Introducción al Procesamiento de Señales
Curso 2024

Tema 3 - Sistemas Lineales

Santiago Rodríguez

Representación mediante impulsos

Representación de SVID en términos de impulsos

"Cualquier" secuencia se puede escribir como:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \tag{1}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k]x[n-k] \tag{2}$$

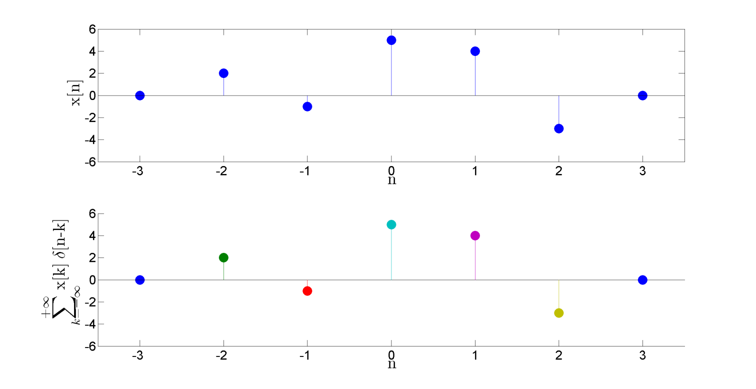
Recordar lo que significa la suma de (1):

$$x[n] = \ldots + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + \ldots$$

Representación de SVID en términos de impulsos

$$x[n] = \ldots + x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] +$$
$$+ x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + \ldots$$

o, gráficamente



Representación de SVID en términos de impulsos

Resumen: podemos "armar" una secuencia punto a punto

- SVID como combinación lineal de secuencias elementales
- Espacio de secuencias: se puede definir un *espacio de secuencias* infinito -contable- dimensional.
- Base: las deltas de Kronecker desplazadas son las secuencias elementales o funciones de base $\{\delta[n-k]\}_{k=-\infty}^{\infty}$
- Coordenadas: son los valores ($x[k]$) que multiplican a cada función de base

Representación de SVIC en términos de impulsos

Un paralelo formal con las SVID. Compare.

"Cualquier" función se puede escribir como:

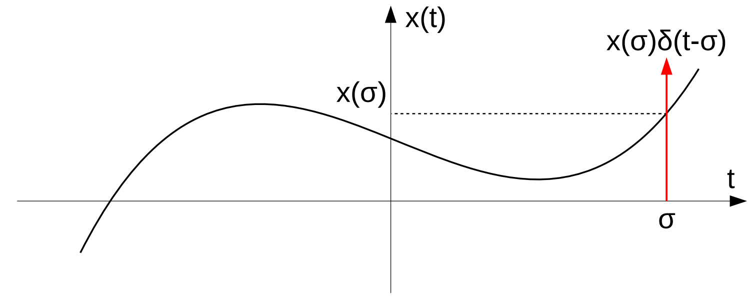
$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\sigma)\delta(t-\sigma)d\sigma$$

- La ecuación hermana
$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\sigma)\delta(\sigma)d\sigma$$
es una identidad trivial.
- Notar que $x(t) = x(t)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-\sigma)d\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-\sigma)d\sigma$ y lleva a pensar en $x(\sigma)\delta(t-\sigma) = x(t)\delta(t-\sigma)$; pero esta igualdad es sólo cierta en sentido distribucional
- ¡Ya no es posible interpretar como una suma de un número contable de términos!

Representación de SVIC en términos de impulsos

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\sigma)\delta(t-\sigma)d\sigma$$

De manera gráfica,



Representación de SVIC en términos de impulsos

Resumen: podemos “armar” una función punto a punto, pero de forma “no-numerable” y teniendo que recurrir a distribuciones (convénzase por qué).

- SVIC como combinación lineal de funciones elementales
- Espacio de funciones: se puede definir un *espacio de funciones* infinito dimensional.
- Base: no hay expectativas de que las deltas de Dirac desplazadas sean funciones de base. P.ej.: no se pueden multiplicar como para intentar alguna definición de ortogonalidad

Sistemas Lineales

Sistemas Lineales

Recordamos al operador que representa a un sistema:

$$\begin{cases} y(t) = \mathcal{H}\{x(\cdot)\}(t) & \text{VIC} \\ y[n] = \mathcal{H}\{x[\cdot]\}[n] & \text{VID} \end{cases}$$

Sistema Lineal: es homogéneo y aditivo.

O de manera equivalente, satisface el

Principio de Superposición: para 2 constantes cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ y dos entradas arbitrarias $x_1(t), x_2(t) \in \mathcal{C}_e$, se forma $x(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$. Sean $y_1(t) = \mathcal{H}\{x_1(\cdot)\}(t)$ e $y_2(t) = \mathcal{H}\{x_2(\cdot)\}(t)$, entonces $\mathcal{H}$ satisface el principio de superposición si cumple

$$y(t) = \mathcal{H}\{x(\cdot)\}(t) = ay_1(t) + by_2(t)$$

- Similar para sistemas discretos

Convolución discreta 1

Ingredientes:

- Sistemas lineales discretos (manejan SVID) con operador $\mathcal{H}$ que satisface el principio de superposición. Tanto para SLID como SLVD.
- Representación de SVID en términos de impulsos

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]\delta[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

- Aplicando $\mathcal{H}$, en la igualdad de la derecha se puede interpretar a $x[k]\delta[n-k]$ como una secuencia con un impulso en k de amplitud $x[k]$.

$$y[n] = \mathcal{H}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]\right\}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\mathcal{H}_k\{\delta[\cdot]\}[n]$$

Convolución discreta 2

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\mathcal{H}_k\{\delta[\cdot]\}[n] =$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\bar{h}[n,k]$$

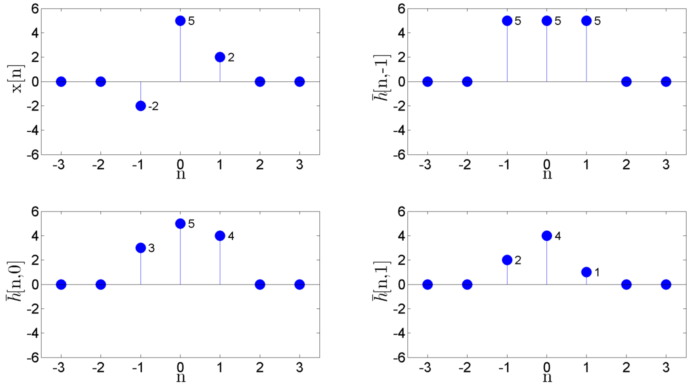
donde $\bar{h}[n,k]$ es la respuesta impulsional: la respuesta observada en el instante n a un impulso (de Kronecker) aplicado en el instante k.

Convolución discreta SVT

Ejemplo:

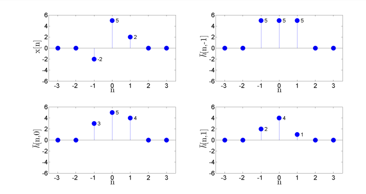
$x[n] = \sum_{k=-1}^{1} x[k]\delta[n-k]$ con $x[-1] = -2,\ x[0] = 5,\ x[1] = 2$

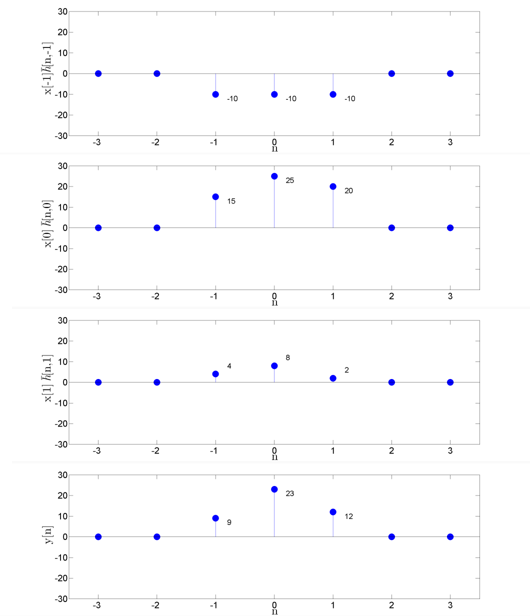
$$y[n] = \sum_{k=-1}^{1} x[k]\bar{h}[n,k]$$



Convolución discreta SVT

$$y[n] = \sum_{k=-1}^{1} x[k]\bar{h}[n,k]$$





Invarianza al desplazamiento

Si se trata de un SLID,

$$\bar{h}[n,k] = \bar{h}[n-1,k-1] = \bar{h}[n-k,0]$$

y *no es necesario* que la respuesta impulsional tenga 2 índices.

Basta con describir la *separación* entre el instante de observación de la salida y el de aplicación de la delta:

$$\bar{h}[n-k,0] \triangleq h[n-k]$$

Convención: dar la h como si se aplicara la δ en $n=0$.
Finalmente

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-m]h[m]$$

Observe el *cambio de variables* en la suma: $m = n-k$

Notación: SLID $\boxed{y[n] = \{x * h\}[n]}$

Convolución gráfica

Papeles deslizantes

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

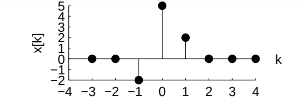
1. Dibujar $x[k]$ y dejar fija.
2. Obtener $h[\cdot]$.
3. Reflejar $h[\cdot]$.
4. Desplazar el origen de h al punto de observación n.
5. Multiplicar muestra a muestra y sumar, da $y[n]$.
6. Repetir 4) y 5) hasta tener todos los puntos deseados.

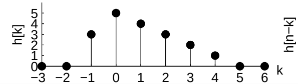
Notar: roles intercambiables de x y h

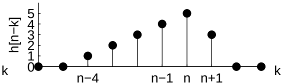
$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-m]h[m]$$

Convolución gráfica

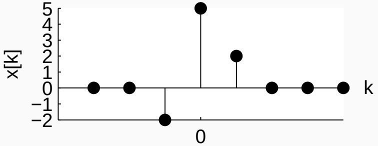
Ejemplo: *x* y *h*

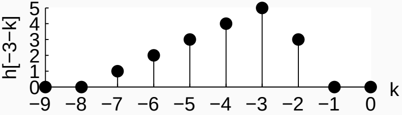






Por ejemplo, queremos $y[-3]$

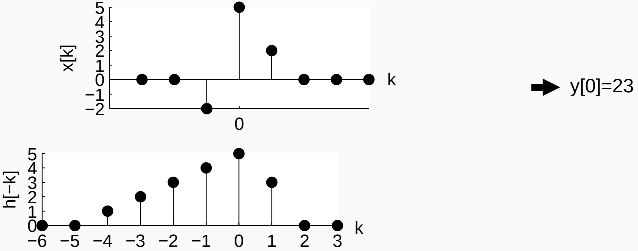




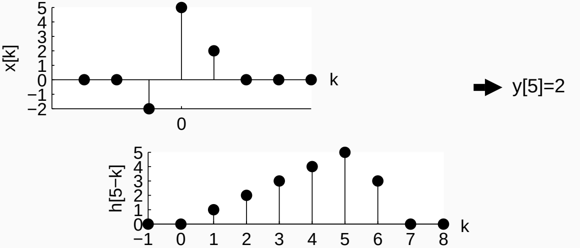
➡ y[−3]=0

Convolución gráfica – cont.

Si queremos $y[0]$



Si queremos $y[5]$



Convolución continua

Ingredientes:

- Sistemas lineales continuos (manejan SVIC) con operador $\mathcal{H}$ que satisface el principio de superposición. Tanto para SLIT como SLVT.
- Representación de SVIC en términos de impulsos

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\sigma)\delta(t-\sigma)d\sigma$$

- Aplicando $\mathcal{H}$ se puede interpretar a $x(\sigma)\delta(t-\sigma)$ como una señal con un impulso (Dirac) en σ de área $x(\sigma)$

$$y(t) = \mathcal{H}\left\{x(\cdot)\right\}(t) = \mathcal{H}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\sigma)\delta(t-\sigma)\,d\sigma\right\}(t)$$

- Más hipótesis adicionales, definiendo $\bar{h}(t,\sigma) = \mathcal{H}_\sigma\{\delta(\cdot)\}(t)$.

Convolución continua 2

Resulta:

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\sigma)\bar{h}(t,\sigma)d\sigma}$$

- SLIT: $\bar{h}(t,\sigma) \triangleq h(t-\sigma)$ luego

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\sigma)h(t-\sigma)d\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)x(t-\lambda)d\lambda$$

- Notación: SLIT $\boxed{y(t) = \{x * h\}(t)}$

SLIT - Convolución gráfica

Papeles deslizantes

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\sigma)h(t-\sigma)d\sigma$$

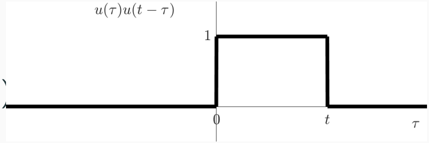
1. Dibujar $x(t)$ y dejar fija.
2. Obtener $h(\cdot)$.
3. Reflejar $h(\cdot)$.
4. Desplazar el origen de h al punto de observación t.
5. Multiplicar punto a punto e integrar, da $y(t)$.
6. Repetir 4) y 5) hasta tener todos los puntos deseados.

Notar: roles intercambiables de x y h

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma)x(t-\sigma)d\sigma$$

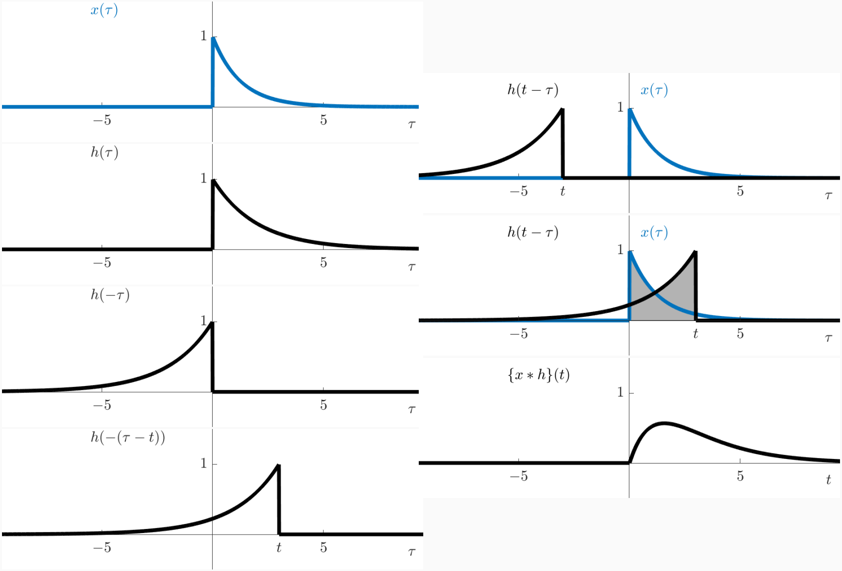
Ejemplo Convolución Continua SLIT

Ejemplo $x(t) = e^{-\alpha t}u(t) \qquad h(t) = e^{-\beta t}u(t)$



$$
\begin{aligned}
y(t) &= \{x * h\}(t) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\tau}u(\tau)e^{-\beta(t-\tau)}u(t-\tau)\,d\tau \\
&= \int_{0}^{t} e^{-\alpha\tau}e^{-\beta t}e^{\beta\tau}\,d\tau\,u(t) \\
&= e^{-\beta t}\int_{0}^{t} e^{-\alpha\tau}e^{\beta\tau}\,d\tau\,u(t) \\
&= \begin{cases} \frac{e^{-\alpha t}-e^{-\beta t}}{\beta-\alpha}u(t) & \alpha \neq \beta \\ e^{-\alpha t}tu(t) & \alpha = \beta \end{cases}
\end{aligned}
$$

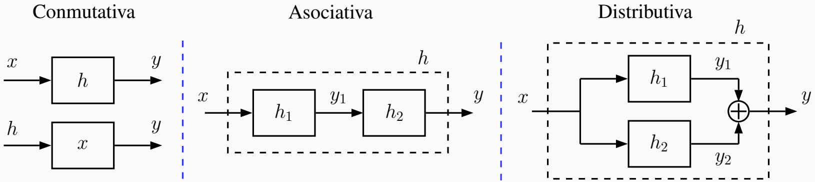
Ejemplo Convolución Continua SLIT



Propiedades de la Convolución

Válidas tanto para SLIT como SLID:

- **Conmutativa:** $y = \{x * h\} = \{h * x\}$. Intercambiabilidad entre respuesta impulsional y entrada.
- **Asociativa:**
  $y = \{x * h_1 * h_2\} = \{\underbrace{\{x * h_1\}}_{y_1} * h_2\} = \{x * \underbrace{\{h_1 * h_2\}}_{h}\}$.
  $h = h_1 * h_2 = h_2 * h_1$ es el sistema equivalente a uno serie.
- **Distributiva:** $y = \{x * \underbrace{\{h_1 + h_2\}}_{h}\} = \underbrace{\{x * h_1\}}_{y_1} + \{\underbrace{x * h_2\}}_{y_2}$.
  $h = h_1 + h_2$ es el sistema equivalente a un paralelo.



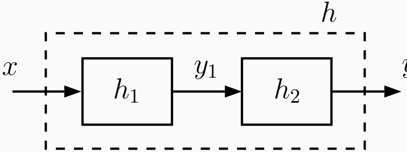
Propiedades de la Convolución

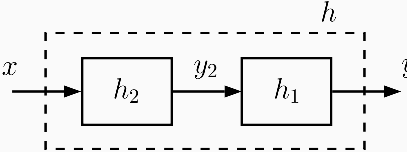
Válidas tanto para SLIT como SLID:

- **A partir de la propiedad Conmutativa:**

$$y = \{x * h_1 * h_2\} = \{\underbrace{\{x * h_1\}}_{y_1} * h_2\} = \{x * \underbrace{\{h_1 * h_2\}}_{h}\}$$

$$= \{x * \underbrace{\{h_2 * h_1\}}_{h}\} = \{\underbrace{\{x * h_2\}}_{y_2} * h_1\}$$





Propiedades de la Convolución

- En el caso discreto, si $x[n]$ es de largo N_x muestras, y $h[n]$ es de largo N_h muestras, $y[n]$ resultará de largo $N_y \leq N_x + N_h - 1$ muestras.
- En el caso continuo, si $x(t)$ tiene soporte de largo l_x, y $h(t)$ es de largo l_h, $y(t)$ resultará de soporte de largo $l_y \leq l_x + l_h$.

Analizar qué sucede en el caso $N_x = \infty$, o $N_h = \infty$. Ídem para el caso continuo. ¿Se le ocurre algún ejemplo de $N_x = \infty$, que resulte en N_y finito?

Se sugiere ver video de ¿Qué es la convolución?, disponible en *Material Adicional*.

Causalidad SLID

Aplicando $\delta[n]$ (impulso en cero); la respuesta es $h[n] = 0;\ n < 0$. El SLID es causal $\Leftrightarrow$ respuesta impulsional *unilateral a derecha*.

$$
\begin{aligned}
y[n] &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-m]h[m] = \sum_{m=0}^{\infty} x[n-m]h[m] \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[n-m]x[m] = \sum_{m=-\infty}^{n} h[n-m]x[m]
\end{aligned}
$$

Si además, $x[n]$ fuera unilateral a derecha ($x[n] \equiv 0;\ n < 0$)

$$
y[n] = \sum_{m=0}^{n} h[n-m]x[m]
$$

Causalidad SLIT

Aplicando $\delta(t)$ (impulso en cero); la respuesta es $h(t) = 0;\ t < 0$. El SLIT es causal $\Leftrightarrow$ respuesta impulsional *unilateral a derecha*.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\sigma)h(t-\sigma)d\sigma = \int_{0}^{\infty} h(\lambda)x(t-\lambda)d\lambda$$

Si además, $x(t)$ fuera unilateral a derecha ($x(t) \equiv 0;\ t < 0$)

$$y(t) = \int_{0}^{t} x(\sigma)h(t-\sigma)d\sigma = \int_{0}^{t} h(\lambda)x(t-\lambda)d\lambda$$

Estabilidad de SLID 1

Teorema: Un SLID es estable en sentido EA/SA sii su respuesta impulsional es *absolutamente sumable*; es decir

$$\text{existe } 0 < K_h < \infty \text{ tal que } \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| \leq K_h$$

Demostración: 1) "ida" y 2) "vuelta".

1) h abs. sumable es suficiente: Sea una entrada acotada por $0 < K_e < \infty$, o sea $|x[n]| \leq K_e$ para todo n. El módulo de la salida es

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]||h[n-k]| \leq$$

$$\leq K_e \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[n-k]| \right) \leq K_e K_h$$

tomando $K_y = K_e K_h$ la salida resulta acotada.

Estabilidad de SLID 2

2) h abs. sumable es necesaria: sistema EA/SA $\Rightarrow$ h es abs. sumable.

$\Leftrightarrow$ h NO es abs. sumable $\Rightarrow$ sistema NO es EA/SA.

Mostraremos una entrada acotada que, suponiendo que h NO es abs. sumable, dará $y[n]$ no acotada.

Sea $x[n] \triangleq h[-n]/|h[-n]|$ luego $|x[n]| \leq K_e = 1$ para todo n.

Observemos la salida en $n = 0$

$$\begin{aligned} y[0] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[0-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{h[-k]}{|h[-k]|} h[-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[-k]| \end{aligned}$$

que no está acotada por hipótesis. Hemos encontrado que la salida en el instante $n = 0$ no está acotada con una entrada acotada. Por lo tanto, el sistema no es estable EA/SA.

Estabilidad de SLIT 1

Paralelo a SLID:

Teorema: Un SLIT es estable en sentido EA/SA sii su respuesta impulsional es absolutamente integrable, es decir,

$$\text{existe un } 0 < K_h < \infty \text{ tal que } \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\, d\tau \leq K_h$$

Demostración: similar a la de SLID.

Repase las ideas de la demostración para SLID, haciendo ésta para SLIT.

¿Y si el sistema fuera VT (tanto C como D)?

Tipos de representación de SLIT y SLID

Ecuaciones diferenciales – 1

SLIT – Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de coeficientes constantes (EDOLCC)

Forma general:

$$\sum_{i=0}^{N} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^{M} b_j \frac{d^j x(t)}{dt^j}$$

- Demuestre linealidad e invarianza en el tiempo.
- Restricciones técnicas: diferenciabilidad de $x(t)$.
- Sistemas realizables: $N \geq M$.
- Condiciones iniciales CI $y(t_0),\ \frac{dy}{dt}(t_0),\ \frac{d^2 y}{dt^2}(t_0),\ \ldots,\ \frac{d^{N-1} y}{dt^{N-1}}(t_0)$

Ecuaciones diferenciales – 2

- La solución de las EDOLCC es $y(t) = y_{homogenea}(t) + y_{particular}(t)$
- $y_h \equiv 0$ si las CI son nulas.
- y_p es la solución particular, da el término forzado o sea la convolución de x con la respuesta impulsional h.
- Note que y_p incluye tanto régimen transitorio como régimen permanente.
- ¿Cómo obtenemos la respuesta impulsional $h(t)$? ¿Resolviendo con condiciones iniciales nulas?

$$\sum_{i=0}^{N} a_i \frac{d^i h(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^{M} b_j \delta^{(j)}(t)$$

- Usando la transformada $\mathcal{L}$ de Laplace: $H(s) = \mathcal{L}\{h\}(s)$.
- Transferencia $H(s)$ *racional*, es decir $\frac{b(s)}{a(s)}$ donde $a(\cdot)$, $b(\cdot)$ son polinomios en la variable de Laplace s.

Ecuaciones en diferencias – 1

SLID – Ecuaciones en diferencias lineales de coeficientes constantes (EDILCC)

Forma general:

$$\sum_{i=0}^{N} a_i y[n-i] = \sum_{j=0}^{M} b_j x[n-j]$$

- Demuestre linealidad e invarianza al desplazamiento.
- Condiciones iniciales CI $y[n_0-1],\ y[n_0-2],\ ...,\ y[n_0-N]$.
- La solución de las EDILCC es $y[n] = y_{homogenea}[n] + y_{particular}[n] = y_h[n] + y_p[n]$

Ecuaciones en diferencias – 2

- $y_h \equiv 0$ si las CI son nulas.
- y_p es la solución particular, da el término forzado o sea la convolución de x con la respuesta impulsional h.
- Note que y_p incluye tanto régimen transitorio como régimen permanente.
- La respuesta impulsional $h[n]$ se obtiene resolviendo

$$\sum_{i=0}^{N} a_i h[n-i] = \sum_{j=0}^{M} b_j \delta[n-j]$$

con CI nulas $h[-1] = 0,\ h[-2] = 0, \ldots,\ h[-N] = 0$.
- Ver que resolverla es muy “sencillo”!!

$$h[n] = \frac{1}{a_0}\left\{-\sum_{i=1}^{N} a_i h[n-i] + \sum_{j=0}^{M} b_j \delta[n-j]\right\}$$

Ecuaciones en diferencias – 3

- hagamos $a_0 = 1$ por simplicidad
- fácil, pero laborioso:

$$
\begin{aligned}
h[0] &= -0 + b_0 = b_0 \\
h[1] &= -a_1 b_0 + b_1 \\
h[2] &= -a_1(-a_1 b_0 + b_1) + b_2 = a_1^2 b_0 - a_1 b_1 + b_2 \\
&\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

  y así siguiendo...
- Veremos transformada $\mathcal{Z}$ y calcularemos $H(z) = \mathcal{Z}\{h\}(z)$.
- $H(z)$ resultará la transferencia discreta del SLID y resulta *racional*, es decir $\frac{b(z)}{a(z)}$ donde $a(\cdot)$, $b(\cdot)$ son polinomios en la variable z.

Ecuaciones de estado

1. Para SLIT

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = As(t) + Bx(t) \\ y(t) = Cs(t) + Dx(t) \end{cases}$$

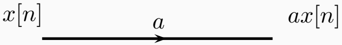
   - con CI $s(t) = s_0$.
   - $s \in \mathbb{R}^N$ y A es de $N \times N$, B de $N \times 1$ y C de $1 \times N$.

2. Para SLID

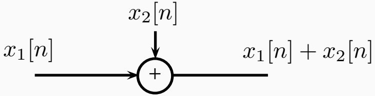
$$\begin{cases} s[n+1] = Fs[n] + Gx[n] \\ y[n] = Hs[n] + Dx[n] \end{cases}$$

   - con CI $s[0] = s_0$.
   - con $p = \max\{N, M\}$, $s \in \mathbb{R}^p$ y F es de $p \times p$, G de $p \times 1$ y H de $1 \times p$.

Diagramas en bloque - SLID – Elementos



bloque ganancia



bloque sumador

D: “delay” o retardo

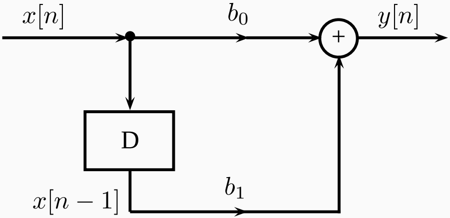
Diagramas en bloque - SLID – Ejemplo 1

Respuesta impulsional finita (en inglés FIR):

$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1]$$

Respuesta impulsional: $h[0] = b_0;\ h[1] = b_1;\ h[2] = 0$ y $h[n] = 0;\ n \geq 2$.

Diagrama en bloque:



Generalización: SLID con $N = 0$ y $M > 0$, se denota MA o de "promedios móviles" (en inglés)

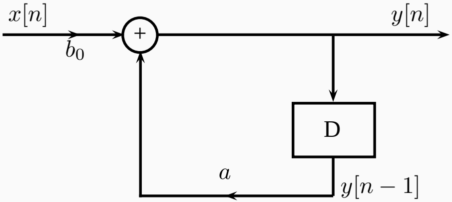
Diagramas en bloque - SLID – Ejemplo 2

Respuesta impulsional infinita (en inglés IIR):

$$y[n] - ay[n-1] = b_0 x[n]$$

Respuesta impulsional: $h[0] = b_0;\ h[1] = ab_0;\ h[2] = a^2 b_0$ y $h[n] = a^n b_0;\ n \geq 0$.

Diagrama en bloque:



Generalización: SLID con $N > 0$ y $M = 0$, se denota AR o "auto-regresivo"

Diagramas en bloque - SLID – Ejemplo 3

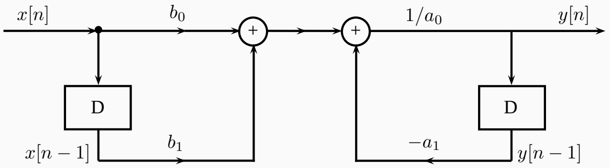
Respuesta impulsional infinita (IIR):

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; y[n] = \frac{1}{a_0}\left\{-a_1 y[n-1] + b_0 x[n] + b_1 x[n-1]\right\}$$

Resp. impulsional: $h[0] = \frac{b_0}{a_0};\; h[1] = \frac{-a_1 b_0}{a_0^2} + \frac{b_1}{a_0};\; h[2] = \dots$

Diagrama en bloque:



Generalización: SLID con $N > 0$ y $M > 0$, se denota ARMA o "autorregresivo – promedios móviles" (en inglés).

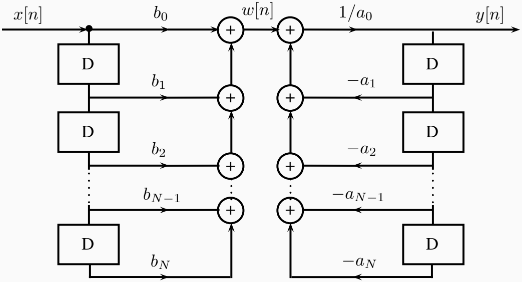
Diagramas en bloque - SLID – General 1

Respuesta impulsional infinita:

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left(-\sum_{i=1}^{M} a_i y[n-1] + w[n]\right)$$

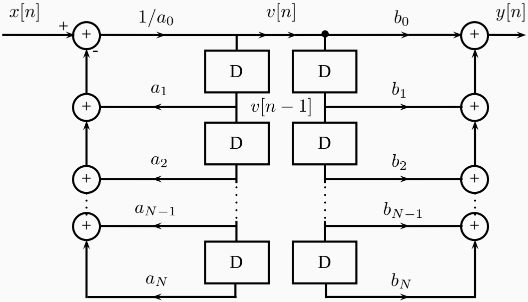
$$w[n] = \sum_{i=0}^{M} b_i x[n-1]$$

Diagrama en bloque: **Realización tipo I**



Diagramas en bloque - SLID – General 2

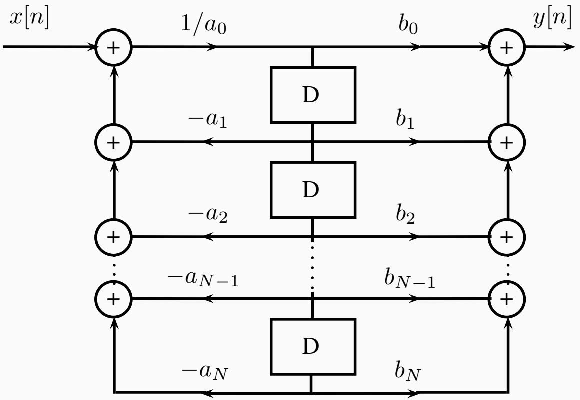
Usando conmutatividad



Los bloques correspondientes de cada columna llevan la misma señal: ¡juntémoslos!.

Diagramas en bloque - SLID – General 3

Realización tipo II



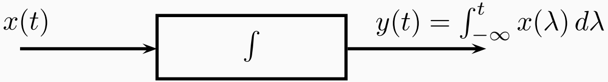
Menor número de retardos (estados). ¿Es el mínimo? (a Control Moderno).

Diagramas en bloque - SLIT

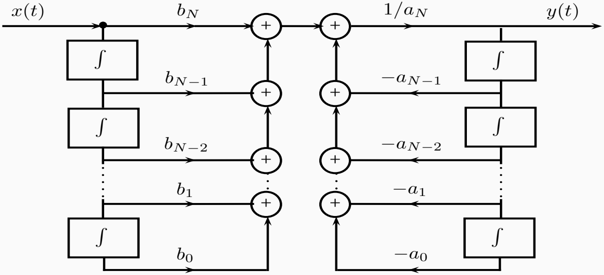
De manera totalmente similar con *sumas* y *multiplicadores* por constantes.

En lugar de retardos irían diferenciadores $\Rightarrow$ "ruidosos".

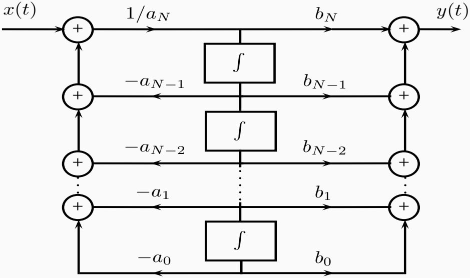
Se usan *integradores*



Diagramas en bloque - SLIT – General



(a) Realización directa tipo I.



(b) Realización directa tipo II.