, de modo que esto se convierte en

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} &= \frac{1}{4\pi r^3}\left(\frac{a^2}{R^3}\mathbf{y}'\cdot\mathbf{x} - \frac{a^2}{R} - \frac{\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}}{R} + R\right)\\ &= \frac{1}{4\pi^3 R}\left(\frac{a^2}{R^2}\|\mathbf{y}'\|R\cos\gamma - \|\mathbf{y}\|R\cos\gamma + R^2 - a^2\right)\\ &= \frac{R^2-a^2}{4\pi R}\frac{1}{r^3} \quad \text{puesto que } \|\mathbf{y}'\| = R^2/a.\end{aligned}$$

Integrando sobre la superficie de la esfera,

$$\begin{aligned}u(\mathbf{y}) &= \int_S f\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}\,dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[f(\theta,\phi)\frac{R^2-a^2}{4\pi R}\frac{1}{r^3}R^2\operatorname{sen}\phi\right]d\phi\,d\theta\\ &= \frac{R(R^2-a^2)}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(\theta,\phi)\operatorname{sen}\phi\,d\phi\,d\theta}{(R^2+a^2-2aR\cos\gamma)^{3/2}}.\end{aligned}$$

9. (a) $\dot{u} = (d/ds)[u(x(s),t(s))] = u_x\dot{x} + u_t\dot{t} = u_x f'(u) + u_t = 0$.

(b) Si la curva característica $u(x,t) = c$ (según la parte (a)), definir t de manera implícita como función de x, entonces $u_x + u_t(dt/dx) = 0$. Pero además $u_t + f(u)_x = 0$, esto es, $u_t + f'(u)u_x = 0$. Estas dos ecuaciones juntas dan $dt/dx = 1/f'(u) = 1/f'(c)$. Por lo tanto la curva es una recta con pendiente $1/f'(c)$.

(c) Si $x_1 < x_2$, $u_0(x_1) > u_0(x_2) > 0$ y $f'(u(x_2)) > 0$, entonces $f'(u_0(x_1)) > f'(u_0(x_2)) > 0$, pues $f'' > 0$. La característica que pasa por $(x_1, 0)$ tiene pendiente $1/f'(u_0(x_1))$, que es menor que $1/f'(u_0(x_2))$, (la de la característica que pasa por $(x_2, 0)$). De modo que estas rectas se deben cruzar en un punto $\mathrm{P} = (\overline{x}, \overline{t})$ con $\overline{t} > 0$ y $\overline{x} > x_2$. La solución debe ser discontinua en P, pues estas dos rectas que se cruzan le darían ahí diferentes valores.

(d) $\overline{t} = (x_2 - x_1)/[f'(u_0(x_1)) - f'(u_0(x_2))]$.

11. (a) Como el "rectángulo" D no toca el eje x y $\phi = 0$ en ∂D y fuera de D, la ecuación (25) se convierte en

$$\iint [u\phi_t + f(u)\phi_x]\,dx\,dt = 0. \tag{i}$$

Como $(u\phi)_t + [f(u)\phi]_x = [u_t + f(u)_x]\phi + [u\phi_t + f(u)\phi_x]$, tenemos

$$\iint_{D_i} [u\phi_t + f(u)\phi_x]\,dx\,dt = \iint_{D_i} [(u\phi)_t + (f(u)\phi)_x]\,dx\,dt - \iint_{D_i} [u_t + f(u)_x]\phi\,dx\,dt.$$

Pero u es C^1 en el interior de D_i, y el ejercicio 10(b) dice que ahí, $u_t + f(u)_x = 0$. Así,

$$\iint_{D_i} [u\phi_t + f(u)\phi_x]\,dx\,dt = \iint_{D_i} [(u\phi)_t + (f(u)\phi)_x]\,dx\,dt. \qquad \text{(ii)}$$

(b) Por el teorema de Green,

$$\iint_{D_i} [(f(u)\phi)_x - (-u\phi)_t]\,dx\,dt = \int_{\partial D_i} [(-u\phi)\,dx + f(u)\phi\,dt],$$

y así la expresión (ii) se convierte en

$$\iint [u\phi_t + f(u)\phi_x]\,dx\,dt = \int_{\partial D_i} \phi[-u\,dx + f(u)\,dt]$$

Sumando lo anterior para $i = 1, 2$ y usando la expresión (i), se tiene

$$0 = \int_{\partial D_1} \phi[-u\,dx + f(u)\,dt] + \int_{\partial D_2} \phi[-u\,dx + f(u)\,dt]$$

La unión de estas dos fronteras recorre una vez ∂D y la parte de Γ dentro de D una vez en cada dirección, una vez con los valores u_1 y otra con los valores u_2. Como $\phi = 0$ fuera de D y en ∂D_2 esto se convierte en $0 = \int_\Gamma \phi\{[-u]\,dx + [f(u)]\,dt\}$.

(c) Como $\phi = 0$ fuera de D, la primera integral es la misma que la de la segunda conclusión de la parte (b). La segunda integral resulta de parametrizar la parte de Γ por $\alpha(t) = (x(t), t)$, $t_1 \le t \le t_2$.

(d) Si $[-u]s + [f(u)] = c > 0$ en P, entonces podemos escoger un disco pequeño B_ϵ con centro en P contenido en D (descrito anteriormente) tal que $[-u](dx/dt) + [f(u)] > c/2$ en la parte de Γ dentro de B_ϵ. Tomar ahora un disco un poco más pequeño $B_\delta \subset B_\epsilon$ con centro en P y escoger ϕ tal que $\phi \equiv 1$ en B_δ. $0 \le \phi \le 1$ en el anillo $B_\epsilon \backslash B_\delta$ y $\phi \equiv 0$ afuera de B_ϵ. Si $\alpha(t_0) = \mathrm{P}$, entonces hay t_3 y t_4 con $t_1 < t_3 < t_0 < t_4 < t_2$ y $\alpha(t) \in B_\delta$ para $t_3 < t < t_4$. Pero entonces

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi \left\{[-u]\frac{dx}{dt} + [f(u)]\right\} dt > \frac{c}{2}(t_4 - t_3) > 0,$$

contradiciendo el resultado de la parte (c). Un argumento similar (invirtiendo los signos) funciona si $c < 0$.

13. Al hacer $\mathrm{P} = g(u)\phi$ y $\mathrm{Q} = -f(u)\phi$, aplicando el teorema de Green en R rectangular y usando la función ϕ como en el ejercicio 10, se muestra que si u es una solución a $g(u)_t + f(u)_x = 0$, entonces

$$\iint_{t \ge 0} [g(u)\phi_t + f(u)\phi_x]\,dx\,dt + \int_{t=0} g(u_0(x))\phi(x, 0)\,dx = 0.$$

Ésta es la analogía apropiada de la ecuación (25), definiendo soluciones débiles de $g(u)_t + f(u)_x = 0$. Así, queremos u tal que

$$\iint_{t\geq 0} (u\phi_t + \tfrac{1}{2}u^2\phi_x)\,dx\,dt + \int_{t=0} u_0(x)\phi(x,0)\,dx = 0 \qquad \text{(i: \textit{débil})}$$

se cumpla para toda ϕ admisible, pero tal que

$$\iint_{t\geq 0} (\tfrac{1}{2}u^2\phi_t + \tfrac{1}{3}u^3\phi_x)\,dx\,dt + \int_{t=0} \tfrac{1}{2}u_0^2(x)\phi(x,0)\,dx = 0 \qquad \text{(ii: \textit{débil})}$$

no se cumpla para alguna ϕ admisible. El método del ejercicio 11 produce la condición de salto $s[g(u)] = [f(u)]$. Para (a), esto es $s(u_2 - u_1) = (\frac{1}{2}u_2^2 - \frac{1}{2}u_1^2)$ o

$$s = \tfrac{1}{2}(u_2 + u_1). \qquad \text{(i: \textit{salto})}$$

Para (b), es $s(\frac{1}{2}u_2^2 - \frac{1}{2}u_1^2) = (\frac{1}{3}u_2^3 - \frac{1}{3}u_1^3)$ o

$$s = \frac{2}{3}\frac{u_2^2 + u_1u_2 + u_1^2}{u_2 + u_1}. \qquad \text{(ii: \textit{salto})}$$

Si tomamos para $u_0(x)$ una función (de Heaviside) definida por $u_0(x) = 0$ para $x < 0$ y $u_0(x) = 1$ para $x > 0$, tendremos que considerar la función $u(x,t) = 0$ cuando $t > 2x$ y $u(x,t) = 1$ cuando $t \leq 2x$. Así, $u_1 = 1$, $u_2 = 0$, y la curva de discontinuidad Γ está dada por $t = 2x$. Entonces la condición de salto (i: *salto*) (i.e., $dx/dt = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$) se satisface.

Para cualquier ϕ particular, existen números T y a tales que $\phi(x,t) = 0$ para $x \geq a$ y $t \geq T$. Tomando como Ω la región $0 \leq x \leq a$ y $0 \leq t \leq T$, la condición (i: *débil*) se convierte en

$$\begin{aligned}
0 &= \iint_{\Omega} (\phi_t + \tfrac{1}{2}\phi_x)\,dx\,dt + \int_0^a \phi(x,0)\,dx \\
&= \int_{\partial\Omega} \left(-\phi\,dx + \frac{\phi}{2}\,dt\right) + \int_0^a \phi(x,0)\,dx \\
&= -\int_0^a \phi(x,0)\,dx + \int_0^{T/2} [-\phi(x,2x)(-dx) + \frac{1}{2}\phi(x,2x)(-2\,dx)] \\
&\quad + \int_0^a \phi(x,0)\,dx
\end{aligned}$$

Así, (i: *débil*) se satisface para toda ϕ y u es una solución débil de la ecuación (i). Sin embargo no se puede satisfacer (ii: *débil*) para toda ϕ, pues falla la condición (ii: *salto*). En efecto, si multiplicamos (ii: *débil*) por 2 e insertamos u, (ii: *débil*) se convierte en

$$0 = \iint_{\Omega} (\phi_t + \tfrac{2}{3}\phi_x)\,dx\,dt + \int_0^a \phi(x,0)\,dx.$$

El factor $\frac{1}{2}$ se ha cambiado a $\frac{2}{3}$ y el cálculo anterior se convierte ahora en

$$0 = -\frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \phi(x,2x)\,dx,$$

que, ciertamente, no se satisface para toda ϕ admisible.

15. Por ejemplo, escribir $|re^{i\theta} = z'|^2 = |re^{i\theta} - r'e^{i\theta'}|^2 = |re^{i(\theta-\theta')} - r'|^2$, usar $e^{i\phi} = \cos\phi + i \operatorname{sen}\phi$, $|z|^2 = z\bar{z}$ y multiplicar.

SECCIÓN 8.6

1. (a) $(2xy^2 - yx^3)\,dx\,dy$ (b) $(x^2 + y^2)\,dx\,dy$
(c) $(x^2 + y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz$ (d) $(xy + x^2)\,dx\,dy\,dz$
(e) $dx\,dy\,dz$

3. (a) $2xy\,dx + (x^2 + 3y^2)\,dy$ (b) $-(x + y^2 \operatorname{sen} x)\,dx\,dy$
(c) $-(2x + y)\,dx\,dy$ (d) $dx\,dy\,dz$
(e) $2x\,dx\,dy\,dz$ (f) $2y\,dy\,dz - 2x\,dz\,dx$
(g) $-\dfrac{4xy}{(x^2 + y^2)^2}\,dx\,dy$ (h) $2xy\,dx\,dy\,dz$

5. (a)
$$\begin{aligned}\operatorname{Forma}_2(\alpha\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2) &= \operatorname{Forma}_2(\alpha A_1 + A_2, \alpha B_1 + B_2, \alpha C_1 + C_2)\\ &= (\alpha A_1 + A_2)\,dy\,dz + (\alpha B_1 + B_2)\,dz\,dx\\ &\quad + (\alpha C_1 + C_2)\,dx\,dy\\ &= \alpha(A_1\,dy\,dz + B_1\,dz\,dx + C_1\,dx\,dy)\\ &\quad + (A_2\,dy\,dz + B_2\,dz\,dx + C_2\,dx\,dy)\\ &= \alpha\operatorname{Forma}_2(\mathbf{V}_1) + \operatorname{Forma}_2(\mathbf{V}_2)\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}d\omega &= \left(\frac{\partial A}{\partial x}\,dx + \frac{\partial A}{\partial y}\,dy + \frac{\partial A}{\partial z}\,dz\right) \wedge dx - A(dx)^2\\ &\quad + \left(\frac{\partial B}{\partial x}\,dx + \frac{\partial B}{\partial y}\,dy + \frac{\partial B}{\partial z}\,dz\right) \wedge dy - B(dy)^2\\ &\quad + \left(\frac{\partial C}{\partial x}\,dx + \frac{\partial C}{\partial y}\,dy + \frac{\partial C}{\partial z}\,dz\right) \wedge dz - C(dz)^2.\end{aligned}$$

Pero $(dx)^2 = (dy)^2 = (dz)^2 = dx \wedge dx = dy \wedge dy = dz \wedge dz = 0, dy \wedge dx = -dx \wedge dy, dz \wedge dy = -dy \wedge dz$ y $dx \wedge dz = -dz \wedge dx$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}d\omega &= \left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x}\right) dz\,dx + \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) dx\,dy\\ &= \operatorname{Forma}_2(\operatorname{rot}\mathbf{V}).\end{aligned}$$

7. Una 1-variedad orientada es una curva. Su frontera es un par de puntos que se pueden considerar una 0-variedad. Por lo tanto ω es una 0-forma o función, y $\int_{\partial M} d\omega = \omega(b) - \omega(a)$ si la curva M va de a a b. Más aún, $d\omega$ es la 1-forma $(\partial\omega/\partial x)\,dx + (\partial\omega/\partial y)\,dy$. Por lo tanto $\int_M d\omega$ es la integral de línea $\int_M (\partial\omega/\partial x)\,d\omega + (\partial\omega/\partial y)\,dy = \int_M \nabla\omega \cdot d\mathbf{s}$. Obtenemos así el teorema 3 de la sección 7.2, $\int_M \nabla\omega \cdot d\mathbf{s} = \omega(b) - \omega(a)$.

9. Poner $\omega = F_1\,dx\,dy + F_2\,dy\,dz + F_3\,dz\,dx$. La integral se convierte en

$$\int_{\partial T} \omega = \int_T d\omega = \int_T \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} + \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial y}\right) dx\,dy\,dz.$$

(a) 0. (b) 40.

11. Considerar $\omega = x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy$. Calcular que $d\omega = 3\,dx\,dy\,dz$, de modo que $\frac{1}{3}\int_{\partial R}\omega = \frac{1}{3}\int_R d\omega = \int_R dx\,dy\,dz = v(R)$.

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 8

1. (a) $2\pi a^2$ (b) 0

3. 0

5. (a) $f = x^4/4 - x^2y^3$ (b) $-\frac{1}{4}$

7. (a) Verificar que $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. (b) $f = 3x^2y\cos z$. (c) 0.

9. $\frac{23}{6}$

11. No; $\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{a}$.

13. (a) $\nabla f = 3ye^{z^2}\mathbf{i} + 3xe^{z^2}\mathbf{j} + 6xyze^{z^2}\mathbf{k}$. (b) 0. (c) Los dos lados son 0.

15. $8\pi/3$

17. $\pi a^2/4$

19. 21

21. (a) $\mathbf{G}$ es conservativo; $\mathbf{F}$ no.

(b) $\mathbf{G} = \nabla\phi$ si $\phi = (x^4/4) + (y^4/4) - \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{1}{2}z^2 + C$, donde C es cualquier constante.

(c) $\int_\alpha \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = 0$; $\int_\alpha \mathbf{G}\cdot d\mathbf{s} = -\frac{1}{2}$; $\int_\beta \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{3}$; $\int_\beta \mathbf{G}\cdot d\mathbf{s} = -\frac{1}{2}$.

23. Usar los resultados de la página 537.

página en blanco

DERIVADAS

1. $\dfrac{dau}{dx} = a\dfrac{du}{dx}$
2. $\dfrac{d(u+v)}{dx} = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}$
3. $\dfrac{d(uv)}{dx} = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$
4. $\dfrac{d(u/v)}{dx} = \dfrac{v(du/dx) - u(dv/dx)}{v^2}$
5. $\dfrac{d(u^n)}{dx} = nu^{n-1}\dfrac{du}{dx}$
6. $\dfrac{d(u^v)}{dx} = vu^{v-1}\dfrac{du}{dx} + u^v(\log u)\dfrac{dv}{dx}$
7. $\dfrac{d(e^u)}{dx} = e^u\dfrac{du}{dx}$
8. $\dfrac{d(e^{au})}{dx} = ae^{au}\dfrac{du}{dx}$
9. $\dfrac{da^u}{dx} = a^u(\log a)\dfrac{du}{dx}$
10. $\dfrac{d(\log u)}{dx} = \dfrac{1}{u}\dfrac{du}{dx}$
11. $\dfrac{d(\log_a u)}{dx} = \dfrac{1}{u(\log a)}\dfrac{du}{dx}$
12. $\dfrac{d\,\mathrm{sen}\,u}{dx} = \cos u\dfrac{du}{dx}$
13. $\dfrac{d\cos u}{dx} = -\,\mathrm{sen}\,u\dfrac{du}{dx}$
14. $\dfrac{d\tan u}{dx} = \sec^2 u\dfrac{du}{dx}$
15. $\dfrac{d\cot u}{dx} = -\csc^2 u\dfrac{du}{dx}$
16. $\dfrac{d\sec u}{dx} = \tan u\sec u\dfrac{du}{dx}$
17. $\dfrac{d\csc u}{dx} = -(\cot u)(\csc u)\dfrac{du}{dx}$
18. $\dfrac{d\,\mathrm{arcsen}\,u}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\dfrac{du}{dx}$
19. $\dfrac{d\arccos u}{dx} = \dfrac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\dfrac{du}{dx}$
20. $\dfrac{d\arctan u}{dx} = \dfrac{1}{1+u^2}\dfrac{du}{dx}$
21. $\dfrac{d\,\mathrm{arccot}\,u}{dx} = \dfrac{-1}{1+u^2}\dfrac{du}{dx}$
22. $\dfrac{d\,\mathrm{arcsec}\,u}{dx} = \dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx}$
23. $\dfrac{d\,\mathrm{arccsc}\,u}{dx} = \dfrac{-1}{\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx}$
24. $\dfrac{d\,\mathrm{senh}\,u}{dx} = \cosh u\dfrac{du}{dx}$
25. $\dfrac{d\cosh u}{dx} = \mathrm{senh}\,u\dfrac{du}{dx}$
26. $\dfrac{d\tanh u}{dx} = \mathrm{sech}^2 u\dfrac{du}{dx}$
27. $\dfrac{d\coth u}{dx} = -(\mathrm{csch}^2 u)\dfrac{du}{dx}$
28. $\dfrac{d\,\mathrm{sech}\,u}{dx} = -(\mathrm{sech}\,u)(\tanh u)\dfrac{du}{dx}$
29. $\dfrac{d\,\mathrm{csch}\,u}{dx} = -(\mathrm{csch}\,u)(\coth u)\dfrac{du}{dx}$
30. $\dfrac{d\,\mathrm{senh}^{-1} u}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}\dfrac{du}{dx}$
31. $\dfrac{d\cosh^{-1} u}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx}$
32. $\dfrac{d\tanh^{-1} u}{dx} = \dfrac{1}{1-u^2}\dfrac{du}{dx}$
33. $\dfrac{d\coth^{-1} u}{dx} = \dfrac{1}{u^2-1}\dfrac{du}{dx}$
34. $\dfrac{d\,\mathrm{sech}^{-1} u}{dx} = \dfrac{-1}{u\sqrt{1-u^2}}\dfrac{du}{dx}$
35. $\dfrac{d\,\mathrm{csch}^{-1} u}{dx} = \dfrac{-1}{|u|\sqrt{1+u^2}}\dfrac{du}{dx}$

INTEGRALES (PUEDE SUMARSE UNA CONSTANTE ARBITRARIA A CADA INTEGRAL)

1. $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} \quad (n \neq -1)$

2. $\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x|$

3. $\int e^x\,dx = e^x$

4. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a}$

5. $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x$

6. $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$

7. $\int \tan x\,dx = -\log|\cos x|$

8. $\int \cot x\,dx = \log|\operatorname{sen} x|$

9. $\int \sec x\,dx = \log|\sec x + \tan x| = \log|\tan(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\pi)|$

10. $\int \csc x\,dx = \log|\csc x - \cot x| = \log|\tan\frac{1}{2}x|$

11. $\int \operatorname{arcsen}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{arcsen}\frac{x}{a} + \sqrt{a^2 - x^2} \quad (a > 0)$

12. $\int \arccos\frac{x}{a}\,dx = x\arccos\frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} \quad (a > 0)$

13. $\int \arctan\frac{x}{a}\,dx = x\arctan\frac{x}{a} - \frac{a}{2}\log(a^2 + x^2) \quad (a > 0)$

14. $\int \operatorname{sen}^2 mx\,dx = \frac{1}{2m}(mx - \operatorname{sen} mx\cos mx)$

15. $\int \cos^2 mx\,dx = \frac{1}{2m}(mx + \operatorname{sen} mx\cos mx)$

16. $\int \sec^2 x\,dx = \tan x$

17. $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x$

18. $\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} x\cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx$

19. $\displaystyle\int \cos^n x\,dx = \frac{\cos^{n-1} x \operatorname{sen} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx$

20. $\displaystyle\int \tan^n x\,dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x\,dx \quad (n \neq 1)$

21. $\displaystyle\int \cot^n x\,dx = -\frac{\cot^{n-1} x}{n-1} - \int \cot^{n-2} x\,dx \quad (n \neq 1)$

22. $\displaystyle\int \sec^n x\,dx = \frac{\tan x \sec^{n-2} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x\,dx \quad (n \neq 1)$

23. $\displaystyle\int \csc^n x\,dx = -\frac{\cot x \csc^{n-2} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} x\,dx \quad (n \neq 1)$

24. $\displaystyle\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x$

25. $\displaystyle\int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x$

26. $\displaystyle\int \tanh x\,dx = \log|\cosh x|$

27. $\displaystyle\int \coth x\,dx = \log|\operatorname{senh} x|$

28. $\displaystyle\int \operatorname{sech} x\,dx = \arctan(\operatorname{senh} x)$

29. $\displaystyle\int \operatorname{csch} x\,dx = \log\left|\tanh\frac{x}{2}\right| = -\frac{1}{2}\log\frac{\cosh x + 1}{\cosh x - 1}$

30. $\displaystyle\int \operatorname{senh}^2 x\,dx = \frac{1}{4}\operatorname{senh} 2x - \frac{1}{2}x$

31. $\displaystyle\int \cosh^2 x\,dx = \frac{1}{4}\operatorname{senh} 2x + \frac{1}{2}x$

32. $\displaystyle\int \operatorname{sech}^2 x\,dx = \tanh x$

33. $\displaystyle\int \operatorname{senh}^{-1}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{senh}^{-1}\frac{x}{a} - \sqrt{x^2 + a^2} \quad (a > 0)$

34. $\displaystyle\int \cosh^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \begin{cases} x\cosh^{-1}\dfrac{x}{a} - \sqrt{x^2 - a^2} & \left[\cosh^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right) > 0, a > 0\right] \\ x\cosh^{-1}\dfrac{x}{a} + \sqrt{x^2 - a^2} & \left[\cosh^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right) < 0, a > 0\right] \end{cases}$

35. $\displaystyle\int \tanh^{-1}\frac{x}{a}\,dx = x\tanh^{-1}\frac{x}{a} + \frac{a}{2}\log|a^2 - x^2|$

36. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}\,dx = \log(x + \sqrt{a^2 + x^2}) = \operatorname{senh}^{-1}\frac{x}{a} \quad (a > 0)$

37. $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} \quad (a>0)$

38. $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x}{a} \quad (a>0)$

39. $\displaystyle\int (a^2-x^2)^{3/2}\,dx = \frac{x}{8}(5a^2-2x^2)\sqrt{a^2-x^2} + \frac{3a^4}{8}\operatorname{arcsen}\frac{x}{a} \quad (a>0)$

40. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen}\frac{x}{a} \quad (a>0)$

41. $\displaystyle\int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right|$

42. $\displaystyle\int \frac{1}{(a^2-x^2)^{3/2}}\,dx = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}$

43. $\displaystyle\int \sqrt{x^2\pm a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\log|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|$

44. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \log|x+\sqrt{x^2-a^2}| = \cosh^{-1}\frac{x}{a} \quad (a>0)$

45. $\displaystyle\int \frac{1}{x(a+bx)}\,dx = \frac{1}{a}\log\left|\frac{x}{a+bx}\right|$

46. $\displaystyle\int x\sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2(3bx-2a)(a+bx)^{3/2}}{15b^2}$

47. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a+bx}}{x}\,dx = 2\sqrt{a+bx} + a\int \frac{1}{x\sqrt{a+bx}}\,dx$

48. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{a+bx}}\,dx = \frac{2(bx-2a)\sqrt{a+bx}}{3b^2}$

49. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{a+bx}}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a}}\log\left|\dfrac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}\right| & (a>0) \\[2ex] \dfrac{2}{\sqrt{-a}}\arctan\sqrt{\dfrac{a+bx}{-a}} & (a<0) \end{cases}$

50. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\,dx = \sqrt{a^2-x^2} - a\log\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|$

51. $\displaystyle\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{3/2}$

52. $\displaystyle\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^4}{8}\operatorname{arcsen}\frac{x}{a} \cdot \quad (a>0)$

53. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = -\frac{1}{a}\log\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|$

54. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = -\sqrt{a^2-x^2}$

55. $$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x}{a} \quad (a>0)$$

56. $$\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}\,dx = \sqrt{x^2+a^2} - a\log\left|\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right|$$

57. $$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx = \sqrt{x^2-a^2} - a\arccos\frac{a}{|x|}$$
$$= \sqrt{x^2-a^2} - \operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{a}\right) \quad (a>0)$$

58. $$\int x\sqrt{x^2\pm a^2}\,dx = \frac{1}{3}(x^2\pm a^2)^{3/2}$$

59. $$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \frac{1}{a}\log\left|\frac{x}{a+\sqrt{x^2+a^2}}\right|$$

60. $$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \frac{1}{a}\arccos\frac{a}{|x|} \quad (a>0)$$

61. $$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2\pm a^2}}\,dx = \mp\frac{\sqrt{x^2\pm a^2}}{a^2x}$$

62. $$\int \frac{x}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\,dx = \sqrt{x^2\pm a^2}$$

63. $$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\log\left|\dfrac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right| & (b^2>4ac) \\[2ex] \dfrac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\arctan\dfrac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} & (b^2<4ac) \end{cases}$$

64. $$\int \frac{x}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{1}{2a}\log|ax^2+bx+c| - \frac{b}{2a}\int\frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx$$

65. $$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a}}\log|2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}| & (a>0) \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{-a}}\operatorname{arcsen}\dfrac{-2ax-b}{\sqrt{b^2-4ac}} & (a<0) \end{cases}$$

66. $$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{2ax+b}{4a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{4ac-b^2}{8a}\int\frac{1}{\sqrt{ax^2+b+c}}\,dx$$

67. $$\int \frac{x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{a} - \frac{b}{2a}\int\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

68. $$\int \frac{1}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \begin{cases} \dfrac{-1}{\sqrt{c}}\log\left|\dfrac{2\sqrt{c}\sqrt{ax^2+bx+c}+bx+2c}{x}\right| & (c>0) \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{-c}}\operatorname{arcsen}\dfrac{bx+2c}{|x|\sqrt{b^2-4ac}} & (c<0) \end{cases}$$

69. $$\int x^3\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \left(\frac{1}{5}x^2 - \frac{2}{15}a^2\right)\sqrt{(a^2+x^2)^3}$$

70. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{x^4}\,dx = \frac{\mp\sqrt{(x^2 \pm a^2)^3}}{3a^2x^3}$

71. $\displaystyle\int \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx\,dx = \frac{\operatorname{sen}(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\operatorname{sen}(a+b)x}{2(a+b)} \quad (a^2 \neq b^2)$

72. $\displaystyle\int \operatorname{sen} ax \cos bx\,dx = -\frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} \quad (a^2 \neq b^2)$

73. $\displaystyle\int \cos ax \cos bx\,dx = \frac{\operatorname{sen}(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\operatorname{sen}(a+b)x}{2(a+b)} \quad (a^2 \neq b^2)$

74. $\displaystyle\int \sec x \cot x \tan x\,dx = \sec x$

75. $\displaystyle\int \csc x\,dx = -\csc x$

76. $$\int \cos^m x \operatorname{sen}^n x\,dx = \frac{\cos^{m-1} x \operatorname{sen}^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \cos^{m-2} x \operatorname{sen}^n x\,dx$$
$$= -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} x \cos^{m+1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \cos^m x \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx$$

77. $\displaystyle\int x^n \operatorname{sen} ax\,dx = -\frac{1}{a}x^n \cos ax + \frac{n}{a}\int x^{n-1}\cos ax\,dx$

78. $\displaystyle\int x^n \cos ax\,dx = \frac{1}{a}x^n \operatorname{sen} ax - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\operatorname{sen} ax\,dx$

79. $\displaystyle\int x^n e^{ax}\,dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx$

80. $\displaystyle\int x^n \log ax\,dx = x^{n+1}\left[\frac{\log ax}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right]$

81. $\displaystyle\int x^n(\log ax)^m\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}(\log ax)^m - \frac{m}{n+1}\int x^n(\log ax)^{m-1}\,dx$

82. $\displaystyle\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx = \frac{e^{ax}(a \operatorname{sen} bx - b\cos bx)}{a^2+b^2}$

83. $\displaystyle\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}(b \operatorname{sen} bx + a\cos bx)}{a^2+b^2}$

84. $\displaystyle\int \operatorname{sech} x \tanh x\,dx = -\operatorname{sech} x$

85. $\displaystyle\int \operatorname{csch} x \coth x\,dx = -\operatorname{csch} x$

ÍNDICE DE SÍMBOLOS

LOS SÍMBOLOS SE LISTAN EN ORDEN DE APARICIÓN

SÍMBOLO	NOMBRE
$\mathbf{R}$	números reales xii
$\mathbf{Q}$	números racionales xii
$[a, b]$	intervalo cerrado $\{x \mid a \leq x \leq b\}$ xii
(a, b)	intervalo abierto $\{x \mid a < x < b\}$ xiii
$[a, b)$	intervalo semi-abierto $\{x \mid a \leq x < b\}$ xiii
$(a, b]$	intervalo semi-abierto $\{x \mid a < x \leq b\}$ xiii
$\lvert a \rvert$	valor absoluto de a xiii
$\mathbf{R}^n$	espacio n-dimensional 3
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$	base usual en $\mathbf{R}^3$ 9
$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$	producto interior de dos vectores 21
$\lVert \cdot \rVert$	norma de un vector 22
$\mathbf{v} \times \mathbf{w}$	producto cruz 34
(r, θ, z)	coordenadas cilíndricas 48
(ρ, θ, ϕ)	coordenadas esféricas 52
$D_r(\mathbf{x}_0)$	disco de radio r con centro $\mathbf{x}_0$ 95
$\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{b}}$	límite cuando $\mathbf{x}$ tiende a $\mathbf{b}$ 101
$\lim\limits_{x \to b^-}$	límite por la izquierda 117
$\dfrac{\partial f}{\partial x}$	derivada parcial 119
$\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$	derivada de f en $\mathbf{x}_0$ 125
∇f	grad f, gradiente de f 127
C^1	continuamente diferenciable 129
C^2	dos veces continuamente diferenciable 158
σ	una trayectoria 190
∇	del, nabla 220
$\nabla \times \mathbf{F}$	rot $\mathbf{F}$, rotacional 220
$\nabla \cdot \mathbf{F}$	div $\mathbf{F}$, divergencia 225
∇^2	laplaciano 226
$Hf(x_0)$	hessiano 252
$\int_D f\, dA = \int_D f(x, y)\, dx\, dy$	integral doble 304
$\int_W f\, dV = \int_W f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$	integral triple 356
$\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ o J	*jacobiano* 372
$\int_C f\, ds$	integral de trayectoria 414
$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$	integral de línea 421
σ_{op}	trayectoria opuesta 426
$\int_S f\, dS$	integral escalar de superficie 464
$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds$	integral vectorial de superficie (*flujo*) 472

página en blanco

ÍNDICE DE MATERIAS

aceleración, 196
aditividad de la integral, 319–320, 349–351
Alembert, J.L. d', 165
Ampère, ley de, 435–436
Análisis Vectorial, 18
análisis vectorial, 490–580
  aplicaciones a física, 544–551
  aplicaciones a las ecuaciones diferenciales, 552-559
  identidades comunes en, 231
ángulo entre dos vectores, 23–24
anticonmutatividad del producto exterior, 574
antiderivada, 320
aproximación lineal
  buena, 124
  la mejor, 125
área
  de superficie 449–460
    e integrales impropias, 454–457
    en términos de sumas de Riemann, 450–451
    lateral, 455–457
  de una esfera, 454–455
  de una helicoide, 452–454
  de una sección transversal, 306
  de un paralelogramo, 37–38
  de un triángulo, 38–39
asociatividad
  de la multiplicación de matrices, 66
  del producto exterior, 574
  en $\mathbf{R}^3$, 4
atmósfera inestable, 187
axioma de plenitud para los números reales, 344

Bernoulli, J., 165
Bernoulli, ley de, 560
bola abierta, 95
buena aproximación, 124

cálculo integral, teorema fundamental del, 320
cálculo, teorema fundamental del, 320, 429–430
cambio del orden en la integración, 336–340
cambio de variables
  en coordenadas cilíndricas, 384
  en coordenadas esféricas, 384–385
  en coordenadas polares, 375–376, 380–383
  método del, 236
  para integrales dobles, 376–383
  para integrales triples, 383–384
  teorema del, 371–386
campo
  conservativo, 429–430, 517–526
  de fuerza gravitacional, 213–214
  de fuerza, trabajo realizado por un, 419–421
  de potencial, 291–294
  de velocidad de la energía (razón de flujo del calor), 212, 213
  de velocidad de un fluido, 76–77, 212, 216
  de velocidad de un fluido, razón de flujo de un, 479
  eléctrico, 549
  electromagnético, 549–551
  escalar, 211
  gradiente, 151–153, 215, 429–430, 517–518
    propiedades del, 231–237
campo vectorial, 211–219
  cálculos con un, fórmulas para los, 231
  campos escalares componentes de un, 211
  circulación de un, 513, 520
  clase de un, 211
  curvas solución generadas por computador de un, 217, 218

definición de, 211, 212
de movimiento circular, 214–215
divergencia de un, 225–228
divergencia y rotacional de un, 225
flujo de un, 218–219
fuente de un, 537
geometría de la divergencia de un, 226–228
potencial para un, 521
propiedades de la divergencia de un, 231–237
razón de flujo de un, 479–481
rotacional de un, 220–226
sumidero para un, 537
campo vectorial
circular, 214–215
como función, 211–212
conservativo, 429–430, 517–526
constante, 584
de carga 215, 216
de energía, 212, 213
de flujo de calor, 212, 213
de la razón del flujo del calor, 212, 213
de potencial, 291–294
de Poynting, 565
de rotación, 214
de velocidad de la energía (razón del flujo del calor), 212, 213
de velocidad de un fluido, 76–77, 212, 216, 479
razón de flujo de un, 479
electromagnético, 549–551
gradiente, 151–153, 215, 429–430, 517–518
propiedades del, 231–237
gravitacional, 213–214
irrotacional, 223–225, 521
rotacional, 223–225
sin divergencia, 537
Cantor, G., 344
cara, 529
carga,
campo vectorial de, 215, 216
distribución de, 540
carga y flujo, 481
Cauchy, A., 34, 326, 344, 348, 458
Cauchy-Riemann, ecuación de, 471
Cauchy-Schwarz, desigualdad de, 25, 59–60
Cauchy, sucesión de, 344–348
Cavalieri, B., 308
Cavalieri, principio de, 306
CBS, desigualdad de, 25, 59–60
centro de gravedad de una superficie, 470
centro de masa, 390–394
cicloide, 193
longitud de arco de la, 202–203
circulación de un campo vectorial, 513, 520
círculo
longitud de arco de un, 201–202
unitario, 191
y fuerza centrípeta, 198
Cobb-Douglas, función de producción de, 298
componente
x, 1
y, 1
composición, 110–111
composición de funciones, 190
diferenciación de, 131, 133–136
condición de salto, 562, 563
condiciones laterales, 265
conductividad, 212
constante de, 548
conjunto
abierto, 95–99
acotado, 259, 342
cerrado, 259, 342
de nivel, 78–79
notación para, xiii–xiv
conservación de masa, ley de, 544–545
constante gravitacional, 201
continuidad, 106–110, 170–171
definición de, 107, 115, 170
en el sentido de Hölder, 118
en el sentido de Lipschitz, 118
uniforme, 342–343
vs. continuidad uniforme, 342
y diferenciabilidad, 128, 172–174
contradominio, xiv
coordenadas
cartesianas (rectangulares), 1, 47, 49–50
cilíndricas, 47–50
operaciones vectoriales en, 234–235
y teorema del cambio de variables, 384
esféricas, 51–55
operaciones vectoriales en, 234–235
y teorema del cambio de variables, 384–386
geográficas, 52
polares, 47–48
y teorema del cambio de variables, 375–376, 380–383
rectangulares, 1, 47, 49–50
correspondencia, xiv, 62–63
campo escalar como una, 211
campo vectorial como una, 211–212
como trayectoria, 190–191
de contorno, 79
de $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}^2$, geometría de una, 364–370
derivada de una, 139
lineal, 63

Coulomb, ley de, 156, 215, 482
Cramer, G., 33-34
Cramer, regla de, 34
criterio de la segunda derivada
  para extremos, 251–261
  para un extremo restringido, 272–278
cuádrica, semiejes mayor y menor de una, 294
cuaterniones, 18
curva
  característica, 561
  cerrada, 431
    simple, 431
  componentes de una, 433–434
  con rapidez unitaria, 209
  de nivel, 78–85
  de una trayectoria, 190–193
  dirigida simple, 431
  frontera, 505
  integral, 216–218
  longitud de arco de una, 201–207
  parametrización de una, 430–435
  puntos extremos de una, 431
  simple, 430–431
    orientada (dirigida), 431
  trayectoria integral sobre una, 416–417
  vector tangente a una, 137–139
curvas frontera, 505
curvatura, 209

d'Alembert, J., 165
deformación, 364, 367
derivada
  de una trayectoria, 193
  direccional, 147–148
  material, 220
  notación para la, xiv, 125
  parcial, 119–122, 171–172
    iterada, 157–161
    mixta, 157–160
  propiedades de la, 131–141
derivadas parciales
  matriz de, 126, 171–172
  mixtas, 157–160
desigualdad triangular, 59–60
  relativista, 210–211
determinante, 30–34, 65
  jacobiano, 372–375, 383–384
Dieterici, ecuación de, 144
diferenciabilidad, 118–129, 176–177
  definición de, 119–125, 171
  y continuidad, 128, 172–174
diferenciación, 118–129
  de funciones compuestas, 131, 133–136
  técnica, teorema de, 168-177
diferencial, 125
difusividad, 549
dipolo, 73
Dirac, función delta de, 552
Dirichlet,
  funcional de, 471
  problema de, 555
Dirichlet Green, función de, 555
disco abierto, 95–99
discontinuidad, 108
  rapidez de, 563
discriminante, 256
distancia
  de un punto a un plano, 42–43
  en el n-espacio, 60
  notación para la, xiii
distributividad del producto exterior, 574
divergencia, 537
  de un campo vectorial, 225–228
  en coordenadas polares y cilíndricas, 540–541
  geometría de la, 226–228
  propiedades de la, 231–237
  y rotacional, 225
Douglas, Jesse, 460

ecuación
  de calor, 163–164, 548–549
  de conservación, 544–545
  de Dieterici, 144
  de Euler para un fluido perfecto, 546–547
  de Korteweg–de Vries, 160–161
  de Laplace, 164–165, 238
  de Maxwell, 549–551
  de onda, 165
  de onda no homogénea, 551
  de Poisson, 164–165, 543
  de Poisson, método de la función de Green para la, 552–559
  de potencial, 164–165
  de transporte, 543
  de una recta, 11–14
  del plano, 39–43
  diferencial, 197
  solución débil de una, 562
ecuaciones diferenciales, 197
  parciales, 163–165
  y análisis vectorial, 552–559
ecuaciones en forma de divergencia, 562
eigenvalor, 279
eigenvector, 279
eje
  x, 1
  y, 1
  z, 1
elemento
  cero, 4
  de área, 376

energía
campo vectorial de, 212, 213
cinética, 291
potencial gravitacional, 522
vector de flujo de, 548
enteros, xii
épsilon-delta, enfoque, para límites, 101, 111–115, 168
equilibrio, posición de, 291–294
espacio
euclidiano,
geometría del, 1–74
n-dimensional, 57–66
tridimensional, 1–18
notación para, 3
Euler
ecuación de, para un fluido perfecto, 546–547
teorema de, 159, 183
Euler, L., 159, 164, 199, 248, 457, 548
extremo
aplicaciones de métodos matemáticos para un, 291–297
como punto crítico, 249–250
con restricciones, 265–278
criterio de la segunda derivada para detectar un, 251–261, 272–278
de una curva, 431
estricto, 253
localización de un, 250
local (relativo), 248, 249
restringido, 265–278
criterio de la segunda derivada para un, 272–278
geometría de un, 266–272
extremos
geometría de los, 266–272
puntos, 9–10

Faraday, ley de, 480, 514
Faraday, M., 458
fluido
campo vectorial de velocidad de un, 76–77, 212, 216
incompresible, 537
perfecto, ecuación de Euler para un, 546–547
flujo
de calor, 480–481
de un campo vectorial, 218–219
de un fluido, 544–548
razón de, 479
de un fluido y ecuación de continuidad, 546
forma diferencial
0-, 566–567
1-, 567
2-, 568–569
3-, 569
formas, 566–567
1, 567
2, 568–569
3, 566–567
álgebra de, 573–580
diferenciación de, 575–578
diferenciales, 422, 566–580
anticonmutatividad de, 574
de grado 2, 568–569
de grado 3, 569
de grado 1, 567
diferenciación de, 575–578
distributividad de las, 574
multiplicación de, 573–580
producto exterior de, 574
propiedades de las, 574
y el teorema de Gauss, 579–580
y el teorema de Green, 578–579
y el teorema de Stokes, 579, 580
fórmula de Taylor
de primer orden, 243
de segundo orden, 243–244
de tercer orden, 246
Fourier, Joseph, 163–164
Fourier, series de, 163–164
Frenet, fórmulas de, 210
frontera, 329
2 y 3-variedades orientadas con, 580
Fubini, G., 326
Fubini, teorema de, 322-326
para integrales impropias, 404
fuente de un campo vectorial, 537
fuerza
centrípeta, 198, 293ss
momento de una, 46
función
acotada, 180, 318
analítica, 247
armónica, 165, 264, 503
buena aproximación de una, 124
C^1, 129, 157
C^2, 157
C^3, 157
componente, 190
compuesta, 110–111
diferenciación de una, 131, 133–136
extremo de una. *Ver* extremo, geometría de un, 75–93
continua, 106–110, 170–171
en el sentido de Hölder, 118
en el sentido de Lipschitz, 118
potencial de una, 543
vs. función uniformemente continua, 342
y diferenciabilidad, 128, 172–174
cuadrática, 252
definitivamente negativa, 252
criterio para detectar una, 255
definitivamente positiva, 252

criterio para detectar una, 254–255
de Dirichlet Green, 555
de Green, 552–559
definitivamente negativa, 252
criterio para detectar una, 255
definitivamente positiva, 252
criterio para detectar una, 254–255
de longitud de arco, 201–207
de Neumann Green, 555
de producción de Cobb-Douglas, 298
delta de Dirac, 552
diferenciable, 118–129
discontinua, 108
dos veces continuamente diferenciable, 157
escalar, integral sobre una superficie de una, 463–469
gráfica de una. *Ver* gráfica
gradiente de una. *Ver* gradiente
hessiana, 252
hessiano bordeado, 272, 274
homogénea, 183
integrable, 316–318
mejor aproximación lineal a una, 125
par, 156
sobre, 369
subarmónica, 264, 300, 504
estricta, 264, 300
supraarmónica, 504
uniformemente continua, 178, 342–343
uno a uno, 367–370
valor promedio de una, 389–390, 393
vectorial, integrales de superficie de una, 472–483
funciones
con valores escalares, 75
con valores reales, geometría de, 75–93
con valores vectoriales, 75, 189–237
de varias variables, 75
dos veces continuamente diferenciables, 157
notación para, xiv
subarmónicas, 264, 504
estrictas, 264, 300
supraarmónicas, 504
uniformemente continuas, 178, 342–343
vectoriales, integral de superficie de, 472–483

Galileo, 163
gas ideal, 187
ley del, 187
Gauss
ley de, 481, 538–540
teorema de , 490, 528–541
en términos de formas diferenciales, 579–580
generación del plano, 11
geometría del espacio euclidiano, 1–74
Gibbs, J.W., 18
gráfica, xiv, 440
suave, 106–107, 118
gráficas
generadas por computador, 85, 89–93
método de secciones para, 81–83
suaves (sin romper), 106–107, 118
gradiente, 127, 221
definición de, 146
significado geométrico del, 149
y rotacional, 221
y superficies de nivel, 149–150
gravedad, centro de, de una superficie, 470
gravitación, ley de la, 153, 197
Green
identidades de, 542
método de la función de, 552–559
primera identidad de, 554
segunda identidad, 554
teorema de, 490–500
en términos de formas diferenciales, 578–579
forma vectorial del, 497–499
teorema de la divergencia en el plano, 499–500

hélice, 195, 196
longitud de arco de la, 202
Hesse, L. O., 252
hessiano, 252
bordeado, 272, 274
hipocicloide, trayectoria de la, 205–207
Hölder, función continua en el sentido de, 118
homogeneidad
de la integral, 319–320
del producto exterior, 574
Huygens, C., 457

identidad de Lagrange, 67
identidades del análisis vectorial, 231
inercia, momento de, 394–395
inestabilidad atmosférica, 187
integración
cambio del orden de, 336–340
teoría de la, 204
integral
aditividad de la, 319–320, 349–351
aplicaciones de la, 389–399

cálculo de la, 320–326
definición de, 319
definida, notación para la, xiv–xv
de línea, 419–436, 473
cálculo de la, 421–424
como una integral orientada, 428
definición de, 421
e integral de superficie, 473
y campo gradiente, 429–430, 517
y ley de Ampère, 435
y parametrización, 430–435
y reparametrización de la trayectoria, 424–428
y trabajo, 419–421
de superficie
de funciones escalares, 463–469
de funciones vectoriales, 472–483
e integral de línea, 473
en términos de sumas de Riemann, 478–480
sobre una superficie orientada, 473–478
y gráficas de funciones, 482–483
de trayectoria, 413–418
de una forma diferencial, 422
doble, 303–351
aplicaciones de la, 389–399
definición de la, 303, 304
geometría de la, 303–311
sobre regiones generales, 329–335
sobre un rectángulo, 314–326
teorema del cambio de variables para la, 376–383
teorema del valor medio para la, 340
e integrabilidad, 316–318
homogeneidad de la, 319–320
impropia, 401–406
iterada, 404
y área de superficie, 454–455
independiente de la trayectoria, 517
iterada, 308
impropia, 404
linealidad de la, 319–320
monotonía de la, 319–320
orientada, 428
triple, 355–362
integrales impropias, 401–406
y área de superficie, 454–455
integrales, segundo teorema del valor medio para, 245
intervalo
abierto, xiii
cerrado, xii–xiii
inversa de una matriz, 64–66
inverso aditivo, 4
irrotacional, 226
isocuanta, 296
isoterma, 215

Kelvin, Lord, 490
Kelvin, teorema de circulación de, 480
Kepler, leyes de, 163, 199
Korteweg–de Vries, ecuación de, 160–161

Lagrange
forma de, del residuo, 245
identidad de, 67
multiplicador de, 266
teorema del multiplicador de, 265–267
Lagrange, J.L., 34
Laplace
ecuación de, 164–165, 238
operador de, 226, 231
Laplace, P.S., 164
latitud, 52
Leibniz, G., 33, 457
lemniscata, 388
ley
de Ampère, 435–436
de Bernoulli, 560
de conservación de la masa, 544–545
de Coulomb, 156, 215, 482
de Faraday, 480, 514
de Gauss, 481, 538–540
de Kepler, 163
de la gravitación, 153, 197
del gas ideal, 187
del paralelogramo, 66
de Newton (segunda), 196, 197
de Snell, 47, 279
libertad de medición, 549
límite, 75, 100–115
definición de, 101, 168
enfoque de vecindades para la definición de, 101–111
enfoque épsilon-delta para la definición de, 101, 111–115, 168
no existente, 101
"obvio", 104
por la derecha, 117
por la izquierda, 117
unicidad del, 105, 169
límites,
producto de los, 105–106
reglas para los 105–106, 169–170
suma de los, 105–106
línea
de corriente, 216–218
de flujo, 215–218
linealidad de la integral, 319–320
Lipschitz, función continua en el sentido de, 118
Listing, J.B.,474

logaritmo natural, notación para el, xii
longitud, 52
de arco, 201–207
de un vector, 22
$\log x$, xii

Maclaurin, C., 33
masa
centro de, 390–394
conservación de, 544–545
de una superficie, 466
matrices
multiplicación de, 61–66
suma de, 61
triple producto de, 66
matriz
antisimétrica, 230
columna, 62, 134
de 2×2, 30
de 3×3, 30–31
de deformación, 230
de derivadas parciales, 126, 171–172
de $n \times n$, 61
de rotación, 230
determinante de una, 30–34
inversa de una, 64–66
renglón, 62, 134
simétrica, 230
Maupertuis, P. L. M. de, 248
máximo
absoluto (global), 259–261
global, 259–261
local, 249
estricto, 253
mínimo, teorema del, 260
restringido, 265–278
máximos. *Ver también* extremo, 259–261
aplicaciones de métodos matemáticos para, 291–297
criterio de la segunda derivada para detectar, 272–278
Maxwell, ecuaciones de, 549–551
mejor aproximación lineal, 125
método
de la función de Green para la ecuación de Poisson, 552–559
de las secciones para graficar, 81–83
de los mínimos cuadrados, 300–301, 302ss
métodos para graficar, 77–93
mínimo
absoluto (global), 259–261
global, 259–261
local, 248–249
estricto, 253
restringido, 265–278
mínimos. *Ver también* extremo
aplicaciones de métodos matemáticos para, 291–297
criterio de la segunda derivada para detectar, 272–278
Möbius, A. F., 474
Möbius, cinta de, 474–475
momento, 72
vector, 46
momento
angular, 201
de fuerza, 46
de inercia, 394–395
dipolar, 73
vectorial, 46
monotonía de la integral, 319–320
multiplicación
de formas diferenciales, 573–580
de matrices, 61–66
de vectores, 57
por un escalar en el espacio tridimensional, 4–5
por un escalar en el n-espacio euclidiano, 57
múltiplo escalar, 4

nabla, 220–221
naturaleza, matematización de la, 163
negativo, 4
n-espacio euclidiano, 57–66
Neumann-Green, 555
Neumann, problema de, 555
Newton,
ley de la gravitación de, 153, 197
potencial de, 153, 164
segunda ley de, 196, 197
Newton, Sir Isaac, 163, 199, 396, 457
norma de un vector, 22
normal a una superficie, vector, 443
normalización, 22
notación, xii–xv
notación descuidada, 120
notación para la distancia, xiii
números
irracionales, xii
racionales, xii
reales, xii
sucesión de Cauchy de, 344–348
n-vector, 57

onda de choque, 561–564
operación conmutativa, 63
operaciones vectoriales
en coordenadas cilíndricas, 234
en coordenadas esféricas, 234–235
operador diferencial elíptico, 300
órbita circular, 198–199
orientación
inducida por una normal hacia arriba, 505

parametrización que preserva la, 475–476
positiva en la frontera de una región, 505
origen, 1
Ostrogradsky, 490

Pappus, teorema de, 462
paraboloide
de revolución, 81, 87
hiperbólico, 83, 87
paradoja de los gemelos, 210
paralelepípedo,
vectores que generan un, 226–228
volumen de un, 39
paralelogramo,
área de un, 37-38
bisección de las diagonales de un, 14–15
ley del, 66
puntos en un, 10
parametrización
conforme, 471
de una curva, 430–435
de una recta, 11–13
de una superficie, 440–447
definición de, 442
que invierte la orientación, 475–476
que preserva la orientación, 475–476
de una trayectoria mediante la longitud de arco, 209
partición regular, 315
pérdida de unicidad, 563
Pierce, J. M., 18
plano
coordenado, 11
ecuación de un, 39–43
generación de un, 11
notación para un, 3
tangente, 122–125, 150–151
a una superficie parametrizada, 444–446
definición de, 124, 150
xy, 11
xz, 11
yz, 11
Plateau, J., 458
Plateau, problema de, 458–460
Poisson,
ecuación de, 164–165, 543
fórmula de, en dos dimensiones, 559
Poisson, V. 164–165
polarización, identidad de, 66
poligonal, trayectoria, 203–204
pompa de jabón, problema de la, 458–460
posición de equilibrio, 291–294
potencial
de Newton, 153, 164
de funciones continuas, 543
de temperatura, 187
gravitacional, 153, 164, 395–399
para un campo vectorial, 521
Poynting, campo vectorial de, 565
presión, 546
principio
débil del máximo, 264
de continuidad uniforme, 343
de reciprocidad, 556
fuerte del máximo, 503
fuerte del mínimo, 503
principios variacionales, 248
proceso adiabático, 439
producto
cartesiano, 303
cruz, 30–43
definición de, 34
interpretación geométrica del, 35–43
y determinantes, 30–34
y matrices, 30–31
de límites, 105–106
exterior, 574
interno, 4, 21-28
definición de, 21
notación para el, 21
propiedades algebraicas del, 57–66
propiedades del, 21–28
por un escalar, 4
punto. *Ver* producto interno
vectorial, 34
proyección, 27–28
punto, 9–10
crítico
como extremo local, criterio para un, 251–261
como posición de equilibrio, 292
degenerado, 256
extremo como un, 250–251
métodos matemáticos y aplicaciones de un, 291–297
no degenerado, 256
de convergencia, 180
frontera, 99–100
silla, 249, 250, 251, 255, 256
criterio de la segunda derivada para detectar un, 272–278
puntos
de convergencia, 180
frontera, 99–100

Rankine–Hugoniot, condición de, 562, 563
rapidez, definición de, 193
rapidez
de una discontinuidad, 563
unitaria, 209
de una trayectoria, 209
y velocidad, 195

razón de flujo (*flux*), 479–481
del calor, 480–481
de un fluido, 479
rectángulo,
integral doble sobre un, 314–326
partición regular de un, 315
rectángulos ajenos, 349
recta
ecuación de una, 11–14
notación para una, 3
parametrización de una, 11–13
tangente, 151
a una trayectoria, 193–195
región
arco-conexa, 354
de tipo I
en el espacio, 357–362
en el plano, 329–335
de tipo II
en el espacio, 358–359, 362
en el plano, 329–335
de tipo III
en el espacio, 358–359
en el plano, 329–335
de tipo IV, 358–359
elemental, 329,
regla
de la cadena, 131, 133–141, 174–175, 236
de la mano derecha, 36–37
reparametrización, 208, 239, 424–428
que invierte la orientación, 425–426
que preserva la orientación, 425–426
resta de vectores, 7–8
restricción, 265
Riemann, B., 348, 471n
Riemann, sumas de, 306–307, 315, 321, 334, 348
rigidez flexural, 412
rotacional, 220–226
definición de, 512ss
del gradiente, 222
en coordenadas polares y cilíndricas, 540–541
incompresible, 226
propiedades del, 231–237
y divergencia, 225
y rotación, 222–225
y teorema de Stokes, 511–513

salto, 106
Schwarz, desigualdad de, 25, 59–60
secciones, método de las, para graficar, 81–83
semieje
mayor de una cuádrica, 294
menor de una cuádrica, 294
silla
de mono, 299
de montar, 83, 87
simetría en un plano, 400
sistema
coordenado, 1
ortonormal, 26
Snell, ley de, 47, 279
sobre, 369
solitón, 161–162
solución débil, 562
Stokes, teorema de, 480, 490, 504–514
subconjunto, xiii
sucesión de Cauchy de números reales, 344–348
suma
de límites, 105–106
de matrices, 61
de vectores, 3–4
en el espacio n-dimensional, 57–66
en el espacio tridimensional 3–4, 5–7
telescópica, 174
sumas de Riemann
como sucesiones de Cauchy, 344–348
e integral de superficie, 478–480
e integral de trayectoria, 415–416
e integral doble, 314–326
y área de superficie, 478–480
sumidero, 537
superficie
área de,
e integrales impropias 454–457
centro de gravedad de una, 470
definición de, 440, 441, 443ss
integral de una función escalar sobre una, 463–469
lado de adentro (negativo) de una, 473–474
lado de afuera (positivo) de una, 473–474
masa de una, 466
superficie
acotada, 270–271
C^1, 442
cerrada, 516, 529–530
como la imagen de una función, 441, 442
de nivel, 79, 86–89
de un solo lado, 474–475
diferenciable, 442
equipotencial, 154, 215
orientada, 473–474
parametrizada, 440–447
con inversión de la orientación, 475–476
con preservación de la orientación, 475–476
definición de, 442
teorema de Stokes para una, 510–514
vector normal a una, 443
suave, 443
a trozos, 450–451

Taylor
fórmula de
de primer orden, 243
de segundo orden, 243–244
de tercer orden, 246
serie de, 247
teorema de, 242–247
temperatura, potencial de, 187
promedio, 394
teoría
de la integración, 204
del potencial, 552–559
teorema
de diferenciación técnica, 168–177
de Euler, 159, 183
de Fubini, 322–326
para integrales impropias, 404
de Gauss, 490, 528–541
en términos de formas diferenciales, 579–580
de Green, 490–500
en términos de formas diferenciales, 578–579
de la circulación de Kelvin, 480
de la continuidad uniforme, 343
de la divergencia
de Gauss, 531- 540
en el plano, 499-500
de la función implícita,
general, 287–288
particular, 280–286
de la función inversa, 288–289, 370
del cambio de variable
del máximo-mínimo, 260
del multiplicador de Lagrange, 265–267
del transporte, 543–544, 546
del valor intermedio, 340
del valor medio, 135, 323
para integrales, 245
para integrales dobles, 340
de Pappus, 462
de Stokes, 480, 490, 504–514
en términos de formas diferenciales, 579, 580
para gráficas, 505–510
para superficies parametrizadas, 510–514
de Taylor, 242–247
especial de la función implícita, 280–286
fundamental
del cálculo, 429–430
del cálculo integral, 320
general de la función implícita, 287–288
tiempo propio de una trayectoria, 210
torca, 201
toro, 441
torsión, 210
trabajo, 419–421
transformación lineal, 63
trayectoria, 189–199
C^1, 190
a trozos, 206–207
circular, 191, 197–199
curva de una, 190–193
definición de, 190
derivada de una, 193
diferenciable, 190
extremos de una, 190
funciones componentes de una, 190
integral de, 413–418
opuesta, 426
parametrización mediante la longitud de arco de una, 209
poligonal, 203–204
rapidez unitaria de una, 209
recta tangente a una, 193–195
regular, 439
reparametrización de una, 208, 239, 424–428
tiempo propio de una, 210
triple producto, 35–36
de matrices, 66
unicidad, pérdida de, 563
unión, xiii

valor
absoluto, xiii
medio,
teorema del, 135,323
promedio, 389–390, 393
Vandermonde, 34
van der Waals, gas de, 187
variedad orientada con frontera
2-, 580
3-, 580
vecindad, 99
agujereada, 180
proyección de un, 27–28
vector(es)
ángulo entre, 23–24
aplicaciones físicas de los, 15–17
binormal, 209
columna, 63
de desplazamiento, 15–17
de fuerza, 17
de la base usual, 8–9, 57
de razón de flujo de la energía, 548
de vorticidad, 513
en el espacio euclidiano n-dimensional, 57–66
en el espacio tridimensional, 1–20
fuerza, 17
igualdad de, 5
momento, 46
multiplicación de, 57
n-, 57
definición de, 5
extremo de un 9–10
longitud de un, 22
norma de un, 22
normal
a la superficie, 443
principal, 209
ortogonales, 26–27
ortonormales, 234–235

y coordenadas cilíndricas y esféricas, 54–55, 234–235
perpendiculares, 26
resta de, 7–8
suma de, 3–4
tangente, 137–139
unitario, 22, 147
y coordenadas cilíndricas y esféricas, 54–55, 234–235
velocidad, 16–17, 137–139, 193–199
velocidad
angular, 46
de un fluido, 76–77, 212, 216, 479
y rapidez, 195
volumen
de regiones elementales, 329–335
de un paralelepípedo, 39
e integrales triples, 355–362
la integral doble como, 303–311

Wilson, E. B., 18