Teoría de residuos

Residuo en un punto singular aislado

Sea z_0 una singularidad asilada de la función $f(z)$. Entonces existe $0 < R \leq \infty$ tal que $f(z)$ admite una representación en serie de Laurent convergente en un entorno reducido de z_0:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n =$$

$$= \cdots + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \frac{b_1}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots \quad \text{si} \;\; 0 < |z - z_0| < R$$

Se denomina residuo de $f(z)$ en el punto singular aislado z_0 al número complejo b_1, coeficiente de la potencia $(z - z_0)^{-1}$ en el desarrollo de Laurent de $f(z)$ que converge en el entorno reducido $0 < |z - z_0| < R$.

Notación: $b_1 = \mathrm{Res}_{z_0} f(z)$

Observación

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)(z - z_0)^{n-1} dz \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

si z_0 es interior a C, curva cerrada, simple, suave o suave a trozos, con orientación antihoraria, C incluida en el anillo $0 < |z - z_0| < R$.

En particular,

$$\mathrm{Res}_{z_0} f(z) = b_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)\, dz$$

Entonces,

$$\oint_C f(z)\, dz = 2\pi i \mathrm{Res}_{z_0} f(z)$$

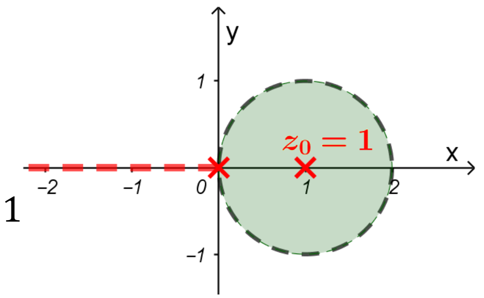
Como veremos más adelante los residuos de $f(z)$ en los puntos singulares aislados permitirán bajo condiciones muy generales calcular integrales de $f(z)$ a lo largo de curvas cerradas.

Cálculo del residuo en z_0 a partir de la serie de Laurent en un entorno reducido

Ejemplo 1: Comprobar que $z_0 = 1$ es una singularidad aislada de $f(z) = \frac{z\,\mathrm{Ln}(z)}{z-1}$ y calcular el residuo $\mathrm{Res}_{z_0} f(z)$.

Rta La función es analítica excepto en el semieje real negativo y en el punto $z_0 = 1$, es decir $D_{ana}(f) = \mathbb{C} - (\{1\} \cup \{x + iy \colon y = 0\,, x \leq 0\})$.

$z_0 = 1$ es singularidad aislada de $f(z)$. Para calcular el residuo correspondiente, hallemos el desarrollo de Laurent que representa a $f(z)$ en un entorno reducido de $z_0 = 1$. El teorema de Laurent asegura que ese desarrollo es válido en el anillo $0 < |z-1| < 1$.



$$\frac{d}{dz}(\mathrm{Ln}(z)) = \frac{1}{z} = \frac{1}{(z-1)+1} \overset{\substack{\text{geom: } a=1\\ r=-(z-1)\\ CV \Leftrightarrow |z-1|<1}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-(z-1))^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n \quad \text{si } |z-1| < 1$$

Entonces,

$$\mathrm{Ln}(z) = \int_1^z \frac{1}{z}\,dz = \int_1^z \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_1^z (-1)^n (z-1)^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (z-1)^{n+1} \quad \text{si } |z-1| < 1$$

Luego,

$$f(z) = \frac{z\,\mathrm{Ln}(z)}{z-1} = \frac{1}{z-1}\big((z-1)+1\big)\mathrm{Ln}(z) = \left(1 + \frac{1}{z-1}\right)\mathrm{Ln}(z) = \left(1 + \frac{1}{z-1}\right)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(z-1)^{n+1} =$$

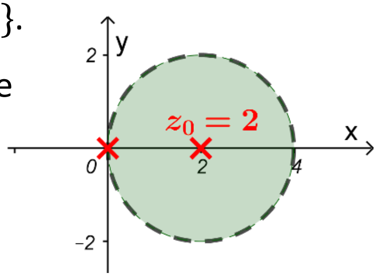
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(z-1)^{n+1} + \frac{1}{(z-1)}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(z-1)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(z-1)^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(z-1)^{n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(z-1)^{n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}(z-1)^{n} = 1 + \frac{1}{2}(z-1) - \frac{1}{6}(z-1)^2 + \cdots \quad \text{si } 0 < |z-1| < 1$$

Como la parte principal de este desarrollo es nula ($b_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, no hay potencias negativas), entonces $z_0 = 1$ es una **singularidad evitable** de $f(z)$. En particular, $\mathrm{Res}_{z_0=1} f(z) = b_1 = 0$.

Ejemplo 2: Comprobar que $z_0 = 2$ es una singularidad aislada de $f(z) = \frac{4}{z^2(z-2)^3}$ y calcular el residuo $\mathrm{Res}_{z_0} f(z)$.

Rta Como $f(z)$ es función racional, es analítica excepto en los ceros de su denominador. Entonces, $D_{ana}(f) = \mathbb{C} - \{0,2\}$.
La función posee dos singularidades aisladas: $z = 0$ y $z = 2$. Para calcular el residuo en $z_0 = 2$, hallemos el desarrollo de Laurent que representa a $f(z)$ en un entorno reducido de $z_0 = 2$. Ese desarrollo es válido en el anillo $0 < |z-2| < 2$.



$$\frac{4}{z} = \frac{4}{(z-2)+2} = \frac{2}{1+\left(\frac{z-2}{2}\right)} \underset{CV \Leftrightarrow |z-2|<2}{\overset{\substack{\text{geom: } a=2 \\ r=-(z-2)/2}}{\overbrace{=}}} \sum_{n=0}^{\infty} 2\left(-\left(\frac{z-2}{2}\right)\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}(z-2)^n \quad \text{si } |z-2| < 2$$

Luego,

$$\frac{4}{z^2} = \frac{d}{dz}\left(-\frac{4}{z}\right) = \frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-1}}(z-2)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dz}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-1}}(z-2)^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{n}{2^{n-1}}(z-2)^{n-1} \text{ si } |z-2| < 2$$

Así,

$$f(z) = \frac{4}{z^2(z-2)^3} = \frac{1}{(z-2)^3}\frac{4}{z^2} = \underbrace{\frac{1}{(z-2)^3}}_{0<|z-2|<\infty} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{n}{2^{n-1}}(z-2)^{n-1}}_{|z-2|<2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{n}{2^{n-1}}(z-2)^{n-4} =$$

$$= \underbrace{(z-2)^{-3} - (z-2)^{-2} + \frac{3}{4}(z-2)^{-1}}_{(**)} - \frac{1}{2} + \frac{5}{16}(z-2) - \frac{3}{16}(z-2)^2 + \cdots \quad \text{si } 0 < |z-2| < 2$$

La parte principal $(**)$ de este desarrollo consta de un número finito de potencias negativas de $(z-2)$, siendo la más negativa la potencia -3. Entonces $z_0 = 2$ es un **polo de orden $k = 3$** de $f(z)$ (esto también puede comprobarse aplicando el teorema de caracterización de polos. ¿Cómo?). Además, de $(**)$ se ve que $\mathrm{Res}_{z_0=2} f(z) = b_1 = \frac{3}{4}$

Ejemplo 3: Comprobar que $z_0 = i$ es una singularidad aislada de $f(z) = 2(z-i)^3 \text{sen}^2\left(\frac{1}{z-i}\right)$ y calcular el residuo $\text{Res}_{z_0} f(z)$.

Rta Es claro que $D_{ana}(f) = \mathbb{C} - \{i\}$, así que $z_0 = i$ es punto singular aislado de $f(z)$. Para calcular el residuo en $z_0 = i$, hallemos el desarrollo de Laurent que representa a $f(z)$ en un entorno reducido de $z_0 = i$. Ese desarrollo es válido en el anillo $0 < |z-i| < \infty$.

$$f(z) = 2\text{sen}^2\left(\frac{1}{z-i}\right) \overset{2sen^2\alpha=1-\cos(2\alpha)}{=} 1 - \cos\left(\frac{2}{z-i}\right)$$

$$\cos w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} w^{2n} \quad \text{si } |w| < \infty$$

Reemplazando $w = \frac{2}{z-i}$ se tiene:

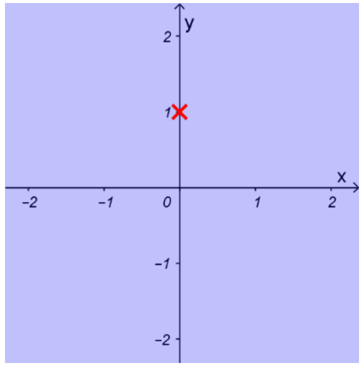
$$\cos\left(\frac{2}{z-i}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{2}{z-i}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!} \frac{1}{(z-i)^{2n}} \quad \text{si } 0 < |z-i| < \infty$$

Luego,

$$f(z) = (z-i)^3\left(1 - \cos\left(\frac{2}{z-i}\right)\right) = (z-i)^3\left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!} \frac{1}{(z-i)^{2n}}\right) =$$

$$= (z-i)^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n}}{(2n)!} \frac{1}{(z-i)^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n}}{(2n)!} \frac{1}{(z-i)^{2n-3}} =$$

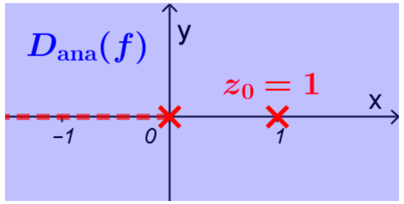
$$= 2(z-i) - \frac{2}{3}\frac{1}{(z-i)} + \frac{4}{45}\frac{1}{(z-i)^3} - \frac{2}{315}\frac{1}{(z-i)^5} + \cdots \quad \text{si } 0 < |z-i| < \infty$$



La parte principal de este desarrollo de Laurent contiene una cantidad infinita de términos no nulos ($b_{2n+1} \neq 0$). Por lo tanto, $z_0 = i$ es una **singularidad esencial** de $f(z)$. Además, $\text{Res}_{z_0=i} f(z) = b_1 = -\frac{2}{3}$

Como lo muestran los tres ejemplos previos, el cálculo por definición del residuo en un punto singular aislado requiere obtener el desarrollo de Laurent centrado en la singularidad y convergente en un entorno reducido de la misma. Esto puede resultar engorroso o poco eficiente. En algunos casos es posible determinar el residuo sin recurrir a la serie de Laurent (no será el caso de las singularidades esenciales).

➢ Si z_0 es una **singularidad evitable z_0** de $f(z)$, entonces los coeficientes b_n de la parte principal del desarrollo de Laurent de $f(z)$ en $0 < |z - z_0| < R$ son todos nulos por definición. En particular, $\text{Res}_{z_0} f(z) = b_1 = 0$. Es decir, **el residuo en una singularidad evitable es nulo**.



<u>**Ejemplo 4**</u>: Si $f(z) = \frac{1+e^{i\pi z}}{\text{Ln}(z)}$ calcular el residuo $\text{Res}_{z_0} f(z)$ en $z_0 = 1$.

<u>Rta</u> A diferencia del ejemplo 1, para esta función no es sencillo hallar la serie de Laurent que converge si $0 < |z - 1| < 1$. Sin embargo, la función $f(z)$ es el cociente de numerador $N(z) = 1 + e^{i\pi z}$ analítica en $\mathbb{C}$ y denominador $D(z) = \text{Ln}(z)$ analítico excepto en el semieje real negativo. Luego, ambas son analíticas en $z_0 = 1$. Además, $D(z) = 0$ si y sólo si $z = 1$. $D_{ana}(f) = \mathbb{C} - (\{1\} \cup \{x + iy : y = 0\,, x \leq 0\})$. En el gráfico podemos ver claramente que $z_0 = 1$ es singularidad aislada de $f(z)$. Apliquemos el teorema de clasificación de singularidades de cociente de analíticas:

- $z_0 = 1$ es cero de orden $p = 1$ de $N(z) = 1 + e^{i\pi z}$ pues:

  $N(1) = 1 + e^{i\pi} = 1 - 1 = 0$ y $N'(z) = i\pi e^{i\pi z}$ así que $N'(1) = -i\pi \neq 0$.

- $z_0 = 1$ es cero de orden $q = 1$ de $D(z) = \text{Ln}(z)$ pues $D(1) = \text{Ln}(1) = 0$ y $D'(z) = \frac{1}{z}$ así que $D'(1) = 1 \neq 0$.

Dado que $p = 1 \geq 1 = q$, en base al teorema de caracterización de singularidades de cocientes de analíticas queda probado que $z_0 = 1$ es **singularidad evitable** de $f(z)$. Por lo tanto, $\text{Res}_{z_0=1} f(z) = 0$ (no fue necesario hallar el desarrollo de Laurent de $f(z)$ convergente en un entorno reducido de $z_0 = 1$).

Teorema (Cálculo del residuo en un polo) Sea z_0 un polo de orden k de $f(z)$. Se verifica:

- Si $k = 1$:

$$\operatorname{Res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

- Si $k \geq 2$:

$$\operatorname{Res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left((z - z_0)^k f(z) \right)$$

Ejemplo 5: Si $f(z) = \frac{4}{z^2(z-2)^3}$ calcular el residuo $\operatorname{Res}_{z_0} f(z)$ en $z_0 = 2$.

Rta La función $f_1(z) = \frac{4}{z^2}$ es analítica en $z_0 = 2$ (función racional con denominador no nulo) y $f_1(2) = 1 \neq 0$. Además,

$$f(z) = \frac{4}{z^2(z-2)^3} = \frac{1}{(z-2)^3} f_1(z)$$

Luego, por el teorema de caracterización de polos, $z_0 = 2$ es un polo de orden $k = 3$ de $f(z)$. Aplicando la fórmula del teorema anterior:

$$\operatorname{Res}_{z_0=2} f(z) = \lim_{z \to 2} \frac{1}{(3-1)!} \frac{d^{3-1}}{dz^{3-1}} \left((z-2)^3 f(z) \right) = \lim_{z \to 2} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left((z-2)^3 f(z) \right) =$$

$$= \lim_{z \to 2} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{4}{z^2} \right) = \lim_{z \to 2} \frac{1}{2!} \frac{d}{dz} \left(-\frac{8}{z^3} \right) = \lim_{z \to 2} \frac{1}{2!} \frac{24}{z^4} = \frac{3}{4}$$

Observar que se obtiene el mismo resultado que en el ejemplo 2 (pero con más facilidad puesto que no necesitamos hallar el desarrollo de Laurent de $f(z)$ convergente en un entorno reducido de $z_0 = 2$).

Ejemplo 6: Si $f(z) = \frac{\text{sen}(3z)}{\text{sen}(z)(z-\pi)}$ calcular $\text{Res}_{z_0=\pi} f(z)$.

Rta Las funciones $N(z) = \text{sen}(3z)$, $D_1(z) = \text{sen}(z)$ y $D_2(z) = (z-\pi)$ son analíticas en $z_0 = \pi$.

- $z_0 = \pi$ es cero de orden $p = 1$ de $N(z) = \text{sen}(3z)$ pues:

  $N(z) = \text{sen}(3z) \qquad N(\pi) = 0$

  $N'(z) = 3\cos(3z) \qquad N'(\pi) = -3 \neq 0$

- $z_0 = \pi$ es cero de orden $q_1 = 1$ de $D_1(z) = \text{sen}(z)$ pues:

  $D_1(z) = \text{sen}(z) \qquad D_1(\pi) = 0$

  $D_1{}'(z) = \cos(z) \qquad D_1{}'(\pi) = -1 \neq 0$

- $z_0 = \pi$ es cero de orden $q_2 = 1$ de $D_2(z) = z - \pi$.

Luego, $z_0 = \pi$ es cero de orden $q = q_1 + q_2 = 2$ de $D(z) = \text{sen}(z)(z-\pi) = D_1(z)D_2(z)$.

La función $f(z)$ es el cociente de $N(z)$ sobre $D(z)$. Por el teorema de clasificación de singularidades de cocientes de analíticas, $z_0 = \pi$ es polo de orden $k = q - p = 2 - 1 = 1$ de $f(z)$, puesto que $p = 1 < 2 = q$.

Entonces,

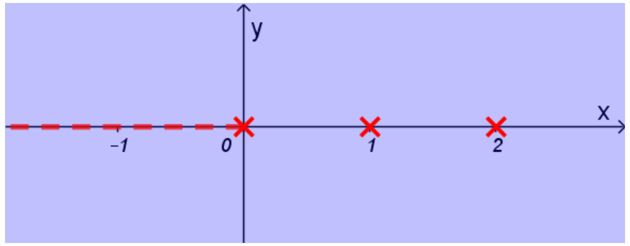
$$\text{Res}_{z_0=\pi} f(z) = \lim_{z\to\pi} (z-\pi) f(z) = \lim_{z\to\pi} (z-\pi) \frac{\text{sen}(3z)}{\text{sen}(z)(z-\pi)} =$$

$$= \lim_{z\to\pi} \frac{\text{sen}(3z)}{\text{sen}(z)} \overbrace{=}^{\text{"0/0" L'Hôpital}} \lim_{z\to\pi} \frac{3\cos(3z)}{\cos(z)} = \frac{(-3)}{(-1)} = 3$$

Ejercicio: Hallar y clasificar las singularidades aisladas de

a) $f(z) = \frac{1+\cos(\pi z)}{\mathrm{Ln}(z)(z-2)}$ b) $f(z) = \frac{(z-1)e^{2/z}}{z}$

Rta



a) $D_A(f) = \mathbb{C} - (\{1,2\} \cup \{x+iy : y=0, x \leq 0\})$

$N(z) = 1+\cos(\pi z)$ es analítica en $\mathbb{C}$.

$D_1(z) = \mathrm{Ln}\,(z)$ es analítica excepto en el semieje real negativo.

$D_2(z) = \mathrm{z} - 2$ es analítica en $\mathbb{C}$.

$D(z) = D_1(z)D_2(z)$ es analítica excepto en el semieje real negativo (producto de analíticas).
$D(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \ \vee \ z = 2$

$D_A(f) = \mathbb{C} - (\{1,2\} \cup \{x+iy : y=0, x \leq 0\})$ (f es cociente de analíticas con denominador no nulo).

Las singularidades aisladas de $f(z)$ son $z_0 = 1, z_1 = 2$.

$N^{(0)}(z) = 1 + \cos(\pi z)$	$N^{(1)}(z) = -\pi \operatorname{sen}(\pi z)$	$N^{(2)}(z) = -\pi^2 \cos(\pi z)$
$D^{(0)}(z) = \operatorname{Ln}(z)(z-2)$	$D^{(1)}(z) = \dfrac{z-2}{z} + \operatorname{Ln}(z)$	

- Clasificación de $z_0 = 1$:

$N^{(0)}(1) = 0$	$N^{(1)}(1) = 0$	$N^{(2)}(1) = \pi^2 \neq 0$	$p = 2$
$D^{(0)}(1) = 0$	$D^{(1)}(1) = -1 \neq 0$	$q = 1$	

$$p = 2 \geq 1 = q.$$

Por el teorema de clasificación, $z_0 = 1$ es una **singularidad evitable** de $f(z)$.

Clasificación de $z_1 = 2$:

$N^{(0)}(2) = 2 \neq 0$	$p = 0$	
$D^{(0)}(2) = 0$	$D^{(1)}(2) = \operatorname{Ln}(2) \neq 0$	$q = 1$

$$p = 0 < 1 = q.$$

Por el teorema de clasificación, $z_0 = 2$ es un **polo de orden** $\boldsymbol{k} = q - p = 1 - 0 = \mathbf{1}$ de $f(z)$.

Dem del teorema de cálculo de residuos en polos

Por el teorema de caracterización de polos existe $f_1(z)$ analítica en z_0 con $f_1(z_0) \neq 0$ tal que $f(z) = (z - z_0)^{-k} f_1(z)$ en un entorno reducido de z_0, digamos $0 < |z - z_0| < R$ (con $0 < R \leq \infty$).

Como $f_1(z)$ analítica en z_0, se representa mediante su serie de Taylor: $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ si $|z - z_0| < R$

Aplicando unicidad, la serie de Laurent de $f(z)$ convergente en $0 < |z - z_0| < R$ es:

$$f(z) = (z - z_0)^{-k} f_1(z) = (z - z_0)^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-k} =$$

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{k-1} a_n (z - z_0)^{n-k}}_{(**)} + \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-k} \quad \text{si } 0 < |z - z_0| < R$$

Su parte principal $(**)$ es $\sum_{n=0}^{k-1} a_n (z - z_0)^{n-k} = a_0 (z - z_0)^{-k} + a_1 (z - z_0)^{-(k-1)} + \cdots + a_{k-1} (z - z_0)^{-1}$. El residuo de $f(z)$ en el polo z_0 es el coeficiente a_{k-1} de la potencia $(z - z_0)^{-1}$.

Entonces,

$$\operatorname{Res}_{z_0} f(z) = a_{k-1} = \frac{f_1^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!} = \lim_{z \to z_0} \frac{f_1^{(k-1)}(z)}{(k-1)!} = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (f_1(z)) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left((z - z_0)^k f(z) \right)$$

donde se tuvo en cuenta que como $f_1(z)$ es analítica en z_0, todas sus derivadas también lo son. En particular $f_1^{(k-1)}(z)$ es analítica en z_0. Ello implica que $f_1^{(k-1)}(z)$ es continua en z_0 así que $\lim_{z \to z_0} f_1^{(k-1)}(z) = f_1^{(k-1)}(z_0)$.

Cálculo de integrales por residuos

Sea C curva cerrada, simple, suave o suave a trozos, con orientación antihoraria, tal que $f(z)$ es analítica sobre C y en su interior, excepto en el punto singular aislado z_0 interior a C. Luego, existe $R > 0$ tal que $f(z)$ es analítica en un entorno reducido $0 < |z - z_0| < R$ y C está incluida en dicho entorno. Consideremos la serie de Laurent que representa a $f(z)$ allí:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{si} \quad 0 < |z - z_0| < R$$

donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \qquad ; \qquad b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)(z - z_0)^{n-1} dz$$

Como observamos anteriormente, el residuo de $f(z)$ en z_0 se relaciona con la circulación antihoraria de $f(z)$ a lo largo de C mediante:

$$\mathrm{Res}_{z_0} f(z) = b_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)\, dz \quad \text{así que} \quad \oint_C f(z)\, dz = 2\pi i \mathrm{Res}_{z_0} f(z)$$

El siguiente resultado generaliza lo anterior.

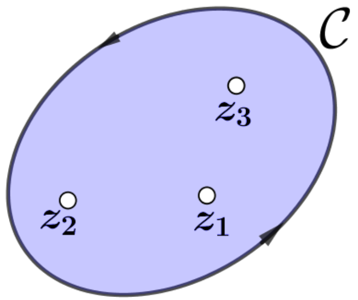
Teorema de los Residuos

Sea C curva cerrada, simple, suave o suave a trozos, con orientación antihoraria y

sea $f(z)$ una función analítica sobre C y en su interior, excepto en un número finito de puntos singulares $z_1, z_2, \dots, z_N$ interiores a C.

Se verifica:

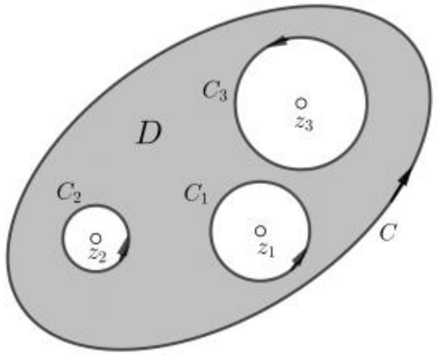
$$\oint_C f(z)\, dz = 2\pi i \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res}_{z_k} f(z)}_{\substack{\text{suma de los residuos} \\ \text{en las singularidades} \\ \text{interiores a } C}}$$



Dem del teorema de los residuos

Supongamos que se cumplen las hipótesis del teorema. Para cada $k = 1,2,\dots,N$ sea C_k circunferencia antihoraria centrada en el punto singular z_k, suficientemente pequeña para que C_k sea interior a C y tal que si $1 \leq k < k^* \leq N$ resulte C_k exterior a C_{k^*}. Entonces $f(z)$ es analítica sobre C, C_1, … , C_N y en la región D entre ellas. Luego, por la generalización del teorema de Cauchy-Goursat:

$$\oint_C f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{N} \oint_{C_k} f(z)\,dz$$



Por la definición del residuo en z_k se tiene:

$$\oint_{C_k} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z_k} f(z)$$

Reemplazando en la igualdad anterior se obtiene la tesis:

$$\oint_C f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{N} 2\pi i \operatorname{Res}_{z_k} f(z) = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname{Res}_{z_k} f(z)$$

Corolario: Sea C curva cerrada, simple, suave o suave a trozos, con orientación antihoraria, tal que $f(z)$ es analítica sobre C y en su interior, excepto en el punto singular z_0 interior a C. Si z_0 es una **singularidad evitable** de $f(z)$ interior a C, entonces: $\oint_C f(z)\,dz = 0$

Dem En efecto, basta aplicar el teorema de los residuos teniendo en cuenta que si z_0 es evitable, los coeficientes b_n de la parte principal del desarrollo de Laurent de $f(z)$ en $0 < |z - z_0| < R$ son todos nulos por definición. En particular $\mathrm{Res}_{z_0} f(z) = b_1 = 0$. Entonces,

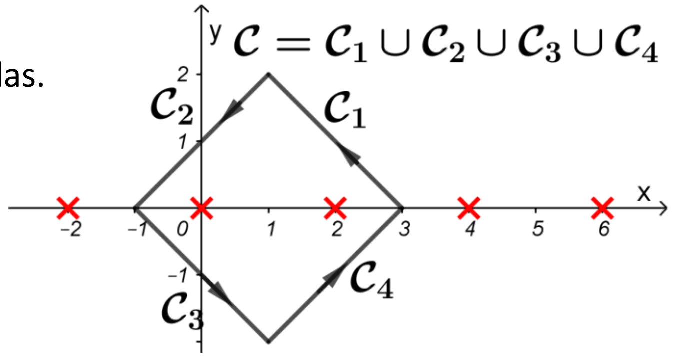
$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \mathrm{Res}_{z_0} f(z) = 0$$

Ejemplo 7: Calcular $\oint_C \frac{\mathrm{sen}(\pi z)}{z\,\mathrm{sen}(\pi z/2)} dz$ si C es la frontera antihoraria del cuadrado de vértices $-1,\ 1+2i,\ 3,\ 1-2i$.

Rta La curva C es cerrada, simple, suave a trozos y tiene orientación antihoraria. El integrando $f(z)$ es un cociente con numerador

$N(z) = \mathrm{sen}(\pi z)$ y denominador $D(z) = z\,\mathrm{sen}(\pi z/2)$, ambas analíticas en $\mathbb{C}$.

$$\mathrm{sen}\left(\frac{\pi z}{2}\right) = 0 \iff \frac{\pi z}{2} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \iff z = 2k\,, k \in \mathbb{Z}$$



Las singularidades de $f(z)$ son los ceros del denominador: $z = 0$ y $z = 2k$ (con $k \in \mathbb{Z}$). Todas son aisladas.

$D_{ana}(f) = \mathbb{C} - (\{0\} \cup \{2k: k \in \mathbb{Z}\})$. La función $f(z)$ es analítica sobre C y en su interior,

excepto en $z = 0$ y $z = 2$, puntos singulares interiores a C.

Del teorema de los residuos resulta:

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i\big(\mathrm{Res}_{z=0} f(z) + \mathrm{Res}_{z=2} f(z)\big)$$

Para calcular los residuos aplicamos el teorema de clasificación de singularidades de cocientes de analíticas.

- $z = 0$ es un cero de orden $p = 1$ de $N(z) = \operatorname{sen}(\pi z)$ pues:

$N(z) = \operatorname{sen}(\pi z)\ ;\ N(0) = \operatorname{sen}(0) = 0$
$N'(z) = \pi\cos(\pi z)\ ;\ N'(0) = \pi\cos(0) = \pi \neq 0$

- $z = 0$ es un cero de orden $q = 2$ de $D(z) = z\operatorname{sen}(\pi z/2)$ pues:

$D(z) = z\operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{2}\right)\ ;\ D(0) = \operatorname{sen}(0) = 0$
$D'(z) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{2}\right) + \frac{\pi}{2} z\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right);\ D'(0) = 0$
$D''(z) = \pi\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right) - \frac{\pi^2}{4} z\operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{2}\right)\ ;\ D''(0) = \pi \neq 0$

Como $p = 1 < 2 = q$, por el teorema de clasificación de singularidades de cocientes de analíticas la singularidad $z = 0$ es un **polo de orden** $\boldsymbol{k} = q - p = 2 - 1 = \mathbf{1}$ de $f(z)$*.* Entonces,

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0} z f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{z\operatorname{sen}(\pi z)}{z\operatorname{sen}(\pi z/2)} = \lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z/2)} \underbrace{=}_{\substack{\text{"0/0"}\\ \text{L'Hôpital}}} \lim_{z\to 0}\frac{\pi\cos(\pi z)}{\frac{\pi}{2}\cos(\pi z/2)} = 2$$

- $z = 2$ es un cero de orden $p = 1$ de $N(z) = \operatorname{sen}(\pi z)$ pues:

$N(z) = \operatorname{sen}(\pi z)\ ;\ N(2) = \operatorname{sen}(2\pi) = 0$
$N'(z) = \pi\cos(\pi z)\ ;\ N'(2) = \pi\cos(2\pi) = \pi \neq 0$

- $z = 2$ es un cero de orden $q = 1$ de $D(z) = z\operatorname{sen}(\pi z/2)$ pues:

$D(z) = z\operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{2}\right)\ ;\ D(2) = 2\operatorname{sen}(\pi) = 0$
$D'(z) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{2}\right) + \frac{\pi z}{2}\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right)\ ;\ D'(2) = \pi\cos(\pi) = -\pi \neq 0$

Como $p = 1 \geq 1 = q$, por el teorema de clasificación de singularidades de cocientes de analíticas la singularidad $z = 0$ de $f(z)$ es **evitable***.*

Entonces $\operatorname{Res}_{z=2} f(z) = 0$.

Luego,
$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i\left(\operatorname{Res}_{z=0} f(z) + \operatorname{Res}_{z=2} f(z)\right) = 2\pi i(2 + 0) = 4\pi i$$

Ejemplo 8: Calcular $\oint_C \left(\frac{1}{z \operatorname{sen} z} + 3z^2 \operatorname{sen}\left(\frac{2}{z}\right)\right) dz$ si $C: |z| = 2$ con orientación antihoraria.

Rta La circunferencia $C: |z| = 2$ es cerrada, simple, suave y tiene orientación antihoraria. Por la propiedad de linealidad:

$$\oint_C \left(\frac{1}{z \operatorname{sen} z} + 3z^2 \operatorname{sen}\left(\frac{2}{z}\right)\right) dz = \underbrace{\oint_C \frac{1}{z \operatorname{sen} z} dz}_{I_1} + \underbrace{\oint_C 3z^2 \operatorname{sen}\left(\frac{2}{z}\right) dz}_{I_2}$$

El integrando $f_1(z)$ en I_1 es un cociente con numerador $N(z) = 1$ y denominador $D(z) = z \operatorname{sen} z$, ambas analíticas en $\mathbb{C}$. Luego, las singularidades de $f_1(z)$ son los ceros de $D(z)$, es decir $z_k = k\pi, , k \in \mathbb{Z}$. Ellas son exteriores a C, excepto $z_0 = 0$ que es interior. Como $f_1(z)$ es analítica sobre C y en su interior, por el teorema de los residuos resulta:

$$\oint_C f_1(z) dz = \oint_C \frac{1}{z \operatorname{sen} z} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} f_1(z)$$

- $z = 0$ es cero de orden $p = 0$ de $N(z)$ pues $N(0) = 1 \neq 0$.

- $z = 0$ es cero de orden $q = 2$ de $D(z)$ pues:

$D(z) = z \operatorname{sen}(z)$; $D(0) = 0$
$D'(z) = \operatorname{sen}(z) + z \cos(z)$; $D'(0) = 0$
$D''(z) = 2\cos(z) - z \operatorname{sen}(z)$; $D''(0) = 2 \neq 0$

Por el teorema de clasificación de singularidades de cocientes de analíticas, como $p = 0 < 2 = q$ la función $f_1(z)$

tiene un **polo de orden** $\boldsymbol{k} = q - p = 2 - 0 = \mathbf{2}$ en $z = 0$.

Entonces,

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{1}{1!} \frac{d}{dz}\left(z^2 f(z)\right) = \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz}\left(\frac{z}{\operatorname{sen} z}\right) = \lim_{z \to 0} \frac{\operatorname{sen} z - z \cos z}{\operatorname{sen}^2(z)} \overset{\text{"0/0"}}{\underset{\text{L'Hôpital}}{=}} \lim_{z \to 0} \frac{\cos z - (\cos z - z \operatorname{sen} z)}{2 \operatorname{sen} z \cos z} =$$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{z \operatorname{sen} z}{2 \operatorname{sen} z \cos z} = \lim_{z \to 0} \frac{z}{2 \cos z} = 0$$

Luego, $\oint_C \frac{1}{z \operatorname{sen} z} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} f_1(z) = 0$

El integrando $f_2(z)$ en I_2 no es un cociente de analíticas. Por lo tanto, no podemos aplicar el teorema de clasificación de singularidades de cocientes de analíticas.

La única singularidad de $f_2(z)$ es $z = 0$, interior a C. Como $f_2(z)$ es analítica sobre C y en su interior, por el teorema de los residuos resulta:

$$\oint_C f_2(z)dz = \oint_C 3z^2 \text{sen}\left(\frac{2}{z}\right) dz = 2\pi i \text{Res}_{z=0}\, f_2(z)$$

Para clasificar esta singularidad, recurrimos a la serie de Laurent centrada en $z_0 = 0$ convergente en un entorno reducido, que obtenemos así:

$$\text{sen}\, w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} w^{2n+1} \quad \text{si } |w| < \infty$$

Reemplazando $w = 2/z$ se tiene:

$$\text{sen}\left(\frac{2}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{2}{z}\right)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n+1}} \quad \text{si } 0 < |z| < \infty$$

Entonces,

$$3z^2 \text{sen}\left(\frac{2}{z}\right) = 3z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{2}{z}\right)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n-1}} = 6z \underbrace{-\frac{4}{z} + \frac{4}{5}\frac{1}{z^3} + \cdots}_{(**)} \quad \text{si } 0 < |z| < \infty$$

Como la parte principal $(**)$ de este desarrollo de Laurent contiene infinitos términos no nulos, entonces $z = 0$ es una singularidad esencial de $f_2(z)$. El residuo correspondiente es

$$\text{Res}_{z=0}\, f_2(z) = b_1 = -4$$

Por lo tanto,

$$\oint_C 3z^2 \text{sen}\left(\frac{2}{z}\right) dz = 2\pi i \text{Res}_{z=0}\, f_2(z) = 2\pi i(-4) = -8\pi i$$

Finalmente,

$$\oint_C \left(\frac{1}{z\, \text{sen}\, z} + 3z^2 \text{sen}\left(\frac{2}{z}\right)\right) dz = I_1 + I_2 = 0 - 8\pi i = -8\pi i$$

OPTATIVO: cálculo de integrales reales por residuos

Ejemplo 1:

$$I = \int_0^{\pi} \frac{dt}{13 + 12\cos t}$$

Rta Como el integrando es una función par:

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{13 + 12\cos t}$$

Consideremos la circunferencia antihoraria $C: z = e^{it}, -\pi \leq t \leq \pi$. Entonces $dz = z'(t)dt = ie^{it}dt = iz\,dt$. Luego,

$$dt = \frac{dz}{iz}$$

Además,

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z}$$

Entonces,

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{13 + 12\cos t} = \frac{1}{2}\oint_C \frac{1}{13 + 12\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)} \frac{dz}{iz} = \frac{1}{2i}\oint_C \overbrace{\frac{1}{6z^2 + 13z + 6}}^{f(z)} dz$$

$$6z^2 + 13z + 6 = 0 \;\Leftrightarrow\; z = \frac{-13 \pm \sqrt{169 - 144}}{12} \;\Leftrightarrow\; z = \frac{-13 \pm 5}{12} \;\Leftrightarrow\; z = -\frac{3}{2} \;\vee\; z = -\frac{2}{3}$$

El integrando $f(z)$ es analítico excepto en estos dos puntos. Como $z = -\frac{3}{2}$ es exterior a C y $z = -\frac{2}{3}$ es interior, entonces por el teorema de los residuos:

$$\oint_C \frac{1}{6z^2 + 13z + 6} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=-2/3} f(z)$$

Aplicando el teorema de caracterización de polos vemos que el punto $z_0 = -2/3$ es un polo simple de $f(z)$:

$$f(z) = \frac{1}{6z^2 + 13z + 6} = \frac{1}{\left(z + \frac{2}{3}\right)} \overbrace{\frac{1}{6\left(z + \frac{3}{2}\right)}}^{\substack{f_1(z) \\ analít.en\ z_0 \\ f_1(z_0) \neq 0}}$$

Entonces,

$$\oint_C \frac{1}{6z^2 + 13z + 6} dz = 2\pi i \mathrm{Res}_{z=-2/3} f(z) = 2\pi i \lim_{z \to -2/3} \left(z + \frac{2}{3}\right) f(z) = 2\pi i \lim_{z \to -2/3} \frac{1}{6\left(z + \frac{3}{2}\right)} = \frac{2\pi i}{5}$$

Por lo tanto:

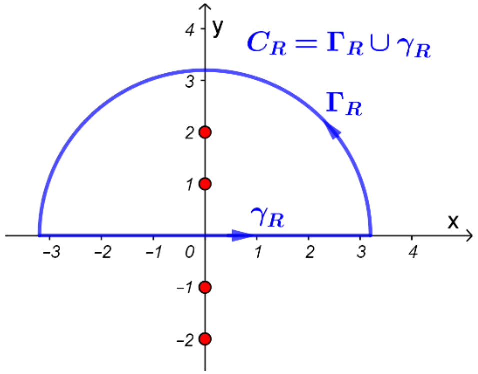
$$I = \int_0^\pi \frac{dt}{13 + 12\cos t} = \frac{1}{2i} \oint_C \frac{1}{6z^2 + 13z + 6} dz = \frac{\pi}{5}$$

<u>Ejemplo 2</u>:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2(x+1)}{(x^2+1)^2(x^2+4)}\,dx$$

<u>Rta</u> La función $f(z) = \frac{z^2(z-1)}{(z^2+1)^2(z^2+4)}$ es analítica excepto en los puntos $z = \pm i, z = \pm 2i$. Sobre el eje real coincide con el integrando de I.

Consideremos la curva $C_R = \Gamma_R \cup \gamma_R$, con $R > 2$ y orientación antihoraria. Entonces $f(z)$ es analítica sobre C_Ry en su interior, excepto en $z_0 = i$ y $z_1 = 2i$. De acuerdo con el teorema de los residuos se tiene:



$$\oint_{C_R} \frac{z^2(z+1)}{(z^2+1)^2(z^2+4)}\,dz = 2\pi i\left(\operatorname{Res}_{z_0=i} f(z) + \operatorname{Res}_{z_0=2i} f(z)\right)$$

- $z_0 = i$ es un **polo de orden $\boldsymbol{k = 2}$** de $f(z)$ (empleando caracterización de ceros de analíticas, claramente es cero de orden $p = 0$ del numerador y de orden $q = 2$ del denominador).

  Entonces,

$$\operatorname{Res}_{z_0=i} f(z) = \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left((z-i)^2 f(z)\right) = \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left((z-i)^2 \frac{(z^3+z^2)}{(z^2+1)^2(z^2+4)}\right) = \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left(\frac{z^3+z^2}{(z+i)^2(z^2+4)}\right) =$$

$$= \lim_{z\to i} \frac{(3z^2+2z)(z+i)^2(z^2+4) - (z^3+z^2)\left(2(z+i)(z^2+4) + (z+i)^2 2z\right)}{\left((z+i)^2(z^2+4)\right)^2} = \frac{8-5i}{36}$$

- $z_0 = 2i$ es un **polo de orden $\boldsymbol{k} = \mathbf{1}$** de $f(z)$ (empleando caracterización de ceros de analíticas, claramente es cero de orden $p = 0$ del numerador y de orden $q = 1$ del denominador).

  Entonces,

$$\operatorname{Res}_{z_0=2i} f(z) = \lim_{z \to 2i} \left((z-2i)f(z)\right) = \lim_{z \to 2i} \left((z-2i)\frac{z^2(z+1)}{(z^2+1)^2(z^2+4)}\right) =$$

$$= \lim_{z \to 2i} \frac{z^2(z+1)}{(z^2+1)^2(z+2i)} = \frac{-2+i}{9}$$

Por lo tanto,

$$\oint_{C_R} \frac{z^2(z-1)}{(z^2+1)^2(z^2+4)} dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z_0=i} f(z) + \operatorname{Res}_{z_0=2i} f(z)\right) = 2\pi i \left(\frac{8-5i}{36} + \frac{-2+i}{9}\right) = \frac{\pi}{18}$$

Entonces,

$$\int_{\gamma_R} \frac{z^2(z-1)}{(z^2+1)^2(z^2+4)} dz + \int_{\Gamma_R} \frac{z^2(z-1)}{(z^2+1)^2(z^2+4)} dz = \frac{\pi}{18}$$

Teniendo en cuenta que

$$|z^2+1| \geq \left||z|^2-1\right| \quad ; \quad |z^2+4| \geq \left||z|^2-4\right|$$

resulta que si $z \in \Gamma_R$ se tiene (dado que $|z| = R$):

$$\left|\frac{z^2(z-1)}{(z^2+1)^2(z^2+4)}\right| = \frac{|z|^2|z-1|}{|z^2+1|^2|z^2+4|} \leq \frac{|z|^2(|z|+1)}{\left||z|^2-1\right|^2\left||z|^2-4\right|} = \frac{R^2(R+1)}{|R^2-1|^2|R^2-4|} \overbrace{=}^{R>2} \frac{R^2(R+1)}{(R^2-1)^2(R^2-4)} = M$$

Entonces, si $L = \operatorname{long}(\Gamma_R) = \pi R$:

$$\left|\int_{\Gamma_R} \frac{z^2(z-1)}{(z^2+1)^2(z^2+4)}\,dz\right| \leq ML = \frac{\pi R^3(R+1)}{(R^2-1)^2(R^2-4)} \overbrace{\longrightarrow}^{R\to\infty} 0 \quad \text{así que} \quad \lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} \frac{z^2(z-1)}{(z^2+1)^2(z^2+4)}\,dz = 0$$

Por lo tanto,

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} \frac{z^2(z-1)}{(z^2+1)^2(z^2+4)}\,dz + \underbrace{\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} \frac{z^2(z-1)}{(z^2+1)^2(z^2+4)}\,dz}_{=0} = \frac{\pi}{18}$$

Es decir,

$$vp\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2(x-1)}{(x^2+1)^2(x^2+4)}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{x^2(x-1)}{(x^2+1)^2(x^2+4)}\,dx = \frac{\pi}{18}$$

Dado que la integral es convergente, resulta:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2(x-1)}{(x^2+1)^2(x^2+4)}\,dx = vp\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2(x-1)}{(x^2+1)^2(x^2+4)}\,dx = \frac{\pi}{18}$$

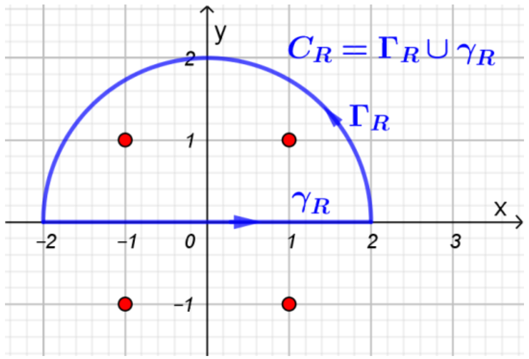
Ejemplo 3:

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\,\mathrm{sen}(x)}{x^4+4}dx=\frac{\pi\,\mathrm{sen}(1)}{2e}$$

Rta

$z^4+4=0 \Leftrightarrow z^4=-4 \Leftrightarrow z=\sqrt[4]{-4} \Leftrightarrow z=\sqrt[4]{4}\,e^{\frac{i(\pi+2k\pi)}{4}}, k=0,1,2,3 \Leftrightarrow z=\sqrt{2}\,e^{\frac{i(2k+1)\pi}{4}}, k=0,1,2,3.$

$$k=0:\quad z=\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1+i$$
$$k=1:\quad z=\sqrt{2}e^{\frac{i3\pi}{4}}=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-1+i$$
$$k=2:\quad z=\sqrt{2}e^{\frac{i5\pi}{4}}=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-1-i$$
$$k=3:\quad z=\sqrt{2}e^{\frac{i7\pi}{4}}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1-i$$



La función $f(z)=\frac{z\,e^{iz}}{z^4+4}$ es analítica excepto en los ceros de su denominador: $z=\pm(1+i), z=\pm(1-i)$.

Sobre el eje real coincide con el integrando de I.

Consideremos la curva $C_R=\Gamma_R\cup\gamma_R$, con $R>\sqrt{2}$ y orientación antihoraria. Entonces $f(z)$ es analítica sobre C_R y en su interior, excepto en $z_0=1+i$ y $z_1=-1+i$. De acuerdo con el teorema de los residuos se tiene:

$$\oint_{C_R}\frac{z\,e^{iz}}{z^4+4}dz=2\pi i\left(\mathrm{Res}_{z_0=1+i}\,f(z)+\mathrm{Res}_{z_0=-1+i}\,f(z)\right)$$

- $z_0 = 1+i$ es un **polo simple** de $f(z)$ pues claramente es cero de orden $p=0$ del numerador $N(z) = ze^{iz}$ y cero de orden $q=1$ del denominador $D(z) = z^4+4$ (notar que $D'(z) = 4z^3$ sólo se anula en el origen).

  Entonces,

$$\operatorname{Res}_{z_0=1+i} f(z) = \lim_{z \to 1+i} (z-(1+i))f(z) = \lim_{z \to 1+i} (z-1-i)\frac{ze^{iz}}{z^4+4} = \lim_{z \to 1+i} \ = (z-1-i)\frac{ze^{iz}}{(z-1-i)(z+1+i)(z^2+2i)} =$$

$$= \lim_{z \to 1+i} \frac{ze^{iz}}{(z+1+i)(z^2+2i)} = \lim_{z \to 1+i} \frac{(1+i)e^{i(1+i)}}{(2+2i)(2i+2i)} = \frac{e^{-1+i}}{8i}$$

- $z_0 = -1+i$ es un **polo simple** de $f(z)$ pues claramente es cero de orden $p=0$ del numerador $N(z) = ze^{iz}$ y cero de orden $q=1$ del denominador $D(z) = z^4+4$ (notar que $D'(z) = 4z^3$ sólo se anula en el origen).

  Entonces,

$$\operatorname{Res}_{z_0=-1+i} f(z) = \lim_{z \to -1+i} (z-(-1+i))f(z) = \lim_{z \to -1+i} (z+1-i)\frac{ze^{iz}}{z^4+4} = \lim_{z \to -1+i} \ = (z+1-i)\frac{ze^{iz}}{(z^2-2i)(z-1+i)(z+1-i)} =$$

$$= \lim_{z \to -1+i} \frac{ze^{iz}}{(z^2-2i)(z-1+i)} = \lim_{z \to -1+i} \frac{(-1+i)e^{i(-1+i)}}{(-2i-2i)(-2+2i)} = -\frac{e^{-1-i}}{8i}$$

Luego,

$$\oint_{C_R} \frac{z^2e^{iz}}{z^4+4}dz = 2\pi i\left(\frac{e^{-1+i}}{8i} - \frac{e^{-1-i}}{8i}\right) = \frac{\pi e^{-1}}{4}\left(e^{i}-e^{-i}\right) =$$

$$= \frac{\pi e^{-1}}{4} 2i \frac{e^{i}-e^{-i}}{2i} = i\,\frac{\pi \operatorname{sen}(1)}{2e}$$

Teniendo en cuenta que

$$|z^4+4| \geq \big||z|^4-4\big|$$

resulta que si $z = x + iy \in \Gamma_R$ se tiene (dado que $|z| = R$ e $y > 0$):

$$\left|\frac{ze^{iz}}{z^4+4}\right| = \frac{|z||e^{iz}|}{|z^4+4|} = \frac{|z||e^{-y}e^{ix}|}{\big||z|^4-4\big|} = \frac{|z|\overbrace{e^{-y}}^{\substack{\leq 1 \text{ pues} \\ y>0}}}{\big||z|^4-4\big|} \leq \frac{|z|}{\big||z|^4-4\big|} \overbrace{=}^{R>\sqrt{2}} \frac{R}{R^4-4} = M$$

Entonces, si $L = \mathrm{long}(\Gamma_R) = \pi R$:

$$\left|\int_{\Gamma_R} \frac{ze^{iz}}{z^4+4}\,dz\right| \leq ML = \frac{\pi R^2}{R^4-4} \overbrace{\longrightarrow}^{R\to\infty} 0 \quad \text{así que} \quad \lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} \frac{ze^{iz}}{z^4+4}\,dz = 0$$

Por lo tanto,

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} \frac{ze^{iz}}{z^4+4}\,dz + \underbrace{\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} \frac{ze^{iz}}{z^4+4}\,dz}_{=0} = i\,\frac{\pi\,\mathrm{sen}(1)}{2e}$$

Es decir,

$$vp\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^4+4}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{xe^{ix}}{x^4+4}\,dx = i\,\frac{\pi\,\mathrm{sen}(1)}{2e}$$

Dado que la integral es convergente, resulta:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^4+4}\,dx = vp\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^4+4}\,dx = i\,\frac{\pi\,\mathrm{sen}(1)}{2e}$$

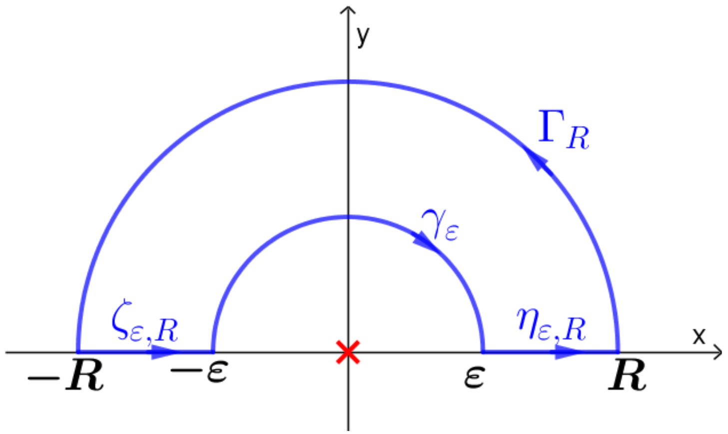
Entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^4+4}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos(x)}{x^4+4}\,dx + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\mathrm{sen}(x)}{x^4+4}\,dx = i\,\frac{\pi\,\mathrm{sen}(1)}{2e}$$

Se deduce que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\mathrm{sen}(x)}{x^4+4}\,dx = \mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^4+4}\,dx\right) = \mathrm{Im}\left(i\,\frac{\pi\,\mathrm{sen}(1)}{2e}\right) = \frac{\pi\,\mathrm{sen}(1)}{2e} \approx 0.486$$

<u>Ejemplo 4</u>:



$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\text{sen}(x)}{x}dx=\pi$$

<u>Rta</u> La función $f(z)=\frac{e^{iz}}{z}$ es analítica excepto en el polo simple $z=0$ (caracterización de polos).

Consideremos la curva de la figura, donde $0<\varepsilon<R$: $C_{\varepsilon,R}=\eta_{\varepsilon,R}\cup\Gamma_R\cup\zeta_{\varepsilon,R}\cup\gamma_\varepsilon$

La curva $C_{\varepsilon,R}$ es cerrada, simple y suave a trozos y tiene orientación antihoraria.

La función $f(z)$ es analítica sobre $C_{\varepsilon,R}$ y en su interior. Por el teorema de Caychy-Goursat:

$$\oint_{C_{\varepsilon,R}}f(z)dz=\int_{\eta_{\varepsilon,R}}f(z)dz+\int_{\Gamma_R}f(z)dz+\int_{\zeta_{\varepsilon,R}}f(z)dz+\int_{\gamma_\varepsilon}f(z)dz=0\quad(*)$$

Es decir,

$$\int_{\varepsilon}^{R}f(t)dt+\int_{\Gamma_R}f(z)dz+\int_{-R}^{-\varepsilon}f(t)dt+\int_{\gamma_\varepsilon}f(z)dz=0$$

Además,

$$\int_{\eta_{\varepsilon,R}}f(z)dz=\int_{\varepsilon}^{R}\frac{e^{ix}}{x}dx$$

$$\int_{\zeta_{\varepsilon,R}}f(z)dz=\int_{-R}^{-\varepsilon}f(t)dt=\int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{e^{it}}{t}dt\underbrace{=}_{\substack{x=-t\\dx=-dt}}\int_{R}^{\varepsilon}\frac{e^{-ix}}{x}dx=-\int_{\varepsilon}^{R}\frac{e^{-ix}}{x}dx$$

Entonces,

$$\int_{\eta_{\varepsilon,R}}f(z)dz+\int_{\zeta_{\varepsilon,R}}f(z)dz=\int_{\varepsilon}^{R}\frac{e^{ix}}{x}dx-\int_{\varepsilon}^{R}\frac{e^{-ix}}{x}dx=\int_{\varepsilon}^{R}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x}dx=2i\int_{\varepsilon}^{R}\frac{\text{sen}(x)}{x}dx\quad(**)$$

$$\Gamma_R: z = Re^{it}, 0 \leq t \leq \pi$$

$$\int_{\Gamma_R} f(z)dz = \int_0^{\pi} \frac{e^{iRe^{it}}}{Re^{it}} iRe^{it}dt = \int_0^{\pi} ie^{iRe^{it}}dt$$

Pero

$$\left|ie^{iRe^{it}}\right| = \left|e^{iR(\cos t + i \operatorname{sen} t)}\right| = \left|e^{-R \operatorname{sen} t} e^{iR\cos t}\right| = e^{-R \operatorname{sen} t}$$

Así que

$$\left|\int_0^{\pi} ie^{iRe^{it}}dt\right| \leq \int_0^{\pi} \left|ie^{iRe^{it}}\right| dt = \int_0^{\pi} e^{-R \operatorname{sen} t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \operatorname{sen} t}dt + \underbrace{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-R \operatorname{sen} t}dt}_{\substack{sustit:\, u=\pi-t \\ du=-dt}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \operatorname{sen} t}dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} e^{-R \operatorname{sen}(\pi-u)}(-du) =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \operatorname{sen} t}dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} e^{-R \operatorname{sen}(u)}du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \operatorname{sen} t}dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \operatorname{sen}\, u}du = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \operatorname{sen} t}dt$$

Si $0 \leq t \leq \pi/2$ se verifica: $\operatorname{sen} t \geq \frac{2}{\pi}t$. Entonces:

$$\left|\int_{\Gamma_R} f(z)dz\right| \leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \operatorname{sen} t}dt \leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R}{\pi}t}dt = -\frac{\pi}{R}e^{-\frac{2R}{\pi}t}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi\left(\frac{1-e^{-R}}{R}\right) \overset{R\to\infty}{\overbrace{\longrightarrow}} 0$$

Por lo tanto,

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 0$$

$$f(z)=\frac{e^{iz}}{z}=\frac{1}{z}e^{iz}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}z^{n-1}=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n!}z^{n-1}=\frac{1}{z}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^{n+1}}{(n+1)!}z^n}_{T(z)}\ \text{ si }\ 0<|z|<\infty$$

La función $T(z)$ es analítica en $\mathbb{C}$ (suma de una serie de potencias con radio de convergencia ∞). En particular es continua en el origen. Por lo que existe $M=\max\limits_{|z|\leq 1}|T(z)|$. Entonces, si $0<\varepsilon\leq 1$:

$$\left|\int_{\gamma_\varepsilon}T(z)dz\right|\leq ML\ \text{ donde }\ L=\operatorname{long}(\gamma_\varepsilon)=\pi\varepsilon$$

Luego,

$$\left|\int_{\gamma_\varepsilon}T(z)dz\right|\leq M\pi\varepsilon\overbrace{\longrightarrow}^{\varepsilon\to 0^+}0\ \text{ así que }\ \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\gamma_\varepsilon}T(z)dz=0$$

Por lo tanto,

$$\int_{\gamma_\varepsilon}f(z)dz=\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{e^{iz}}{z}dz=\int_{\gamma_\varepsilon}\left(\frac{1}{z}+T(z)\right)dz=\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{dz}{z}+\int_{\gamma_\varepsilon}T(z)dz$$

Pero

$$\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{dz}{z}=-\int_{-\gamma_\varepsilon}\frac{dz}{z}\overbrace{=}^{\substack{-\gamma_\varepsilon:z=\varepsilon e^{it}\\ 0\leq t\leq\pi}}-\int_0^\pi\frac{1}{\varepsilon e^{it}}i\varepsilon e^{it}dt=-i\int_0^\pi dt=-i\pi$$

Entonces,

$$\int_{\gamma_\varepsilon}f(z)dz=\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{e^{iz}}{z}dz=\int_{\gamma_\varepsilon}\left(\frac{1}{z}+T(z)\right)dz=-i\pi+\underbrace{\int_{\gamma_\varepsilon}T(z)dz}_{\to 0\text{ si }\varepsilon\to 0^+}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\gamma_\varepsilon}f(z)dz=-i\pi$$

De acuerdo con $(*)$ y $(**)$ se tiene:

$$2i\int_{\varepsilon}^{R}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}dx+\int_{\Gamma_R}f(z)dz+\int_{\gamma_\varepsilon}f(z)dz=0$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ R\to\infty}}\left(2i\int_{\varepsilon}^{R}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}dx+\int_{\Gamma_R}f(z)dz+\int_{\gamma_\varepsilon}f(z)dz\right)=0$$

Y teniendo en cuenta los resultados obtenidos en las págs. 28 y 29:

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ R\to\infty}}\left(2i\int_{\varepsilon}^{R}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}dx+\int_{\Gamma_R}f(z)dz+\int_{\gamma_\varepsilon}f(z)dz\right)=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ R\to\infty}}2i\int_{\varepsilon}^{R}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}dx+\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R}f(z)dz+\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\gamma_\varepsilon}f(z)dz=$$

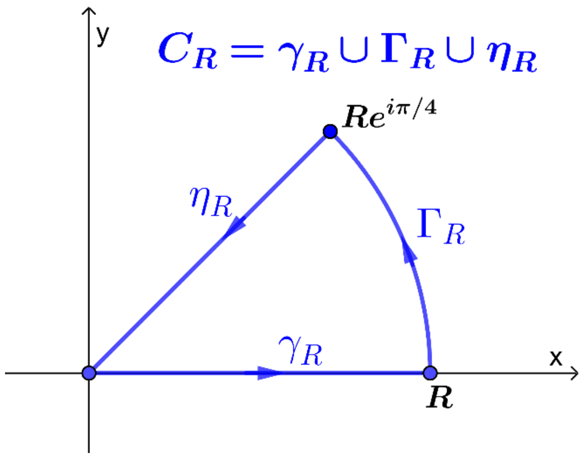
$$=2i\int_{0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}dx-i\pi=0$$

Despejando,

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}dx=\frac{\pi}{2}$$

Ejemplo 5: Mostrar que

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}(x^2)dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$



Rta Para $R > 0$ consideremos la curva de la figura: $C_R = \gamma_R \cup \Gamma_R \cup \eta_R$.

La curva C_R es cerrada, simple y suave a trozos y tiene orientación antihoraria.

La función $f(z) = e^{iz^2}$ es analítica sobre C_R y en su interior. Por el teorema de Caychy-Goursat:

$$\oint_{C_R} f(z)dz = \overbrace{\int_{\gamma_R} f(z)dz}^{\int_0^R e^{-ix^2}dx} + \int_{\Gamma_R} f(z)dz + \int_{\eta_R} f(z)dz = 0$$

Γ_R: $z = \underbrace{Re^{it}}_{z(t)}, 0 \le t \le \pi/4$ así que:

$$|f(z(t))| = \left|e^{iR^2e^{2it}}\right| = \left|e^{iR^2(\cos(2t))+i\operatorname{sen}(2t))}\right| = e^{-R^2\operatorname{sen}(2t)}$$

$$\operatorname{sen}(2t) \ge \frac{2}{\pi}t$$

Entonces,

$$|f(z(t))| \le e^{-\frac{2R^2}{\pi}t} \text{ si } 0 \le t \le \pi/4$$

$$\left|\int_{\Gamma_R} f(z)dz\right| = \left|\int_0^{\pi/4} f(z(t))z'(t)dt\right| \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left|f\big(z(t)\big)iRe^{it}\right|dt = R\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left|f\big(z(t)\big)\right|dt \le R\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{2R^2}{\pi}t}dt = \frac{\pi\big(1-e^{-R^2/2}\big)}{2R} \underbrace{\longrightarrow}_{R\to\infty} 0$$

Luego,

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 0$$

$-\eta_R: z = \underbrace{te^{i\pi/4}}_{z(t)}, 0 \leq t \leq R$ así que: $f(z(t)) = e^{it^2 e^{i\pi/2}}$

Teniendo en cuenta que

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

se tiene:

$$\int_{\eta_R} f(z)dz = -\int_{-\eta_R} f(z)dz = -\int_0^R f\big(z(t)\big)z'(t)dt = -\int_0^R e^{it^2 e^{\frac{i\pi}{2}}} e^{\frac{i\pi}{4}} dt = -e^{\frac{i\pi}{4}} \int_0^R e^{-t^2} dt \underbrace{\longrightarrow}_{R \to \infty} -e^{\frac{i\pi}{4}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Tomando límite para $R \to \infty$ en:

$$\overbrace{\int_{\gamma_R} f(z)dz}^{\int_0^R e^{ix^2} dx} + \int_{\Gamma_R} f(z)dz + \int_{\eta_R} f(z)dz = 0$$

resulta:

$$\lim_{R \to \infty} \int_0^R e^{ix^2} dx - e^{\frac{i\pi}{4}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0$$

Por lo tanto,

$$\int_0^\infty e^{ix^2} dx = e^{\frac{i\pi}{4}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} + i\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Entonces,

$$\int_{-\infty}^\infty e^{ix^2} dx = 2\int_0^\infty e^{ix^2} dx = 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} + i\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(1+i)$$

Comparando partes reales y partes imaginarias en ambos miembros,

$$\int_{-\infty}^\infty \cos(x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int_{-\infty}^\infty \operatorname{sen}(x^2) dx$$