

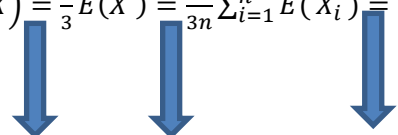
- 4) Considere una muestra aleatoria de una distribución continua con densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(1+\theta x)}{6} & \text{si } -3 < x < 3 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \quad \text{donde el parámetro } \theta \text{ es tal que } -1/3 < \theta < 1/3$$

- a) ¿Es $\hat{\theta} = \frac{1}{3} \bar{X}$ un estimador insesgado de θ ? Explique.
 b) Hallar $ECM(\hat{\theta})$. ¿Es $\hat{\theta} = \frac{1}{3} \bar{X}$ un estimador consistente de θ ? Explique.

a) Para ver si un estimador es insesgado hay que hallar su esperanza y ver si coincide con el valor del parámetro que se quiere estimar:

$$E(\hat{\theta}) = E\left(\frac{1}{3} \bar{X}\right) = \frac{1}{3} E(\bar{X}) = \frac{1}{3n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{3n} \sum_{i=1}^n 3\theta = \frac{n3\theta}{3n} = \theta$$



Por linealidad Por linealidad Por (1)

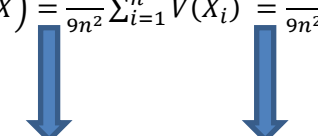
Por lo tanto $\hat{\theta}$ es un estimador insesgado para θ

Cálculo auxiliar: (1)

$$E(X) = \int_{-3}^3 X \frac{(1+\theta X)}{6} dx = \frac{1}{6} \int_{-3}^3 X + \theta X^2 dx = \frac{1}{6} \left(\frac{X^2}{2} + \theta \frac{X^3}{3} \right) \Big|_{-3}^3 = 3\theta$$

$$b) ECM(\hat{\theta}) = V(\hat{\theta}) + \underbrace{(E(\hat{\theta}) - \theta)^2}_{\text{es cero por ser insesgado}} = \frac{1}{3n} (1 - \theta^2)$$

$$V(\hat{\theta}) = V\left(\frac{1}{3} \bar{X}\right) = \frac{1}{9n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i) = \frac{1}{9n^2} \sum_{i=1}^n 3 - 3\theta^2 = \frac{1}{9n^2} n(3 - (3\theta)^2) = \frac{1}{3n} (1 - 3\theta^2)$$



Por independencia
Y $V(ax) = a^2 V(X)$ Por(2)

Cálculo auxiliar: (2)

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$E(X^2) = \int_{-3}^3 X^2 \frac{(1+\theta X)}{6} dx = \frac{1}{6} \int_{-3}^3 X^2 + \theta X^3 dx = \frac{1}{6} \left(\frac{X^3}{3} + \theta \frac{X^4}{4} \right) \Big|_{-3}^3 = 3$$

$$E(X) = \int_{-3}^3 X \frac{(1+\theta X)}{6} dx = \frac{1}{6} \int_{-3}^3 X + \theta X^2 dx = \frac{1}{6} \left(\frac{X^2}{2} + \theta \frac{X^3}{3} \right) \Big|_{-3}^3 = 3\theta$$

María Valeria Calandra

Para que un estimador sea consistente se debe cumplir que $\lim_{n \rightarrow \infty} V(\hat{\theta}) = 0$ y también que

$\lim_{n \rightarrow \infty} (E(\hat{\theta}) - \theta) = 0$ COMO AMBOS LÍMITES SON CERO POR LO TANTO $\hat{\theta}$ ES UN ESTIMADOR CONSISTENTE PARA θ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(\hat{\theta}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3n} (1 - \theta^2) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (E(\hat{\theta}) - \theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$$