Series de Laurent

Hemos visto que toda función $f(z)$ analítica en z_0 es representable en un entorno de dicho punto mediante una serie convergente de potencias de $(z - z_0)$, su serie de Taylor centrada en z_0.

Este tipo de representación no es posible por ejemplo para $f(z) = e^z/z$ alrededor del punto $z_0 = 0$ porque no es analítica allí. Para tales funciones existe otro tipo de representación en serie de potencias, las series de Laurent, que involucran potencias positivas y negativas de $(z - z_0)$. Estas últimas son particularmente importantes en el estudio de los denominados puntos singulares de la función y juegan un rol esencial en el teorema de los residuos que veremos más adelante.

Una serie de potencias positivas y negativas centrada en z_0 es una serie de la forma:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n = \underbrace{\ldots + c_{-2}(z - z_0)^{-2} + c_{-1}(z - z_0)^{-1}}_{(*)} + \underbrace{c_0 + c_1(z - z_0)^1 + c_2(z - z_0)^2 + \cdots}_{(**)}$$

donde los coeficientes c_n son números complejos (que no dependen de z). La notación siguiente es conveniente para el estudio de tales series.

Si anotamos $a_n = c_n \quad (n = 0,1,2, \ldots)\ y\ b_n = c_{-n} \quad (n = 1,2, \ldots)$, la serie se escribe:

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n}_{(*)} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b_n(z - z_0)^{-n}}_{(**)}$$

Así, los a_n acompañan a las potencias no negativas de $(z - z_0)$ y los b_n a las potencias negativas.

Ejemplo 1:

$$\underbrace{\dots+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}}_{(**)}+\underbrace{1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}-\frac{z^3}{2^3}+\cdots}_{(*)}=\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n z^n$$

Aquí: $b_n = 1$, $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^{n+1}}{n!\,z^{n-1}}=\underbrace{-iz-1}_{(*)}+\underbrace{\frac{i}{2!}\frac{1}{z}+\frac{1}{3!}\frac{1}{z^2}-\frac{i}{4!}\frac{1}{z^3}+\cdots}_{(**)}$$

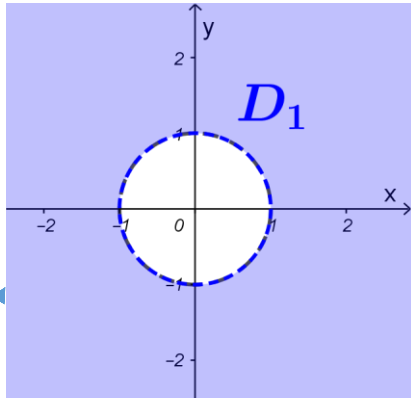
En esta serie: $b_n = \frac{(-i)^{n+2}}{(n+1)!}$, $a_0 = -1$, $a_1 = -i$ y $a_n = 0$ si $n \geq 2$.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(z-1)^{n-2}=\underbrace{\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{2}{(z-1)}}_{(**)}+\underbrace{3+4(z-1)+5(z-1)^2+6(z-1)^3+\cdots}_{(*)}$$

Para esta última serie: $a_n = n+3$, $b_1 = 2$, $b_2 = 1$ y $b_n = 0$ si $n \geq 3$.

Dada una serie de potencias positivas y negativas

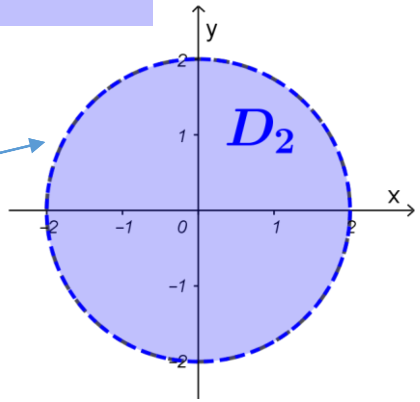
$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n}_{(*)} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-z_0)^{-n}}_{(**)}$$



Su región de convergencia se define como el conjunto de los $z \in \mathbb{C}$ que reemplazados en $(*)$ la hacen converger y al mismo tiempo reemplazados en $(**)$ la vuelven también convergente y en tal caso la serie converge a la suma de ambas series $(*)$ y $(**)$.

Ejemplo 2: $\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n z^n$

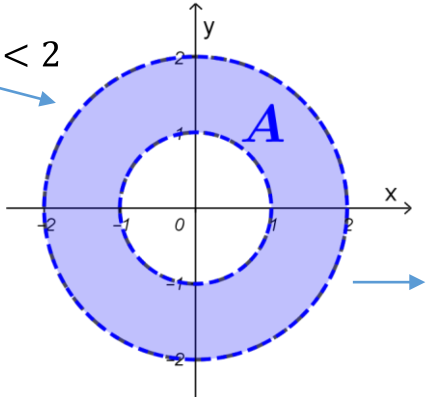
- $\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}$ es serie geométrica de razón z^{-1}.
  Converge si $|z^{-1}| < 1$. Esto es, si $|z| > 1$. De hecho: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} = \frac{1}{z-1}$ si $1 < |z| < \infty$
- $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n z^n$ es serie geométrica de razón $(-z/2)$.
  Converge si $|-z/2| < 1$. Es decir, si $|z| < 2$. Se tiene: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n z^n = \frac{1}{1-\left(-\frac{z}{2}\right)} = \frac{2}{z+2}$ si $|z| < 2$



Entonces, $$\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n z^n = \frac{1}{z-1} + \frac{2}{z+2} \quad \text{si } 1 < |z| < 2$$

La región de convergencia es el anillo:

$$A = D_1 \cap D_2 = \{z \in \mathbb{C}: 1 < |z| < 2\}$$



Sobre el borde de este anillo la discusión de la convergencia no será relevante para la teoría que vamos a desarrollar

Región de convergencia de una serie de potencias positivas y negativas

Volviendo al caso general, mostremos que la región de convergencia de una serie de potencias positivas y negativas es una corona.

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \quad (*)$ es de potencias no negativas. Ya sabemos que tiene asociado un radio de convergencia R.

Si $R=0$ entonces $(*)$ sólo converge en el punto z_0 así que la serie de potencias positivas y negativas a lo sumo convergerá en ese punto. Dado que ese caso no es de interés, supondremos $R>0$, es decir $0<R\leq\infty$.

Entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \quad \text{si } |z-z_0|<R$$

representa una función analítica en el **interior** del disco abierto $|z-z_0|<R$.

Los $z \in \mathbb{C}$ que hacen convergente a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-z_0)^{-n}$ $(**)$ se corresponden con los $w=(z-z_0)^{-1} \neq 0$ de la región de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n w^n$, la que siendo de potencias positivas tendrá un radio de convergencia R^*. Entonces, si $R^*=0$, la serie anterior converge sólo si $w=0$ por lo que $(**)$ no convergerá para ningún z. Para descartar ese caso, supondremos positivo $(0<R^* \leq \infty)$.

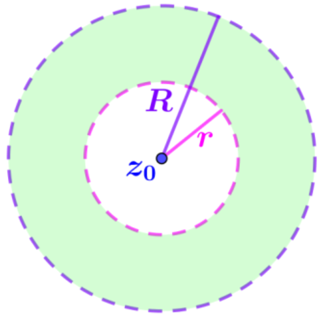
Definiendo $r=1/R^*$ (si $R^*=\infty$ esto se interpretará $r=0$) se tiene $|w|<R^* \Leftrightarrow\ |z-z_0|>r$. Así, $(**)$ converge en el **exterior** de un disco centrado en z_0 de radio r:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-z_0)^{-n} \quad \text{si } |z-z_0|>r$$

Además, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n w^n$ representa una función $h(w)$ analítica si $|w|<R^*$. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-z_0)^{-n}$ representa en $|z-z_0|>r$ a la función $g(z)=h\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$, analítica en esa región por ser composición de analíticas.

Por lo tanto, si $r<R$ la serie de potencias positivas y negativas:

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n}_{(*)}+\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-z_0)^{-n}}_{(**)} \quad \text{si } r<|z-z_0|<R$$



converge (absolutamente) en el interior de la **corona** $r<|z-z_0|<R$ $(0 \leq r<R \leq \infty)$ y diverge en su exterior (si $r=0$ o $R=\infty$ el conjunto $r<|z-z_0|<R$ se considera también una corona). En su interior dicha serie representa a una función analítica. Notar que nada se afirma respecto de la convergencia en la frontera de esta región anular.

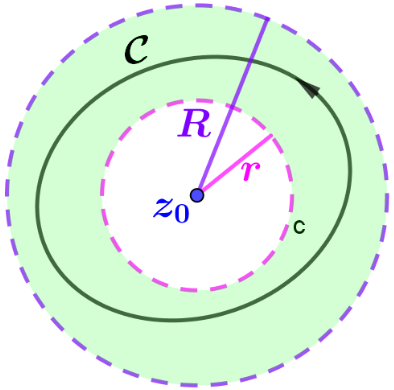
Recíprocamente, dada una función $f(z)$ analítica en una corona $r < |z - z_0| < R$ con $0 \leq r < R \leq \infty$, cabe preguntarse si $f(z)$ puede representarse allí mediante una serie de potencias positivas y negativas centrada en z_0. La respuesta afirmativa la da el siguiente teorema.

<u>Teorema de las series de Laurent</u>

Si $f(z)$ es una función analítica en la corona $r < |z - z_0| < R$, con $0 \leq r < R \leq \infty$,

entonces $f(z)$ se representa allí por la siguiente serie de potencias positivas y negativas:

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n}_{\text{"parte analítica en } z_0\text{"}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n}}_{\text{"parte singular en } z_0\text{"}} \quad \text{si } \; r < |z - z_0| < R$$



con coeficientes dados por:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad ; \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} f(z)(z - z_0)^{n-1} dz$$

siendo z_0 punto de la región interior a $\mathcal{C}$, curva cerrada, simple, suave o suave a trozos, con orientación antihoraria, $\mathcal{C}$ incluida en la corona.

<u>Def</u>: la serie de potencias positivas y negativas definida en el teorema anterior se denomina **serie (o desarrollo) de Laurent de $f(z)$ (convergente) en la corona $r < |z - z_0| < R$**.

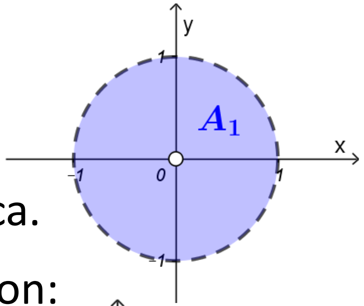
A diferencia de la serie de Taylor, en general no podemos hablar de “la” serie de Laurent centrada en un punto z_0, puesto que como veremos puede haber más de una centrada en un mismo z_0. Entonces siempre debemos explicitar el anillo de convergencia correspondiente a cada desarrollo de Laurent centrado en z_0.

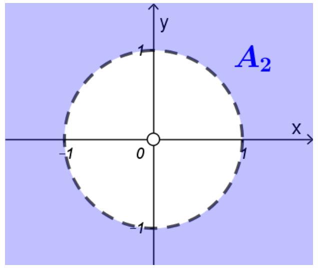
<u>Ejemplo 3</u>: ¿Cuántos desarrollos en serie de Laurent posee $f(z) = \frac{1}{z(z^2+1)}$? Especificar los anillos abiertos de convergencia de cada uno: a) $z_0 = 0$, b) $z_0 = i$, c) $z_0 = 2i$.

<u>Rta</u> $D_{Ana}(f) = \mathbb{C} - \{-i, 0, i\}$

a) $z_0 = 0$. Las distancias de $z_0 = 0$ a los otros puntos de no analiticidad de $f(z)$ son: $|-i - 0| = 1 = |i - 0|$. Entonces $f(z)$ posee dos desarrollo de Laurent centrados en el origen, convergentes en los siguientes anillos maximales donde $f(z)$ es analítica :

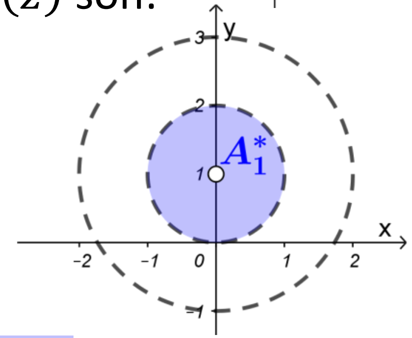
- uno la representa en el anillo $A_1 : 0 < |z - 0| < 1$, pues allí $f(z)$ es analítica.
- otro la representa en el “anillo” $A_2 : 1 < |z - 0| < \infty$, pues allí $f(z)$ es analítica.

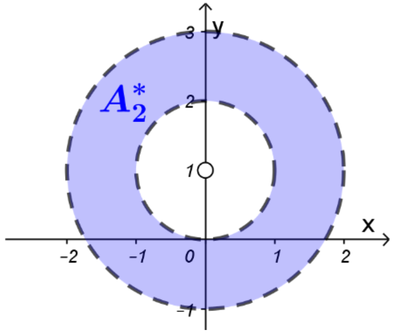


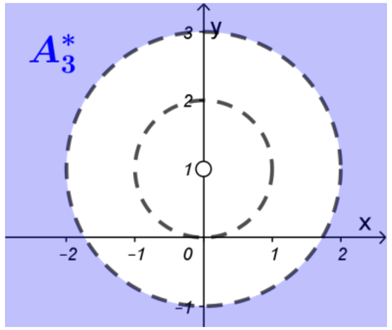


b) $z_0 = i$. Las distancias de $z_0 = i$ a los otros puntos de no analiticidad de $f(z)$ son: $|0 - i| = 1 < 2 = |-i - i|$. Entonces $f(z)$ posee tres desarrollo de Laurent centrados en $z_0 = i$, convergentes respectivamente en los siguiente anillos maximales donde $f(z)$ es analítica:

- $A_1^* : 0 < |z - i| < 1$, pues allí $f(z)$ es analítica.
- $A_2^* : 1 < |z - i| < 2$, pues allí $f(z)$ es analítica.
- $A_3^* : 2 < |z - i| < \infty$, pues allí $f(z)$ es analítica.





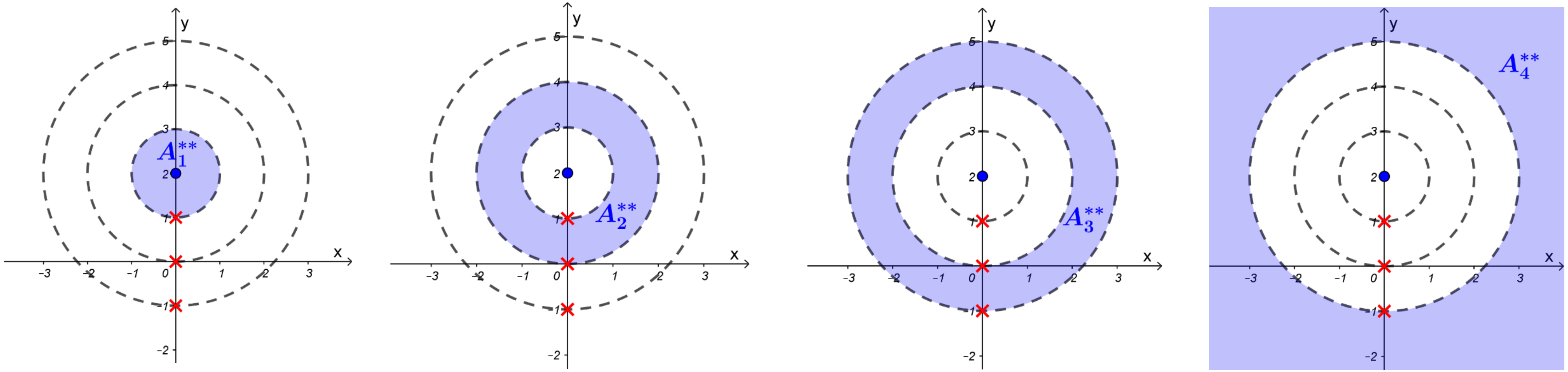


c) $z_0 = 2i$. Para hallar los radios interno y externos de los anillos medimos las distancias

de $z_0 = 2i$ a los otros puntos de no analiticidad de $f(z)$: $|i - 2i| = 1 < 2 = |0 - 2i| < |-i - 2i| = 3$.

Entonces $f(z)$ posee cuatro desarrollo de Laurent centrados en $z_0 = 2i$:

- uno convergente en el disco $A_1^{**}: |z - 2i| < 1$, pues allí $f(z)$ es analítica. Este es el desarrollo de Taylor centrado en el punto de analiticidad $z_0 = 2i$.
- otro convergente en el anillo $A_2^{**}: 1 < |z - 2i| < 2$, pues allí $f(z)$ es analítica.
- otro convergente en el anillo $A_3^{**}: 2 < |z - 2i| < 3$, pues allí $f(z)$ es analítica.
- otro convergente en el anillo $A_3^{**}: 3 < |z - 2i| < \infty$, pues allí $f(z)$ es analítica.



<u>Ejercicio</u>: Describir las coronas máximas en las que $f(z)$ admite desarrollos en serie de Laurent centrada en z_0.

a) $f(z) = \frac{z}{z-2}$; $z_0 = 0$ b) $f(z) = \frac{\mathrm{Ln}(z)}{(z-1)^3}$; $z_0 = 1$

<u>Rta</u>

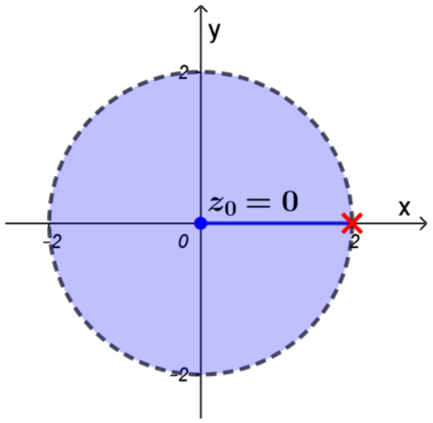
a) $D_{ana}(f) = \mathbb{C} - \{2\}$.

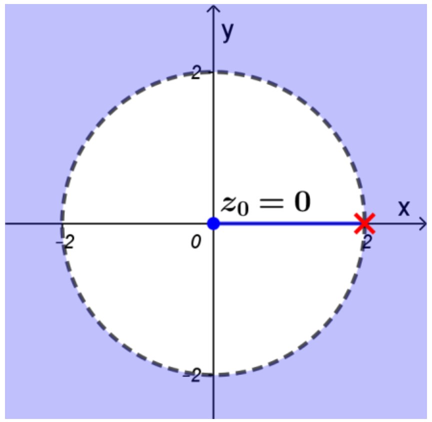
El punto más cercano a z_0 donde f deja de ser analítica es $z = 2$.

La distancia entre en centro y este punto es $|2 - 0| = 2$.

Luego, hay dos regiones donde $f(z)$ se representa mediante una serie de potencias centradas en $z_0 = 0$:

(I) $|z - 0| < 2$ (II) $2 < |z - 0| < \infty$





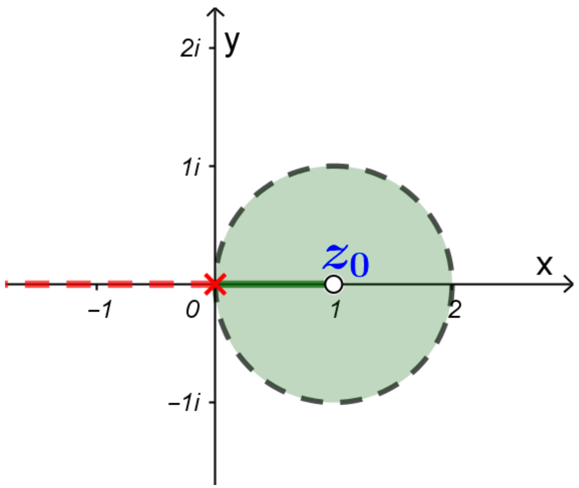
El desarrollo en (I) será el de Taylor, puesto que $f(z)$ es analítica en $z_0 = 0$.

El desarrollo en (II) será de Laurent.

b) $f(z) = \frac{\text{Ln}(z)}{(z-1)^3}$; $z_0 = 1$

$D_{ana}(f) = \mathbb{C} - (\{1\} \cup \{x + iy: y = 0 \ \wedge \ x \leq 0\})$. El punto de no analiticidad de $f(z)$ más cercano a $z_0 = 1$ es $z = 0$. La distancia entre en centro y este punto es $|0 - 1| = 1$. Hay una única corona máxima donde $f(z)$ se representa mediante una serie de Laurent centrada en $z_0 = 1$:

$$0 < |z - 1| < 1$$



Relación Laurent-Taylor en un entorno reducido de z_0

Si $f(z)$ es analítica en z_0 podemos considerar $r = 0$ en el teorema de Laurent.

El anillo $0 < |z - z_0| < R$ es un entorno reducido de z_0. ¿Qué podemos decir de la serie de Laurent de $f(z)$ en este caso?

Aplicando el teorema de Cauchy-Goursat:

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \underbrace{f(z)(z - z_0)^{n-1}}_{\text{analít.en } z_0} dz = 0 \qquad (n = 1,2, \dots)$$

Aplicando la fórmula integral de Cauchy para $f(z)$ y sus derivadas:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} 2\pi i \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad (n = 0,1, \dots)$$

Entonces cuando $f(z)$ es analítica en z_0 la serie de Laurent centrada en z_0 que representa a $f(z)$ en el entorno reducido $0 < |z - z_0| < R$ coincide allí con la serie de Taylor centrada en z_0:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{b_n}_{=0} (z - z_0)^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \quad \text{si } \ 0 < |z - z_0| < R$$

OPCIONAL: otro caso particular

Supongamos que $f(z) = \frac{N(z)}{(z-z_0)^q}$ con $q \geq 1$ y $N(z)$ es analítica en z_0. La serie de Laurent que representa a $f(z)$ en un entorno reducido de z_0 es:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-z_0)^{-n} \text{ si } 0 < |z-z_0| < R$$

con coeficientes dados por:

$$a_n \overset{(I)}{\widehat{=}} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \qquad b_n \overset{(II)}{\widehat{=}} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} f(z)(z-z_0)^{n-1} dz$$

si z_0 es interior a $\mathcal{C}$, curva cerrada, simple, suave o suave a trozos, con orientación antihoraria, incluida en $0 < |z-z_0| < R$.

Veamos que estos coeficientes se relacionan con los de la serie de Taylor de $N(z)$ centrada en z_0.

- a_n es el $(q+n)$-ésimo coeficiente de la serie de Taylor de $N(z)$ centrada en z_0. En efecto, aplicando la fórmula integral de Cauchy para derivadas (FICD) en (I) resulta:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{N(z)}{(z-z_0)^{(n+q)+1}} dz \overset{FICD}{\widehat{=}} \frac{N^{(q+n)}(z_0)}{(q+n)!}$$

- Si $n \leq q$, b_n es el $(q-n)$-ésimo coeficiente de la serie de Taylor de $N(z)$ centrada en z_0. En efecto, aplicando (FIC) o (FICD) en (II) resulta:

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} f(z)(z-z_0)^{n-1} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{N(z)}{(z-z_0)^{(q-n)+1}} dz \overset{FICD}{\widehat{=}} \frac{N^{(q-n)}(z_0)}{(q-n)!}$$

- Si $n \geq q+1$, $b_n = 0$ en virtud del teorema de Cauchy-Goursat, pues:

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} f(z)(z-z_0)^{n-1} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \underbrace{N(z)(z-z_0)^{n-q-1}}_{\substack{\text{analít. sobre } \mathcal{C} \\ \text{y en su interior}}} dz = 0$$

Ejemplo: $f(z) = \frac{2}{z(z+2)}$, $z_0 = 0$. En este caso $N(z) = \frac{2}{z+2}$, $q = 1$.

La serie de Laurent que representa a $f(z)$ en un entorno reducido de z_0 es

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \ \text{ si } \ 0 < |z| < 2$$

donde:

- a_n es el $(n+1)$-ésimo coeficiente de la serie de Taylor de $N(z)$ centrada en z_0. Podemos hallarlo por unicidad.

$N(z) = \frac{2}{z+2} = \frac{1}{1+\left(\frac{z}{2}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} z^n$ si $|z| < 2$. Entonces,

- $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}$ para $n \geq 0$.
- $b_1 = N(0) = 1$; $b_n = 0$ para $n \geq 2$.

De lo anterior se deduce que:

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} z^n = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} z - \frac{1}{8} z^2 + \cdots \ \text{ si } \ 0 < |z| < 2$$

Como veremos, las series de potencias positivas y negativas también gozan de la propiedad de unicidad. Si por cualquier procedimiento una tal serie representa a $f(z)$ en un anillo $r < |z - z_0| < R$ (con $0 \leq r < R \leq \infty$), entonces dicha serie es la de Laurent convergente en ese anillo. Entonces, en este ejemplo podemos obtener la serie de Laurent que converge en $0 < |z| < 2$ de la siguiente manera más directa:

$$f(z) = \frac{2}{z(z+2)} = \frac{1}{z}\frac{2}{z+2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1+\left(\frac{z}{2}\right)} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} z^{n-1} =$$

$$= z^{-1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} z - \frac{1}{8} z^2 + \cdots \ \text{ si } \ 0 < |z| < 2$$

El teorema de Laurent expresa los coeficientes de un desarrollo de Laurent mediante integrales, fórmulas que si bien tienen implicancias teóricas muy importantes raras veces se usan para calcularlos. El siguiente resultado de unicidad se empleará en muchos casos para obtenerlos sin recurrir a las integrales que los definen.

Teorema de unicidad de serie de potencias positivas y negativas

Si la función $f(z)$ está representada en la corona $r < |z - z_0| < R$ mediante una serie de potencias positivas y negativas centrada en z_0, entonces dicha serie es la serie de Laurent centrada en z_0.

Ejemplo 4: Hallar la serie de Laurent que representa a $f(z) = \frac{2}{z(z+2)}$ en un entorno reducido de $z_0 = 0$.

Como $D_{\text{ana}}(f) = \mathbb{C} - \{0,2\}$, la serie pedida converge en el anillo $0 < |z| < 2$. Se tiene:

$$\frac{2}{z+2} = \frac{1}{1+\left(\frac{z}{2}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} z^n \ \text{ si } \ |z| < 2$$

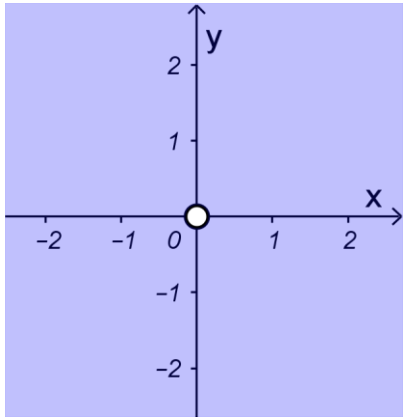
$$f(z) = \frac{2}{z(z+2)} = \frac{1}{z}\frac{2}{z+2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1+\left(\frac{z}{2}\right)} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} z^{n-1} =$$

$$= z^{-1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} z - \frac{1}{8} z^2 + \cdots \ \text{ si } \ 0 < |z| < 2$$

Como esta serie representa a $f(z)$ en el anillo $0 < |z| < 2$, entonces por unicidad es la serie de Laurent buscada.

Ejemplo 5: La función $f(z) = \left(z - \frac{1}{z}\right)^2$ admite un solo desarrollo de Laurent centrado en $z_0 = 0$. En efecto, $D_{\text{Ana}}(f) = \mathbb{C} - \{0\}$ así que el anillo de convergencia es $0 < |z| < \infty$ (es decir todo el plano complejo excepto el origen). Desarrollando el cuadrado del binomio:

$$f(z) = \left(\frac{1}{z} - z\right)^2 = \frac{1}{z^2} - 2 + z^2 \quad \text{si} \quad 0 < |z| < \infty$$



Como esta serie (que contiene finitas potencias positivas y negativas de z representa a $f(z)$ en la corona $0 < |z| < \infty$, entonces por unicidad es la serie de Laurent pedida.

Consta sólo de un número finito de términos no nulos:

- $b_n = 0$ si $n \geq 3$.
- $b_2 = 1; b_1 = 0$.
- $a_0 = -2; a_1 = 0; a_2 = 1$.
- $a_n = 0$ si $n \geq 3$.

Ejemplo 6: Hallar las series de Laurent de $f(z) = \frac{1}{(z-i)z}$ centradas en $z_0 = i$, especificando sus regiones de convergencia.

Rta $D_{\text{Ana}}(f) = \mathbb{C} - \{0, i\}$. Centrados en $z_0 = i$ la función admite dos representaciones en serie de Laurent:

- una converge en $A_1 : 0 < |z-i| < 1$.
- otra converge en $A_2 : 1 < |z-i| < \infty$.

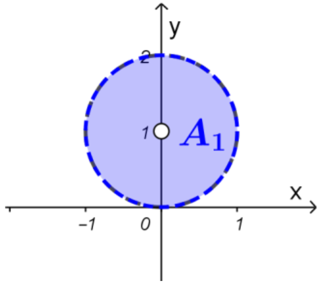
➢ Desarrollo en la corona $A_1 : 0 < |z-i| < 1$:

Serie de Taylor de $1/z$ centrada en $z_0 = i$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(z-i)+i} = \frac{-i}{1+\left(\frac{z-i}{i}\right)} \underbrace{=}_{\substack{\text{serie geom:}\\ a=-i \\ r=-\left(\frac{z-i}{i}\right)}} \sum_{n=0}^{\infty} (-i)\left(-\left(\frac{z-i}{i}\right)\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1) i^{n+1} (z-i)^n \quad \text{si } |z-i| < 1$$

Entonces,

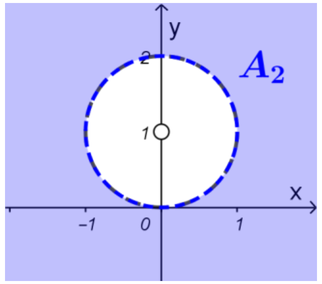
$$f(z) = \frac{1}{(z-i)z} = \frac{1}{(z-i)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1) i^{n+1} (z-i)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1) i^{n+1} (z-i)^{n-1} =$$
$$= -\frac{i}{(z-i)} + 1 + i(z-i) - (z-i)^2 + \cdots \quad \text{si } 0 < |z-i| < 1$$



Por unicidad, la serie obtenida es la de Laurent de $f(z)$ centrada en $z_0 = i$ convergente en la corona $0 < |z-i| < 1$.

➢ Desarrollo en la corona $A_2 : 1 < |z-i| < \infty$:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(z-i)+i} = \frac{\frac{1}{(z-i)}}{1+\left(\frac{i}{z-i}\right)} \underbrace{=}_{\substack{\text{serie geom:}\\ a=(z-i)^{-1} \\ r=-\left(\frac{i}{z-i}\right)}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-i)}\left(-\left(\frac{i}{z-i}\right)\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \frac{1}{(z-i)^{n+1}} =$$
$$= \frac{1}{(z-i)} - \frac{i}{(z-i)^2} - \frac{1}{(z-i)^3} + \frac{i}{(z-i)^4} + \cdots \quad \text{si } 1 < |z-i| < \infty$$



Al igual que las series de Taylor, las series de Laurent pueden “derivarse término a término” en el interior de su corona de convergencia. La serie obtenida converge en la misma corona y representa allí a la función derivada.

La integración <u>a lo largo de curvas</u> contenidas en el interior de la corona de convergencia también puede realizarse término a término.

<u>Ejemplo 7</u>: Hallar el desarrollo de Laurent de $f(z)=\frac{1}{(z-i)z^2}$ centrado en $z_0=i$ que converge en $1<|z-i|<\infty$.

<u>Rta</u>

En el ejemplo anterior vimos que

$$\frac{1}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n\frac{1}{(z-i)^{n+1}} \quad \text{si} \quad 1<|z-i|<\infty$$

Derivando término a término y cambiando signo, obtenemos la representación:

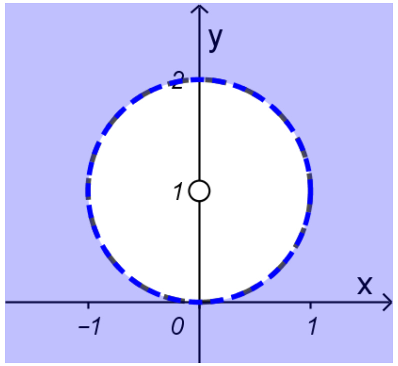
$$\frac{1}{z^2}=-\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z}\right)=-\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n\frac{1}{(z-i)^{n+1}}\right)=-\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{(z-i)^{n+1}}\right)=-\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n\frac{d}{dz}\left((z-i)^{-n-1}\right)=$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}(-n-1)(-i)^n(z-i)^{-n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-i)^n(z-i)^{-n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-i)^n\frac{1}{(z-i)^{n+2}} \quad \text{si} \quad 1<|z-i|<\infty$$

Luego,

$$f(z)=\frac{1}{(z-i)z^2}=f(z)=\frac{1}{(z-i)}\frac{1}{z^2}=\overbrace{\frac{1}{(z-i)}}^{0<|z-i|<\infty}\overbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-i)^n\frac{1}{(z-i)^{n+2}}}^{1<|z-i|<\infty}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-i)^n\frac{1}{(z-i)^{n+3}}=\frac{1}{(z-i)^3}-\frac{2i}{(z-i)^4}-\frac{3}{(z-i)^5}+\cdots \quad \text{si} \; 1<|z-i|<\infty$$



OPTATIVO

Ejemplo: Hallar todos los desarrollos de $f(z)=\frac{1}{z-z_1}$ en serie de potencias de $(z-z_0)$ siendo $z_0\neq z_1$.

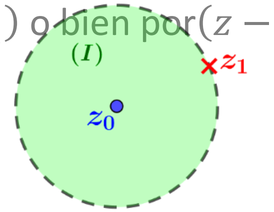
Rta f es analítica en z_0 pues $z_0\neq z_1$. Centrados en z_0 la función admite un desarrollo de Taylor (DST) en $|z-z_0|<|z_1-z_0|$ y un desarrollo de Laurent (DSL) en $|z_1-z_0|<|z-z_0|<\infty$. Para obtenerlos, ante todo centramos la expresión de $f(z)$.

$$f(z)=\frac{1}{z-z_1}=\frac{1}{(z-z_0)+(z_0-z_1)}\quad (*)$$

Esta expresión se asemeja a la forma de la suma de una serie geométrica de primer término a y razón r, la que permite reemplazarla por una serie:

$$\frac{a}{1-r}\overbrace{=}^{(**)}\sum_{n=0}^{\infty} ar^n \quad si\ |r|<1$$

Para obtener el 1 en el denominador de $(*)$, podemos dividir numerador y denominador ya sea por(z_0-z_1) o bien por$(z-z_0)$.

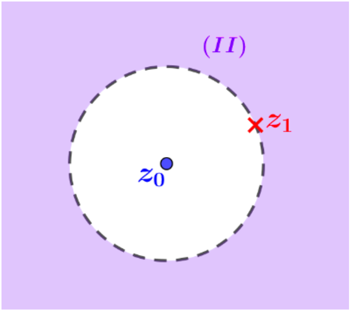


- Si dividimos por (z_1-z_0) resulta $r=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}$ de modo que con $(**)$ obtendremos una serie de potencias

  que convergerá para los z tales que $|r|<1$. Y dado que:

$$|r|<1\Leftrightarrow\left|\frac{z-z_0}{z_0-z_1}\right|<1\Leftrightarrow\frac{|z-z_0|}{|z_1-z_0|}<1\Leftrightarrow|z-z_0|<|z_1-z_0|$$

  La serie obtenida convergerá en el disco abierto $|z-z_0|<|z_1-z_0|$ y será la serie de Taylor de $f(z)$ centrada en z_0.



- Si dividimos por $(z-z_0)$ resulta $r=\frac{z_0-z_1}{z-z_0}$ de modo que con $(**)$ obtendremos una serie de potencias

  que convergerá para los z tales que $|r|<1$. Pero en este caso:

$$|r|<1\Leftrightarrow\left|\frac{z_0-z_1}{z-z_0}\right|<1\Leftrightarrow\frac{|z_1-z_0|}{|z-z_0|}<1\Leftrightarrow|z-z_0|>|z_1-z_0|$$

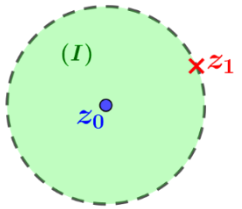
  La serie obtenida convergerá en la corona $|z_1-z_0|<|z-z_0|<\infty$ y será un desarrollo de Laurent de $f(z)$ centrado en z_0.

Entonces,

(I) Serie de Taylor centrada en z_0:

$$f(z)=\frac{1}{z-z_1}=\frac{1}{(z-z_0)+(z_0-z_1)}=\frac{\frac{1}{(z_0-z_1)}}{1+\left(\frac{z-z_0}{z_0-z_1}\right)}\overset{\substack{geom:\\ a=(z_0-z_1)^{-1}\\ r=-\left(\frac{z-z_0}{z_0-z_1}\right)=\left(\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right)}}{\overbrace{=}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z_0-z_1)}\left(\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right)^n=$$

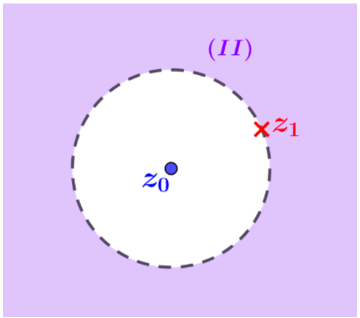
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)}{(z_1-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n \quad \text{si} \quad |z-z_0|<|z_1-z_0|$$



(II) Serie de Laurent centrada en z_0 convergente para $|z-z_0|>|z_1-z_0|$:

$$f(z)=\frac{1}{z-z_1}=\frac{1}{(z-z_0)+(z_0-z_1)}=\frac{\frac{1}{(z-z_0)}}{1+\left(\frac{z_0-z_1}{z-z_0}\right)}\overset{\substack{geom:\\ a=(z-z_0)^{-1}\\ r=-\left(\frac{z_0-z_1}{z-z_0}\right)=\left(\frac{z_1-z_0}{z-z_0}\right)}}{\overbrace{=}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-z_0)}\left(\frac{z_1-z_0}{z-z_0}\right)^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(z_1-z_0)^n\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} \quad \text{si} \quad |z_1-z_0|<|z-z_0|<\infty$$



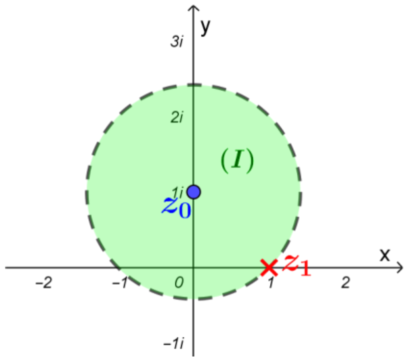
Por ejemplo, si $f(z) = \frac{1}{z-1}$ y $z_0 = i$, entonces $z_1 = 1$. Se tendrá:

(I) Serie de Taylor centrada en $z_0 = i$:

$$\begin{array}{c} geom: \\ a=(i-1)^{-1} \\ r=-\left(\frac{z-i}{i-1}\right) \\ CV \Leftrightarrow |z-i| \underbrace{<}_{=} |1-i| = \sqrt{2} \end{array}$$

$$f(z) = \frac{1}{z-1} = \frac{1}{(z-i)+(i-1)} = \frac{\frac{1}{(i-1)}}{1+\left(\frac{z-i}{i-1}\right)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(i-1)}\left[-\left(\frac{z-i}{i-1}\right)\right]^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)}{(1-i)^{n+1}}(z-i)^n \text{ si } |z-i| < \sqrt{2}$$

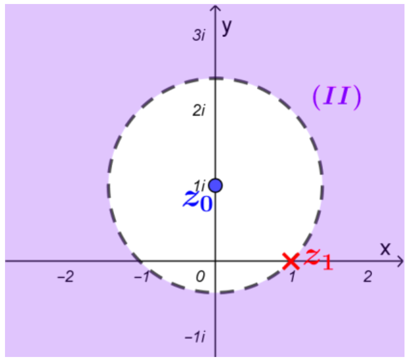


(II) Serie de Laurent centrada en $z_0 = i$ convergente para $|z-i| > |1-i| = \sqrt{2}$:

$$\begin{array}{c} geom: \\ a=(z-i)^{-1} \\ r=-\left(\frac{i-1}{z-i}\right) \\ CV \Leftrightarrow |z-i| \underbrace{>}_{=} |1-i| = \sqrt{2} \end{array}$$

$$f(z) = \frac{1}{z-1} = \frac{1}{(z-i)+(i-1)} = \frac{\frac{1}{(z-i)}}{1+\left(\frac{i-1}{z-i}\right)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-i)}\left[-\left(\frac{i-1}{z-i}\right)\right]^n = \sum_{n=0}^{\infty} (1-i)^n \frac{1}{(z-i)^{n+1}} \text{ si } \sqrt{2} < |z-i| < \infty$$



¡LINDO!

Ejemplo 8: Hallar los desarrollos de Laurent de $f(z) = \frac{z^2+1}{z(z^2-1)^2}$ centrados en $z_0 = 1$.

Rta $D_{ana}(f) = \mathbb{C} - \{-1,0,1\}$. Las coronas más grandes centradas en $z_0 = 1$ donde $f(z)$ está representada por una serie de Laurent son:

- (I) $0 < |z-1| < 1$
- (II) $1 < |z-1| < 2$
- (III) $2 < |z-1| < \infty$

Antes de comenzar, notemos que:

$$f(z) = \frac{z^2+1}{z(z^2-1)^2} = \frac{z^2+1}{z(z+1)^2(z-1)^2} = \overbrace{\frac{1}{(z-1)^2}}^{(1)} \frac{z^2+1}{z(z+1)^2}$$

El factor (1) ya es una serie de Laurent, convergente en el anillo $0 < |z-1| < \infty$.

Para tratar el segundo factor, conviene descomponerlo en suma de fracciones simples (para evitar productos de series):

$$h(z) = \frac{z^2+1}{z(z+1)^2} = \frac{A}{z} + \frac{B}{(z+1)} + \frac{C}{(z+1)^2} = \frac{A(z+1)^2+Bz(z+1)+Cz}{z(z+1)^2} =$$

$$= \frac{A(z^2+2z+1)+Bz(z+1)+Cz}{z(z+1)^2} = \frac{(A+B)z^2+(2A+B+C)z+A}{z(z+1)^2}$$

Entonces, $\begin{cases} A+B=1 \\ 2A+B+C=0 \\ A=1 \end{cases}$ cuya solución es $(A,B,C) = (1,0,-2)$. Luego,

$$h(z) = \frac{z^2+1}{z(z+1)^2} = \frac{1}{z} - \frac{2}{(z+1)^2}$$

$$h(z) = \frac{z^2+1}{z(z+1)^2} = \frac{1}{z} - \frac{2}{(z+1)^2}$$

➢ El término $\frac{1}{z}$ posee dos desarrollos de Laurent centrados en $z_0 = 1$:

(a) la serie de Taylor, convergente en el disco $|z-1| < 1$

(b) la serie de Laurent convergente en el anillo $1 < |z-1| < \infty$

Se obtienen así:

(a)

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(z-1)+1} \overbrace{=}^{\substack{geom: \\ a=1 \\ r=-(z-1) \\ CV \Leftrightarrow |z-1|<1}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n \quad \text{si } |z-1| < 1$$

(b)

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(z-1)+1} = \frac{\frac{1}{(z-1)}}{1+\frac{1}{(z-1)}} \overbrace{=}^{\substack{geom: \\ a=1 \\ r=-(z-1) \\ CV \Leftrightarrow |z-1|<1}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(z-1)^{n+1}} \quad \text{si } 1 < |z-1| < \infty$$

$$h(z)=\frac{z^2+1}{z(z+1)^2}=\frac{1}{z}-\frac{2}{(z+1)^2}$$

- El término $\frac{2}{(z+1)^2}$ posee dos desarrollos de Laurent centrados en $z_0=1$:

(c) la serie de Taylor, convergente en el disco $|z-1|<2$

(d) la serie de Laurent convergente en el anillo $2<|z-1|<\infty$

Se obtienen derivando así:

(c)

$$\frac{2}{z+1}=\frac{2}{(z-1)+2}=\frac{1}{1+\left(\frac{z-1}{2}\right)}\underbrace{\overset{\substack{geom:\\ a=1\\ r=-(z-1)/2\\ CV\Leftrightarrow |z-1|<2}}{=}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(z-1)^n\ \text{ si }\ |z-1|<2$$

Derivando,

$$\frac{2}{(z+1)^2}=-\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(z-1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{2^n}(z-1)^{n-1}\ \text{ si }\ |z-1|<2$$

(d)

$$\frac{2}{z+1}=\frac{2}{(z-1)+2}=\frac{\frac{2}{z-1}}{1+\left(\frac{2}{z-1}\right)}\underbrace{\overset{\substack{geom:\\ a=2/(z-1)\\ r=-2/(z-1)\\ CV\Leftrightarrow 2<|z-1|<\infty}}{=}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n2^{n+1}\frac{1}{(z-1)^{n+1}}\ \text{ si }\ 2<|z-1|<\infty$$

Derivando,

$$\frac{2}{(z+1)^2}=-\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n2^{n+1}(z-1)^{-n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n2^{n+1}(n+1)\frac{1}{(z-1)^{n+2}}\ \text{ si }\ 2<|z-1|<\infty$$

Entonces:

(I) $0 < |z-1| < 1$: acá se usan los desarrollos (a) y (c).

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2}\frac{z^2+1}{z(z+1)^2} = \frac{1}{(z-1)^2}\left(\frac{1}{z} - \frac{2}{(z+1)^2}\right) =$$

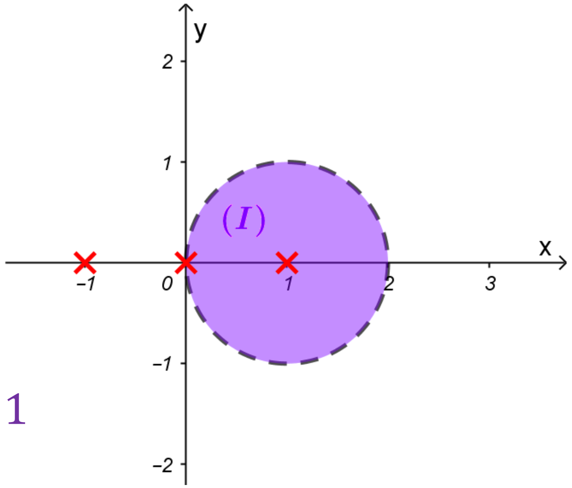
$$= \frac{1}{(z-1)^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{2^n}(z-1)^{n-1}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{2^n}(z-1)^{n-3} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+2}(n+1)}{2^{n+1}}(z-1)^{n-2} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1 - \frac{n+1}{2^{n+1}}\right)(z-1)^{n-2} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{(z-1)} + \frac{5}{8} - \frac{3}{4}(z-1) + \cdots \quad \text{si } 0 < |z-1| < 1$$



(II) $1 < |z-1| < 2$: acá se usan los desarrollos (b) y (c).

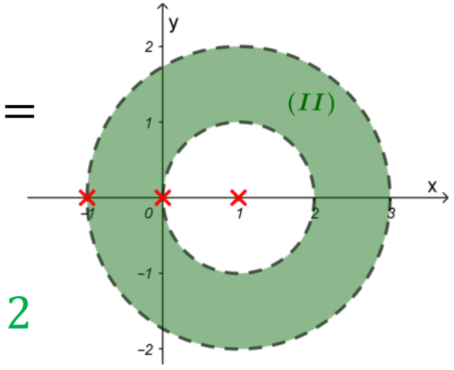
$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2}\frac{z^2+1}{z(z+1)^2} = \frac{1}{(z-1)^2}\left(\frac{1}{z} - \frac{2}{(z+1)^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{(z-1)^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-1)^{n+1}} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{2^n}(z-1)^{n-1}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-1)^{n+3}} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{2^n}(z-1)^{n-3} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-1)^{n+3}} - \frac{1}{2}(z-1)^{-2} + \frac{1}{2}(z-1)^{-1} + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{2^n}(z-1)^{n-3} =$$

$$= \cdots + \frac{1}{(z-1)^3} - \frac{1}{2}\frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{(z-1)} + \frac{3}{8} - \frac{1}{4}(z-1) + \cdots \quad \text{si } 1 < |z-1| < 2$$



(III) $2 < |z-1| < \infty$: acá se usan los desarrollos (b) y (d).

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2}\frac{z^2+1}{z(z+1)^2} = \frac{1}{(z-1)^2}\left(\frac{1}{z} - \frac{2}{(z+1)^2}\right) =$$

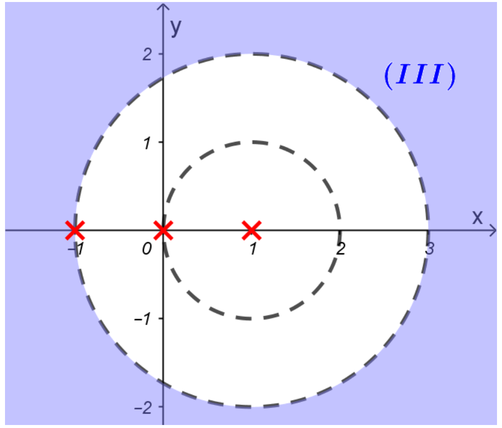
$$= \frac{1}{(z-1)^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-1)^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{n+1}(n+1)\frac{1}{(z-1)^{n+2}}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-1)^{n+3}} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}2^{n+1}(n+1)\frac{1}{(z-1)^{n+4}} =$$

$$= \frac{1}{(z-1)^3} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-1)^{n+3}} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2^n n\frac{1}{(z-1)^{n+3}} =$$

$$= \frac{1}{(z-1)^3} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1+2^n n)\frac{1}{(z-1)^{n+3}} =$$

$$= \frac{1}{(z-1)^3} - \frac{3}{(z-1)^4} + \frac{9}{(z-1)^5} - \frac{25}{(z-1)^6} + \cdots \quad \text{si } 2 < |z-1| < \infty$$



Ejercicio: Hallar todos los desarrollos de Laurent de $f(z)$ centrados en z_0, indicando y graficando sus regiones de convergencia.

a) $f(z) = \frac{4}{z(z-2)^2} \quad ; \quad z_0 = 2$

b) $f(z) = \frac{z+1}{z^3-z^2} \quad ; \quad z_0 = 1$

c) $f(z) = \frac{\mathrm{Ln}\,(z+1)}{z^3} \quad ; \quad z_0 = 0$

d) $f(z) = \frac{1}{z(z-1)} \quad ; \quad z_0 = -1$

e) $f(z) = \frac{2}{(z-i)} \operatorname{sen}^2\left[\frac{2}{(z-i)^3}\right] \quad ; \quad z_0 = i$

Rta

a) $f(z) = \frac{4}{z(z-2)^2}$; $z_0 = 2$ $\quad D_{ana}(f) = \mathbb{C} - \{0,2\}$

Para obtener los desarrollos de Laurent conviene escribir la función como un producto:

$$f(z) = \frac{4}{z(z-2)^2} = \frac{1}{(z-2)^2}\frac{4}{z}$$

El factor $\frac{1}{(z-2)^2}$ es analítico en $\mathbb{C} - \{2\}$ y ya está desarrollado en serie de potencias de $(z-2)$ (sólo tiene un término no nulo, el que corresponde a la potencia $n = -2$) y converge en la corona $0 < |z-2| < \infty$.

La función $g(z) = \frac{4}{z}$ es analítica en $z_0 = 2$. Centrados en este punto admite dos desarrollos de Laurent: el desarrollo de Taylor (DST) convergente en $|z-2| < 2$ y un desarrollo de Laurent (DSL) convergente en $2 < |z-2| < \infty$. Para obtenerlos, ante todo centramos la expresión de $g(z)$ en $z_0 = 2$:

$$g(z) = \frac{4}{z} = \frac{4}{(z-2)+2} \quad (*)$$

A continuación razonamos con las series geométricas.

(I) Serie de Laurent de $f(z)$ convergente en la corona $0 < |z-2| < 2$. En $(*)$ dividimos numerador y denominador por 2:

$$\frac{4}{z} = \frac{4}{(z-2)+2} = \frac{2}{1+\left(\frac{z-2}{2}\right)} \underbrace{\overset{\substack{geom: \\ a=2 \\ r=-\left(\frac{z-2}{2}\right) \\ CV \Leftrightarrow |z-2|<2}}{=}} \sum_{n=0}^{\infty} 2\left(-\left(\frac{z-2}{2}\right)\right)^{n}$$

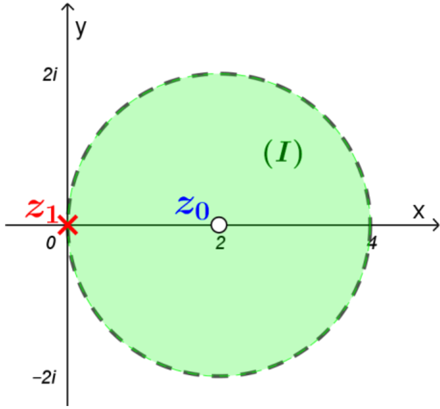
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}(z-2)^n \quad \text{si} \quad |z-2| < 2$$

Entonces,

$$f(z) = \frac{4}{z(z-2)^2} = \frac{1}{(z-2)^2}\frac{4}{z} = \underbrace{\frac{1}{(z-2)^2}}_{0<|z-2|<\infty} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}(z-2)^n}_{\text{si } |z-2|<2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}(z-2)^{n-2}$$

$$=$$

$$= \frac{2}{(z-2)^2} - \frac{1}{(z-2)} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(z-2)^{n-2} + \cdots \quad \text{si} \quad 0 < |z-2| < 2$$



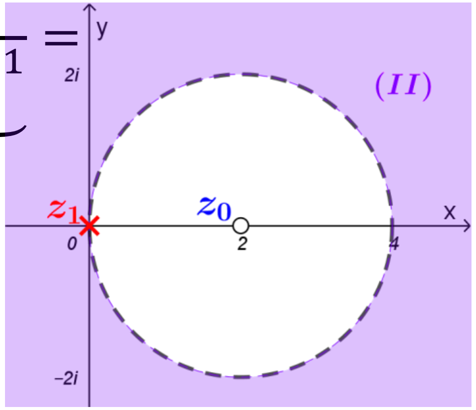
(II) Serie de Laurent de $f(z)$ convergente en la corona $2 < |z-2| < \infty$. En $(*)$ dividimos numerador y denominador por $(z-2)$:

$$\frac{4}{z} = \frac{4}{(z-2)+2} = \frac{\frac{4}{(z-2)}}{1+\left(\frac{2}{z-2}\right)} \overset{\substack{geom: \\ a=4/(z-2) \\ r=-\left(\frac{2}{z-2}\right) \\ CV \Leftrightarrow |z-2|>2}}{\overbrace{=}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(z-2)}\left(-\left(\frac{2}{z-2}\right)\right)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^{n+2} \frac{1}{(z-2)^{n+1}} \quad \text{si} \quad 2 < |z-2| < \infty$$

Entonces,

$$f(z) = \frac{4}{z(z-2)^2} = \frac{1}{(z-2)^2}\frac{4}{z} = \underbrace{\frac{1}{(z-2)^2}}_{0<|z-2|<\infty} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-2)^{n+2} \frac{1}{(z-2)^{n+1}}}_{\text{si} 2<|z-2|<\infty} =$$



$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^{n+2} \frac{1}{(z-2)^{n+3}} =$$

$$= \frac{4}{(z-2)^3} - \frac{8}{(z-2)^4} + \frac{16}{(z-2)^5} + \cdots \quad \text{si} \quad 2 < |z-2| < \infty$$

b) $f(z) = \frac{z+1}{z^3-z^2}$; $\quad z_0 = 1 \qquad\qquad D_{ana}(f) = \mathbb{C} - \{0,1\}$

Se tiene: $$f(z) = \frac{z+1}{z^3-z^2} = \frac{z+1}{(z-1)z^2} = \frac{1}{(z-1)}(z+1)\frac{1}{z^2}$$

El factor $\frac{1}{z-1}$ ya está desarrollado en serie de potencias de $z-1$ (el único término no nulo es el de la potencia $n=-1$) y converge en la corona $0 < |z-1| < \infty$.

El factor $(z+1)$ es analítico en $\mathbb{C}$. Su serie de Taylor centrada en $z_0 = 1$ se obtiene simplemente centrando: $z+1 = 2 + (z-1)$ si $|z-1| < \infty$.

La función $g(z) = \frac{1}{z^2}$ es analítica en $z_0 = 1$. Centrados en este punto admite un desarrollo de Taylor (DST) en $|z-1| < 1$ y un desarrollo de Laurent (DSL) en $1 < |z-1| < \infty$. Para hallarlos, consideramos:

$$h(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{(z-1)+1} \quad (*)$$

(I) Serie de Laurent de $f(z)$ convergente en $0<|z-1|<1$:

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{1+(z-1)}\underset{\substack{geom:\\ a=1\\ r=-(z-1)\\ CV\Leftrightarrow |z-1|<1}}{\overbrace{=}}\sum_{n=0}^{\infty}\big(-(z-1)\big)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n \quad \text{si } \ |z-1|<1$$

Derivando término a término y cambiando signo:

$$\frac{1}{z^2}=-\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n(z-1)^{n-1} \text{ si } \ |z-1|<1$$

$$h(z)=\frac{1}{z}=\frac{1}{(z-1)+1} \quad (*)$$

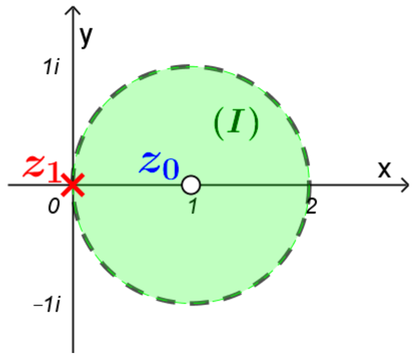
Entonces,

$$f(z)=\frac{z+1}{z^3-z^2}=\frac{1}{(z-1)}(z+1)\frac{1}{z^2}=\underbrace{\frac{1}{(z-1)}}_{0<|z-1|<\infty}\ \underbrace{[2+(z-1)]}_{|z-1|<\infty}\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n(z-1)^{n-1}}_{\text{si } \ |z-1|<1}=$$

$$=\left[\frac{2}{(z-1)}+1\right]\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n(z-1)^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}2n(z-1)^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n(z-1)^{n-1}=$$

$$=\frac{2}{(z-1)}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(2n+4)(z-1)^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(z-1)^n=$$

$$=\frac{2}{(z-1)}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+3)(z-1)^n=\frac{2}{(z-1)}-3+4(z-1)-5(z-1)^2+\cdots \quad \text{si } \ 0<|z-1|<1$$



(II) Serie de Laurent de $f(z)$ convergente en $1<|z-1|<\infty$:

$$f(z)=\frac{z+1}{z^3-z^2}=\frac{z+1}{(z-1)z^2}=\frac{1}{(z-1)}(z+1)\frac{1}{z^2}$$

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{(z-1)+1}=\frac{\frac{1}{(z-1)}}{1+\frac{1}{(z-1)}}\overset{\substack{geom:\\ a=(z-1)^{-1}\\ r=-\left(\frac{1}{z-1}\right)\\ CV\Leftrightarrow|z-1|>1}}{\widehat{=}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-1)}\left(-\frac{1}{(z-1)}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^{-(n+1)}\quad \text{si}\quad 1<|z-1|<\infty$$

Derivando término a término y cambiando signo:

$$\frac{1}{z^2}=-\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(z-1)^{-(n+2)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)\frac{1}{(z-1)^{n+2}}\quad \text{si}\quad 1<|z-1|<\infty$$

Entonces,

$$f(z)=\frac{z+1}{z^3-z^2}=\frac{1}{(z-1)}(z+1)\frac{1}{z^2}=\underbrace{\frac{1}{(z-1)}}_{0<|z-1|<\infty}\underbrace{[2+(z-1)]}_{|z-1|<\infty}\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)\frac{1}{(z-1)^{n+2}}}_{\text{si}\ 1<|z-1|<\infty}=\left[\frac{2}{(z-1)}+1\right]\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)\frac{1}{(z-1)^{n+2}}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+2)\frac{1}{(z-1)^{n+3}}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)\frac{1}{(z-1)^{n+2}}=$$

$$=\frac{1}{(z-1)^2}+\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n-1}(2n-4)\frac{1}{(z-1)^n}+\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n(n-1)\frac{1}{(z-1)^n}=$$

$$=\frac{1}{(z-1)^2}+\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n-1}(n-3)\frac{1}{(z-1)^n}=\frac{1}{(z-1)^2}-\frac{1}{(z-1)^4}+\frac{2}{(z-1)^4}-\cdots\quad si\quad 0<|z-1|<1$$