Funciones armónicas en dos variables

Sea $\vec{F}(x,y) = M(x,y)\,\breve{\imath} + N(x,y)\,\breve{\jmath}$ un campo vectorial cuyas componentes poseen derivadas parciales continuas en un conjunto abierto simplemente conexo $D \subseteq \mathbb{R}^2$, es decir $M, N \in C^1(D)$. Supongamos además que $\vec{F}$ es solenoidal ($\mathrm{div}(\vec{F}) = 0$) e irrotacional ($\mathrm{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$) en D.

La teoría de independencia del camino garantiza que $\vec{F}$ es un campo conservativo en D, es decir que allí es el gradiente de una función potencial $u(x,y)$: $\vec{F} = \vec{\nabla} u$

Esto es,

$$M(x,y) = u_x(x,y) \qquad\qquad N(x,y) = u_y(x,y)$$

Como $M, N \in C^1(D)$, entonces u posee derivadas parciales de segundo orden continuas en D, es decir $u \in C^2(D)$.

Luego, para todo $(x,y) \in D$ se verifica:

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}_{M} + \frac{\partial}{\partial y}\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}_{N} = \underbrace{\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}}_{\mathrm{div}(\vec{F})} = 0$$

El operador diferencial parcial de segundo orden: $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ se llama laplaciano. La **ecuación de Laplace en dos variables** es la ecuación diferencial parcial de segundo orden:

$$\nabla^2 u = 0, \text{ es decir } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Sea $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto. Una función $u: D \to \mathbb{R}$ se dice **armónica en $\boldsymbol{D}$** si se verifican:

- $u(x, y) \in C^2(D)$, es decir si $u_{xx}(x, y)$, $u_{xy}(x, y)$, $u_{yy}(x, y)$ son funciones continuas en D.
- $\nabla^2 u(x, y) = 0, \forall (x, y) \in D$, es decir $u(x, y)$ es solución de la ecuación de Laplace en D.

Así, la función potencial de un campo $\vec{F}(x, y)$ solenoidal e irrotacional en D abierto simplemente conexo es una función armónica en D. Ejemplos de tales potenciales armónicos surgen en distintas aplicaciones de la Física y la Ingeniería:

- Potencial gravitatorio en una región que no contiene materia (masa).
- Potencial electrostático en una región libre de cargas eléctricas.
- Potencial de velocidades de un fluido incompresible e irrotacional, en una región donde no hay fuentes ni sumideros de fluido.
- Distribución estacionaria de temperaturas en una región que no contiene fuentes ni sumideros de calor.

Ejemplo: $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$

Derivadas parciales de primer orden:

$$u_x(x,y) = 3x^2 - 3y^2 \qquad\qquad u_y(x,y) = -6xy$$

Las derivadas parciales de segundo orden son continuas en $\mathbb{R}^2$ por ser polinómicas.

Se tiene:

$$u_{xx}(x,y) = 6x \qquad\qquad u_{yy}(x,y) = -6x$$

Luego, $u(x,y)$ es solución de la ecuación de Laplace en $D = \mathbb{R}^2$ pues:

$$\nabla^2 u(x,y) = u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 6x - 6x = 0, \forall (x,y) \in D$$

Es decir, $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$ es una función armónica en todo el plano.

Ejercicio: Verificar que $u(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ es armónica en $D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

Teorema (relación entre analíticas y armónicas en el plano): Sea D subconjunto abierto del plano. Si $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ es analítica en D entonces $u(x,y) = \mathrm{Re}(f(z))$ y $v(x,y) = \mathrm{Im}(f(z))$ son funciones armónicas en D.

Dem

Supongamos que $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ es analítica en D. Es posible demostrar que si una función es analítica entonces su derivada también lo es. Se deduce que si $f(z)$ es analítica en D entonces también $f''(z) = u_{xx} + i\,v_{xx}$ es analítica en D y por ende continua. Luego, u_{xx} y v_{xx} son continuas en D. Las ecuaciones CR para $f''(z)$ aseguran que las cuatro derivadas parciales de segundo orden de u y de v son continuas en D.

Además, siendo $f(z)$ analítica en D, se verifican las ecuaciones de CR en todo punto $(x,y) \in D$:

$$CR\colon \begin{cases} u_x(x,y) = v_y(x,y) \\ u_y(x,y) = -v_x(x,y) \end{cases}$$

Luego,

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = \frac{\partial}{\partial x}(u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(u_y) \overbrace{=}^{CR} \frac{\partial}{\partial x}(v_y) + \frac{\partial}{\partial y}(-v_x) = v_{yx} - v_{xy} = 0$$

puesto que las derivadas parciales de segundo orden de $v(x,y)$ son continuas en D, con lo cual las derivadas parciales de segundo orden cruzadas son idénticas.

Así pues, $u(x,y) = \mathrm{Re}(f(z))$ es armónica en D. Análogamente se prueba que v es armónica en D.

Ejemplo: $f(z) = z^3$ es analítica en $D = \mathbb{C}$ así que $u(x,y) = \mathrm{Re}(z^3)$, $v(x,y) = \mathrm{Im}(z^3)$ son armónicas en $\mathbb{R}^2$.

$$f(z) = z^3 = (x+iy)^3 = x^3 + i3x^2y - 3xy^2 - iy^3$$

Entonces:

$$u(x,y) = x^3 - 3xy^2$$
$$v(x,y) = 3x^2y - y^3$$

En el ejemplo anterior vimos que $u(x,y)$ es armónica. Comprobemos que $v(x,y)$ también lo es:

$$v_x(x,y) = 6xy \qquad v_y(x,y) = 3x^2 - 3y^2$$
$$v_{xx}(x,y) = 6y \qquad v_{yy}(x,y) = -6y$$
$$\nabla^2 v = v_{xx} + v_{yy} = 6y - 6y = 0$$

Lo interesante del teorema anterior es que las funciones analíticas permite obtener funciones armónicas con solo tomar sus partes real e imaginaria, no siendo necesario verificar que éstas satisfacen la ecuación de Laplace!

Así, por ejemplo,

$$u(x,y) = \mathrm{Re}(e^z) = e^x\cos(y) \qquad v(x,y) = \mathrm{Im}(e^z) = e^x\mathrm{sen}(y)$$

son armónicas en $\mathbb{R}^2$ (no necesitamos comprobar que verifican la ecuación de Laplace).

Ejemplo: $u(x,y) = \mathrm{Ln}|z| = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, $v(x,y) = \theta = \mathrm{Arg}(z)$ son armónicas en $D = \mathbb{R}^2 - \{(x,y): y = 0\ , x \leq 0\}$ pues allí es $u(x,y) = \mathrm{Re}(f(z))$ y $v(x,y) = \mathrm{Im}\big(f(z)\big)$, con $f(z) = \mathrm{Ln}(z)$ analítica en D.

<u>Definición</u>: Dado un conjunto abierto $D \subseteq \mathbb{R}^2$ y funciones $u(x, y)$, $v(x, y)$ de clase $C^2(D)$, se dice que $v(x, y)$ es una **conjugada armónica** de $u(x, y)$ en D si la función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en D.

<u>Notar</u>: La relación entre funciones "es conjugada armónica de" no es simétrica puesto que si v es conjugada armónica de u entonces u no puede ser conjugada armónica de v, excepto en el caso trivial que ambas sean constantes. En efecto, supongamos que v es conjugada armónica de u, de modo que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en D. Entonces se verifican en D las condiciones CR:

$$(1)\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

Si u fuera conjugada armónica de v, por definición la función $g(z) = v(x, y) + iu(x, y)$ sería analítica en D, lo que implicaría que se cumplen las condiciones CR:

$$(2)\begin{cases} v_x = u_y \\ v_y = -u_x \end{cases}$$

De (1) y (2) resultaría:

$$\begin{cases} u_x = -u_x \\ u_y = -u_y \end{cases} \qquad \begin{cases} v_x = -v_x \\ v_y = -v_y \end{cases}$$

Entonces:

$$\begin{cases} u_x = 0 \\ u_y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_x = 0 \\ v_y = 0 \end{cases}$$

idénticamente en D. Suponiendo D abierto conexo, lo anterior implica que $u(x, y)$ y v(x, y) son constantes en D.

Ahora bien, es fácil de probar que:

$v(x, y)$ es una conjugada armónica de $u(x, y)$ en D si y sólo si $u(x, y)$ es una conjugada armónica de $-v(x, y)$ en D.

$v(x, y)$ es una conjugada armónica de $u(x, y)$ en D si y sólo si $-u(x, y)$ es una conjugada armónica de $v(x, y)$ en D.

Ejemplo: $v(x,y) = 3x^2y - y^3$ es una conjugada armónica de $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$ en $D = \mathbb{R}^2$. En efecto, $f(z) = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$ es analítica en $\mathbb{C}$ pues $u, v \in C^1(\mathbb{R}^2)$ satisfacen CR, $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \equiv \begin{cases} 3x^2 - 3y^2 = 3x^2 - 3y^2 \\ -6xy = -6xy \end{cases}$$

Comprueben que $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = z^3$ (analítica en $\mathbb{C}$).

En cambio, $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$ no es conjugada armónica de $v(x,y) = 3x^2y - y^3$ porque la función $g(z) = v(x,y) + i\,u(x,y) = (3x^2y - y^3) + i(x^3 - 3xy^2)$ no es analítica en ningún punto (verificarlo).

Ejemplo: Justificar que $u(x,y) = \mathrm{Re}(ze^z)$ es armónica en $\mathbb{R}^2$ y hallar sus conjugadas armónicas.

Rta Como $f(z) = ze^z$ es analítica en $\mathbb{C}$, entonces $u(x,y) = \mathrm{Re}(ze^z)$ es armónica en $\mathbb{R}^2$. Las conjugadas armónicas son:

$$v(x,y) = \mathrm{Im}(ze^z) + K \quad (K \in \mathbb{R} \text{ constante})$$

Se tiene:

$$ze^z = (x+iy)e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) = e^x(x\cos y - y \operatorname{sen} y) + ie^x(x \operatorname{sen} y + y\cos y)$$

Entonces, las conjugadas armónicas de $u(x,y) = e^x(x\cos y - y\operatorname{sen} y)$ son:

$$v(x,y) = e^x(x\operatorname{sen} y + y\cos y) + K$$

Dado un conjunto abierto $D \subseteq \mathbb{R}^2$, ¿toda función armónica $u(x,y)$ es la parte real de alguna $f(z)$ analítica en D? Es decir, ¿toda función armónica $u(x,y)$ posee una conjugada armónica $v(x,y)$ en D? Para dominios D en general, la respuesta es negativa.

<u>Ejemplo</u>: $u(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ es armónica en $D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ como puede comprobarse por derivación. Sin embargo, veamos que no existe ninguna $f(z)$ analítica en $D = \mathbb{C} - \{0\}$ tal que $u(x,y) = \mathrm{Re}(f(z))$.

En efecto, si tal $f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$ existiera, por CR se tendría $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$ en D, lo que equivale a afirmar que $\vec{G}(x,y) = \vec{\nabla} v$ en D, siendo $\vec{G}(x,y) = \langle -u_y, u_x \rangle$, o sea a que $\vec{G}$ sea conservativo en D. Pero esto no ocurre porque

$$u_x = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad u_y = \frac{y}{x^2+y^2}$$

así que $\vec{G}(x,y) = \left\langle -\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right\rangle$, campo vectorial que sabemos no es conservativo en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ porque por ejemplo la circulación a lo largo de $C: x^2+y^2 = 1$ no es nula:

$$\oint_C \vec{G}.d\vec{r} = \oint_C -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = 2\pi \neq 0$$

Observar que en este ejemplo $D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ no es simplemente conexo.

Para dominios simplemente conexos se tiene el siguiente resultado.

<u>Teorema</u>: Dados un conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto <u>simplemente conexo</u> y una función $u(x,y)$ armónica en D, existe $f(z)$ analítica en D tal que $u(x,y) = \mathrm{Re}(f(z))$, es decir que toda función armónica en un dominio abierto simplemente conexo admite una conjugada armónica.

Dem: $u(x,y) \epsilon C^2(D)$. Definamos en D el campo vectorial $\vec{G}(x,y) = \langle -u_y(x,y), u_x(x,y) \rangle$. Es claro que $\vec{G}(x,y) \epsilon C^1(D)$.

Calculemos su rotor:

$$rot(\vec{G}) = \left\langle 0,0, \underbrace{u_{xx} + u_{yy}}_{0} \right\rangle = \vec{0} \quad \text{en } D$$

Como D es simplemente conexo, por teorema de independencia del camino $\vec{G}$ es conservativo en D, es decir que existe $v(x,y)$ función potencial de $\vec{G}$ en D:

$$\langle -u_y(x,y), u_x(x,y) \rangle = \vec{G} = \vec{\nabla} v = \langle v_x, v_y \rangle$$

Entonces en cada punto $(x,y) \in D$ se tiene:

Pero estas son precisamente las ecuaciones CR: $\begin{cases} u_x(x,y) = v_y(x,y) \\ u_y(x,y) = -v_x(x,y) \end{cases}$

Esto implica que $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ es analítica en D. Hemos probado que $u(x,y) = \mathrm{Re}(f(z))$ donde $f(z)$ es analítica en D. Luego, $v(x,y) = \mathrm{Im}\,(f(z))$ es una conjugada armónica de $u(x,y)$ en D.

Corolario: Toda función $u(x, y)$ armónica en $D \subseteq \mathbb{R}^2$ es localmente la parte real de una función analítica en D. Es decir, toda función armónica en $D \subseteq \mathbb{R}^2$ admite localmente una conjugada armónica.

Ejemplo: Comprobar el corolario anterior para $u(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ en $D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

Rta Sean $f(z) = \mathrm{Ln}(z)$, $g(z) = \mathrm{Ln}(-z)$. Se tiene:

$$D_1 = D_{\text{ana}}(f) = \mathbb{C} - \{x + iy : \ y = 0\,, x \leq 0\}$$
$$D_2 = D_{\text{ana}}(g) = \mathbb{C} - \{x + iy : \ y = 0\,, x \geq 0\}$$

Es claro que $u(x, y) = \mathrm{Re}(f(z))$ en D_1 y que $u(x, y) = \mathrm{Re}(g(z))$ en D_2. Como $D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} = D_1 \cup D_2$, queda probada la afirmación.

Ejemplo: Comprobar que $u(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$ es armónica en $D = \mathbb{R}^2$ y hallar sus conjugadas armónicas.

Rta

$$u_x(x,y) = 4x^3 - 12xy^2 \qquad u_y(x,y) = -12x^2y + 4y^3$$
$$u_{xx}(x,y) = 12x^2 - 12y^2 \qquad u_{yy}(x,y) = -12x^2 + 12y^2$$
$$u_{xy}(x,y) = -24xy$$

Las derivadas parciales de segundo orden de $u(x,y)$ son continuas en $D = \mathbb{R}^2$ por ser polinómicas. Además:

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = (12x^2 - 12y^2) + (-12x^2 + 12y^2) = 0$$

Las conjugadas armónicas $v(x,y)$ son tales que $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ es analítica en $D = \mathbb{C}$. Entonces se verifican las condiciones CR:

$$\begin{cases} u_x(x,y) = v_y(x,y) \\ u_y(x,y) = -v_x(x,y) \end{cases} \equiv \begin{cases} 4x^3 - 12xy^2 = v_y(x,y) \\ -12x^2y + 4y^3 = -v_x(x,y) \end{cases}$$

De la primera ecuación: $v(x,y) = 4x^3y - 4xy^3 + g(x)$

Derivando respecto de x y comparando con la segunda ecuación:

$$v_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(4x^3y - 4xy^3 + g(x)\,) = 12x^2y - 4y^3 + g'(x) = 12x^2y - 4y^3$$

Entonces: $g'(x) = 0$. Así que $g(x) = C$ (constante). Luego, $v(x,y) = 4x^3y - 4xy^3 + C$

<u>Ejemplo</u>: Halle las conjugadas armónicas de $u(x, y) = \mathrm{Re}(iz^2 - 3z)$

<u>Rta</u>: Basta considerar $f(z) = iz^2 - 3z$ analítica en $D = \mathbb{C}$. Entonces las conjugadas armónicas de $u(x, y)$ en $D = \mathbb{R}^2$ son

$$
\begin{aligned}
&v(x, y) = \mathrm{Im}(iz^2 - 3z) + K = \mathrm{Im}\big(i(x + iy)^2 - 3(x + iy)\big) + K = \\
&= \mathrm{Im}(i(x^2 - y^2 + i2xy) - 3x - i3y) + K = \\
&= \mathrm{Im}(ix^2 - iy^2 - 2xy - 3x - i3y) + K = x^2 - y^2 - 3y + K
\end{aligned}
$$

donde $K \in \mathbb{R}$ es una constante.

Ortogonalidad de curvas de nivel

Sea $f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$ analítica en un dominio abierto conexo $D \subseteq \mathbb{C}$. Las familias de curvas de nivel de $u(x,y)$ y de $v(x,y)$ son, respectivamente:

$$\mathcal{F}_1\colon u(x,y) = C_1 \qquad\qquad \mathcal{F}_2\colon v(x,y) = C_2$$

donde C_1 y C_2 son constantes reales.

Como toda función analítica es tal que su derivada es también analítica y en particular continua, se deduce a partir de las condiciones de CR que $u, v \in C^1(D)$.

Consideremos un punto (x,y) donde $\vec{\nabla} u \neq \vec{0}$. De acuerdo con las condiciones CR también es $\vec{\nabla} v \neq \vec{0}$. Como es sabido (Matemática A), los vectores $\vec{\nabla} u$ y $\vec{\nabla} v$ son respectivamente ortogonales a las curvas de nivel de $u(x,y)$ y $v(x,y)$.

Veamos que $\vec{\nabla} u$ y $\vec{\nabla} v$ son mutuamente ortogonales. Bastará mostrar que es nulo su producto escalar. En efecto:

$$\vec{\nabla} u \,.\, \vec{\nabla} v = \langle u_x, u_y \rangle . \langle v_x, v_y \rangle = u_x v_x + u_y v_y \overbrace{=}^{CR} v_y v_x + (-v_x) v_y = 0$$

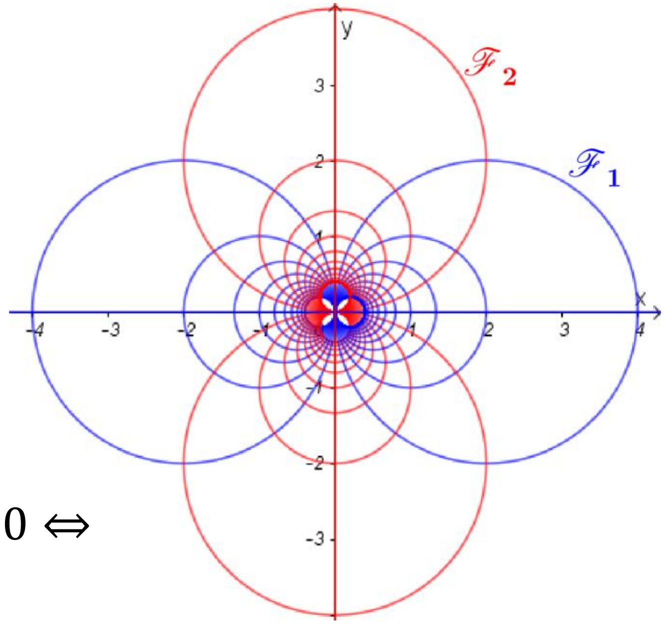
Esto prueba que cada vez que en un punto (x,y) donde $f'(z) \neq 0$ una curva de nivel $\mathcal{F}_1$ se interseca con una curva de nivel de $\mathcal{F}_2$, el ángulo entre las respectivas rectas tangentes es de $90°$, de modo que dichas curvas son ortogonales allí.

Por lo tanto, las familias de curvas $\mathcal{F}_1\colon u(x,y) = C_1$, $\mathcal{F}_2\colon v(x,y) = C_2$ son ortogonales en todo punto (x,y) donde $f'(z) \neq 0$.

<u>Ejemplo</u>: Comprobar el resultado anterior para $f(z) = \frac{2}{z}$

<u>Rta</u> En este caso

$$u(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2} \qquad v(x,y) = \frac{-2y}{x^2+y^2}$$



Entonces,

$$\mathcal{F}_1 : \frac{2x}{x^2+y^2} = C_1 \qquad \mathcal{F}_2 : \frac{2y}{x^2+y^2} = C_2$$

Si $C_1 \neq 0$, operando algebraicamente:

$$\frac{2x}{x^2+y^2} = C_1 \iff x^2+y^2 = \frac{2}{C_1}x \iff x^2 - \frac{2}{C_1}x + y^2 = 0 \iff$$
$$\iff \left(x - \frac{1}{C_1}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{C_1}\right)^2$$

Luego, si $C_1 \neq 0$ las curvas de $\mathcal{F}_1$ son las circunferencias de centro $\left(\frac{1}{C_1}, 0\right)$ y radio $\frac{1}{|C_1|}$

Por analogía,

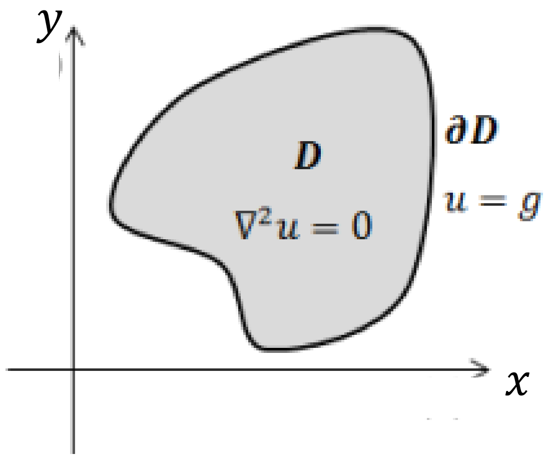
si $C_2 \neq 0$ las curvas de $\mathcal{F}_1$ son las circunferencias de centro $\left(0, \frac{1}{C_2}, 0\right)$ y radio $\frac{1}{|C_2|}$

El gráfico muestra algunas curvas de cada familia. En él puede apreciarse la ortogonalidad entre ellas.

Problema de Dirichlet en el plano (casos elementales)

Sean $D \subseteq \mathbb{R}^2$ una región del plano y $g(x,y)$ una función continua sobre el contorno ∂D. El **problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en dos variables** consiste en hallar una función $u(x,y)$ armónica en el interior de D y continua en $D \cup \partial D$, que tome valores prescritos por $g(x,y)$ sobre ∂D. Es decir una función tal que:

$$\nabla^2 u = 0 \text{ en el interior de } D$$
$$u(x,y) = g(x,y), \forall (x,y) \in \partial D$$
$$u(x,y) \text{ es continua en } D \cup \partial D$$

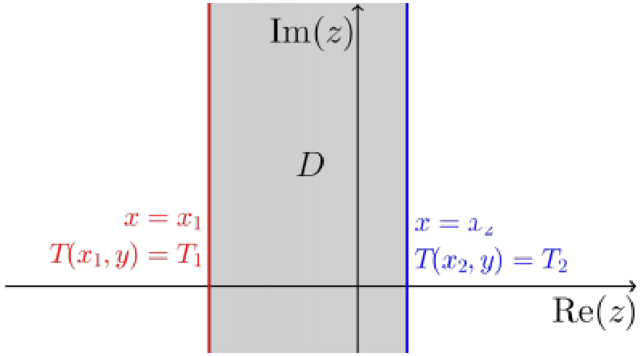


Problema de Dirichlet en franjas verticales u horizontales

Franjas verticales

Dados $x_1, x_2, T_1, T_2 \in \mathbb{R}$, con $x_1 < x_2$, hallar una función $T(x, y)$ armónica en el interior de $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq x \leq x_2\}$ sujeta a las siguientes condiciones de contorno:

$$T(x_1, y) = T_1 \text{ si } -\infty < y < \infty$$
$$T(x_1, y) = T_2 \text{ si } -\infty < y < \infty$$



Solución

Consideremos la familia de funciones $f(z) = Az + B$, donde A, B son parámetros reales. Todas ellas son analíticas en $\mathbb{C}$.

Luego, la familia de funciones reales $T(x, y) = \mathrm{Re}\big(f(z)\big) = Ax + B$ son armónicas en $\mathbb{R}^2$. En particular lo son en el interior de la franja vertical D. Las condiciones sobre el contorno se verifican si y sólo si (A, B) es solución del sistema lineal de dos ecuaciones en dos incógnitas:

$$\begin{cases} Ax_1 + B = T_1 \\ Ax_2 + B = T_2 \end{cases}$$

Como este sistema tiene solución única pues su determinante es $x_1 - x_2 \neq 0$, se obtiene la solución $T(x, y) = Ax + B$ deseada.

Ejemplo: Encontrar la distribución estacionaria de temperaturas $T(x, y)$ en una lámina delgada conductora del calor representada por $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 3\}$ sujeta a las siguientes condiciones de contorno:

$$T(1, y) = 2 \text{ si } -\infty < y < \infty$$
$$T(3, y) = 8 \text{ si } -\infty < y < \infty$$

Se supone D térmicamente aislada excepto en sus bordes $x = 1$ y $x = 3$ y que en el interior de D no hay fuentes ni sumideros de calor. Asumir que el modelo de problema de Dirichlet es adecuado.

Solución

Las funciones de la familia $f(z) = Az + B$, donde A, B son parámetros reales, son analíticas en $\mathbb{C}$. Luego, $T(x, y) = \mathrm{Re}\big(f(z)\big) = Ax + B$ son armónicas en $\mathbb{R}^2$. En particular lo son en el interior de la franja vertical D. Las condiciones sobre el contorno se verifican si y sólo si (A, B) es solución del sistema lineal de dos ecuaciones en dos incógnitas:

$$\begin{cases} A.1 + B = 2 \\ A.3 + B = 8 \end{cases}$$

Resolviéndolo se obtiene $(A, B) = (3, -1)$. Luego, la distribución estacionaria de temperaturas en la placa es:

$$T(x, y) = 3x - 1$$

Franjas horizontales

Dados $y_1, y_2, T_1, T_2 \in \mathbb{R}$, con $y_1 < y_2$, hallar una función $T(x, y)$ armónica en el interior de $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ y_1 \leq y \leq y_2\}$ sujeta a las siguientes condiciones de contorno:

$$T(x, y_1) = T_1 \ \text{si } -\infty < x < \infty$$
$$T(x, y_2) = T_2 \ \text{si } -\infty < x < \infty$$

Solución

Consideremos la familia de funciones $f(z) = Az + iB$, donde A, B son parámetros reales. Todas ellas son analíticas en $\mathbb{C}$. Luego, la familia de funciones reales $T(x, y) = \mathrm{Im}\big(f(z)\big) = Ay + B$ son armónicas en $\mathbb{R}^2$. En particular lo son en el interior de la franja horizontal D. Las condiciones sobre el contorno se verifican si y sólo si (A, B) es solución del sistema lineal de dos ecuaciones en dos incógnitas:

$$\begin{cases} Ay_1 + B = T_1 \\ Ay_2 + B = T_2 \end{cases}$$

Como este sistema tiene solución única pues su determinante es $y_1 - y_2 \neq 0$, se obtiene la solución $T(x, y) = Ay + B$ deseada.

Ejemplo: Encontrar el potencial electrostático $V(x, y)$ en una lámina delgada conductora representada por $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq y \leq 4\}$ sujeto a las siguientes condiciones de contorno:

$$V(x, -2) = 0 \text{ si } -\infty < x < \infty$$
$$V(x, 4) = 5 \text{ si } -\infty < x < \infty$$

Asumir que el modelo de Dirichlet es adecuado.

Solución

Las funciones de la familia $f(z) = Az + iB$, donde A, B son parámetros reales, son analíticas en $\mathbb{C}$. Luego, $V(x, y) = \mathrm{Im}\big(f(z)\big) = Ay + B$ son armónicas en $\mathbb{R}^2$. En particular lo son en el interior de la franja horizontal D. Las condiciones sobre el contorno se verifican si y sólo si (A, B) es solución del sistema lineal de dos ecuaciones en dos incógnitas:

$$\begin{cases} -2A + B = 0 \\ 4A + B = 5 \end{cases}$$

Resolviéndolo se obtiene $(A, B) = (\frac{5}{6}, \frac{5}{3})$. Luego, el potencial electrostático es:

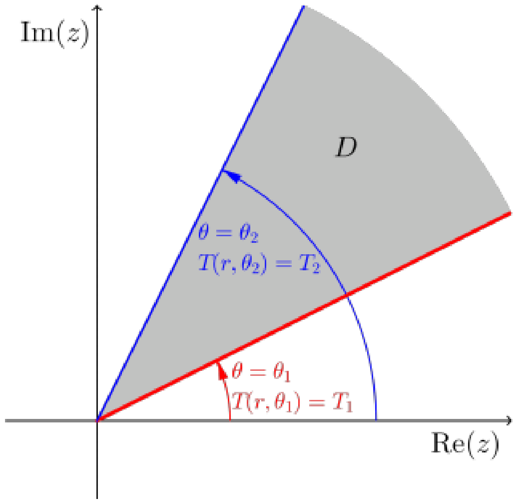
$$V(x, y) = \frac{5}{6} y + \frac{5}{3}$$

Problema de Dirichlet en regiones angulares con vértice en el origen

Dados $\theta_1, \theta_2, T_1, T_2 \in \mathbb{R}$, con $-\pi < \theta_1 < \theta_2 < \pi$, hallar una función $T(x, y)$ armónica en el interior de sujeta a las siguientes condiciones de contorno

(donde $\theta = \mathrm{Arg}(z), z = x + iy$):

$$T(x, y) = T_1 \text{ si } \theta = \theta_1$$
$$T(x, y) = T_2 \text{ si } \theta = \theta_2$$



Solución

Consideremos la familia de funciones

$f(z) = A\mathrm{Ln}(z) + iB = A(\ln r + i\theta) + iB = A \ln r + i(A\theta + B)$,

donde A, B son parámetros reales y $\theta = \mathrm{Arg}(z)$. Todas ellas son analíticas en $\mathbb{C} - \{x + iy: y = 0 , x \leq 0\}$. En particular lo son en D. Luego, la familia de funciones reales $T(x, y) = \mathrm{Im}\big(f(z)\big) = A\theta + B$ son armónicas en el interior de la región angular D. Las condiciones sobre el contorno se verifican si y sólo si (A, B) es solución del sistema lineal de dos ecuaciones en dos incógnitas:

$$\begin{cases} A\theta_1 + B = T_1 \\ A\theta_2 + B = T_2 \end{cases}$$

Como este sistema tiene solución única pues su determinante es $\theta_1 - \theta_2 \neq 0$, se obtiene la solución

$$T(x, y) = A\theta + B$$

Tener en cuenta que la expresión de $\theta = \mathrm{Arg}(z)$ en términos de (x, y) dependerá del cuadrante correspondiente. Por ejemplo, si $-\pi/2 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq \pi/2$ entonces en el interior de D será $v(x, y) = A \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + B$

Ejemplo: Hallar una función $T(x, y)$ armónica en el interior de

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \geq -x \, , x \geq 0\}$ sujeta a las siguientes condiciones de contorno: $T(x, -x) = -2 \;\; \mathrm{si} \;\; x > 0$

$$T(0, y) = 1 \;\; \mathrm{si} \;\; y > 0$$

Solución Consideremos la familia de funciones

$f(z) = A\mathrm{Ln}(z) + iB = A(\ln r + i\theta) + iB = A \ln r + i(A\theta + B),$

donde A, B son parámetros reales y $\theta = \mathrm{Arg}(z)$. Todas ellas son analíticas en. En particular lo son en D. Luego, la familia de funciones reales $T(x, y) = \mathrm{Im}\big(f(z)\big) = A\theta + B$ son armónicas en el interior de la región angular D.

El contorno de D consta de las semirrectas:

$$y = -x \, , x > 0 \qquad\qquad x = 0 \, , y > 0$$

La primera se caracteriza por $\theta_1 = -\pi/4$ y la segunda por $\theta_2 = \pi/2$. Luego, las condiciones de borde se satisfacen si y sólo si (A, B) es solución del sistema lineal de dos ecuaciones en dos incógnitas:

$$\begin{cases} \left(-\dfrac{\pi}{4}\right) A + B = -2 \\ \left(\dfrac{\pi}{2}\right) A + B = 1 \end{cases}$$

Resolviéndolo se obtiene $(A, B) = \left(\frac{4}{\pi}, -1\right)$. Luego, en puntos interiores de D la solución de este problema de Dirichlet está dada por:

$$T(x, y) = \frac{4}{\pi}\theta - 1 = \frac{4}{\pi}\mathrm{Arg}(z) - 1 = \frac{4}{\pi}\mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) - 1$$

Comprobemos estos resultados en forma directa (nada de lo que sigue es necesario porque queda garantizado por el marco teórico explicado, pero lo haremos una sola vez para apreciar la potencia de la relación entre analíticas y armónicas en dos variables):

- Dado que la ecuación de Laplace es lineal, para ver que $T(x,y)$ es armónica en el interior de D basta ver que $V(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$ lo es:

$$V_x = \frac{-y}{x^2+y^2} \qquad\qquad V_y = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$V_{xx} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \qquad\qquad V_{yy} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

así que $\nabla^2 V = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = 0$ en el interior de D.

Es decir, $V(x,y)$ es armónica allí.

Comprobemos las condiciones de borde:

- Si $x_0 > 0$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,-x_0)\\ y>-x\,,\,x>0}} T(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,-x_0)\\ y>-x\,,\,x>0}} \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) - 1 = \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{-x_0}{x_0}\right) - 1$$

$$= \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}(-1) - 1 = \frac{4}{\pi}\left(-\frac{\pi}{4}\right) - 1 = -2$$

- Si $x_0 = 0, y_0 > 0$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,y_0)\\ y>-x\,,\,x>0}} T(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,y_0)\\ y>-x\,,\,x>0}} \frac{4}{\pi}\overbrace{\operatorname{arctg}\overbrace{\left(\frac{y}{x}\right)}^{\to\,\infty}}^{\to\,\pi/2} - 1 = \frac{4}{\pi}\frac{\pi}{2} - 1 = 2 - 1 = 1$$

Problema de Dirichlet en regiones anulares (coronas) centradas en el origen

Dados $r_1, r_2, T_1, T_2 \in \mathbb{R}$, con $0 < r_1 < r_2$, hallar una función $T(x, y)$ armónica en el interior de $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon\ r_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq r_2^2\}$ sujeta a las siguientes condiciones de contorno (donde $r = |z|, z = x + iy$):

$$T(x, y) = T_1 \ \text{si} \ r = r_1$$
$$T(x, y) = T_2 \ \text{si} \ r = r_2$$

Solución

Consideremos las familias de funciones

$f(z) = A\mathrm{Ln}(z) + B = A(\ln r + i\theta) + B = (A \ln r + B) + iA\theta,$

$g(z) = A\mathrm{Ln}(-z) + B = A(\ln r - i\theta) + B = (A \ln r + B) - iA\theta,$

donde A, B son parámetros reales y $r = |z|$. Las primeras son analíticas en $D_1 = \mathbb{C} - \{x + iy\colon y = 0\ , x \leq 0\}$ y las segundas en $D_2 = \mathbb{C} - \{x + iy\colon y = 0\ , x \geq 0\}$. Por lo tanto, sus partes reales son analíticas en cada uno de esos conjuntos . Pero $\mathrm{Re}\big(f(z)\big) = \mathrm{Re}\big(g(z)\big) = A \ln r + B$, de modo que $T(x, y) = A \ln r + B$ es armónica en $D_1 \cup D_2 = \mathbb{R}^2 - \{(0{,}0)\}$. En particular lo son en el interior de la corona D. Las condiciones sobre el contorno se verifican si y sólo si (A, B) es solución del sistema lineal de dos ecuaciones en dos incógnitas:

$$\begin{cases} A \ln r_1 + B = u_1 \\ A \ln r_2 + B = u_2 \end{cases}$$

Como este sistema tiene solución única pues su determinante es $\ln(r_1/r_2) \neq 0$, se obtiene la solución $u(x, y) = A \ln r + B$ deseada. Es decir, $u(x, y) = A \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) + B$

Ejemplo: Hallar una función $T(x,y)$ armónica en el interior de

$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le x^2+y^2\le 4\}$ sujeta a las siguientes condiciones de contorno:

$$T(x,y)=2 \text{ si } x^2+y^2=1$$
$$T(0,y)=0 \text{ si } x^2+y^2=4$$

Solución Consideremos las familias de funciones

$f(z)=A\mathrm{Ln}(z)+B=A(\ln r+i\theta)+B=(A\ln r+B)+iA\theta,$

$g(z)=A\mathrm{Ln}(-z)+B=A(\ln r-i\theta)+B=(A\ln r+B)-iA\theta,$

donde A,B son parámetros reales y $r=|z|$. Las primeras son analíticas en $D_1=\mathbb{C}-\{x+iy: y=0\,, x\le 0\}$ y las segundas en $D_2=\mathbb{C}-\{x+iy: y=0\,, x\ge 0\}$. Por lo tanto, sus partes reales son analíticas en cada uno de esos conjuntos . Pero $\mathrm{Re}\big(f(z)\big)=\mathrm{Re}\big(g(z)\big)=A\ln r+B$, de modo que $T(x,y)=A\ln r+B$ son armónicas en $D_1\cup D_2=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$. En particular lo son en el interior de la corona D. Las condiciones sobre el contorno se verifican si y sólo si (A,B) es solución del sistema lineal de dos ecuaciones en dos incógnitas:

$$\begin{cases} A.\ln 1+B=2 \\ A.\ln 2+B=0 \end{cases}$$

cuya solución es $(A,B)=\left(-\frac{2}{\ln 2},2\right)$. Entonces la solución del problema es

$$T(x,y)=-\frac{2}{\ln 2}\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)+2$$

Es decir,

$$T(x,y)=2-\frac{1}{\ln 2}\ln(x^2+y^2)$$

OPTATIVO: Unicidad de solución del problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en dos variables

Bajo condiciones muy generales este problema tiene solución única.

Sean $u_1(x,y)$, $u_2(x,y)$ soluciones de clase si $C^2(D)$ para el problema de Dirichlet.

Sea $u = u_1 - u_2$ de modo que $\nabla^2 u = \nabla^2 u_1 - \nabla^2 u_2 = 0 - 0 = 0$ en D.

Además, $u_1(x,y) = g(x,y) = u_2(x,y), \forall (x,y) \in \partial D$. Entonces, $u(x,y) = 0, \forall (x,y) \in \partial D$.

Por lo tanto,

$$\operatorname{div}\left(u\vec{\nabla}u\right) = \vec{\nabla}.\left(u\vec{\nabla}u\right) = \vec{\nabla}.\left\langle uu_x, uu_y\right\rangle = \frac{\partial}{\partial x}(uu_x) + \frac{\partial}{\partial y}\left(uu_y\right)$$

$$= (u_x^2 + uu_{xx}) + \left(u_y^2 + uu_{yy}\right) \overbrace{=}^{(*)} u_x^2 + u_y^2 + u(u_{xx} + u_{yy})$$

Suponiendo que D es simplemente conexo y que ∂D es una curva suficientemente regular, el teorema de Green resulta aplicable al campo vectorial $\vec{F}(x,y) = \left\langle -uu_y, uu_x\right\rangle$, dando lugar a la siguiente igualdad:

$$\oint_{\partial D} -\left(uu_y\right)dx + (uu_x)dy = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(uu_x) + \frac{\partial}{\partial y}\left(uu_y\right)\right) dA$$

Puesto que $u(x,y) = 0, \forall (x,y) \in \partial D$, resulta:

$$\oint_{\partial D} -\left(uu_y\right)dx + (uu_x)dy \overbrace{=}^{(1)} 0$$

Por otra parte, en base a $(*)$:

$$\iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(uu_x) + \frac{\partial}{\partial y}(uu_y)\right) dA = \iint_D \left(u_x^2 + u_y^2 + u(u_{xx} + u_{yy})\right) dA$$

Como $\nabla^2 u = 0$ en D, resulta:

$$\iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(uu_x) + \frac{\partial}{\partial y}(uu_y)\right) dA \overset{(2)}{\overbrace{=}} \iint_D (u_x^2 + u_y^2) dA$$

Luego, de (1) y (2):

$$\iint_D (u_x^2 + u_y^2) dA = 0$$

Siendo el integrando $u_x^2 + u_y^2$ una función continua no negativa en D, la integral anterior sólo puede anularse si su integrando es idénticamente nulo en D. Esto último ocurre si y sólo si $u_x = u_y = 0$ idénticamente en D, es decir cuando $u(x, y)$ es constante allí. Pero como se anula en el contorno, dicha constante necesariamente es cero. Entonces $u(x, y) \equiv 0$ en D.

Nota: la unicidad de solución del problema de Dirichlet puede garantizarse bajo condiciones más generales que las planteadas en la demostración anterior.