Introducción al Procesamiento de Señales
Curso 2024

Tema 6 - Muestreo y Reconstrucción de Señales

Santiago Rodríguez

Muestreo de señales continuas

Motivación

- En general, las señales del mundo físico son de variable independiente continua, $x(t)$.
- Para procesar digitalmente necesito convertirla al dominio discreto, $x[n]$, $\rightarrow$ Muestreo.
- Si tomo muestras equiespaciadas cada T de la señal continua (muestreo uniforme) $x[n] = x(nT)$.

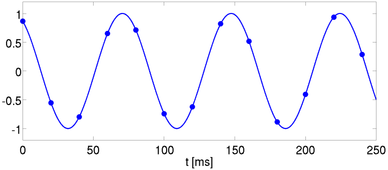
Definimos

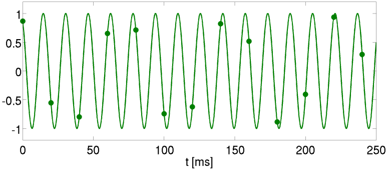
- *Intervalo de muestreo*: T [*seg*.].
- *Frec. de muestreo*: $f_s = \dfrac{1}{T}$ [Hz].

Muestreo de señales senoidales

$$x_1(t) = cos(2\pi f_1 t + \phi)$$
$$x_1[n] = cos(2\pi f_1 {\color{red}nT} + \phi)$$
$$= cos(2\pi s_1 n + \phi)$$

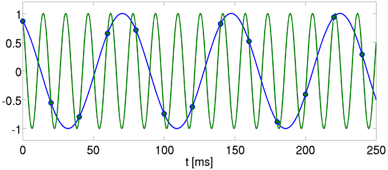
con $f_1 = 13Hz$, $f_s = 50Hz$,
$\therefore s_1 = 0.26$





$$x_2(t) = cos(2\pi f_2 t + \phi)$$
$$x_2[n] = cos(2\pi f_2 {\color{red}nT} + \phi)$$
$$= cos(2\pi s_2 n + \phi)$$

con $f_2 = 63Hz$, $f_s = 50Hz$,
$\therefore s_2 = 1.26$
Los valores f_1 y $f_2 = f_1 + f_s$
producen la misma secuencia!



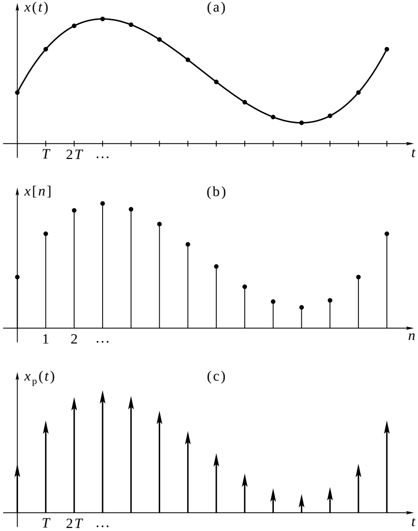
Muestreo uniforme

Dada $x(t)$ real o compleja, (sin deltas!)

- $x[n] \triangleq x(nT), \quad n \in \mathbb{Z}$
- Descripción alternativa:

$$x_p(t) = x(t)p_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)$$

- ¿$x[n]$ conserva la misma información que $x(t)$? ¿Bajo qué condiciones? ¿Cómo elijo T?



¿Qué sucede en el espectro?

Tenemos tres transformadas:

- $X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$
- $X_P(f) = \mathcal{F}\{x_P(t)\}$
- $X(e^{j2\pi s}) = TFTD\{x[n]\}$

$$
\begin{aligned}
X_P(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_P(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - nT) e^{-j2\pi ft} dt \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} \delta(t - nT) dt \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-j2\pi fnT} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi fnT} = X(e^{j2\pi fT})
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \boxed{X_P(f) = X(e^{j2\pi fT})}
$$

¿Qué sucede en el espectro?

$$
\begin{aligned}
X(e^{j2\pi fT}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-j2\pi fnT} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(\lambda) e^{j2\pi\lambda nT} d\lambda \, e^{-j2\pi fnT} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} X(\lambda) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi(\lambda-f)nT} d\lambda \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} X(\lambda) \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left((\lambda - f) - \frac{k}{T}\right) d\lambda \\
&= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(f + \frac{k}{T}\right)
\end{aligned}
$$

Teorema del Muestreo

Sea $x(t)$ una señal de banda limitada ($X(f) = 0\, si\, |f| > f_M$). Entonces, $x(t)$ se determina unívocamente mediante sus muestras $x[n] = x(nT)\, n = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$ si

$$f_s > 2f_M$$

donde

$$f_s = \frac{1}{T}$$

Teorema del Muestreo

Nyquist-Shannon-Whittaker

$$X(e^{j2\pi fT}) = X_P(f) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(f + \frac{k}{T}\right)$$

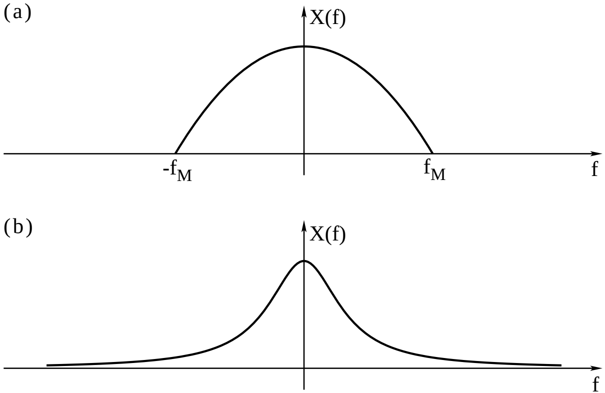
Consecuencias:

- Muestreo en tiempo $\Leftrightarrow$ periodicidad en frecuencia.
- Replicado del espectro original cada f_s
- Relación de frecuencias: $\boxed{s = fT}$
- $|s| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow |f| \leq f_s/2$

Señales de Banda Limitada

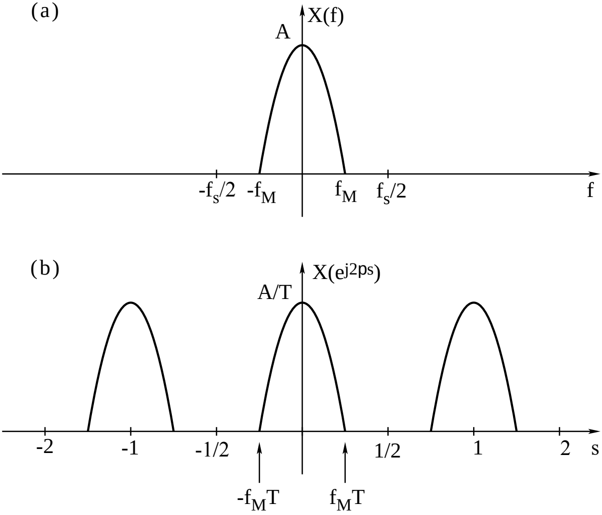
(a) Señal de banda limitada: $\exists\, f_M \,/\, X(f) = 0$ si $|f| \geq f_M$

(b) Señal de banda no limitada: $\nexists\, f_M$



Caso 1

Muestreo $x(t)$ de banda limitada con $f_s \geq 2f_M$.



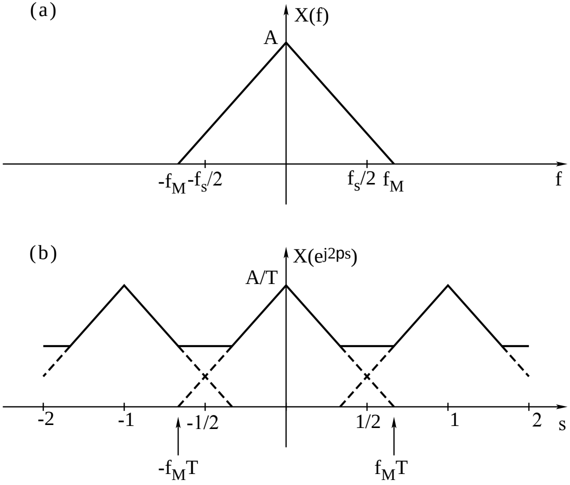
Caso 1

Muestreo $x(t)$ de banda limitada con $f_s \geq 2f_M$.

- No se solapan las réplicas.
- $X(e^{j2\pi s}) = \frac{1}{T} X\left(\frac{s}{T}\right), \ |s| \leq \frac{1}{2}$
- $f_s = 2f_M$ es la *Frecuencia de Nyquist*.
- No hay distorsión del espectro.
- Posibilidad de reconstrucción.

Caso 2

Muestreo $x(t)$ de banda limitada con $f_s < 2f_M$.



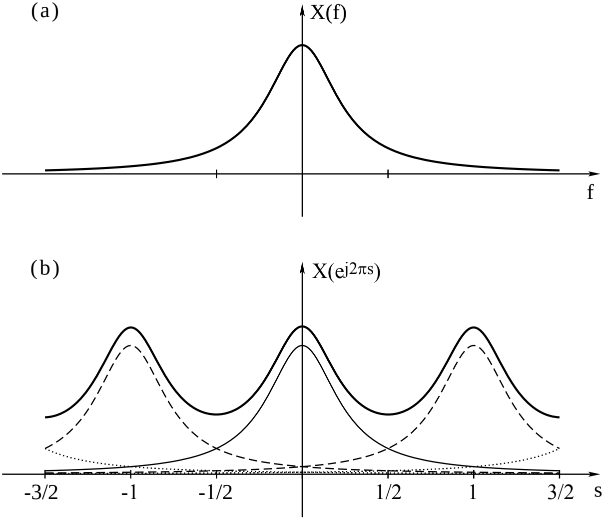
Caso 2

Muestreo $x(t)$ de banda limitada con $f_s < 2f_M$.

- Se solapan las réplicas: *Aliasing*
- Distorsión del espectro $\Rightarrow$ Imposibilidad de reconstrucción.

Caso 3

Muestreo $x(t)$ de banda no limitada.



Caso 3

Muestreo $x(t)$ de banda no limitada.

- Siempre hay solapamiento.
- Toda señal de duración finita es de banda no limitada.
- Señales reales son de banda no limitada.
- El ancho de banda *práctico* es siempre finito.
- Filtro *Antialiasing*: Pasa Bajos hasta $f_s/2$.

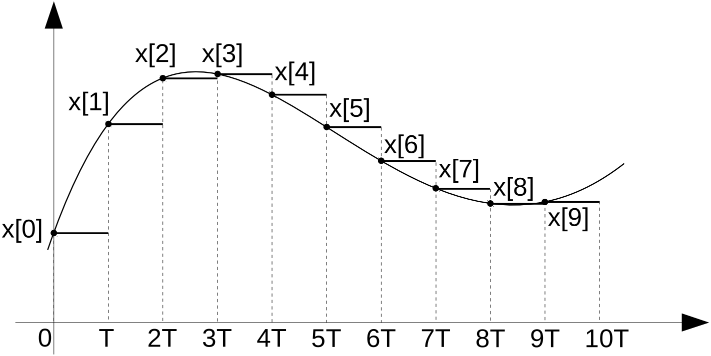
Reconstrucción de una señal analógica a partir de una digital

Situación: De la señal analógica $x(t)$ sólo conocemos sus valores en determinados instantes, los $x(nT) = x[n]$, y queremos obtener los valores intermedios.

Este no es ni más ni menos que el viejo y conocido problema de interpolación.

El reconstructor de orden cero

Una forma sencilla de interpolación es usar polinomios. Y de estos, el caso más sencillo es el de interpolación con un polinomio de grado cero, es decir, suponer que en todos los instantes intermedios entre dos muestras, la señal mantiene el valor constante de la primera muestra (por ejemplo).



El reconstructor de orden cero

Esta señal interpolada puede pensarse como una secuencia de cajones de ancho T y altura igual al valor de las muestras $x[n]$

$$x_{ZOH}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \sqcap \left(\frac{t - T/2 - nT}{T} \right)$$

Haciendo uso de la señal $x_p(t)$ definida la clase anterior

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)$$

y de la siguiente señal

$$h_{ZOH}(t) = \sqcap \left(\frac{t - T/2}{T} \right)$$

El reconstructor de orden cero

podemos escribir una expresión para la señal reconstruida como sigue

$$
\begin{aligned}
x_{ZOH}(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \sqcap \left(\frac{t - T/2 - nT}{T} \right) \\
&= \{x_p * h_{ZOH}\}(t)
\end{aligned}
$$

Entonces, podemos pensar al reconstructor de orden cero como un sistema lineal invariante en el tiempo con respuesta impulsional $h_{ZOH}(t)$

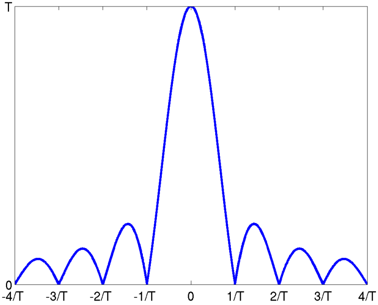
¿Qué ocurre en el dominio de la frecuencia?

$$X_{ZOH}(f) = X_p(f) H_{ZOH}(f)$$

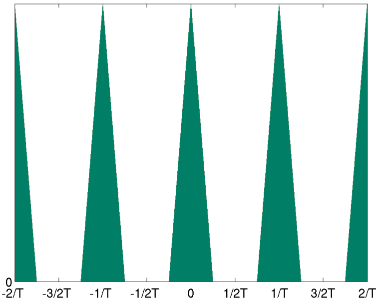
El reconstructor de orden cero

Respuesta en frecuencia del reconstructor de orden cero:

$$H_{ZOH}(f) = T\,\mathrm{sinc}(fT)e^{-j\pi fT}$$



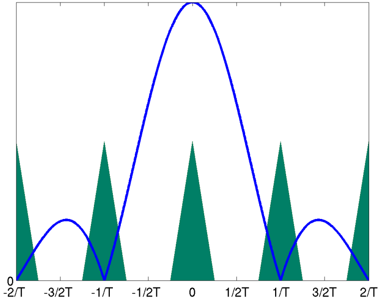
Espectro de $x_p(t)$



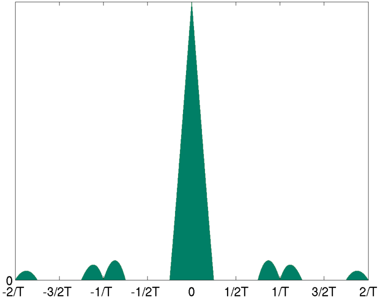
El reconstructor de orden cero

$$X_{ZOH}(f) = X_p(f) H_{ZOH}(f)$$

$|X_p(f)|$ y $|H_{ZOH}(f)|$



$|X_{ZOH}(f)|$

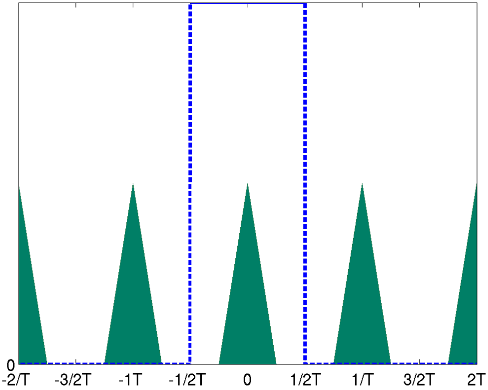


El reconstructor de orden cero

- Problema: No se eliminan las componentes de alta frecuencia
- ¿Qué habría que hacer idealmente?

Reconstrucción ideal

Tenemos x[n], muestras de $x(t)$ de banda limitada con $f_s \geq 2f_M$



Idea: Filtrar $x_p(t)$ con un filtro pasa bajos ideal.

$$H(f) = T \sqcap (fT) \Leftrightarrow h(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$$

Reconstrucción ideal

Tenemos x[n], muestras de $x(t)$ de banda limitada con $f_s \geq 2f_M$

$$x(t) = \{x_p * h\}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{\tau}{T}\right)\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-\tau-nT)\right] d\tau$$

$$\boxed{x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\text{sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right)} \text{ (Interpolación de Shannon)}$$

- Para $t = n_0 T$, $\text{sinc}\left(\frac{n_0 T - nT}{T}\right) = \delta[n-n_0]$
- Para $t \neq n_0 T$ todas las muestras contribuyen.
- $h(t)$ es no causal $\Rightarrow$ No es práctico (off-line).

Filtro Sinc Inverso

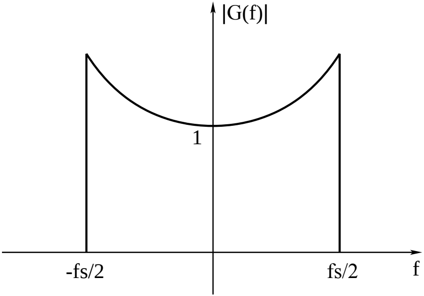
¿Podremos corregir la salida del reconstructor ZOH para obtener una reconstrucción ideal?
Sería poner en cascada con el ZOH otro filtro, tal que la respuesta total sea la del reconstructor ideal

$$H_{ideal}(f) = H_{ZOH}(f)G(f)$$

entonces

$$G(f) = \frac{\sqcap(fT)}{\mathrm{sinc}(fT)} e^{j\pi fT}$$

Filtro Sinc Inverso

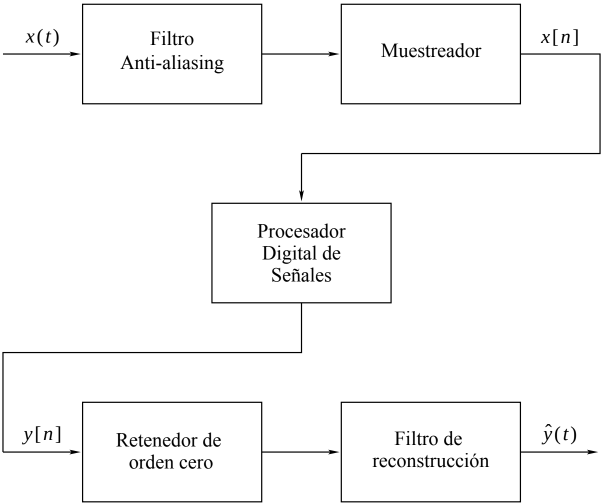


¿Problemas?

- Cortes abruptos en el módulo
- Fase positiva $\rightarrow$ Adelanto en el tiempo (sistema no causal)

En la práctica se usan aproximaciones.

Esquema típico de PDS



Diezmado y expansión/interpolación

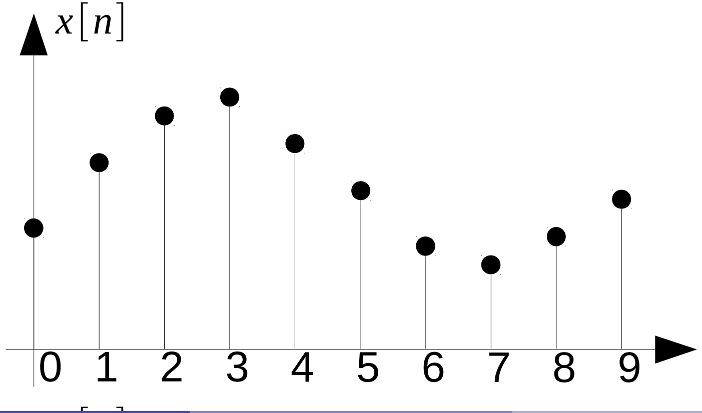
- Una operación importante en el procesamiento digital de señales es el cambio de la tasa de muestreo de una señal. Es decir, cambiar la cantidad de muestras por segundo que tenemos de una señal, pero operando sólamente en el dominio digital.
- Este cambio puede ser para aumentar la tasa (expansión/interpolación) o para reducir la tasa (diezmado).
- La expansión “crea” muestras nuevas pero sin información nueva, puesto que estas nuevas muestras no se obtienen de la señal analógica.
- El diezmado puede, en principio, perder información, porque “se queda” con un número menor de muestras que las tomadas originalmente.
- Estudiaremos brevemente estas operaciones.

Diezmado

El diezmado en M consiste en conservar de la señal original sólo 1 de cada M muestras. Puesto en fórmulas, sería

$$x_{(\downarrow M)}[n] = x[nM]$$

Y gráficamente (con $M = 3$)



Diezmado

¿Qué ocurre en el espectro?
Para analizarlo, es conveniente usar la función peine discreto que ya conocemos

$$p_M[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kM]$$

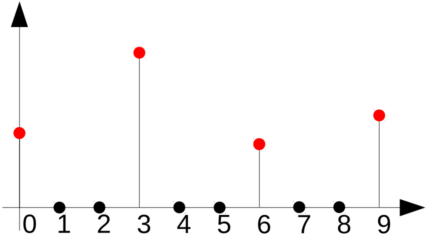
y su expresión en Serie Discreta de Fourier

$$p_M[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{j2\pi kn/M}$$

Diezmado

Con este peine, podemos definir la siguiente señal

$$\begin{aligned}\tilde{x}[n] &= x[n]p_M[n] \\ &= \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} x[n]e^{j2\pi kn/M}\end{aligned}$$



Que tiene como espectro

$$\tilde{X}(e^{j2\pi s}) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} X(e^{j2\pi(s-k/M)})$$

Diezmado

Si aplicamos ahora el diezmado sobre $\tilde{x}[n]$, obtendremos por supuesto la misma secuencia $x_{(\downarrow M)}[n]$

$$\tilde{x}[nM] = x[nM]p_M[nM] = x[nM] = x_{(\downarrow M)}[n]$$

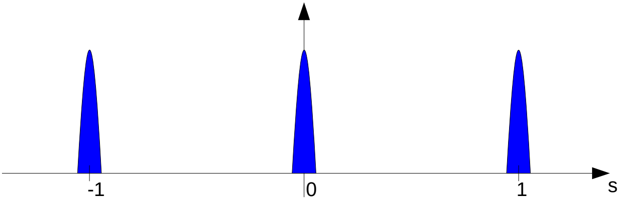
Y entonces podemos calcular el espectro de la secuencia diezmada como sigue

$$\begin{aligned}
X_{(\downarrow M)}(e^{j2\pi s}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{(\downarrow M)}[n]e^{-j2\pi sn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{x}[nM]e^{-j2\pi sn} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{x}[k]e^{-j2\pi s(k/M)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{x}[k]e^{-j2\pi k(s/M)} \\
&= \tilde{X}(e^{j2\pi(s/M)})
\end{aligned}$$

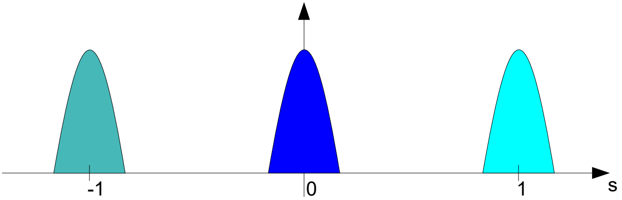
$$\boxed{X_{(\downarrow M)}(e^{j2\pi s}) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} X\left(e^{j2\pi\left(\frac{s-k}{M}\right)}\right)}$$

Diezmado

Si el espectro de $x[n]$, $X(e^{j2\pi s})$ es como el que sigue



Entonces el espectro de la señal diezmada para $M = 3$, $X_{(\downarrow M)}(e^{j2\pi s})$, será

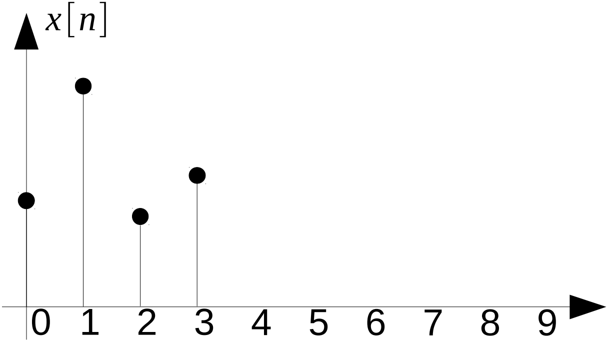


Expansión

La expansión de una señal discreta puede hacerse de muchas maneras, pero la más sencilla es hacerlo con ceros, de la siguiente manera

$$x_{(\uparrow L)}[n] = \begin{cases} x[n/L] & \text{si } n = kL \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Y gráficamente, con $L = 3$



Expansión

El espectro puede calcularse en forma directa

$$X_{(\uparrow L)}(e^{j2\pi s}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{(\uparrow L)}[n]e^{-j2\pi sn} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n=kL}}^{\infty} x[n/L]e^{-j2\pi sn}$$

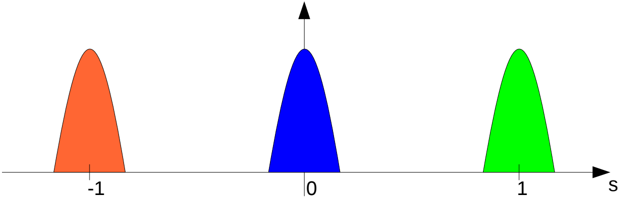
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-j2\pi sLk}$$

Y finalmente obtenemos

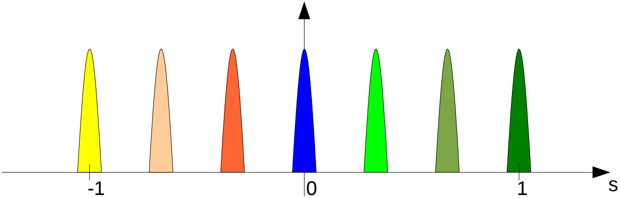
$$\boxed{X_{(\uparrow L)}(e^{j2\pi s}) = X(e^{j2\pi sL})}$$

Expansión

Si partimos de una señal $x[n]$ con un espectro $X(e^{j2\pi s})$ como el que sigue

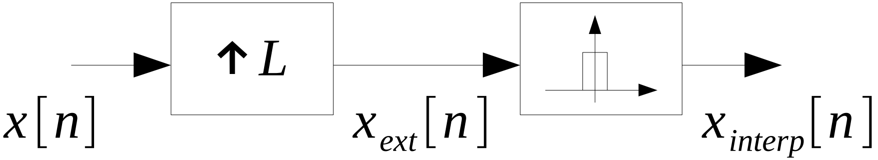


Entonces el espectro de la señal expandida para $L = 3$, $X_{(\uparrow L)}(e^{j2\pi s})$, será



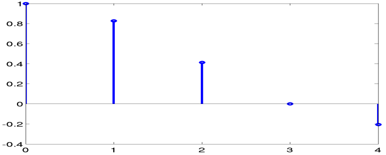
Interpolación

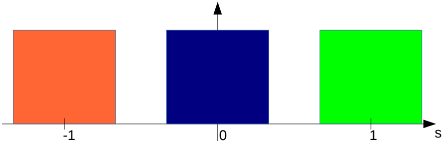
- La interpolación consiste en una expansión con ceros, seguida de algún filtrado pasa bajos para "suavizar" la señal.
- La idea es intentar eliminar las copias del espectro que aparecen en la banda $[-1/2; 1/2]$ debido a la compresión.
- En la práctica el filtrado ideal no es posible y los filtros de interpolación se diseñan con diversas técnicas.



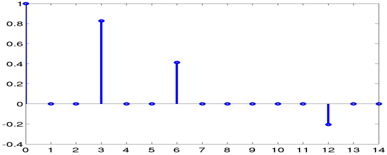
Interpolación

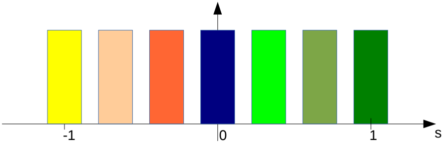
Señal original



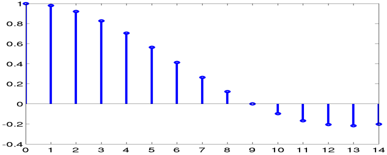


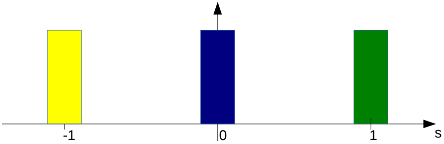
Señal expandida





Señal interpolada





Interpolación
Ejemplo de aplicación

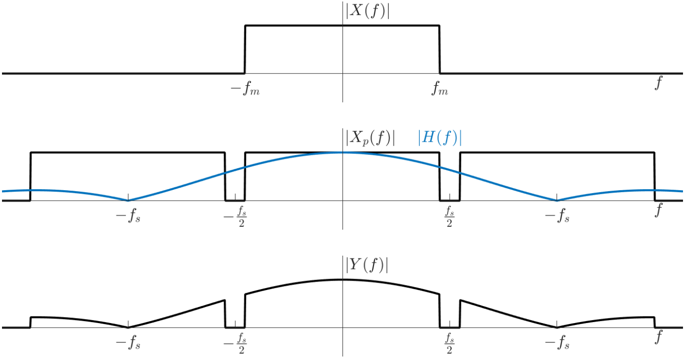
La frecuencia de muestreo en algunos `mp3s` de audio es de 44.1kHz y la frecuencia máxima que se desea reconstruir es 20kHz.
En la reconstrucción se debería utilizar un filtro pasabajos analógico (ZOH + filtro sinc inverso) con una banda de transición abrupta entre 20kHz y 24.1kHz.
Otra alternativa es *sobremuestrear*:

- Expandir con $L = 8$ y filtrar para interpolar la señal.
  La nueva tasa es $352.8kHz$
- La distorsión del ZOH en la banda es despreciable
- Ahora el filtro analógico puede tener su banda de transición entre $20KHz$ y $332.8kHz$!

Este tipo de sobremuestreo es común en todas las aplicaciones de audio digital

Interpolación
Ejemplo de aplicación

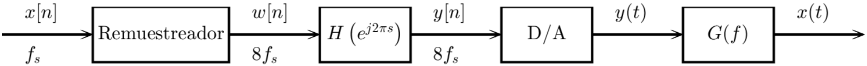
$$X(f) = \sqcap\left(\frac{f}{40\text{kHz}}\right),\ f_s = 44.1\ \text{kHz}$$



Interpolación
Ejemplo de aplicación

Filtro analógico Butterworth

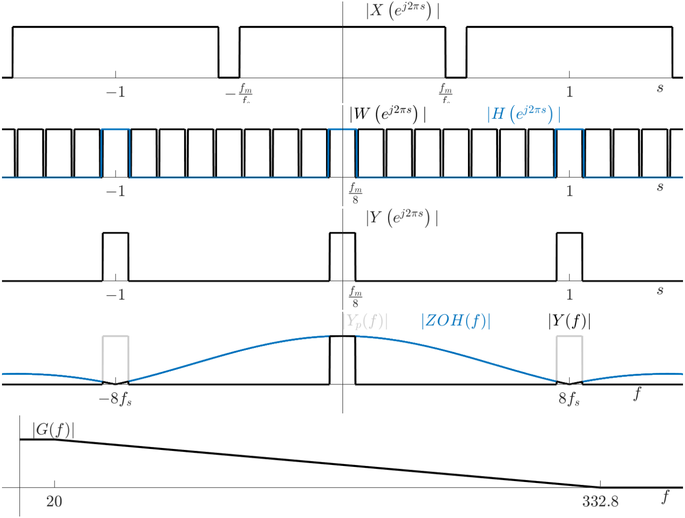
$A_{dB} = 10\log_{10} A$, $A = 10^{-\frac{90}{10}} = 10^{-9}$, $f_1 = 20$ KHz, $f_2 = 24.1$ KHz
MATLAB: `buttord(2*pi*f1,2*pi*f2,1,90,'s')` $\rightarrow N = 60$



$$w[n] = \begin{cases} x[n/8] & n = 8k \\ 0 & c.c. \end{cases} \qquad W\left(e^{j2\pi s}\right) = X\left(e^{j2\pi 8s}\right)$$

Interpolación

Ejemplo de aplicación

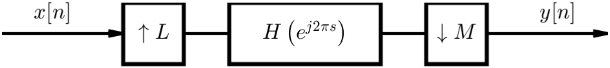


Butterworth $\rightarrow N = 4$

Expansión + Interpolación
Conversión racional de la tasa de muestreo

Dada $x[n]$ con intervalo de muestreo T_1, se desea convertirla a $y[n]$ con intervalo T_2 e igual espectro que $x[n]$ (en Hz)

- Puede lograrse con diezmado e interpolación si la relación $T_1/T_2 \in \mathbb{Q}$, es decir de la forma $T_1/T_2 = L/M$ con $L, M \in \mathbb{N}$



- Si $L > M$ (aumenta la tasa): No habrá aliasing y $H\left(e^{j2\pi s}\right)$ debe tener $s_c = \frac{1}{2L}$
- Si $L < M$ (disminuye la tasa): Puede haber aliasing y $H\left(e^{j2\pi s}\right)$ debe tener $s_c = \frac{1}{2M}$