Aplicación de transformaciones conformes a problemas de contorno para la ecuación de Laplace en dos variables (regiones no elementales)

Sea B una región del plano uv cuya frontera denotaremos ∂B. Sea $h(u, v)$ una función continua en $B \cup \partial B$, armónica en el interior de B tal que $h(u, v) = g(u, v)$ para $(u, v) \in \partial B$, siendo $g(u, v)$ conocida.

Supongamos que $h(u, v) = \mathrm{Re}(g(w))$ donde g es analítica en el interior de B. En el caso general, basta razonar localmente en un entorno de cada punto interior a B.

Sea A una región del plano xy cuya frontera denotaremos ∂A y sea $f(z)$ analítica en el interior de A, continua en $A \cup \partial A$ y tal que mapea el interior de A en el interior de B y $f(\partial A) = \partial B$.

Entonces $H(x, y) = \mathrm{Re}((g \circ f)(z))$ es armónica en el interior de A por ser la parte real de la función analítica $g \circ f$ (composición de analíticas). Además, si $f\ (z) = u(x, y) + i\ v(x, y)$ resulta

$H(x,y) = \mathrm{Re}(g\big(f\ (z)\big) = h\big(u(x,y), v(x,y)\big) = g(u(x,y), v(x,y))$ para $(x, y) \in \partial A$.

Luego, $H(x, y)$ es solución del problema de Dirichlet en A con valores en la frontera ∂A dados por $g(u(x, y), v(x, y))$

Ejemplo Sea $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ x^2 + (y-1)^2 \geq 1\,, x^2 + (y+1)^2 \geq 1\}$

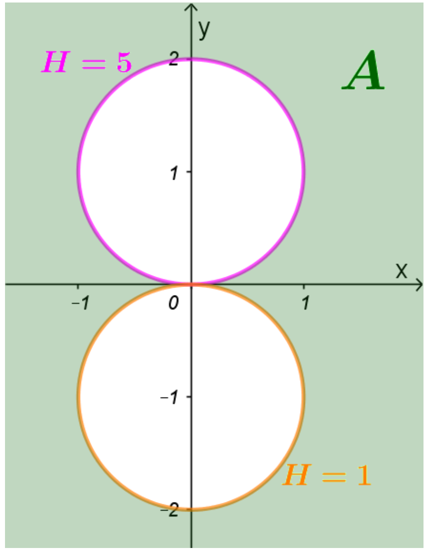
a) Hallar $f(A)$ si $f(z) = \frac{2}{z}$

b) Hallar la distribución estacionaria de temperaturas $H(x,y)$ en la lámina A suponiendo que es una función armónica en el interior de A y que sus valores sobre la frontera están dados por:

$H(x,y) = 5$ si $x^2 + (y-1)^2 = 1, y > 0$

$H(x,y) = 1$ si $x^2 + (y+1)^2 = 1, y < 0$

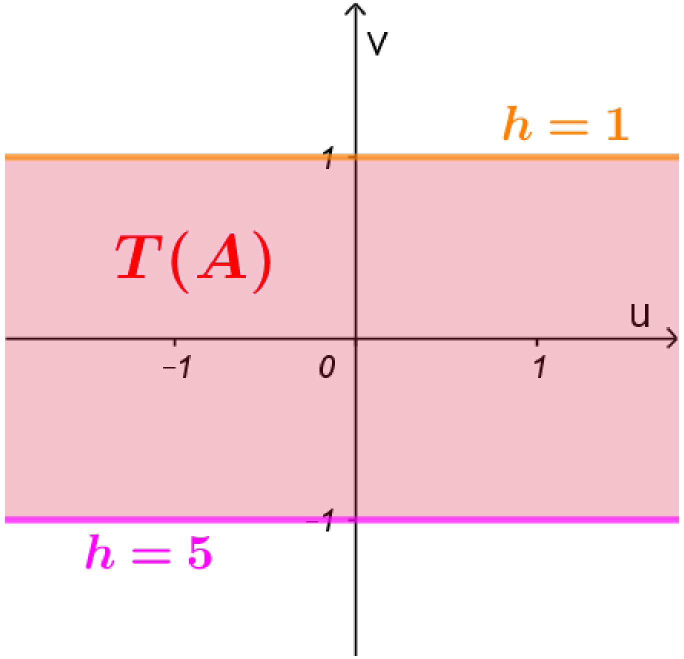
Rta a) $T\colon w = \frac{2}{z}$ así que $T^{-1}\colon z = \frac{2}{w}$



$$A = A_1 \cap A_2$$
$$A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ x^2 + (y-1)^2 \geq 1\}$$
$$A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ x^2 + (y+1)^2 \geq 1\}$$

$$z \in A_1 \Leftrightarrow |z - i| \geq 1 \Leftrightarrow \left|\frac{2}{w} - i\right| \geq 1 \Leftrightarrow \left|\frac{2 - iw}{w}\right| \geq 1 \Leftrightarrow \frac{|2 - iw|}{|w|} \geq 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |2 - iw| \geq |w| \Leftrightarrow |2 - i(u + iv)| \geq |u + iv| \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |(2 + v) - iu| \geq |u + iv| \Leftrightarrow (2 + v)^2 + u^2 \geq u^2 + v^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4 + 4v + v^2 + u^2 \geq u^2 + v^2 \Leftrightarrow 4 + 4v \geq 0 \Leftrightarrow v \geq -1$$

$$z \in A_2 \Leftrightarrow |z + i| \geq 1 \Leftrightarrow \left|\frac{2}{w} + i\right| \geq 1 \Leftrightarrow \left|\frac{2 + iw}{w}\right| \geq 1 \Leftrightarrow \frac{|2 + iw|}{|w|} \geq 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |2 + iw| \geq |w| \Leftrightarrow |2 + i(u + iv)| \geq |u + iv| \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |(2 - v) + iu| \geq |u + iv| \Leftrightarrow (2 - v)^2 + u^2 \geq u^2 + v^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4 - 4v + v^2 + u^2 \geq u^2 + v^2 \Leftrightarrow 4 - 4v \geq 0 \Leftrightarrow v \leq 1$$



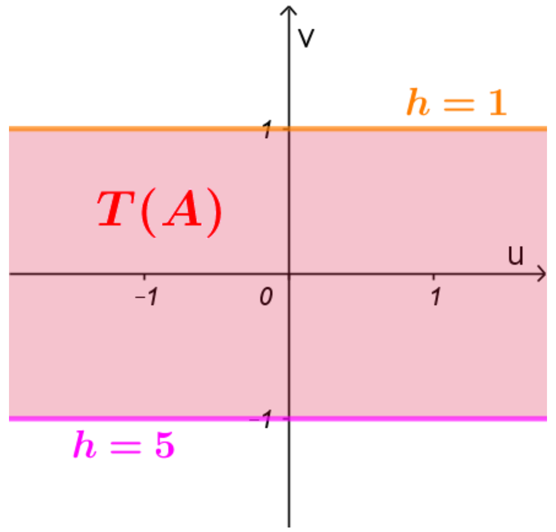
Entonces,

$$f(A) = f(A_1) \cap f(A_2) = \{u + iv \in \mathbb{C}\colon\ -1 \leq v \leq 1\}$$

b) Hallar la distribución estacionaria de temperaturas $H(x,y)$ en la lámina A suponiendo que es una función armónica en el interior de A y que sus valores sobre la frontera están dados por:

$H(x,y) = 3$ si $x^2+(y-1)^2 = 1, y > 0$

$H(x,y) = 5$ si $x^2+(y+1)^2 = 1, y < 0$



<u>Rta</u>

Resolvemos el problema de Dirichlet en $f(A)$, buscando $h(u,v)$

Armónica en el interior de $f(A)$ con las siguientes condiciones

de borde "trasladadas" como se ve en la figura:

$h(u,v) = 3$ si $v = 1$

$h(u,v) = 5$ si $v = 1$

Como solución proponemos $h(u,v) = \mathrm{Im}\big(g(w)\big)$ siendo $g(w) = Aw + iB$ donde A, B son parámetros reales a determinar.

Como $g(w)$ es analítica en $\mathbb{C}$ por ser polinómica, entonces $h(u,v)$ resulta armónica en $\mathbb{R}^2$ y en particular en el interior de la franja horizontal $f(A)$.

Las condiciones de borde determinan los valores de los parámetros:

$$\begin{cases} h(u,v) = 5 \text{ si } v = -1 \\ h(u,v) = 1 \text{ si } v = 1 \end{cases} \equiv \begin{cases} A(-1) + B = 5 \\ A.1 + B = 1 \end{cases}$$

La solución de este sistema es $(A,B) = (-2{,}3)$, así que $g(w) = -2w + 3i$.

Entonces $h(u,v) = \mathrm{Im}(-2w+3i) = 3 - 2v$

A continuación trasladamos esta solución de $f(A)$ hacia A mediante $T: w=\frac{2}{z}$

Se tiene:

$$w=\frac{2}{z} \Leftrightarrow u+iv=\frac{2}{x+iy} \Leftrightarrow u+iv=\frac{2}{x+iy}\frac{x-iy}{x-iy} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u+iv=\frac{2x}{x^2+y^2}-i\frac{2y}{x^2+y^2}$$

Entonces,

$$T:\begin{cases} u=\dfrac{2x}{x^2+y^2} \\ v=\dfrac{-2y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$H(x,y)=h\big(u(x,y),v(x,y)\big)=3-2v(x,y)=3-2\left(\frac{-2y}{x^2+y^2}\right)=3+\frac{4y}{x^2+y^2}$$

Esta función es armónica en el interior de A porque $H(x,y)=\operatorname{Im}\big((g\circ f)(z)\big)$ con $(g\circ f)(z)=3i-\frac{4}{z}$ analítica en el interior de A.

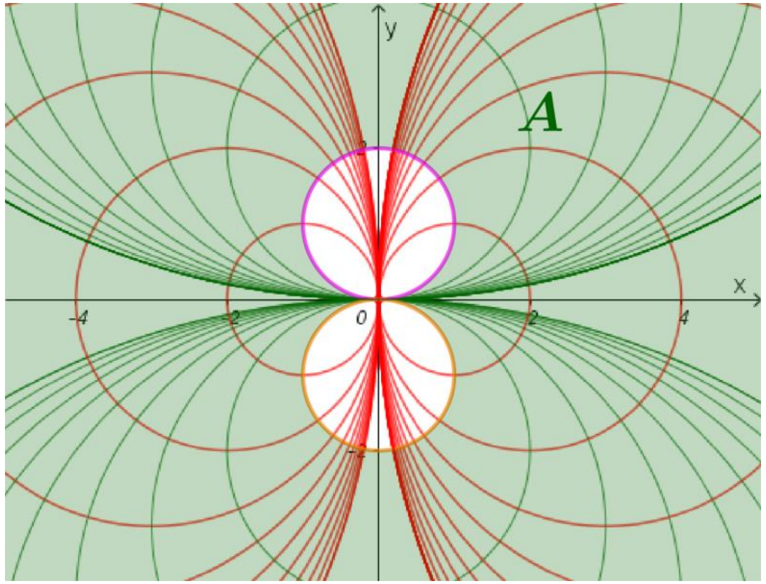
Habiendo encontrado $(g \circ f)(z) = 3i - \frac{4}{z}$ analítica en el interior de A tal que

$$H(x,y) = \operatorname{Im}\big((g \circ f)(z)\big)$$

podemos graficar las isotermas y las líneas de flujo de calor en la lámina A, empleando la ortogonalidad de las curvas de nivel de las partes real e imaginaria de $(g \circ f)(z) = \frac{2}{z} + 4i$:

$$\operatorname{Re}\big((g \circ f)(z)\big) = \operatorname{Re}\left(3i - \frac{4}{z}\right) = \frac{-4x}{x^2+y^2}$$

$$\operatorname{Im}\big((g \circ f)(z)\big) = H(x,y) = 3 + \frac{4y}{x^2+y^2}$$



Es decir las familias de curvas

$$\mathcal{F}_1\colon \frac{-4x}{x^2+y^2} = C_1 \ \ \text{(líneas de flujo de calor)}$$

$$\mathcal{F}_2\colon 3 + \frac{4y}{x^2+y^2} = C_2 \ \ \text{(isotermas)}$$

Operando algebraicamente resulta

$$\mathcal{F}_1\colon \text{ si } C_1 \neq 0, \left(x + \frac{2}{C_1}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2}{C_1}\right)^2; \text{ si } C_1 = 0, x = 0$$

$$\mathcal{F}_2\colon \text{si } C_2 \neq 3, x^2 + \left(y - \frac{2}{C_2 - 3}\right)^2 = \left(\frac{2}{C_2 - 3}\right)^2; \text{ si } C_2 = 3, y = 0$$

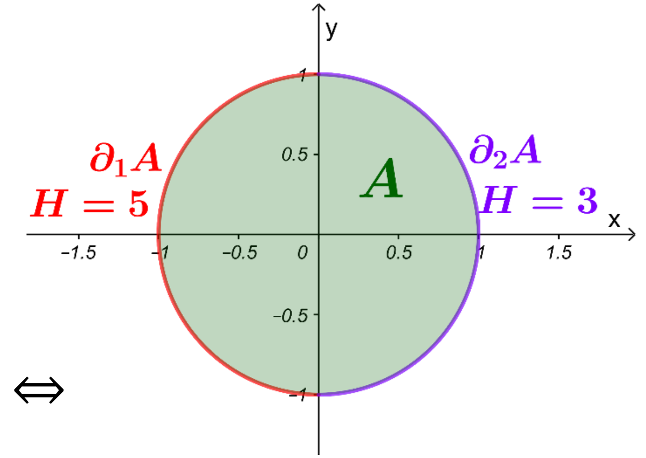
La figura muestra en verde las isotermas y en rojo las líneas de flujo de calor.

Ejemplo Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ x^2 + y^2 \leq 1\}$

a) Hallar $f(A)$ si $f(z) = \frac{2}{z-i}$

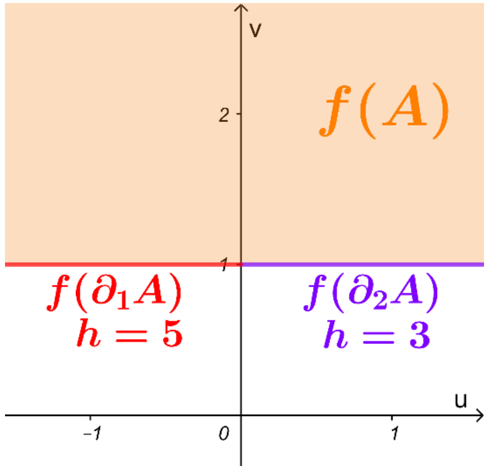
b) Hallar la distribución estacionaria de temperaturas $H(x, y)$ en la lámina A suponiendo que es una función armónica en el interior de A y que sus valores sobre la frontera están dados por:

$$H(x,y) = 3 \ \text{ si } x^2 + y^2 = 1, x > 0$$
$$H(x,y) = 5 \ \text{ si } x^2 + y^2 = 1, x < 0$$



__Rta__ a) $T \colon w = \frac{2}{z-i}$ así que $T^{-1} \colon z = \frac{2}{w} + i$

$$z \in A \Leftrightarrow |z| \leq 1 \Leftrightarrow \left|\frac{2}{w} + i\right| \leq 1 \Leftrightarrow \left|\frac{2+iw}{w}\right| \leq 1 \Leftrightarrow$$
$$\frac{|2+iw|}{|w|} \leq 1 \Leftrightarrow |2+iw| \leq |w| \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |2 + i(u+iv)| \leq |u+iv| \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |(2-v) + iu| \leq |u+iv| \Leftrightarrow (2-v)^2 + u^2 \leq u^2 + v^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4 - 4v + v^2 + u^2 \leq u^2 + v^2 \Leftrightarrow 4 - 4v \leq 0 \Leftrightarrow v \geq 1$$



Además,

$$z = \frac{2}{w} + i \Leftrightarrow x + iy = \frac{1}{u+iv} + i \Leftrightarrow x + iy = \frac{u - iv}{u^2+v^2} + i$$

Luego,

$$T^{-1}: \begin{cases} x = \dfrac{u}{u^2+v^2} \\ y = 1 - \dfrac{v}{u^2+v^2} \end{cases}$$

$$x > 0 \Leftrightarrow \frac{u}{u^2+v^2} > 0 \Leftrightarrow u > 0$$

$$x < 0 \Leftrightarrow \frac{u}{u^2+v^2} < 0 \Leftrightarrow u < 0$$

Entonces,

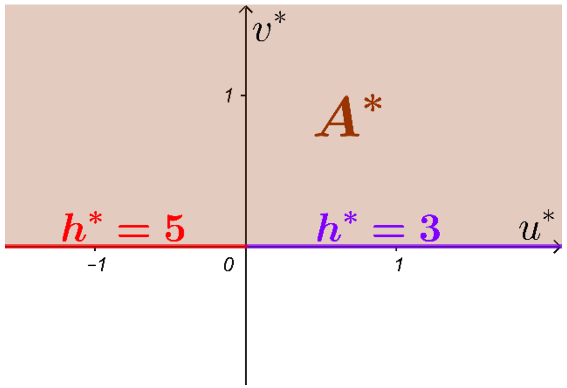
$$f(A) = \{u + iv \in \mathbb{C}: \ v \geq 1\}$$

$$\partial_1 A = \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\,, \mathrm{Re}(z) < 0\} \qquad f(\partial_1 A) = \{u + iv \in \mathbb{C}: v = 1\,, u < 0\}$$

$$\partial_2 A = \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\,, \mathrm{Re}(z) > 0\} \qquad f(\partial_2 A) = \{u + iv \in \mathbb{C}: v = 1\,, u > 0\}$$

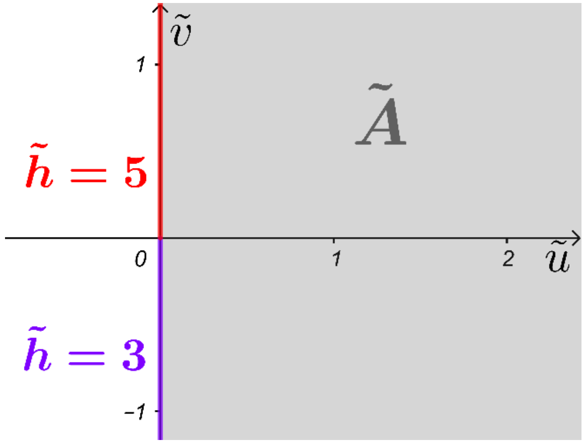
A continuación trasladamos el punto $w = i$ al origen mediante $w^* = g(w) = w - i$

Evidentemente resulta lo mostrado en la siguiente figura:



Finalmente, efectuamos una rotación alrededor del origen un ángulo de 90° en sentido horario, para reducir todo al primero y cuarto cuadrantes y expresar más fácilmente los argumentos en términos de las coordenadas cartesianas.

Es decir, $\widetilde{w} = k(w^*) = -iw^*$.



Para resolver el problema de Dirichlet en $\tilde{A}$ proponemos $\tilde{h}(\tilde{u}, \tilde{v}) = D\tilde{\theta} + E$,

D, E parámetros reales,

$\tilde{\theta} = \operatorname{Arg}(\widetilde{w}) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\tilde{v}}{\tilde{u}}\right)$

$\tilde{h}$ es armónica en el interior de $\tilde{A}$ puesto que $\tilde{h}(\tilde{u},\tilde{v}) = \mathrm{Im}(g(\widetilde{w}))$ siendo

$$g(\widetilde{w}) = D\ \mathrm{Ln}(\widetilde{w}) + iE$$

analítica en el interior de $\tilde{A}$.

Condiciones de borde:

$$\begin{cases} \tilde{\theta} = -\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \tilde{h} = 3 \\ \tilde{\theta} = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \tilde{h} = 5 \end{cases} \equiv \begin{cases} D\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + E = 3 \\ D\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + E = 5 \end{cases}$$

Cuya solución es $(D,E) = \left(\frac{2}{\pi}, 4\right)$. Luego, $\tilde{h}(\tilde{u},\tilde{v}) = \frac{2}{\pi}\tilde{\theta} + 4$

Es decir, $\tilde{h}(\tilde{u},\tilde{v}) = \frac{2}{\pi}\mathrm{arctg}\left(\frac{\tilde{v}}{\tilde{u}}\right) + 4$

Para hallar la solución del problema de Dirichlet en A espresamos $(\tilde{u},\tilde{v})$ en términos de (x,y):

Es decir, $\tilde{h}(\tilde{u},\tilde{v}) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{\tilde{v}}{\tilde{u}}\right) + 4$

Para hallar la solución del problema de Dirichlet en A espresamos $(\tilde{u},\tilde{v})$ en términos de (x,y):

$$\widetilde{w} = -iw^* \overset{w^*=w-i}{\widetilde{=}} -i(w-i) \overset{w=\frac{2}{z-i}}{\widetilde{=}} -i\left(\frac{2}{z-i} - i\right)$$

Es decir,

$$\tilde{u} + i\tilde{v} = \widetilde{w} = -\frac{2i}{z-i} - 1 = -\frac{2i}{(x+iy)-i} - 1 = \frac{-2i}{x+i(y-1)} - 1 =$$
$$= \frac{-2i[x-i(y-1)]}{x^2+(y-1)^2} - 1 = \frac{-2ix-2(y-1)}{x^2+(y-1)^2} - 1$$

Entonces,

$$\begin{cases} \tilde{u}(x,y) = -\dfrac{2(y-1)}{x^2+(y-1)^2} - 1 \\ \tilde{v}(x,y) = -\dfrac{2x}{x^2+(y-1)^2} \end{cases}$$

Luego,

$$H(x,y) = \tilde{h}(\tilde{u}(x,y),\tilde{v}(x,y)) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{-\dfrac{2x}{x^2+(y-1)^2}}{-\dfrac{2(y-1)}{x^2+(y-1)^2} - 1}\right) + 4 = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x}{x^2+2(y-1)+(y-1)^2}\right) + 4$$

$$H(x,y) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x}{x^2+y^2-1}\right) + 4$$

Ejercicios de repaso

Hallar una función $H(x,y)$ armónica en el interior de la región D sujeta a los valores estipulados en su frontera ∂D. La función $H(x,y)$ ha de ser continua en $D \cup \partial D$, excepto en los puntos de discontinuidad sobre ∂D.

a) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 1\}$

$H(x,1) = 3$ si $x < -1$

$H(x,1) = 5$ si $x > 1$

Rta: $H(x,y) = \frac{2}{\pi} arctg\left(\frac{x+1}{y-1}\right) + 4$

b) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 + y^2 \geq 1, (x-2)^2 + y^2 \geq 4\}$

$H(x,y) = 0$ si $(x+1)^2 + y^2 = 1$

$H(x,y) = 6$ si $(x-2)^2 + y^2 = 4$

Sugerencia: transformar D por $w = 8/z$

Rta: $H(x,y) = \frac{8x}{x^2+y^2} + 4$

c) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \geq 1, y \geq 0\}$

$H(x,y) = 1$ si $(x+1)^2 + y^2 = 1, y > 0$

$H(x,y) = 0$ si $y = 0, |x-1| > 1$

Sugerencia: transformar D por $w = 2/z$

Rta: $H(x,y) = \frac{2}{\pi} arctg\left(\frac{2y}{x^2+y^2-2x}\right)$

d) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \geq 1, x \geq 0\}$

$H(x,y) = -2$ si $x = 1, y \neq 0$

$H(x,y) = 1$ si $(x-1)^2 + y^2 = 1, x > 0$

Sugerencia: transformar D por $w = 2/z$

Rta: $H(x,y) = \frac{6x}{x^2+y^2} - 2$

e) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

$H(x,y) = 1$ si $x^2 + y^2 = 1, y < 0$

$H(x,y) = 3$ si $x^2 + y^2 = 1, y > 0$

Sugerencia: transformar D por $w = \frac{2}{z+1}$

Rta: $H(x,y) = \frac{2}{\pi} arctg\left(\frac{2y}{x^2+y^2-2x}\right)$

f) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+5)^2 + y^2 \geq 16, (x-5)^2 + y^2 \geq 16\}$

$H(x,y) = 0$ si $(x+5)^2 + y^2 = 16$

$H(x,y) = 0.5$ si $(x-5)^2 + y^2 = 16$

Sugerencia: transformar D por $w = \frac{2z+6}{z-3}$

Rta: $H(x,y) = \frac{1}{4\ln(4)} \ln\left[\left(\frac{2(x^2-9)+4y^2}{(x-3)^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{-12y}{(x-3)^2+y^2}\right)^2\right]$