Otra propiedad del campo electrostático

Comenzamos el curso estableciendo las características de la fuerza de Coulomb entre dos cargas puntuales y definimos al campo electrostático como proporcional a ésta. La dependencia con la inversa del cuadrado de la distancia de la fuerza de Coulomb se "traslada" al campo eléctrico y se desprende la Ley de Gauss.

Ahora vamos a emprender el estudio de otra característica de la fuerza de Coulomb, y es la que tiene que ver con los conceptos de trabajo y energía. Calcularemos el trabajo de esta fuerza y los resultados se los "trasladaremos" al campo electrostático. Esto dará lugar a la propiedad de conservatividad del campo electrostático, a la definición de energía potencial electrostática y a la de potencial electrostático.

Repaso de integral de línea de Matemática B

6.3 Integral de línea de un campo vectorial

Un concepto muy utilizado en Fisica es el de trabajo de una fuerza *al mover un objeto de un punto a otro del espacio. Sabemos que, en el caso particular en que la fuerza* $\vec{F}$ *es contante y el movimiento es en linea recta con un desplazamiento* $\vec{d}$*, el trabajo se calcula como el producto escalar* $\vec{F} \cdot \vec{d}$*. En esta seccion veremos como se define y calcula el trabajo en el caso general de un campo de fuerzas variable, cuando el objeto se mueve siguiendo una trayectoria arbitraria. Para ello, introduciremos la nocion de integral de linea de un campo vectorial a lo largo de una curva.*

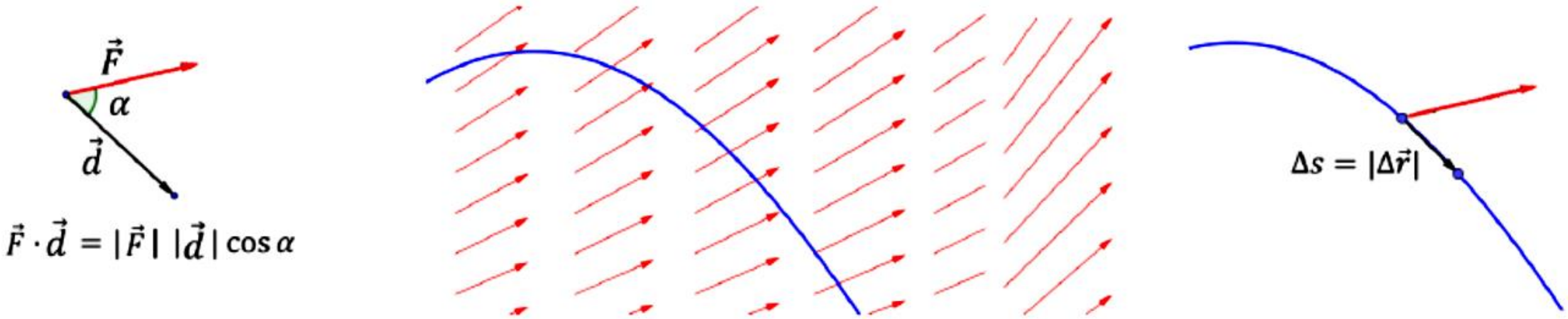


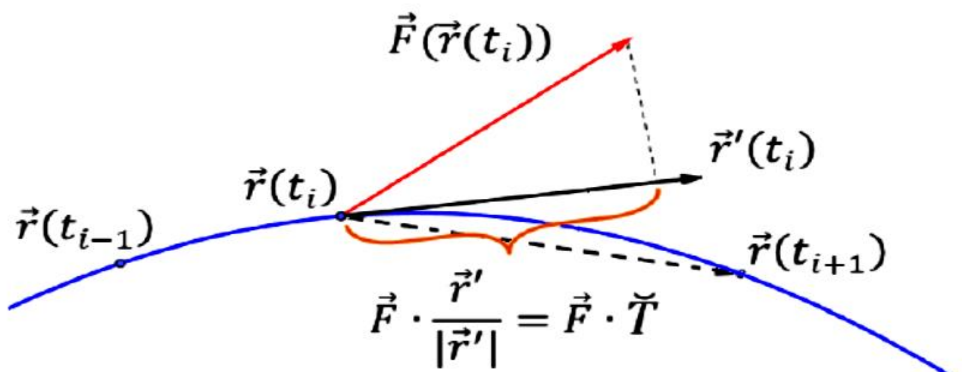
Figura 6.5: Trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$ para mover la partícula, a lo largo del subarco.

Repaso de integral de línea de Matemática B

Consideremos una curva suave C (en el espacio), parametrizada por la funcion vectorial $\vec{r}(t)$ que es continua en $[a, b]$ y tal que $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$ para todo $t \in [a, b]$. Como hicimos para definir integral de línea de una función escalar, aproximaremos la curva C por una poligonal formada por pequeños segmentos de longitud Δs. Si Δs es muy pequeño, entonces cuando el objeto se mueve de un extremo al otro del i-ésimo subarco, avanza aproximadamente en la dirección tangente a la curva, dada por $\dfrac{\vec{r}\,'(t_i)}{|\vec{r}\,'(t_i)|}$. ¿Cuál es el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$ para mover la partícula, a lo largo del subarco? Esto es el producto escalar de la fuerza por el vector desplazamiento:

$$\vec{F}(x_i, y_i, z_i) \cdot \left[\Delta s \frac{\vec{r}\,'(t_i)}{|\vec{r}\,'(t_i)|}\right] = \left[\vec{F}(x_i, y_i, z_i) \cdot \frac{\vec{r}\,'(t_i)}{|\vec{r}\,'(t_i)|}\right] \Delta s$$

que puede interpretarse como el valor de la componente tangencial del campo, multiplicada por la longitud del elemento de arco.



$$W = \int_a^b \left[\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|}\right] |\vec{r}\,'(t)|dt = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt$$

Figura 6.6: Cada elemento de arco aporta al trabajo una cantidad dada por el valor de la componente tangencial del campo multiplicada por la longitud del elemento de arco.

Repaso de integral de línea de Matemática B

6.1.3 Campo vectorial conservativo y función potencial

Estudiaremos una clase particular de campos vectoriales, que tiene importancia en aplicaciones físicas: los llamados *campos vectoriales conservativos*. Damos ahora su definición y más adelante veremos un teorema que da una condición suficiente para determinar si un dado campo vectorial es conservativo o no.

> **Definición 6.1.4** Un campo vectorial $\vec{F}$ se dice *conservativo en E* si es el gradiente de alguna función escalar, es decir, si existe una función f tal que $\vec{F} = \vec{\nabla} f$ para todo punto de E. En tal caso, f se llama *función potencial* de $\vec{F}$.

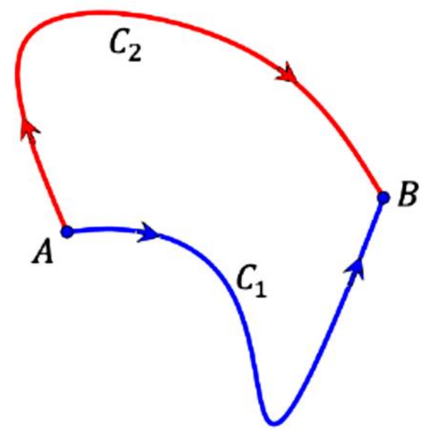
C Observamos que si $f(x, y)$ es una función potencial del campo vectorial conservativo $\vec{F}(x, y) = \breve{\imath}P(x, y) + \breve{\jmath}Q(x, y)$ en el plano, entonces:

$$P(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \qquad Q(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

Hoy veremos por qué hay una relación entre campo vectorial conservativo y función potencial

Repaso de integral de línea de Matemática B

Definición 6.4.1 — Independencia de la trayectoria. Si $\vec{F}$ es un campo vectorial continuo definido en una región D, diremos que la integral de línea de $\vec{F}$ es *independiente de la trayectoria* en D, si $\int_{C_1} F \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} F \cdot d\vec{r}$ para cualquier par de trayectorias C_1 y C_2 en D, que tengan *el mismo punto inicial y el mismo punto final.*



Teorema 6.4.3 Supongamos que $\vec{F}$ es un campo vectorial continuo en una región D. La integral de línea de $\vec{F}$ es *independiente de la trayectoria* en D si y sólo si $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ para cualquier curva cerrada C en D.

C *Si $\vec{F}$ es un campo vectorial conservativo en una región D, entonces la integral de línea de $\vec{F}$ a lo largo de cualquier curva cerrada C en D se anula, es decir:* $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0.$

Trabajo Eléctrico y Potencial Eléctrico

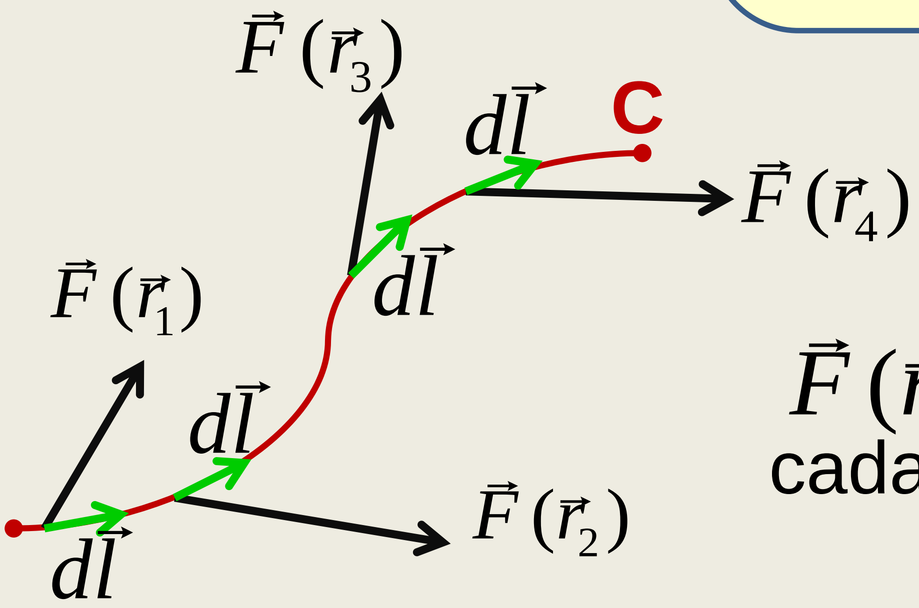
Veamos cómo se aplican los conceptos de trabajo y energía a la interacción electrostática:

Sea $\vec{F}$ una fuerza que varía con la posición: $\vec{F}(\vec{r})$

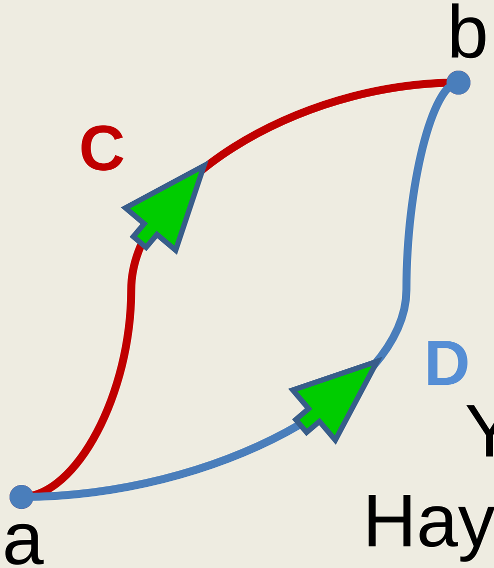
Definición de Trabajo:

$$\boxed{W_{a\to b} = \int_C \vec{F}(\vec{r}) \bullet d\vec{l}}$$

Integral de línea sobre el camino C



$\vec{F}(\vec{r})$ se debe calcular sobre cada punto de la curva C



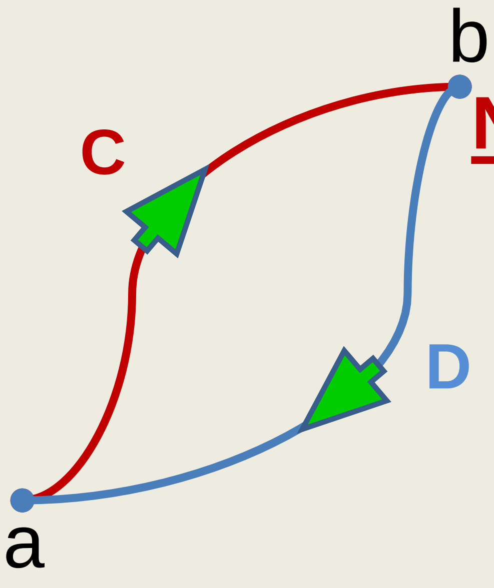
En general, se cumple que:

$$\int_C \vec{F}(\vec{r})\bullet d\vec{l} \neq \int_D \vec{F}(\vec{r})\bullet d\vec{l}$$

Ya que la integral depende del camino

Hay casos especiales en los que se cumple:

$$\int_C \vec{F}(\vec{r})\bullet d\vec{l} = \int_D \vec{F}(\vec{r})\bullet d\vec{l} \quad \forall\, curvas\ C\ y\ D$$



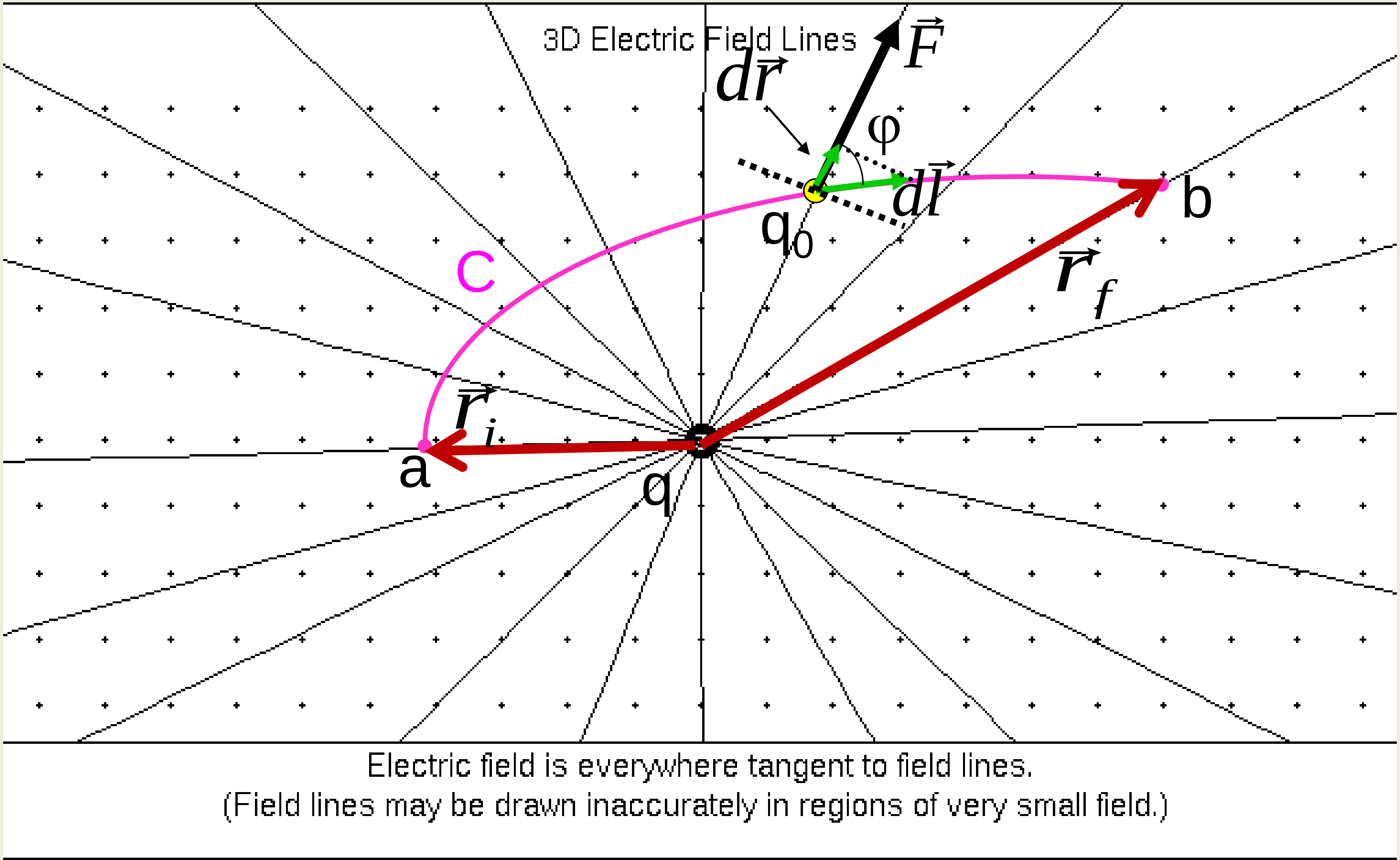
No depende del camino, solo de a y b

$$\oint_C \vec{F}\bullet d\vec{l} = 0 \quad \forall\, curva\ C$$

Fuerza conservativa

¿Será conservativa la fuerza de Coulomb?

Supongamos una carga puntual q y una de prueba q_0



¿Será conservativa la fuerza de Coulomb?

$$W_{i\to f} = \int_{ri}^{rf} \vec{F} \bullet d\vec{l} = \int_{ri}^{rf} F\, dl \cos(\varphi)$$

$$pero \quad dl\cos(\varphi) = dr$$

$$\therefore W_{i\to f} = \int_{ri}^{rf} F\, dr = \frac{q\,q_0}{4\pi\,\varepsilon_0} \int_{ri}^{rf} \frac{1}{r^2} dr =$$

$$= \frac{q\,q_0}{4\pi\,\varepsilon_0}\ \frac{1}{r_i} - \frac{q\,q_0}{4\pi\,\varepsilon_0}\ \frac{1}{r_f} =$$

$$= \quad U(r_i) \quad - \quad U(r_f) \;\; = -[U(r_f) - U(r_i)]$$

$$\therefore W_{i\to f} = -\Delta U \qquad \therefore F_{Coulomb}\ es\ conservativa$$

Como la curva C es arbitraria, <u>el resultado anterior vale para cualquier camino que conecte r_i y r_f</u>

Definición de potencial eléctrico :

energía potencial por unidad de carga

$$V(r) \equiv \frac{U(r)}{q_0} \qquad \left[\frac{Joule}{Coulomb}\right] = [Volt] \;\Rightarrow\; \text{¡ ESCALAR !}$$

Para una carga puntual :

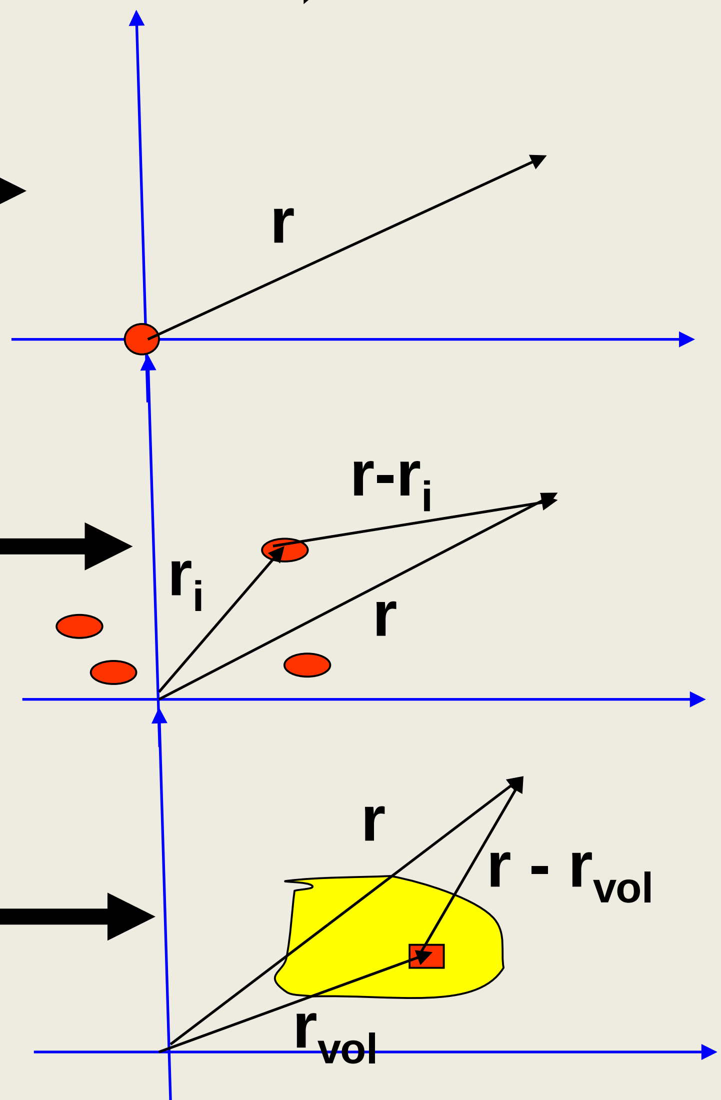
$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

Para un sistema de N cargas :

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{r - r_i}$$

Si la distribución *es* continua :

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{vol}\frac{dq_{vol}}{r - r_{vol}}$$



Prob P1, P2, P3 y C1
Práctica 4

P5, P6, P8, P9, P10, P11, P12
Práctica 4

Como la fuerza de Coulomb es conservativa, el campo electrostático también lo es. La deducción anterior se puede realizar reemplazando a F por qE en la integral y llegaríamos al mismo resultado respecto de la independencia de la integral de línea con el camino elegido.

La condición de campo conservativo se puede escribir en forma matemática como:

$$\boxed{\oint_C \vec{E} \bullet d\vec{l} = 0 \quad \forall\, curva\, C}$$

<u>Esta ecuación expresa una propiedad del campo electrostático y será la base de una de las ecuaciones fundamentales del Electromagnetismo.</u>

$$W_{i\to f} = -\Delta U = -[U(r_f) - U(r_i)] = -q_0[V(r_f) - V(r_i)]$$

pero por definición :

$$W_{i\to f} = \int_i^f \vec{F} \bullet d\vec{l} = \int_i^f q_0 \vec{E} \bullet d\vec{l} = q_0 \int_i^f \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

$\therefore$ igualando ambos resultados :

$$\boxed{V_f - V_i = -\int_i^f \vec{E} \bullet d\vec{l}}$$

Ecuación para calcular la DDP entre dos puntos, conocido $\vec{E}$

$$V_f - V_i \equiv \Delta V = -\int_i^f \vec{E} \bullet d\vec{l} = \int_i^f dV$$

$$\therefore \quad dV = -\vec{E} \bullet d\vec{l} \qquad (1)$$

En general, podemos escribir :

$$V = V(x,y,z);\ dV \equiv \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz \qquad (2)$$

$$\vec{E} = (E_x(x,y,z),\ E_y(x,y,z),\ E_z(x,y,z))$$

$$d\vec{l} = (dx, dy, dz)$$

$\therefore$ volviendo a (1) :

$$dV = -[E_x\,dx + E_y\,dy + E_z\,dz] \qquad (3)$$

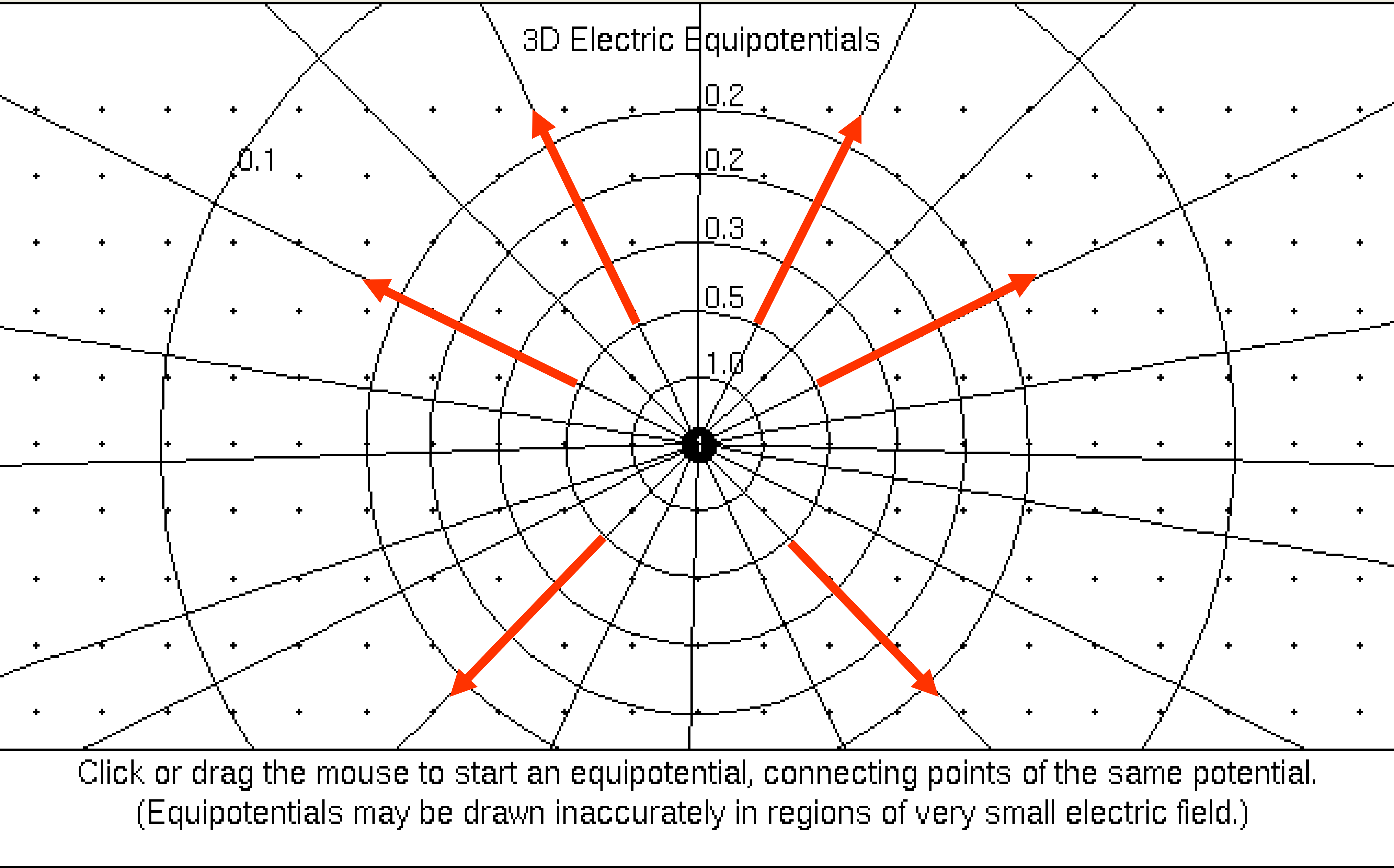
comparando (2) y (3) :

Prob 4, Práctica 4

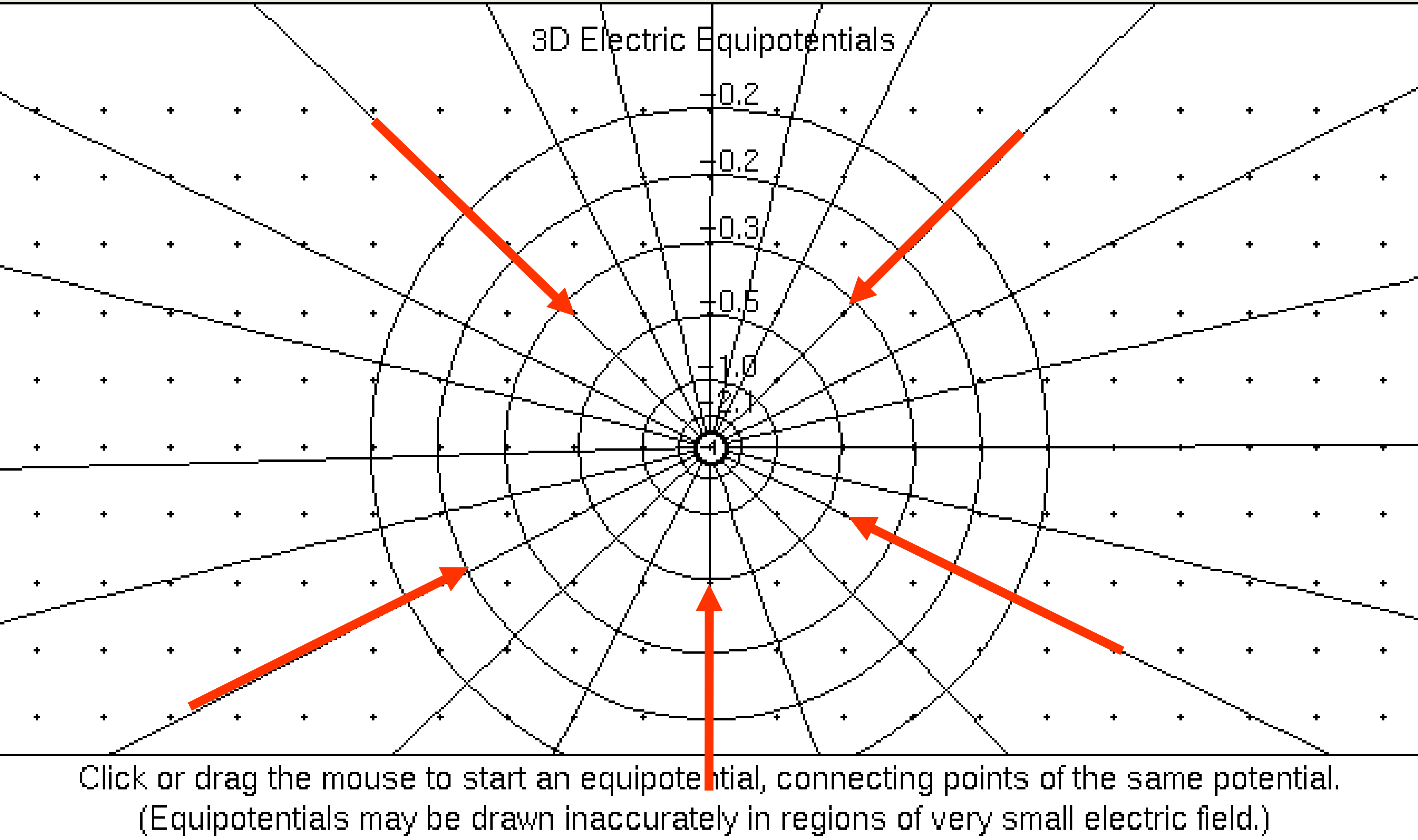
$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

$\therefore$ $\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla} V}$ Relación campo eléctrico $\leftrightarrow$ potencial

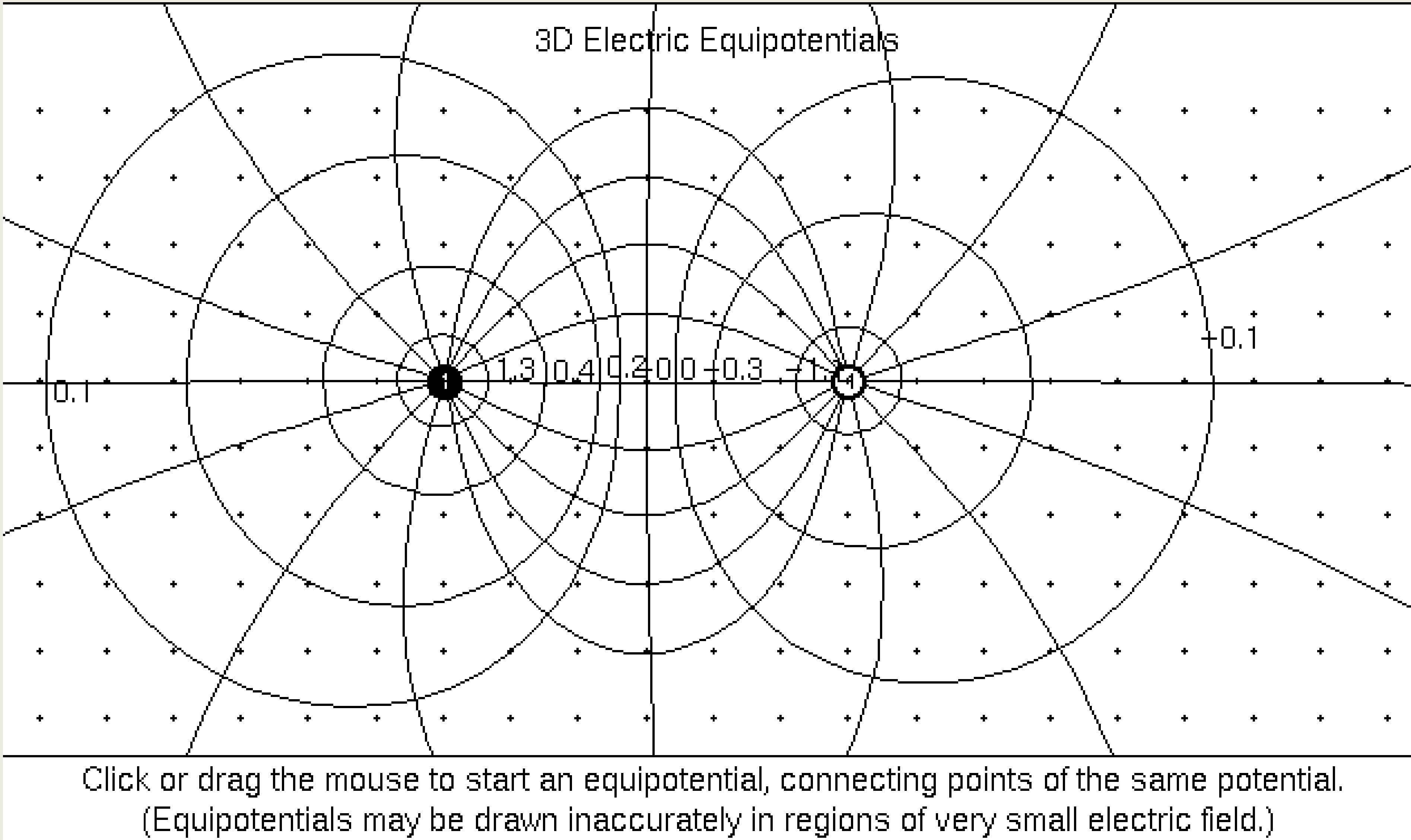
Campo y equipotenciales para una carga puntal positiva



Campo y equipotenciales para una carga puntal negativa



Campo y equipotenciales para un dipolo



Aplicación de la Ley de Gauss a conductores cargados

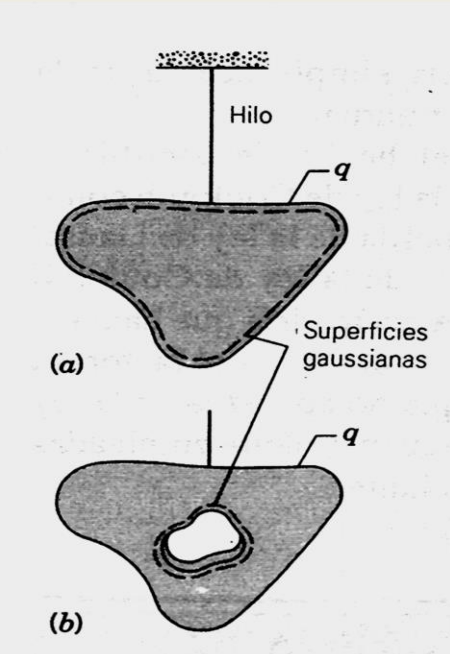
Conductor ideal: libre movimiento de cargas en volumen

¿Exceso de carga?: como están libres de moverse, luego de un corto tiempo (respecto de los tiempos de medición), las cargas llegan a sus posiciones finales de equilibrio: equilibrio electrostático

Una vez alcanzado el equilibrio electrostático, el campo eléctrico dentro de un conductor debe ser nulo, ya que no existe movimiento de cargas.

$\vec{E} = 0$ dentro de un conductor en equilibrio electrostático

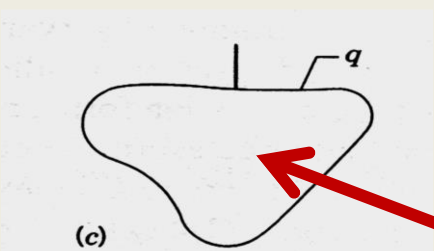
Conductores en equilibrio electrostático



$$\oint\!\!\oint_S \vec{E}\bullet d\vec{a} = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

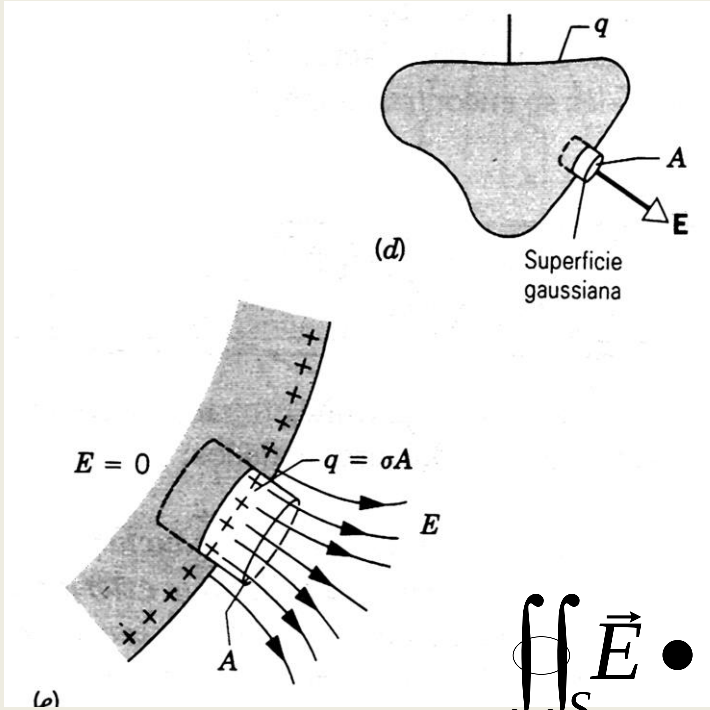
= 0 dentro del conductor

por lo tanto la carga en exceso se distribuye en la superficie externa



Si aumentamos el volumen de la cavidad hasta que llegue a la superficie externa, se forma un “cascarón” conductor cargado en equilibrio: E = 0 dentro de un “cascarón” conductor cargado en equilibrio

Conductores en equilibrio electrostático



$\bar{E}$ es $\perp$ a la superficie del conductor. Si existiera componente tangencial las cargas se moverían y dejaría de estar en equilibrio electrostático

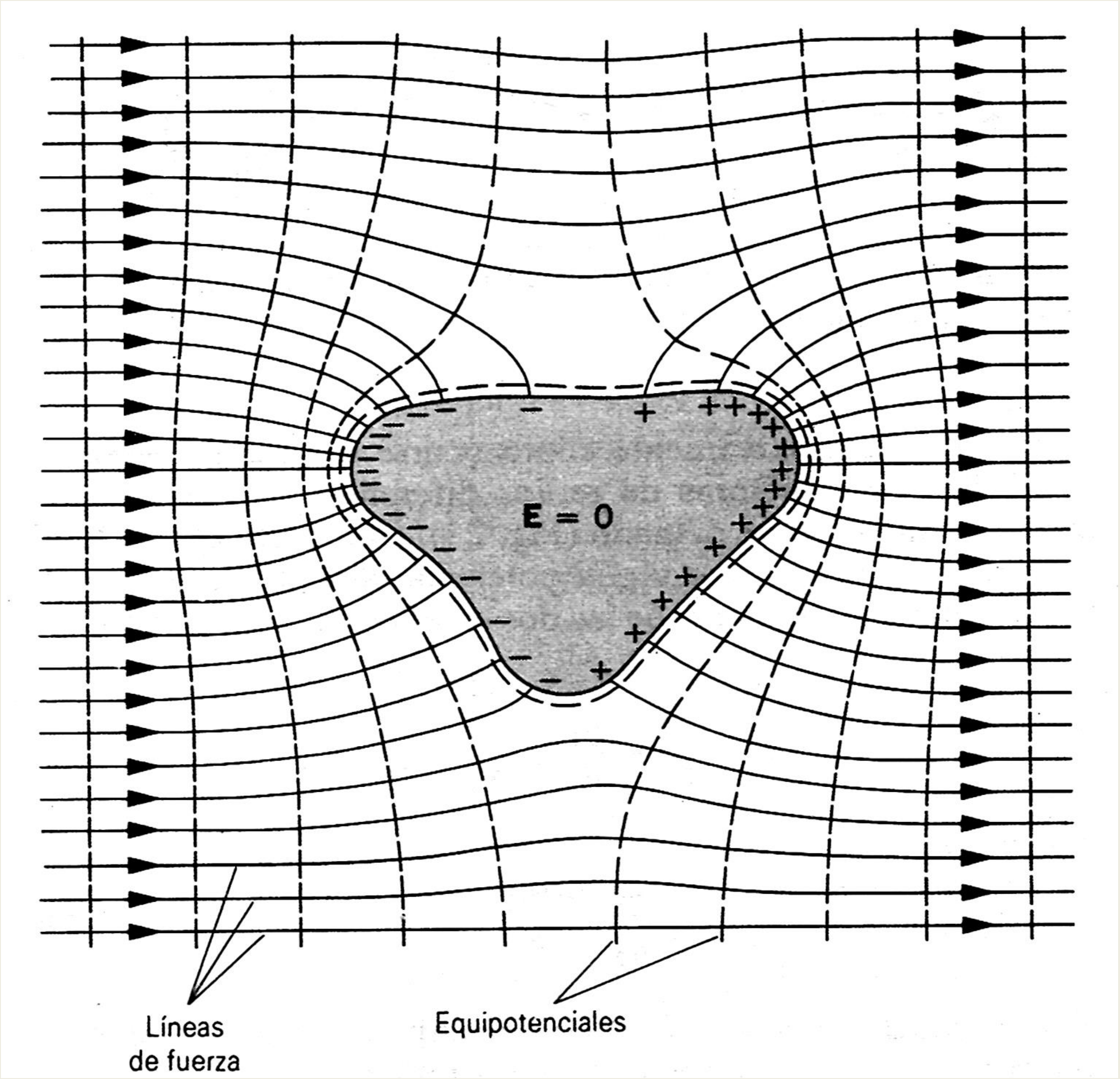
$$\oint\!\!\oint_S \vec{E}\bullet d\vec{a} = \overbrace{\cancel{\iint_{tapa\,\mathrm{int}}\vec{E}\bullet d\vec{a}} + \cancel{\iint_{lateral}\vec{E}\bullet d\vec{a}}}^{E_{int} = 0} + \overbrace{\iint_{tapa\,ext}\vec{E}\bullet d\vec{a}}^{E\;A}$$

$$\therefore E\;\cancel{A} = \frac{q_{\mathrm{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma\;\cancel{A}}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

Campo eléctrico en la superficie de un conductor

Líneas de campo eléctrico y equipotenciales para un conductor descargado en un campo eléctrico uniforme



La energía potencial se define a menos de una constante.

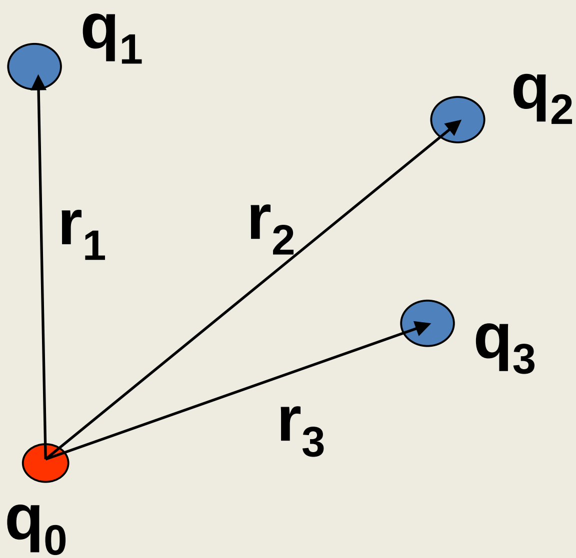
Se elige un punto que arbitrariamente le asignamos un valor dado: Referencial

Para el caso de dos cargas puntuales:

$$U(r) \propto \frac{1}{r} \rightarrow 0 \;\; cuando\; r \rightarrow \infty$$

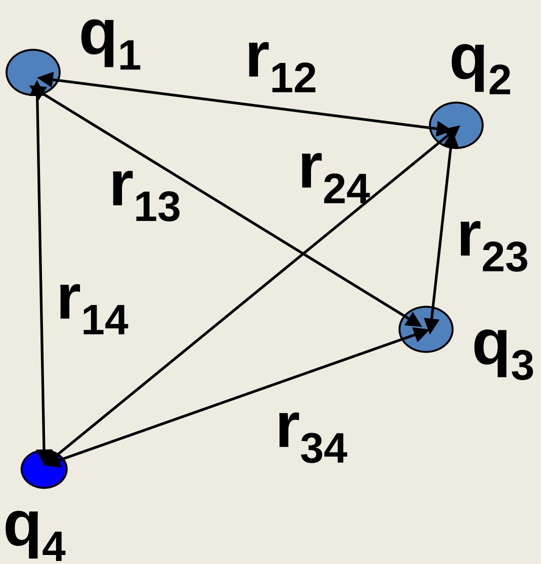
$$\therefore \quad W_{r\rightarrow\infty} = -[U(\infty) - U(r)] = \frac{q\, q_0}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r}$$

La energía potencial depende de la distancia r entre las cargas q y q_0



Si q_0 se encuentra en el campo de N cargas puntuales ⟶ Principio de superposición

$$U(r) = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{r_i}$$



$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_1 q_4}{r_{14}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + \ldots\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

Energía de un sistema de cargas

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1\, q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_1 q_4}{r_{14}} + \frac{q_2\, q_3}{r_{23}} + \ldots\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{2}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N}\frac{q_i\, q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i\, V_i$$

Si tenemos N conductores, cada uno

con carga $\mathrm{Q_i}$ y potencial $\mathrm{V_i}$, entonces:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} Q_i\, V_i$$

Estrategias para resolver problemas de potencial

- Para un sistema de cargas puntuales q_i, ubicadas en r_i

$$V(\vec{r}) = V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{\left|\vec{r} - \vec{r}_i\right|}$$

+ especificación del referencial

¡ESCALAR!

- Para distribuciones continuas de carga con densidad ρ

$$V(\vec{r}) = V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{vol'} \frac{\rho \, dV'}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|}$$

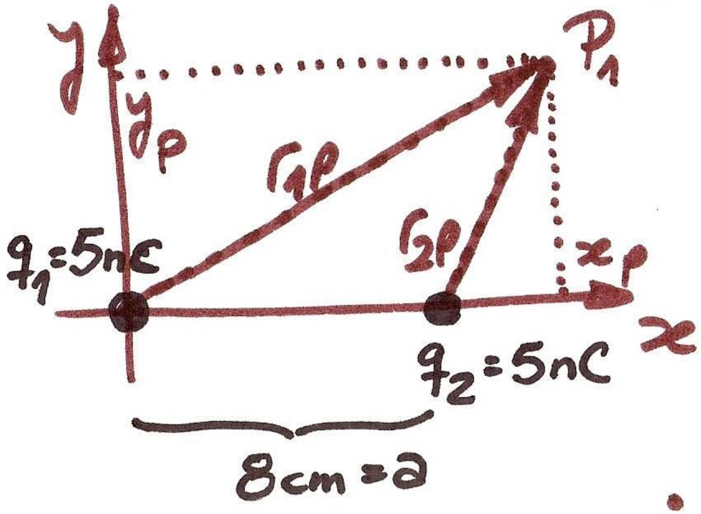
+ especificación del referencial

- Si se conoce E (por cálculo directo o por Gauss):

$$V_2 - V_1 = -\int_1^2 \vec{E} \bullet d\vec{l} \quad \text{diferencia de potencial}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) \qquad V(\vec{r}) \ \text{por integración}$$

Cálculo del potencial sistema de 2 cargas



$$V(P) = V(x_p, y_p) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{2} \frac{q_i}{r_{ip}}$$

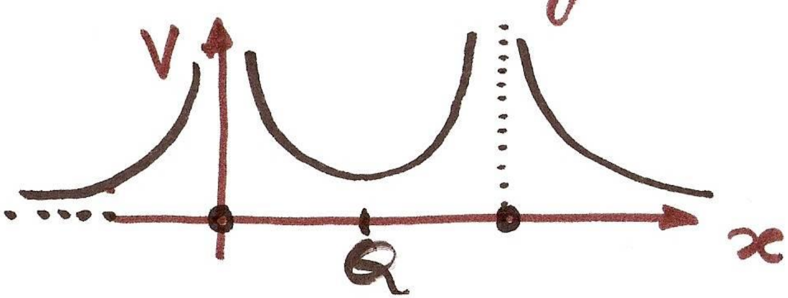
$$r_{1p} = \sqrt{x_p^2 + y_p^2}$$

$$r_{2p} = \sqrt{(x_p - a)^2 + y_p^2}$$

$$\therefore V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{q_1}{\sqrt{x_p^2 + y_p^2}} + \frac{q_2}{\sqrt{(x_p - a)^2 + y_p^2}} \right]$$

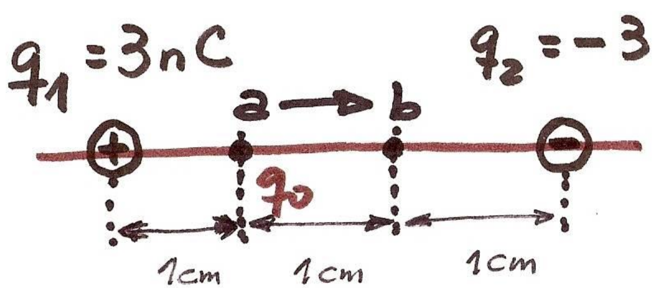
Si queremos calcular V en cualquier punto del eje x:

$\Rightarrow$ hacemos $y = 0 \Rightarrow V(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{q_1}{|x|} + \frac{q_2}{|x-a|} \right]$



$V(Q) = 2250$ V ¿es mucho?

Un problema resuelto c/conceptos de energía



Una partícula se libera en a desde el reposo $\begin{cases} m = 5\,\mu g \\ q_0 = 2\,nC \end{cases}$: ¿v_m (b)?

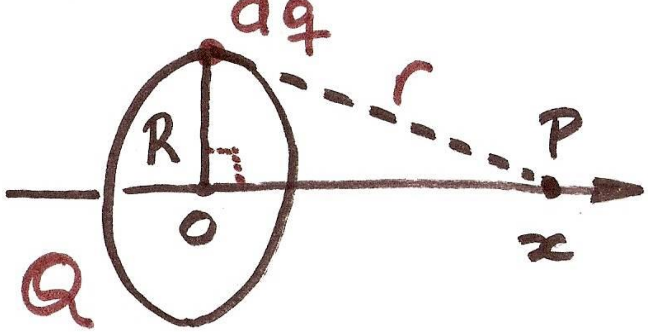
La fuerza que actúa sobre la q_0 entre a y b varía c/ la posición: difícil resolver por trabajo.

Usamos conservación de la energía: $F_{COULOMB}$ CONSERVATIVA

$$\left.\begin{aligned} E_{c_a} + U_a &= E_{c_b} + U_b \\ 0 + q_0 V_a &= \frac{1}{2} m v_b^2 + q_0 V_b \end{aligned}\right\} \boxed{v_b = \sqrt{2\frac{q_0}{m}(V_a - V_b)}}$$

$$V_a = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1}{0{,}01\,m} + \frac{\overset{\text{con signo}}{q_2}}{0{,}02\,m}\right] ; \quad V_b = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1}{0{,}02} + \frac{\overset{\text{con signo}}{q_2}}{0{,}01}\right]$$

Cálculo de potencial p/ distribución continua:



anillo con carga Q

λ : densidad lineal de carga: $\dfrac{Q}{2\pi R}$

$r = \sqrt{R^2 + x^2}$; $dq = \lambda\, ds$

$$dV(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, ds}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

Como todos los dq contribuyen igual

$$V(x) = \int dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\lambda \int_{\text{anillo}} \frac{ds}{\sqrt{R^2+x^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{R^2+x^2}} \underbrace{\int_{\text{anillo}} ds}_{2\pi R}$$

$$\boxed{V(x)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, 2\pi R}{\sqrt{R^2+x^2}} = \boxed{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{R^2+x^2}}} \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla} V$$