Intervalos de confianza

En los ejemplos anteriores, hemos estimado un parámetro que puede tomar cualquier valor dentro de un intervalo real, pero sabemos que es prácticamente imposible que nuestra estimación sea exactamente igual al parámetro que deseamos estimar. Por ese motivo, para dar una idea de la precisión de la estimación, se busca dar una estimación mediante un intervalo de confianza.

Definición:

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una m.a. de una distribución $F(\theta)$. Un **intervalo de confianza** de nivel $(1-\alpha)$, o intervalo de $100(1-\alpha)\,\%$ de confianza, es un intervalo de extremos aleatorios, $g_1(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ (extremo inferior) y $g_2(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ (extremo superior), que contiene al parámetro θ, con probabilidad $1-\alpha$, esto quiere decir que:

$$P\Big(g_1(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leq \theta \leq g_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)\Big) = 1-\alpha$$

Notación

Al intervalo de confianza que contiene al parámetro θ, con probabilidad $1-\alpha$, lo denotaremos como $IC_{(1-\alpha)}(\theta)$.

Observación:

Es deseable que el nivel de confianza sea lo mayor posible. Generalmente se utilizan los niveles 0.95 ó 0.99.

¿Cómo construimos un IC?

Los pasos a seguir son:

Paso 1. Se busca una función de la m.a. y del parámetro de interés, que llamaremos **función pivote**, cuya distribución no dependa de ningún parámetro desconocido y que en su expresión el único valor desconocido sea el parámetro de interés. Denotaremos a la función pivote como $h(X_1, X_2, \ldots, X_n, \theta)$.

Paso 2. Determinar un par de números reales a y b, tales que:

$$P\Big(a < h(X_1, X_2, \ldots, X_n, \theta) < b\Big) = 1-\alpha \tag{5.4}$$

Paso 3. Siempre que sea posible, a partir de (5.4), despejar los extremos aleatorios, finalmente obtendremos el intervalo deseado:

$$IC_{(1-\alpha)}(\theta) = \Big(g_1(X_1, X_2, \ldots, X_n), g_2(X_1, X_2, \ldots, X_n)\Big)$$

Veamos como se aplican estos pasos con un ejemplo.

Ejemplo 5.12

Consideremos la distribución de los niveles de colesterol en sangre de los hombres de cierta comunidad, hipertensos y fumadores. Se sabe que esta distribución es aproximadamente normal, se desconoce su media μ, pero se sabe que su desviación típica $\sigma = 46\ mg/100\ ml$, (aunque no se conoce μ se supone que σ es la misma que la de la población de adultos de sexo masculino de esa comunidad). Se desea conocer el nivel medio de colesterol en sangre de este grupo, entonces se seleccionan 12 hombres hipertensos y fumadores y se determina el nivel de colesterol para cada uno. El nivel de colesterol en sangre (medido en $mg/100\ ml$) para cada individuo es una v.a. X_i que tiene distribución normal con media μ (el valor que se desea conocer) y el σ antes mencionado.

Cuando se promedian los 12 valores observados, se obtiene un $\overline{x} = 217\ mg/100\ ml$. Notar que μ es la media "verdadera" desconocida de las observaciones X_i, mientras que $\overline{x}$ es la media de la muestra. Este valor es una estimación de μ.

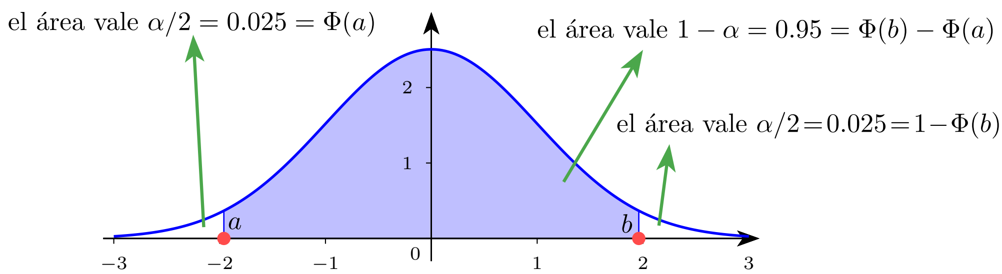
En este caso elegimos $1 - \alpha = 0.95$.

Paso 1. Como las X_i son una m.a. de una $N(\mu, \sigma^2)$, la función

$$Z = h(X_1, X_2, \ldots, X_n, \mu) = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

que tiene distribución $N(0, 1)$, será nuestra función pivote.

Paso 2. Para buscar los valores de a y b que verifiquen (5.4), debemos notar que la función pivote tiene distribución normal estándar, entonces gráficamente tenemos que:



Buscando en la Tabla, vemos que $\Phi(-1.96) = 0.025$ entonces en este ejemplo $a = -1.96$ y $b = 1.96$. Por lo tanto, tenemos que:

$$P\left(-1.96 < \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < 1.96\right) = 0.95$$

Paso 3. Despejando μ en la desigualdad de la probabilidad anterior, obtenemos:

$$P\left(\overline{X} - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.95,$$

quiere decir que el intervalo obtenido es:

$$IC_{(0.95)}(\mu) = \left(\overline{X} - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,, \overline{X} + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \tag{5.5}$$

Este intervalo de extremos aleatorios contiene al verdadero valor del parámetro μ con probabilidad 0.95, dicho de otro modo, es un intervalo de 95 % de confianza para μ. El intervalo aleatorio, se puede abreviar como $IC_{(0.95)}(\mu) = \overline{X} \pm 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

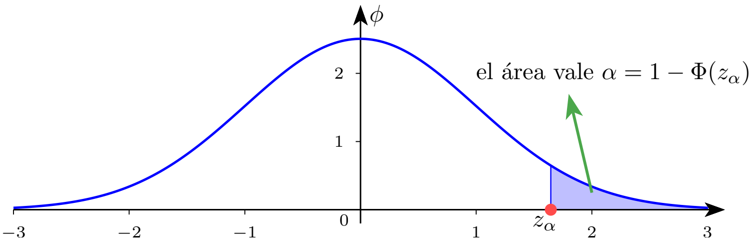
Utilizando los valores del ejemplo y reemplazando $\overline{X}$ por $\overline{x} = 217$, obtenemos:

$$\left(217 - 1.96 \times \frac{46}{\sqrt{12}}\,, 217 + 1.96 \times \frac{46}{\sqrt{12}}\right) = (191, 243)$$

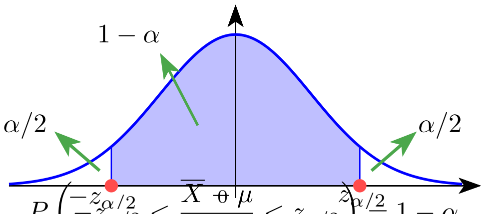
■

Notación

Sea $Z \sim N(0,1)$ y sea α un número real entre 0 y 1, se define el valor crítico, z_α, como el valor tal que $P(Z > z_\alpha) = \alpha$. Informalmente, es el punto sobre el eje x que verifica que el área a su derecha, bajo la curva de densidad, es igual a α. Gráficamente:



El procedimiento que utilizamos para construir un intervalo con un nivel 0.95 para la media de una distribución normal, se puede aplicar para cualquier nivel de confianza $1 - \alpha$, en este caso se reemplazan los valores -1.96 y 1.96 por los valores críticos $-z_{\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2}$, entonces:



$$P\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

y llegamos a:

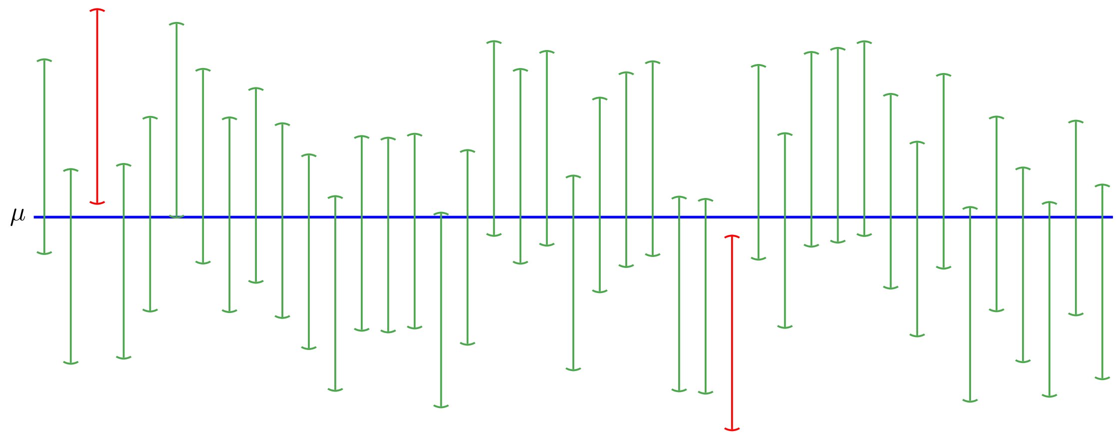
$$P\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\alpha/2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Finalmente al intervalo:

$$IC_{(1-\alpha)}(\mu) = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,, \overline{X} + z_{\alpha/2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \tag{5.6}$$

Interpretación de un intervalo de confianza

En el Ejemplo 5.12, decimos que el nivel de confianza es 0.95, dado que la probabilidad de que el intervalo aleatorio (5.5) contenga al parámetro es 0.95. Es importante recordar que al reemplazar los estadísticos por los valores de la muestra obtuvimos el intervalo de números reales (191, 243), éste ya no es aleatorio y no tiene sentido decir que contiene a μ con probabilidad 0.95. La interpretación correcta del "nivel de confianza" es la siguiente: supongamos, para el ejemplo, que se seleccionan muchas muestras aleatorias de 12 hombres de esa población y se construyen intervalos de confianza utilizando el mismo procedimiento. Con cada muestra de 12 observaciones tendremos un valor de $\overline{x}$ diferente, y en consecuencia un intervalo numérico diferente. Lo que podemos afirmar es que aproximadamente el 95 % de estos intervalos contendrán al verdadero valor μ, y naturalmente habrá aproximadamente un 5 % de dichos intervalos que no contendrán al verdadero valor μ. Entonces cuando construimos un sólo intervalo de nivel 0.95, podemos tener un 95 % de confianza de que ese intervalo sea uno de los que contienen a μ.



En esta gráfica se muestran el verdadero valor de μ (línea horizontal azul) y los $IC_{0.95}(\mu)$ obtenidos con 41 muestras de 12 hombres. Puede verse que algunos pocos (los intervalos en rojo) no contienen a μ.

Nivel de confianza, precisión y tamaño de la muestra en un intervalo de confianza

Como resulta lógico, es deseable que el nivel de confianza $1-\alpha$ sea lo mayor posible, pero el valor de z_α aumenta cuando elegimos valores más grandes para el nivel $1-\alpha$. Por ejemplo si queremos un nivel de 99 % los valores críticos son -2.58 y 2.58. Como consecuencia de ésto aumenta la longitud del intervalo. Esto significa que si se quiere más seguridad hay que pagarla con menos precisión. En el Ejemplo 5.12, si deseamos un nivel de 99 % de confianza, el intervalo será:

$$\left(217 - 2.58 \times \frac{46}{\sqrt{12}}, 217 + 2.58 \times \frac{46}{\sqrt{12}}\right) = (183, 251),$$

la longitud de este intervalo es $L = 251 - 183 = 68$, mientras que al nivel del 95 % la longitud fue de $L = 243 - 191 = 52$.

¿Qué deberíamos hacer si queremos tener un nivel de 99 %, pero mayor precisión, por ejemplo una longitud no mayor de 20? La longitud de (5.6) es $L = 2 \times z_{\alpha/2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, entonces reemplazando los valores, $z_{\alpha/2}$, σ y n, planteamos:

$$L = 2 \times 2.58 \times \frac{46}{\sqrt{n}} \leq 20$$

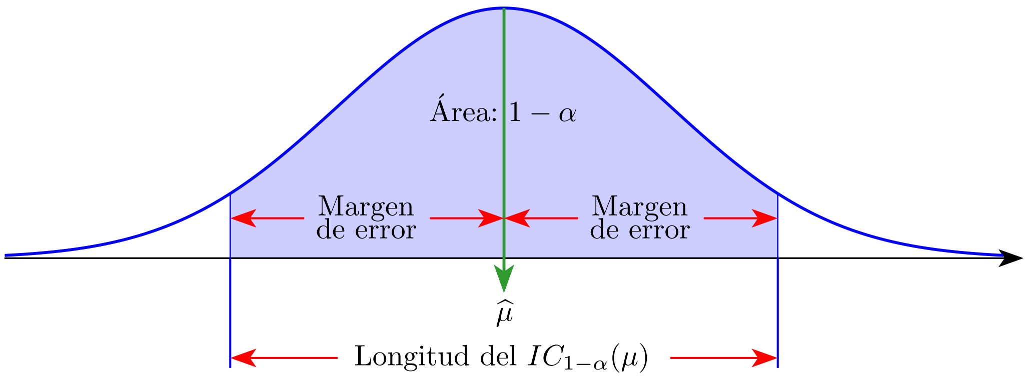
Podemos despejar:

$$\sqrt{n} \geq 2 \times 2.58 \times \frac{46}{20}$$

y obtenemos $n \geq 140.8494$. En consecuencia, necesitaríamos una muestra de por lo menos 141 hombres para lograr un intervalo de 99 % de confianza con longitud no mayor de 20.

En general, a mayor nivel de confianza se tiene menor precisión (un intervalo más largo), y la solución para conseguir el nivel deseado con la precisión deseada es aumentar el tamaño de la muestra.

Para el caso antes analizado, la relación entre longitud del intervalo y error de estimación se ve en la siguiente gráfica:



Intervalos para la media de una población normal con varianza conocida

Para el caso en que la m.a. tenga distribución normal con varianza conocida, como vimos en el Ejemplo 5.12, la función pivote es:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

que tiene distribución N(0,1). Y se obtiene el siguiente intervalo de confianza de nivel $1-\alpha$

$$IC_{1-\alpha}(\mu) = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

EJERCICIO 5.2

Se repitieron 4 mediciones del valor de creatinina en sangre en una muestra, con un método cuyo desvío estándar es 0.09 mg/dL. Siempre se supone que los errores de medición tienen distribución normal. Se obtuvo una media muestral de 1.03 mg/dL.

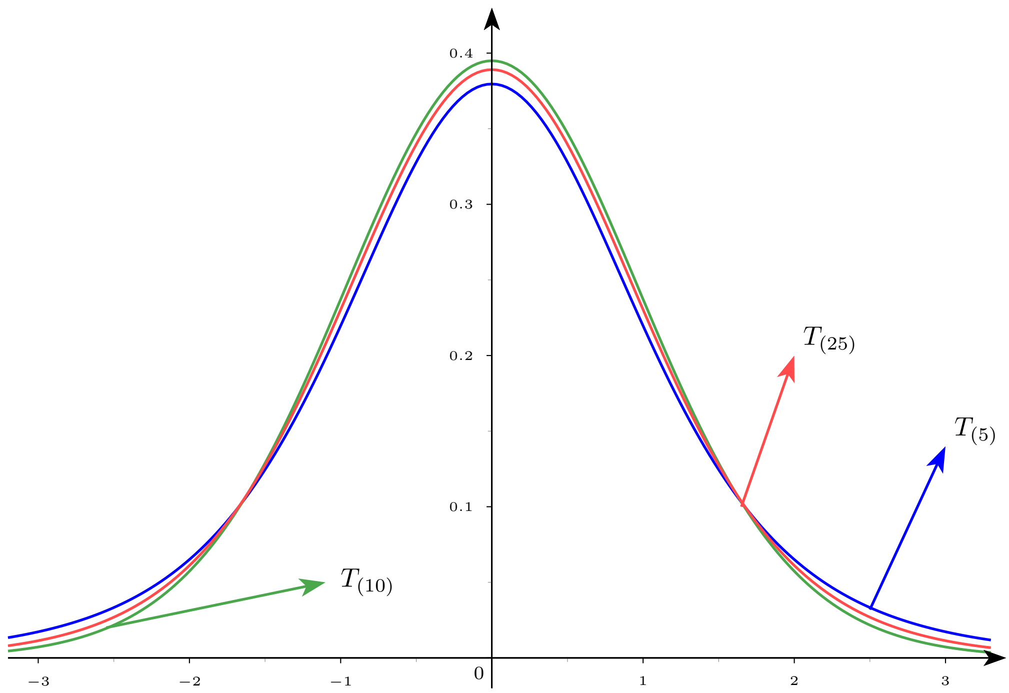
1. Calcule un intervalo de confianza del 97 % para el valor de creatinina de la muestra.
2. Calcule la longitud del intervalo de confianza obtenido.
3. ¿Cuántas repeticiones deberían hacerse para que la longitud del intervalo de confianza sea menor que 0.15?
4. Si con esos datos se calculó el intervalo de confianza (0.9418, 1.1182), determine cuál es el nivel de confianza de dicho intervalo.

Intervalos para la media de una población normal con varianza desconocida

En la mayoría de los problemas reales, aún cuando pueda suponerse que la distribución de los datos es aproximadamente normal, la media y la varianza son desconocidas. En ese caso, para construir un intervalo de confianza para la media, no podemos usar la función pivote que usamos anteriormente, porque esa función depende de σ que es desconocido. La función pivote que se debe usar es:

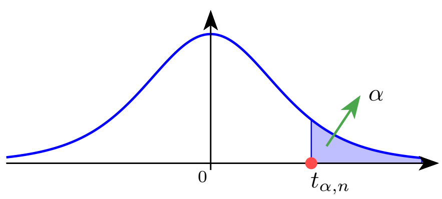
$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

Cuando las X_i son una m.a. de una distribución normal, T tiene distribución de Student con $n-1$ grados de libertad, que se denota como $T_{(n-1)}$. Esta distribución es simétrica, y existen tablas con los valores críticos para ciertos valores de grados de libertad. Las siguientes tres gráficas corresponden a las funciones de densidad para distintos valores de n:



Notación

Sea $T \sim T_{(n)}$ y sea $0 < \alpha < 1$, se define el valor crítico $t_{\alpha,n}$ como el valor que verifica $P(T > t_{\alpha,n}) = \alpha$.



Entonces, siguiendo el procedimiento antes descrito, obtenemos el siguiente intervalo de $100(1-\alpha)\,\%$ de confianza para parámetro μ

$$IC_{1-\alpha}(\mu) = \left(\overline{X} - t_{\alpha/2,n-1} \times \frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_{\alpha/2,n-1} \times \frac{S}{\sqrt{n}}\right) \tag{5.7}$$

Ejemplo 5.13

Consideremos las siguientes 7 mediciones de la concentración de ion nitrato (en g/ml) en una muestra de agua:

49 50 51 51 52 53 48

Se desea estimar el valor verdadero μ de la concentración, mediante un intervalo de confianza. Se supone que cada observación X_i es una v.a. con distribución normal con media μ, la que estimamos con la media muestral $\overline{x} = 50.57$.

Como cada X_i es una v.a. con distribución normal, consideramos la función pivote

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

que tiene distribución $T_{(n-1)}$. Reemplazando $\overline{X}$ y S por los valores calculados $\overline{x}$ y s, obtenemos un intervalo real. En nuestro caso, $\overline{x} = 50.57$, $s = 1.72$, y tomemos $1-\alpha = 0.95$ (el nivel de confianza es $95\,\%$), se busca en la tabla el valor correspondiente a grados de libertad $n-1=6$ y $\alpha/2 = 0.025$, que es $t_{0.025,6} = 2.4469$.

El intervalo es

$$\left(50.57 - 2.4469 \times \frac{1.72}{\sqrt{7}}, 50.57 + 2.4469 \times \frac{1.72}{\sqrt{7}}\right) = (48.98, 52.16)$$

EJERCICIO 5.3

Se midieron las tallas (en cm) a los 12 meses de edad de 16 niñas con hipotiroidismo congénito (HC). Se obtuvieron los siguientes valores $\overline{x} = 73.85$ y $s = 2.58$. Se puede suponer que la talla es una variable aleatoria con distribución normal.

1. Construya un intervalo de $98\,\%$ de confianza para la talla media a los 12 meses de edad de las niñas con HC.

2. Calcule la longitud del intervalo de confianza obtenido.

Intervalos de confianza para la media con muestras grandes

Para construir el intervalo de confianza (5.7) nos basamos en la suposición de que la distribución de la población era normal. Si ése no es el caso, la función pivote utilizada no tendría distribución de Student. Cuando no conocemos la distribución de los datos, es necesario usar algún tipo de aproximación. Recordemos el Teorema Central del Límite (TCL) que vimos en el Capítulo 4, según este teorema, si tenemos una m.a. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de cualquier distribución y n es suficientemente grande, la distribución de

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

se aproxima a una $N(0, 1)$. Se puede demostrar que si se reemplaza σ por S, la distribución también se aproxima a una $N(0, 1)$. Este resultado es el que usaremos cuando no conocemos la distribución de los datos. El procedimiento es el mismo, partimos de la función pivote

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

que, considerando que n es grande, tiene una distribución aproximadamente $N(0, 1)$. Entonces los valores críticos que elegimos son $-z_{\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2}$ y podemos afirmar que:

$$P\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}\right) \cong 1 - \alpha$$

Ejemplo 5.14

La contaminación de metales pesados de varios ecosistemas es una amenaza ambiental. Un artículo científico reporta que, para una muestra de $n = 56$ peces de la especie Mugil liza, la concentración media muestral de zinc en el hígado fue de $9.15\,\mu g/g$ y la desviación estándar muestral fue de $1.27\,\mu g/g$. Se desea estimar la concentración media poblacional de zinc en el hígado de esa especie de peces, mediante un intervalo de 95 % de confianza.

Como n es suficientemente grande, la distribución de

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

se aproxima a una $N(0, 1)$. Reemplazando con los datos del ejemplo, $\overline{x} = 9.15$, $s = 1.27$, y $z_{0.025} = 1.96$, obtenemos: $(8.82, 9.48)$, este intervalo tiene nivel de confianza aproximado de 95 %.

Ahora, si deseamos hallar el valor de n para el cual la longitud del intervalo del 95 % de confianza sea a lo sumo 0.5, el planteo sería:

$$2 \times z_{0.025} \times \frac{S}{\sqrt{n}} \leq 0.5 \tag{5.8}$$

Observemos que S también depende de n. En estos casos, se reemplaza el valor de S de alguna muestra previa que se tenga. En nuestro caso, en (5.8) nos quedará que

$$2 \times 1.96 \times \frac{1.27}{\sqrt{n}} \leq 0.5 \quad \Rightarrow \quad n \geq \left(\frac{2 \times 1.96 \times 1.27}{0.5}\right)^2 = 99.1379$$

Entonces, el valor de n debe ser al menos 100.

EJERCICIO 5.4

En un estudio nutricional se evaluó el consumo diario de calorías en un grupo de 40 adolescentes de sexo femenino. La media y desviación típica muestrales de esos valores, en kilocalorías por kilogramos, fueron $\overline{x} = 32.85$ y $s = 5.76$. No hay evidencias de que el consumo diario de calorías siga una distribución normal.

1. Construya un intervalo de aproximadamente 95 % de confianza para la media del consumo diario de calorías para la población de adolescentes.

2. Si se desea que la longitud del intervalo de confianza no sea mayor que 3, ¿cuántas adolescentes es necesario encuestar?

Intervalos de confianza con muestras grandes para una proporción

Sea X una v.a. con distribución binomial con parámetros n y p, por lo tanto:

$$E(X) = np \quad \text{y} \quad dt(X) = \sqrt{np(1-p)}$$

Ya vimos que $\widehat{p} = \dfrac{X}{n}$, la proporción observada en la muestra, es un estimador insesgado de p y cumple:

$$E(\widehat{p}) = p \quad \text{y} \quad dt(\widehat{p}) = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

Con el caso particular del TCL para la binomial, sabemos que la distribución de

$$\frac{\widehat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \quad \text{se aproxima a una } N(0,1)$$

También vale que la distribución de

$$\frac{\widehat{p} - p}{\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}} \quad \text{se aproxima a una } N(0,1)$$

Entonces eligiendo los valores críticos $-z_{\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2}$, se cumple:

$$P\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\widehat{p} - p}{\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}} < z_{\alpha/2}\right) \cong 1-\alpha$$

Luego, se puede obtener un intervalo de confianza para p con nivel aproximadamente $1-\alpha$ (para n grande), de la forma:

$$IC_{1-\alpha}(p) = \left(\widehat{p} - z_{\alpha/2} \times \sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}, \widehat{p} + z_{\alpha/2} \times \sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}\right)$$

y abreviado es:

$$IC_{1-\alpha}(p) = \widehat{p} \pm z_{\alpha/2} \times \sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}$$

Aclaración

En la práctica, el extremo inferior del intervalo podría dar negativo, en cuyo caso se lo hace igual a cero; de igual forma, si el extremo superior da mayor que 1, se lo hace igual a 1.

Ejemplo 5.15

Se realizó un estudio para detectar anemia en niños menores de 6 años en una comunidad rural. Se seleccionaron al azar 230 niños de esa comunidad y se encontraron 107 con anemia ($Hg < 11\, g/dl$). Se desea estimar mediante un intervalo de confianza el porcentaje de niños con anemia en esa comunidad. El número de casos, en la muestra de 230, con anemia es $x = 107$.

Definimos a la variable aleatoria X como la cantidad de niños menores de 6 años con anemia entre 230. Luego X es una v.a. con distribución binomial con parámetros 230 y p, luego consideramos la función pivote

$$\frac{\widehat{p} - p}{\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}} \quad \text{que se aproxima a una } N(0,1)$$

En nuestro caso, $\widehat{p} = 0.4652$, y si elegimos $1 - \alpha = 0.95$, es $z_{\alpha/2} = 1.96$, luego el intervalo resulta

$$(0.4007, 0.5297) \tag{5.9}$$

Conociendo el tamaño de la población, se puede construir un intervalo de confianza para la cantidad de individuos en esa población que tienen la característica que se está estudiando. En el Ejemplo 5.15, si se desea evaluar los costos de un programa de intervención para mejorar la salud comunitaria, interesa conocer el número de niños con anemia.

Llamemos N a la cantidad de niños menores de 6 años en la población, y M a la cantidad de niños con anemia, la verdadera proporción de niños con anemia se define como $p = M/N$, y de allí $M = Np$, entonces se puede estimar $\widehat{M} = \widehat{p}N$. En el ejemplo anterior, si $N = 1500$, $\widehat{M} = 0.4652 \times 1500 = 697.8$.

Para construir un intervalo de confianza para M se puede proceder como sigue: sabemos que

$$P\left(\widehat{p} - z_{\alpha/2} \times \sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}} < p < \widehat{p} + z_{\alpha/2} \times \sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}\right) \cong 1 - \alpha$$

entonces si multiplicamos por N:

$$P\left[N\left(\widehat{p} - z_{\alpha/2} \times \sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}\right) < Np < N\left(\widehat{p} + z_{\alpha/2} \times \sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}\right)\right] \cong 1 - \alpha$$

obtendremos el intervalo de nivel $1 - \alpha$ para M que es:

$$IC_{1-\alpha}(M) = \left(N\left(\widehat{p} - z_{\alpha/2} \times \sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}\right), N\left(\widehat{p} + z_{\alpha/2} \times \sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}\right)\right)$$

En el ejemplo, si a los extremos del intervalo (5.9) los multiplicamos por el valor de N, obtendremos $(601.05, 794.55)$, pero recordando que M es un número natural, finalmente obtenemos $(601, 795)$.

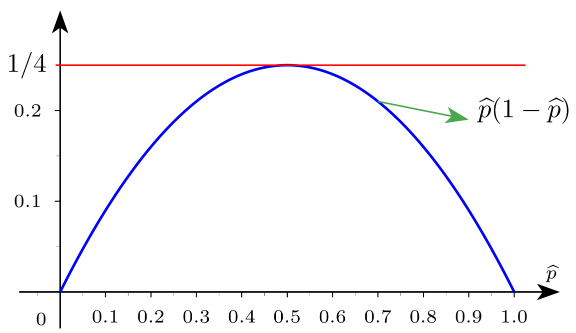
Nivel de confianza, precisión y tamaño de la muestra

En el Ejemplo 5.15, la longitud del intervalo para la proporción de niños con anemia, es 0.129. En general, la longitud es:

$$L = 2 \times z_{\alpha/2} \times \sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}} \tag{5.10}$$

Si se pretende estimar la proporción de niños anémicos con un error de estimación no mayor del 5 %, esto quiere decir que la longitud del intervalo no debe ser mayor que 0.10, antes de realizar el estudio se debería determinar cuántos niños o cuántas muestras de sangre se necesitarán analizar.

El problema en este caso, es que la longitud del intervalo (5.10) depende también de $\widehat{p}$ que no se conoce antes del estudio. Pero se puede ver fácilmente que para cualquier $\widehat{p}$ vale, $\widehat{p}(1-\widehat{p}) \leq 1/4$ como se muestra en la siguiente gráfica:



Entonces:

$$L = 2 \times z_{\alpha/2} \times \sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}} \leq 2 \times z_{\alpha/2} \times \sqrt{\frac{1/4}{n}} = \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}$$

Luego si queremos que $L \leq d$, debemos hacer $z_{\alpha/2}/\sqrt{n} \leq d$ y de allí podemos despejar el valor de n necesario para que la longitud del intervalo sea a lo sumo d.

Para el ejemplo anterior:

$$L = 2 \times 1.96 \times \sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}} \leq \frac{1.96}{\sqrt{n}} \leq 0.10$$

luego $n \geq (1.96/0.10)^2 = 384.16$ entonces si n es al menos 385, nos aseguramos que la longitud del intervalo será menor de 0.10.

EJERCICIO 5.5

Una de las metas de un programa de pesquisa neonatal de hipotiroidismo congénito, es lograr la detección de la enfermedad en los primeros días de vida, por ese motivo el protocolo de la pesquisa indica que la muestra de sangre para el análisis debe ser tomada en los primeros 5 días de vida. Se quiere construir un intervalo de confianza de nivel aproximado 0.95, para la proporción de casos donde no se cumple el protocolo, analizando los registros del programa.

1. Si se desea que la longitud del intervalo de confianza para esa proporción sea menor que 0.05, ¿cuántos registros se deberían observar?

2. Si se supone que dicha proporción es menor que 0.20, y se desea que la longitud del intervalo de confianza sea menor que 0.05, ¿cuántos registros se deberían observar?

3. Se eligieron al azar 300 registros de ese programa y se observó que en 54 casos la muestra había sido tomada después de los 5 días de vida. Construya el intervalo de confianza para la proporción de casos en que no se cumple el protocolo.

4. Si este programa se aplica a todos los recién nacidos en una región, donde hay aproximadamente 10000 nacimientos por año. Construya un intervalo de confianza para el número de niños a los que se les realiza la toma de muestra después del tiempo especificado.

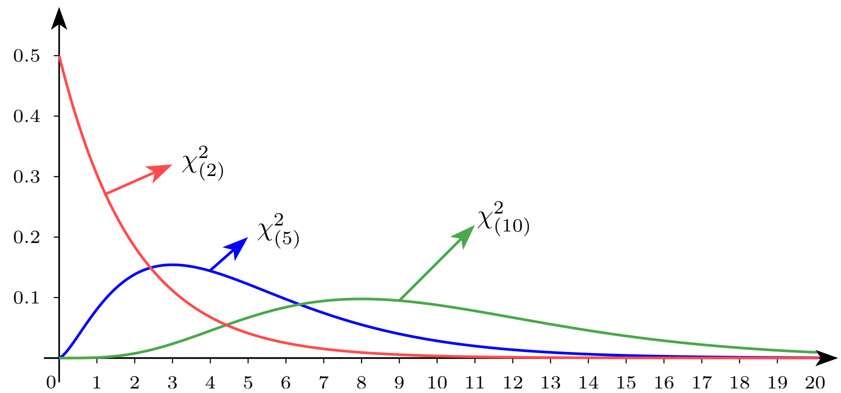
Intervalos para la varianza de una distribución normal

Hay situaciones en que interesa hacer inferencias sobre la varianza o la desviación típica, por ejemplo cuando queremos conocer la precisión de un método de medición.

Si tenemos una m.a. de una distribución normal y queremos calcular un intervalo de confianza para la varianza, la función pivote $h(X_1, X_2, \ldots, X_n, \sigma^2)$, que usaremos es:

$$V = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

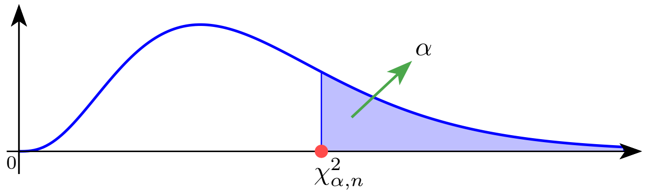
ya que puede demostrarse que, cuando las X_i tienen distribución $N(\mu, \sigma^2)$, V tiene distribución Chi-cuadrado con $n-1$ grados de libertad, $\chi^2_{(n-1)}$. Esta distribución no es simétrica, la densidad es no nula sólo para $x > 0$.



También existen tablas para los valores críticos de esta distribución, para diferentes valores de grados de libertad.

Notación

Sea $U \sim \chi^2_{(n)}$ y sea $0 < \alpha < 1$, se define el valor crítico $\chi^2_{\alpha,n}$ como el valor que verifica $P(U > \chi^2_{\alpha,n}) = \alpha$.



Como siempre, necesitamos un par de valores tales que V se encuentre entre ellos con probabilidad $1-\alpha$. Pero esta distribución no es simétrica, entonces deberemos elegir los valores $\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}$ y $\chi^2_{\alpha/2,n-1}$ tales que:

$$P\left(\chi^2_{1-\alpha/2,n-1} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2,n-1}\right) = 1-\alpha$$

y finalmente el intervalo:

$$IC_{1-\alpha}(\sigma^2) = \left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}\right)$$

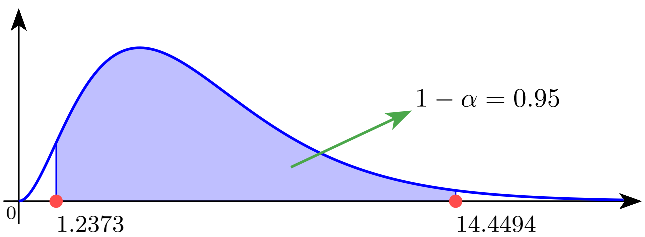
de extremos aleatorios. Como siempre, esto significa que el verdadero valor de σ^2 se encuentra en ese intervalo con probabilidad $1-\alpha$. Reemplazando el estimador S^2 por el valor de la muestra s^2, obtenemos un intervalo numérico.

Ejemplo 5.16

Volviendo a los datos del Ejemplo 5.13, consideramos la función pivote:

$$V = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

Cuando las X_i tienen distribución $N(\mu, \sigma^2)$, V tiene distribución Chi-cuadrado con $n-1$ grados de libertad. Luego tenemos que $s = 1.718$ y eligiendo $1-\alpha = 0.95$, los valores críticos los buscamos en la tabla de la Chi-cuadrado con $n-1 = 6$ grados de libertad, obteniendo $\chi^2_{0.025,6} = 14.4494$ y $\chi^2_{0.975,6} = 1.2373$



Finalmente, el intervalo para σ^2 es:

$$\left(\frac{6 \times 1.718^2}{14.4494}, \frac{6 \times 1.718^2}{1.2373}\right) = (1.23, 14.31)$$

Si deseamos un intervalo para σ, debemos sacar raíz cuadrada a cada extremo del intervalo anterior, así obtenemos $(1.11, 3.78)$.

■

EJERCICIO 5.6

Usando los datos del Ejercicio 5.3, calcular intervalos de confianza de nivel 0.95 para la varianza y el desvío estándar de la distribución de tallas en la población estudiada.

Referencias

Agresti, A. & Franklin, C. A. (2009). *Statistics: The Art and Science of learning from Data.* Pearson New International edition.

Altman, D. G. (1990). *Practical Statistics for Medical Research.* Published by Chapman & Hall.

Daniel, W. (2002). *Bioestadística: Base para el análisis de las ciencias de la salud.* Ed. Limusa Wiley.

Devore Jay, L. (2001). *Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias.* Ed. Books/Cole Publishing Company.

Dixon, W. & Massey, F. (1970). *Introducción al Análisis Estadístico.* México. Libros Mc Graw-Hill.

Maronna, R. (1995). *Probabilidad y Estadística Elementales para Estudiantes de Ciencias.* Buenos Aires.Ed. Exactas.

Mendenhall, W., Beaver, R. J. & Beaver, B. M. (2006). *Introducción a la Probabilidad y Estadística.* México. Cengage Learning Editores.

Ross, S. M. (1987). *Introduction to Probability and Statistics for Enginees and Scientists.* Published by John Wiley & Sons.

Wackerly, D. D., Mendenhall, W. & Scheaffer, R. L. (2010). *Estadística Matemática con aplicaciones.* México. Cengage Learning Editores.

Walpole, R. E. & Myers, R. H. (2007). *Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias.* México. Ediciones McGraw-Hill.