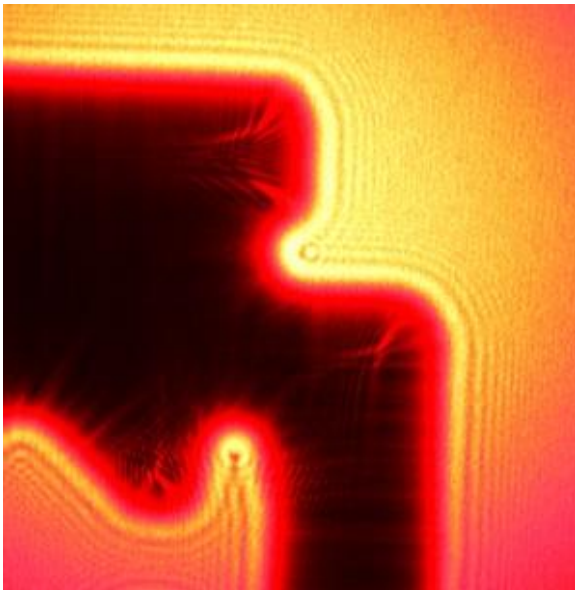


Difracción

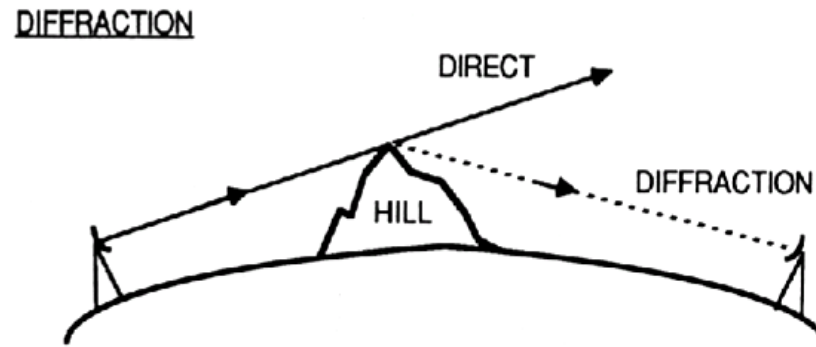
La *difracción* es un fenómeno característico de las ondas que se basa en la desviación de éstas al encontrar un obstáculo o al atravesar una rendija. Es decir, es un efecto *de bordes*.

La difracción ocurre en todo tipo de ondas, desde ondas sonoras, ondas en la superficie de un fluido y ondas electromagnéticas como la luz visible y las ondas de radio.



Sombra de una hoja de afeitar iluminada por un láser helio-neón.

**Las ondas de radio difractan
alrededor de las montañas.**



Cuando la longitud de onda es de kms, el pico de una montaña es un borde muy afilado!



Difracción ondas en el agua

Ejemplos de difracción de ondas de agua en zonas costeras

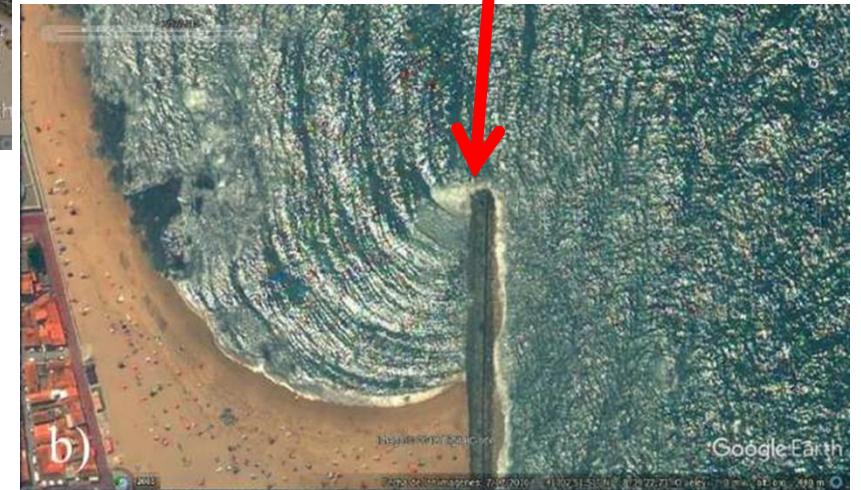


El patrón de propagación parece depender del tamaño del espacio por donde pasa la onda



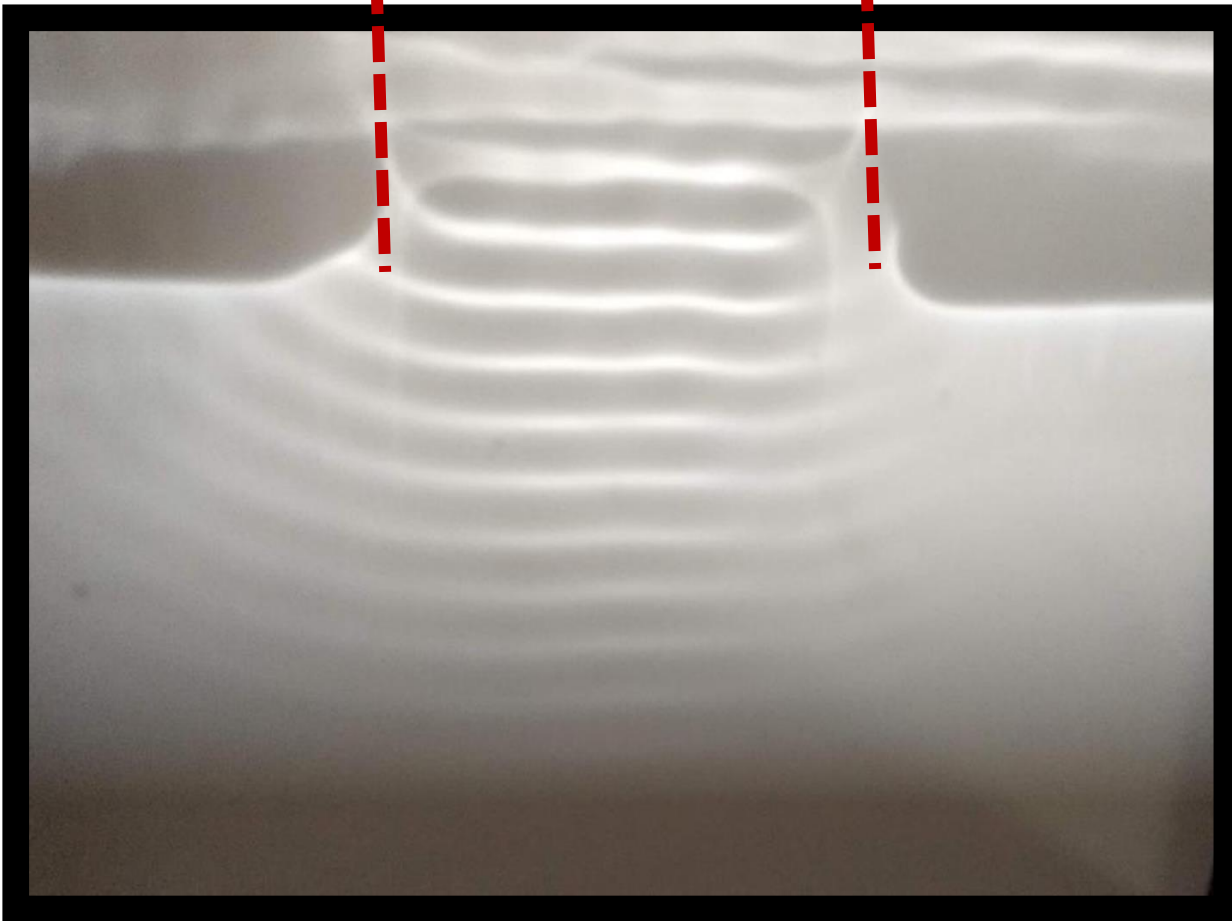
Cambio de patrón de propagación: onda plana a onda circular

Cambio de patrón de propagación de una ola por un borde

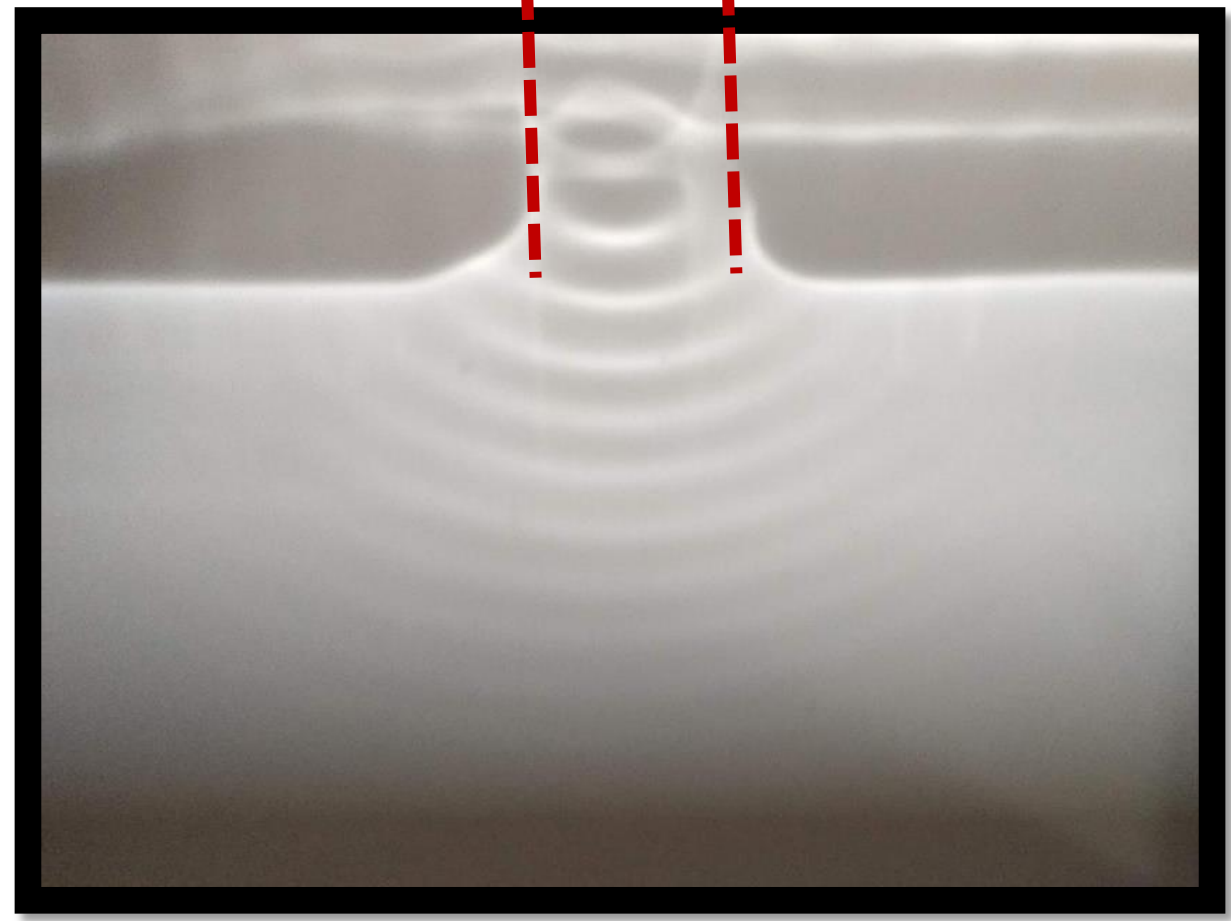


Difracción de ondas de agua en un estanque a través de una abertura

Onda
plana

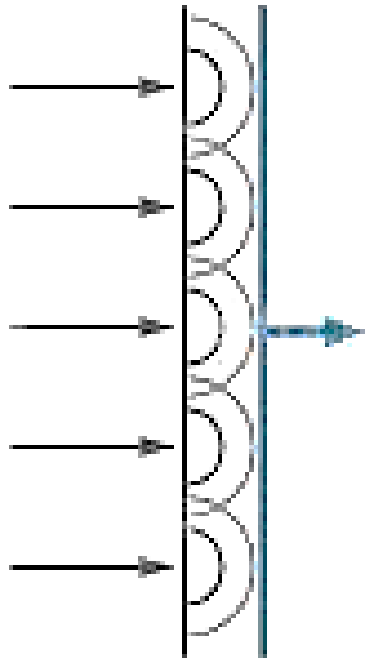


Onda
plana

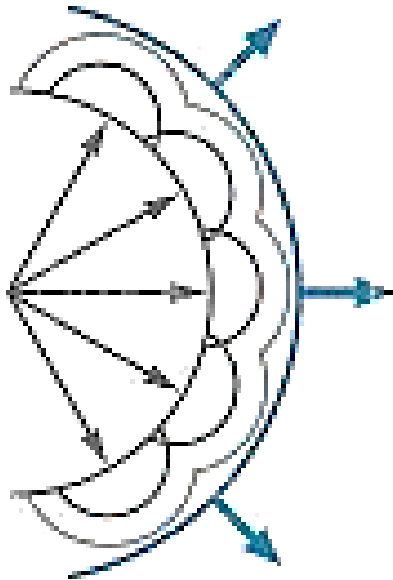


Principio de Huygens: Todo punto de un frente de onda puede considerarse como origen de ondas secundarias que se propagan en todas las direcciones del espacio.

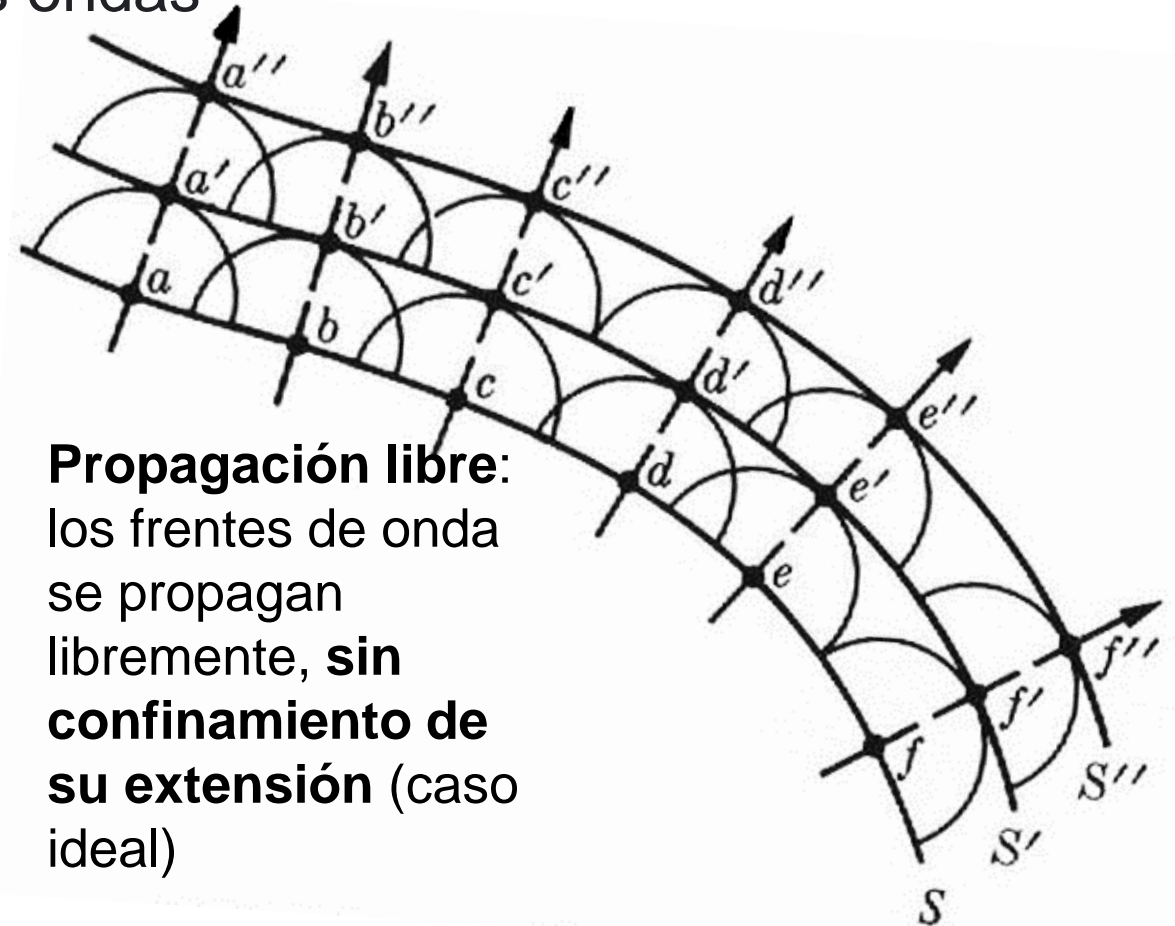
El nuevo frente de onda se obtiene construyendo una superficie tangente a las ondas secundarias, esto es, la envolvente de estas ondas



Onda plana

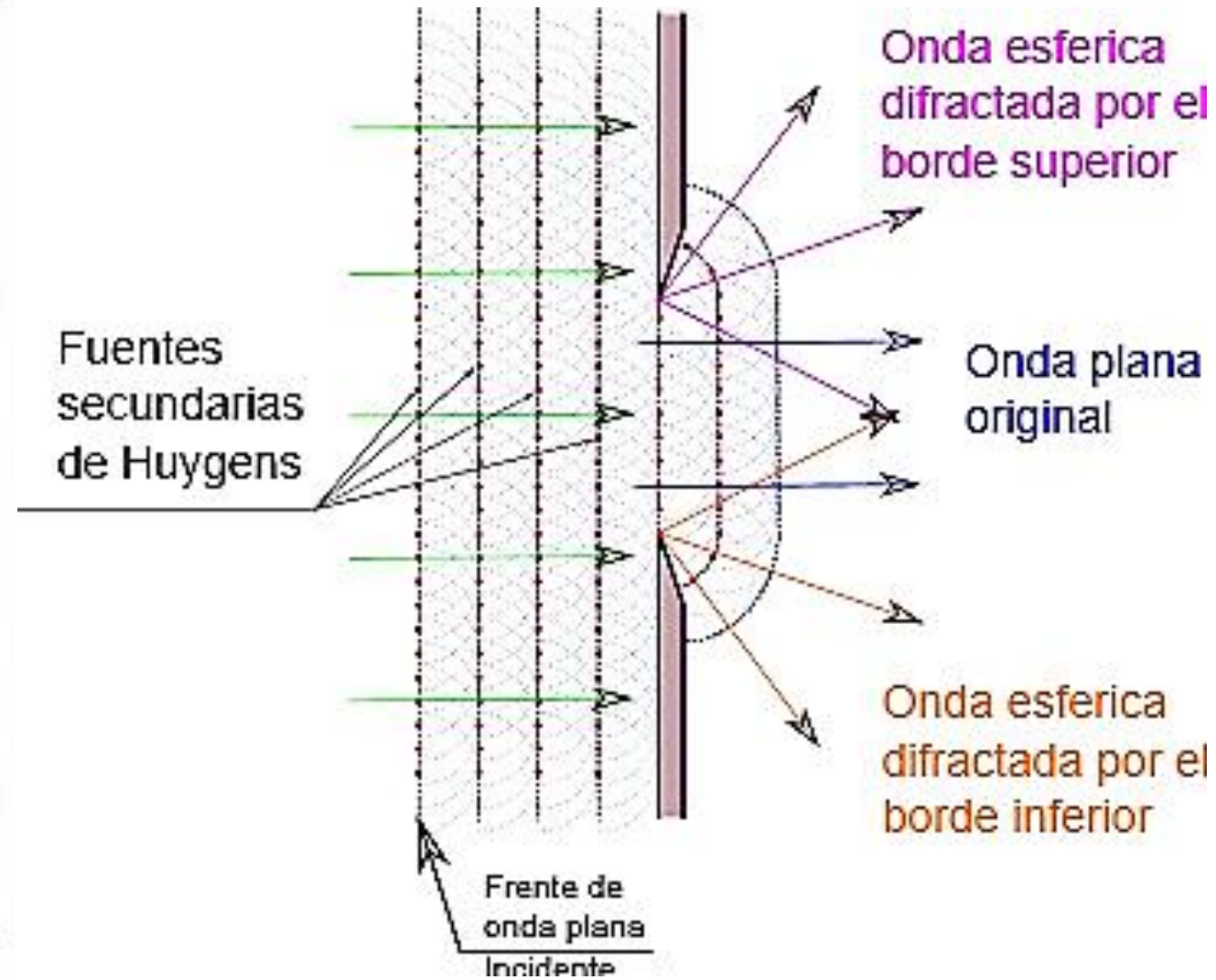
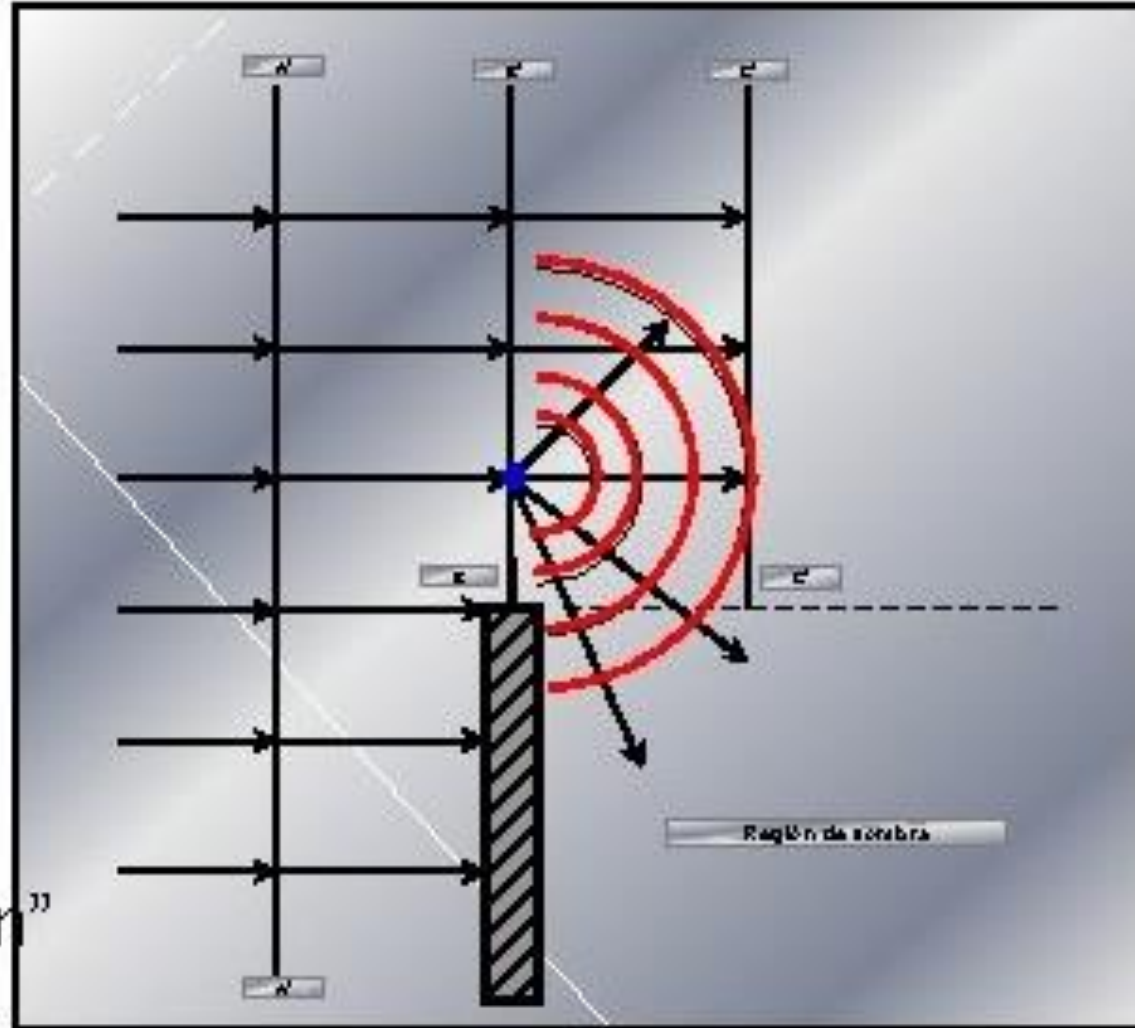


Onda esférica



Propagación libre:
los frentes de onda
se propagan
libremente, **sin**
confinamiento de
su extensión (caso
ideal)

Principio de Huygens



Difracción de Fraunhofer

Consideramos *luz coherente* que llega como *onda plana* (de longitud de onda λ) a una rendija de ancho b y que cada punto de la abertura se comporta como una pequeña fuente de luz (*principio de Huygens*). Se observa el mismo patrón sobre una pantalla si:

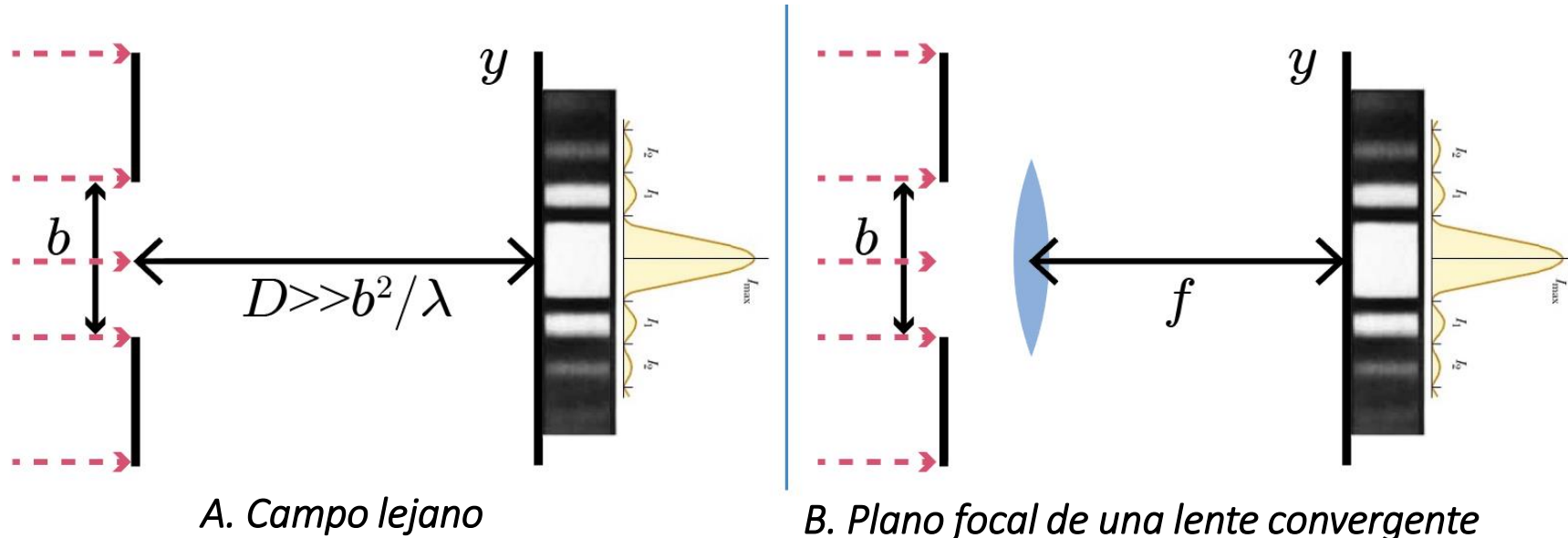
A. Campo lejano

La distancia D entre la rendija y la pantalla cumple que

$$D \gg \frac{b^2}{\lambda}$$

B. Plano focal de una lente convergente

Se pone una lente convergente después de la ranura y la distancia entre ésta y la pantalla es exactamente la distancia focal de la lente: f .

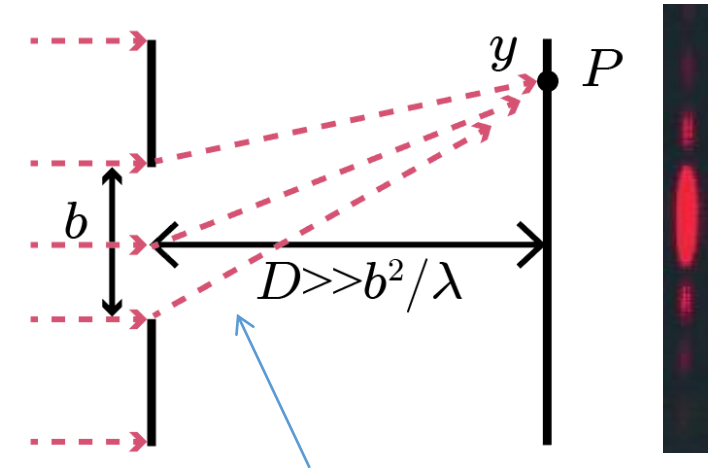


1. Difracción de una única rendija rectangular

Cada punto de la apertura actúa como una fuente de ondas esféricas (principio de Huygens). Se suman ondas de igual amplitud, con diferentes fases y el medio de propagación siempre es el aire ($n=1$). Nos interesa la interferencia de los rayos que salen **paralelos** de la ranura (esto se logra en condiciones de campo lejano o con lente).

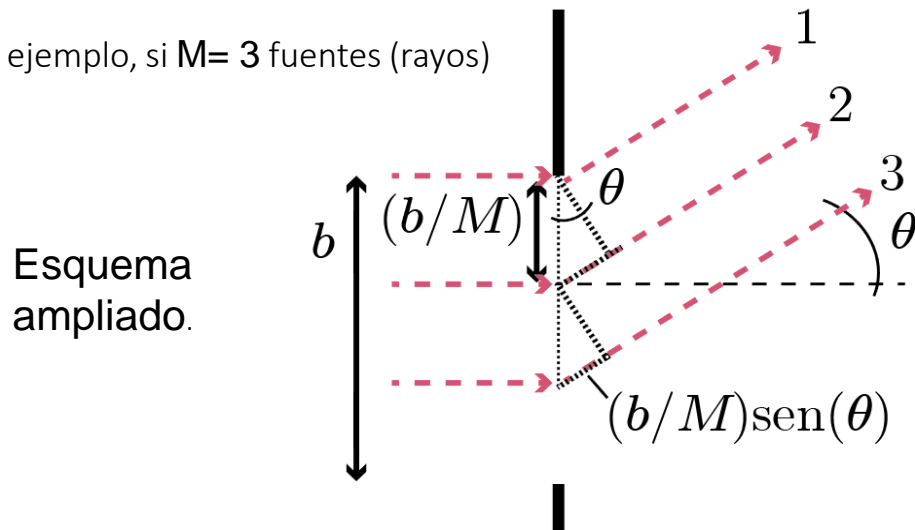
Si consideramos que podemos dividir la abertura en M segmentos con fuentes equidistantes de igual polarización y amplitud, entonces la diferencia de fase para dos rayos consecutivos que llegan al punto P de la pantalla es:

$$\delta_{i,i+1} \equiv \delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta r_{i,i+1} = \frac{2\pi}{\lambda} \left[\frac{b}{M} \sin(\theta) \right], \quad \text{si } \theta \sim 0, \text{ (región central)}$$



Estos rayos salen aproximadamente paralelos, el esquema está exagerado.

Por ejemplo, si $M=3$ fuentes (rayos)



Esquema ampliado.

Sabemos que $I(P) \propto E_{0T}^2(P)$.

$$E_{0T}(P) = E_1(P) + E_2(P) + E_3(P)$$

Todos tienen amplitud E_0 , pero difieren en la fase.

Tomando al rayo 1 como referencia:

$$E_{0T}(P) = E_0 \sin(\gamma) + E_0 \sin(\gamma + \delta) + E_0 \sin(\gamma + 2\delta)$$

$(\gamma = kr - \omega t)$

¡Es el problema de sumar corrientes alternas!
Algebráicamente es engorroso, pero con fasores no.

Método de fasores para hallar $E_{0T}(P)$

Como en los circuitos de CA, deseamos saber la suma de varias magnitudes que oscilan con frecuencia ω y que difieren entre sí en determinada fase fija. Deseamos hallar la amplitud total de la suma, y su ángulo de desfase respecto de la referencia.

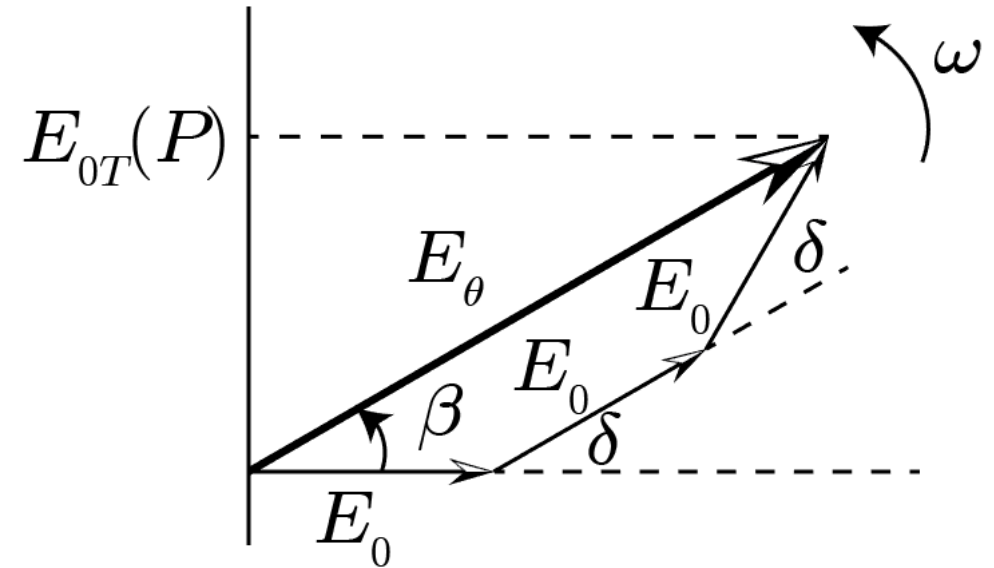
Por eso trataremos al campo E_0 de cada fuente en P como un *fasor* y tomaremos el primer rayo como referencia. La diferencia de fase total es

$$\beta = (M - 1) \frac{\delta}{2} \approx \frac{M}{2} \delta \quad (\text{si } M \text{ es muy grande})$$

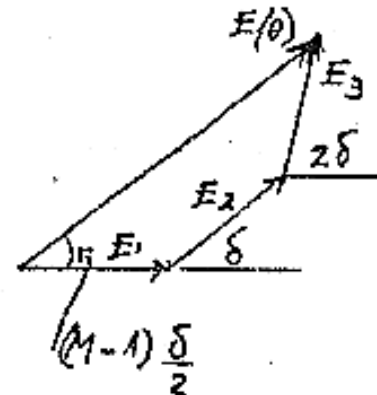
$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \left[\frac{b}{M} \sin(\theta) \right]$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{M}{2} \frac{2\pi}{\lambda} \left[\frac{b}{M} \sin(\theta) \right]$$

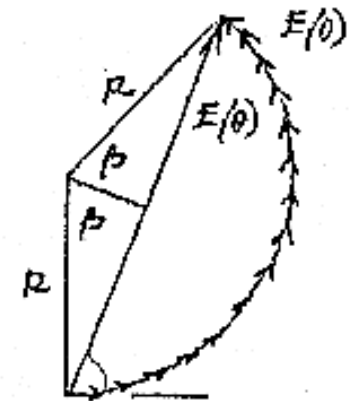
$$\Rightarrow \beta = \left(\frac{\pi b}{\lambda} \right) \sin(\theta)$$



Ranura dividida en tres partes



Ranura dividida en muchas partes



Método de fasores para hallar $E_{OT}(P)$ – Paso al infinito

La amplitud del campo y la intensidad en cualquier punto de la pantalla puede calcularse considerando ranura dividida M partes con $M \rightarrow \infty$. En ese caso, la cadena de fasores es una curva lisa.

Si R es el radio de la circunferencia donde está inscripta la poligonal, E_θ mide:

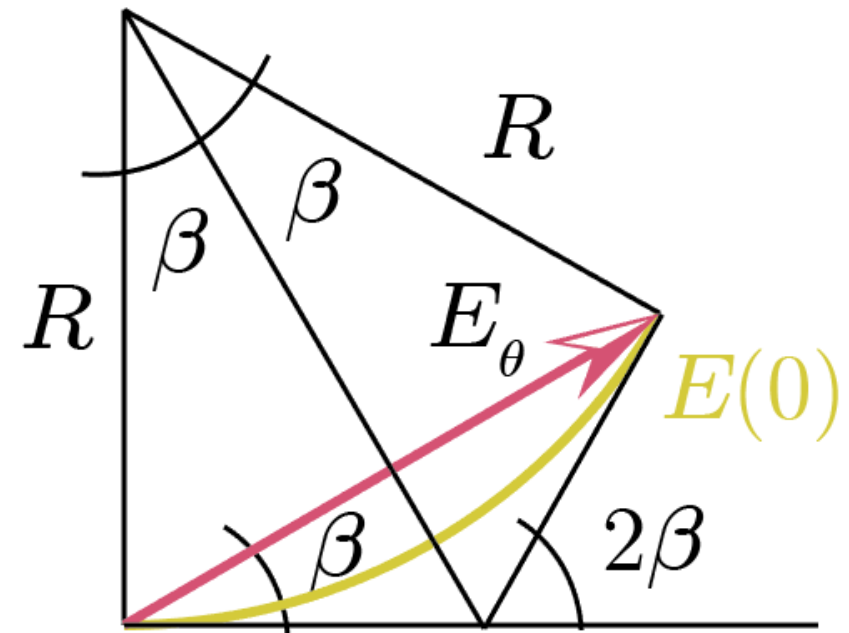
$$E_\theta = 2R \sin(\beta)$$

La longitud de arco (poligonal) es el campo para $\theta = 0$, es decir: cuando todos los rayos llegan en fase a la distancia D sobre el eje de simetría (fasores alineados) resulta:

$$E(0) = 2R\beta \implies 2R = \frac{E(0)}{\beta}$$

Reemplazando arriba:

$$E_\theta = E(0) \frac{\sin(\beta)}{\beta}$$



La intensidad sobre la pantalla

Como en general $I = c\epsilon_0 E_0^2/2$:

$$I(\theta) = \frac{c\epsilon_0}{2} E_\theta^2 = \frac{c\epsilon_0}{2} E(0)^2 \frac{\sin^2(\beta)}{\beta^2}$$

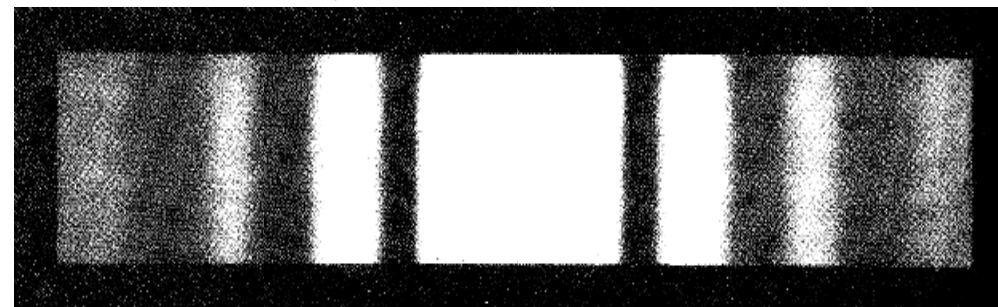
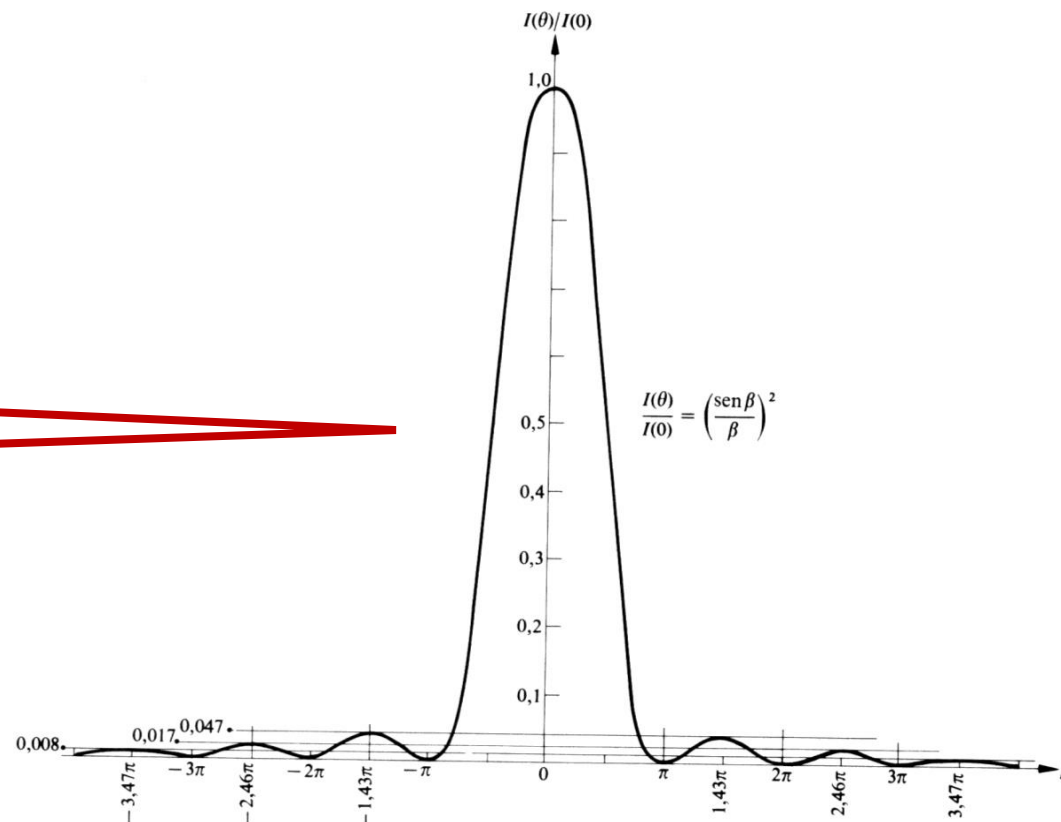
$$\Rightarrow I(\theta) = I(0) \frac{\sin^2(\beta)}{\beta^2}$$

donde

$$\beta = \left(\frac{\pi b}{\lambda} \right) \sin(\theta)$$

ancho ranura

Corresponde a la
intensidad del
máximo central ($\theta=0$)



Máximos y mínimos de intensidad sobre la pantalla

$$I(\theta) = I(0) \frac{\sin^2(\beta)}{\beta^2}$$

donde

$$\beta = \left(\frac{\pi b}{\lambda} \right) \sin(\theta)$$

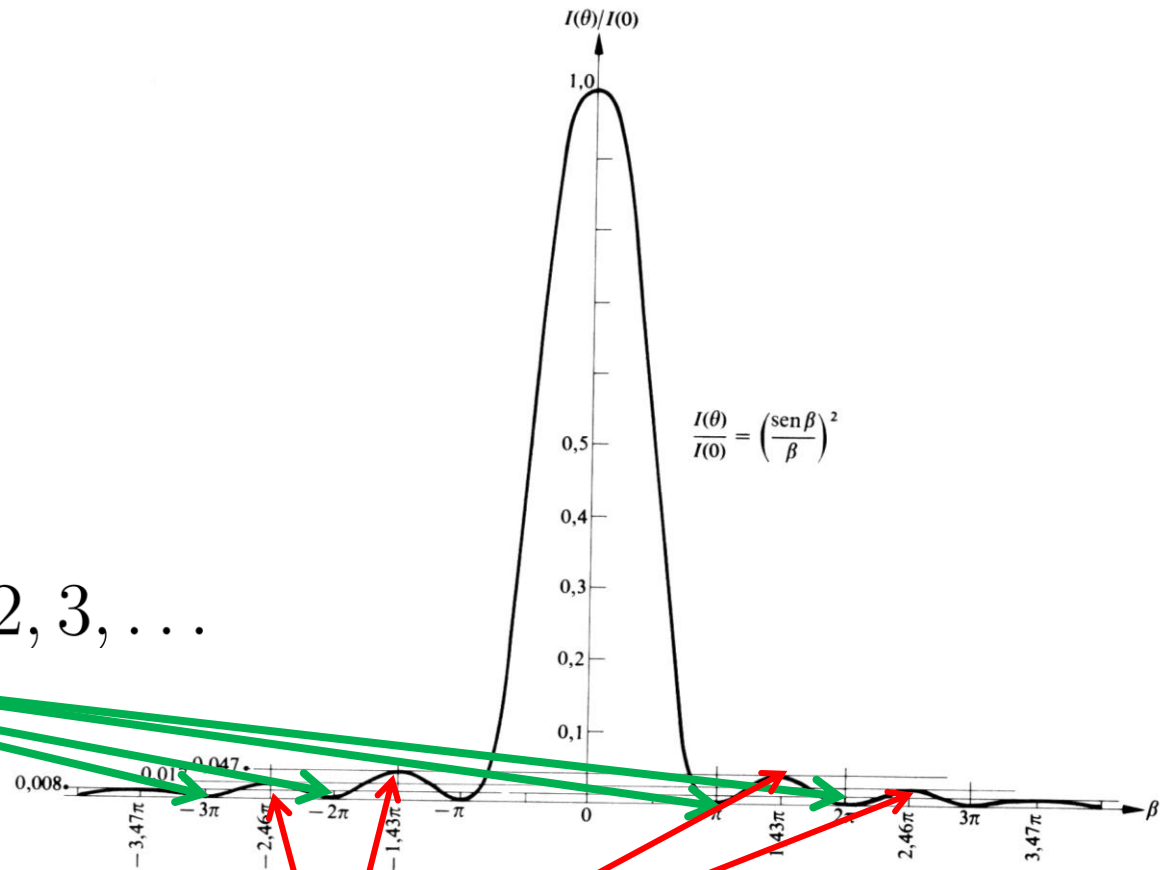
• Condición de mínimo:

$$\beta = \pm m\pi, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin(\theta) = m \frac{\lambda}{b}}$$

• Condición de máximo:

$$\frac{d}{d\beta} \left(\frac{\sin^2(\beta)}{\beta^2} \right) = 0 \iff \boxed{\beta = \tan(\beta)} \quad \text{Ecuación trascendental}$$



SOLUCION EXACTA PARA OBTENER LOS MAXIMOS DE DIFRACCIÓN

$$I(\theta) = I_0 \left(\frac{\sin^2 \beta}{\beta^2} \right) = I_0 (\sin^2 \beta) (\beta^{-2})$$

Para encontrar los máximos de una función, tome derivada y se igualará a 0

$$\frac{dI}{d\beta} = 0$$

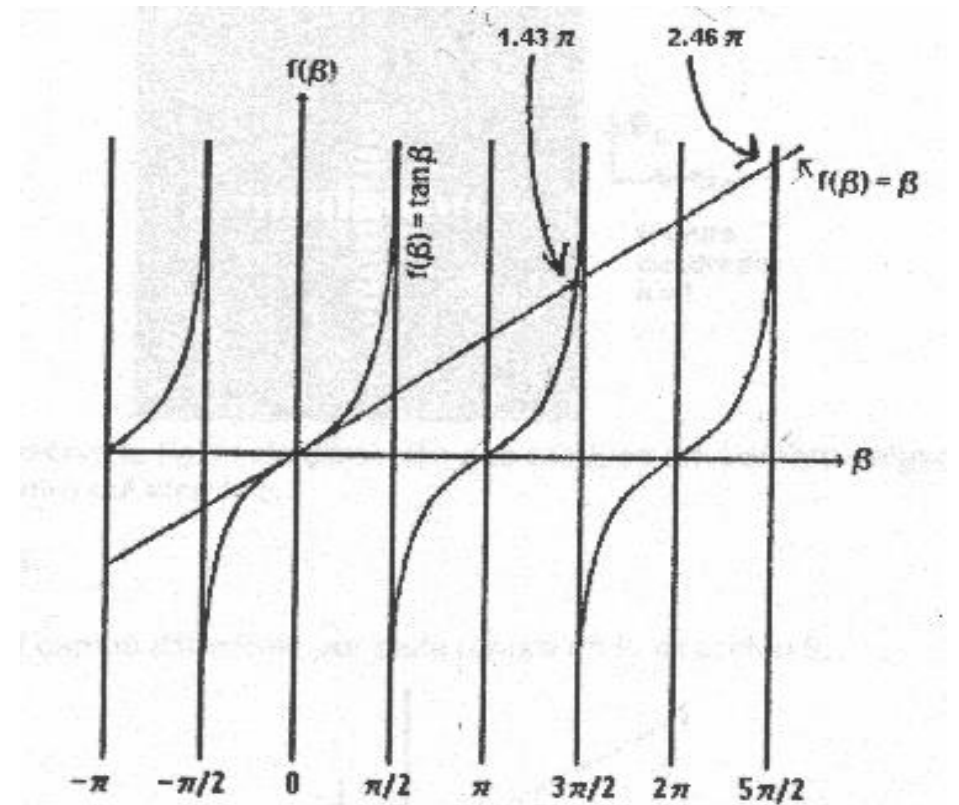
$$I_0 2 \sin \beta \cos \beta \beta^{-2} - I_0 2 \sin^2 \beta \beta^{-3} = 0$$

$$\cos \beta = \sin \beta / \beta$$

$$\beta = \tan \beta$$

↙
Ecuacion trascendental.

Se resuelve graficamente o numéricamente



El ancho del lóbulo principal

$$I(\theta) = I(0) \frac{\sin^2(\beta)}{\beta^2}$$

donde

$$\beta = \left(\frac{\pi b}{\lambda} \right) \sin(\theta)$$

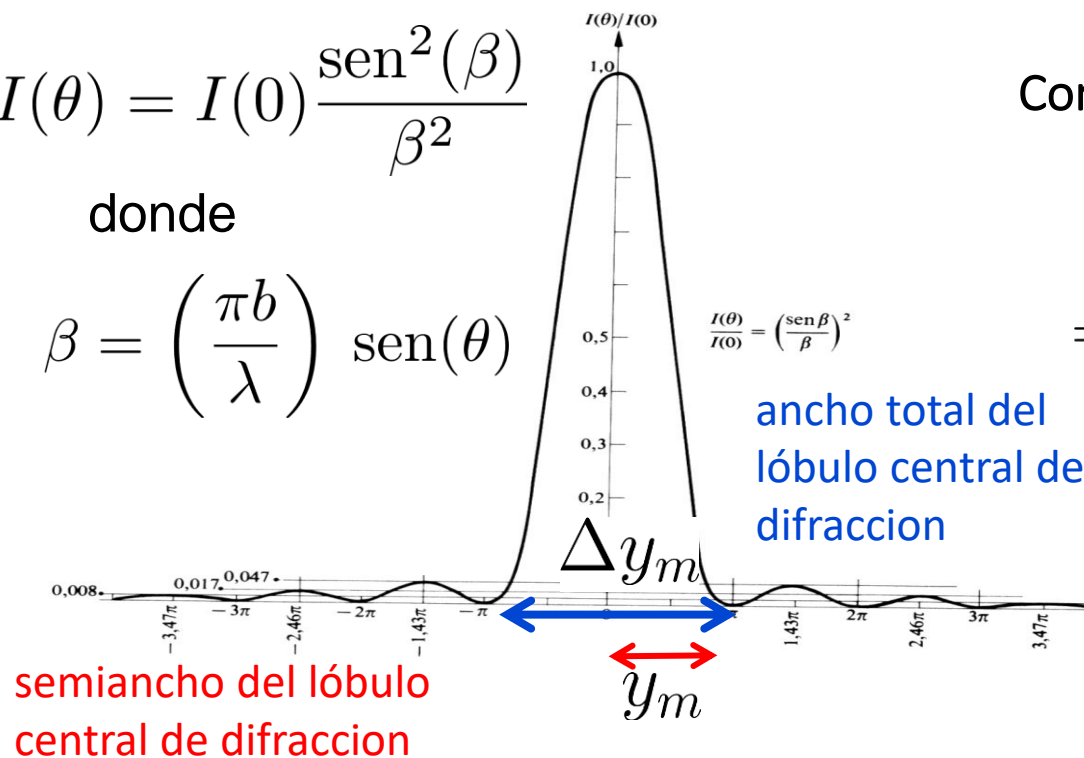
Condición de mínimo:

$$\beta = \pm m\pi, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

$$\Rightarrow \sin(\theta) = m \frac{\lambda}{b}$$

En la zona central de la pantalla:

$$\sin(\theta) \simeq \tan(\theta) = \frac{y_m^{\min}}{D} = m \frac{\lambda}{b}$$



$$\Rightarrow y_m^{\min} = m \frac{D\lambda}{b} \Rightarrow \Delta y_m = 2 D\lambda/b$$

Si en una experiencia se mide el ancho total del primer lóbulo de difracción y_m , se puede determinar el ancho de la ranura

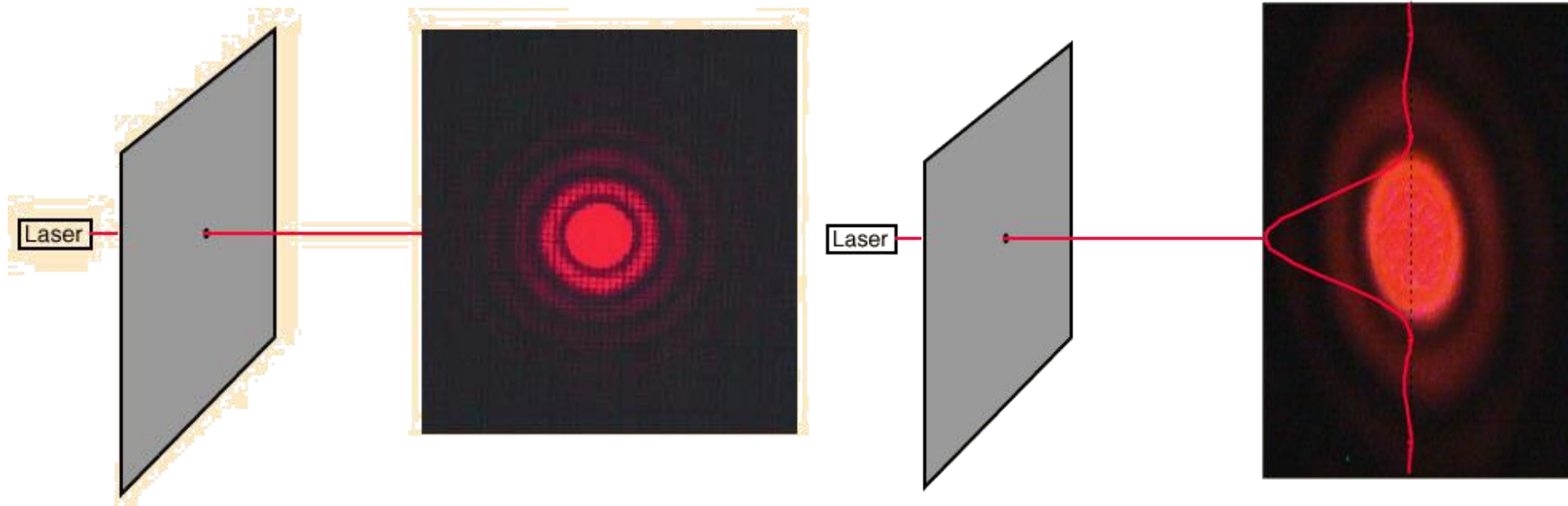
$$\Rightarrow b = \frac{2 D\lambda}{\Delta y_m}$$

El ancho del lóbulo principal es función inversa del ancho de la ranura



$$\Delta y_m = \frac{2 D \lambda}{b}$$

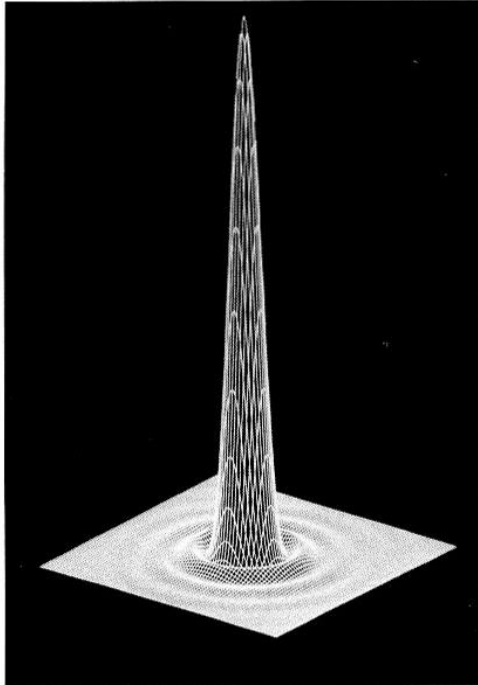
Patrón de difracción por una apertura circular



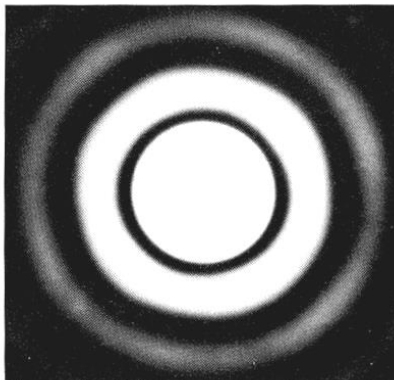
Cuando la luz de una fuente pasa a través de una pequeña abertura circular de diámetro a , no produce un punto brillante como imagen, sino un disco circular difuso conocido como **disco de Airy**, rodeado por anillos concéntricos circulares mucho más débiles.

Este ejemplo de difracción es de gran importancia porque el ojo y muchos instrumentos ópticos tienen aberturas circulares. En general se dice que **todo sistema óptico está limitado por difracción**.

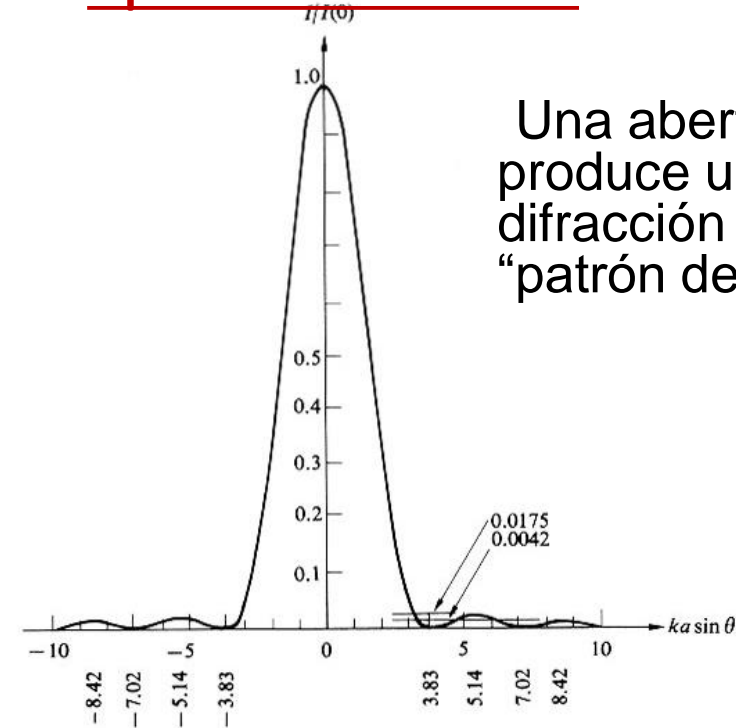
Patrón de difracción por una apertura circular



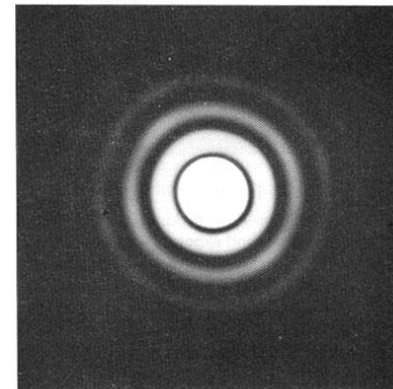
Intensidad difractada



Patrón de difracción producido por una pequeña abertura

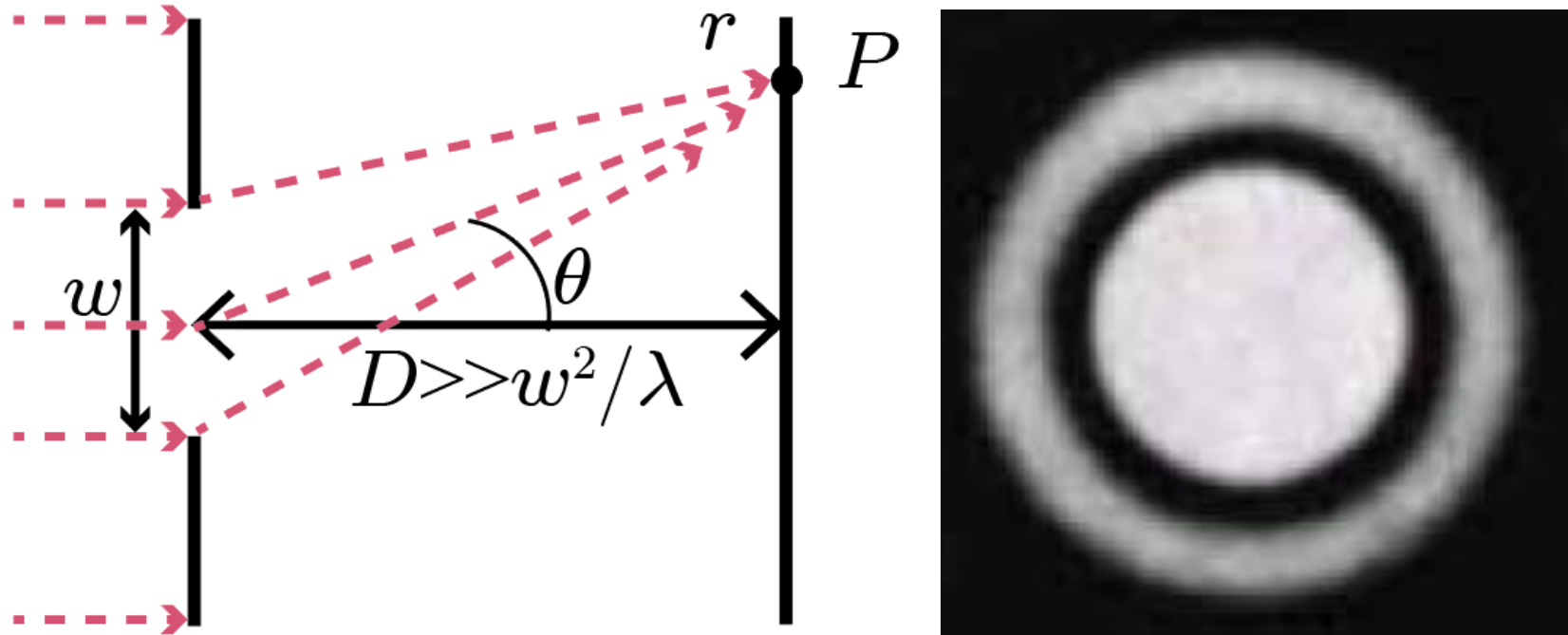


Una abertura circular de produce un patron de difracción conocido como "patrón de Airy".



Patrón de difracción producido por una gran abertura

Patrón de difracción por una apertura circular



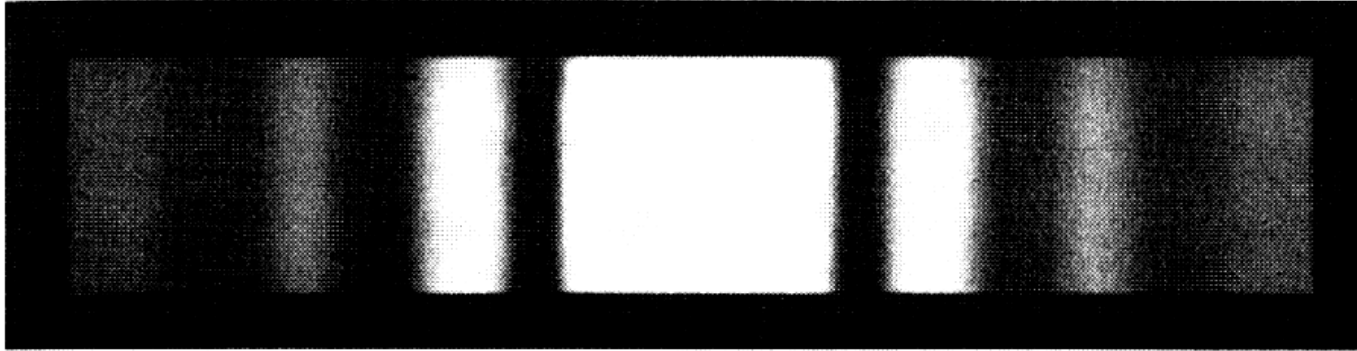
Para una apertura circular de diámetro w , el primer mínimo de intensidad se encuentra en

$$\theta_{\min} \simeq 1,22 \frac{\lambda}{w}$$

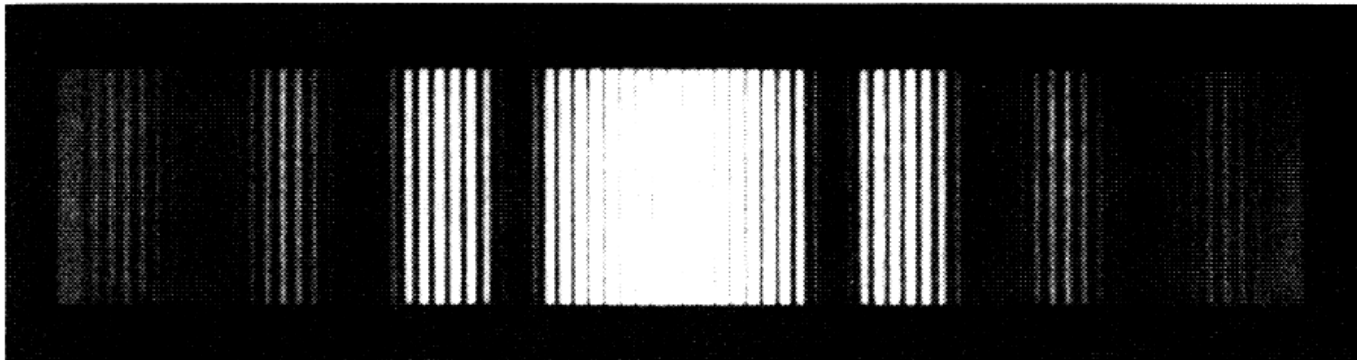
Difracción producida por una y dos ranuras

Patrón de difracción de Fraunhofer

Una ranura



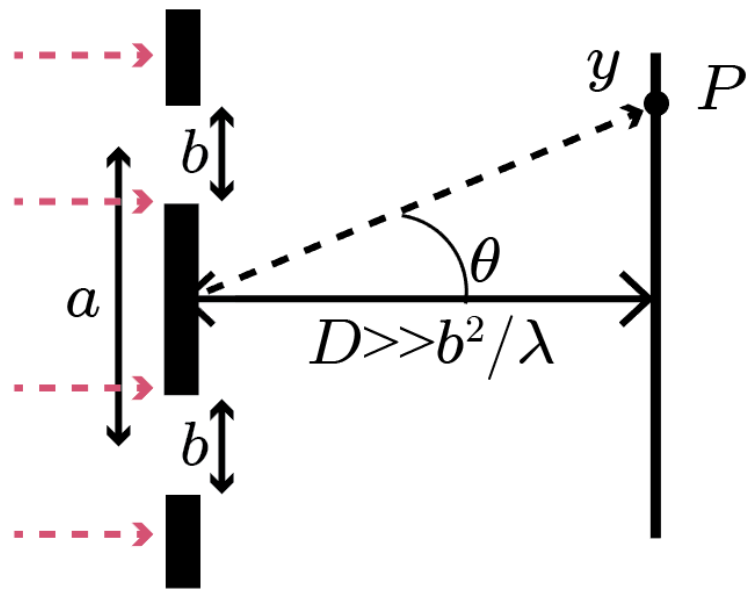
Dos ranuras



En el experimento de Young de interferencia de dos ranuras, no consideramos el efecto de la difracción

Patrón de difracción-interferencia de una doble ranura

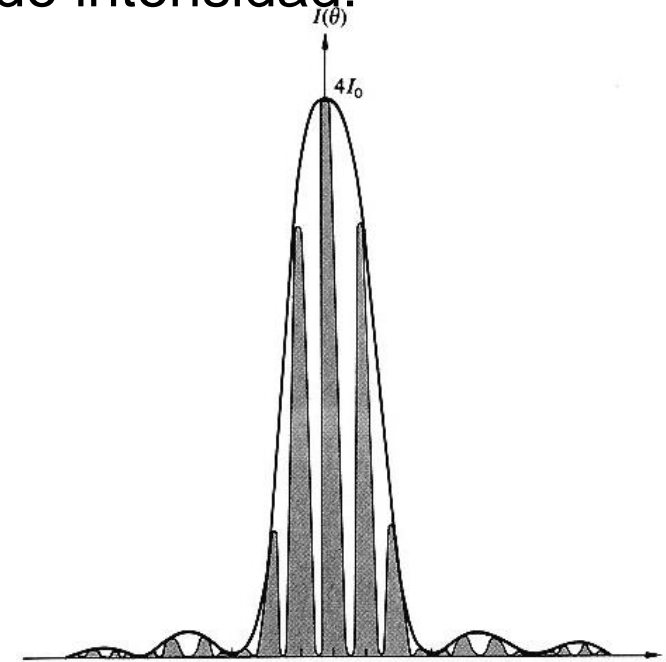
Vimos que la experiencia de Young da un perfil angular de intensidad:



$$I(\theta) = 4I_0^{\text{Young}} \cos^2(\alpha)$$

donde

$$\alpha = \left(\frac{\pi a}{\lambda} \right) \sin(\theta)$$



En condiciones de Fraunhofer, se considera el ancho **b** de cada ranura que experimenta difracción; es decir:

$$I_0^{\text{Young}} = I_0 \frac{\sin^2(\beta)}{\beta^2} \quad \text{donde} \quad \beta = \left(\frac{\pi b}{\lambda} \right) \sin(\theta)$$

$$\Rightarrow I(\theta) = 4 I_0 \frac{\sin^2(\beta)}{\beta^2} \cos^2(\alpha)$$

Patrón de difracción-interferencia de una doble ranura

$$I = 4 I_0 \frac{\sin^2(\beta)}{\beta^2} \cos^2(\alpha)$$

difracción **interferencia**

$$\beta = (\pi / \lambda) b \sin \theta$$

$$\alpha = (\pi / \lambda) a \sin \theta$$

El factor con ***b*** cumple los ciclos más rápidamente que ***a***, dado que ***a*** > ***b***

$$\alpha = \pm k \pi$$

máximos interferencia

$$\alpha = \pm (k+1/2) \pi$$

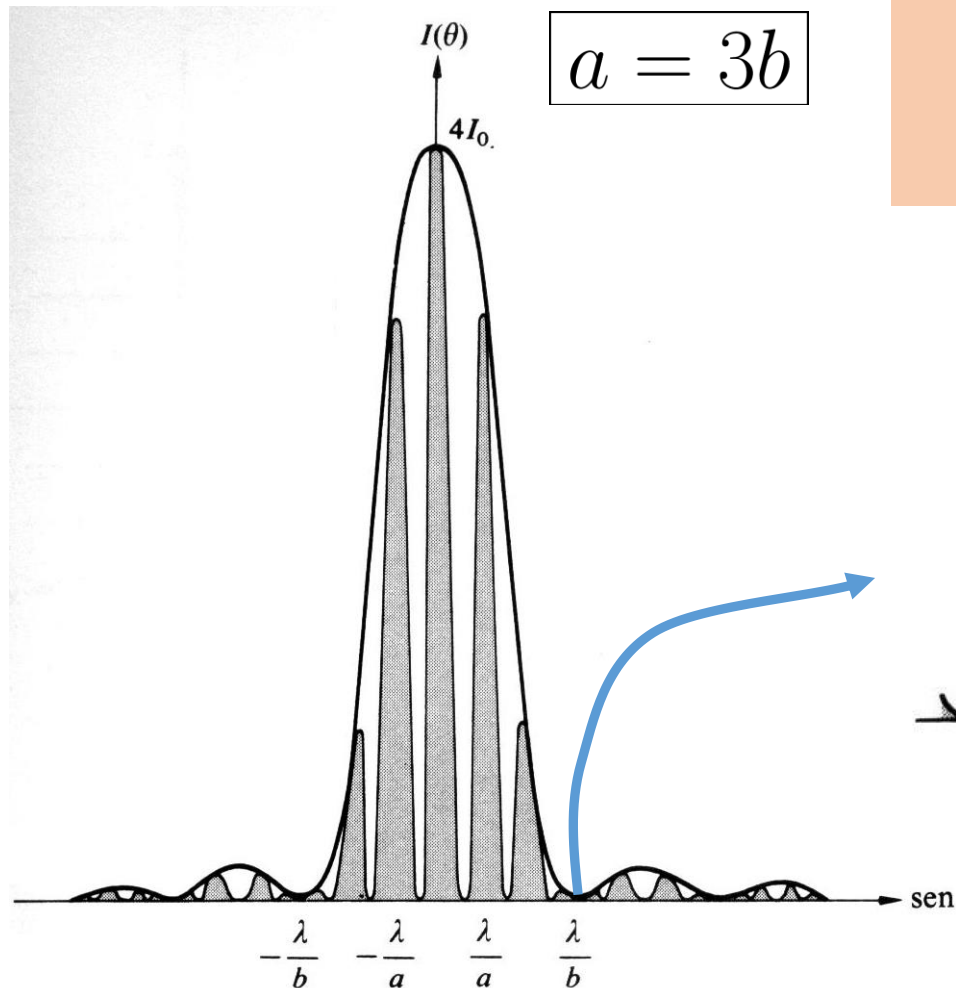
mínimos interferencia

$$\beta = \pm m \pi$$

mínimos difracción

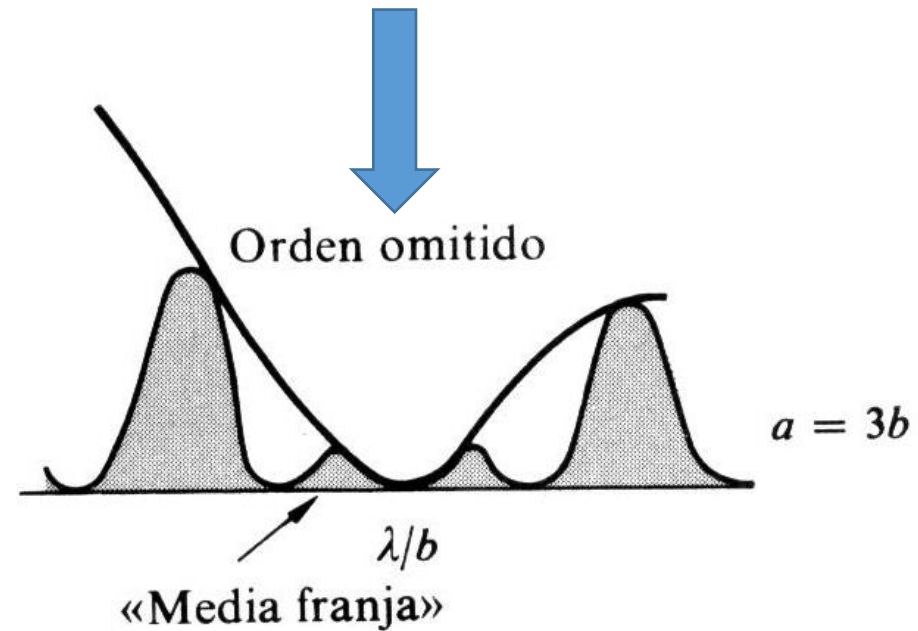
Órdenes perdidos

Un *orden perdido* (u *omitido*) se da cuando un máximo de interferencia coincide con un mínimo de difracción. Sucede siempre que $a = q b$, con q natural.



$$a = 3b$$

posición máximo de
interferencia coincide con el
mínimo de difracción

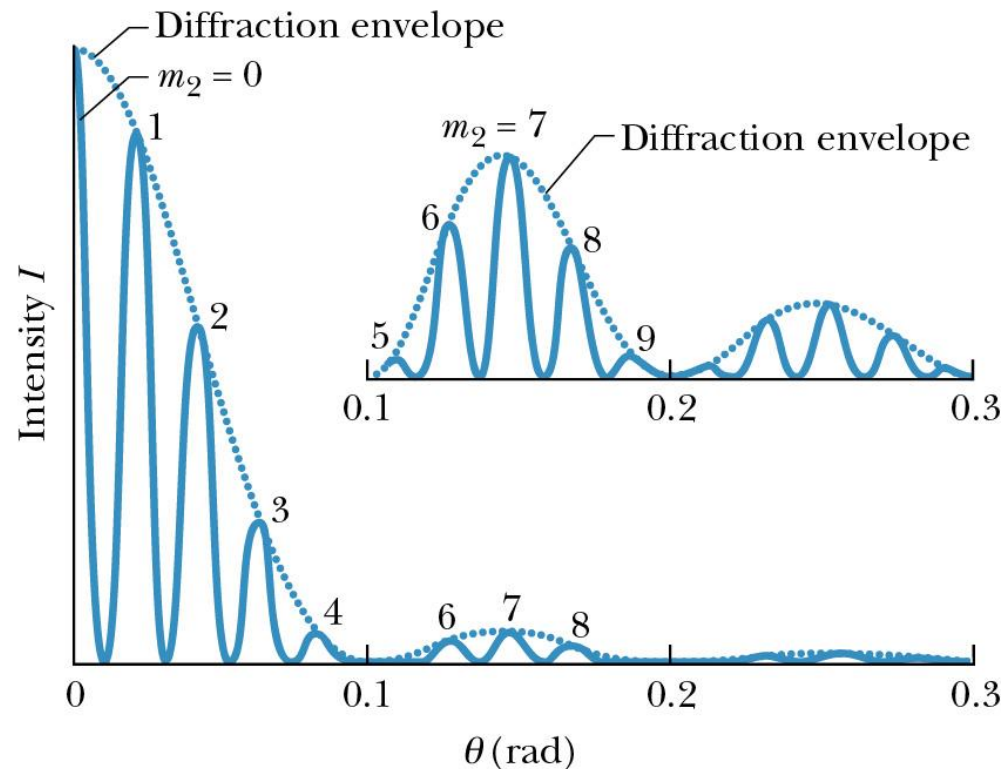


Patrón de difracción-interferencia de una doble ranura

$$I_{total} = I(\text{interferencia}) \times I(\text{difracción}) \quad \longrightarrow \quad I = 4 I_0 \frac{\sin^2(\beta)}{\beta^2} \cos^2(\alpha)$$

$$(\text{min difracción}) \beta = (\pi / \lambda) b \sin \theta \rightarrow b \sin \theta = k\lambda \quad k=1, 2$$

$$(\text{max interferencia}) \alpha = (\pi / \lambda) a \sin \theta \rightarrow a \sin \theta = m\lambda \quad m=0, 1, 2$$

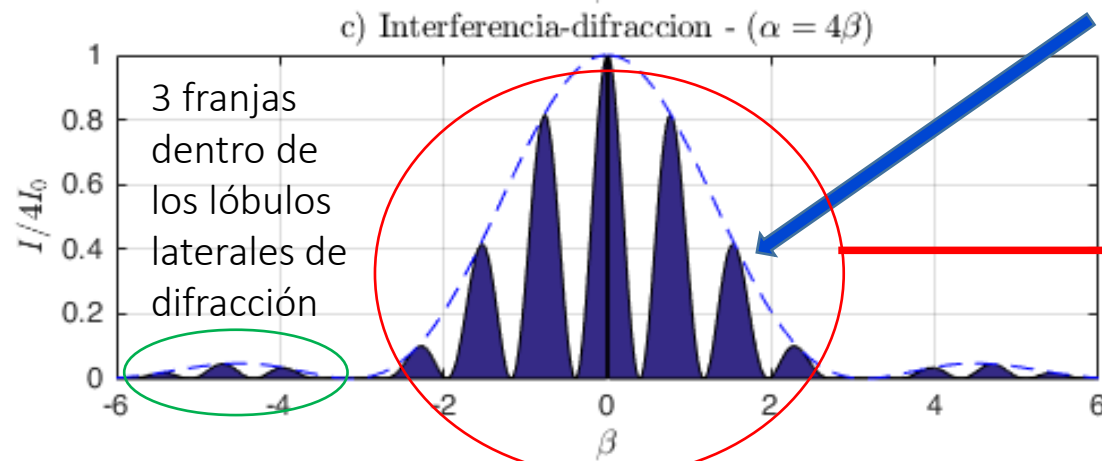
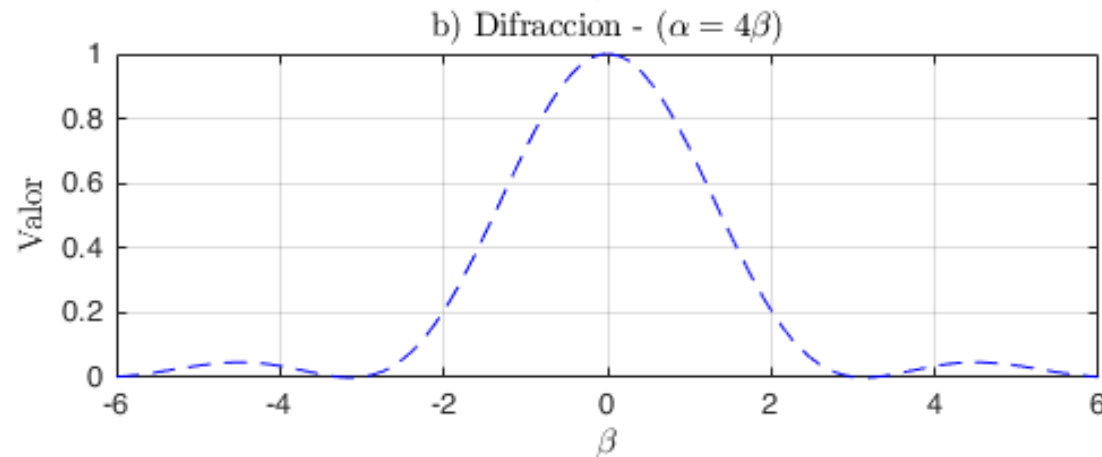
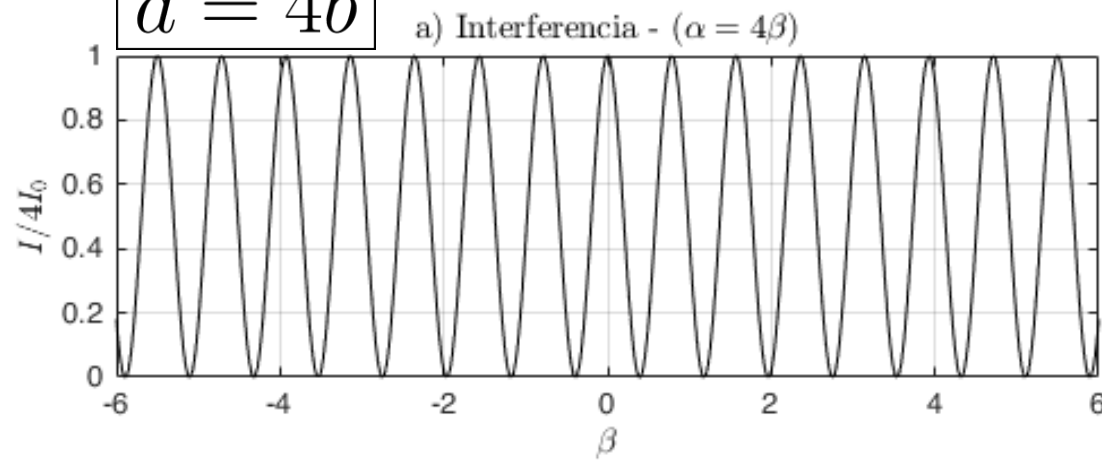


Si un máximo de interferencia coincide con un mínimo de difracción



$$\frac{a}{b} = \frac{m}{k}$$

$$a = 4b$$



Si un máximo de interferencia coincide con un mínimo de difracción



$$\frac{a}{b} = \frac{m}{k}$$

La difracción es una envolvente

3 franjas dentro de los lóbulos laterales de difracción

7 franjas completas de interferencia dentro del lóbulo central de difracción (4to faltante)

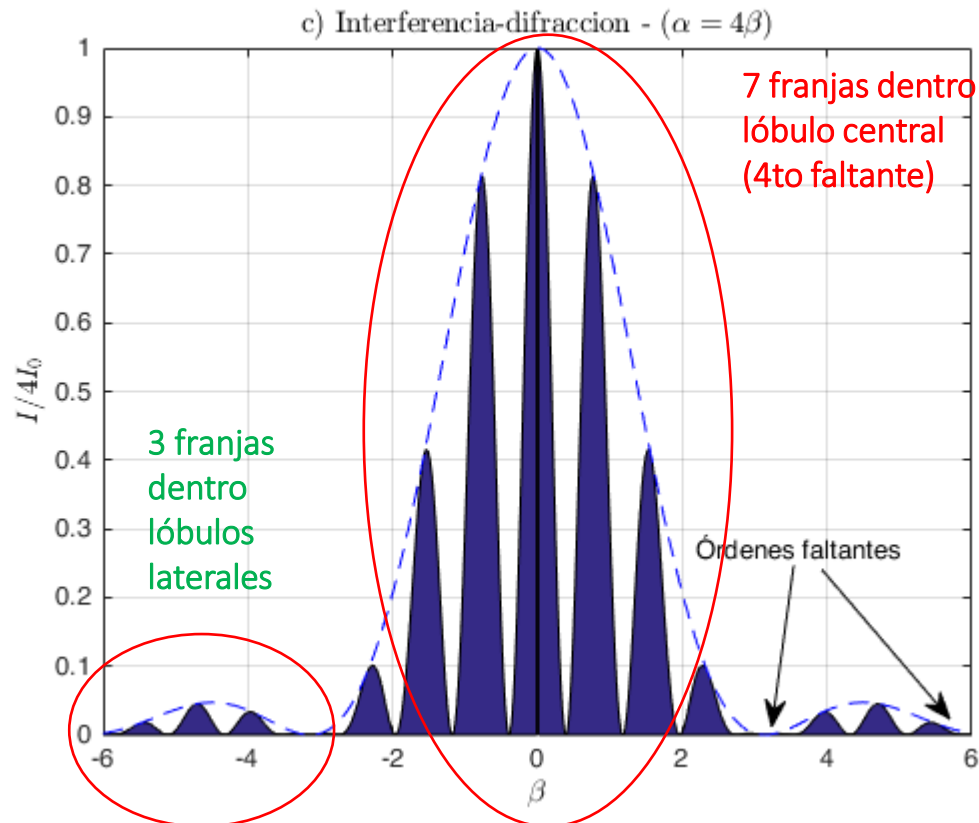
Cantidad de franjas brillantes de interferencia dentro del lóbulo lateral de la envolvente de difracción

Dada $a=4b$ hay otros órdenes perdidos cuando: $m/k = 4$

$$k=1 \quad m=4$$

$$k=2 \quad m=8$$

$$k=3 \quad m=12$$



Tenemos en el primer lóbulo lateral $m = 5, 6$ y 7 .

Difracción de Fraunhofer para N aperturas rectangulares

Realizaremos el mismo análisis que para una única apertura. El campo es la superposición de N fasores desfasados.

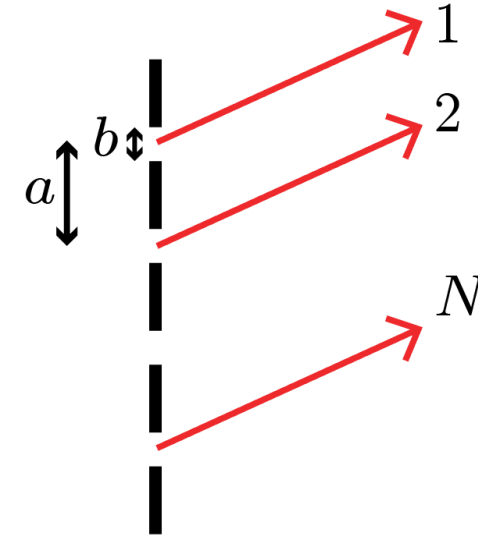
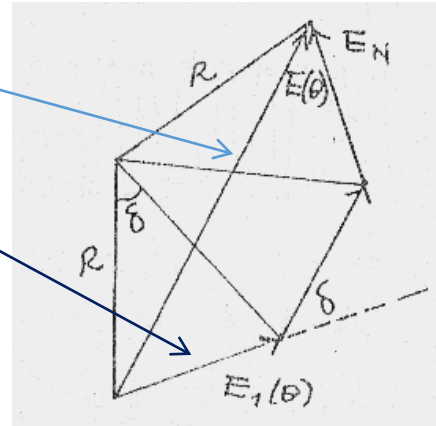
$$\delta_{1,2} = (2\pi a/\lambda)\sin(\theta) = 2\alpha$$

$$E(\theta) = 2R \sin(N\delta/2)$$

$$E_1(\theta) = 2R \sin(\delta/2)$$

Entonces:

$$E(\theta) = E_1(\theta) \frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)}$$



La intensidad resultante en la pantalla será:

$$I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2(\beta)}{\beta^2} \frac{\sin^2(N\alpha)}{\sin^2(\alpha)}$$

I_0 : intensidad difractada por una ranura en $\theta=0$.

Difracción de 1 ranura

Interferencia de N ranuras

$$\beta = \left(\frac{\pi b}{\lambda} \right) \sin(\theta)$$

$$\alpha = \left(\frac{\pi a}{\lambda} \right) \sin(\theta)$$

Análisis del término de interferencia para N ranuras rectangulares

El término de interferencia es $\frac{\text{sen}^2(N\alpha)}{\text{sen}^2(\alpha)}$

Si consideramos $\alpha_{MP} = 0, \pm\pi, \dots, \pm m\pi$, entonces:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_{MP}} \frac{\text{sen}^2(N\alpha)}{\text{sen}^2(\alpha)} = N^2 \quad \text{es decir,} \quad \left| \frac{\text{sen}^2(N\alpha)}{\text{sen}^2(\alpha)} \right| \leq N^2$$

Los valores α_{MP} se llaman *máximos principales de orden m*

$$\text{Dado que } \alpha = \left(\frac{\pi a}{\lambda} \right) \text{sen}(\theta) = m\pi \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$\Rightarrow a \text{ sen}(\theta) = m\lambda$$

condición de máximo principal de interferencia

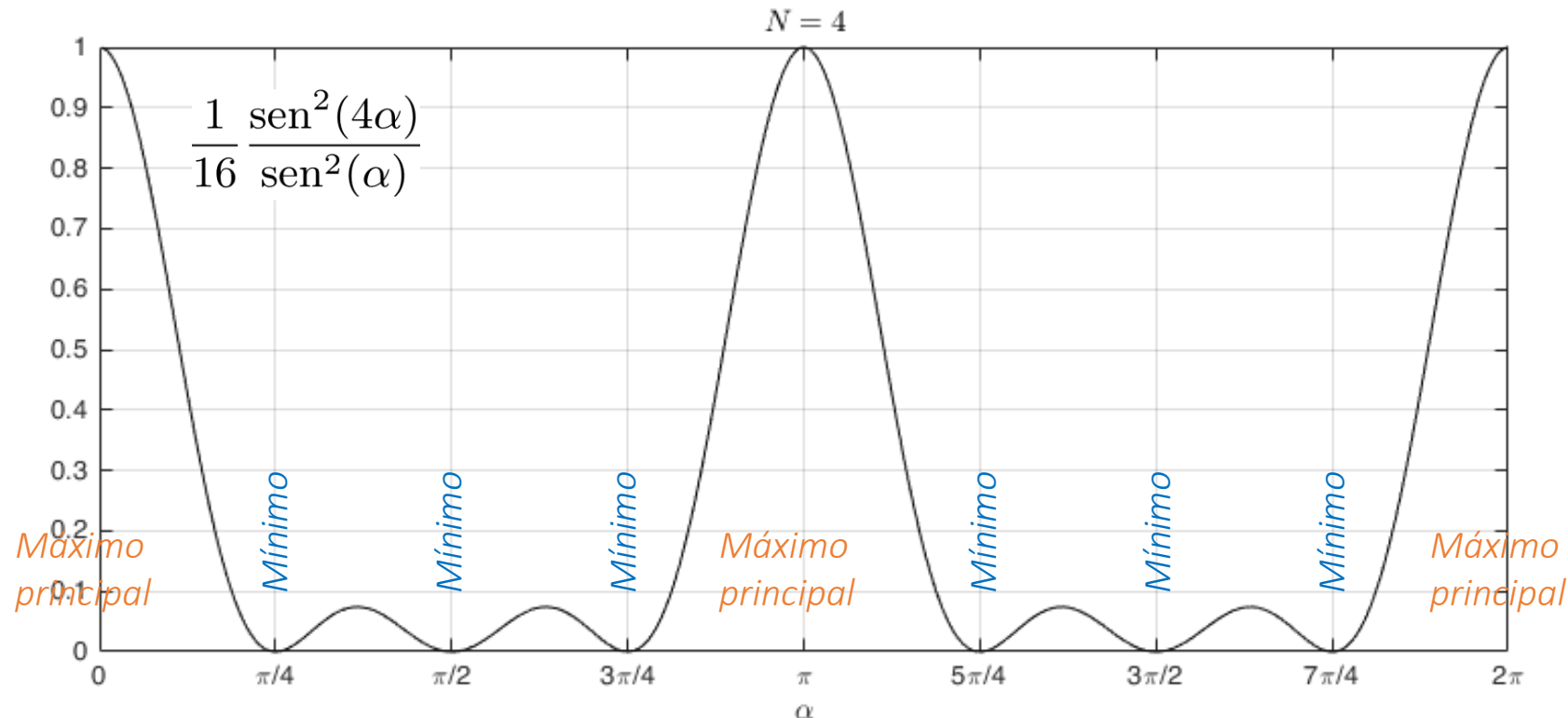
Análisis del término de interferencia para N ranuras rectangulares

En el término de interferencia $\frac{\sin^2(N\alpha)}{\sin^2(\alpha)}$ el numerador se hace cero para $N\alpha = 0, \pi, 2\pi, \dots, p\pi$ (más frecuentemente que el denominador).

El denominador se hace cero *y al mismo tiempo* cuando $p = 0, N, 2N, \dots$

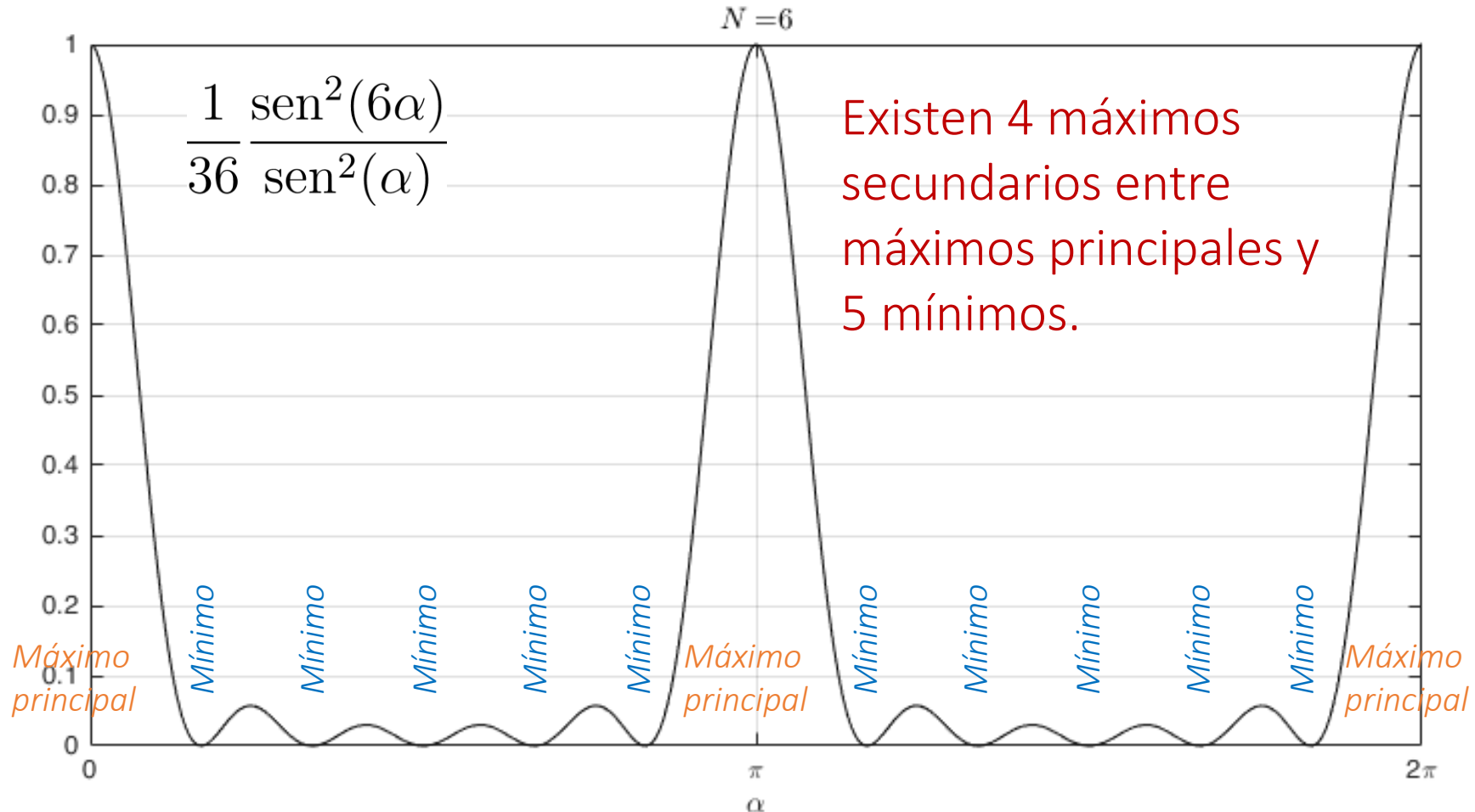
Para esos valores de α tenemos un límite tipo $0/0$ que en este caso es 1.

Ejemplo: Si $N = 4$ hay 2 máximos secundarios entre máximos principales.



Entre dos máximos principales existen otros máximos secundarios de menor intensidad separados por mínimos.

Término de interferencia para N=6 ranuras rectangulares

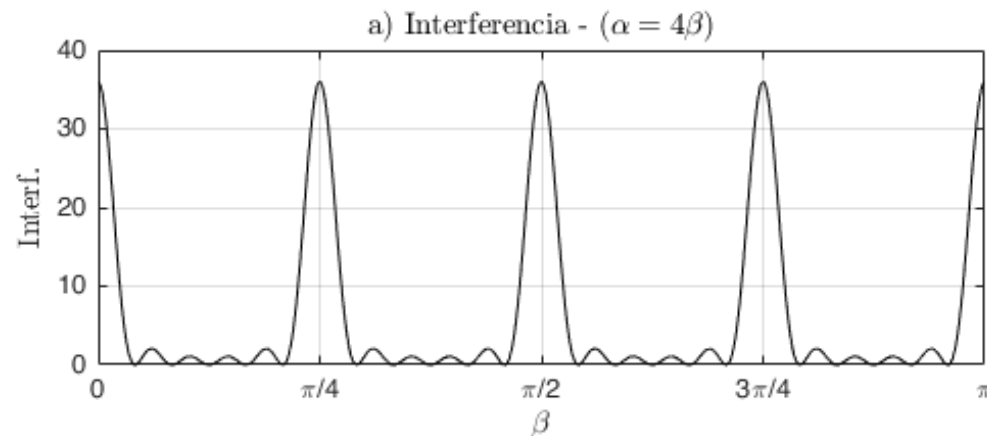


En general, hay

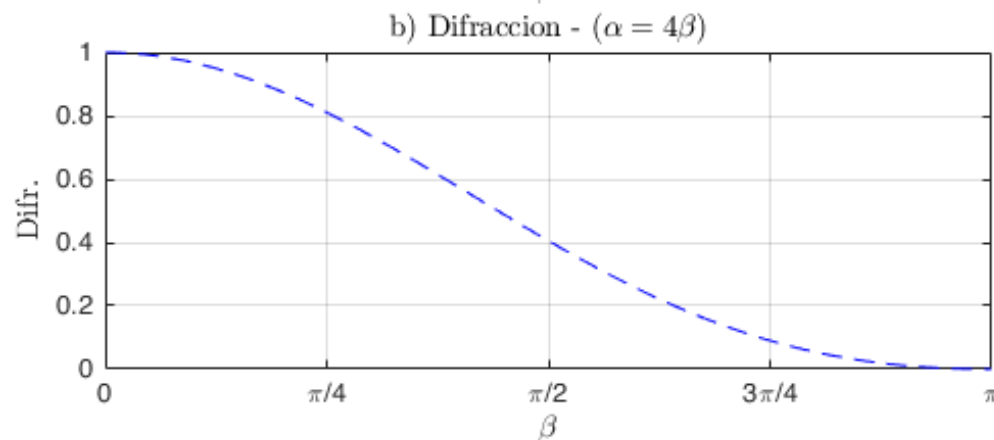
- $N - 2$ máximos secundarios entre máximos principales.
- $N - 1$ mínimos entre máximos principales.

Teniendo en cuenta la difracción, N=6 ranuras rectangulares (a=4b)

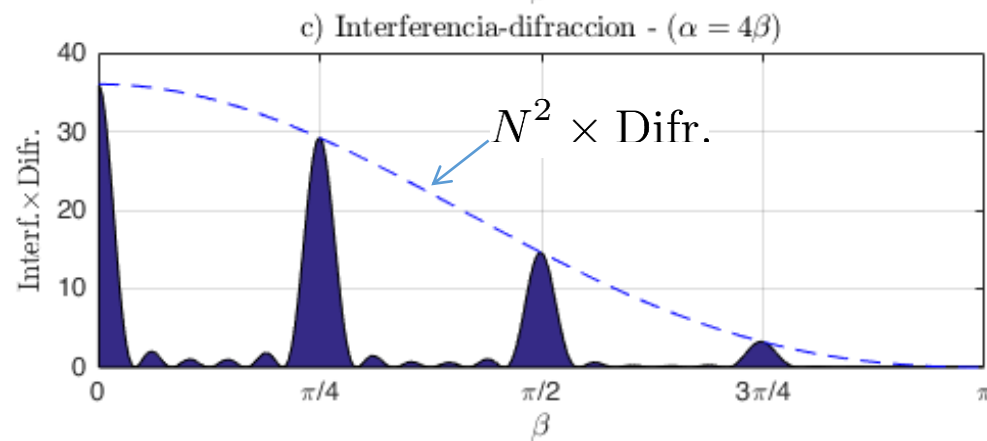
$$\frac{\text{sen}^2(6\alpha)}{\text{sen}^2(\alpha)}$$



$$\frac{\text{sen}^2(\beta)}{\beta^2}$$



$$\frac{\text{sen}^2(\beta)}{\beta^2} \frac{\text{sen}^2(6\alpha)}{\text{sen}^2(\alpha)}$$

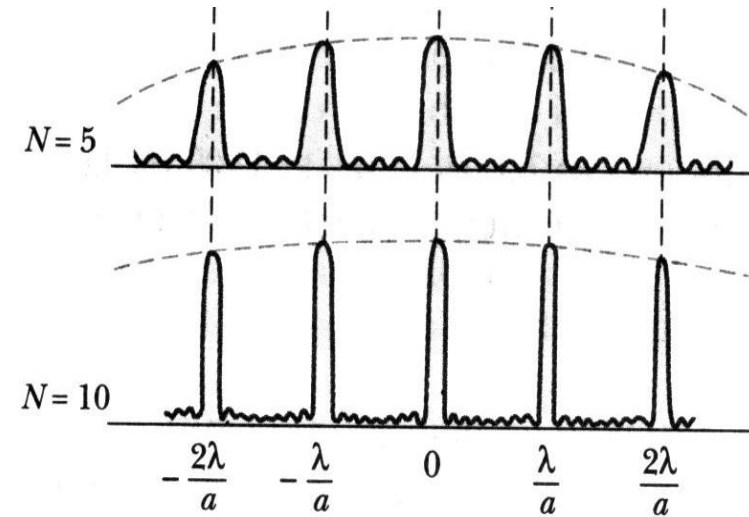


Red de difracción

Cuando N (que es el número de ranuras) tiende a ∞ , los máximos secundarios desaparecen y sólo quedan los principales:

$$a \sin(\theta) = m\lambda$$

Ecuación fundamental de la red de difracción



donde a es la distancia entre las ranuras de la red.

Si N es el número de ranuras por unidad de longitud, entonces, $a = 1/N$.

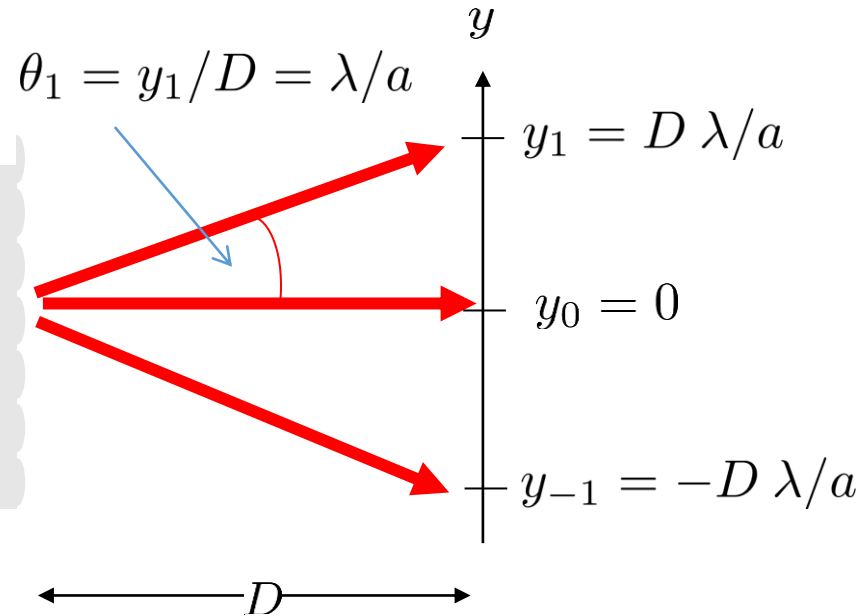
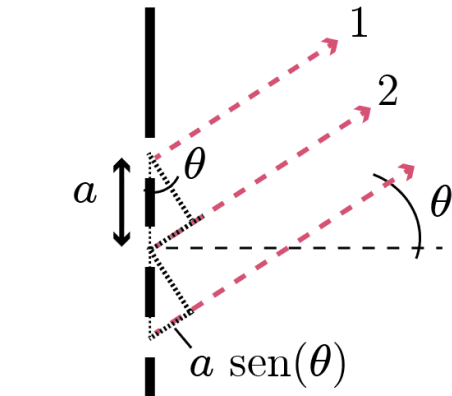
Cuando el número de ranuras iluminadas es muy grande (sólo se observan los máximos principales de interferencia dentro del lóbulo central de difracción). Los máximos principales en este caso se denominan *órdenes*.

Difracción por una red

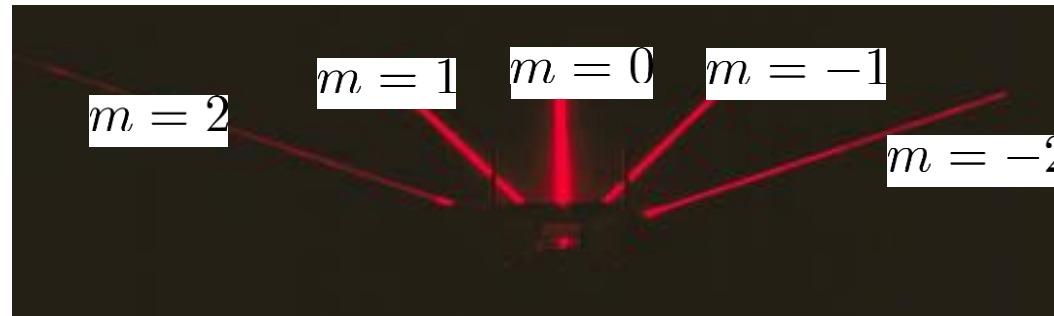
$$\sin(\theta) = m \frac{\lambda}{a}$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Si θ es pequeño (menos que 1 rad), $\sin(\theta) \approx y_m/D$



Máximos principales de interferencia:
órdenes de difracción

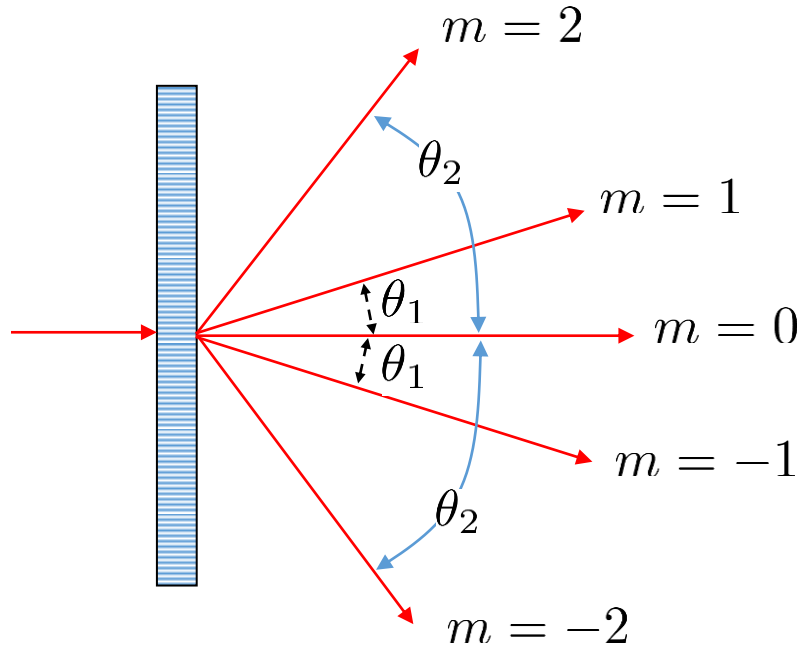


Número de órdenes difractados

Calcularemos el mayor orden de m posible.

$$\text{Dado que } \sin(\theta) \leq 1: \implies \sin(\theta) = m \frac{\lambda}{a} \leq 1$$

$$\implies m \leq \frac{a}{\lambda}$$

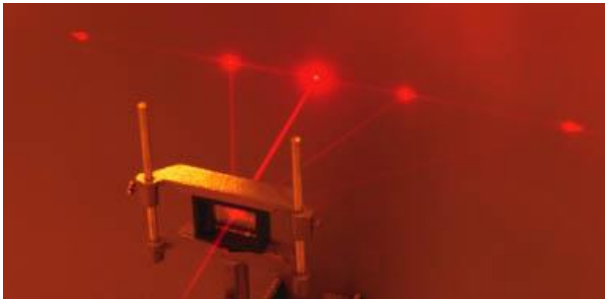


El máximo orden posible M es

$$M = \left\lfloor \frac{a}{\lambda} \right\rfloor$$

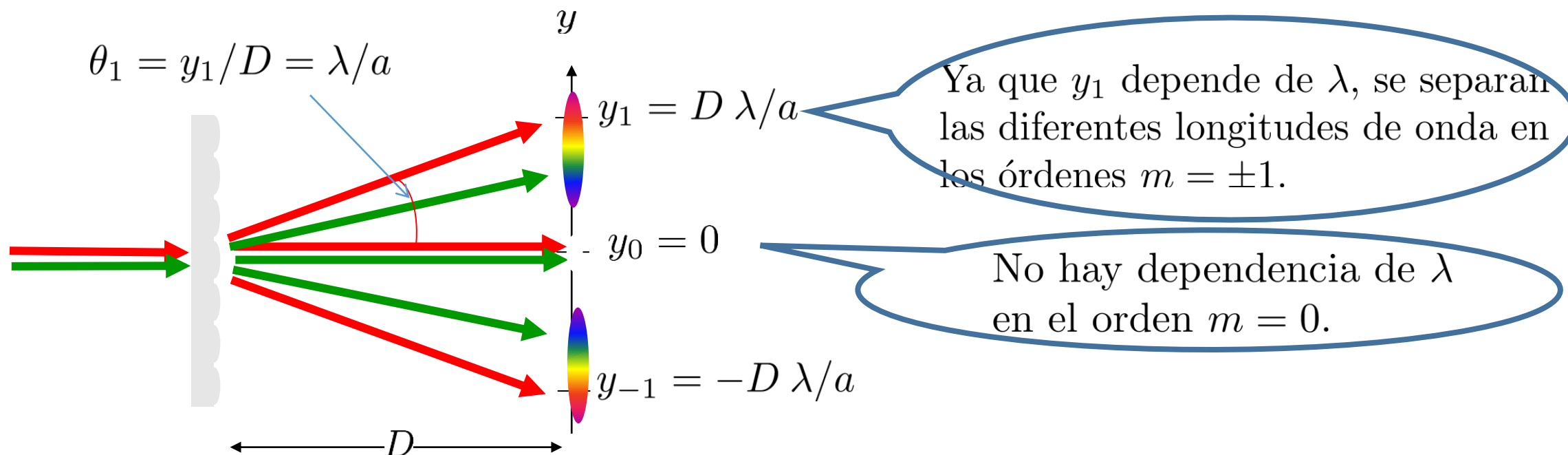
donde $\lfloor a/\lambda \rfloor$ es a/λ redondeada al entero inmediato inferior (valor entero de a/λ).

$$\text{Ejemplo: } \lfloor 3,5 \rfloor = 3$$



Órdenes de difracción para la luz policromática

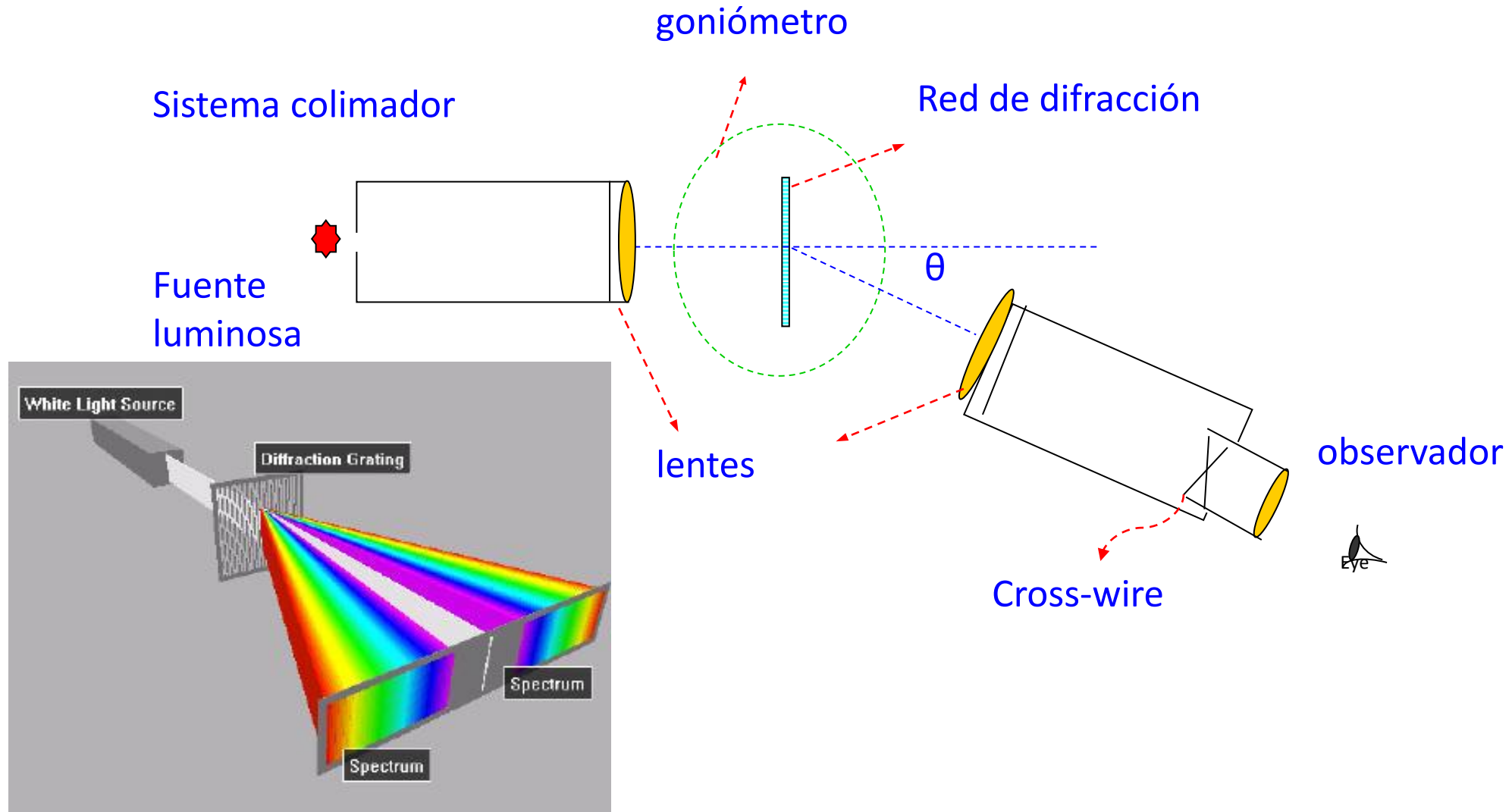
Dado que la posición angular de los órdenes de difracción depende de la longitud de onda, no coinciden sobre la pantalla los mismos órdenes para las diferentes longitudes de onda.



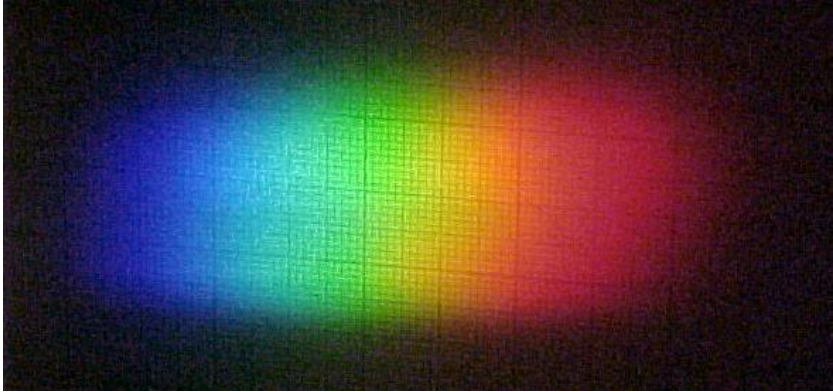
Cuanto mayor es la longitud de onda, mayor es la separación de las distintas longitudes de onda (colores) en los órdenes no nulos.

Las redes de difracción difractan diferentes longitudes de onda en diferentes direcciones, lo que permite medir los *espectros*.

Aplicación: uso de una red de difracción para medir longitudes de onda que emite una fuente de luz



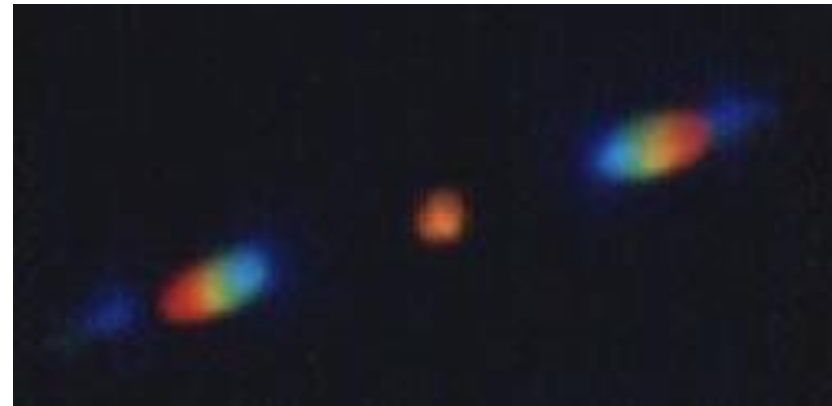
Espectros de fuentes lumínicas



Difracción luz blanca



Red de difracción colocada
delante de una llama de
aire metano



Espectro de una estrella -
Procyon