Transformada de Fourier

(Las páginas 1 a 14 son de repaso y pueden omitirse)

Funciones seccionalmente continuas

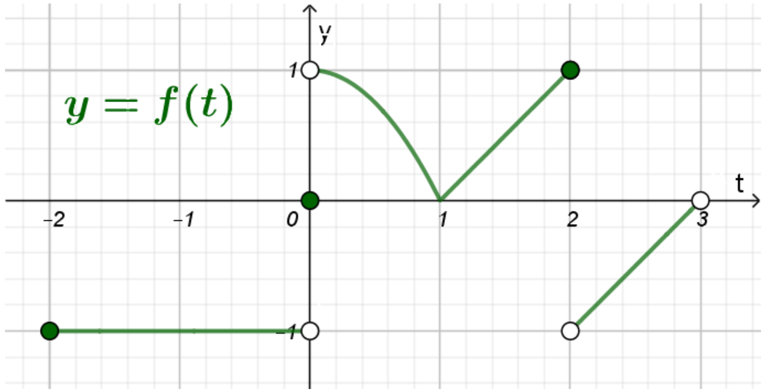
Una función $f(t)$ a (valores reales o complejos) se dice **seccionalmente continua en un intervalo** $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ si existe una partición $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ tal que:

- Para todo $k = 1,2, \dots, n-1$ la función f es continua en cada subintervalo (t_{k-1}, t_k)
- $\lim\limits_{t\to t_k^-} f(t)$ y $\lim\limits_{t\to t_k^+} f(t)$ existen para todo $k = 1,2, \dots, n-1$
- $\lim\limits_{t\to a^+} f(t)$ y $\lim\limits_{t\to b^-} f(t)$ existen

Notar que en cada $t_k \in (a,b)$ la función $f(t)$ presenta discontinuidad de tipo "salto finito", siendo el salto $\lim\limits_{t\to t_k^+} f(t) - \lim\limits_{t\to t_k^-} f(t)$

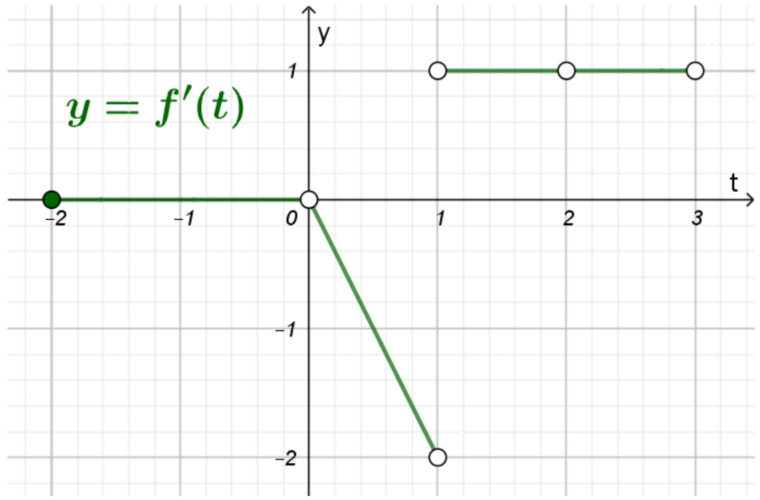
Ejemplo: La función $f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad -2 \le t < 0 \\ 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ 1 - t^2 & \text{si} \quad 0 < t < 1 \\ t - 1 & \text{si} \quad 1 \le t \le 2 \\ t - 3 & \text{si} \quad 2 < t < 3 \end{cases}$ es seccionalmente continua en $[-2,3]$. En efecto, es discontinua en un número finito de puntos ($t = 0$, $t = 2$, $t = 3$) y se verifica:

- $\lim\limits_{t\to(-2)^+} f(t) = -1$
- $\lim\limits_{t\to 0^-} f(t) = -1$ $\qquad \lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = 1 \quad$ (f salta $1 - (-1) = 2$ unidades)
- $\lim\limits_{t\to 2^-} f(t) = 1$ $\qquad \lim\limits_{t\to 2^+} f(t) = -1 \quad$ (f salta $(-1) - 1 = -2$ unidades)
- $\lim\limits_{t\to 3^-} f(t) = 0$



La derivada $f'(t)$ de la función anterior también es seccionalmente continua en en $[-2,3]$. En efecto,

$$f'(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad -2 \leq t < 0 \\ -2t & \text{si} \quad 0 < t < 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 < t < 2 \\ 1 & \text{si} \quad 2 < t < 3 \end{cases}$$



posee un número finito de discontinuidades en $[-2,3]$ ($t = 0$, $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$) y se verifica:

- $\lim\limits_{t \to (-2)^-} f'(t) = 0$
- $\lim\limits_{t \to 0^-} f'(t) = 0 \qquad \lim\limits_{t \to 0^+} f'(t) = 0 \quad (f' \text{ salta } 0 - 0 = 0 \text{ unidades})$
- $\lim\limits_{t \to 1^-} f'(t) = -2 \qquad \lim\limits_{t \to 1^+} f'(t) = 1 \qquad (f' \text{ salta } 1 - (-2) = 3 \text{ unidades})$
- $\lim\limits_{t \to 2^-} f'(t) = 1 \qquad \lim\limits_{t \to 2^+} f'(t) = 1 \qquad (f' \text{ salta } 1 - 1 = 0 \text{ unidades})$
- $\lim\limits_{t \to 3^-} f'(t) = 1$

Serie de Fourier (repaso de tema visto en Matemática C)

Toda función de la forma $a_n\cos(\omega_n t) + b_n\mathrm{sen}(\omega_n t)$ describe un movimiento armónico simple (MAS) de frecuencia angular ω_n.

Una serie trigonométrica es una de la forma $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + b_n\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\right]$, cuyos coeficientes a_n, b_n son constantes. Cuando converge, su suma necesariamente es una función periódica de período $T = 2L$. El estudio de tales series surgió a partir del tratamiento de Fourier de un problema de conducción del calor.

Recíprocamente, sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función periódica de período $T = 2L$. ¿Es posible representar $f(t)$ como superposición de armónicos simples? El siguiente teorema establece condiciones suficientes para que eso ocurra.

Teorema de la serie de Fourier

Si $f(t)$ y $f'(t)$ son seccionalmente continuas en $[-L, L]$ entonces para todo $t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + b_n\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\right] \quad (*)$$

con coeficientes dados por:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt \ ; \ \ n = 0,1,2,\dots$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt \ ; \ \ n = 1,2,\dots$$

Equivalentemente, la versión compleja establece que:

$$\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2} = vp \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\left(\frac{2\pi n}{T}\right)t}, \forall t \in \mathbb{R}$$

con coeficientes dados por:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-i\left(\frac{2\pi n}{T}\right)t}dt \ ; \ n \in \mathbb{Z}$$

<u>Notas</u>:

- Las hipótesis $f(t)$ y $f'(t)$ seccionalmente continuas en $[-L, L]$ se conocen como las **condiciones de Dirichlet** para $f(t)$ en $[-L, L]$. Son condiciones suficientes pero no necesarias para que $f(t)$ esté representada por su serie de Fourier en $[-L, L]$. Una condición más débil para ello es que $f(t)$ sea seccionalmente continua y tenga un número finito de máximos y mínimos en dicho intervalo. Una condición aún más débil es que $f(t)$ sea una función de variación acotada en dicho intervalo.
- La convergencia de la serie de Fourier significa que tanto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)$ como $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right)$ son convergentes.
- Cada término de la serie de Fourier $a_n\cos(\omega_n t) + b_n \mathrm{sen}(\omega_n t)$ es un MAS con frecuencia $\omega_n = n\frac{2\pi}{2L} = n\omega$, múltiplo (entero) de una "frecuencia fundamental" $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2L}$ Aumentando n se van originando el primer armónico, el segundo, el tercero, etc. (sus frecuencias van aumentando, duplicando, triplicando, etc, la frecuencia fundamental). Sus contribuciones a la superposición quedan cuantificadas por los coeficientes a_n y b_n.

Obtención de la forma compleja de la serie de Fourier

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)+b_n\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\right]=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\left(\frac{e^{in\pi t/L}+e^{-in\pi t/L}}{2}\right)+b_n\left(\frac{e^{in\pi t/L}-e^{-in\pi t/L}}{2i}\right)\right]=$$
$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{a_ne^{in\pi t/L}+a_ne^{-in\pi t/L}}{2}\right)-i\left(\frac{b_ne^{in\pi t/L}-b_ne^{-in\pi t/L}}{2}\right)\right]$$
$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n-ib_n}{2}\right)e^{\frac{in\pi t}{L}}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n+ib_n}{2}\right)e^{-\frac{in\pi t}{L}}$$

Definamos $c_0=\frac{a_0}{2}$ y para $n\in\mathbb{N}$: $c_n=(a_n-ib_n)/2$; $c_{-n}=(a_n+ib_n)/2$. Entonces:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)+b_n\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\right]=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_ne^{\frac{in\pi t}{L}}+\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}e^{-\frac{in\pi t}{L}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{in\pi t/L}$$

donde

$$c_0=\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2}\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(t)dt=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(t)dt$$
$$c_n=\frac{1}{2}(a_n-ib_n)=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt-\frac{i}{2L}\int_{-L}^{L}f(t)\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(t)\left(\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)-i\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\right)dt=$$
$$=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(t)\left(\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)-i\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\right)dt=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(t)e^{-\frac{in\pi t}{L}}dt$$
$$c_{-n}=\frac{1}{2}(a_n+ib_n)=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt+\frac{i}{2L}\int_{-L}^{L}f(t)\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(t)\left(\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\right)dt=$$
$$=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(t)\left(\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\right)dt=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(t)e^{\frac{in\pi t}{L}}dt$$

Integrales impropias en la recta real (repaso de Matemática B)

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función integrable en todo intervalo acotado de la recta real (una condición suficiente para ello es que f sea seccionalmente continua en tales intervalos).

- Si $\lim_{L\to\infty} \int_a^L f(t)dt$ existe (es un número real), se dice que $f(t)$ es integrable en $[a, \infty)$ y se define la integral impropia de $f(t)$ en dicho intervalo como:

$$\int_a^\infty f(t)dt = \lim_{L\to\infty} \int_a^L f(t)dt$$

  También decimos que la integral $\int_a^\infty f(t)dt$ es convergente. Caso contrario, la integral es divergente.

- Si $\lim_{L\to\infty} \int_{-L}^b f(t)dt$ existe (es un número real), se dice que $f(t)$ es integrable en $(-\infty, b]$ y se define la integral impropia de $f(t)$ en dicho intervalo como:

$$\int_{-\infty}^b f(t)dt = \lim_{L\to\infty} \int_{-L}^b f(t)dt$$

  También decimos que la integral $\int_{-\infty}^b f(t)dt$ es convergente. Caso contrario, la integral es divergente.

- Si ambas integrales $\int_{-\infty}^a f(t)dt$ y $\int_a^\infty f(t)dt$ son convergentes, se dice que la integral impropia $\int_{-\infty}^\infty f(t)dt$ es convergente y en ese caso:

$$\int_{-\infty}^\infty f(t)dt = \int_{-\infty}^a f(t)dt + \int_a^\infty f(t)dt$$

  En cualquier otro caso la integral de la izquierda es divergente.

- Se llama **valor principal** de la integral impropia $\int_{-\infty}^\infty f(t)dt$ al siguiente límite, cuando existe: $vp\int_{-\infty}^\infty f(t)dt = \lim_{L\to\infty} \int_{-L}^L f(t)dt$

Observación:

- Si la integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$ converge entonces su valor principal existe y se verifica:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = vp\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$$

En efecto, supongamos que $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$ converge, así queque $\int_{-\infty}^{0} f(t)dt$ y $\int_{0}^{\infty} f(t)dt$ son ambas convergentes. Es decir,

- los dos siguientes existen:

$$A = \lim_{L\to\infty}\int_{-L}^{0} f(t)dt \qquad\qquad B = \lim_{L\to\infty}\int_{-L}^{0} f(t)dt$$

- se verifica $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = A + B$

Entonces también existe:

$$vp\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = \lim_{L\to\infty}\int_{-L}^{L} f(t)dt = \lim_{L\to\infty}\left(\int_{-L}^{0} f(t)dt + \int_{-L}^{0} f(t)dt\right) = \lim_{L\to\infty}\int_{-L}^{0} f(t)dt + \lim_{L\to\infty}\int_{-L}^{0} f(t)dt = A + B$$

Luego,

$$vp\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = A + B = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$$

- Puede ocurrir que el valor principal exista y la integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$ sea divergente. Por ejemplo: $f(t) = t$

$$\int_{0}^{\infty} f(t)dt = \int_{0}^{\infty} t\,dt = \lim_{L\to\infty}\int_{0}^{L} t\,dt = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{2}t^2\Big|_{0}^{L} = \lim_{L\to\infty}\frac{1}{2}L^2 = \infty$$

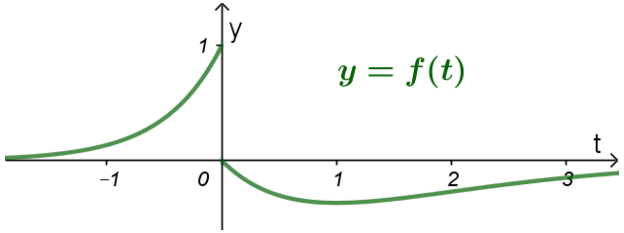
$$vp\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = \mathrm{vp}\int_{-\infty}^{\infty} t\,dt = \lim_{L\to\infty}\int_{-L}^{L} t\,dt = \lim_{L\to\infty}\frac{1}{2}t^2\Big|_{-L}^{L} = 0$$

Convergencia absoluta

Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función integrable en todo intervalo acotado de la recta real (una condición suficiente para ello es que f sea seccionalmente continua en tales intervalos).

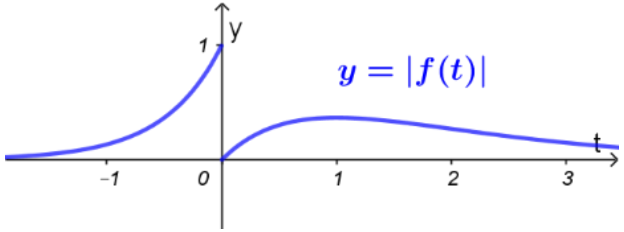
Se dice que f es **absolutamente integrable en** $\mathbb{R}$ si la siguiente integral impropia es convergente:

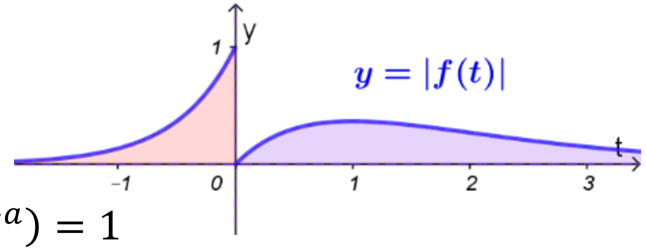
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt$$



Ejemplo: $f(t) = \begin{cases} e^{2t} & \text{si} \quad t < 0 \\ -te^{-t} & \text{si} \quad t \geq 0 \end{cases}$ es absolutamente integrable en $\mathbb{R}$.

En efecto, $|f(t)| = \begin{cases} e^{2t} & \text{si} \quad t < 0 \\ te^{-t} & \text{si} \quad t \geq 0 \end{cases}$





Luego, $\displaystyle\int te^{-t}dt \overset{\substack{u=t\,,\,dv=e^{-t}dt \\ du=dt\,,v=-e^{-t}}}{\overbrace{=}} -te^{-t} + \int e^{-t}dt = -te^{-t} - e^{-t} + C = -(t+1)e^{-t} + C$

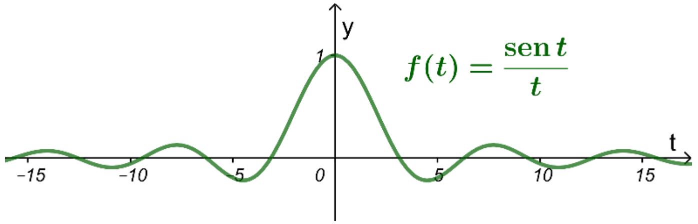
$$\int_{-\infty}^{0} |f(t)|dt = \int_{-\infty}^{0} e^{t}dt = \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{0} e^{t}dt = \lim_{a\to\infty} e^{t}\Big|_{-a}^{0} = \lim_{a\to\infty} (1 - e^{-a}) = 1$$

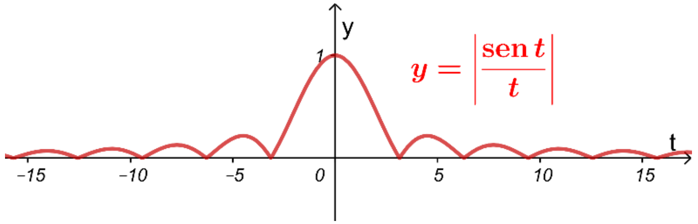
$$\int_{0}^{\infty} |f(t)|dt = \int_{0}^{\infty} te^{-t}dt = \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} te^{-t}dt = \lim_{b\to\infty} (-(t+1)e^{-t})\Big|_{0}^{b} = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{b+1}{e^{b}} + 1\right) = 1$$

Entonces,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt = \int_{-\infty}^{0} |f(t)|dt + \int_{0}^{\infty} |f(t)|dt = 1 + 1 = 2 < \infty$$

Ejemplo: $f(t) = \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}$ es integrable en $\mathbb{R}$ pero no absolutamente. En efecto:





- en la clase de teoría de residuos mostramos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt = \pi$$

- Veamos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right| dt = \infty \ \ (\text{diverge})$$

Debido a que el integrando es función par, basta mostrar que $\int_0^\infty \left|\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right| dt$ diverge.

Para $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$:

$$\int_\pi^{n\pi} \left|\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right| dt = \int_\pi^{n\pi} \frac{|\operatorname{sen} t|}{t} dt = \sum_{k=2}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\operatorname{sen} t|}{t} dt \overset{\substack{\text{si } 0<t\leq k\pi: \\ \frac{1}{t}\geq\frac{1}{k\pi}}}{\overbrace{\geq}} \sum_{k=2}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\operatorname{sen} t|}{k\pi} dt = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\operatorname{sen} t| dt =$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\pi} \int_0^\pi \operatorname{sen} t \, dt = \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k\pi} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = \frac{2}{\pi}(S_n - 1)$$

donde $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ es la n-ésima suma parcial de la serie armónica $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ (divergente). Entonces por criterio de comparación la serie $\sum_{k=2}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\operatorname{sen} t|}{t} dt$ diverge. Es decir, $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\operatorname{sen} t|}{t} dt = \infty$. O sea, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_\pi^{n\pi} \left|\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right| dt = \infty$.

Luego,

$$\int_0^\infty \left|\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right| dt = \lim_{n\to\infty} \left(\overbrace{\int_0^\pi \left|\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right| dt}^{\text{finita}} + \int_\pi^{n\pi} \left|\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right| dt \right) = \infty$$

El siguiente resultado es importante.

Teorema (convergencia absoluta de integrales): Si $f(t)$ es absolutamente integrable en $\mathbb{R}$ entonces es integrable en $\mathbb{R}$ y se verifica:

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt$$

Teorema (comparación para integrales): Si $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones continuas en $\mathbb{R}$ tales que $0 \leq f(t) \leq g(t)$ para todo t, entonces si $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt$ es convergente también lo es $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$ en cuyo caso se cumple: $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt$

Ejemplo: La integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(t)}{t^2+1} dt$$

es convergente pues

$$0 \leq f(t) = \frac{\operatorname{sen}^2(t)}{t^2+1} \leq \frac{1}{t^2+1} = g(t)$$

y es fácil ver que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2+1} dt = \pi$$

Integrales impropias: funciones pares y funciones impares

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es **función par** si para todo $t \in \mathbb{R}$ se cumple: $f(-t) = f(t)$. En el caso de funciones a valores reales, esto significa que la gráfica de f es simétrica respecto del eje de ordenadas. En el caso de funciones a valores complejos la función es par si y sólo si lo son sus partes real e imaginaria. Si la función par $f(t)$ es integrable en $[-L, L]$ entonces:

$$\int_{-L}^{0} f(t)dt \underbrace{=}_{\substack{u=-t\\ du=-dt}} \int_{L}^{0} \underbrace{f(-u)}_{=f(u)}(-du) = -\int_{L}^{0} f(u)du = \int_{0}^{L} f(u)du$$

$$\int_{-L}^{L} f(t)dt = \int_{-L}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{L} f(t)dt = \int_{0}^{L} f(u)du + \int_{0}^{L} f(t)dt = 2\int_{0}^{L} f(t)dt$$

Si $f(t)$ es par:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt \ \text{ converge } \ \Leftrightarrow \ \int_{0}^{\infty} f(t)dt \ \text{ converge}$$

En efecto,

- Si $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$ converge entonces por definición $\int_{0}^{\infty} f(t)dt$ y $\int_{-\infty}^{0} f(t)dt$ convergen.
- Si $\int_{0}^{\infty} f(t)dt$ converge, por definición $\lim\limits_{L\to\infty} \int_{0}^{L} f(t)dt$ existe. Y dado que $\int_{-L}^{0} f(t)dt = \int_{0}^{L} f(t)dt$, entonces $\lim\limits_{L\to\infty} \int_{-L}^{0} f(t)dt$ existe. Pero esto significa que $\int_{-\infty}^{0} f(t)dt$ converge. Por lo tanto, $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$ converge.

Además, si $f(t)$ es par y $\int_0^\infty f(t)dt$ converge, se tiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{\infty} f(t)dt = \int_{0}^{\infty} f(t)dt + \int_{0}^{\infty} f(t)dt = 2\int_{0}^{\infty} f(t)dt$$

$$vp\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = \lim_{L\to\ \infty}\int_{-L}^{L} f(t)dt = \lim_{L\to\ \infty} 2\int_{0}^{L} f(t)dt = 2\int_{0}^{\infty} f(t)dt$$

Así que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = vp\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 2\int_{0}^{\infty} f(t)dt$$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es **función impar** si para todo $t \in \mathbb{R}$ se cumple: $f(-t) = -f(t)$. En el caso de funciones a valores reales, esto significa que la gráfica de f es simétrica respecto al origen En el caso de funciones a valores complejos la función es impar si y sólo si lo son sus partes real e imaginaria.

Si la función par $f(t)$ es integrable en $[-L, L]$ entonces:

$$\int_{-L}^{0} f(t)dt \underbrace{=}_{\substack{u=-t \\ du=dt}} \int_{L}^{0} \underbrace{f(-u)}_{=-f(u)} (-du) = \int_{L}^{0} f(u)du = -\int_{0}^{L} f(t)dt$$

$$\int_{-L}^{L} f(t)dt = \int_{-L}^{0} f(u)du + \int_{0}^{L} f(t)dt = -\int_{0}^{L} f(u)du + \int_{0}^{L} f(t)dt = 0$$

Si $f(t)$ es impar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt \ \text{ converge } \Leftrightarrow \int_{0}^{\infty} f(t)dt \ \text{ converge}$$

En efecto,

- Si $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$ converge entonces por definición $\int_{0}^{\infty} f(t)dt$ y $\int_{-\infty}^{0} f(t)dt$ convergen.
- Si $\int_{0}^{\infty} f(t)dt$ converge, por definición $\lim_{L\to\infty} \int_{0}^{L} f(t)dt$ existe. Y dado que $\int_{-L}^{0} f(t)dt = -\int_{0}^{L} f(t)dt$, entonces $\lim_{L\to\infty} \int_{-L}^{0} f(t)dt$ existe. Pero esto significa que $\int_{-\infty}^{0} f(t)dt$ converge. Por lo tanto, $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$ converge.

Además, si $f(t)$ es impar y $\int_0^\infty f(t)dt$ converge, se tiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{\infty} f(t)dt = -\int_{0}^{\infty} f(t)dt + \int_{0}^{\infty} f(t)dt = 0$$

$$vp\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = \lim_{L \to \infty}\int_{-L}^{L} f(t)dt = \lim_{L \to \infty}\left(\int_{-L}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{L} f(t)dt\right) = \lim_{L \to \infty}\left(-\int_{0}^{L} f(t)dt + \int_{0}^{L} f(t)dt\right) = 0$$

Así que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = vp\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 0$$

<u>Observación</u>: $f(t) = t$ es función impar tal que

- $\int_0^\infty f(t)dt = \lim_{L\to\infty}\int_0^L t\,dt = \lim_{L\to\infty}\frac{1}{2}L^2 = \infty$ (divergente). Por lo tanto $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$ diverge.
- $vp\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = \lim_{L\to\infty}\int_{-L}^{L} t\,dt = \lim_{L\to\infty}\left(\frac{1}{2}L^2 - \frac{1}{2}L^2\right) = 0$

En este caso la integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$ no existe pero sí su valor principal: $vp\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 0$

De la serie a la integral de Fourier

¿puede realizarse un descomposición en armónicos simples para una función no periódica $f(t)$ definida en $\mathbb{R}$ en lugar de en un intervalo acotado?

Consideremos una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ no periódica tal que en cada intervalo acotado $[-L, L]$ satisface las condiciones de Dirichlet. Podemos aproximar f mediante la función periódica $f_L(t)$ de período $2L$ que vale $f(t)$ en el intervalo $(-L, L)$. Es claro que $\lim_{L\to\infty} f_L(t) = f(t)$.

Además, $f_L(t)$ satisface las condiciones de Dirichlet en $[-L, L]$. Entonces,

$$\frac{f_L(t^+) + f_L(t^-)}{2} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{i\left(\frac{2\pi n}{2L}\right)t}, \forall t \in \mathbb{R}$$

donde

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f_L(t) e^{-i\left(\frac{2\pi n}{2L}\right)t} dt = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t) e^{-i\left(\frac{2\pi n}{2L}\right)t} dt$$

Sean: $s_n = \frac{n}{T} = \frac{n}{2L}$; $\Delta s_n = s_n - s_{n-1} = \frac{n}{T} - \frac{n-1}{T} = \frac{1}{T} = \frac{1}{2L}$

Entonces,

$$\frac{f_L(t^+) + f_L(t^-)}{2} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{i2\pi s_n t} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \left(\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t) e^{-i\left(\frac{2\pi n}{2L}\right)t} dt\right) e^{i2\pi s_n t} =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \left(\Delta s_n \int_{-L}^{L} f(t) e^{-i2\pi s_n t} dt\right) e^{i2\pi s_n t} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \left(\int_{-L}^{L} f(t) e^{-i2\pi s_n t} dt\right) e^{i2\pi s_n t} \Delta s_n$$

Definamos la función $F_L: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ por:

$$F_L(s) = \int_{-L}^{L} f(t)e^{-i2\pi st}dt$$

Entonces,

$$\frac{f_L(t^+) + f_L(t^-)}{2} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \left(\int_{-L}^{L} f_L(t)e^{-i2\pi s_n t}dt \right) e^{i2\pi s_n t}\Delta s_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} F_L(s_n)e^{i2\pi s_n t}\Delta s_n$$

Observar que:

- $F(s) = \lim_{L\to\infty} F_L(s) = \lim_{L\to\infty} \int_{-L}^{L} f(t)e^{-i2\pi st}dt = vp \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi st}dt$
- $\sum_{n=-N}^{N} F_L(s_n)e^{i2\pi s_n t}\Delta s_n$ es una suma de Riemann de $F_L(s)e^{i2\pi st}$. Cuando $L \to \infty$ la norma de la partición es $\Delta s_n = \frac{1}{2L} \to 0$ e intuitivamente (sin ser rigurosos): $\sum_{n=-N}^{N} F_L(s_n)e^{i2\pi s_n t}\Delta s_n$ tenderá a $vp \int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{i2\pi st}ds$.

Suponiendo $F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi st}dt$ convergente, resulta la siguiente representación integral de f:

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = vp \int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{i2\pi st}ds \quad , \forall t \in \mathbb{R}$$

donde

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi st}dt$$

Transformada de Fourier

Dada $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, la **transformada de Fourier de $\boldsymbol{f}$** es la función a valores complejos $F(s)$ de la variable real s definida por:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi st}dt$$

Para algunos valores de s puede converger y para otros divergir.

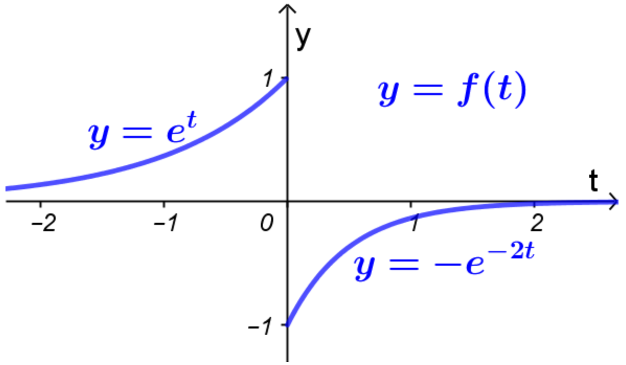
Recordar que la integral anterior existe (converge) si y sólo si las dos integrales siguientes convergen:

$$\int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-i2\pi st}dt \quad ; \quad \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi st}dt$$

Comentarios

- los valores de f en un número finito de puntos de la recta real no influyen sobre su transformada de Fourier (de hecho, incluso f puede no estar definida en una cantidad finita de puntos).
- en diversas aplicaciones la función $f(t)$ es una "señal" (podría representar una señal de audio, un voltaje, etc) que depende del tiempo t, por lo que nos referiremos a $f(t)$ como una función definida en el **dominio del tiempo**. Y la variable s representa una frecuencia, por lo que decimos que $F(s)$ está definida en el dominio de las frecuencias.

Ejemplo 1: $f(t) = \begin{cases} e^t & \text{si} \quad t < 0 \\ -e^{-2t} & \text{si} \quad t > 0 \end{cases}$



Su transformada de Fourier es:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi st}dt = \int_{-\infty}^{0} e^t e^{-i2\pi st}dt + \int_{0}^{\infty} (-e^{-2t})e^{-i2\pi st}dt$$

- $\int_{-\infty}^{0} e^t e^{-i2\pi st}dt = \lim\limits_{c\to\infty}\left(\int_{-c}^{0} e^{(1-i2\pi s)t}dt\right) = \lim\limits_{c\to\infty} \frac{e^{(1-i2\pi s)t}}{1-i2\pi s}\Bigg|_{-c}^{0} = \lim\limits_{c\to\infty}\left(\frac{1}{1-i2\pi s} - \frac{e^{-(1-i2\pi s)c}}{1-i2\pi s}\right) = \frac{1}{1-i2\pi s}$

pues:

$$\left|e^{-(1-i2\pi s)c}\right| = \left|e^{-c}e^{i2\pi sc}\right| = e^{-c} \underbrace{\longrightarrow}_{c\to\infty} 0 \quad \text{así que} \lim_{c\to\infty} e^{-(1-i2\pi s)c} = 0$$

- $\int_{0}^{\infty} (-e^{-2t})e^{-i2\pi st}dt = \lim\limits_{c\to\infty}\left(-\int_{0}^{c} e^{-(2+i2\pi s)t}dt\right) = \lim\limits_{c\to\infty} \frac{e^{-(2+i2\pi s)t}}{2+i2\pi s}\Bigg|_{0}^{c} = \lim\limits_{c\to\infty}\left(\frac{e^{-(2+i2\pi s)c}}{2+i2\pi s} - \frac{1}{2+i2\pi s}\right) = -\frac{1}{2+i2\pi s}$

pues:

$$\left|e^{-(2+i2\pi s)c}\right| = \left|e^{-2c}e^{-i2\pi sc}\right| = e^{-2c} \underbrace{\longrightarrow}_{c\to\infty} 0 \quad \text{así que} \lim_{c\to\infty} e^{-(2+i2\pi s)c} = 0$$

Luego,

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(s) = \frac{1}{1-i2\pi s} - \frac{1}{2+i2\pi s}$$

Antitransformada de Fourier

Dada una función $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, la **antitransformada de Fourier de $\boldsymbol{F}$** o transformada inversa de Fourier se define por:

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(s)\} = vp\int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{i2\pi st}ds$$

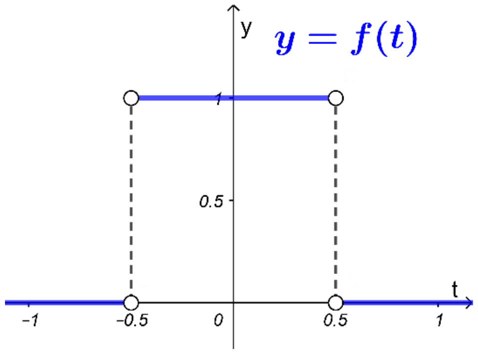
En la práctica $F(s)$ representará un “espectro de frecuencias” (por ejemplo de una señal temporal), por lo que nos referiremos al dominio de la variable s como **dominio de la frecuencia**.

Recordar que :

$$vp\int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{i2\pi st}ds = \lim_{c\to\infty}\int_{-c}^{c} F(s)e^{i2\pi st}ds$$

Como veremos, bajo condiciones muy generales la antitransformada de Fourier permite “recuperar” en cierto sentido una función $f(t)$ a partir de su transformada de Fourier $F(s)$. Veámoslo con un ejemplo.

Ejemplo 2: $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |t| < 1/2 \\ 0 & \text{si} \quad |t| > 1/2 \end{cases}$



Calculemos su transformada de Fourier $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(s)$:

- Si $s \neq 0$:

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi st}dt = \int_{-1/2}^{1/2} 1e^{-i2\pi st}dt = -\frac{e^{-i2\pi st}}{i2\pi s}\Bigg|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = -\frac{e^{-i\pi s}}{i2\pi s} + \frac{e^{i\pi s}}{i2\pi s} =$$

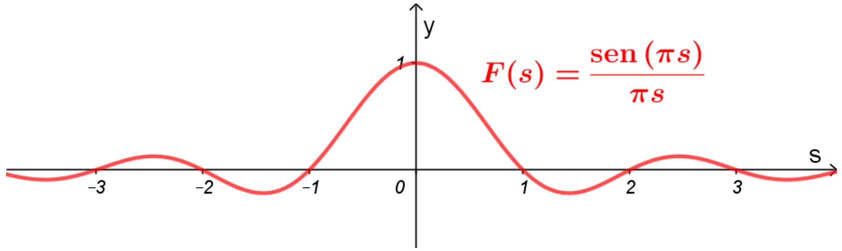
$$= \frac{1}{\pi s}\frac{e^{i\pi s} - e^{-i\pi s}}{2i} = \frac{\operatorname{sen}(\pi s)}{\pi s}$$

- Si $s = 0$:

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi 0t}dt = \int_{-1/2}^{1/2} 1dt = 1$$

Luego,

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(s) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(\pi s)}{\pi s} & \text{si} \quad s \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad s = 0 \end{cases}$$



OPTATIVO: Calculemos ahora la antitransformada de esta $F(s)=\frac{\text{sen}(\pi s)}{\pi s}$ (notar que $F(s)$ es función par):

Cuando enunciemos el teorema de Fourier veremos cómo obtener $\mathcal{F}^{-1}\{F(s)\}$ teniendo en cuenta que $F(s)=\mathcal{F}\{f(t)\}$ con $f(t)$ la función del ejemplo 2.

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(s)\}=vp\int_{-\infty}^{\infty}F(s)e^{i2\pi st}ds=\lim_{L\to\infty}\int_{-L}^{L}F(s)e^{i2\pi st}ds=$$

$$=\lim_{L\to\infty}\left(\int_{-L}^{L}\underbrace{F(s)\cos(2\pi st)}_{\text{par}}ds+i\int_{-L}^{L}\underbrace{F(s)\text{sen}(2\pi st)}_{\text{impar}}ds\right)=$$

$$=\lim_{L\to\infty}2\int_{0}^{L}F(s)\cos(2\pi st)ds=2\int_{0}^{\infty}F(s)\cos(2\pi st)ds=2\int_{0}^{\infty}\frac{\text{sen}(\pi s)}{\pi s}\cos(2\pi st)ds$$

Empleando la identidad $\text{sen}(\alpha)\cos(\beta)=\frac{1}{2}\big(\text{sen}(\alpha+\beta)+\text{sen}(\alpha-\beta)\big)$

resulta:

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(s)\}=\int_{0}^{\infty}\frac{1}{\pi s}\big(\text{sen}(\pi s+2\pi st)+\text{sen}(\pi s-2\pi st)\big)ds=\int_{0}^{\infty}\left(\frac{\text{sen}((2t+1)\pi s)}{\pi s}-\frac{\text{sen}((2t-1)\pi s)}{\pi s}\right)ds$$

Aplicando teoría de residuos hemos probado con anterioridad que:

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(u)}{u}\,du = \frac{\pi}{2} = \int_{-\infty}^0 \frac{\operatorname{sen}(u)}{u}\,du$$

Luego, si $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$:

- Si $a > 0$:

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(as)}{s}\,ds = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(u)}{(u/a)}\frac{du}{a} = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(u)}{u}\,du = \frac{\pi}{2}$$

- Si $a < 0$:

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(as)}{s}\,ds = \int_0^{-\infty} \frac{\operatorname{sen}(u)}{(u/a)}\frac{du}{a} = -\int_{-\infty}^0 \frac{\operatorname{sen}(u)}{u}\,du = -\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(u)}{u}\,du = -\frac{\pi}{2}$$

Por lo tanto:

- Si $t < -\frac{1}{2}$ entonces $2t+1$ y $2t-1$ son ambos negativos. Entonces:

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}((2t+1)\pi s)}{\pi s}\,ds = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}((2t+1)\pi s)}{s}\,ds = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}((2t-1)\pi s)}{\pi s}\,ds = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}((2t-1)\pi s)}{s}\,ds = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

Luego,

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(s)\} = I_1 - I_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

- Si $t > \frac{1}{2}$ entonces $2t+1$ y $2t-1$ son ambos positivos. Entonces:

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}((2t+1)\pi s)}{\pi s} ds = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}((2t+1)\pi s)}{s} ds = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}((2t-1)\pi s)}{\pi s} ds = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}((2t-1)\pi s)}{s} ds = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Luego,

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(s)\} = I_1 - I_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

- Si $|t| < \frac{1}{2}$ entonces $2t+1 > 0$ y $2t-1 < 0$. Entonces:

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}((2t+1)\pi s)}{\pi s} ds = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}((2t+1)\pi s)}{s} ds = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}((2t-1)\pi s)}{\pi s} ds = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}((2t-1)\pi s)}{s} ds = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

Luego,

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(s)\} = I_1 - I_2 = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$$

➢ Si $t=-\frac{1}{2}$ entonces $2t+1=0$ y $2t-1=-2$. Entonces:

$$I_1=\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}((2t+1)\pi s)}{\pi s}\,ds=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty 0\,ds=0$$

$$I_2=\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}((2t-1)\pi s)}{\pi s}\,ds=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(-2\pi s)}{s}\,ds=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{2}$$

Luego,

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(s)\}=I_1-I_2=0-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

➢ Si $t=\frac{1}{2}$ entonces $2t+1=2$ y $2t-1=0$. Entonces:

$$I_1=\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}((2t+1)\pi s)}{\pi s}\,ds=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(2\pi s)}{s}\,ds=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

$$I_2=\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}((2t-1)\pi s)}{\pi s}\,ds=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty 0\,ds=0$$

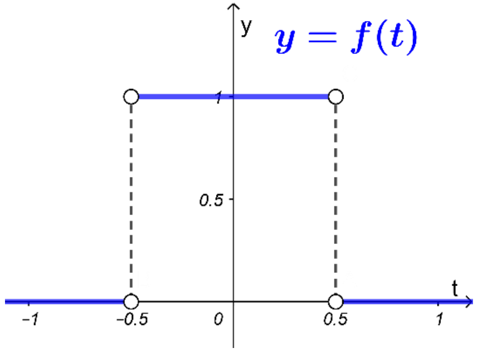
Luego,

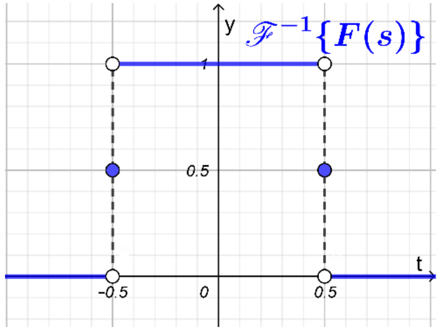
$$\mathcal{F}^{-1}\{F(s)\}=I_1-I_2=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$$

Por lo tanto:

$$g(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\operatorname{sen}(\pi s)}{\pi s}\right\} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |t| > 1/2 \\ 1/2 & \text{si} \quad |t| = 1/2 \\ 1 & \text{si} \quad |t| < 1/2 \end{cases}$$

Comparemos esta función con la $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |t| < 1/2 \\ 0 & \text{si} \quad |t| > 1/2 \end{cases}$ dada originalmente:





Vemos que antitransformando la transformada en cierto sentido recuperamos la función de partida $f(t)$, con la excepción de los valores representados por los dos puntos azules en el gráfico de la derecha, que ocurren precisamente en las discontinuidades $t = \pm 0.5$ de $f(t)$.

- El proceso que obtener $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(s)$ representa el análisis frecuencial o espectral de $f(t)$.
- El proceso $\mathcal{F}^{-1}\{F(s)\}$ de "reconstruir" $f(t)$ a partir de su espectro $F(s)$ se denomina síntesis de la señal $f(t)$.

Teorema de la Integral de Fourier

Si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es una función que verifica las condiciones:

a) f y f' son seccionalmente continuas todo intervalo acotado $[-L, L]$

b) f es absolutamente integrable en toda la recta real, es decir $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$

entonces existe la transformada de Fourier

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(s) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i2\pi st} dt}_{\substack{transformada\ de\ Fourier \\ de\ f(t)}} \quad , s \in \mathbb{R}$$

$F(s)$ es una función continua para todo $s \in \mathbb{R}$ y vale la siguiente representación de $f(t)$ mediante la integral de Fourier:

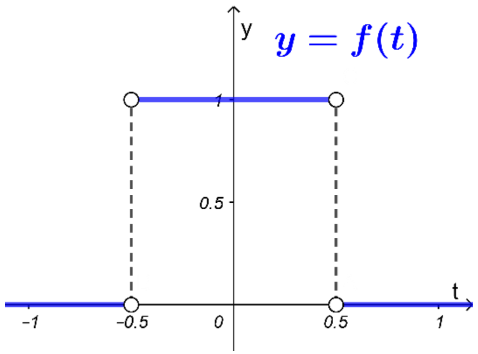
es decir $\quad \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{f(t)\}\} = \dfrac{f(t^+) + f(t^-)}{2}, \forall t \in \mathbb{R}$

Nota

- La hipótesis a) se conoce como **condiciones de Dirichlet**. Las hipótesis a) y b) son suficientes para la existencia de la transformada de Fourier y la validez de la representación integral de Fourier, pero no son necesarias.
- $(*)$ puede expresarse como: $\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{f(t)\}\} = \frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}, \forall t \in \mathbb{R}$. Es decir, la antitransformada de una transformada "recupera" en cierto sentido la función original (excepto posiblemente en los saltos de discontinuidad).
- La transformada de Fourier $F(s)$ mide el grado de contribución de cada frecuencia s en la expresión de $f(t)$ como superposición de ondas armónicas del tipo $e^{i2\pi st}$. Así, las frecuencias relevantes estarán asociadas con valores $|F(s)|$ grandes y las menos relevantes con valores $|F(s)| \approx 0$. La función $F(s)$ también se conoce como el **espectro de Fourier** de $f(t)$.

Ejemplo 3: Aplicando el teorema de la integral de Fourier y el resultado del ejemplo 2, hallar $\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\operatorname{sen}(\pi s)}{\pi s}\right\}$

Rta Verifiquemos las hipótesis del teorema para la fucnión $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |t| < 0.5 \\ 0 & \text{si} \quad |t| > 0.5 \end{cases}$



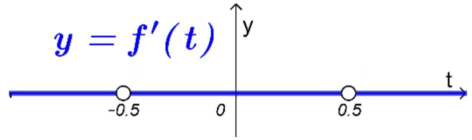
- $f(t)$ sólo posee dos puntos de discontinuidad: $t = \pm 0.5$. Son de tipo "salto finito":

$$f\left((-0.5)^-\right) = 0\,, f\left((-0.5)^+\right) = 1$$
$$f\left((0.5)^-\right) = 1\,, f\left((0.5)^+\right) = 0$$

  así que en cada intervalo acotado $f(t)$ tiene a lo sumo dos discontinuidades. Luego, $f(t)$ es seccionalmente continua en cualquiera de tales intervalos.

- $f'(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |t| < 1/2 \\ 0 & \text{si} \quad |t| > 1/2 \end{cases}$ sólo posee dos puntos de discontinuidad: $t = \pm 0.5$. Son de tipo "salto finito":

$$f'\left((-0.5)^-\right) = 0\,, f'\left((-0.5)^+\right) = 0$$
$$f'\left((0.5)^-\right) = 0\,, f'\left((0.5)^+\right) = 0$$



  así que en cada intervalo acotado $f'(t)$ tiene a lo sumo dos discontinuidades. Luego, $f'(t)$ es seccionalmente continua en esos intervalos.

- Como $f(t)$ no toma valores negativos, entonces $|f(t)| = f(t)$. Se tiene: $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt = \int_{-0.5}^{0.5} 1dt = 1 < \infty$

  Es decir, $f(t)$ es absolutamente integrable en $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

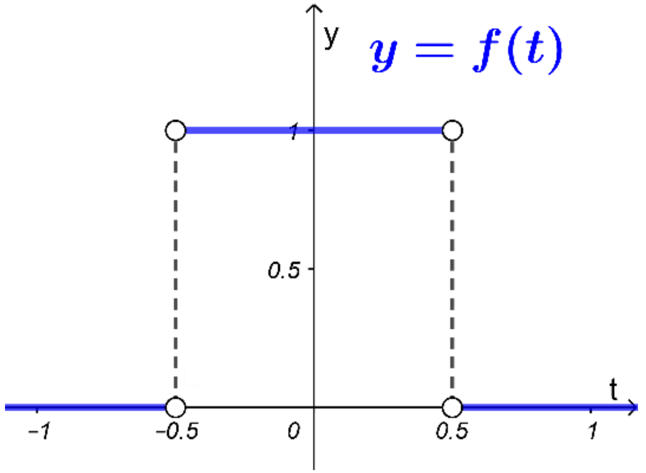
En el ejemplo 2 se calculó $F(s) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \dfrac{\operatorname{sen}(\pi s)}{\pi s}$

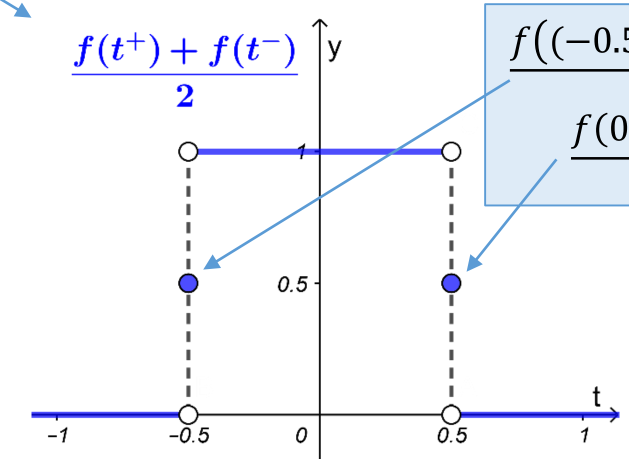
Entonces, aplicando el teorema de Fourier:

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\operatorname{sen}(\pi s)}{\pi s}\right\} = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |t| > 0.5 \\ 1/2 & \text{si} \quad |t| = 0.5 \\ 1 & \text{si} \quad |t| < 0.5 \end{cases}$$

Si $t \neq \pm 0.5$:
f es continua en t.
Así que:
$f(t^+) = f(t) = f(t^-)$

Luego,
$\dfrac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = f(t)$
si $t \neq \pm 0.5$





$$\frac{f\big((-0.5)^+\big) + f\big((-0.5)^-\big)}{2} = \frac{1+0}{2} = 0.5$$

$$\frac{f(0.5^+) + f(0.5^-)}{2} = \frac{0+1}{2} = 0.5$$

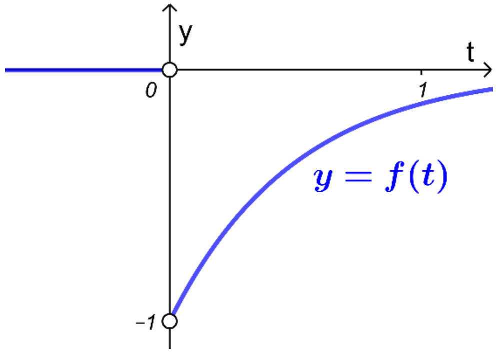
Ejemplo 5: Sea $f(t) = \begin{cases} -e^{-at} & \text{si} \quad t > 0 \\ 0 & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$ donde $a > 0$ es una constante real.

a) Verificar que f cumple las condiciones suficientes del teorema de la integral de Fourier;

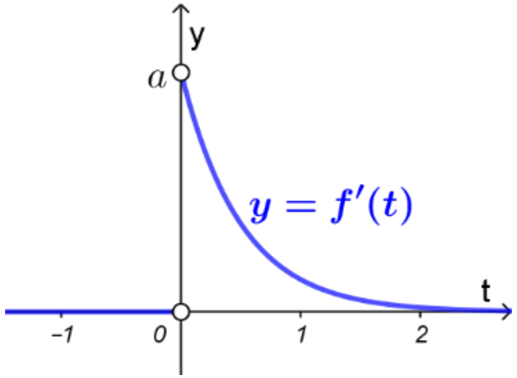
b) Calcular $F(s) = \mathcal{F}\{f(t)\}$; c) Representar $f(t)$ mediante su integral de Fourier;

d) Graficar la función a la que converge la integral de Fourier de $f(t)$.

Rta a) Los gráficos (con $a = 2$) muestran que f y f' son seccionalmente continuas en todo intervalo acotado. De hecho, ambas poseen un único punto de discontinuidad, el origen $t = 0$. Allí poseen límites laterales finitos:



$$f'(t) = \begin{cases} ae^{-at} & \text{si} \quad t > 0 \\ 0 & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$$



$$\lim_{t \to 0^-} f(t) = 0 \quad ; \quad \lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{t \to 0^-} (-e^{-at}) = -1 \qquad \lim_{t \to 0^-} f'(t) = 0 \quad ; \quad \lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{t \to 0^-} (ae^{-at}) = a$$

Además, $f(t)$ es absolutamente integrable en $(-\infty, \infty)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = \int_0^{\infty} |-e^{-at}| dt = \int_0^{\infty} e^{-at} dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-at} dt = \lim_{b\to\infty} \left(\frac{e^{-at}}{(-a)} \right) \Bigg|_0^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{e^{-ab}}{a} + \frac{1}{a} \right) \Bigg|_0^b = \frac{1}{a} < \infty$$

b)

$$F(s)=\mathcal{F}\{f(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi st}dt=\int_{0}^{\infty}(-e^{-at})e^{-i2\pi st}dt=\int_{0}^{\infty}(-1)e^{-(a+i2\pi s)t}dt=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b}(-1)e^{-(a+i2\pi s)t}dt=\lim_{b\to\infty}\left.\frac{e^{-(a+i2\pi s)t}}{a+i2\pi s}\right|_{0}^{b}=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{e^{-(a+i2\pi s)b}}{a+i2\pi s}-\frac{1}{a+i2\pi s}\right)=-\frac{1}{a+i2\pi s}$$

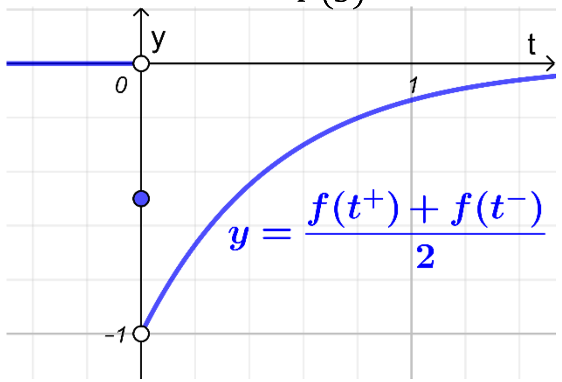
puesto que como $a>0$, resulta:

$$\left|e^{-(a+i2\pi s)b}\right|=\left|e^{-ab}e^{-i2\pi sb}\right|=e^{-ab}\underbrace{\longrightarrow}_{b\to\infty}0 \quad \text{así que} \lim_{b\to\infty}e^{-(a+i2\pi s)b}=0$$

c) Representación integral de Fourier de $f(t)$:

$$\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}=vp\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\left(-\frac{1}{a+i2\pi s}\right)}_{F(s)}e^{i2\pi st}ds \;,\forall t\in\mathbb{R}$$

$$\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}=\begin{cases}0 & \text{si} \quad t<0\\ 0.5 & \text{si} \quad t=0\\ -e^{-at} & \text{si} \quad t>0\end{cases}$$



<u>Ejemplo 4</u>: Dada $f(t) = \begin{cases} 2e^{t} & \text{si} \quad t < 0 \\ -2e^{-2t} & \text{si} \quad t > 0 \end{cases}$

a) Verificar que f cumple las condiciones de Dirichlet.

b) Mostrar que f es absolutamente integrable en $\mathbb{R}$.

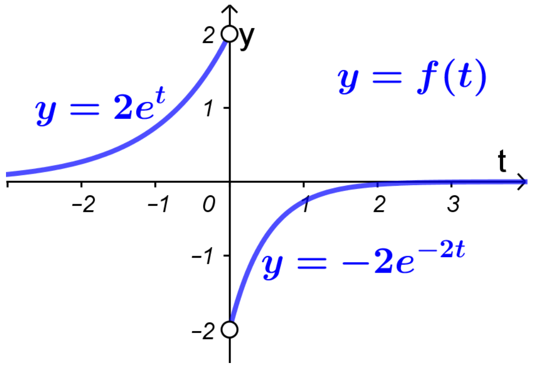
c) Calcular $F(s) = \mathcal{F}\{f(t)\}$.

d) Representar $f(t)$ mediante su integral de Fourier.

e) Graficar la función a la que converge la integral de Fourier de $f(t)$.

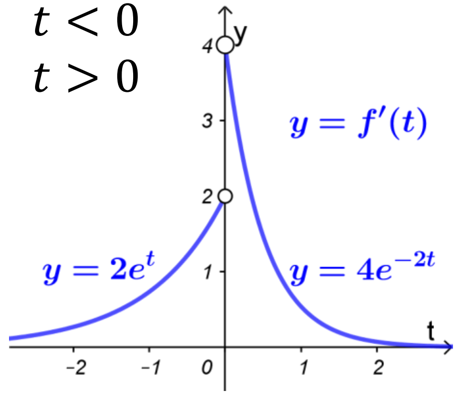
<u>Rta</u>

a)



Los gráficos muestran que f y f' son seccionalmente continuas en todo intervalo acotado. De hecho, ambas poseen un único punto de discontinuidad, el origen $t = 0$. Allí poseen límites laterales finitos:

$$f'(t) = \begin{cases} 2e^{t} & \text{si} \quad t < 0 \\ 4e^{-2t} & \text{si} \quad t > 0 \end{cases}$$



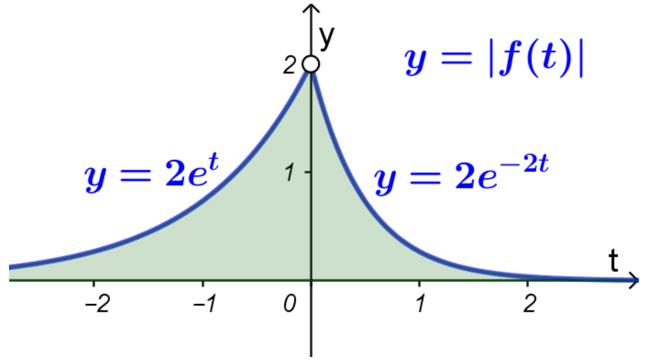
$$\lim_{t \to 0^-} f(t) = \lim_{t \to 0^-} 2e^{t} = 2 \qquad \lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{t \to 0^-} (-2e^{-2t}) = -2$$

$$\lim_{t \to 0^-} f'(t) = \lim_{t \to 0^-} 2e^{t} = 2 \qquad \lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{t \to 0^-} (4e^{-2t}) = 4$$

b) EL valor absoluto de f es $|f(t)| = \begin{cases} 2e^{t} & \text{si} \quad t < 0 \\ 2e^{-2t} & \text{si} \quad t > 0 \end{cases}$

Veamos que es integrable en $\mathbb{R}$, es decir que

el área de la región sombreada en verde es finita:



$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt = \int_{-\infty}^{0} |f(t)|dt + \int_{0}^{\infty} |f(t)|dt = \int_{-\infty}^{0} 2e^{t}dt + \int_{0}^{\infty} 2e^{-2t}dt = \lim_{c \to -\infty} \int_{c}^{0} 2e^{t}dt + \lim_{d \to \infty} \int_{0}^{d} 2e^{-2t}dt$$

$$= \lim_{c \to -\infty} 2e^{t} \Big|_{c}^{0} + \lim_{d \to \infty} \frac{e^{-2t}}{(-1)} \Big|_{0}^{d} = \lim_{c \to -\infty} (2 - 2e^{c}) + \lim_{d \to \infty} \frac{e^{-2d} - 1}{(-1)} = 2 + 1 = 3 < \infty$$

c)

$$F(s) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi st}dt = \int_{-\infty}^{0} 2e^{t}e^{-i2\pi st}dt + \int_{0}^{\infty} (-2)e^{-2t}e^{-i2\pi st}dt$$

$$= \lim_{c \to -\infty} \int_{c}^{0} 2e^{(1-i2\pi s)t}dt + \lim_{d \to \infty} \int_{0}^{d} (-2)e^{(-2-i2\pi s)t}dt = \lim_{c \to -\infty} \frac{2e^{(1-i2\pi s)t}}{1 - i2\pi s} \Big|_{c}^{0} + \lim_{d \to \infty} \frac{(-2)e^{(-2-i2\pi s)t}}{(-2 - i2\pi s)} \Big|_{0}^{d}$$

$$= \lim_{c \to -\infty} \left(\frac{2}{1 - i2\pi s} - \frac{2e^{(1-i2\pi s)c}}{1 - i2\pi s} \right) + \lim_{d \to \infty} \left(\frac{e^{(-2-i2\pi s)d}}{1 + i\pi s} - \frac{1}{1 + i\pi s} \right) = \frac{2}{1 - i2\pi s} - \frac{1}{1 + i\pi s}$$

puesto que

$$\left|e^{(1-i2\pi s)c}\right| = \left|e^{c}e^{-i2\pi sc}\right| = e^{c} \underbrace{\longrightarrow}_{c \to -\infty} 0 \;\; \text{así que} \lim_{c \to -\infty} e^{(1-i2\pi s)c} = 0$$

$$\left|e^{(-2-i2\pi s)d}\right| = \left|e^{-2d}e^{-i2\pi sd}\right| = e^{-2d} \underbrace{\longrightarrow}_{d \to \infty} 0 \;\; \text{así que} \lim_{d \to \infty} e^{(-2-i2\pi s)d} = 0$$

d) y e) Representación integral de Fourier de $f(t)$:

$$\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2} = vp\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{2}{1-i2\pi s} - \frac{1}{1+i\pi s}\right)}_{F(s)} e^{i2\pi st} ds \ , \forall t \in \mathbb{R}$$

¿Hay que resolver esta integral?

- No! Ella expresa la función no periódica $f(t)$ como superposición de los armónicos $e^{i2\pi st}$ con frecuencia s (frecuencia angular $\omega = 2\pi s$). La función $F(s)$ cuantifica la contribución de la frecuencia s.

- Además, el teorema de Fourier dice que si resolvemos la integral obtendremos la función $\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}$

Entonces, graficar la función $vp\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2}{1-i2\pi s} - \frac{1}{1+i\pi s}\right) e^{i2\pi st} ds$ no es otra cosa que graficar $\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}$, función que coindice con $f(t)$ donde esta es continua pero en los puntos de discontinuidad de $f(t)$ se representa por el punto medio del "salto de discontinuidad". En este caso como f es continua para $t \neq 0$, la integral de Fourier converge a $f(t)$ si $t \neq 0$. En cambio, en el origen donde f es discontinua se tiene:

$$f(0^+) = \lim_{u \to 0^+} f(u) = \lim_{u \to 0^+}(-2e^{-2t}) = -2$$

$$f(0^-) = \lim_{u \to 0^-} f(u) = \lim_{u \to 0^-}(2e^{-2t}) = 2$$

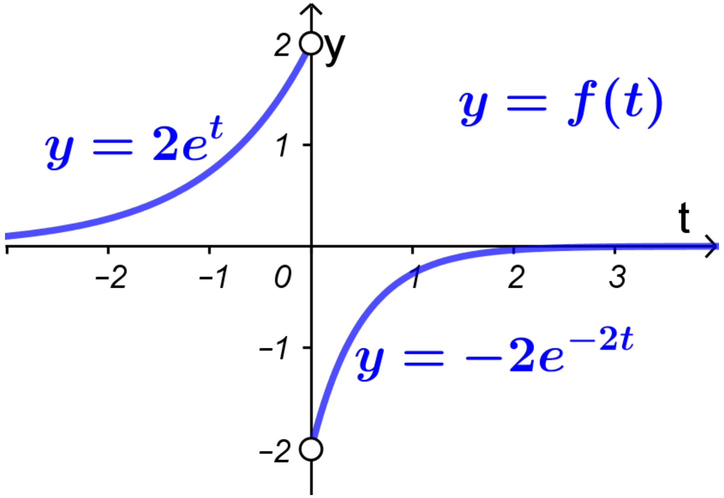
$$\frac{f(0^+)+f(0^-)}{2} = \frac{-2+2}{2} = 0$$

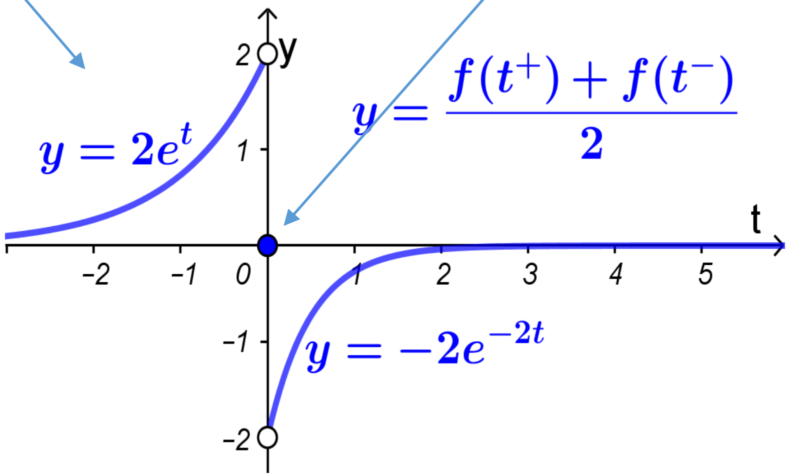
Entonces, la función a la que converge la integral de Fourier es:

$$\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}=\begin{cases} 2e^{t} & \text{si} \quad t<0 \\ 0 & \text{si} \quad t=0 \\ -2e^{-2t} & \text{si} \quad t>0 \end{cases}$$

A continuación se muestran para comparar el gráfico de $f(t)$ a la izquierda y el de la función $\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}$

$$\frac{f(0^+)+f(0^-)}{2}=\frac{-2+2}{2}=0$$





Transformada e integral de Fourier de funciones pares

Sea $f(t)$ función que verifica las condiciones suficientes del teorema de la integral de Fourier. Entonces,

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = \lim_{c \to \infty} \int_{-c}^{c} F(s) e^{i2\pi st} ds \quad \text{donde} \quad F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i2\pi st} dt$$

Como $|f(t)\cos(2\pi st)| \leq \left|f(t)e^{-i2\pi st}\right| = |f(t)|$ y $|f(t)\text{sen}\,(2\pi st)| \leq \left|f(t)e^{-i2\pi st}\right| = |f(t)|$, las siguientes integrales convergen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(2\pi st)\, dt \qquad\qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\text{sen}(2\pi st)\, dt$$

(I) Si $f(t)$ es función par entonces, como funciones de t, $f(t)\cos(2\pi st)$ es par y $f(t)\,\text{sen}(2\pi st)$ es impar. Entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(2\pi st)\, dt = vp\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(2\pi st)\, dt = \lim_{c \to \infty}\int_{-c}^{c} f(t)\cos(2\pi st)\, dt = \lim_{c \to \infty} 2\int_{0}^{c} f(t)\cos(2\pi st)\, dt$$
$$= 2\int_{0}^{\infty} f(t)\cos(2\pi st)\, dt$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\text{sen}(2\pi st)\, dt = vp\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\text{sen}(2\pi st)\, dt = \lim_{c \to \infty}\int_{-c}^{c} f(t)\,\text{sen}(2\pi st)\, dt = 0$$

Por ende,

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi st}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(\cos(2\pi st) - i\,\text{sen}(2\pi st))dt$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(2\pi st)\, dt - i\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\text{sen}(2\pi st)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(2\pi st)\, dt = 2\int_{0}^{\infty} f(t)\cos(2\pi st)\, dt$$

Es decir,

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(s) = 2\int_{0}^{\infty} f(t)\cos(2\pi st)\, dt$$

Resulta de aquí que la transformada de Fourier de $f(t)$ es una función par puesto que:

$$F(-s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(2\pi(-s)t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(2\pi st)\,dt = F(s)$$

Luego,

- $F(s)\,\mathrm{sen}(2\pi st)$ es función impar de la variable s por lo que: $\lim\limits_{c\to\infty} \int_{-c}^{c} F(s)\mathrm{sen}(2\pi st)ds = 0.$
- $F(s)\cos(2\pi st)$ es función par de la variable s por lo que:

$$\lim_{c\to\infty} \int_{-c}^{c} F(s)\cos(2\pi st)ds = \lim_{c\to\infty} 2\int_{0}^{c} F(s)\cos(2\pi st)ds = 2\int_{0}^{\infty} F(s)\cos(2\pi st)\,ds.$$

Por lo tanto,

$$vp\int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{i2\pi st}ds = \lim_{c\to\infty}\int_{-c}^{c} F(s)\cos(2\pi st)ds + i\,\overbrace{\lim_{c\to\infty}\int_{-c}^{c} F(s)\mathrm{sen}(2\pi st)ds}^{=0} = 2\int_{0}^{\infty} F(s)\cos(2\pi st)\,ds$$

(II) Si $f(t)$ es función impar entonces, como funciones de t, $f(t)\cos(2\pi st)$ es impar y $f(t)\,\mathrm{sen}(2\pi st)$ es par. Entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(2\pi st)\,dt = vp\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(2\pi st)\,dt = 2\int_{0}^{\infty} f(t)\cos(2\pi st)\,dt = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{sen}(2\pi st)\,dt = vp\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{sen}(2\pi st)\,dt = \lim_{c\to\infty}\int_{-c}^{c} f(t)\,\mathrm{sen}(2\pi st)\,dt = \lim_{c\to\infty} 2\int_{0}^{c} f(t)\,\mathrm{sen}(2\pi st)\,dt$$

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi st}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(\cos(2\pi st) - i\,\mathrm{sen}(2\pi st))dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(2\pi st)\,dt - i\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{sen}(2\pi st)\,dt = -i\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{sen}(2\pi st)\,dt = -2i\int_{0}^{\infty} f(t)\,\mathrm{sen}(2\pi st)\,dt$$

Resulta de aquí que la transformada de Fourier de $f(t)$ es una función impar:

$$F(-s) = -2i\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{sen}(2\pi(-s)t)\,dt = 2i\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{sen}(2\pi st)\,dt = -F(s)$$

Luego, $F(s)\,\mathrm{sen}(2\pi st)$ es función par de la variable s por lo que: $vp\int_{-\infty}^{\infty} F(s)\,\mathrm{sen}(2\pi st)\,ds = 2\int_{0}^{\infty} F(s)\,\mathrm{sen}(2\pi st)\,ds$.

Análogamente, $F(s)\cos(2\pi st)$ es función impar de la variable s por lo que: $vp\int_{-\infty}^{\infty} F(s)\cos(2\pi st)\,ds = 0$.

Entonces:

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = vp\int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{i2\pi st}ds = \overbrace{vp\int_{-\infty}^{\infty} F(s)\cos(2\pi st)\,ds}^{=0} + i\ \ vp\int_{-\infty}^{\infty} F(s)\,\mathrm{sen}(2\pi st)\,ds =$$

$$= i\ \ vp\int_{-\infty}^{\infty} F(s)\,\mathrm{sen}(2\pi st)\,ds = 2i\int_{0}^{\infty} F(s)\,\mathrm{sen}(2\pi st)\,ds$$

con

$$F(s) = -2i\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{sen}(2\pi st)\,dt$$

RESUMEN

Transformada e integral de Fourier de funciones pares

Si $f(t)$ es una función impar y se satisfacen las hipótesis del teorema de la integral de Fourier, entonces

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = 2\int_0^{\infty} F(s)\cos(2\pi st)\,ds$$

$$F(s) = 2\int_0^{\infty} f(t)\cos(2\pi st)\,dt$$

Transformada e integral de Fourier de funciones pares

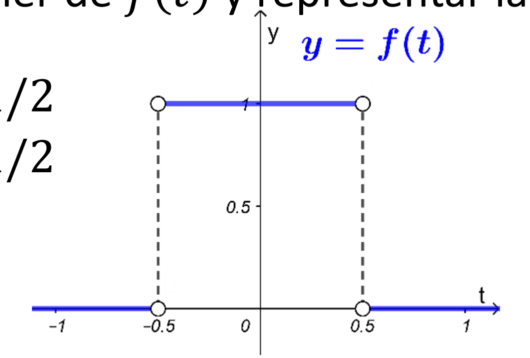
Si $f(t)$ es una función impar y se satisfacen las hipótesis del teorema de la integral de Fourier, entonces:

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = 2i\int_0^{\infty} F(s)\,\mathrm{sen}(2\pi st)\,ds$$

$$F(s) = -2i\int_0^{\infty} f(t)\,\mathrm{sen}(2\pi st)\,dt$$

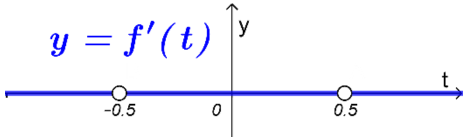
Ejemplo 6: Empleando la forma par hallar la transformada de Fourier de $f(t)$ y representar la función mediante su integral de Fourier.

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |t| < 1/2 \\ 0 & \text{si} \quad |t| > 1/2 \end{cases}$$



Rta

$$f'(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |t| < 1/2 \\ 0 & \text{si} \quad |t| > 1/2 \end{cases}$$



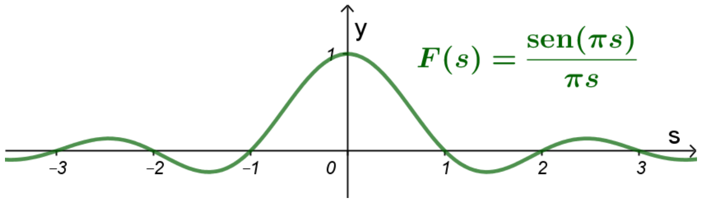
Dado $t = \pm 1/2$ son los únicos puntos de discontinuidad tanto de f como de f' y existiendo sus límites laterales tendiendo al origen, es claro que en cada intervalo acotado tendrán un número finito de discontinuidades (a lo sumo dos). Así que f y f' son seccionalmente continuas en todo intervalo acotado.

Además, f es absolutamente integrable en $\mathbb{R}$ pues:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = \int_{-1/2}^{1/2} 1 dt = 1 < \infty$$

Además, f es una función par así que:

$$F(s) = \mathcal{F}\{f(t)\} = 2\int_0^{\infty} f(t)\cos(2\pi st)\, dt =$$



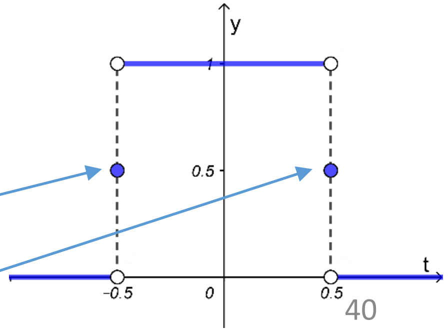
$$= 2\int_0^{1/2} \cos(2\pi st)\, dt = 2\left.\frac{\text{sen}(2\pi st)}{2\pi s}\right|_0^{1/2} = \frac{\text{sen}(\pi s)}{\pi s}$$

Entonces,

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = 2\int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(\pi s)}{\pi s} \cos(2\pi st)\, ds \; ; \forall t \in \mathbb{R}$$

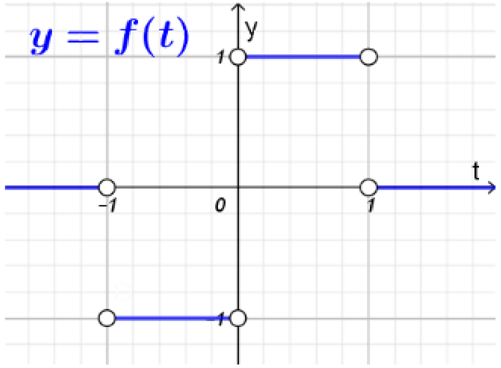
$$\frac{f\left((-0.5)^+\right) + f\left((-0.5)^-\right)}{2} = \frac{1+0}{2} = 0.5$$

$$\frac{f(0.5^+) + f(0.5^-)}{2} = \frac{0+1}{2} = 0.5$$



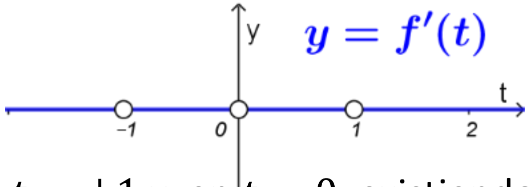
Ejemplo 7: Empleando la forma par hallar la transformada de Fourier de $f(t)$ y representar la función mediante su integral de Fourier.

$$f(t)=\begin{cases}-1 & \text{si} \quad -1<t<0\\ 1 & \text{si} \quad 0<t<1\\ 0 & \text{si} \quad t<-1 \vee t>1\end{cases}$$



Rta

$$f'(t)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad t<-1\\ 0 & \text{si} \quad -1<t<1\\ 0 & \text{si} \quad t>1\end{cases}$$



$f(t)$ y $f'(t)$ son discontinuas en $t=\pm 1$ y en $t=0$, existiendo sus límites laterales tendiendo al origen. En cada intervalo acotado tendrán un número finito de discontinuidades (a lo sumo tres). Así que f y f' son seccionalmente continuas en todo intervalo acotado.Además, f es absolutamente integrable en $\mathbb{R}$ pues:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt=\int_{-1}^{0}|-1|dt+\int_{0}^{1}|1|dt=1+1=2<\infty$$

$$\frac{f((-1)^+)+f((-1)^-)}{2}=\frac{-1+0}{2}=-0.5$$

$$\frac{f(0^+)+f(0^-)}{2}=\frac{1+(-1)}{2}=0$$

$$\frac{f(1^+)+f(1^-)}{2}=\frac{0+1}{2}=0.5$$

Además, f es una función impar así que:

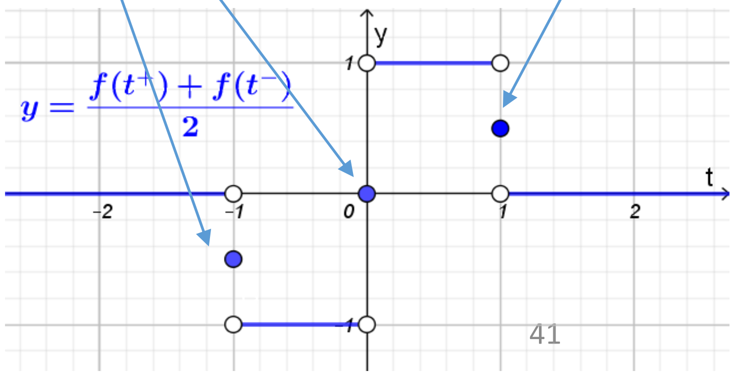
$$F(s)=\mathcal{F}\{f(t)\}=-2i\int_{0}^{\infty}f(t)\operatorname{sen}(2\pi st)\,dt=-2i\int_{0}^{1}1.\operatorname{sen}(2\pi st)\,dt=2i\left.\frac{\cos(2\pi st)}{2\pi s}\right|_{0}^{1}=$$

$$=(-i)\frac{1-\cos(2\pi s)}{\pi s}=(-2i)\frac{\operatorname{sen}^2(\pi s)}{\pi s}$$

Entonces,

$$\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}=2i\int_{0}^{\infty}(-2i)\frac{\operatorname{sen}^2(\pi s)}{\pi s}\operatorname{sen}(2\pi st)\,ds=$$

$$=4\int_{0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}^2(\pi s)}{\pi s}\operatorname{sen}(2\pi st)\,ds\,;\ \forall t\in\mathbb{R}$$



Propiedades de la transformada de Fourier

Linealidad

Si $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(s)$ y $\mathcal{F}\{g(t)\} = G(s)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ son constantes, entonces: $\mathcal{F}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha F(s) + \beta G(s)$

Dem

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(s) \overset{(1)}{\widetilde{=}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi st}dt \qquad \mathcal{F}\{g(t)\} = G(s) \overset{(2)}{\widetilde{=}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i2\pi st}dt$$

Supuestas convergentes las dos integrales anteriores, resulta:

$$\mathcal{F}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha f(t) + \beta g(t))e^{-i2\pi st}dt$$

Esta integral impropia converge porque $\int_0^{\infty} (\alpha f(t) + \beta g(t))e^{-i2\pi st}dt$ y $\int_{-\infty}^{0} (\alpha f(t) + \beta g(t))e^{-i2\pi st}dt$ convergen. Por ejemplo:

La convergencia de la integral (1) significa que $\int_0^{\infty} f(t)e^{-i2\pi st}dt$ y $\int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-i2\pi st}dt$ convergen. La convergencia de la integral (2) significa que $\int_0^{\infty} g(t)e^{-i2\pi st}dt$ y $\int_{-\infty}^{0} g(t)e^{-i2\pi st}dt$ convergen. Entonces,

$$\int_0^{\infty} (\alpha f(t) + \beta g(t))e^{-i2\pi st}dt = \alpha \int_0^{\infty} f(t)e^{-i2\pi st}dt + \beta \int_0^{\infty} g(t)e^{-i2\pi st}dt$$
$$\int_{-\infty}^{0} (\alpha f(t) + \beta g(t))e^{-i2\pi st}dt = \alpha \int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-i2\pi st}dt + \beta \int_{-\infty}^{0} g(t)e^{-i2\pi st}dt$$

Además,

$$\mathcal{F}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha f(t) + \beta g(t))e^{-i2\pi st}dt = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi st}dt + \beta \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i2\pi st}dt = \alpha F(s) + \beta G(s)$$

Similaridad

Si $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(s)$ y $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ (una constante), entonces:

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

Dem

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i2\pi st} dt$$

Si $a > 0$:

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-i2\pi st} dt \overset{\substack{u=at \\ du=adt}}{\widehat{=}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i2\pi s(u/a)} \frac{du}{a} =$$

$$= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i2\pi\left(\frac{s}{a}\right)u} du = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

Si $a < 0$:

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-i2\pi st} dt \overset{\substack{u=at \\ du=adt}}{\widehat{=}} \int_{\infty}^{-\infty} f(u) e^{-i2\pi s(u/a)} \frac{du}{a} = -\int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i2\pi s\left(\frac{u}{a}\right)} \frac{du}{a} =$$

$$= -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i2\pi\left(\frac{s}{a}\right)u} du = -\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

Ejemplo 8 Calcular $F(s) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ si $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 < t < 2 \\ 0 & \text{si} \quad t < 0 \ \vee \ t > 2 \end{cases}$

A partir de ese resultado calcular $\mathcal{F}\{g(t)\}$ y $\mathcal{F}\{h(t)\}$ siendo

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 < t < 1 \\ 0 & \text{si} \quad t < 0 \ \vee \ t > 1 \end{cases} \qquad h\,(t) = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad -4 < t < 0 \\ 0 & \text{si} \quad t < -4 \ \vee \ t > 0 \end{cases}$$

Rta

$$F(s) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i2\pi st} dt = \int_{0}^{2} e^{-i2\pi st} dt = -\frac{e^{-i2\pi st}}{i2\pi s}\bigg|_0^2 = -\frac{e^{-i4\pi s}}{i2\pi s} + \frac{1}{i2\pi s} = i\frac{\left(e^{-i4\pi s} - 1\right)}{2\pi s}$$

- $g(t) = f(2t)$

Aplicando similaridad con $a = 2$:

$$\mathcal{F}\{g(t)\} = \frac{1}{|2|} F\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{1}{2} F\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{1}{2} i \frac{\left(e^{-i4\pi(s/2)} - 1\right)}{2\pi\left(\frac{s}{2}\right)} = i\frac{\left(e^{-i2\pi s} - 1\right)}{2\pi s}$$

- $h\,(t) = 3f(-t/2)$

Aplicando linealidad y similaridad con $a = -1/2$:

$$\mathcal{F}\{h(t)\} = 3\mathcal{F}\{f(-t/2)\} = 3\frac{1}{\left|-\frac{1}{2}\right|} F\left(\frac{s}{\left(-\frac{1}{2}\right)}\right) = 6F(-2s) = 6i\frac{\left(e^{-i4\pi(-2s)} - 1\right)}{2\pi(-2s)} = 3i\frac{\left(1 - e^{i8\pi s}\right)}{2\pi s}$$

Traslación en el tiempo

Si $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(s)$ y $a \in \mathbb{R}$ es una constante, entonces:

$$\mathcal{F}\{f(t-a)\} = e^{-i2\pi as}F(s)$$

Dem

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi st}dt$$

Entonces,

$$\mathcal{F}\{f(t-a)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-a)e^{-i2\pi st}dt \overbrace{=}^{\substack{u=t-a \\ du=dt}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i2\pi s(u+a)}du =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i2\pi as}e^{-i2\pi su}du = e^{-i2\pi as}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i2\pi su}du = e^{-i2\pi as}F(s)$$

Nota

Esta propiedad expresa que la transformada de Fourier de la trasladada t en a unidades (hacia la derecha si $a > 0$ y hacia la izquierda si $a < 0$) de una función f de t, se obtiene por simple multiplicación de la transformada de f por la exponencial $e^{-i2\pi as}$.

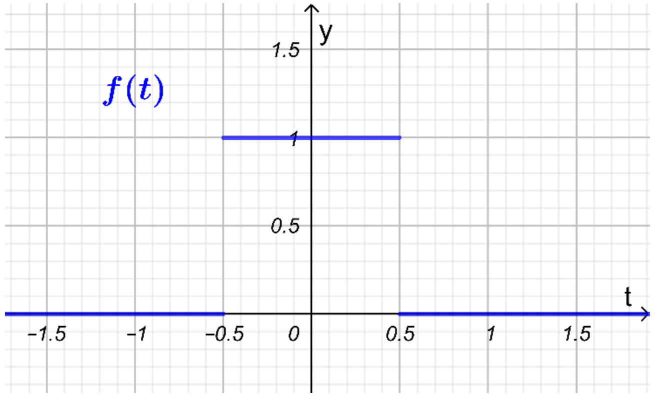
<u>Ejemplo 9</u> En el ejemplo 4 para la función $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |t| < 1/2 \\ 0 & \text{si} \quad |t| > 1/2 \end{cases}$ se calculó $F(s) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \dfrac{\operatorname{sen}(\pi s)}{\pi s}$

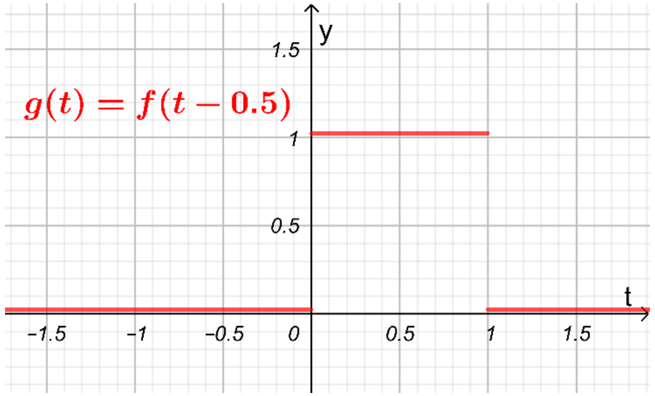
A partir de ese resultado calcular $\mathcal{F}\{g(t)\}$ y $\mathcal{F}\{h(t)\}$ siendo

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 < t < 1 \\ 0 & \text{si} \quad t < 0 \ \vee \ t > 1 \end{cases} \qquad h\,(t) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad -1 < t < 0 \\ -1 & \text{si} \quad t < 0 \ \vee \ t > 1 \\ 0 & \text{si} \quad |t| > 1 \end{cases}$$

<u>Rta</u>

- $g(t) = f\left(t - \frac{1}{2}\right)$

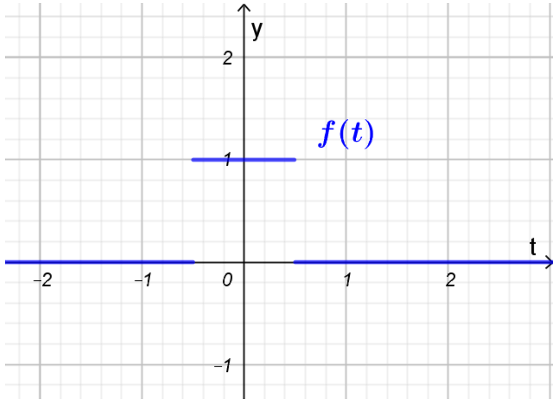


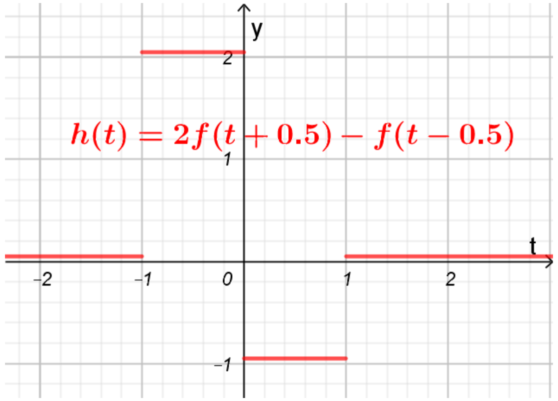


Entonces,

$$\mathcal{F}\{g(t)\} = e^{-i2\pi\left(\frac{1}{2}\right)s} F(s) = e^{-i\pi s} \frac{\operatorname{sen}(\pi s)}{\pi s} = e^{-i\pi s}\left(\frac{e^{i\pi s} - e^{-i\pi s}}{2i\pi s}\right) = \frac{1 - e^{-i2\pi s}}{i2\pi s} = \frac{\operatorname{sen}(2\pi s)}{2\pi s} - i\,\frac{\operatorname{sen}^2(\pi s)}{\pi s}$$

- $h\,(t) = 2f\left(t + \frac{1}{2}\right) - f\left(t - \frac{1}{2}\right)$





Por lo tanto,

$$\mathcal{F}\{h(t)\} = 2e^{-i2\pi\left(-\frac{1}{2}\right)s} F(s) - e^{-i2\pi\left(\frac{1}{2}\right)s} F(s) =$$

$$= \left(2e^{i\pi s} - e^{-i\pi s}\right) \frac{\operatorname{sen}(\pi s)}{\pi s}$$

<u>Traslación en la frecuencia</u>

Si $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(s)$ y $a \in \mathbb{R}$ es una constante, entonces:

$$\mathcal{F}\left\{f(t)e^{i2\pi at}\right\} = F(s-a)$$

<u>Dem</u>

$$\mathcal{F}\left\{f(t)e^{i2\pi at}\right\} = F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i2\pi as}e^{-i2\pi st}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi(s-a)t}dt = F(s-a)$$

<u>Nota</u>

Esta propiedad expresa que al multiplicar $f(t)$ por $e^{i2\pi at}$ el efecto es trasladar el espectro de Fourier a unidades (hacia derecha si $a > 0$ y hacia izquierda si $a < 0$).

Ejemplo 10 En el ejemplo 4 para la función $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |t| < 1/2 \\ 0 & \text{si} \quad |t| > 1/2 \end{cases}$ se calculó $F(s) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \frac{\operatorname{sen}(\pi s)}{\pi s}$

A partir de ese resultado calcular $\mathcal{F}\{e^{i8\pi t} f(t)\}$ y $\mathcal{F}\{f(t)\cos(2\pi t)\}$

Rta

- $$\mathcal{F}\{e^{i8\pi t} f(t)\} = \mathcal{F}\{e^{i2\pi 4t} f(t)\} = F(s-4) = \frac{\operatorname{sen}(\pi(s-4))}{\pi(s-4)} = \frac{\operatorname{sen}(\pi s - 4\pi)}{\pi(s-4)} = \frac{\operatorname{sen}(\pi s)}{\pi(s-4)}$$

- $$\mathcal{F}\{f(t)\cos(2\pi t)\} = \mathcal{F}\left\{f(t)\left(\frac{e^{i2\pi t} + e^{-i2\pi t}}{2}\right)\right\} = \mathcal{F}\left\{\frac{f(t)e^{i2\pi t} + f(t)e^{-i2\pi t}}{2}\right\} =$$

$$= \frac{\mathcal{F}\{f(t)e^{i2\pi 1 t}\} + \mathcal{F}\{f(t)e^{i2\pi(-1)t}\}}{2} = \frac{F(s-1) + F(s-(-1))}{2} = \frac{F(s-1) + F(s+1)}{2} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(\pi(s-1))}{2\pi(s-1)} + \frac{\operatorname{sen}(\pi(s+1))}{2\pi(s+1)} = -\frac{\operatorname{sen}(\pi s)}{2\pi(s-1)} - \frac{\operatorname{sen}(\pi s)}{2\pi(s+1)} = -\frac{\operatorname{sen}(\pi s)}{2\pi}\left(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1}\right) = \frac{s \operatorname{sen}(\pi s)}{\pi(1-s^2)}$$

<u>Ejemplo 11</u> Sea $f(t) = e^{-3|t|}$. Calcular $F(s) = \mathcal{F}\{f(t)\}$. A partir del resultado, obtener $\mathcal{F}\{e^{i4\pi t} f(t+1)\}$ y $\mathcal{F}\{f(2t-4)\}$

<u>Rta</u>

$$F(s) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-3|t|}\, e^{-i2\pi st} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{3t}\, e^{-i2\pi st} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-3t}\, e^{-i2\pi st} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{(3-i2\pi s)t}\, dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(3+i2\pi s)t}\, dt$$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{(3-i2\pi s)t}\, dt = \lim_{L\to\infty} \int_{-L}^{0} e^{(3-i2\pi s)t}\, dt = \lim_{L\to\infty} \left. \frac{e^{(3-i2\pi s)t}}{3-i2\pi s} \right|_{-L}^{0} = \lim_{L\to\infty} \left(\frac{1}{3-i2\pi s} - \frac{e^{-(3-i2\pi s)L}}{3-i2\pi s} \right) = \frac{1}{3-i2\pi s}$$

$$\int_{0}^{\infty} e^{-(3-i2\pi s)t}\, dt = \lim_{L\to\infty} \int_{0}^{L} e^{-(3-i2\pi s)t}\, dt = \lim_{L\to\infty} \left. \frac{e^{-(3-i2\pi s)t}}{(-3-i2\pi s)} \right|_{0}^{L} = \lim_{L\to\infty} \left(\frac{e^{-(3-i2\pi s)L}}{(-3-i2\pi s)} - \frac{1}{(-3-i2\pi s)} \right) = \frac{1}{3+i2\pi s}$$

Entonces,

$$F(s) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \frac{1}{3-i2\pi s} + \frac{1}{3+i2\pi s} = \frac{6}{9+4\pi^2 s^2}$$

- Sean $g(t) = f(t+1)$, $G(s) = \mathcal{F}\{g(t)\}$

$$G(s) = \mathcal{F}\{g(t)\} = \mathcal{F}\{f(t+1)\} = e^{-i2\pi(-1)s} F(s) = e^{i2\pi s} F(s)$$

$$\mathcal{F}\{e^{i4\pi t} f(t+1)\} = \mathcal{F}\{e^{i4\pi t} g(t)\} = G(s-2) = e^{i2\pi(s-2)} F(s-2) = \frac{6e^{i2\pi(s-2)}}{9+4\pi^2(s-2)^2}$$

- Sean $h(t) = f(2t)$, $H(s) = \mathcal{F}\{h(t)\}$

$$H(s) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \mathcal{F}\{f(2t)\} = \frac{1}{2} F\left(\frac{s}{2}\right)$$

$$\mathcal{F}\{f(2t-4)\} = \mathcal{F}\{f(2(t-2))\} = \mathcal{F}\{h(t-2)\} = e^{-i2\pi 2s} H(s) = e^{-i4\pi s} \frac{1}{2} F\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{3e^{-i4\pi s}}{9+4\pi^2(s/2)^2} = \frac{3e^{-i4\pi s}}{9+\pi^2 s^2}$$

Simetría

Si $f(t)$ verifica las hipótesis del teorema de la integral de Fourier y $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(s)$, entonces en los puntos de continuidad de $f(t)$ se cumple:

$$\mathcal{F}\{F(t)\} = f(-s) \quad \text{y} \quad \mathcal{F}\{F(-t)\} = f(s)$$

Dem

Suponiendo $f(t)$ continua y la integral $\int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma)e^{i2\pi t\sigma}d\sigma$ convergente, del teorema de Fourier se tiene:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma)e^{i2\pi t\sigma}d\sigma$$

Renombrando la variable t como τ:

$$f(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma)e^{i2\pi\tau\sigma}d\sigma$$

Haciendo el cambio de variables $\sigma = -t$:

$$f(\tau) = -\int_{\infty}^{-\infty} F(-t)e^{-i2\pi\tau t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(-t)e^{-i2\pi\tau t}dt$$

Renombrando la variable τ como s:

$$f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} F(-t)e^{-i2\pi st}dt = \mathcal{F}\{F(-t)\}$$

Ejemplo 12 En el ejemplo 4 para la función $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |t| < 1/2 \\ 0 & \text{si} \quad |t| > 1/2 \end{cases}$ se calculó $\mathcal{F}\{f(t)\} = \frac{\operatorname{sen}(\pi s)}{\pi s}$

A partir de ese resultado calcular $\mathcal{F}\left\{\frac{\operatorname{sen}(\pi t)}{\pi t}\right\}$

Rta

Sea $F(s) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \frac{\operatorname{sen}(\pi s)}{\pi s}$

Se tiene:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\operatorname{sen}(\pi t)}{\pi t}\right\} = \mathcal{F}\{F(t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{\operatorname{sen}(\pi t)}{\pi t}\right\} = f(-s) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |-s| < 1/2 \\ 0 & \text{si} \quad |-s| > 1/2 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |s| < 1/2 \\ 0 & \text{si} \quad |s| > 1/2 \end{cases}$$

$$\mathcal{F}\{f(t)\cos(2\pi t)\} = \mathcal{F}\left\{f(t)\left(\frac{e^{i2\pi t} + e^{-i2\pi t}}{2}\right)\right\} = \mathcal{F}\left\{\frac{f(t)e^{i2\pi t} + f(t)e^{-i2\pi t}}{2}\right\} =$$

$$= \frac{\mathcal{F}\{f(t)e^{i2\pi 1 t}\} + \mathcal{F}\{f(t)e^{i2\pi(-1)t}\}}{2} = \frac{F(s-1) + F(s-(-1))}{2} = \frac{F(s-1) + F(s+1)}{2} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(\pi(s-1))}{2\pi(s-1)} + \frac{\operatorname{sen}(\pi(s+1))}{2\pi(s+1)} = -\frac{\operatorname{sen}(\pi s)}{2\pi(s-1)} - \frac{\operatorname{sen}(\pi s)}{2\pi(s+1)} = -\frac{\operatorname{sen}(\pi s)}{2\pi}\left(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1}\right) = \frac{s\operatorname{sen}(\pi s)}{\pi(1-s^2)}$$