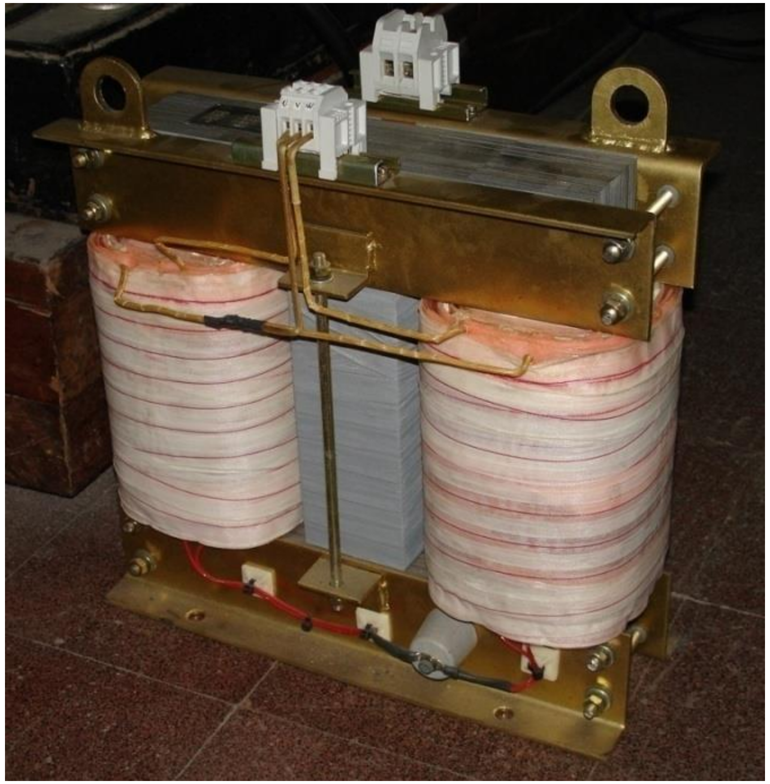
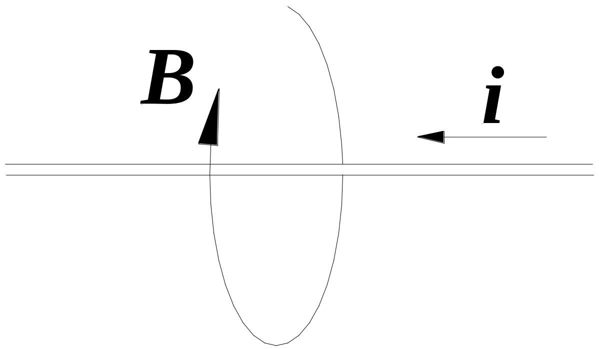
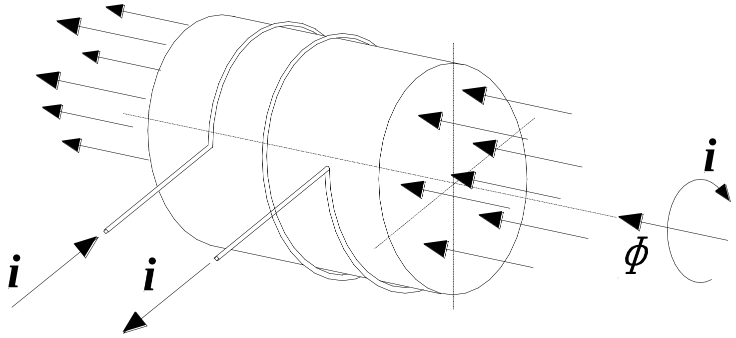
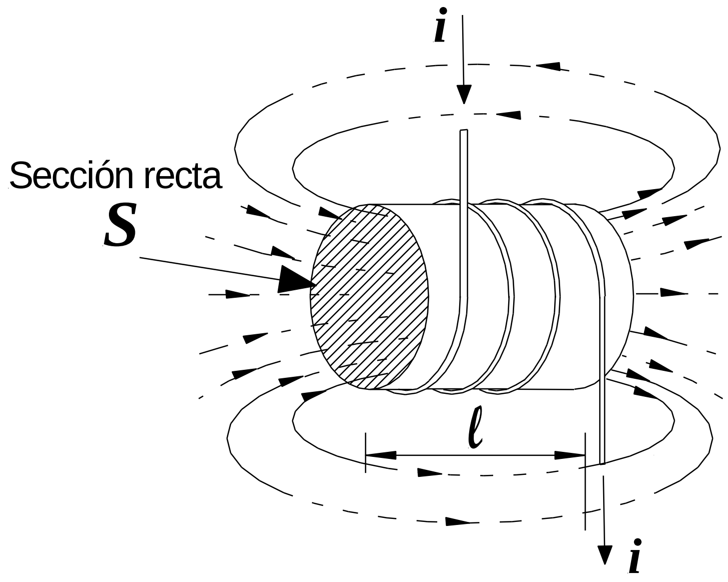
CIRCUITOS ACOPLADOS MAGNÉTICAMENTE



EFECTOS MAGNÉTICOS DE LA CORRIENTE

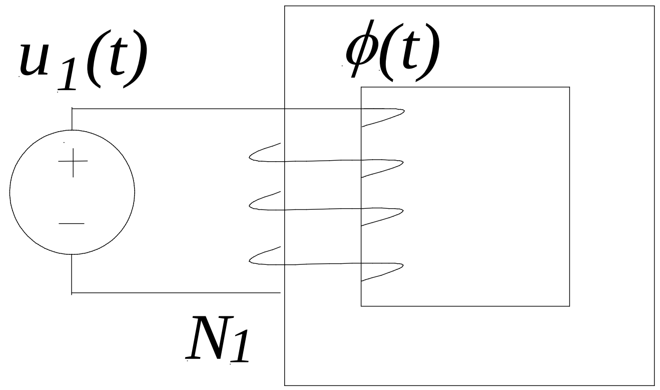




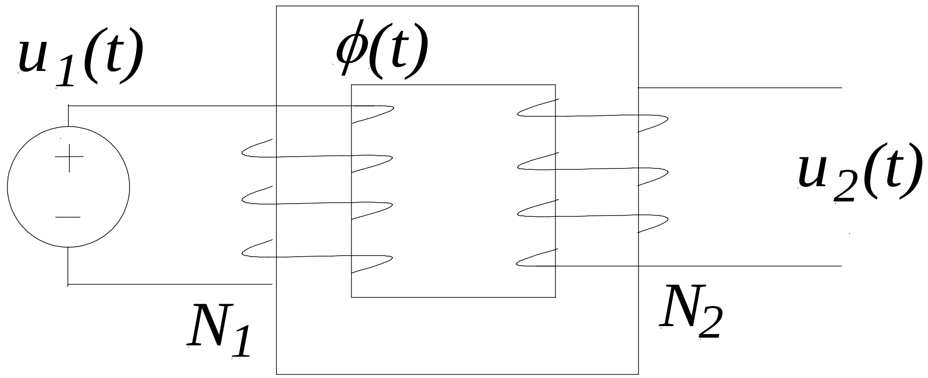


$$\Phi = B \cdot S$$

CIRCUITOS ACOPLADOS MAGNÉTICAMENTE



$$\phi(t)=\frac{1}{N_1}\int u_1 dt$$



De acuerdo a la ley de Faraday $u(t)=N\dfrac{d\phi}{dt}$

$$u_2(t)=N_2\frac{d\phi(t)}{dt}$$

Ley de Lenz

El signo de ***u_2(t)*** *debe ser tal que el efecto se oponga a la causa que le da origen, por lo tanto:*

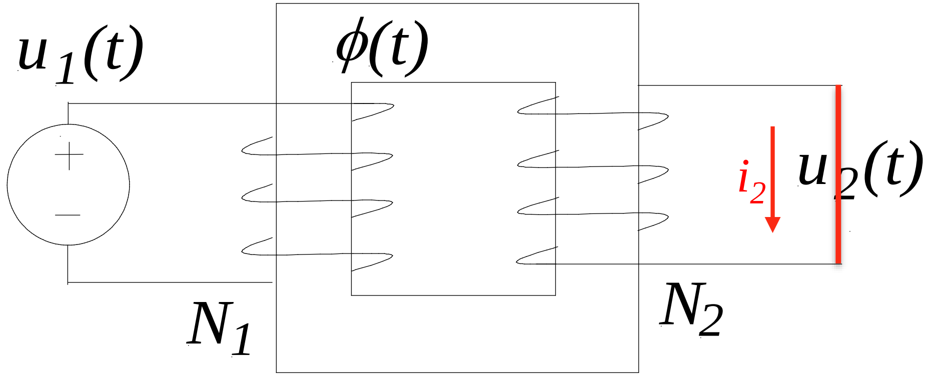
¿por qué?

$$u_2(t)=-N_2\frac{d\phi(t)}{dt}$$

CIRCUITOS ACOPLADOS MAGNÉTICAMENTE

Por otra parte, en una bobina (ecuación constitutiva) $u(t) = L\dfrac{di}{dt}$ *junto a* $u(t) = N\dfrac{d\phi}{dt}$

resulta $L = N\dfrac{\phi}{i}$ ***Autoinductancia***



Además, si la bobina de la derecha se cortocircuitara:

$$N_2\frac{d\phi(t)}{dt} = L_2\frac{di_2(t)}{dt}$$

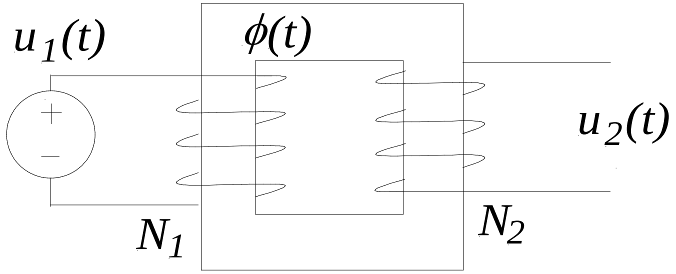
CIRCUITOS ACOPLADOS MAGNÉTICAMENTE

Recordando la expresión:

$$u_2(t) = N_2 \frac{d\phi(t)}{dt}$$

que se puede reescribir:

$$u_2(t) = M \frac{di_1(t)}{dt}$$



Lo que indica que $\boldsymbol{u_2}$ *depende de* $\boldsymbol{i_1}$ *a través de una constante* ***M****, llamada* ***inductancia mutua***

Y combinando $u_2(t) = N_2 \frac{d\phi(t)}{dt}$ *y* $u_2(t) = M \frac{di_1(t)}{dt}$ *resulta*

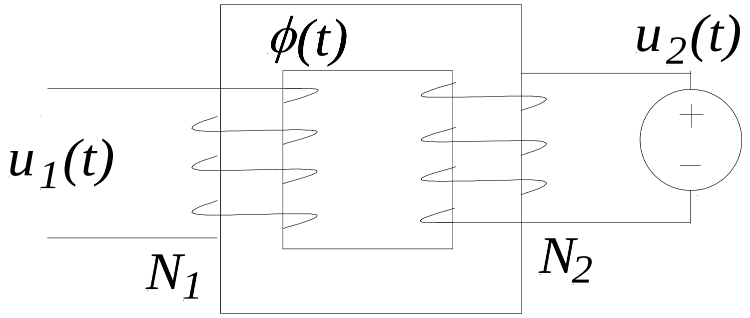
$$M = N_2 \frac{\phi}{i_1}$$

Además, la relación de $u_1(t) = N_1 \frac{d\phi(t)}{dt}$ *y* $u_2(t) = N_2 \frac{d\phi(t)}{dt}$ *a través del flujo, origina*

$$a = \frac{N_1}{N_2} = \frac{u_1}{u_2}$$

relación de transfomación

Expresiones matemáticas similares se obtendrían si se intercambian la fuente y la bobina pasiva, dada la simetría del circuito:



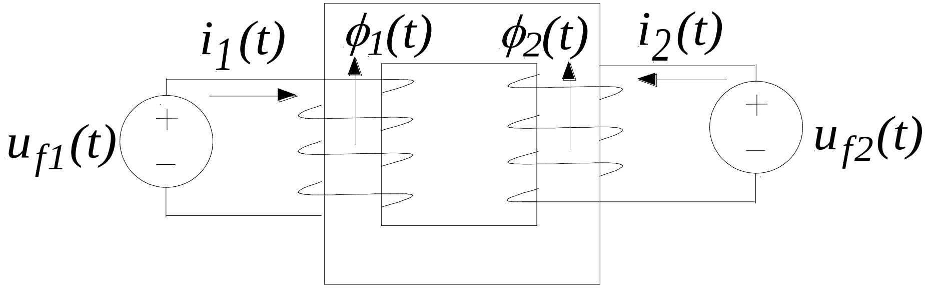
$$u_1(t) = M\,\frac{di_2(t)}{dt} \qquad\qquad u_2(t) = L_2\,\frac{di_2(t)}{dt}$$

CONCLUSIÓN

Se ha podido representar un efecto magnético mediante una relación entre <u>tensiones y corrientes</u>, en vez de considerar flujos u otras variables magnéticas.

CIRCUITOS ACOPLADOS MAGNÉTICAMENTE

Si ambas bobinas fueran "activas" (alimentadas con fuentes)



aparece un flujo neto, que es compartido por ambas bobinas, que se suele denominar ***flujo mutuo*** *o* ***concatenado***

Se puede plantear un par de expresiones que relacionan el efecto de cada fuente y el efecto mutuo sobre cada arrollamiento, teniendo en cuenta cómo interactúan los flujos generados por ambas bobinas

$$u_{f1}(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} \pm M \frac{di_2(t)}{dt}$$

$$u_{f2}(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \pm M \frac{di_1(t)}{dt}$$

¿cómo se determina el signo de los términos de ***M****?*

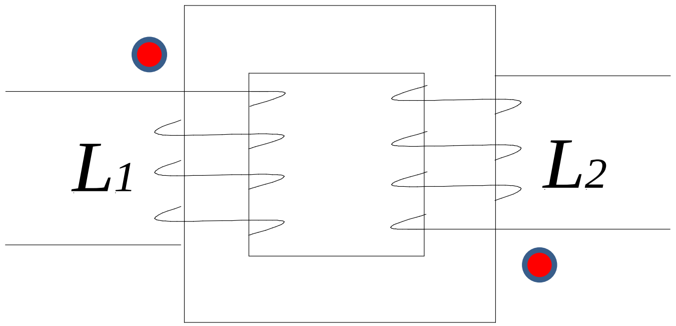
PUNTOS HOMÓLOGOS

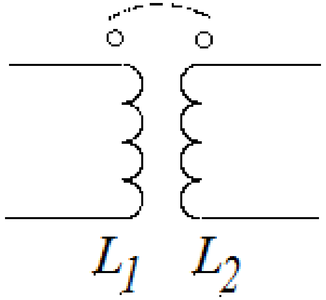
Los **puntos homólogos** *existen independientemente de la corriente y/o la tensión, pues representan una característica geométrica de un circuito acoplado magnéticamente.*

Sirven para indicar

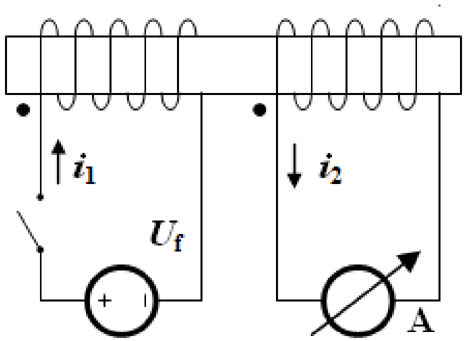
- *la forma en la que están enrolladas las bobinas sobre el núcleo* ***(¿cómo están enrolladas las bobinas?)***
- *la polaridad instantánea de la tensión inducida en un punto homólogo respecto la "caída" de tensión en el otro punto es la misma.*

¡Y no hace falta dibujar el núcleo de hierro!



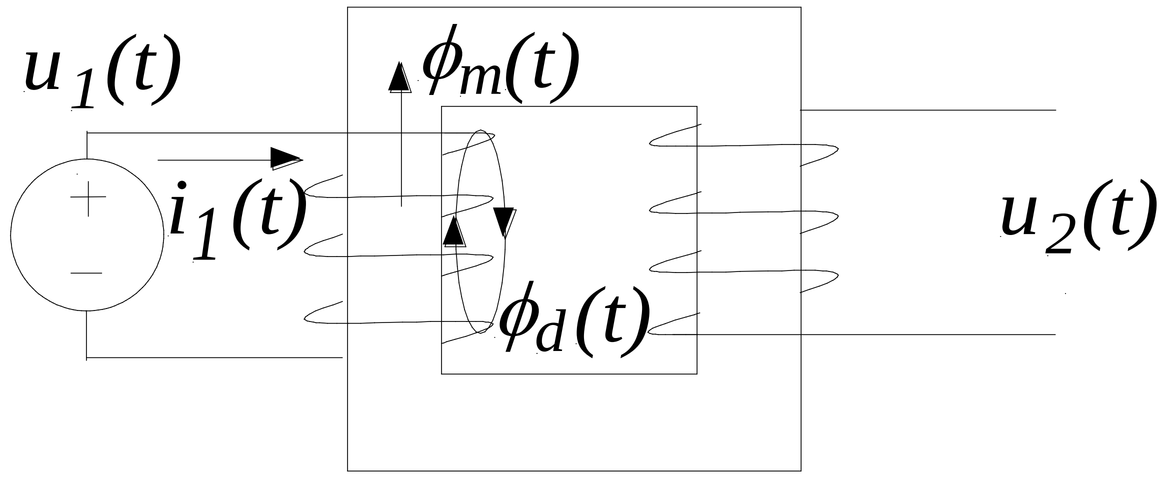


Experimento para determinar los puntos homólogos si no se pueden ver los sentidos de los arrollamientos



CIRCUITOS ACOPLADOS MAGNÉTICAMENTE

DISPERSIÓN



$$\phi_1 = \phi_m + \phi_d$$

CIRCUITOS ACOPLADOS MAGNÉTICAMENTE

Al existir flujo de dispersión, se puede escribir:

$$\phi_{m1} = k_1\phi_1 \qquad \phi_{m2} = k_2\phi_2$$

$$\phi_{d1} = \sigma_1\phi_1 \qquad \phi_{d2} = \sigma_2\phi_2$$

k_1* y *k_2 → ***coeficiente*** o ***factor de acoplamiento***

σ_1 y σ_2 → ***coeficiente*** o ***factor de dispersión***

y los flujos totales resultan

$$\phi_{m1} + \phi_{d1} = \phi_1(k_1 + \sigma_1) = \phi_1$$

$$\phi_{m2} + \phi_{d2} = \phi_2(k_2 + \sigma_2) = \phi_2$$

con ***$k + \sigma = 1$***

k *y* ***σ*** *son función de la* ***geometría del sistema****, y pueden tomar valores entre* ***0*** *y* ***1****, en forma contrapuesta*

Analizando las autoinductancias

$$L_1 = \frac{N_1\phi_1}{i_1} = \frac{N_1\phi_{d1}}{i_1} + \frac{N_1\phi_{m1}}{i_1} = L_{d1} + L_{m1}$$

y

$$L_2 = \frac{N_2\phi_2}{i_2} = \frac{N_2\phi_{d2}}{i_2} + \frac{N_2\phi_{m2}}{i_2} = L_{d2} + L_{m2}$$

CIRCUITOS ACOPLADOS MAGNÉTICAMENTE

Recordando las expresiones $M = \dfrac{N_2 \phi_{m1}}{i_1}$ *y* $a = \dfrac{N_1}{N_2}$

Resultan $M = \dfrac{N_1 \phi_{m2}}{i_2} = \dfrac{N_2}{N_2}\dfrac{N_1 \phi_{m2}}{i_2} = aL_{m2}$ *y* $M = \dfrac{N_2 \phi_{m1}}{i_1} = \dfrac{N_1}{N_1}\dfrac{N_2 \phi_{m1}}{i_1} = \dfrac{L_{m1}}{a}$

de las cuales surge que $L_{m1} = a^2 L_{m2}$

Por otra parte

$$M^2 = \frac{N_2 \phi_{m1}}{i_1} \cdot \frac{N_1 \phi_{m2}}{i_2} = \frac{N_2 k \phi_1}{i_1} \cdot \frac{N_1 k \phi_2}{i_2} = \frac{N_2 k \dfrac{L_1 i_1}{N_1}}{i_1} \cdot \frac{N_1 k \dfrac{L_2 i_2}{N_2}}{i_2} = kL_1 \cdot kL_2 = k^2 L_1 L_2$$

$$\Rightarrow \quad M = k\sqrt{L_1 \cdot L_2}$$

¡Ojo! **¡Sólo es una fórmula!**

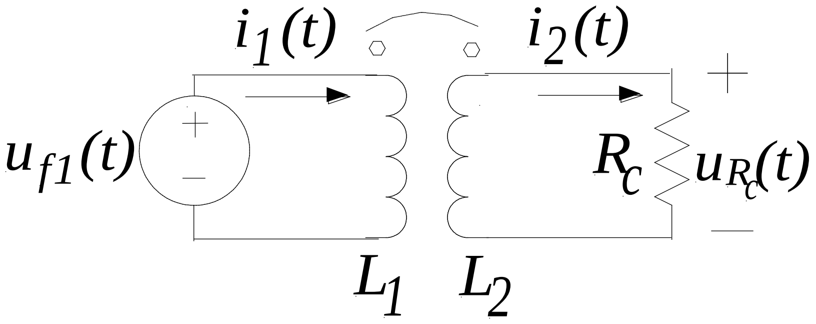
Luego

$$M = k\sqrt{L_1 \cdot L_2} = \sqrt{k_1 \cdot k_2}\sqrt{L_1 \cdot L_2} = \sqrt{k_1 \cdot k_2 \cdot L_1 \cdot L_2} = \sqrt{L_{m1} \cdot L_{m2}}$$

Y si la dispersión fuera nula $L_{m1} = L_1$ *y* $L_{m2} = L_2$

TRANSFORMADOR

Circuito acoplado básico



$$u_{f1}(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} - M \frac{di_2(t)}{dt}$$

$$0 = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + i_2(t)\cdot R_C - M \frac{di_1(t)}{dt}$$

*¿Cómo se determinó el signo de los términos de **M**?*

Aplicando complejos:

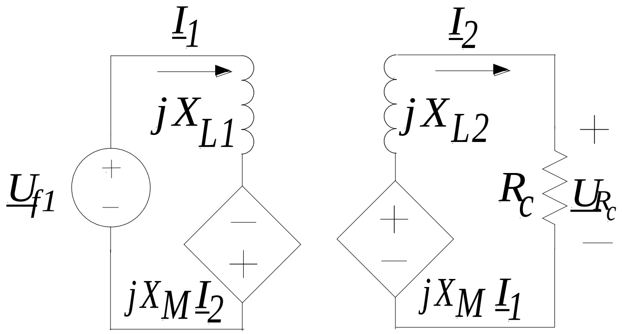
$$\underline{U}_{f1} = j\omega L_1 \underline{I}_1 - j\omega M \underline{I}_2$$
$$= jX_{L1} \underline{I}_1 - jX_M \underline{I}_2$$

$$0 = j\omega L_2 \underline{I}_2 + R_C \cdot \underline{I}_2 - j\omega M \underline{I}_1$$
$$= jX_{L2} \underline{I}_2 + R_C \cdot \underline{I}_2 - jX_M \underline{I}_1$$

Reescribiendo adecuadamente el sistema anterior

$$\underline{U}_{f1} + jX_M \underline{I}_2 = jX_{L1} \underline{I}_1$$

$$jX_M \underline{I}_1 = jX_{L2} \underline{I}_2 + R_C \cdot \underline{I}_2$$



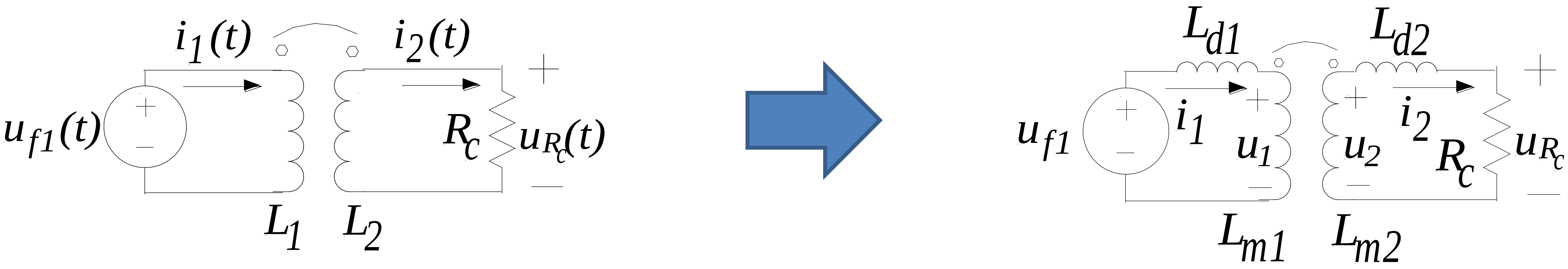
Circuito equivalente con fuentes controladas

CIRCUITOS ACOPLADOS MAGNÉTICAMENTE

TRANSFORMADOR

Modelo conductivo

Se inicia el análisis separando las inductancias de dispersión y de magnetización



A partir de dicha separación se pueden reescribir las ecuaciones del sistema

$$\underline{U}_{f1} = j\omega L_1 \underline{I}_1 - j\omega M \underline{I}_2$$

$$0 = j\omega L_2 \underline{I}_2 + R_C \cdot \underline{I}_2 - j\omega M \underline{I}_1$$

$$\underline{U}_{f1} = j\omega L_{d1} \underline{I}_1 + j\omega L_{m1} \underline{I}_1 - j\omega M I_2$$

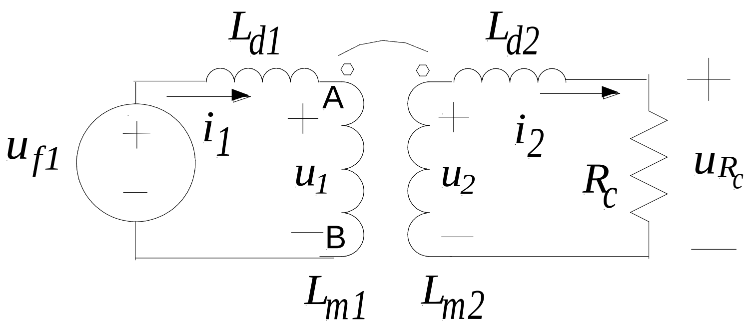
$$0 = j\omega L_{d2} \underline{I}_2 + j\omega L_{m2} \underline{I}_2 + \underline{I}_2 \cdot R_C - j\omega M \underline{I}_1$$

*Debe tenerse en cuenta que, en esta condición, el acoplamiento entre **L_{m1}** y **L_{m2}** es **perfecto** o **ideal**, es decir **k=1***

TRANSFORMADOR

Modelo conductivo

*Ahora se plantea obtener la **admitancia equivalente** vista desde AB hacia la derecha*



$$u_{AB}(t)=u_1(t)=L_{m1}\frac{di_1(t)}{dt}-M\frac{di_2(t)}{dt}$$

$$M\frac{di_1}{dt}=L_{m2}\frac{di_2}{dt}+L_{d2}\frac{di_2}{dt}+i_2\cdot R_C$$

$$\underline{U}_{AB}=\underline{U}_1=j\omega L_{m1}\underline{I}_1-j\omega M\underline{I}_2$$

$$j\omega M\underline{I}_1=j\omega L_{m2}\underline{I}_2+j\omega L_{d2}\underline{I}_2+R_C\underline{I}_2$$

$$\Rightarrow$$

$$\underline{U}_1=jX_{m1}\underline{I}_1-jX_M\underline{I}_2$$

$$jX_M\underline{I}_1=jX_{m2}\underline{I}_2+jX_{d2}\underline{I}_2+R_C\underline{I}_2$$

*Recordando la expresión de **M** en función de **L_{m1}** y **L_{m2}** (para acoplamiento perfecto)*

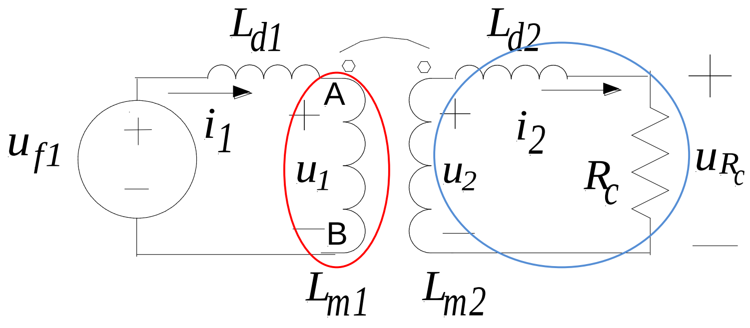
$$M=\sqrt{L_{m1}\cdot L_{m2}} \Rightarrow M^2=L_{m1}\cdot L_{m2} \Rightarrow X_M^{\;2}=X_{L_{m1}}\cdot X_{L_{m2}}$$

*multiplicando por **ω^2** a ambos lados del igual*

TRANSFORMADOR

Modelo conductivo

*Operando matemáticamente para obtener la **admitancia** vista desde **AB** y ordenando*



$$\underline{Y}_{AB} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1} = \frac{1}{jX_{m1}} + \frac{1}{a^2\left(jX_{d2} + R_C\right)}$$

Queda como ejercicio para el estudiante obtener este resultado

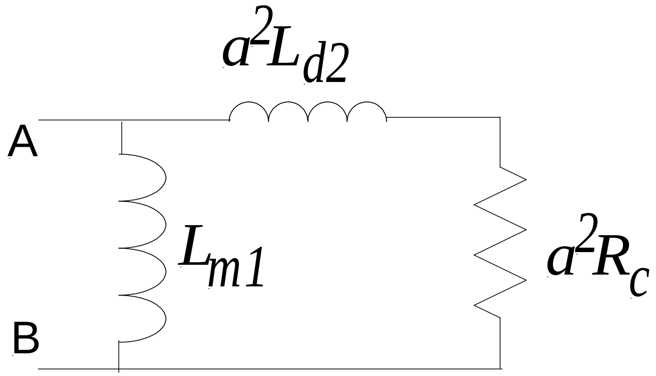
con $$a^2 = \frac{X_1}{X_2} = \frac{k \cdot X_1}{k \cdot X_2} = \frac{X_{m1}}{X_{m2}}$$

$$\underline{Y}_{AB} = \frac{1}{jX_{m1}} + \frac{1}{R_C a^2 + jX_{d2} a^2}$$

*Inductancia de valor **L_{m1}***

*Resistencia de valor **R_C** en serie con inductancia de valor **L_{d2}***

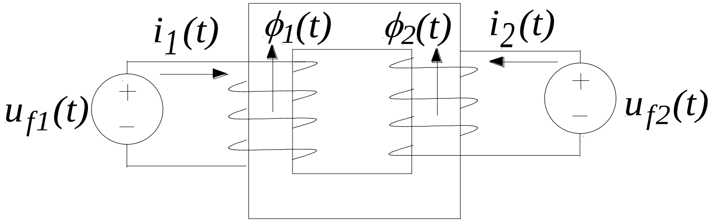
Ambos elementos están en paralelo



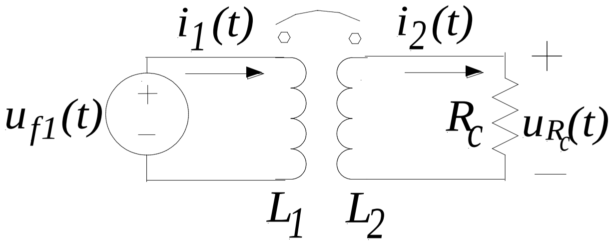
*Circuito equivalente conductivo visto desde **AB***

RECAPITULACIÓN

*Dos inductores energizados, muy próximos uno del otro, **ejercen influencia mutua** a través de sus respectivos campos magnéticos*

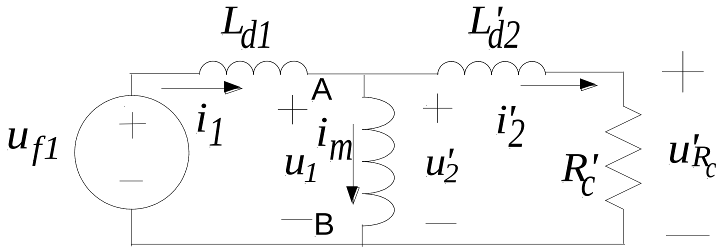


*Dicha influencia puede ser cuantificada en función de la geometría del conjunto y expresada matemáticamente mediante relaciones de **tensiones y corrientes**, lo cual permite el análisis utilizando las leyes básicas de circuitos*



*Se pone de manifiesto la utilidad de los **puntos homólogos** para establecer las polaridades de las **caídas de tensión** y de las correspondientes **tensiones inducidas** en los inductores involucrados, cuya ubicación surge del modo en que se encuentran arrolladas las bobinas*

*Surge como principal aplicación el **transformador**, para el cual se presentó un modelo conductivo, lo que permite suprimir el acoplamiento magnético del análisis circuital y así simplificar cierto tipo de análisis*



BIBLIOGRAFÍA

- *Circuitos eléctricos. Parte 1*. Deorsola-Morcelle. Cap 5.
- *Principios de electrotecnia. Tomo I.* Zeveke - Ionkin. Cap XII.
- *Circuitos eléctricos*. Nilsson. Cap 13.
- *Circuitos en ingeniería eléctrica*. Skilling. Cap 10.
- *Análisis básico de circuitos eléctricos*. Johnson-Hilburn-Johnson. Cap 16.
- *Teoría de circuitos eléctricos*. Sanjurjo - Lázaro - de Miguel. Cap 9.
- *Análisis de circuitos en ingeniería*. Hayt-Kemmerly. Cap 14.
- *Circuitos*. Carlson. Cap 8.
- *Análisis introductorio de circuitos*. Boylestad. Cap 25.
- *Circuitos eléctricos y magnéticos*. E. Spinadel. Cap 13.