MÉTODO DE MÁXIMA VEROSIMILITUD (EMV)

La estimación por máxima verosimilitud es un método de optimización que supone que la distribución de probabilidad de las observaciones es conocida.

Sea $(x_1, \cdots, x_n)$ una muestra aleatoria (no necesariamente simple) de una población X con función de masa P_θ (o función de densidad f_θ) donde $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_n)$.

El estimador de máxima verosimilitud (probabilidad conjunta) de θ es el formado por los valores $(\hat{\theta}_1, \cdots, \hat{\theta}_n)$ que maximizan la *función de verosimilitud* de la muestra $(x_1, \cdots, x_n)$ obtenida:

$$L(\theta) = L(X;\theta) = L(x_1, \cdots, x_n; \theta) = \begin{cases} P(x_1, \theta) \cdots P(x_n, \theta) & \text{caso discreto} \\ \\ f_\theta(x_1) \cdots f_\theta(x_n) & \text{caso continuo} \end{cases}$$

En muchas ocasiones, es más práctico encontrar el estimador de máxima verosimilitud es considerar la función soporte o *log-verosimilitud* $\ln L(\theta)$, en lugar de la función de verosimilitud $L(\theta)$, ya que es más fácil de manejar y presenta los mismos máximos y mínimos.

Se despeja $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \cdots, \hat{\theta}_n)$ de la ecuación: $\left.\dfrac{\vartheta \ln L(\theta)}{\vartheta \theta}\right|_{\theta = \hat{\theta}} = 0$ y se obtiene el estimador de máxima verosimilitud $E.M.V(\hat{\theta})$

MÉTODO DE LOS MOMENTOS

El procedimiento consiste en igualar momentos poblacionales respecto al origen (α_r) a los correspondientes momentos muestrales respecto al origen (a_r), formando así tantas ecuaciones como parámetros poblacionales se pretenden estimar:

$$\begin{cases} \alpha_1 = E(X) = \mu & \rightarrow \quad \hat{\alpha}_1 = a_1 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \overline{x} \\ \alpha_2 = E(X^2) & \rightarrow \quad \hat{\alpha}_2 = a_2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \rightarrow \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_r = E(X^r) & \rightarrow \quad \hat{\alpha}_r = a_r = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^r}{n} \end{cases}$$

COMPRENSIÓN DE LA VEROSIMILITUD. CÁLCULO DE LOS ESTIMADORES MÁXIMO VERSOSÍMILES. PROPIEDADES

1.- Una urna contiene bolas blancas y negras. Sea p la probabilidad de extraer una bola blanca cuando se realiza una extracción al azar. Asociado a este experimento aleatorio tenemos la variable aleatoria X que puede tomar los valores:

X = 1 si la bola extraída es blanca
X = 0 si la bola extraída es negra

La distribución de probabilidad será una B(1; p): $P(X=x) \;=\; p^x\,(1-p)^{1-x}$

Se selecciona una muestra aleatoria con reemplazamiento de tamaño 3 (x_1, x_2, x_3), siendo x_i la variable aleatoria a la extracción i-ésima, y suponemos que ha resultado la siguiente relación (B, N, B). Como el parámetro p es desconocido pretendemos saber, entre los valores, $p = 0,65$ y $p = 0,73$ qué valor hace más probable la aparición de dicha extracción.

Solución:

Si la muestra (B, N, B) es independiente, siendo $\begin{cases} P(B) = p \\ P(N) = 1-p \end{cases}$

$$P(B,N,B) \;=\; P(B \cap N \cap B) \;=\; P(B).P(N).P(B) \;=\; p.(1-p).p \;=\; p^2.\,(1-p)$$

entonces $\begin{cases} p = 0,65: \quad P(B,N,B) \;=\; 0,65^2.0,35 \;= 0,1479 \\ \\ p = 0,73: \quad P(B,N,B) \;=\; 0,73^2.0,27 \;= 0,1439 \end{cases}$

Resulta más probable (p = 0,65), siendo más verosímil.

FUNCIÓN DE VEROSIMILITUD DE LA MUESTRA (EMV).- Sea $(x_1, \cdots, x_n)$ una muestra aleatoria de una población X con función de masa P_θ (o función de densidad f_θ) donde $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_n)$.

El estimador de máxima verosimilitud de θ es el formado por los valores $(\hat{\theta}_1, \cdots, \hat{\theta}_n)$ que maximizan lo que llamaremos *función de verosimilitud* de la muestra $(x_1, \cdots, x_n)$ obtenida:

$$L(\theta) \;=\; L(X;\theta) = \; L(x_1, \cdots, x_n; \theta) \;=\; \begin{cases} P(x_1, \theta) \cdots P(x_n, \theta) \text{ caso discreto} \\ f_\theta(x_1) \cdots f_\theta(x_n) \text{ caso continuo} \end{cases}$$

Si consideramos la m.a.s. (x_1, x_2, x_3), siendo las variables aleatorias x_i independientes, tomando los valores 0, 1, con distribución B(1, p), la distribución de probabilidad asociada será:

$$\left.\begin{array}{l} P(x_1,p) \;=\; P(X=x_1) \;=\; p^{x_1}(1-p)^{1-x_1} \\ P(x_2,p) \;=\; P(X=x_2) \;=\; p^{x_2}(1-p)^{1-x_2} \\ P(x_3,p) \;=\; P(X=x_3) \;=\; p^{x_3}(1-p)^{1-x_3} \end{array}\right\} \; x_i = 1, 0 \;\; \text{sea bola blanca o negra}$$

La función de verosimilitud será:

$$L(p) \;=\; \prod_{i=1}^{3} P(x_i, p) \;=\; p^{x_1}(1-p)^{1-x_1} \,.\, p^{x_2}(1-p)^{1-x_2} \,.\, p^{x_3}(1-p)^{1-x_3} \;=$$

$$= \; p^{x_1+x_2+x_3}\,(1-p)^{3-(x_1+x_2+x_3)}$$

En la muestra (B, N, B) el valor que toma la función de verosimilitud será:

$$L(p) \;=\; p^{1+0+1}(1-p)^{3-(1+0+1)} \;=\; p^2.\,(1-p)$$

2.- Un atleta olímpico de salto de altura se enfrenta a un listón de 2,3 metros. Su entrenador desea estudiar el comportamiento del saltador. Sabe que el número de saltos fallidos por hora es una variable aleatoria distribuida como una Poisson de parámetro λ.

a) Calcular el estimador máximo verosímil del parámetro λ.

b) Analizar sus propiedades.

Solución:

a)

En muchas ocasiones, es más práctico encontrar el estimador de máxima verosimilitud es considerar la función soporte o ***log-verosimilitud*** $\ln L(\theta)$, en lugar de la función de verosimilitud $L(\theta)$, ya que es más fácil de manejar y presenta los mismos máximos y mínimos.
Se despeja $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \cdots, \hat{\theta}_n)$ de la ecuación: $\left.\dfrac{\vartheta \ln L(\theta)}{\vartheta\theta}\right\vert_{\theta=\hat{\theta}} = 0$ y se obtiene el estimador de máxima verosimilitud $E.M.V(\hat{\theta})$

Sea la v.a. X = 'número de saltos fallidos por hora'

En la distribución de Poisson: $P(X=x) \;=\; \dfrac{\lambda^x}{x!}\,e^{-\lambda} \qquad \begin{cases} E(x)=\lambda \\ V(x)=\lambda \end{cases}$

En una muestra aleatoria simple de tamaño n, la función de verosimilitud $L(X,\lambda)$:

$$L(\lambda) \;=\; L(X,\lambda) \;=\; \prod_{i=1}^{n} P(x_i,\lambda) \;=\; \frac{\lambda^{x_1}}{x_1!}\,e^{-\lambda} \cdots \frac{\lambda^{x_n}}{x_n!}\,e^{-\lambda} \;=\; \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}\,e^{-n\lambda}$$

$$L(X,\lambda) = \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}\, e^{-n\lambda} \Rightarrow \ln L(X,\lambda) = \ln\left[\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}\, e^{-n\lambda}\right] = \ln(\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}) - \ln(\prod_{i=1}^{n} x_i!) + \ln(e^{-n\lambda}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \ln\lambda - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i!) - n\lambda$$

$$\ln L(X,\lambda) = \sum_{i=1}^{n} x_i \ln\lambda - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i!) - n\lambda$$

Para obtener el estimador de máxima verosimilitud $EMV(\hat{\lambda})$, se deriva la expresión anterior respecto del parámetro para obtener, sustituyendo λ por $\hat{\lambda}$

$$\left.\frac{\vartheta \ln L(X,\lambda)}{\vartheta\lambda}\right|_{\lambda=\hat{\lambda}} = 0 = \left.\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{1}{\lambda} - n\right|_{\lambda=\hat{\lambda}} = 0 \Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{x}$$

El estimador de máxima verosimilitud viene dado por la media muestral: $EMV(\hat{\lambda}) = \bar{x}$

b) Analizar las propiedades (Insesgadez, Consistencia)

- Insesgadez

El estimador sería insesgado si $E(\hat{\lambda}) = \lambda$

$$E(\hat{\lambda}) = E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right] = \frac{1}{n} E(\sum_{i=1}^{n} x_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(x_i) = \frac{1}{n}(n\lambda) = \lambda$$

$$V(\hat{\lambda}) = V(\bar{x}) = V\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(x_i) = \frac{1}{n^2}(n\lambda) = \frac{\lambda}{n}$$

- Consistencia

Cuando no es posible emplear estimadores de máxima verosimilitud, el requisito mínimo deseable para un estimador es que sea consistente.

> Un estimador $\hat{\lambda}$ *consistente* es un estimador asintóticamente insesgado cuya varianza tiende a cero al aumentar el tamaño muestral.
> El estimador $\hat{\lambda}$ es *consistente* cuando $\lim_{n\to\infty} E(\hat{\lambda}) = \lambda$ y $\lim_{n\to\infty} V(\hat{\lambda}) = 0$

$$\lim_{n\to\infty} E(\hat{\lambda}) = \lim_{n\to\infty} \lambda = \lambda \quad y \quad \lim_{n\to\infty} V(\hat{\lambda}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda}{n} = 0$$

14.- Calcular el estimador máximo verosímil del parámetro 'a' de las funciones:

a) $f(x,a)=a^2\,e^{-ax}$ siendo $x\geq 0$ en muestras aleatorias simples de tamaño n

b) $f(x,a)=a\,e^{-ax}$ para $x\geq 0$, $a>0$ en muestras aleatorias simples de tamaño 2

Solución:

a) $f(x,\,a)=a^2\,e^{-ax}$ donde $x\geq 0$ en m.a.s. de tamaño n

La función de verosimilitud

$$L=L(x_1,\,x_2,\;\cdots\;,x_n\,;a)=(a^2\,e^{-a\,x_1}).(a^2\,e^{-a\,x_2})\cdots(a^2\,e^{-a\,x_n})=a^{2n}\,e^{-a\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

aplicando logaritmos neperianos: $\ln L=\log\,(a^{2n}\,e^{-a\sum_{i=1}^{n}x_i})=2n\,\ln a-a\sum_{i=1}^{n}x_i$

derivando respecto de **a** e igualando a cero:

$$\frac{\vartheta(\ln L)}{\vartheta a}=\frac{2n}{a}-\sum_{i=1}^{n}x_i=0\;\Rightarrow\;\hat{a}=\frac{2n}{\sum_{i=1}^{n}x_i}=\frac{2}{\overline{x}}\qquad\qquad \hat{a}=\frac{2}{\overline{x}}$$

b) Sea $f(x,\,a)=a\,e^{-ax}$ para $x\geq 0$, $a>0$ en m.a.s. de tamaño 2

La función de verosimilitud

$$L=L(x_1,\,x_2\,;a)=(a\,e^{-a\,x_1}).(a\,e^{-a\,x_2})=a^2\,e^{-a(x_1+x_2)}$$

aplicando logaritmos neperianos: $\ln L=\log\,(a^2\,e^{-a(x_1+x_2)})=2\,\ln a-a(x_1+x_2)$

derivando respecto de 'a' e igualando a cero:

$$\frac{\vartheta(\ln L)}{\vartheta a}=\frac{2}{a}-(x_1+x_2)=0\;\Rightarrow\;\hat{a}=\frac{2}{x_1+x_2}=\frac{1}{\overline{x}}$$

15.- Sea la distribución $N(\mu, \sigma)$, con la media y varianza desconocidas. Calcular los estimadores máximo-verosímiles de μ y σ^2

Solución:

La función de verosimilitud es:

$$L(X; \mu, \sigma^2) = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x_1-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x_2-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right]\cdots\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x_n-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right] =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\,(\sigma^2)^{\frac{n}{2}}}\, e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

tomando logaritmos neperianos, se tiene:

$$\ln\left[L(X; \mu, \sigma^2)\right] = \ln\left[\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\,(\sigma^2)^{\frac{n}{2}}}\, e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right] = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

y derivando respecto de μ y σ^2 e igualando a cero:

$$\left[\frac{\vartheta \ln L(X; \mu, \sigma^2)}{\vartheta\mu}\right]_{\mu=\hat{\mu}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{\mu})}{\sigma^2} = 0 \quad \mapsto \quad \hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \overline{x}$$

$$\left[\frac{\vartheta \ln L(X; \mu, \sigma^2)}{\vartheta\mu}\right]_{\sigma^2=\hat{\sigma}^2} = -\frac{n}{\hat{\sigma}} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\hat{\sigma}^3} = 0 \quad \mapsto \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{n}$$

resolviendo el sistema resulta: $\hat{\mu} = \overline{x}$ y $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n} = \sigma_x^2$

La condición de máximo se verifica, pues: $\left[\dfrac{\vartheta^2 \ln L(X;\ \mu)}{\vartheta\mu^2}\right]_{\mu=\hat{\mu}} = -\dfrac{n}{\sigma^2} < 0$

Los estimadores máximo-verosímiles de μ y σ^2 son la media y la varianza muestrales.

CÁLCULO DE ESTIMADOR POR EL MÉTODO DE LOS MOMENTOS

20.- Sea una población definida por: $P(X=-1)=\dfrac{1-\theta}{2}$, $P(X=0)=\dfrac{\theta+\lambda}{2}$,

$P(X=1)=\dfrac{1-\lambda}{2}$, donde $0<\theta<1$, $0<\lambda<1$

Estimar los parámetros θ y λ por el método de los momentos, estudiando si son insesgados.

Solución:

MÉTODO DE LOS MOMENTOS.- El procedimiento consiste en igualar momentos poblacionales respecto al origen (α_r) a los correspondientes momentos muestrales respecto al origen (a_r), formando así tantas ecuaciones como parámetros poblacionales se pretenden estimar:

$$\begin{cases} \alpha_1 = E(X)=\mu \;\Rightarrow\; \hat{\alpha}_1 = a_1 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \overline{x} \\ \alpha_2 = E(X^2) \;\Rightarrow\; \hat{\alpha}_2 = a_2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_r = E(X^r) \;\Rightarrow\; \hat{\alpha}_r = a_r = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^r}{n} \end{cases}$$

Puesto que hay que estimar dos parámetros hay que calcular los dos primeros momentos.

$$\overbrace{\alpha_1 = \mu = E(X) = \sum_i x_i\,P(X=x_i) = (-1)\left(\frac{1-\theta}{2}\right) + (0)\left(\frac{\theta+\lambda}{2}\right) + (1)\left(\frac{1-\lambda}{2}\right) = \frac{\theta-\lambda}{2}}^{\text{momentos poblacionales}}$$

$$\alpha_2 = E(X^2) = \sum_i x_i^2\,P(X=x_i) = (-1)^2\left(\frac{1-\theta}{2}\right) + (0)^2\left(\frac{\theta+\lambda}{2}\right) + (1)^2\left(\frac{1-\lambda}{2}\right) = \frac{2-\theta-\lambda}{2}$$

$$a_1 = \overbrace{\overline{x} = \frac{\sum_i x_i}{n} \qquad a_2 = \frac{\sum_i x_i^2}{n}}^{\text{momentos muestrales}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 = a_1 \;\Rightarrow\; \dfrac{\theta-\lambda}{2} = \overline{x} \;\Rightarrow\; \theta-\lambda = 2\overline{x} \\ \\ \alpha_2 = a_2 \;\Rightarrow\; \dfrac{2-\theta-\lambda}{2} = a_2 \;\Rightarrow\; -\theta-\lambda = 2a_2-2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \theta-\lambda = 2\overline{x} \\ -\theta-\lambda = 2a_2-2 \end{array} \begin{cases} \hat{\lambda} = 1-a_2-\overline{x} \\ \hat{\theta} = 1-a_2+\overline{x} \end{cases}$$

- Un estimador $\hat{\theta}$ es insesgado (o centrado) cuando se verifica $E(\hat{\theta}) = \theta$

$$E(\hat{\theta}) = E(1 - a_2 + \overline{x}) = 1 - E(a_2) + E(\overline{x}) = 1 - \alpha_2 + \mu = 1 - \left(\frac{2-\theta-\lambda}{2}\right) + \left(\frac{\theta-\lambda}{2}\right) = \theta$$

$$E(\hat{\lambda}) = E(1 - a_2 - \overline{x}) = 1 - E(a_2) - E(\overline{x}) = 1 - \alpha_2 - \mu = 1 - \left(\frac{2-\theta-\lambda}{2}\right) - \left(\frac{\theta-\lambda}{2}\right) = \lambda$$

Los estimadores θ y λ son insesgados.

CÁLCULO DE ESTADÍSTICOS. FUNCIÓN DE DENSIDAD

21.- Una muestra aleatoria $(X_1, \cdots, X_n)$ de la población tiene como función de densidad $f_\theta(x) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1} & \text{si } x \in (0,1) \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} \quad \theta > 0$

a) Estimador de máxima verosimilitud de θ

b) Estimador de θ por el método de los momentos

Solución:

a) $L(\theta) = \theta^n (x_1 \cdots x_n)^{\theta-1}$

$$\ln L(\theta) = \ln\left[\theta^n (x_1 \cdots x_n)^{\theta-1}\right] = \ln\theta^n + \ln\prod_{i=1}^{n} x_i^{\theta-1} = \ln\theta^n + \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i^{\theta-1})$$

$$\ln L(\theta) = n\ln\theta + [\theta-1]\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) \Rightarrow \frac{\vartheta \ln L(\theta)}{\vartheta\theta} = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) = 0 \mapsto \hat{\theta} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)}$$

) Se plantea la ecuación $E[X] = \bar{x}$

$$\bar{x} = E(X) = \int_0^1 x\,f_\theta(x)\,dx = \int_0^1 x\,\theta x^{\theta-1}\,dx = \int_0^1 \theta x^\theta\,dx = \theta\left[\frac{x^{\theta+1}}{\theta+1}\right]_0^1 = \frac{\theta}{\theta+1}$$

$$\bar{x}(\theta+1) = \theta \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{\bar{x}}{1-\bar{x}}$$

22.- Una muestra aleatoria $(X_1, \cdots, X_n)$ de la población tiene como función de densidad

$$f_\theta(x) = \begin{cases} e^{-x+\theta} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Hallar un estimador por el método de los momentos de θ

b) Estudiar si el estimador encontrado en el apartado anterior es insesgado para estimar el parámetro θ

Solución:

a) Se plantea la ecuación: $E[X] = \bar{x}$

$$\bar{x} = E[X] = \int_\theta^\infty x\,f_\theta(x)\,dx = \overbrace{\int_\theta^\infty x\,e^{-x+\theta}\,dx}^{\text{integración por partes}} = \theta + 1 \Rightarrow \hat{\theta} = \bar{x} - 1$$

b) Un estimador es insesgado o centrado cuando su valor probable coincide con el valor del parámetro a estimar. Es decir, $E[\hat{\theta}] = \theta$

$$E[\hat{\theta}] = E(\bar{x}-1) = E(\bar{x}) - 1 = (\theta+1) - 1 = \theta$$

📖 Integración por partes:

$$\int \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{e^{-x+\theta}dx}_{dv} = \underbrace{x}_{u}(\underbrace{-e^{-x+\theta}}_{v}) - \int \underbrace{-e^{-x+\theta}}_{v}\,\underbrace{dx}_{du} = -x\,e^{-x+\theta} - e^{-x+\theta} = -(1+x)\,e^{-x+\theta} = -e^{-\theta}\left(\frac{1+x}{e^x}\right)$$

$$\int_{\theta}^{\infty} x\,e^{-x+\theta}dx = -e^{-\theta}\left(\frac{1+x}{e^x}\right)_{\theta}^{\infty} = 1+\theta$$

23.- Una muestra aleatoria $(X_1, \cdots, X_n)$ de la población tiene como función de densidad $f_\theta(x)=\begin{cases}\theta^2 x\,e^{-\theta x} & \text{si } x>0\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$

Hallar el estimador de máxima verosimilitud de θ

Solución:

La función de verosimilitud $L(\theta)$

$$L(\theta) = f_\theta(x_1)\,f_\theta(x_2)\cdots f_\theta(x_n) = \left[\theta^2 x_1 e^{-\theta x_1}\right]\left[\theta^2 x_2 e^{-\theta x_2}\right]\cdots\left[\theta^2 x_n e^{-\theta x_n}\right]=$$

$$= \theta^{2n}(x_1\cdots x_n)\,e^{-(\theta x_1+\theta x_2+\cdots+\theta x_n)} = \theta^{2n}(x_1\cdots x_n)\,e^{-\theta\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

$$L(\theta) = \theta^{2n}(x_1\cdots x_n)\,e^{-\theta\sum_{i=1}^{n}x_i} \Rightarrow \ln L(\theta) = \ln\left[\theta^{2n}(x_1\cdots x_n)\,e^{-\theta\sum_{i=1}^{n}x_i}\right]$$

$$\ln L(\theta) = (2n)\ln\theta + \ln\prod_{i=1}^{n}x_i - \theta\sum_{i=1}^{n}x_i \Rightarrow \ln L(\theta) = (2n)\ln\theta + \sum_{i=1}^{n}\ln x_i - \theta\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$\frac{\vartheta \ln L(\theta)}{\vartheta\theta} = \frac{2n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n}x_i = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{2n}{\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

24.- El coseno X del ángulo con el que se emiten los electrones en un proceso radioactivo es una variable aleatoria con función de densidad

$$f_\theta(x)=\begin{cases}(1+\theta x)/2 & -1\le x\le 1\ ,\ -1\le\theta\le 1\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$$

Consideremos una muestra aleatoria $(X_1, \cdots, X_n)$ de esta variable aleatoria

a) Obtener el estimador θ por el método de los momentos

b) Calcular la varianza de este estimador y demostrar que es consistente

Solución:

a) Se plantea la ecuación $E[X] = \overline{x}$

$$\bar{x} = E[X] = \int_{-1}^{1} x \frac{1+\theta x}{2}\, dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{\theta x^3}{6}\right]_{-1}^{1} = \frac{\theta}{3} \quad \Rightarrow \quad \hat{\theta} = 3\bar{x}$$

b) $V(\hat{\theta}) = V(3\bar{x}) = 9V(\bar{x}) = 9\,\frac{V(X)}{n} = \frac{9}{n}\,V(X)$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_{-1}^{1} x^2 \frac{1+\theta x}{2}\, dx - \left[\frac{\theta}{3}\right]^2 = \left[\frac{x^3}{6} + \frac{\theta x^4}{8}\right]_{-1}^{1} - \left[\frac{\theta}{3}\right]^2 = \frac{3-\theta^2}{9}$$

de donde, $V(\hat{\theta}) = \frac{9}{n}\,V(X) = \frac{9}{n}\left[\frac{3-\theta^2}{9}\right] = \frac{3-\theta^2}{n}$

Para probar que $\hat{\theta}$ es consistente para estimar θ es suficiente probar $\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} E(\hat{\theta}) = \theta \\ \lim\limits_{n\to\infty} V(\hat{\theta}) = 0 \end{cases}$

$$\lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}) = \lim_{n\to\infty} E(3\bar{x}) = \lim_{n\to\infty} 3E(\bar{x}) = 3E(X) = 3\,\frac{\theta}{3} = \theta$$

$$\lim_{n\to\infty} V(\hat{\theta}) = \lim_{n\to\infty} V(3\bar{x}) = \lim_{n\to\infty} \frac{3-\theta^2}{n} = 0$$

Por tanto, queda probado que $\hat{\theta}$ es consistente para estimar θ

25.- En un estacionamiento el número de veces que se abre la barrera en un intervalo de 10 minutos, para que pasen vehículos en un sector de seguridad, se considera una variable aleatoria con distribución de Poisson de parámetro λ desconocido.

a) En una muestra aleatoria de 8 intervalos de 10 minutos cada uno, elegidos de forma independiente, se registra para cada intervalo el valor que toma la variable en estudio.

3	5	8	7	4	5	6	2

Encontrar la estimación máximo verosímil de λ

b) Sea $(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$ una muestra aleatoria de tamaño n que sigue una distribución de Poisson. Si $\hat{\lambda}_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}$, $\hat{\lambda}_2 = \frac{x_1 + 3x_n}{4}$ son estimadores. Determinar el mejor estimador del parámetro λ

Solución:

a) X = "número de veces que se abre la barrera en un intervalo de 10 minutos", $X \sim P(\lambda)$

$$P(X,\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} & x = 0, 1, 2, ... \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

La función de verosimilitud $L(\lambda)$:

$$L(\lambda) = L(X,\lambda) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i,\lambda) = \frac{\lambda^{x_1}}{x_1!}\, e^{-\lambda} \cdots \frac{\lambda^{x_n}}{x_n!}\, e^{-\lambda} = \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}\, e^{-n\lambda}$$

$$\ln L(X,\lambda) = \ln\left(\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}\, e^{-n\lambda} \right) = \ln(\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}) - \ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i!\right) + \ln(e^{-n\lambda}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \ln\lambda - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i!) - n\lambda$$

$$\ln L(X,\lambda) = \sum_{i=1}^{n} x_i \ln\lambda - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i!) - n\lambda$$

Para obtener el estimador de máxima verosimilitud $EMV(\hat{\lambda})$, se deriva la expresión anterior respecto del parámetro para obtener, sustituyendo λ por $\hat{\lambda}$

$$\left.\frac{\vartheta \ln L(X,\lambda)}{\vartheta\lambda}\right|_{\lambda=\hat{\lambda}} = 0 = \left.\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{1}{\lambda} - n\right|_{\lambda=\hat{\lambda}} = 0 \;\Rightarrow\; \hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{x}$$

El estimador de máxima verosimilitud viene dado por la media muestral: $EMV(\hat{\lambda}) = \bar{x}$

Utilizando la muestra aleatoria de ocho intervalos de 10 minutos, se obtiene el estimador máximo verosímil:

$$\hat{\lambda} = \frac{3+5+8+7+4+5+6+2}{8} = 5$$

En consecuencia, en una muestra aleatoria de ocho intervalos de 10 minutos cada uno, elegidos de forma independiente, la estimación máxima verosímil corresponde a que la barrera se abre 5 veces.

b) Se analizan si los estimadores son o no insesgados, esto es, si la esperanza del estimador coincide con el parámetro a estimar.

$$E(\hat{\lambda}_1) = E\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(x_i) = \frac{n\lambda}{n} = \lambda$$

$$E(\hat{\lambda}_2) = E\left(\frac{x_1 + 3x_n}{4}\right) = \frac{1}{4}\big[E(x_1) + 3E(x_2)\big] = \frac{\lambda + 3\lambda}{4} = \lambda$$

Ambos estimadores son insesgados. La varianza de cada estimador:

$$V(\hat{\lambda}_1) = V\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(x_i) = \frac{n\lambda}{n^2} = \frac{\lambda}{n}$$

$$V(\hat{\lambda}_2) = V\left(\frac{x_1 + 3x_n}{4}\right) = \frac{1}{16}\big[V(x_1) + 9V(x_2)\big] = \frac{\lambda + 9\lambda}{16} = \frac{10\lambda}{16} = \frac{5\lambda}{8}$$

En conclusión, la efectividad de los estimadores depende del tamaño de la muestra:

Si la muestra es igual a 1 $(n=1)$ el estimador más eficiente es $\hat{\lambda}_2$
Si la muestra es mayor que 1 $(n>1)$ el estimador más eficiente es $\hat{\lambda}_1$

26.- Sea $(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$ una muestra aleatoria de tamaño n, distribuida según $f(x,\theta)$ con θ desconocido, donde X representa el tiempo máximo necesario para determinar un proceso en segundos:

$$f(X,\theta)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta} & 0\le x\le 1;\ \theta>-1\\ 0 & \text{otro caso}\end{cases}$$

a) Determinar el estimador máximo verosímil de θ

b) Determinar la estimación máximo verosímil de θ en una muestra aleatoria simple constituida por los datos: 0,7 ; 0,9 ; 0,6 ; 0,8 ; 0,9 ; 0,7 ; 0,9.

Estimar la probabilidad del tiempo máximo necesario para terminar un proceso, que no exceda de 0,25 segundos ni supere los 0,75 segundos.

c) Determinar el estimador máximo verosímil de: (a) $\theta+1$ (b) $\dfrac{2\theta+1}{\theta-1}$

Solución:

a) La función de verosimilitud $L(\theta)\ =\ L(X,\theta)\ =\displaystyle\prod_{i=0}^{n} f(x_i,\theta)$

$$L(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n;\theta)=\left[(\theta+1)x_1^{\theta}\right]\left[(\theta+1)x_2^{\theta}\right]\ \cdots\cdots\ \left[(\theta+1)x_n^{\theta}\right]=(\theta+1)^n\prod_{i=0}^{n}x_i^{\theta}$$

Calculando el logaritmo natural de $L(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n;\theta)$:

$$\ln\left[L(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n;\theta)\right]=\ln\left((\theta+1)^n\prod_{i=0}^{n}x_i^{\theta}\right)=\ln(\theta+1)^n+\ln\left(\prod_{i=0}^{n}x_i^{\theta}\right)$$

$$\ln\left[L(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n;\theta)\right]=n\ \ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=0}^{n}\ln x_i$$

Para obtener el estimador de máxima verosimilitud $EMV(\hat{\theta})$, se deriva la expresión anterior respecto del parámetro para obtener, sustituyendo θ por $\hat{\theta}$

$$\left.\frac{\vartheta\ln\left[L(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n;\theta)\right]}{\vartheta\theta}\right|_{\theta=\hat{\theta}}=\frac{n}{\hat{\theta}+1}+\sum_{i=0}^{n}\ln x_i=0\quad\mapsto\quad\frac{n}{\hat{\theta}+1}=-\sum_{i=0}^{n}\ln x_i$$

$$\hat{\theta} = \text{EMV}(\theta) = -\frac{n}{\sum_{i=0}^{n} \ln x_i} - 1$$

b) El estimador máximo verosímil de θ con los datos de la muestra:

$$\hat{\theta} = -\frac{8}{\ln 0,7 + \ln 0,9 + \ln 0,6 + \ln 0,8 + \ln 0,9 + \ln 0,7 + \ln 0,9 + \ln 0,8} - 1 = 4,027 - 1 = 3,027$$

El estimador máximo verosímil $\text{EMV}(\theta) = \hat{\theta} = 3,027$

De otra parte,

$$P(0,25 \leq X \leq 0,75) = \int_{0,25}^{0,75} f(X,\hat{\theta})\,dx = \int_{0,25}^{0,75} (\hat{\theta}+1)x^{\hat{\theta}}\,dx = (\hat{\theta}+1)\left.\frac{x^{\hat{\theta}+1}}{(\hat{\theta}+1)}\right|_{0,25}^{0,75} = \left. x^{\hat{\theta}+1}\right|_{0,25}^{0,75}$$

$$P(0,25 \leq X \leq 0,75) = 0,75^{4,027} - 0,25^{4,047} = 0,31$$

La probabilidad del tiempo máximo necesario para terminar el proceso (entre 0,25 y 0,75 segundos) es 0,31

c) El estimador máximo verosímil de $\theta + 1$ y $\dfrac{2\theta+1}{\theta-1}$

$$\text{EMV}[\theta+1] = \text{EMV}[\theta] + 1 = \hat{\theta} + 1 = 3,027 + 1 = 4,027$$

$$\text{EMV}\left(\frac{2\theta+1}{\theta-1}\right) = \frac{2\,\text{EMV}(\theta)+1}{\text{EMV}(\theta)-1} = \frac{2\hat{\theta}+1}{\hat{\theta}-1} = \frac{2 \times 3,027+1}{3,027-1} = 2,493$$