

Introducción al Procesamiento de Señales

Curso 2024

Tema 5 - Análisis en Frecuencia de Señales y Sistemas Discretos

Santiago Rodríguez

Introducción

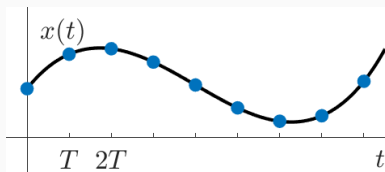
Transformadas:

Señales	Tiempo Continuo	Tiempo Discreto
A-Periódicas	Transformada de Fourier (TF)	Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (TFTD) Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (TFTD)
Periódicas	Serie de Fourier (SF) & TF	Serie Discreta de Fourier (SDF) & TFTD

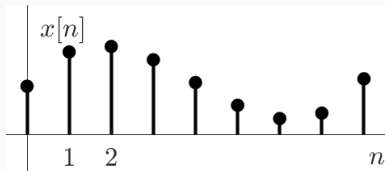
Motivación:

Análisis Frecuencial SVID

- Desde el punto de vista computacional (no-simbólico) no es posible trabajar con funciones de variable independiente continua.
- En general se trabaja con secuencias (funciones de VI discreta).
- Secuencia $x[n]$, con $n \in \mathbb{Z}$, es un conjunto ordenado (sucesión) de valores.
- Dada $x(t)$ real o compleja



- $x[n] \triangleq x(nT)$, $n \in \mathbb{Z}$
- *Intervalo de muestreo:* T .
- *Frec. de muestreo:* $f_s = \frac{1}{T}$.



Transformada de Fourier de Tiempo Discreto

Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (TFTD)

Definición:

Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (TFTD) directa (ecuación de análisis):

$$X(e^{j2\pi s}) = \text{TFTD}\{x[\cdot]\}(e^{j2\pi s}) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j2\pi sn}$$

Transformada de Fourier de Tiempo Discreto inversa (o ecuación de síntesis):

$$x[n] = \text{TFTD}^{-1}\{X(\cdot)\}[n] \triangleq \int_{-1/2}^{+1/2} X(e^{j2\pi s})e^{j2\pi sn}ds$$

Propiedades

Propiedades 1

Periodicidad (con período 1 -no necesariamente el fundamental-):

$$\begin{aligned} X(e^{j2\pi(s+1)}) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j2\pi(s+1)n} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j2\pi sn} \cancel{e^{-j2\pi 1n}} \overset{1}{=} X(e^{j2\pi s}) \end{aligned}$$

Linealidad:

$$x_1[n] \xleftrightarrow{\text{TFTD}} X_1(e^{j2\pi s})$$

$$x_2[n] \xleftrightarrow{\text{TFTD}} X_2(e^{j2\pi s})$$

$$a x_1[n] + b x_2[n] \xleftrightarrow{\text{TFTD}} a X_1(e^{j2\pi s}) + b X_2(e^{j2\pi s})$$

Propiedades 2

Desplazamiento en Tiempo y en Frecuencia:

$$x[n - n_0] \xleftrightarrow{\text{TFTD}} e^{-j2\pi sn_0} X(e^{j2\pi s})$$

$$e^{j2\pi s_0 n} x[n] \xleftrightarrow{\text{TFTD}} X(e^{j2\pi(s-s_0)})$$

Simetrías:

$$x^*[n] \xleftrightarrow{\text{TFTD}} X^*(e^{-j2\pi s})$$

$$x[-n] \xleftrightarrow{\text{TFTD}} X(e^{-j2\pi s})$$

Propiedades 3

Diferenciar

$$x[n] - x[n-1] \xleftrightarrow{\text{TFTD}} (1 - e^{-j2\pi s})X(e^{j2\pi s})$$

Acumular

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] \xleftrightarrow{\text{TFTD}} Y(e^{j2\pi s}) = \frac{X(e^{j2\pi s})}{1 - e^{-j2\pi s}} + \underbrace{\frac{1}{2}X(e^{j0}) \uparrow\uparrow\uparrow(s)}_{\text{valor medio}}$$

Derivar en frecuencia

$$n x[n] \xleftrightarrow{\text{TFTD}} \frac{j}{2\pi} \frac{dX(e^{j2\pi s})}{ds}$$

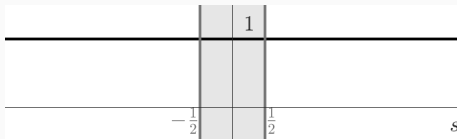
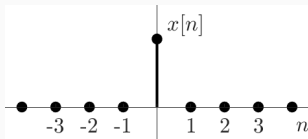
Pares Transformados

Algunos Pares Transformados 1

Delta de Kronecker

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] e^{-j2\pi ns} = 1$$

$$\delta[n] \supset 1$$

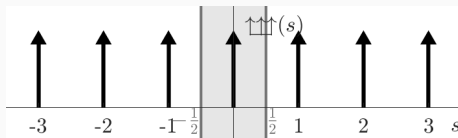
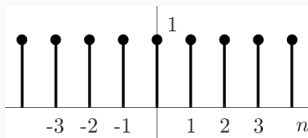


Algunos Pares Transformados 2

Constante

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} 1 e^{-j2\pi ns} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(s - k) = \text{III}(s)$$

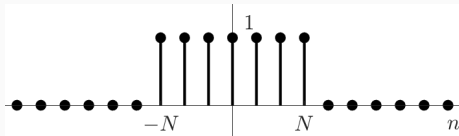
$$1 \supset \text{III}(s)$$



Algunos Pares Transformados 3

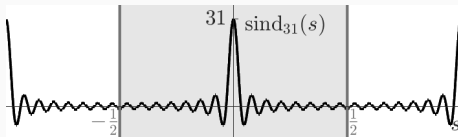
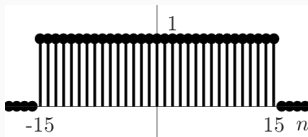
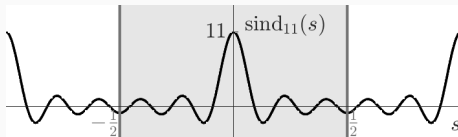
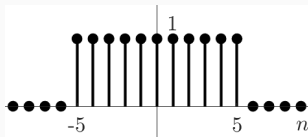
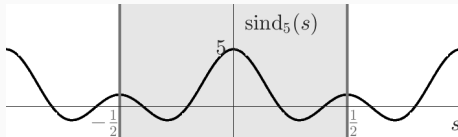
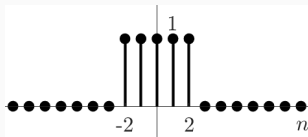
Cajón

$$x[n] = \Pi_{2N+1}[n]$$



$$\begin{aligned} X(e^{j2\pi s}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi sn} = \sum_{n=-N}^N e^{-j2\pi sn} \\ &= \frac{e^{j2\pi sN} - e^{-j2\pi s(N+1)}}{1 - e^{-j2\pi s}} \\ &= \frac{e^{-j\pi s} e^{j2\pi s(N+1/2)} - e^{-j2\pi s(N+1/2)}}{e^{-j\pi s} (e^{j\pi s} - e^{-j\pi s})} \\ &= \frac{\text{sen}((2N+1)\pi s)}{\text{sen } \pi s} \\ &= \text{sind}_{2N+1}(s) \end{aligned}$$

Algunos ejemplos de Cajones y sus transformadas

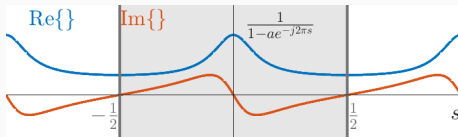
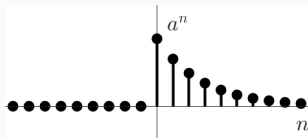


Algunos Pares Transformados 4

Exponencial unilateral $x[n] = a^n u[n]$ con $|a| < 1$

$$\begin{aligned} X(e^{j2\pi s}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi sn} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j2\pi sn} \\ &= \frac{1}{1 - ae^{-j2\pi s}} \end{aligned}$$

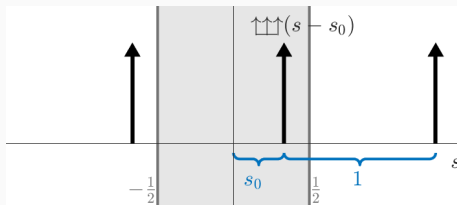
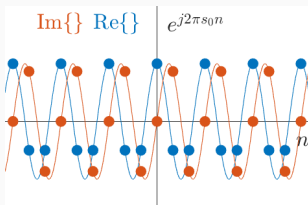
$$a^n u[n] \hookrightarrow \frac{1}{1 - ae^{-j2\pi s}}$$



Pares con propiedades: Desplazamiento en frecuencia

Exponencial imaginaria

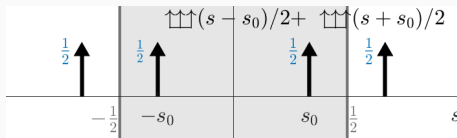
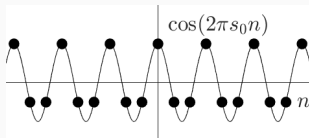
$$e^{j2\pi s_0 n} \supset \uparrow\uparrow(s - s_0)$$



Pares con propiedades: Desplazamiento en frecuencia

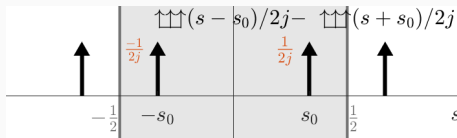
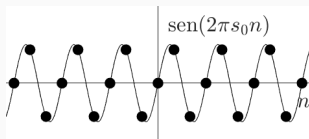
Coseno

$$\cos(2\pi s_0 n) \supset \frac{1}{2} \uparrow\uparrow\uparrow(s + s_0) + \frac{1}{2} \uparrow\uparrow\uparrow(s - s_0)$$



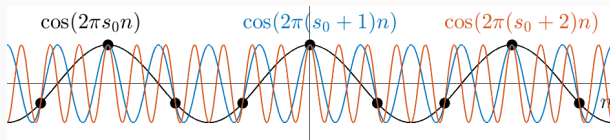
Seno

$$\sen(2\pi s_0 n) \supset \frac{j}{2} \uparrow\uparrow\uparrow(s + s_0) - \frac{j}{2} \uparrow\uparrow\uparrow(s - s_0)$$



Frecuencia máxima

$$e^{j2\pi s_0 n} = e^{j2\pi(s_0 + N)n} \quad N \in \mathbb{Z} \text{ y } |s_0| < 1/2$$



$$\begin{aligned} e^{j2\pi(s_0 + N)n} &\supset \uparrow\uparrow\uparrow(s - s_0 - N) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(s - s_0 - N - k) \\ &= \sum_{k'=-\infty}^{\infty} \delta(s - s_0 - k') \\ &= \uparrow\uparrow\uparrow(s - s_0) \end{aligned}$$

Pares con propiedades: Utilizando diferencias

Escalón señal con media

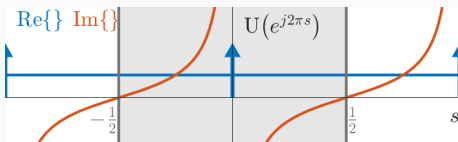
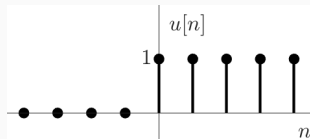
$$u[n] = \bar{u} + \tilde{u}[n] = \frac{1}{2} + \tilde{u}[n]$$

$$U(e^{j2\pi s}) = \frac{1}{2} \uparrow\uparrow\uparrow(s) + \tilde{U}(e^{j2\pi s})$$

$$u[n] - u[n-1] = \delta[n]$$

$$\tilde{U}(e^{j2\pi s}) = \frac{1}{1 - e^{-j2\pi s}}$$

$$u[n] \supset \frac{1}{2} \uparrow\uparrow\uparrow(s) + \frac{1}{1 - e^{-j2\pi s}}$$



Convolución y producto de secuencias

TFTD de la Convolución de secuencias

Si $x[n] \supset X(e^{j2\pi s})$, $y[n] \supset Y(e^{j2\pi s})$

$$\{x * y\}[n] \supset X(e^{j2\pi s}) Y(e^{j2\pi s})$$

$$\begin{aligned}\{x * y\}[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-1/2}^{1/2} X(e^{j2\pi s}) e^{j2\pi ks} ds y[n-k] \\&= \int_{-1/2}^{1/2} X(e^{j2\pi s}) \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} y[n-k] e^{-j2\pi(n-k)s} \right\} e^{j2\pi ns} ds \\&= \int_{-1/2}^{1/2} X(e^{j2\pi s}) Y(e^{j2\pi s}) e^{j2\pi ns} ds = \text{TFTD}^{-1} \{X(e^{j2\pi s}) Y(e^{j2\pi s})\}\end{aligned}$$

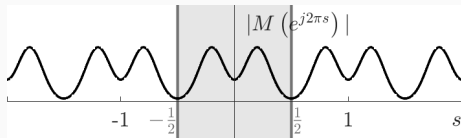
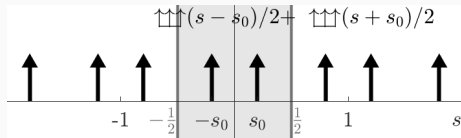
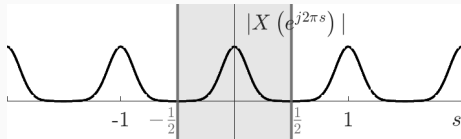
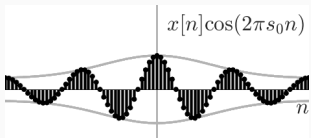
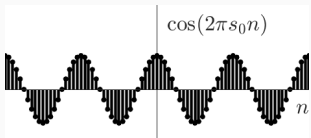
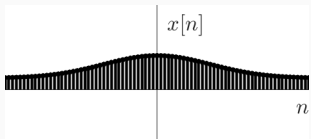
TFTD de la Multiplicación de secuencias

Sea $z[n] = x[n]y[n]$

$$\begin{aligned} Z(e^{j2\pi s}) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[k]e^{-j2\pi sk} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \left\{ \int_{-1/2}^{1/2} Y(e^{j2\pi\lambda}) e^{j2\pi k\lambda} d\lambda \right\} e^{-j2\pi sk} \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} Y(e^{j2\pi\lambda}) \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-j2\pi(s-\lambda)k} \right\} d\lambda \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} Y(e^{j2\pi\lambda}) X(e^{j2\pi(s-\lambda)}) d\lambda = \{X \circledast Y\}(e^{j2\pi s}) \end{aligned}$$

que es una **Convolución Circular** (debido a la periodicidad de X e Y), denotada con \circledast .

TFTD de la Multiplicación de secuencias: Modulación



Teoremas de Rayleigh y Parseval

Teoremas de Rayleigh y Parseval

Teorema de Rayleigh

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]y^*[k] = \int_{-1/2}^{+1/2} X(e^{j2\pi s})Y^*(e^{j2\pi s})ds$$

Teorema de Parseval

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x[k]|^2 = \int_{-1/2}^{+1/2} |X(e^{j2\pi s})|^2 ds$$

Respuesta en frecuencia de un SLID

Respuesta de un SLID a una exponencial compleja

En forma similar a como hicimos para sistemas LIT, podemos calcular la respuesta de un SLID con respuesta impulsional $h[n]$ a una exponencial compleja de entrada

$$x[n] = e^{j2\pi s_0 n}$$

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-m]h[m]$$

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi s_0(n-m)} h[m]$$

$$y[n] = e^{j2\pi s_0 n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi s_0 m} h[m]$$

$$y[n] = H(e^{j2\pi s_0}) e^{j2\pi s_0 n}$$

Respuesta de un SLID a una exponencial compleja

Tenemos entonces, un resultado similar al que obtuvimos para SLIT

Conclusión:

En un SLID, cuando entra una exponencial compleja, sale una exponencial compleja de la misma frecuencia. Pero su amplitud y fase cambian de acuerdo a $H(e^{j2\pi s_0})$.

Las exponenciales complejas son **autofunciones** de los SLID y los correspondientes valores $H(e^{j2\pi s_0})$ son los **autovalores**.

Respuesta en frecuencia de un SLID

Nuevamente, podemos definir la **respuesta en frecuencia** de un SLID (siempre y cuando este sea estable)

$$H(e^{j2\pi s}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j2\pi sn}$$

que es la TFTD de la respuesta impulsional.

Respuesta en frecuencia de un SLID

También podemos encontrar una relación entre la respuesta en frecuencia y las transformadas de las señales de entrada y salida. Si suponemos un SLID con respuesta impulsional $h[n]$, tenemos que

$$y[n] = \{x * h\}[n]$$

Y por la propiedad de la transformada de la convolución

$$Y(e^{j2\pi s}) = H(e^{j2\pi s})X(e^{j2\pi s})$$

donde $H(e^{j2\pi s})$ es la respuesta en frecuencia del sistema.

Un ejemplo

Supongamos que tenemos un SLID descrito por la ecuación en diferencias

$$y[n] - ay[n-1] = x[n]$$

Si aplicamos TFTD a ambos lados

$$Y(e^{j2\pi s}) - ae^{-j2\pi s}Y(e^{j2\pi s}) = X(e^{j2\pi s})$$

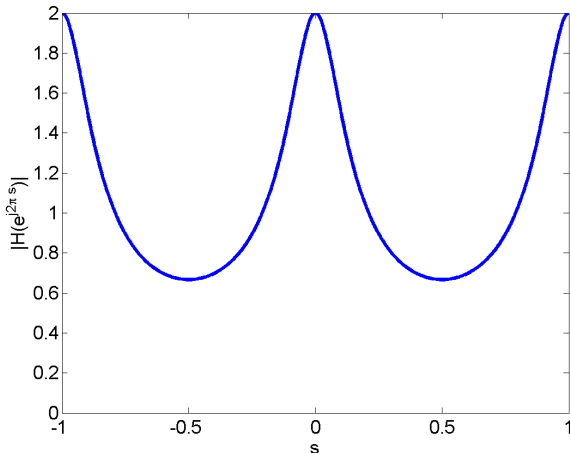
y reacomodando

$$H(e^{j2\pi s}) = \frac{Y(e^{j2\pi s})}{X(e^{j2\pi s})} = \frac{1}{1 - ae^{-j2\pi s}}$$

¿Cuál será la respuesta impulsional?

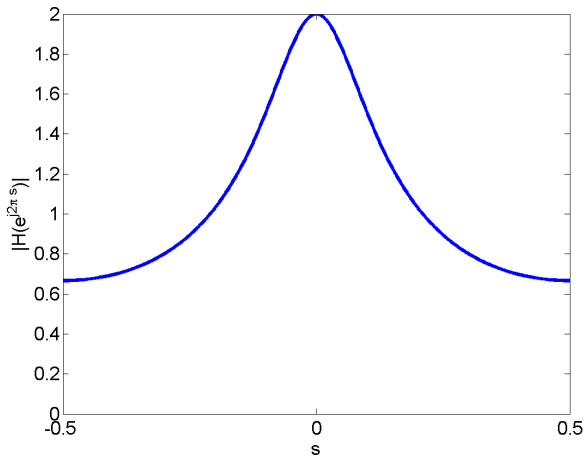
Un ejemplo

Graficamos el módulo de la respuesta en frecuencia para $a = 0,5$



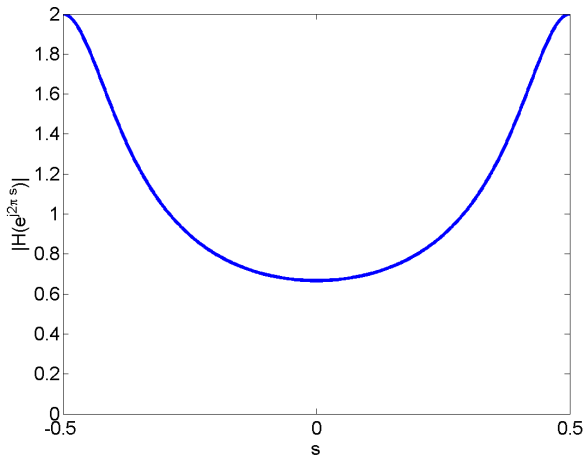
Un ejemplo

Si sólo lo miramos para $s \in [-0,5; 0,5]$



Un ejemplo

Ahora hacemos lo mismo para $a = -0,5$



Serie Discreta de Fourier

Serie Discreta de Fourier (SDF)

Definición:

Si $x[n]$ es periódica de período N ($x[n] = x[n + N]$, $N \in \mathbb{Z}$), se puede representar como:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi nk/N}$$

donde c_k son los coeficientes de la serie y se calculan como:

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi nk/N}$$

Teorema

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi kn/N} = N\delta[(k)_N] = \begin{cases} N & \text{si } (k)_N = 0 \\ 0 & \text{si } (k)_N \neq 0 \end{cases}$$

donde $(k)_N$ denota $k \bmod N$, el resto de dividir a k por N

- Si $k = mN \Rightarrow \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi mNn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} 1 = N.$
- Si $k \neq mN$

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi kn/N} = \frac{e^{j0} - e^{j2\pi kN/N}}{1 - e^{j2\pi k/N}} = \frac{1 - 1}{1 - e^{j2\pi k/N}} = 0$$

Serie Discreta de Fourier (SDF)

Demostración:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x[m] e^{-j2\pi mk/N} \right) e^{j2\pi nk/N}$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x[m] \sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi(n-m)k/N}$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x[m] N \delta[(n-m)_N]$$

$$x[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] \delta[(n-m)_N] = x[n]$$

Vinculación con la TFTD

Vinculación de la SDF con la TFTD

Al igual que en el caso de TF, ¿habrá alguna vinculación entre los c_k y la TFTD de un período de la señal?

Podemos pensar que $x[n]$ puede representarse como:

$$x[n] = \{x_1 * p_N\}[n]$$

con

$$p_N[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN]$$

Entonces,

$$x_1[n] = \left\{ \begin{array}{ll} x[n] & n = 0 \dots N-1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{array} \right\}$$

Vinculación de la SDF con la TFTD

$$X_1(e^{j2\pi s}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n] e^{-j2\pi sn}$$

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi nk/N}$$

$$X_1(e^{j2\pi s}) = \sum_{n=0}^{N-1} x_1[n] e^{-j2\pi sn}$$

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_1[n] e^{-j2\pi nk/N}$$

$$c_k = \frac{1}{N} X_1(e^{j2\pi s}) \Big|_{s=k/N}$$

Conclusión

Los c_k pueden obtenerse a partir de la TFTD de **UN PERÍODO**.

TFTD de una señal periódica

¿Cómo resulta la TFTD de una señal periódica?

Si $x[n]$ es periódica de período N ($x[n] = x[n + N]$, $N \in \mathbb{Z}$)

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi nk/N}$$

Por linealidad

$$\text{TFTD}\{x[n]\} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \text{TFTD}\{e^{j2\pi nk/N}\}$$

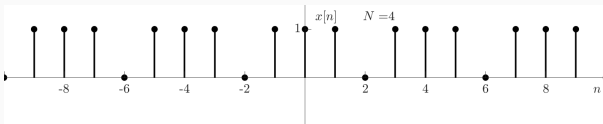
$$\text{TFTD}\{x[n]\} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \uparrow\uparrow\uparrow(s - k/N)$$

Que también puede demostrarse (camino más largo) a partir de $x[n] = \{x_1 * p_N\}[n]$

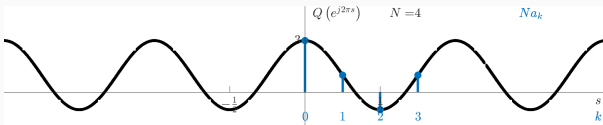
Ejemplo de SDF

Ejemplo

$q[n] = \square_3[n]$ con período $N = 4, 5, 6, \dots$

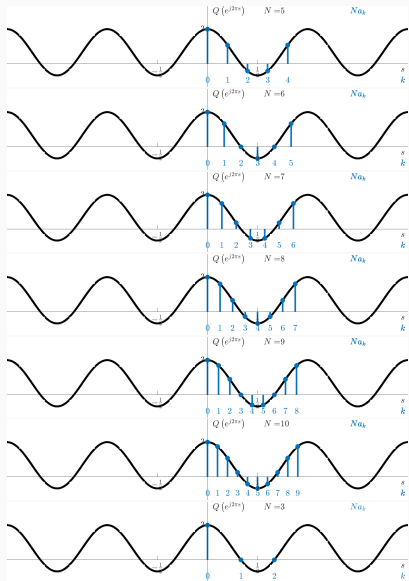
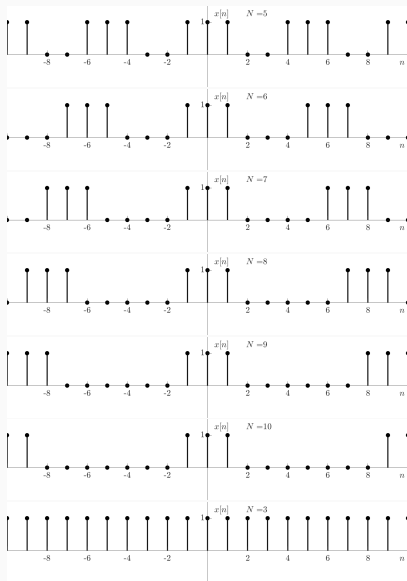


$$Q(e^{j2\pi s}) = \frac{\text{sen}(3\pi s)}{\text{sen}(\pi s)}$$



$$c_k = \frac{1}{N} \frac{\text{sen}(3\pi k/N)}{\text{sen}(\pi k/N)}$$

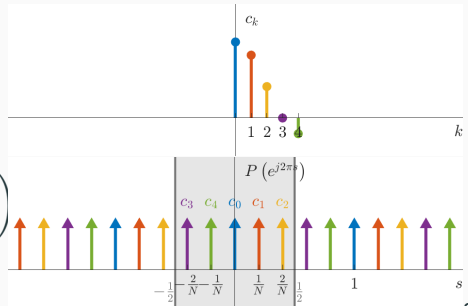
Señales Periódicas



Ejemplo de SDF

$$\begin{aligned}
 c_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} p[n] e^{-j2\pi nk/N} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} p[n] \Pi_N(n - N/2) e^{-j2\pi nk/N} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q[n] e^{-j2\pi nk/N} \\
 &= \frac{1}{N} Q(e^{j2\pi s}) \Big|_{s=\frac{k}{N}}
 \end{aligned}$$

$$P(e^{j2\pi s}) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \uparrow\uparrow\uparrow \left(s - \frac{k}{N}\right)$$



Señales Periódicas a Través de SLIDs

Señales periódicas a través de SLIDs

Si $x[n]$ es periódica de período N ($x[n] = x[n + N]$, $N \in \mathbb{Z}$)

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi nk/N}$$

e ingresa a un SLID con respuesta impulsional $h[n]$, siendo $H(e^{j2\pi s}) = \text{TFTD}\{h[n]\}$

Por linealidad

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k H(e^{j2\pi k/N}) e^{j2\pi nk/N} = \sum_{k=0}^{N-1} d_k e^{j2\pi nk/N}$$

$$\therefore \boxed{d_k = c_k H(e^{j2\pi k/N})}$$