2) Sea $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_7$ una muestra aleatoria de una población que tiene media μ y varianza σ^2. Considere los siguientes estimadores de μ:

$$\hat{\Theta}_1 = \frac{X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_7}{7} \quad \text{y} \quad \hat{\Theta}_2 = \frac{3X_1 - X_6 + X_4}{2}$$

a) ¿Alguno de estos estimadores es insesgado?

b) Hallar el ECM de $\hat{\Theta}_1$ y $\hat{\Theta}_2$.

c) ¿Cuál estimador es el "mejor"?. ¿En qué sentido es mejor?

Propiedad lineal de la esperanza

a) $E(\widehat{\theta_1}) = E\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_7}{7}\right) = \frac{1}{7}\left(E(X_1) + E(X_2) + \cdots . + E(X_7)\right) = \frac{7}{7}\mu = \mu$

$$E(\widehat{\theta_2}) = E\left(\frac{3X_1 - X_6 + X_4}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(3E(X_1) - E(X_6) + E(X_4)\right) = \frac{1}{2}(3\mu - \mu + \mu) = \frac{3}{2}\mu \neq \mu$$

$\widehat{\theta_1}$ es un estimador insesgado para μ ya que su esperanza da el parámetro que se quería estimar y $\widehat{\theta_2}$ no lo es

Por independencia y por propiedades de la varianza

b) $ECM(\widehat{\theta_1}) = V(\widehat{\theta_1}) + (Sesgo(\widehat{\theta_1}))^2 = V(\widehat{\theta_1}) = \frac{1}{7^2}\left(V(X_1) + V(X_2) + \cdots . + V(X_7)\right) = \frac{7}{7^2}\sigma^2$

$$ECM(\widehat{\theta_2}) = V(\widehat{\theta_2}) + (Sesgo(\widehat{\theta_2}))^2 =$$

$$= \frac{1}{2^2}\left(3^2V(X_1) + V(X_6) + V(X_4)\right) + \left(\frac{3}{2}\mu - \mu\right)^2 = \frac{11}{2^2}\sigma^2 + \left(\frac{1}{2}\mu\right)^2$$

C) Como $ECM(\widehat{\theta_1}) < ECM(\widehat{\theta_2})$ por lo tanto $\widehat{\theta_1}$ es mejor estimador que $\widehat{\theta_2}$ ya que tiene menor error cuadrático medio