INTEGRACIÓN DE FUNCIONES COMPLEJAS

(por su analogía con variable real, se puede omitir la lectura de las páginas 1 a 12)

Puntos de acumulación y puntos aislados

Dado $P_o \in \mathbb{R}^n$, un **entorno de P_o** (de radio $\varepsilon > 0$) es un conjunto de la forma

$$B(P_o;\varepsilon) = \{P \in \mathbb{R}^n : d(P, P_o) < \varepsilon\}$$

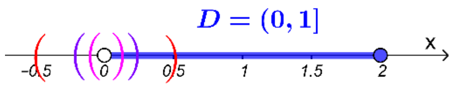
Tal entorno contiene a todos los puntos de $\mathbb{R}^n$ suficientemente cercanos a P_o (el grado de proximidad está dado por ε. Cuando éste es pequeño el entorno consta de puntos muy cercanos a P_o).

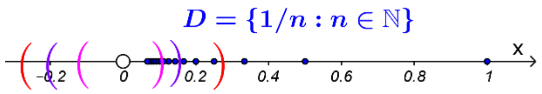
Dado un subconjunto $D \subseteq \mathbb{R}^n$, un punto $P_o \in \mathbb{R}^n$ se dice **punto de acumulación de D** si todo entorno de P_o contiene al menos un punto $P \in D$ con $P \neq P_o$. Cuando este es el caso, D contiene puntos arbitrariamente cercanos a P_o y distintos de él (notar que un punto de acumulación de D no necesariamente pertenece a D). Un punto $P_o \in D$ se dice **punto aislado de D** si P_o es el único punto de D en algún entorno (suficientemente pequeño) de P_o. Un punto $P_o \in D$ se dice **punto interior de D** si P_o pertenece a algún entorno $B(P_o;\varepsilon) \subseteq D$

Ejemplo: a) $t_o = 0$ es de acumulación de los siguientes conjuntos

$I = (0,2]$, $I = [-1,0]$, $I = (-1,\infty)$, $I = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ pero no lo es de $I = \{0\} \cup [2,3]$.

Por otra parte $t_o = 0$ es punto aislado de $I = \{0\} \cup [2,3]$.

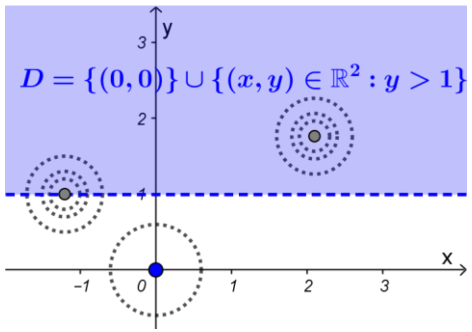




b) Los puntos de acumulación de $D = \{(0,0)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 1\}$ son los del semiplano $y \geq 1$. El único punto aislado de D es $(0,0)$.

Los puntos interiores de D son los (x,y) con $y > 1$.

En cambio los puntos de acumulación de $D^* = \left\{\left(\frac{1}{n}, 0\right) : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 1\}$ son los del semiplano $y \geq 1$ y el punto $(0,0)$, en tanto $\left(\frac{1}{n}, 0\right)$ son aislados.



Dada una función $g: D \to \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, sus partes real e imaginaria son un par de funciones reales $X, Y: D \to \mathbb{R}$, $X(t) = Re(g(t))$, $Y(t) = Im(g(t))$,de modo que

$$g(t) = X(t) + iY(t)$$

Las nociones de límite, continuidad, derivada, primitiva e integral definida se definen en la forma habitual y es sencillo mostrar que pueden analizarse "componente a componente", es decir a partir de las mismas definiciones para las funciones reales $X(t)$ e $Y(t)$.

Por ejemplo:

- si t_o es punto de acumulación de $B \subseteq D$, se dice que $g(t)$ tiende a $L \in \mathbb{C}$ cuando t tiende a t_o desde B si $g(t)$ se aproxima arbitrariamente a L siempre que se elija $t \in B$ suficientemente cerca de t_o pero distinto de él. La notación es la usual:

- $g(t)$ es continua en $t_o \in D$ si t_o es un punto aislado de D o bien $\lim\limits_{t \to t_o} g(t) = g(t_o)$
- $g(t)$ es continua en un subconjunto $B \subseteq D$ si t_o es punto aislado de B o bien $\lim\limits_{\substack{t \to t_o \\ t \in B}} g(t) = g(t_o)$
- $g(t)$ es derivable en t_o punto interior de D si existe el siguiente límite:

$$g'(t_o) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{g(t_o + \Delta t) - g(t_o)}{\Delta t}$$

- Dado un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, una función $G: I \to \mathbb{C}$ es primitiva de $g: I \to \mathbb{C}$ en el intervalo I si $G'(t) = g(t)$ para $t \in I$.

Dada $g\colon D \to \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, $g(t) = X(t) + iY(t)$, se tiene:

- si t_o es punto de acumulación de $B \subseteq D$, se dice que $g(t)$ tiende a $L = L_1 + iL_2$ cuando t tiende a t_o desde B si $g(t)$ se aproxima arbitrariamente a L siempre que se elija $t \in B$ suficientemente cerca de t_o pero distinto de él. Notación:

  Cuando $B = D = \mathrm{dom}(g)$ omitimos la mención $t \in B$.
- $g(t)$ es continua en t_o sii $X(t)$ e $Y(t)$ son continuas en t_o
- $g(t)$ es continua en un subconjunto $B \subseteq D$ sii $X(t)$ e $Y(t)$ son continuas en B
- Si $f(z)$ es continua en $z_0 \in \mathbb{C}$ y $\lim_{t \to t_o} g(t) = z_0$ entonces $\lim_{t \to t_o} f(g(t)) = f(z_0)$. En particular, si $g(t)$ es continua en t_o y $f(z)$ es continua en $g(t_o)$, entonces $f(g(t))$ es continua en t_o

- $g(t)$ es derivable en t_o punto interior de D sii $X(t)$ e $Y(t)$ son derivables en t_o.

  En tal caso se verifica:

$$g'(t_o) = X'(t_o) + iY'(t_o)$$

- Dado un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, una función $G: I \to \mathbb{C}$, $G(T) = U(t) + iV(t)$, es **primitiva en $\boldsymbol{I}$** de $g: I \to \mathbb{C}$, $g(t) = X(t) + iY(t)$, si $G'(t) = g(t)$ para $t \in I$. Esto equivale a que $U(t)$ es primitiva de $X(t)$ y $V(t)$ es primitiva de $Y(t)$ en I.

- Toda función $g: I \to \mathbb{C}$ continua en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ posee primitiva allí. Además, dos primitivas de $g(t)$ en I difieren en una constante compleja. La integral indefinida de una tal g en I es la familia de todas las primitivas en dicho intervalo. Entonces, con la notación habitual:

$$\int g(t)dt = G(t) + C \ \text{ para } \ t \in I \quad \Leftrightarrow \quad G'(t) = g(t), \forall t \in I$$

  Es claro pues que:

$$\int g(t)dt = \int X(t)dt + i \int Y(t)dt \ \text{ para } \ t \in I$$

- Dada $g: [a, b] \to \mathbb{C}$ acotada, $g(t) = X(t) + iY(t)$, la noción de integral de Riemann de g en $[a, b]$ puede definirse como límite de sumas de Riemann. Se verifica: g es integrable en $[a, b]$ sii $X(t)$ e $Y(t)$ son integrables en $[a, b]$. En tal caso vale:

$$\int_a^b g(t)dt = \int_a^b X(t)dt + i \int_a^b Y(t)dt$$

Notar que toda función continua en $[a, b]$ es integrable allí. La condición de continuidad es suficiente pero no necesaria para la existencia de la integral definida de g

en un intervalo.

Los teoremas de límites y continuidad de sumas, productos y cocientes continúan válidos para funciones complejas de variable real. Lo mismo ocurre con las reglas de derivación. Cabe destacar un caso en especial de la regla de la cadena:

Si $g(t)$ es derivable en t_0 y $f(z)$ es derivable en $z_0 = g(t_0)$, entonces $h(t) = f(g(t))$ es derivable en t_0 y vale:

$$h'(t_0) = f'\big(g(t_0)\big)g'(t_0)$$

<u>**Ejemplo**</u>:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{(1-it)^2}\right) = \frac{d}{dt}\big((1-it)^{-2}\big) = -2(1-it)^{-3}(-i) = \frac{2i}{(1-it)^3}$$

Aquí tuvimos en cuenta que:

$$1 - it \neq 0 \ \text{ para todo } t \in \mathbb{R} \qquad\qquad \frac{d}{dt}(1-it) = -i$$

$$\frac{d}{dz}(z^{-2}) = -2z^{-3} \ \text{ si } \ z \neq 0$$

Ejemplo

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-e^{it}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{1-(\cos t+i\operatorname{sen} t)}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t}-i\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen} t}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{2\operatorname{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right)}{t}-i\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen} t}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\underbrace{\frac{\operatorname{sen}(t/2)}{t/2}}_{\to 1}\underbrace{\operatorname{sen}(t/2)}_{\to 0}-i\lim_{t\to 0}\underbrace{\frac{\operatorname{sen} t}{t}}_{\to 1}=-i$$

Ejemplo

a) $h(t) = \mathrm{Ln}(1 + it)$ es continua en $I = \mathbb{R}$ por ser composición de continuas:

- $f(z) = \mathrm{Ln}(z)$ es continua excepto en el origen y sobre el semieje real negativo.
- $g(t) = 1 + it$ es continua en $I = \mathbb{R}$ (componentes polinómicas) y su imagen no contiene al origen ni interseca al semieje real negativo.

b) $k(t) = \mathrm{Ln}(-1 + it)$ es continua en $I = (-\infty, 0)$ y en $I = (0, \infty)$, pero no lo es en ningún intervalo que contenga a $t = 0$. De hecho:

$$\lim_{t \to 0^-} \mathrm{Ln}(-1 + it) = -i\pi \neq i\pi = \lim_{t \to 0^+} \mathrm{Ln}(-1 + it)$$

Ejemplo

$h(t) = \mathrm{Ln}(1 + it)$ es derivable en $I = \mathbb{R}$ por ser composición de derivables:

- $f(z) = \mathrm{Ln}(z)$ es derivable excepto en el origen y sobre el semieje real negativo.
- $g(t) = 1 + it$ es derivable en $I = \mathbb{R}$ (sus componentes lo son) y su imagen no contiene al origen ni interseca al semieje real negativo.

  Además, aplicando la regla de la cadena se tiene:

$$h'(t) = \frac{d}{dt}[\mathrm{Ln}(1 + it)] = \frac{i}{1 + it}$$

Ejemplo

a) $\int\left(4t+e^{-it}\right)dt = 2t^2 + ie^{-it} + C$ para todo $t \in \mathbb{R}$, pues

$$\frac{d}{dt}\left(2t^2 + ie^{-it}\right) = 4t + i(-i)e^{-it} = 4t + e^{-it}$$

b) $\int \frac{1}{1-it}dt = i\,\mathrm{Ln}(1-it) + C$ para todo $t \in \mathbb{R}$, pues

$$\frac{d}{dt}(i\,\mathrm{Ln}(1-it)) = i\frac{(-i)}{1-it} = \frac{1}{1-it}$$

Otra manera de obtener el mismo resultado es hallando primitivas componente a componente:

$$\int \frac{1}{1-it}dt = \int \frac{1}{1-it}\frac{1+it}{1+it}dt = \int \frac{1+it}{1+t^2}dt = \int \frac{1}{1+t^2}dt + i\int \frac{t}{1+t^2}dt = \mathrm{arctg}(t) + \frac{i}{2}\ln(1+t^2) + C$$

Notar:

$$i\,\mathrm{Ln}(1-it) = i(\ln|1-it| + i\,\mathrm{Arg}(1-it)) = i\left(\ln\sqrt{1+t^2} + i\ \mathrm{arctg}(-t)\right) = i\left(\frac{1}{2}\ln(1+t^2) - i\,\mathrm{arctg}(t)\right)$$

$$= \mathrm{arctg}(t) + \frac{i}{2}\ln(1+t^2)$$

c)

$$\int \frac{1}{-1+it}\,dt \neq -i\,\mathrm{Ln}(-1+it)+C$$

en cualquier intervalo que contenga $t=0$ puesto que en ese punto la función $G(t)=-i\,\mathrm{Ln}(-1-it)$ no es derivable (es discontinua). Pero podemos hacer lo siguiente, para cualquier $t\in\mathbb{R}$:

$$\int \frac{1}{-1+it}\,dt = -\int \frac{1}{1-it}\,dt = -i\,\mathrm{Ln}(1-it)+C$$

d)

$$\int_0^{\pi} e^{-it}dt = ie^{-it}\Big|_0^{\pi} = i\left(e^{-i\pi}-e^{0}\right) = -2i$$

Alternativamente,

$$\int_0^{\pi} e^{-it}dt = \int_0^{\pi}(\cos t - i\,\mathrm{sen}\,t)dt = \int_0^{\pi}\cos t\,dt - i\int_0^{\pi}\mathrm{sen}\,t\,dt = \mathrm{sen}\,t\Big|_0^{\pi} + i\cos t\Big|_0^{\pi}$$
$$= 0 + i(-2) = -2i$$

Primitivas en dominios del plano complejo

Sea $f: D \to \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$, D abierto y conexo.

Se dice que una función $F: D \to \mathbb{C}$ es una **primitiva de $\boldsymbol{f}$ $(\boldsymbol{z})$ en $\boldsymbol{D}$** si $F(z)$ es analítica en D y se cumple $F'(z) = f(z), \forall z \in D$.

Empleando las condiciones de Cauchy-Riemann para F se prueba que si $F(z)$ y $G(z)$ son primitivas de $f(z)$ en el mismo dominio D abierto y conexo, ellas difieren en una constante compleja (ver apéndice). El conjunto de todas las primitivas de $f(z)$ en D se llama integral indefinida de $f(z)$ en D y su notación es la habitual. Así,

$$\int f(z)dz = F(z) + C, z \in D \quad \Leftrightarrow \quad F'(z) = f(z), \forall z \in D$$

Observación:

- Dada $g: I \to \mathbb{C}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalo, si f es continua en I entonces f posee primitiva en I.
- Para campos vectoriales $\vec{F}: D \to \mathbb{R}$, la noción que corresponde a la de primitiva es la de función potencial. En cursos previos de cálculo vimos que dado $\vec{F}(x, y) = \langle M(x, y), N(x, y)\rangle$, donde $D \subseteq \mathbb{R}^2$ es un dominio abierto conexo, la sola continuidad de $M(x, y), N(x, y)$ o incluso la continuidad de sus derivadas parciales de primer orden no garantiza que exista f diferenciable tal que $\vec{\nabla} f = \vec{F}$ en D. Veremos que algo análogo ocurre con las funciones $f: D \to \mathbb{C}$ analíticas en D. La sola analiticidad en un dominio en general no garantiza la existencia de primitiva en ese dominio.

Ejemplo de cálculo de primitivas:

1) $\int e^z dz = e^z + C$ en $D = \mathbb{C}$ pues $\frac{d}{dz}(e^z) = e^z$ en $D = \mathbb{C}$.

2)

$$\int \frac{z-2i}{z^3} dz = \int \frac{z}{z^3} dz - i \int \frac{2}{z^3} dz = \int \frac{1}{z^2} dz - 2i \int \frac{1}{z^3} dz$$

$$= -\frac{1}{z} + \frac{i}{z^2} + C, \forall z \in D = \mathbb{C} - \{0\}$$

En efecto: $\frac{d}{dz}\left(-\frac{1}{z} + \frac{i}{z^2}\right) = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z^2} - \frac{2i}{z^3}\right) = \frac{z-2i}{z^3}, \forall z \neq 0$

3) $F(z) = \mathrm{Ln}(z)$ y $G(z) = \mathrm{Ln}(-z)$ son primitivas de $f(z) = \frac{1}{z}$

Sin embargo, no difieren en una constante. En realidad son primitivas en dominios diferentes!

$F(z)$ lo es en $D = \mathbb{C} - \{x + iy: y = 0, x \leq 0\}$

$G(z)$ lo es en $D = \mathbb{C} - \{x + iy: y = 0, x \geq 0\}$

$H(z) = \mathrm{Ln}(iz)$ también es primitiva de $f(z)$. ¿Dónde?

4) Si $w = g'(z)$ es analítica en D y $F(w)$ es primitiva de $f(w)$ en $g(D)$, entonces

$$\int f\big(g(z)\big)g'(z)dz = F\big(g(z)\big) + C \ \text{ si } z \in D$$

En efecto, aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dz}\Big(F\big(g(z)\big)\Big) = \frac{dF}{dw}\big(g(z)\big).\frac{dg}{dz}(z) = f\big(g(z)\big)g'(z)$$

Por ejemplo:

$$\int \frac{e^{iz}}{(1+e^{iz})^2}dz \underbrace{=}^{\substack{w=1+e^{iz} \\ dw=ie^{iz}dz}} \int \frac{1}{w^2}\frac{dw}{i} \underbrace{=}^{si\,\neq\,0} \frac{i}{w} + C = \frac{i}{1+e^{iz}} + C, \forall z \neq (2k+1)\pi \ \text{ con } \ k \in \mathbb{Z}.$$

Hemos tenido en cuenta que:

$$w = 1 + e^{iz} = 0 \ \Leftrightarrow \ e^{iz} = -1 \ \Leftrightarrow \ iz \in \ln(-1) \Leftrightarrow iz = i(2k+1)\pi \ \text{ con } \ k \in \mathbb{Z}$$

5) Si $f(z), g(z)$ son analíticas en D, entonces

$$\int f(z)g'(z)dz \overbrace{=}^{(*)} f(z)g(z) - \int g(z)f'(z)dz \text{ si } z \in D$$

En efecto, aplicando la regla de Leibniz : $\big(f(z)g(z)\big)' = f'(z)g(z) + g'(z)f(z)$

Entonces,

$$f(z)g'(z) = \big(f(z)g(z)\big)' - g'(z)f'(z)$$

A partir de esta igualdad se deduce inmediatamente (*).

Así, por ejemplo:

$$\int ze^{iz}dz \overbrace{=}^{\substack{u=z\,;\,dv=e^{iz}dz \\ du=dz\,;\,v=-ie^{iz}}} -ize^{iz} - \int \big(-ie^{iz}\big)dz = -ize^{iz} + e^{iz} + C, \text{si } z \in \mathbb{C}.$$

En efecto,

$$\frac{d}{dz}\big(-ize^{iz} + e^{iz} + C\big) = -ie^{iz} - ize^{iz}i + ie^{iz} = ze^{iz}, \forall z \in \mathbb{C}.$$

Integración a lo largo de curvas (integrales curvilíneas)

- Si $C: z = Z(t), t \in [a, b]$, arco de curva suave del plano complejo, orientado por valores crecientes del parámetro t y $f(z)$ es una función a valores complejos, definida y acotada en C, se dice que f es integrable a lo largo de C si la función $g: [a, b] \to \mathbb{C}$ dada por $g(t) = f\big(Z(t)\big).Z'(t)$ es integrable en $[a, b]$. En ese caso, se define la integral de f a lo largo de C mediante:

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f\big(Z(t)\big).Z'(t)dt$$

Nota: Se puede probar que el valor de la integral es invariante bajo cambios de parámetro $h: [\alpha, \beta] \to [a, b]$ de clase $C^1[a, b]$, tales que $h'(t) > 0$, $\forall t \in (\alpha, \beta)$. Observar que ellos preservan la orientación de C.

- Si C es un arco suave a trozos concatenación de la secuencia de sub-arcos suaves $C_1, \dots, C_N$, orientados de modo que el extremo final de C_k coincide con el inicial de C_{n-1} $(n = 1, \dots, N-1)$, C orientado desde el extremo inicial de C_1 hacia el extremo final de C_N, se define:

$$\int_C f(z)dz = \sum_{n=1}^{N} \int_{C_n} f(z)dz$$

Nota: Se puede probar que el valor de esta integral no depende de la secuencia ordenada de sub-arcos utilizada para representar C.

Condición suficiente de integrabilidad a lo largo de C:

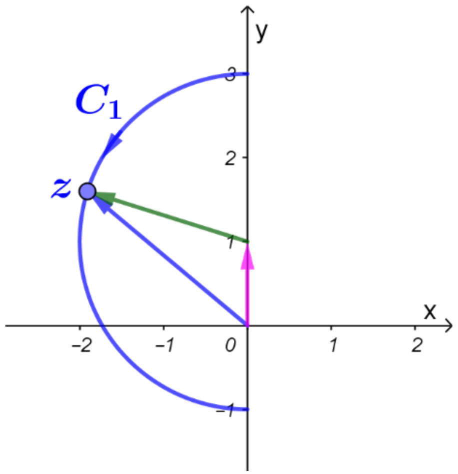
- C arco suave o suave a trozos.
- $f(z)$ continua sobre C o continua a trozos sobre C (esto último significa que $g(t)$ es continua a trozos en el intervalo paramétrico).

Ejemplo: Calcular $\int_C \bar{z}\,dz$ a lo largo de las siguientes curvas

1) C_1el arco de la circunferencia $|z-i|=2$ recorrido en sentido antihorario desde $z_1=3i$ hasta $z_2=-i$.

2) C_2 el segmento dirigido desde $z_1=3i$ hasta $z_2=-i$.

3) C_3 la poligonal dirigida de vértices $z_1=3i$, $z_2=1+3i$, $z_3=1-i$, $z_4=-i$



<u>Rta</u> $f(z)=\bar{z}$ es continua en $\mathbb{C}$. En particular sobre las curvas dadas.

1) C es suave.

$C_1: z=\underbrace{i+2e^{it}}_{Z(t)}\ , t\in\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

Vector tangente: $\quad Z'(t)=2ie^{it}$

Evaluamos $f(z)=\bar{z}$ sobre C_1: $\ f\big(Z(t)\big)=\overline{Z(t)}=\overline{(i+2e^{it})}=-i+2e^{-it}$

Integramos en el intervalo paramétrico:

$$\int_{C_1}\bar{z}\,dz=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\overline{Z(t)}.Z'(t)dt=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\overline{(i+2e^{it})}\big(2ie^{it}\big)dt=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\big(-i+2e^{-it}\big)\big(2ie^{it}\big)dt=$$

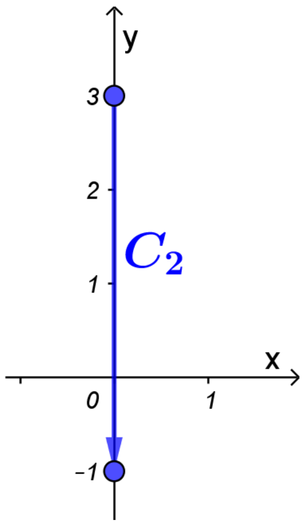
$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\big(2e^{it}+4i\big)dt=\big(-2ie^{it}+4it\big)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}=\left(-2ie^{i3\pi/2}+4i\frac{3\pi}{2}\right)-\left(-2ie^{\frac{i\pi}{2}}+4i\frac{\pi}{2}\right)=-4+4\pi i$$

2) C_2 es suave.

$C_2 : z = \underbrace{-it}_{Z(t)}, t \in [-3, -1]$

Vector tangente: $Z'(t) = -i$

Evaluamos $f(z) = \bar{z}$ sobre C_2: $f(Z(t)) = \overline{Z(t)} = \overline{(-it)} = it$

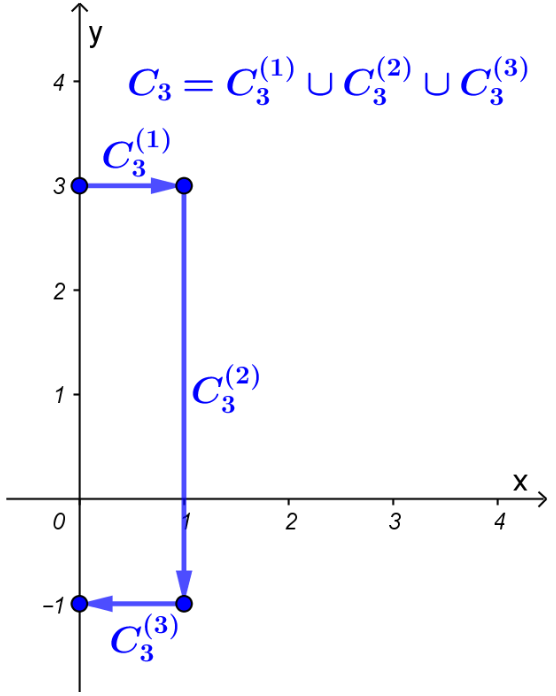


Integramos en el intervalo paramétrico:

$$\int_{C_2} \bar{z}dz = \int_{-3}^{-1} f(Z(t)).Z'(t)dt = \int_{-3}^{-1} \overline{(-it)}(-i)dt = \int_{-3}^{-1} (it)(-i)dt =$$

$$= \int_{-3}^{-1} t\,dt = \frac{1}{2}t^2 \Big|_{-3}^{-1} = \frac{1}{2} - \frac{9}{2} = -4$$

3) C_3 es suave por tramos, $C_3 = C_3^{(1)} \cup C_3^{(2)} \cup C_3^{(3)}$



- $C_3^{(1)}: z = \underbrace{t+3i}_{Z(t)}\ , t \in [0\,,1]$

$$\int_{C_3^{(1)}} \bar{z}dz = \int_0^1 \overline{(t+3i)}.Z'(t)dt = \int_0^1 (t-3i)(1)dt = \left(\frac{1}{2}t^2 - 3it\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - 3i$$

- $C_3^{(2)}: z = \underbrace{1-it}_{Z(t)}\ , t \in [-3\,,1]$

$$\int_{C_3^{(2)}} \bar{z}dz = \int_{-3}^1 \overline{(1-it)}.Z'(t)dt = \int_0^1 (1+it)(-i)dt = \left(-it + \frac{1}{2}t^2\right)\Big|_{-3}^1 =$$
$$= \left(-i + \frac{1}{2}\right) - \left(3i + \frac{9}{2}\right) = -4 - 4i$$

- $C_3^{(3)}: z = \underbrace{-t-i}_{Z(t)}\, , t \in [-1\,,0]$

$$\int_{C_3^{(3)}} \bar{z}dz = \int_{-1}^0 \overline{(-t-i)}.Z'(t)dt = \int_{-1}^0 (-t+i)(-1)dt = \int_{-1}^0 (t-i)dt = \left(\frac{1}{2}t^2 - it\right)\Big|_{-1}^0 = -\frac{1}{2} - i$$

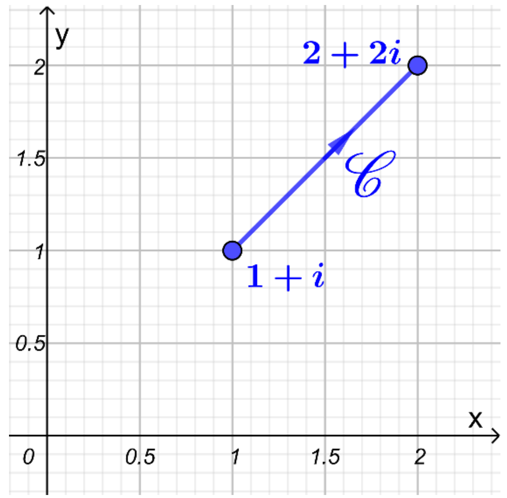
Entonces,

$$\int_C \bar{z}dz = \int_{C_3^{(1)}} \bar{z}dz + \int_{C_3^{(2)}} \bar{z}dz + \int_{C_3^{(3)}} \bar{z}dz = \left(\frac{1}{2} - 3i\right) + (-4-4i) + \left(-\frac{1}{2} - i\right) = -4 - 8i$$

Ejemplo: Calcular $\int_C \frac{z}{\operatorname{Im}(z)} dz$ si C es el segmento de recta dirigido desde $z_1 = 1 + i$ hasta $z_2 = 2 + 2i$.

Rta $f(z) = \frac{z}{\operatorname{Im}(z)}$ es continua en $\mathbb{C}$ excepto sobre el eje real. En particular sobre C, puesto que este segmento no interseca a dicho eje. Además, C es suave.

$C: z = \underbrace{t + it}_{Z(t)}\ , t \in [1\,, 2]$



Vector tangente: $\quad Z'(t) = 1 + i$

Evaluamos $f(z)$ sobre C:

$$f\big(Z(t)\big) = \frac{Z(t)}{\operatorname{Im}(Z(t))} = \frac{t + it}{\operatorname{Im}(t + it)} = \frac{t + it}{t} = 1 + i$$

Integramos en el intervalo paramétrico:

$$\int_C \frac{z}{\operatorname{Im}(z)} dz = \int_1^2 \frac{Z(t)}{\operatorname{Im}(Z(t))} . Z'(t) dt = \int_1^2 (1 + i\,)(1 + i) dt = \int_1^2 2i\; dt = 2i$$

Independencia del camino

Dados un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$ abierto y conexo y una función $f(z)$ continua en D, los ejemplos anteriores muestran que dadas dos curvas incluidas en D, ambas con extremo inicial $z_1 \in D$ y ambas con extremo final $z_2 \in D$, la integral de $f(z)$ arroja valores no necesariamente iguales a lo largo de cada una de ellas. Es decir que el valor de la integral depende del "camino" particular recorrido en D para ir desde z_1 hasta z_2.

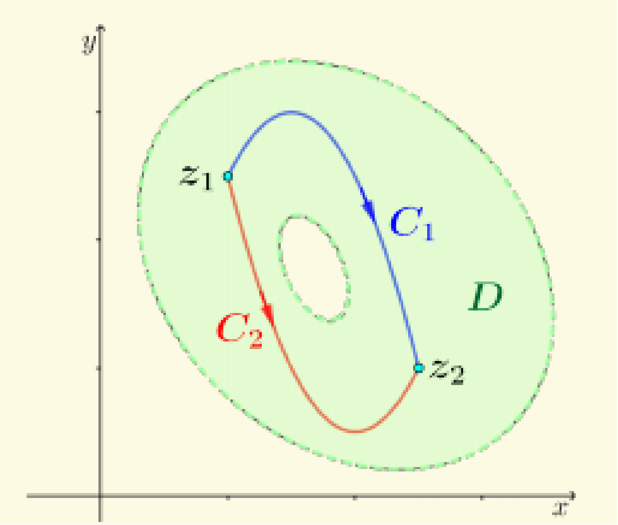
¿Hay integrales que no dependen del camino en determinados dominios D?

Def: Dada $f(z)$ función continua en un dominio abierto y conexo $D \subseteq \mathbb{C}$, **la integral de f se dice independiente del camino en D** cuando para todo par de puntos $z_1, z_2 \in D$ y para todo par de curvas C_1, C_2 incluidas en D, ambas con extremo inicial en z_1 y ambas con extremo final en z_2, se verifica:

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$

Notación: cuando este es el caso, la integral a lo largo de una curva en D queda determinada unívocamente por el punto inicial $z_1 \in D$ y el punto final $z_2 \in D$ y entonces se anota:

$$\int_{z_1}^{z_2} \boldsymbol{f(z)dz}$$



aunque esta notación presupone algún dominio D donde es válida la independencia del camino. Por ejemplo, la notación $\int_{-1-i}^{-1+i} \frac{1}{z} dz$ es ambigua porque no explicita el dominio D. Como veremos más adelante:

- Si $D = \mathbb{C} - \{x + iy : y = 0 \,, x \leq 0\}$ resulta $\int_{-1-i}^{-1+i} \frac{1}{z} dz = i\frac{3\pi}{2}$
- Si $D = \mathbb{C} - \{x + iy : y = 0 \,, x \geq 0\}$ resulta $\int_{-1-i}^{-1+i} \frac{1}{z} dz = -i\frac{\pi}{2}$

Teorema de independencia del camino

Sea $f: D \to \mathbb{C}$ continua en $D \subseteq \mathbb{C}$ dominio abierto y conexo.
Los tres enunciados siguientes son equivalentes (los tres verdaderos o los tres falsos):

(IC) La integral de línea de f es independiente del camino en D.
(CN) $\oint_C f(z)dz = 0$ para toda $C \subset D$, C cerrada.
(EP) $f(z)$ admite primitiva en D.

Cuando (EP) es verdadera y $F(z)$ es una primitiva de $f(z)$ en D, es válida la Regla de Barrow en D:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)$$

Cualquiera de los enunciados (IC), (CN), (EP) implica el siguiente:

(AN) $f(z)$ es analítica en D.

Si además D es simplemente conexo, entonces los cuatro enunciados (IC), (CN), (EP) y (AN) son equivalentes.

Ejemplo: Analizar la independencia del camino de la integral de $f(z) = \frac{1}{z}$ en los dominios que se proponen:

a) $D = \mathbb{C} - \{0\}$

No siendo D un dominio simplemente conexo, por sí sola la analiticidad de $f(z)$ en D no permite decidir si (IC), (CN) y (EP) son verdaderas o falsas.

De hecho, (CN) es falsa, con lo cual (IC) y (EP) también lo son.

En efecto, sea $C: z = Re^{it}$, $t \in [0,2\pi]$. Se tiene:

$$\oint_C f(z)dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{Re^{it}} iRe^{it}dt = \int_0^{2\pi} i\,dt = 2\pi i \neq 0$$

Por lo tanto (IC) es falsa. Observar que (EP) también es falsa lo que prueba algo no evidente: $f(z) = \frac{1}{z}$ no admite primitiva alguna en $D = \mathbb{C} - \{0\}$.

b) $D = \mathbb{C} - \{x + iy : y = 0\,, x \leq 0\}$

Este dominio D es simplemente conexo y $f(z) = \frac{1}{z}$ es analítica allí. Es decir (AN) es verdadera. Por lo tanto (IC) es verdadera. Más aún, $F(z) = \mathrm{Ln}(z)$ es una primitiva de $f(z)$ en este D, así que si por ejemplo C es la poligonal dirigida de vértices: $-1 - i$, $2 - i$, i (o en realidad cualquier otra curva contenida en D que comience en $-1 - i$ y termine en i) resulta:

$$\int_C \frac{1}{z}\,dz = \mathrm{Ln}(z)\Big|_{-1-i}^{i} = \mathrm{Ln}(i) - \mathrm{Ln}(-1-i) =$$

$$= \frac{i\pi}{2} - \left(\frac{\ln 2}{2} - \frac{i3\pi}{4}\right) = -\frac{\ln 2}{2} + i\,\frac{5\pi}{4}$$

c) $D = \mathbb{C} - \{x + iy \colon y = 0\,, x \geq 0\}$

Este caso es similar al anterior. Este dominio D es simplemente conexo y $f(z) = \frac{1}{z}$ es analítica allí. Por lo tanto (IC) es verdadera. Además, $F(z) = \mathrm{Ln}(-z)$ es una primitiva de $f(z)$ en este D. Si C es cualquier curva desde $z_1 = -i$ hasta $z_2 = i$, que no pase por el origen ni corte al semieje real positivo,

$$\int_C \frac{1}{z} dz = \mathrm{Ln}(-z) \Big|_{-i}^{i} = \mathrm{Ln}(-i) - \mathrm{Ln}(i) = -\frac{i\pi}{2} - \frac{i\pi}{2} = -i\pi$$

Ejemplo: Calcular $\int_0^{\pi/2} e^{i\pi\cos z}\,\mathrm{sen}\, z\, dz$

Rta

La integral dada es independiente del camino en $D = \mathbb{C}$ pues el integrando admite allí la primitiva $F(z) = \frac{i}{\pi} e^{i\pi\cos z}$

Es decir, para $z \in \mathbb{C}$:

$$\int e^{i\pi\cos z}\,\mathrm{sen}\, z\, dz \overset{\substack{u=i\pi\cos z \\ du=-i\pi\,\mathrm{sen}\, z\, dz}}{\cong} \int e^u \frac{du}{(-i\pi)} = \frac{i}{\pi}\int e^u du =$$

$$= \frac{i}{\pi} e^{i\pi\cos z} + C$$

Entonces,

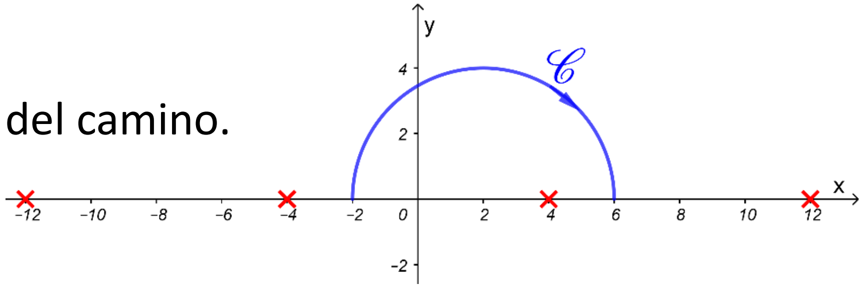
$$\int_0^{\pi/2} e^{i\pi\cos z}\,\mathrm{sen}\, z\, dz = \frac{i}{\pi} e^{i\pi\cos z}\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{i}{\pi} e^{i\pi\cos(\pi/2)} - \frac{i}{\pi} e^{i\pi\cos 0} = \frac{2i}{\pi}$$

Ejemplo: Dada $f(z) = \frac{e^{i\pi z/4}}{(1+e^{i\pi z/4})^2}$

1) Proponer un dominio donde la integral de $f(z)$ sea independiente del camino.

2) Calcular $\mathcal{C}$: $|z-2| = 4$ arco horario desde $(-2,0)$ hasta $(6,0)$.



Rta

1) $f(z)$ analítica excepto en los ceros de su denominador:

$$1 + e^{i\pi z/4} = 0 \Leftrightarrow e^{i\pi z/4} = -1 \Leftrightarrow \frac{i\pi z}{4} \in \ln(-1) \Leftrightarrow \frac{i\pi z}{4} = i(2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow z = 4(2k+1), k \in \mathbb{Z}$$

Sea $D = \mathbb{C} - \{4(2k+1): \ k \in \mathbb{Z}\}$. En este dominio $f(z)$ admite la primitiva $F(z) = \frac{4i}{\pi}\frac{1}{1+e^{i\pi z/4}}$

Por lo tanto, la integral de $f(z)$ es independiente del camino en D.

2) Como $\mathcal{C} \subset D$, siendo D el dominio del inciso anterior, podemos calcular la integral aplicando la regla de Barrow, teniendo en cuenta sólo los extremos inicial y final de $\mathcal{C}$:

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{e^{i\pi z/4}}{(1+e^{i\pi z/4})^2} dz = \int_{-2}^{6} \frac{e^{i\pi z/4}}{(1+e^{i\pi z/4})^2} dz =$$

$$= \frac{4i}{\pi}\frac{1}{1+e^{i\pi z/4}}\bigg|_{-2}^{6} = \frac{4i}{\pi}\left(\frac{1}{1+e^{3i\pi/2}} - \frac{1}{1+e^{-i\pi/2}}\right) = \frac{4i}{\pi}\left(\frac{1}{1-i} - \frac{1}{1-i}\right) = 0$$

Ejemplo: La integral de $f(z) = \bar{z}$ no es independiente del camino en ningún dominio D.

En efecto, ya hemos visto que esta función no es analítica en ningún dominio. Por lo tanto (AN) es falsa. Luego, (IC) es falsa en cualquier D.

Ejemplo: La integral de $f(z) = \frac{1}{z^2}$ es independiente del camino en $D = \mathbb{C} - \{0\}$. Esto no se deduce por el hecho que efectivamente $f(z)$ es analítica en D, puesto que este dominio no es simplemente conexo. Sin embargo (EP) es verdadera porque $F(z) = -\frac{1}{z}$ es una primitiva de $f(z)$ en D. Entonces (IC) es verdadera. Por ejemplo, para cualquier curva que no pase por el origen, se tiene:

$$\int_{-1-i}^{1+i} \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{z}\bigg|_{-1-i}^{1+i} = -\frac{1}{1+i} + \frac{1}{-1-i} = -1 + i$$

Apéndice

Lema: Sean $F, G, f: D \to \mathbb{C}$ funciones, D abierto y conexo.

Si $F'(z) = G'(z)$, $\forall z \in D$, entonces existe una constante $C \in \mathbb{C}$ tal que $G(z) = F(z) + C$, $\forall z \in D$.

Dem supongamos que $F'(z) = G'(z)$, $\forall z \in D$.

Luego, $H(z) = G(z) - F(z)$ es analítica en D y su derivada es idénticamente nula allí. Si $H(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, entonces como $H'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) \equiv 0$, $u_x(x,y)$ y $v_x(x,y)$ resultan idénticamente nulas en D. Y por las condiciones de Cauchy-Riemann, lo mismo ocurre con $u_y(x,y)$ y $v_y(x,y)$. Ello implica que tanto $u(x,y)$ como $v(x,y)$ son constantes en D.

En efecto, fijemos arbitrariamente un punto $(x_0, y_0) \in D$. Sea $(x_1, y_1) \in D$ un punto genérico. Como D abierto y conexo, existe una curva suave o suave a trozos $\mathcal{C}: z = Z(t)$, $a \le t \le b$, tal que $Z(a) = (x_0, y_0)$ y $Z(b) = (x_1, y_1)$. Consideremos la función $h(t) = H\,(Z(t))$, $a \le t \le b$. Denotemos $I = [a, b]$.

(I) Si $\mathcal{C}$ es suave, $Z'(t)$ es continua en I y por la regla de la cadena

$h'(t) = H'\big(Z(t)\big)Z'(t) = 0$, $\forall t \in I$ puesto que $Z(t) \in D$ y $H'(z) \equiv 0$ allí. Entonces $h(t)$ es constante en I.

(II) Si $\mathcal{C}$ es suave a trozos, existe en D una secuencia finita de arcos orientados suaves $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_N$ tales que $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \dots \cup \mathcal{C}_N$, donde el extremo final de $\mathcal{C}_{n-1}$ coincide con el inicial de $\mathcal{C}_n$ $(n = 2, \dots, N)$, el extremo inicial de $\mathcal{C}_1$ es (x_0, y_0) y el extremo final de $\mathcal{C}_N$ es (x_1, y_1). Razonando con cada tramo suave como se hizo en (I), podemos afirmar que $H(t)$ es constante en cada tramo. Luego, lo es en I.

En ambos casos hemos probado que $H(t)$ es constante en I. En particular, $h(b) = h(a)$, de modo que $H(x_1, y_1) = H(x_0, y_0)$.