Física I
Apuntes de Clase 10 -MI
2023

Prof. Susana Conconi

Momento de una Fuerza. Momento Angular de una Partícula y de un Sistema de partículas - Conservación

Momento de Fuerza respecto de "o" o

Torque (τ) respecto de "o"

Es el producto vectorial entre el vector posición respecto a "o" (r) y la fuerza aplicada

La **dirección** es perpendicular al plano xy.

El **sentido**, la regla de la mano derecha

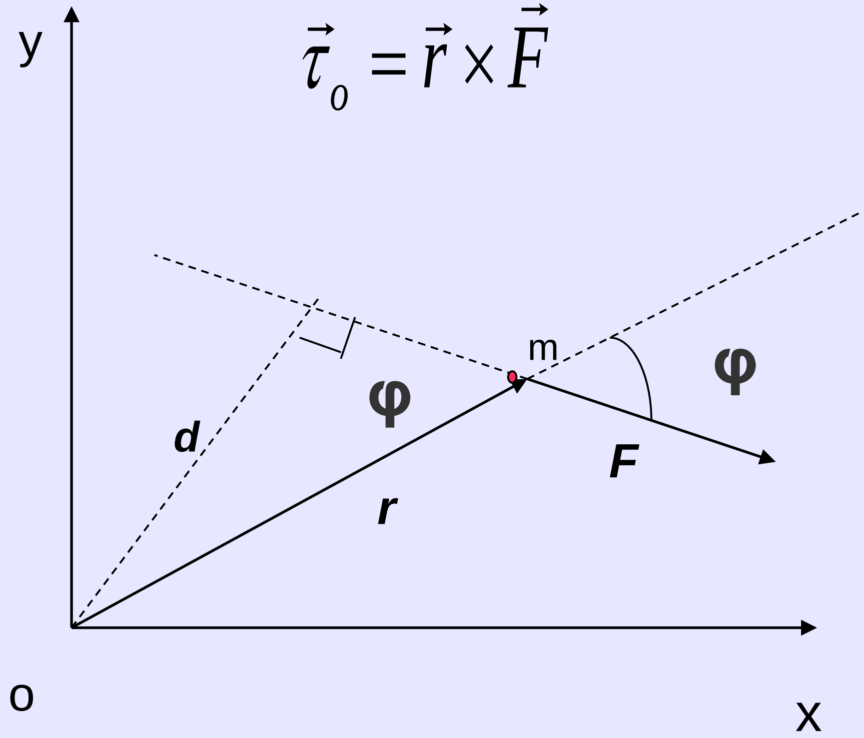
El módulo es

$$|\tau_o| = |r|.|F|.sen\,\varphi$$

$$|d| = |r|.sen\,\varphi$$

$$|\tau_o| = |d|.|F|$$

$$\vec{\tau}_0 = \vec{r} \times \vec{F}$$

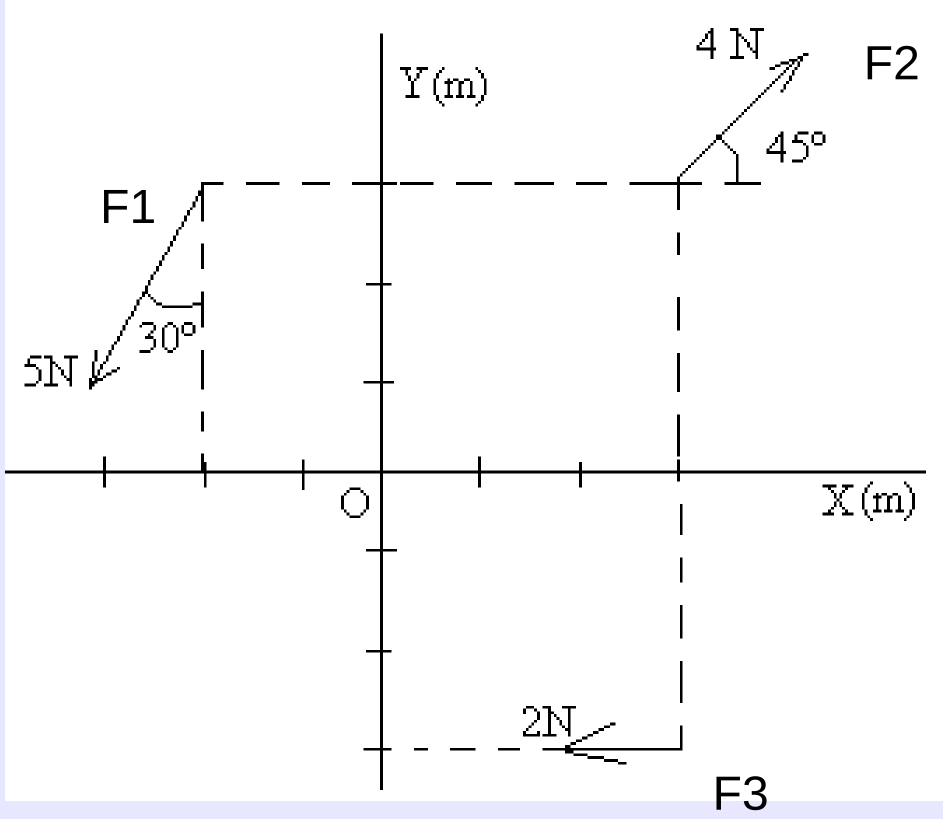


φ es el ángulo que determinan los dos vectores cuando los aplicamos en un mismo punto.

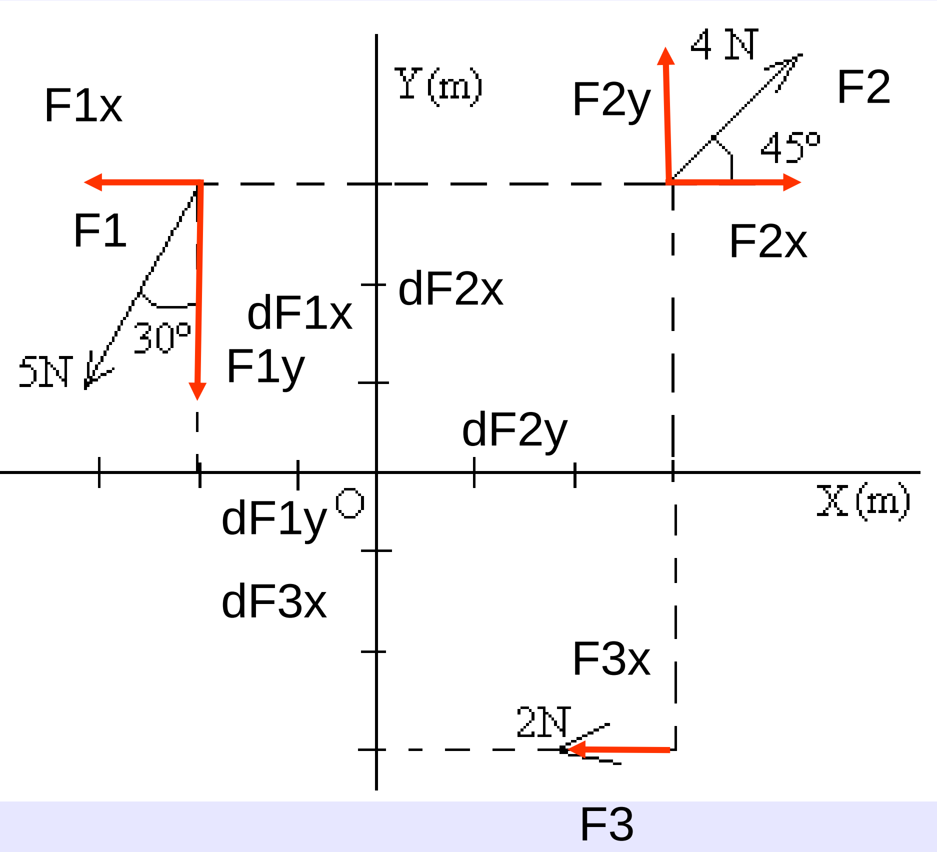
d es la mínima distancia entre la recta de acción de F y "o": **brazo de palanca**

Esta magnitud mide la tendencia de la fuerza a imprimir a la partícula un movimiento de rotación respecto al punto O fijo

Calculamos el torque de cada fuerza y el torque total sobre el sistema de partículas respecto de O



- Descomponemos las fuerzas en los ejes x e y.
- Calculamos los torques de cada componente con los brazos de palanca (d) de cada una.
- Como los torques de las componentes de las fuerzas tienen dirección en z, los sumamos algebraicamente para obtener el torque de la fuerza



$$\vec{\tau}_0 = \vec{r} \times \vec{F} \qquad \tau_{oTot}^{(z)} = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$

Definimos como positivo el sentido de giro antihorario con z saliendo del plano xy

$$|\tau_{F1o}| = |\mathbf{d}_{F1x}||\mathbf{F}_{1x}| + |\mathbf{d}_{F1y}||\mathbf{F}_{1y}| = 3m\ 5N \sin 30° + 2m\ 5N \cos 30°$$

$$|\tau_{F2o}| = |\mathbf{d}_{F2x}||\mathbf{F}_{2x}| + |\mathbf{d}_{F2y}||\mathbf{F}_{2y}| = -3m\ 4N \cos 45° + 3m\ 4N\ \mathrm{sen} 45°$$

$$|\tau_{F3o}| = |\mathbf{d}_{F3x}|\ |\mathbf{F}_{3x}| + |\mathbf{d}_{F3y}|\ |\mathbf{F}_{3y}| = -3m\ 2N$$

$|\tau_{F1o}| = 16{,}2\ Nm$ $\qquad |\tau_{F2o}| = 0$ $\qquad |\tau_{F3o}| = -6\ Nm$

$$\tau_{oTot}^{(z)} = 10{,}2\ Nm$$

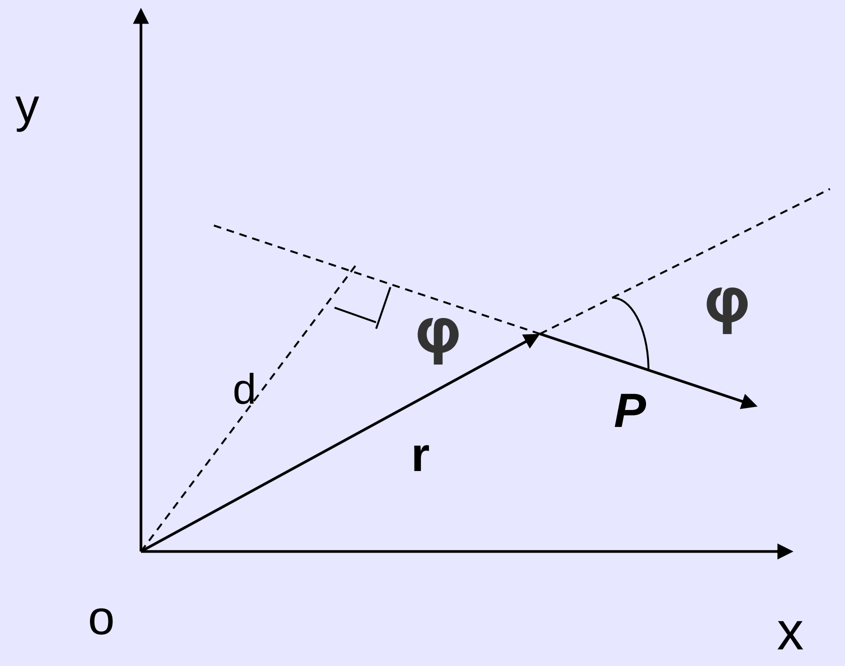
Momento angular o momento cinético de una partícula

Consideremos una partícula de masa m que se mueve con respecto a *O* con una velocidad **v**. Definimos una nueva magnitud vectorial, llamada momento angular de la partícula con respecto a O (**L**):

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\left|\vec{L}\right| = r\, m\, v\, sen\varphi$$

Sus unidades son:
m^2kg/s



El vector ***L*** es en cada instante perpendicular al plano formado por el vector posición y el vector velocidad;

d es la mínima distancia entre la recta de acción de ***P*** y "o". **brazo de palanca**

si

$$|L| = (m.v).\ r\ sen\varphi \quad \Rightarrow \quad |L| = (m.v).\ d$$

tambièn se lo llama momento de la cantidad de movimiento,

Conservación del momento angular

Para determinar bajo qué condiciones **L** se mantiene constante, derivamos con respecto al tiempo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \cancel{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

El primer término es nulo por tratarse del producto vectorial de dos vectores paralelos, y aplicando la definición de fuerza dada en la segunda ley de Newton queda:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Este producto vectorial es el **momento o torque de una fuerza (τ)** con respecto al origen *O* (En este caso consideramos ***F*** como fuerza neta o sumatoria de todas las fuerzas):

el vector **L** será constante cuando su derivada sea nula respecto al tiempo. Esto constituye el

Teorema de Conservación del Momento Angular para una partícula:

Como $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$, si $\vec{r} \times \vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{L} = cte$

Esta condición se cumple en dos casos:

- en el caso de una **partícula libre**, la fuerza neta a la que está sometida es nula por lo que no ejerce momento y por tanto se mueve con ***L*** constante, además de con momento lineal ***P*** constante

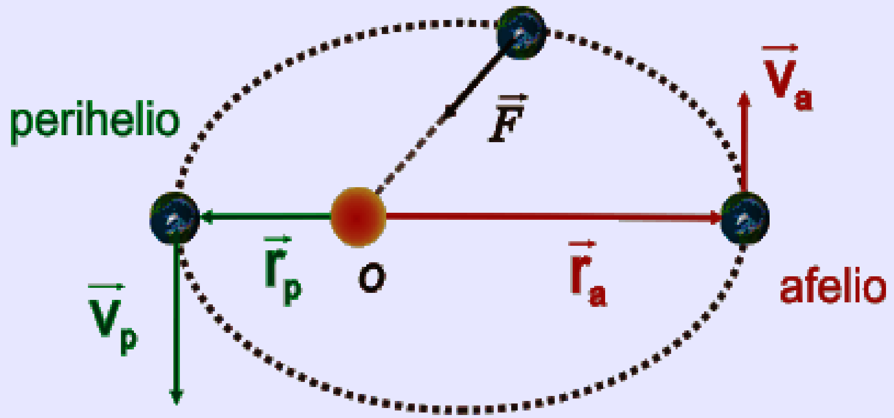
- cuando el **vector posición es paralelo a la fuerza**, el producto vectorial es nulo por lo que **L** también es constante.

  Esto sucede en el caso de una **fuerza central**, es decir, que pasa siempre por un punto fijo (Ej. centro de la trayectoria):

  el momento angular de una partícula sometida exclusivamente a una fuerza central es constante.

Ej: La Tierra está sometida a la acción de una **fuerza gravitatoria** ejercida por el Sol. Esta fuerza es la causante de que la trayectoria de la Tierra se curve, puesto que origina una **aceleración normal o centrípeta**. La trayectoria que describe la Tierra es una elipse, estando el Sol en uno de los focos, pero su excentricidad es de sólo 0.0167, es decir, es prácticamente circular. La posición más alejada del Sol recibe el nombre de **afelio** y la más cercana **perihelio**: en el afelio la distancia entre el Sol y la Tierra es aproximadamente de 152.6 millones de km y en el perihelio de 147.5 millones de km.

La fuerza gravitatoria que sufre la Tierra es una fuerza central, ya que a lo largo de toda la trayectoria su línea de acción pasa siempre por el Sol. Entonces si tomamos como origen el Sol, la fuerza gravitatoria no hace momento con respecto al origen por lo que, según el teorema de conservación del momento angular



y suponiendo que es la única fuerza externa que actúa, **la Tierra se mueve alrededor del Sol con momento angular (*L*) constante**.

Sistema: tierra

Entorno: sol

Acción del sol sobre la tierra:
Atracción gravitatoria
Dirección : hacia el sol.

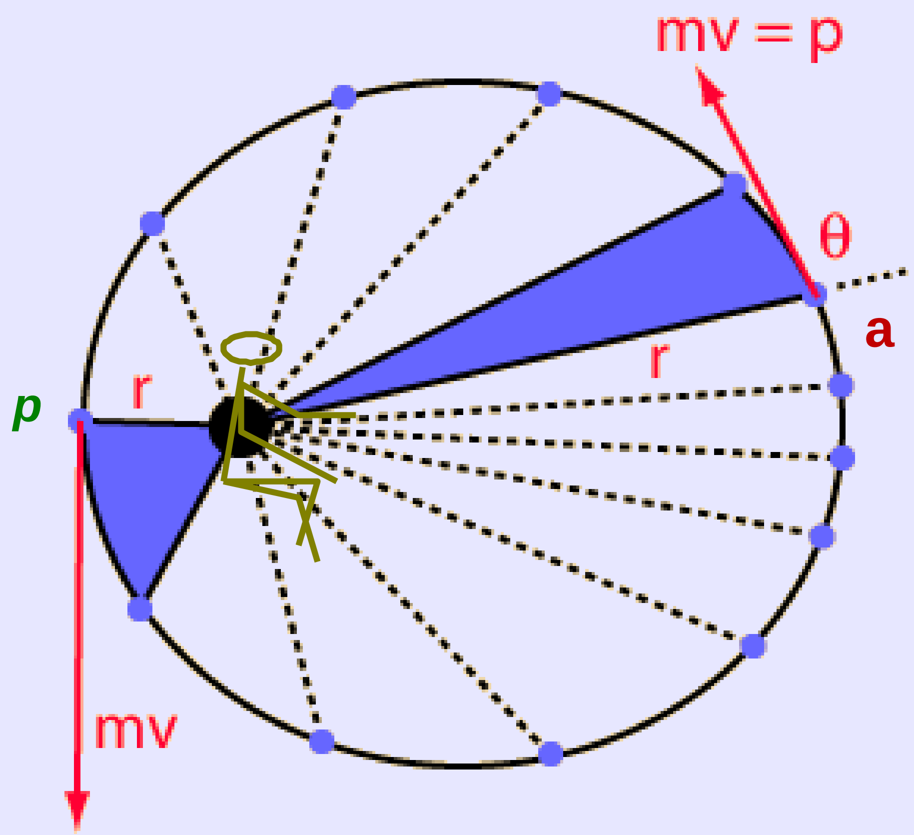
La línea de acción de
F pasa por *O*

r y **F** son paralelos

➔ $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$

$$\left|\vec{L}_a\right| = r_a M_T v_a \qquad \left|\vec{L}_p\right| = r_p M_T v_p$$

$\boxed{d\mathbf{L}/dt = 0}$ $\boxed{\mathbf{L} = \text{constante}}$



$$r_a M_T v_a = r_p M_T v_p$$

$$r_a > r_p \Rightarrow v_a < v_p$$

El radio (vector posición) barre áreas iguales en tiempos iguales (2da segunda Ley de Kepler)

Si ***r*** disminuye **v** aumenta

Momento angular de un sistema de partículas

El momento angular ($\boldsymbol{L}_O$) de un sistema de partículas respecto de un sistema de referencia inercial (O) se define como la suma de los momentos angulares individuales (l_{io}) de cada partícula respecto del observador O ($l_{io} = r_{io} \times m_i \cdot v_i$)

$$\vec{L}_o = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{io} \times m_i \, \vec{v}_i$$

Si analizamos la conservación de $\mathbf{L}_O$ de un sistema de partículas:

$\boxed{d\mathbf{L}/dt = 0}$

$\boxed{\mathbf{L} = \text{constante}}$

Si planteamos la variación del momento angular de un sistema de partículas respecto de un observador inercial; podemos suponer un sistema de dos partículas sobre las que actuan fuerzas exteriores e interiores.

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \frac{d\left(\vec{l}_{1o} + \vec{l}_{2o}\right)}{dt} = \frac{d\vec{l}_{1o}}{dt} + \frac{d\vec{l}_{2o}}{dt} = \vec{\tau}_{1o} + \vec{\tau}_{2o}$$

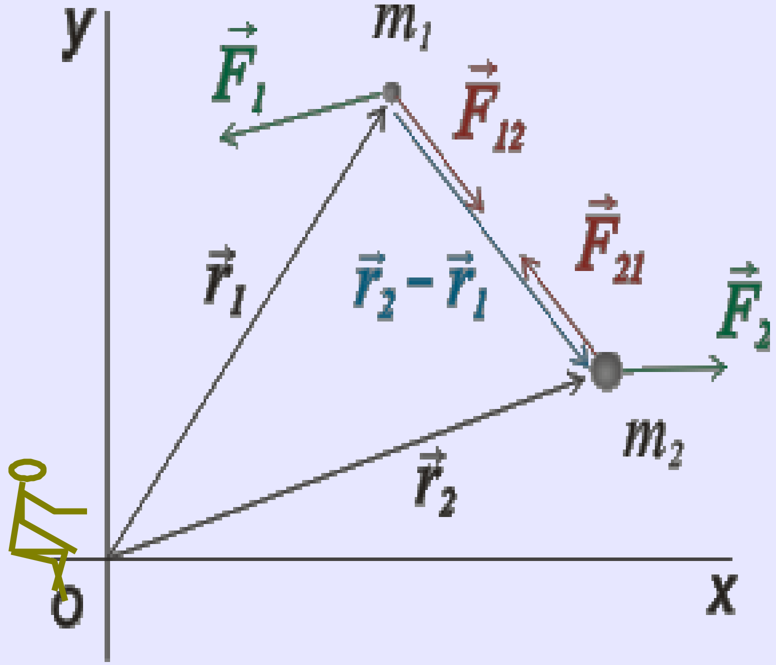
$$l_{1O} = \mathbf{r}_1 \times m_1\boldsymbol{v}_1$$

$$l_{2O} = \mathbf{r}_2 \times m_2\boldsymbol{v}_2$$

$$\tau_{1O} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{e1} + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{21}$$

$$\tau_{2O} = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{e2} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{12}$$

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$$



$$\tau_{1O} + \tau_{2O} = \tau_O$$

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{e1} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{e2} +$$

$$\cancel{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{F}_{12}}$$

se anula el término correspondiente a las fuerzas internas por ser un producto vectorial de vectores paralelos

Para un sistema de n partículas,

Las fuerzas internas no hacen variar el momento angular de un sistema

Entonces :

$$d\mathbf{L}_O/dt = d/dt\,(\sum \boldsymbol{l}_{io}) = \sum d\boldsymbol{l}_{iO}/dt = \sum \boldsymbol{\tau}_{iO}$$

Variación del momento angular de un sistema de partículas respecto de un observador inercial (o);

$$\boxed{d\mathbf{L}_O/dt = \boldsymbol{\tau}_{ext\,O} = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{exti} = \sum \boldsymbol{\tau}_{iO}}$$

$$\boxed{d\mathbf{L}_O/dt = \sum \boldsymbol{\tau}_{ieO} = \boldsymbol{\tau}_{ext\,O}}$$

Teorema de Conservación del Momento Angular para sistemas de particulas :

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{\tau}_{ext\,o}$$

$\vec{\tau}_{ext\,o}$ = **suma** de los momentos de las fuerzas externas respecto a o - Torque neto

$$\vec{\tau}_{ext\,o} = 0 \Rightarrow \vec{L}_o \,\text{cte}$$

El **L** de un sistema de partículas se conserva si sobre el sistema la suma de los momentos exteriores es cero

Sistemas de partículas

$$\boxed{\sum \mathbf{F}_{ei} =} \quad \boxed{\mathbf{F}_e = d\mathbf{P}_{sis} / dt = d(M\, V_{CM})/dt}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\tau}_{eO} = \sum \boldsymbol{\tau}_{ieO}} = \boxed{d\mathbf{L}_O / dt} \qquad \boxed{\boldsymbol{\tau}_{eCM}} = \boxed{d\mathbf{L}_{CM} / dt}$$

$$\sum \mathbf{F}_{ei} = \boxed{\mathbf{F}_e} = 0 \Rightarrow \mathbf{P} = \text{constante}$$

$$\sum \boldsymbol{\tau}_{ieO} \quad \boxed{\boldsymbol{\tau}_e} = 0 \Rightarrow \mathbf{L} = \text{constante}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\tau}_{eO} = \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{F}_e + \boldsymbol{\tau}_{eCM}}$$

$$\boxed{\mathbf{L}_O = \mathbf{L}_{CMO} + \mathbf{L}_{CM}}$$

Ejercicio 6

Objetivo: *Analizar la conservación o variación del momento angular, momento lineal y de la energía.*

Un bloque de masa M=10kg está unido a uno de los extremos de una varilla de masa despreciable y longitud 2m. El otro extremo de la varilla está pivotado a la superficie horizontal sobre la que descansa el bloque. El pivote permite una rotación que puede considerarse libre (es decir sin rozamiento) alrededor de él. Un proyectil de masa m=200gr y velocidad v=200m/s, paralela a la superficie y perpendicular a la varilla, se incrusta en el bloque. Si el roce del bloque con la superficie puede despreciarse,

a) ¿Qué tipo de movimiento efectuará el bloque después de la colisión?
b) Determinar las magnitudes necesarias para describirlo.
c) ¿Podría predecirse la posición del bloque t segundos después del momento de la colisión?
d) ¿Se conserva el momento angular durante la colisión?
e) ¿Se conserva la cantidad de movimiento lineal durante la colisión?
f) ¿Se conserva la energía mecánica durante la colisión?

Justificar las respuestas aclarando cuál es el sistema que se analiza al responder cada pregunta.

a) ¿Qué tipo de movimiento efectuará el bloque después de la colisión? ¿Qué magnitudes son necesarias conocer para describir dicho movimiento?

Rotara alrededor de 0 la varilla el bloque y el proyectil juntos

b) ¿Predecir la posición del bloque t segundos después del momento de la colisión?

Debo conocer la velocidad con la que sale el bloque luego del impacto.

Planteo principios de conservación

c) ¿Se conserva el momento angular durante la colisión? Justificar.

Debo analizar la existencia de torques externos

d) ¿Se conserva la cantidad de movimiento lineal durante la colisión? Justificar.

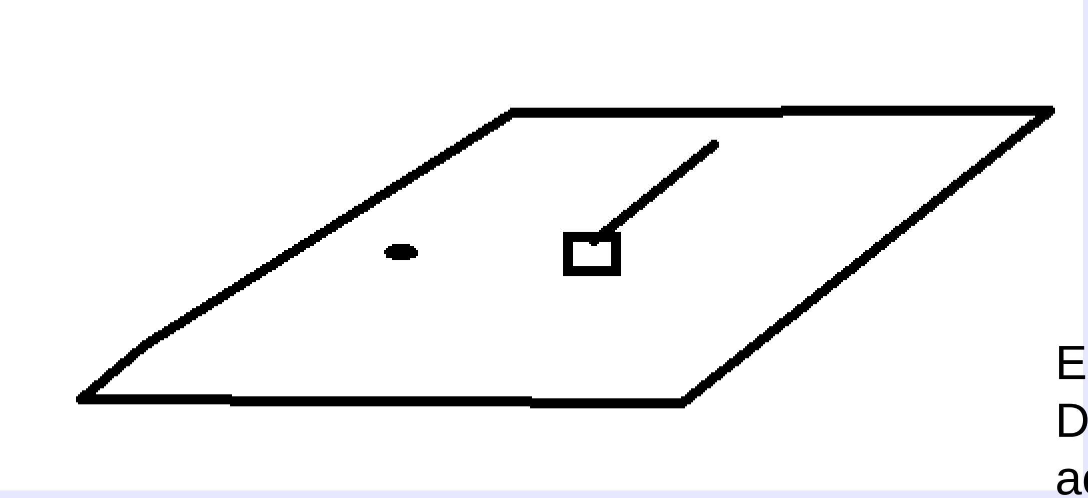
En el impacto aparece una fuerza en el pivote que se opone al desplazamiento de la varilla.

esa fuerza es exterior y por lo tanto no se conseva P del sistema proyectil, bloque varilla, en la colision

Pero esa fuerza no hace torque ya que su punto de aplicación es sobre el punto o, nohay brazo de palanca en ese caso.

e) ¿Se conserva la energía mecánica durante la colisión? Justificar.

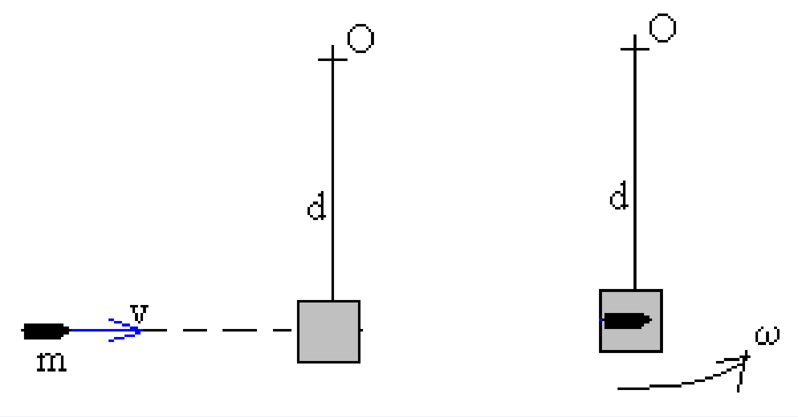
Debemos calcular la energía cinética antes y después del choque para todo el sistema . Y en base a eso determinar si se conservo o no la energía.



M= 10 kg
varilla de masa despreciable y longitud 2 m.

m= 200 gr v_{im}= 200 m/s,

En el impacto consideramos solo fuerzas internas. Despreciamos el peso de la bala como fuerza externa actuando



SFE= Proyectil y bloque ambos modelados como particula

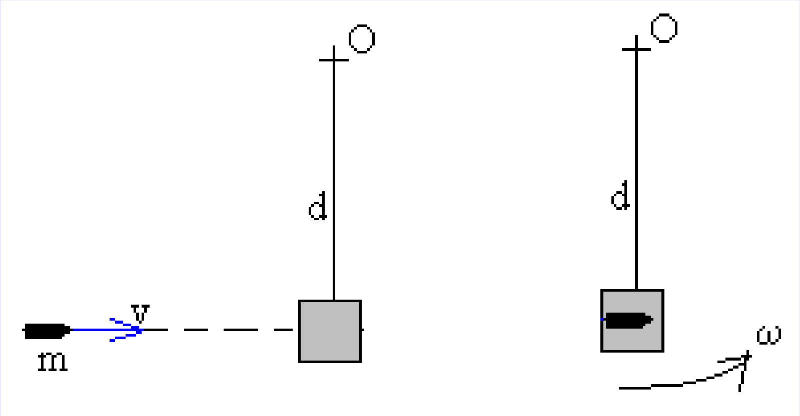
$$\boldsymbol{\tau}_{eO} = d\mathbf{L}_O / dt \quad =0$$

Conservación del momento angular

Momento angular de la partícula respecto de un eje que pasa por O.

$L=m.v.\ d$

$L_i = m_i . v_i . d_i$ $L_{Tot} = \sum m_i . v_i . d_i$ $L_{tot\ i} = L_{tot\ f}$



$L_{tot\ i} = m.v_i . d + M.V_i . d_i$

Tomamos positivo en el sentido antihorario

$L_{tot\ i} = 0{,}2\ Kg.200m/s_i .\ 2m + M.V_i . d_i$

$L_{tot\ f} = m.v_f . d + M.v_f . d_i = (m+M)v_f . d_i$

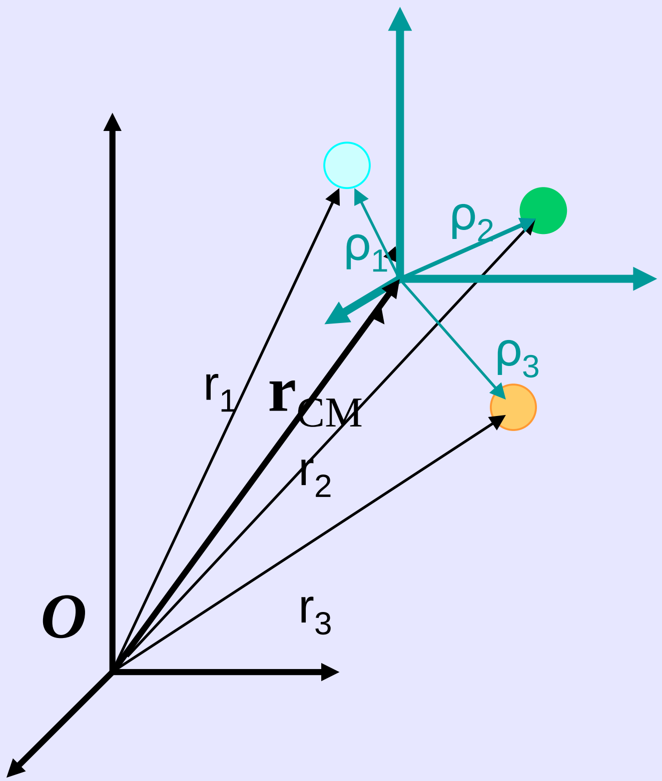
$L_{tot\ f} = (0{,}2\ Kg + 10\ Kg)v_f .\ 2m$

$0{,}2\ Kg.200m/s_i .\ 2m = (0{,}2\ Kg + 10\ Kg)v_f .\ 2m$

$v_f = 3{,}9\ m/s$ $\omega = V/R$

Anexo

Sistema de coordenadas del centro de masa, origen CM



$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{CM} + \boldsymbol{\rho}_1$$
$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_{CM} + \boldsymbol{\rho}_2$$
$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_{CM} + \boldsymbol{\rho}_3$$

Por definición $\rho_{CM} = 0$

En el sistema CM : $\boldsymbol{\rho}_{CM} = \sum m_i \boldsymbol{\rho}_i / \sum m_i$

$$0 = \sum m_i \boldsymbol{\rho}_i \qquad (*)$$

Marco de referencia inercial

$$\boldsymbol{v}_1 = \mathbf{V}_{CM} + \boldsymbol{u}_1$$
$$\boldsymbol{v}_2 = \mathbf{V}_{CM} + \boldsymbol{u}_2 \qquad \boldsymbol{u}_i = d\boldsymbol{\rho}_i / dt$$
$$\boldsymbol{v}_3 = \mathbf{V}_{CM} + \boldsymbol{u}_3$$

de (*) $\quad 0 = d/dt \left(\sum m_i \boldsymbol{\rho}_i \right) = \sum m_i \left(d\boldsymbol{\rho}_i / dt \right) = \sum m_i \boldsymbol{u}_i$

Sistema de cantidad de movimiento cero

$$\tau_{e0} = \sum (\mathbf{r}_{CM} + \boldsymbol{\rho}_i) \times \mathbf{F}_{ei} = \underbrace{\sum (\mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{F}_{ei})}_{\mathbf{r}_{CM} \times \sum \mathbf{F}_{ei}} + \sum (\boldsymbol{\rho}_i \times \mathbf{F}_{ei})$$

Torque externo respecto de 0

$$\boxed{\boldsymbol{\tau}_{eO} = \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{F}_e + \boldsymbol{\tau}_{eCM}}$$

$$\mathbf{L}_O = \sum \boldsymbol{l}_{iO} = \sum \mathbf{r}_{iO} \times \mathbf{p}_{iO} = \sum [(\mathbf{r}_{CM} + \boldsymbol{\rho}_i) \times (\mathbf{V}_{CM} + \mathbf{u}_i)]\, m_i =$$

$$\underbrace{\sum (\mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{V}_{CM}) m_i}_{\mathbf{L}_{CMO}} + \underbrace{\sum (\boldsymbol{\rho}_i \times \mathbf{V}_{CM}) m_i}_{\cancel{(\sum \boldsymbol{\rho}_i m_i)} \times \mathbf{V}_{CM}} + \underbrace{\sum (\mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{u}_i) m_i}_{\mathbf{r}_{CM} \times \cancel{(\sum \mathbf{u}_i m_i)}} + \underbrace{\sum (\rho_i \times \mathrm{u}_i) m_i}_{\mathbf{L}_{CM}}$$

Momento angular respecto de 0

$$\boxed{\mathbf{L}_O = \mathbf{L}_{CMO} + \mathbf{L}_{CM}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\tau}_{eO} = \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{F}_e + \boldsymbol{\tau}_{eCM}}$$

$$\boxed{\mathbf{L}_O = \mathbf{L}_{CMO} + \mathbf{L}_{CM}}$$

(1) (1) = d(2)/dt (2)

$$d\mathbf{L}_O/dt = d\mathbf{L}_{CMO}/dt + d\mathbf{L}_{CM}/dt$$

$$\boxed{\mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{F}_e = d\,\mathbf{L}_{CMO}/dt}$$

Momento angular del sistema como un todo

$$\boxed{\boldsymbol{\tau}_{eCM} = d\,\mathbf{L}_{CM}/dt}$$

Momento angular respecto del CM

Consecuencias:

Si el momento de las fuerzas exteriores respecto de O es nulo

$\mathbf{L}$ respecto de O es constante

Si el momento de las fuerzas exteriores respecto del CM es nulo

$\mathbf{L}$ respecto del CM es constante