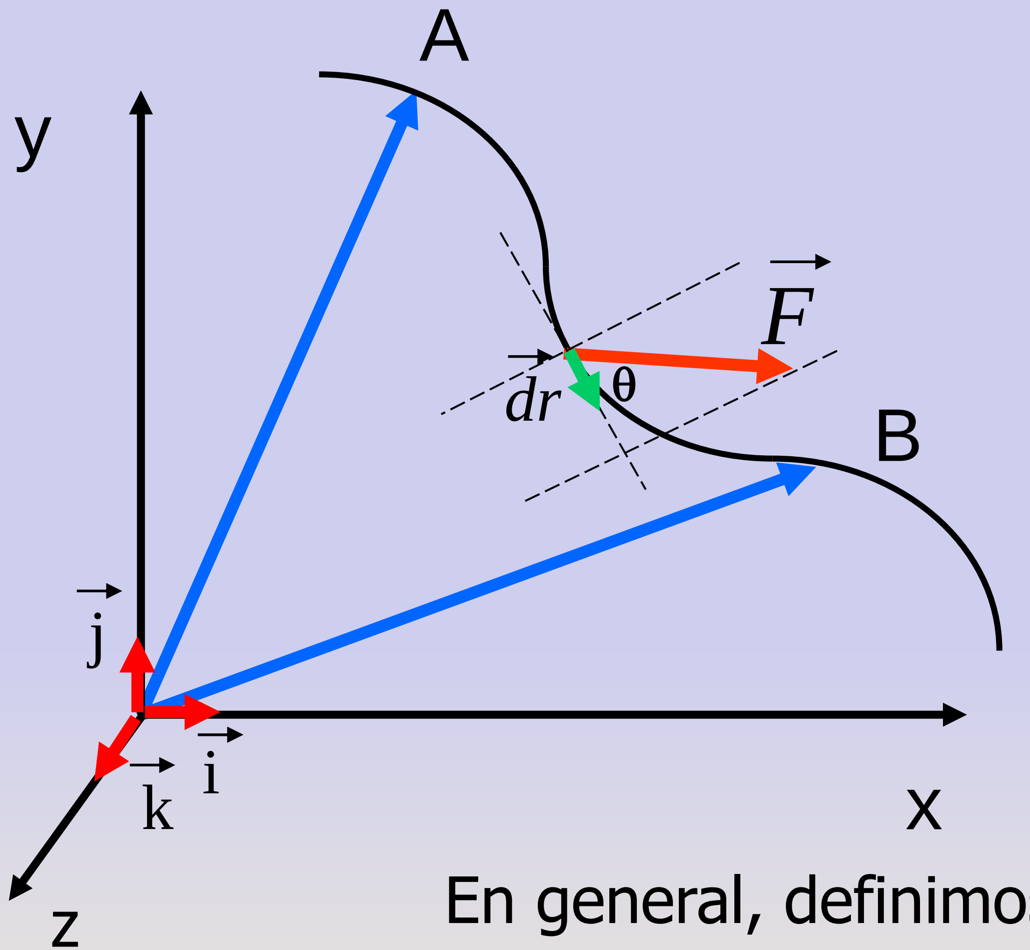
# Física I
# Apuntes de Clase 7, 2023

## Turno E

## Prof. Susana Conconi

Fuerzas Conservativas y no conservativas.
Teorema Trabajo- Energía Mecánica
Conservación de la Energía Mecánica.

# Trabajo y energía en el espacio tridimensional




Para el caso <u>3D</u>, la componente de $\vec{F}$ en la dirección del desplazamiento viene dada por el PRODUCTO ESCALAR entre $\vec{F}$ y $d\vec{r}$:

$$\boxed{W = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{r}}$$

Es un escalar!!!

En general, definimos:

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

donde:

$$d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$$

# Teorema de Trabajo - Energía cinética

El trabajo total realizado por todas las fuerzas que actúan sobre un objeto entre dos puntos de una trayectoria es igual a la variación de la energía cinética del objeto entre esos dos mismos puntos.

$$W_{AB} = \int_i^f \vec{F} \bullet d\vec{s} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = E_B - E_A = \Delta E_c$$

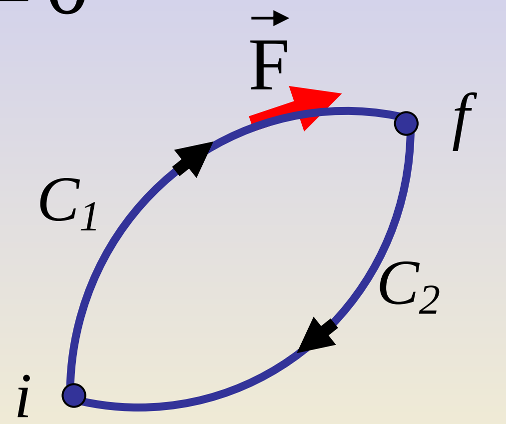
Entorno

Sistema

En general el trabajo W depende del camino elegido, sin embargo existen fuerzas tales que **el *W* entre 2 puntos no depende del camino sino solamente de las posiciones inicial y final.**

Este tipo de fuerzas se denominan **"conservativas"** y tienen la propiedad de que el **trabajo realizado por las mismas para cualquier camino cerrado es 0.**

Si $$W_{i \rightarrow f \rightarrow i} = \underset{C_1}{\int_i^f} \vec{F} \bullet d\vec{s} + \underset{C_2}{\int_f^i} \vec{F} \bullet d\vec{s} = 0$$




$\Rightarrow$ $\vec{F}$ **es conservativa**

Analizaremos el comportamiento de 3 fuerzas:

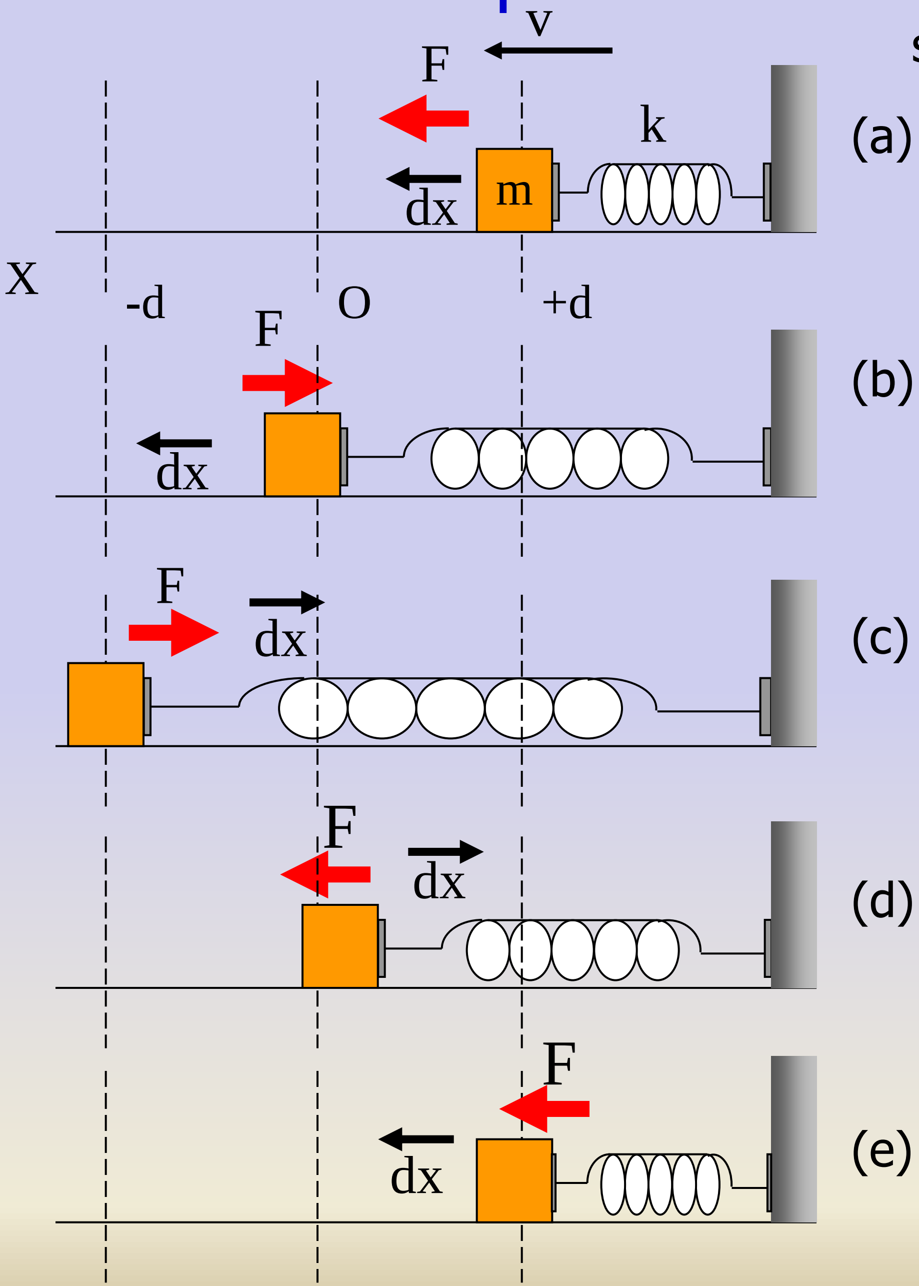
1) La fuerza de recuperación elástica $F_{el} = -k\ x$ (Ley de Hooke)
2) La gravitatoria $F_g = m\ g$
3) La de fricción $f_r = \mu_c\ N$

Calcularemos los trabajos $W$ de estas fuerzas en caminos cerrados para analizar su condición de fuerzas conservativas o no conservativas.

# 1) Fuerza de recuperación elástica

$$\boxed{F_{el} = -k\ x}$$

superficie horizontal sin fricción ($\mu$=0).




$$W_{a-b} = \frac{1}{2} k\ d^2$$

$$W_{b-c} = -\frac{1}{2} k\ d^2$$

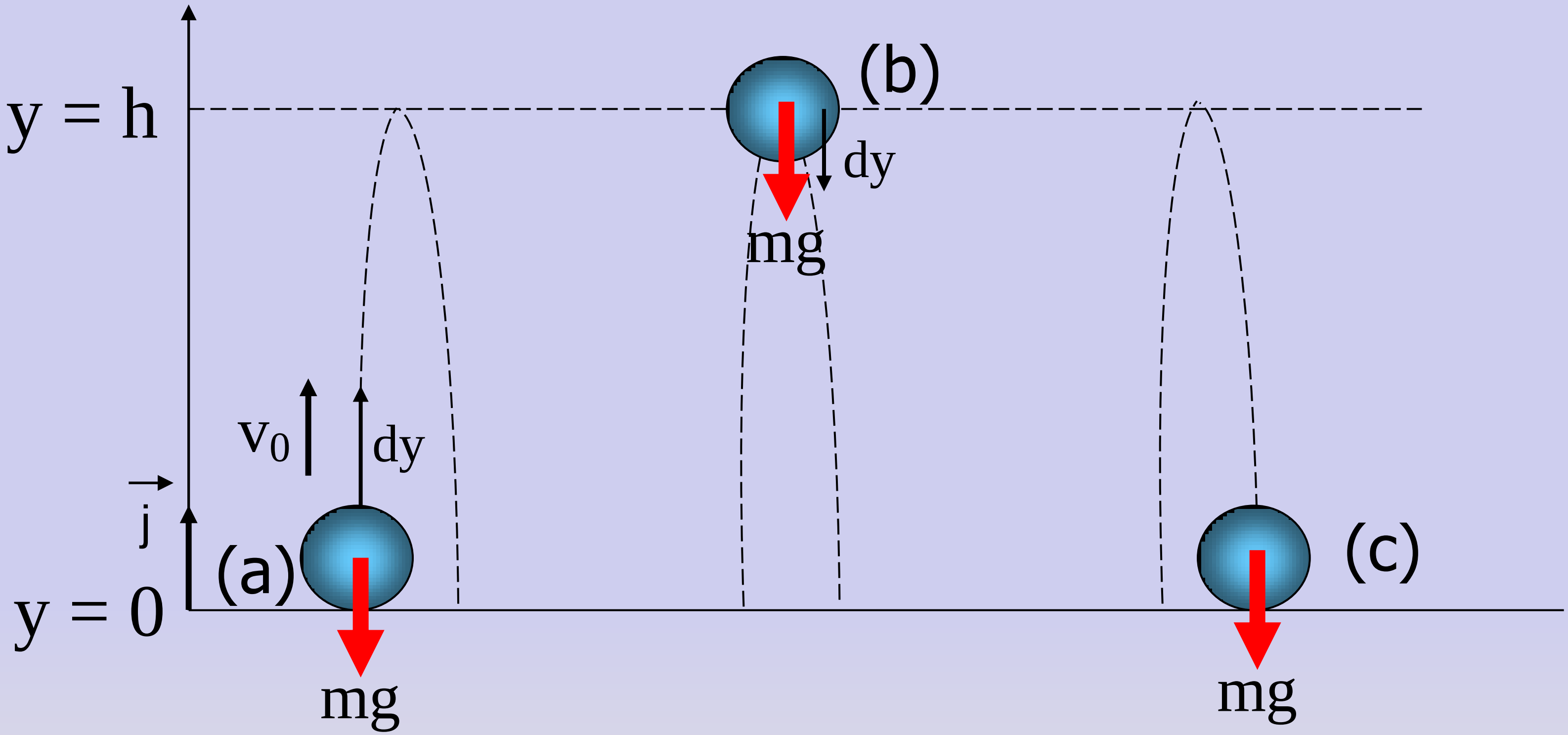
$$W_{c-d} = \frac{1}{2} k\ d^2$$

$$W_{d-e} = -\frac{1}{2} k\ d^2$$

$$W_{a-b} + W_{b-c} + W_{c-d} + W_{d-e} = 0$$

$\Rightarrow$ la fuerza de recuperación elástica es conservativa!!!!!

## 2) Fuerza gravitatoria

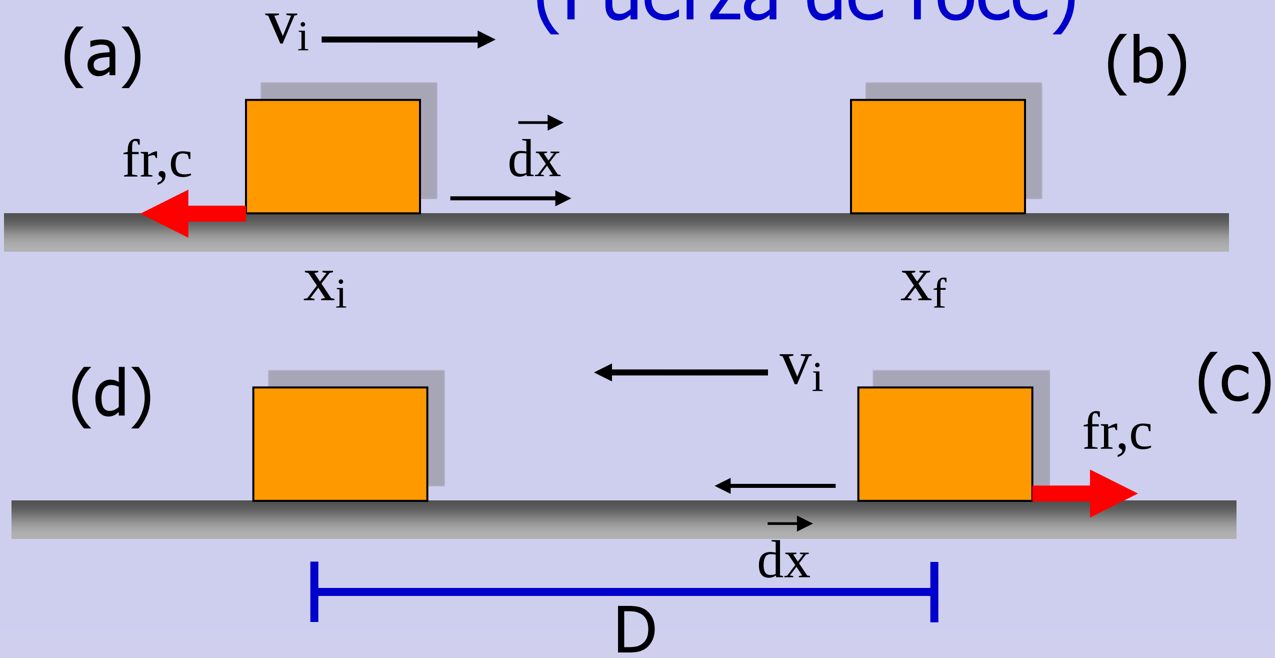



$$W_{a-b} = -mgh \quad \text{y} \quad W_{b-c} = +mgh$$

$$W_{total} = -mgh + mgh = 0$$

⇨ la fuerza gravitatoria es conservativa!!!!!

# 3) Componente horizaontal de la fuerza de contacto (Fuerza de roce)




$$f_{r,c} = \mu\, N$$

$$W_{a-b} = -\mu_c\, N\, D \quad \text{y} \quad W_{c-d} = -\mu_c\, N\, D$$

$$W_{total} = -2\,\mu_c\, N\, D \neq 0$$

la fr es no conservativa!!!

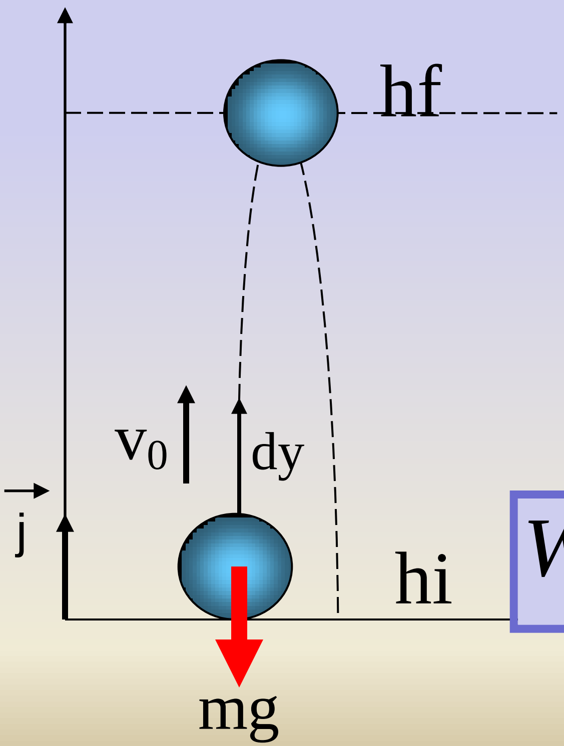
Si el $W$ **total** realizado por una fuerza sobre una partícula en cualquier camino cerrado **es 0**, diremos que esa fuerza es **conservativa**. De lo contrario diremos que es **no conservativa**.

Otra forma: " Si el trabajo efectuado por una fuerza entre 2 puntos a y b es el mismo a lo largo de cualquier trayectoria arbitraria, entonces la fuerza **es conservativa**".

# Energía potencial

Si la fuerza es conservativa se puede definir una función de la posición, que llamaremos "**energía potencial**". En este caso el trabajo $W$ entre dos puntos se puede expresar como diferencia de dicha energía potencial evaluada entre los dos mismos puntos.

En el caso de la fuerza gravitatoria:



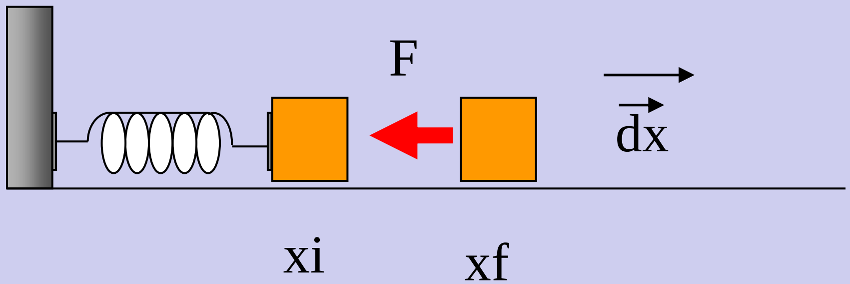

$$W_{hi \to hf} = \int_{hi}^{hf} m\, g\, cos180^{o}\, dy = -\, m\, g\, (hf - hi)$$

$$W_{hi \to hf} = -\left[ m\, g\, hf - m\, g\, hi \right]$$

Si $E_{p,grav.} = m\, g\, h$

$$\boxed{W_{hi \to hf} = -\left[ E_{p,grav.f} - E_{p,grav.i} \right] = -\Delta E_{p,grav.}}$$

Para el caso de la fuerza de recuperación elástica:




$$W_{i\to f} = \int_{xi}^{xf} k\, x \cos 180^o \, dx = -\frac{1}{2} k \left( x_f^{\,2} - x_i^{\,2} \right)$$

Si definimos $E_{p,el} = \frac{1}{2} k\, x^2 \Rightarrow$

$$\boxed{W_{i\to f} = -\left( E_{p,el,f} - E_{p,el,i} \right) = -\Delta E_{p,el}}$$

# Teorema de trabajo-Energía mecánica

Ahora podemos considerar el $W\ total$ como la suma de trabajos producidos por fuerzas conservativas más el producido por fuerzas no conservativas:

$$W_{total,i-f} = W_{FC,i-f} + W_{FNC,i-f} =$$
$$= \left(-\Delta E_p\right)_{i-f} + W_{FNC,i-f} = \Delta E_{c,i-f}$$

Si definimos: $\boxed{E_{mecánica} = E_c + E_p}$

$\boxed{Epg\ y/o\ Epe}$

$$\Rightarrow \boxed{W_{FNC,\,i-f} = \Delta E_{c,i-f} + \Delta E_{p,i-f} = \Delta E_{mec,i-f}}$$

Entorno

Sistema

$$\boxed{E_{mecánica} = E_c + E_p}$$

$\boxed{Epg\ y/o\ Epe}$

$$\boxed{W_{FNC,\,i-f} = \Delta E_{c,i-f} + \Delta E_{p,i-f} = \Delta E_{mec,i-f}}$$

Entorno

Sistema

Al considerar los trabajos de fuerzas conservativas asociados a las Energías potenciales estamos considerando a los agentes que realizan las fuerzas como parte del sistema. La Energia potencial surge de interacciones de las partes del sistema entre ellas mismas.

Por lo tanto al hablar de Energía Mecánica estamos considerando a ***la Tierra*** y a los ***resortes*** como parte del sistema.

Leer el punto 12.2 del libro Física Volumen 1, 5ta edición de Resnick, Halliday y Krane.

## "Conservación de la energía"

Si $\boxed{W_{FNC,\,i-f} = 0}$

$$\boxed{\Delta E_{mec,i-f} = 0 \Rightarrow E_{mec,i} = E_{mec,f}}$$

Este principio de conservación es muy útil y aplicable en muchas situaciones prácticas de la vida cotidiana.

"Si en un sistema el trabajo de fuerzas no conservativas es cero, la energía mecánica se mantiene constante"

## ESTRATEGIA PARA RESOLVER PROBLEMAS

1) Definir el sistema de estudio. Identificar la condición inicial y final. Puede haber diferentes puntos entre los cuales hacer planteos parciales. Lo que es condición final en uno es inicial de otro.

2) Identificar las fuerzas actuando sobre el sistema y analizar si hay fuerzas no conservativas ***que realicen trabajo***

*Si no las hay, aplicar el principio de conservación=>* $\Delta E_M = 0$

*Si las hay =>* $\Delta E_M = W_{nc}$

Dependiendo de los datos del problema, puede utilizarse también:

$$W_{total} = \Delta E_C$$

3) Si hay cambios en la posición vertical, seleccionar una posición de referencia que indique el punto donde la energía potencial es cero.
Si hay resortes, el punto cero de EPe es la posición natural del resorte

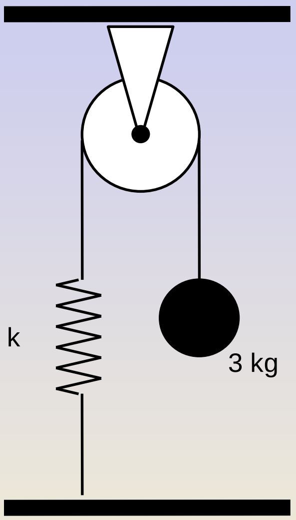
**Ejercicio : Sistemas sobre los que actúan acciones dependientes de la posición o del tiempo.**

**Objetivo:** verificar la conveniencia de utilizar conceptos energéticos en sistemas sobre los que actúan acciones dependientes de la posición o del tiempo.

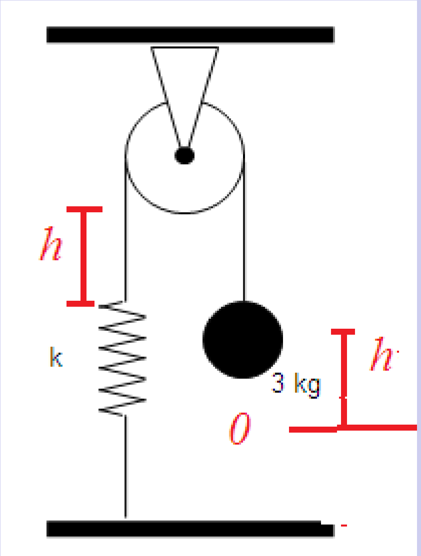
Se sujeta una masa de 3 kg a un resorte ligero unido a una cuerda que pasa sobre una polea de la manera que se muestra en la figura. La masa de la polea puede suponerse despreciable y la fricción en su eje también. El Sistema está en reposo bajo la acción de una fuerza que "sostiene" a la masa esférica de modo que el resorte esté en su longitud natural. En un instante dado la masa se libera. Si la masa desciende una distancia de 10 cm antes de quedar nuevamente en reposo instantáneo, encuentre:

**a)** la constante del resorte.

**b)** la velocidad de la masa cuando está a 5 cm de la posición inicial.




**Aclare qué sistema es el que está analizando y qué aproximación/es realizó para poder responder lo requerido en los incisos anteriores**




**a)** la constante del resorte.

m= 3 kg

Sistema: Masa + resorte + tierra

**Estado inicial:** m en reposo, hi= 0,10 m arriba de la posición final. El resorte sin estirar

**Estado final:** m en reposo en nivel 0 de E potencial. Resorte estirado $\Delta$X= 0,1m

$$Wnc = \Delta E_M = 0 \rightarrow \quad E_Mi = E_Mf$$

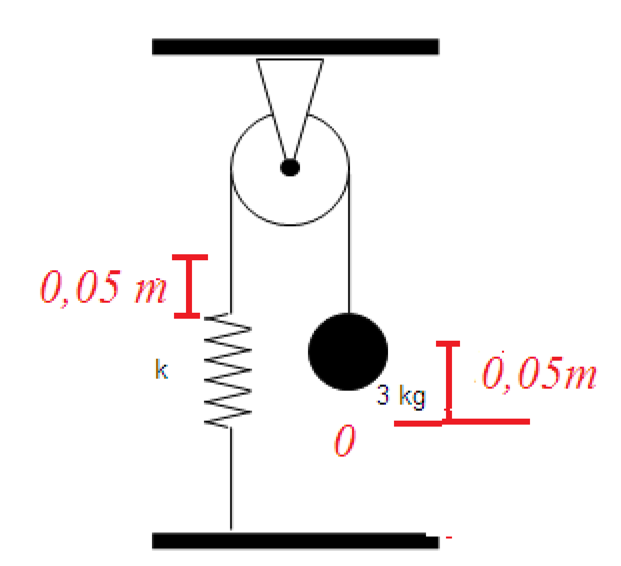
$$E_mi = m\,g\,h_i + \cancel{\tfrac{1}{2}\,m\,v_i^2} + \cancel{\tfrac{1}{2}\,K\,\Delta x_i^{\,2}}$$

$$h_i = \Delta x_f$$

$$E_mf = \cancel{m\,g\,h_f} + \cancel{\tfrac{1}{2}\,m\,v_f^2} + \tfrac{1}{2}\,K\,\Delta x_f^{\,2}$$

$$m\,g\,\cancel{h_i} = \tfrac{1}{2}\,K\,h_i^{\,\cancel{2}}$$

$$K = \frac{2.m.g}{h_i} = \frac{2.\ 3\ kg.\ 9{,}8\ m/s^2}{0{,}1\ m} = \boxed{588\ N/m}$$




**b)** la velocidad de la masa cuando está a 5 cm de la posición inicial.

**Estado inicial:** m en reposo, hi= 0,05 m arriba de la posición final. El resorte sin estirar

**Estado final:** m descendiendo con vf, en nivel 0 de E potencial. Resorte estirado $\Delta$X= 0,05m

$$Wnc = \Delta E_M = 0 \rightarrow \quad E_M i = E_M f$$

$$E_m i = m\, g\, h_i$$

$$h_i = \Delta x_f$$

$$E_m f = \cancel{m\, g\, h_f} + \frac{1}{2} m\, v_f^2 + \frac{1}{2} K\, \Delta x_f^{\,2}$$

$$m\, g\, h_i = \frac{1}{2} m\, v_f^2 + \frac{1}{2} K\, \Delta x_f^{\,2}$$

$$\frac{1}{2} m v_f^2 = m\, g\, h_i - \frac{1}{2} K \Delta x_f^{\,2}$$

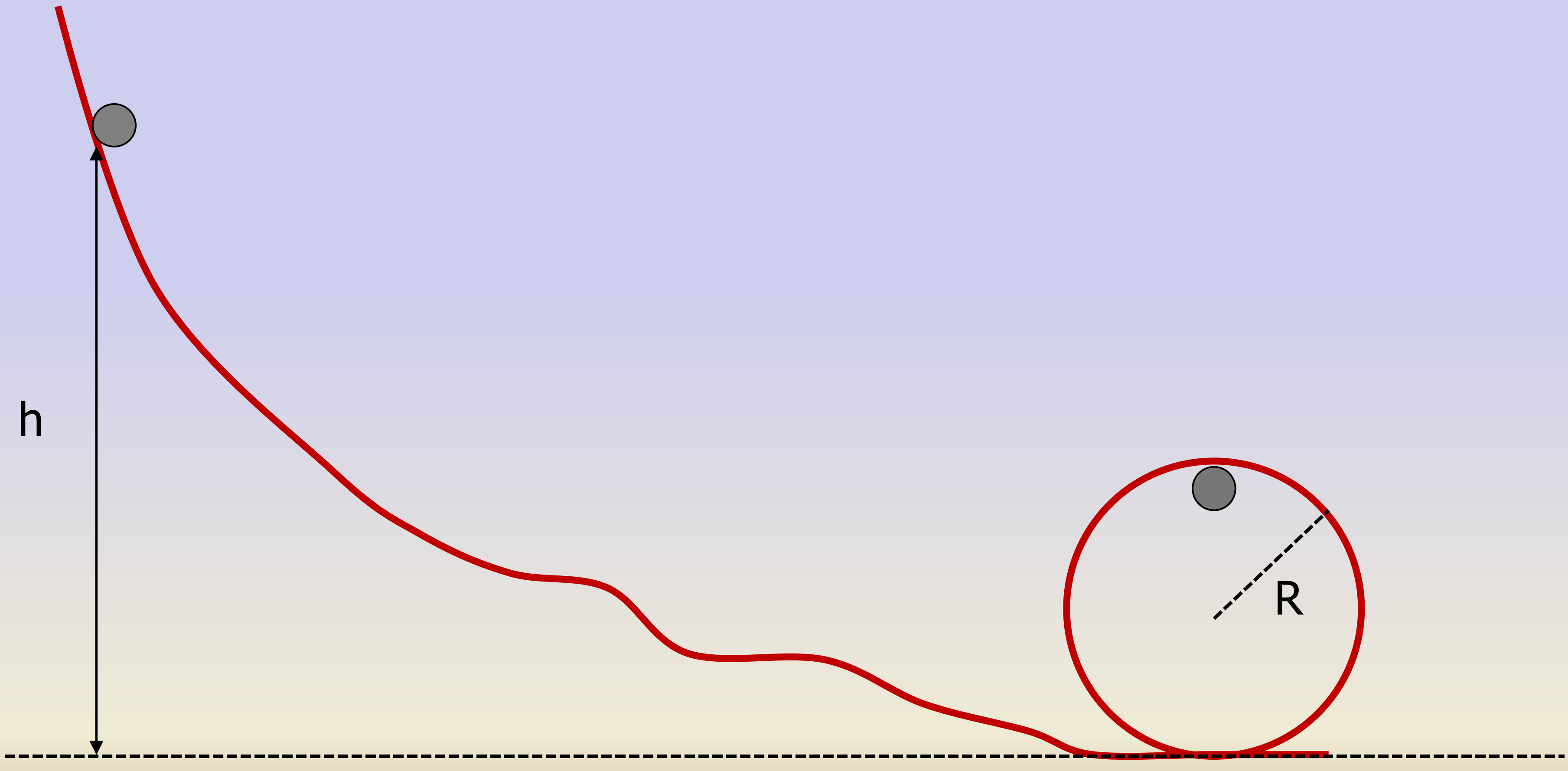
$$v_f^2 = 2.\, \frac{(m\, g\, h_i - \frac{1}{2} K \Delta x_f^{\,2})}{m}$$

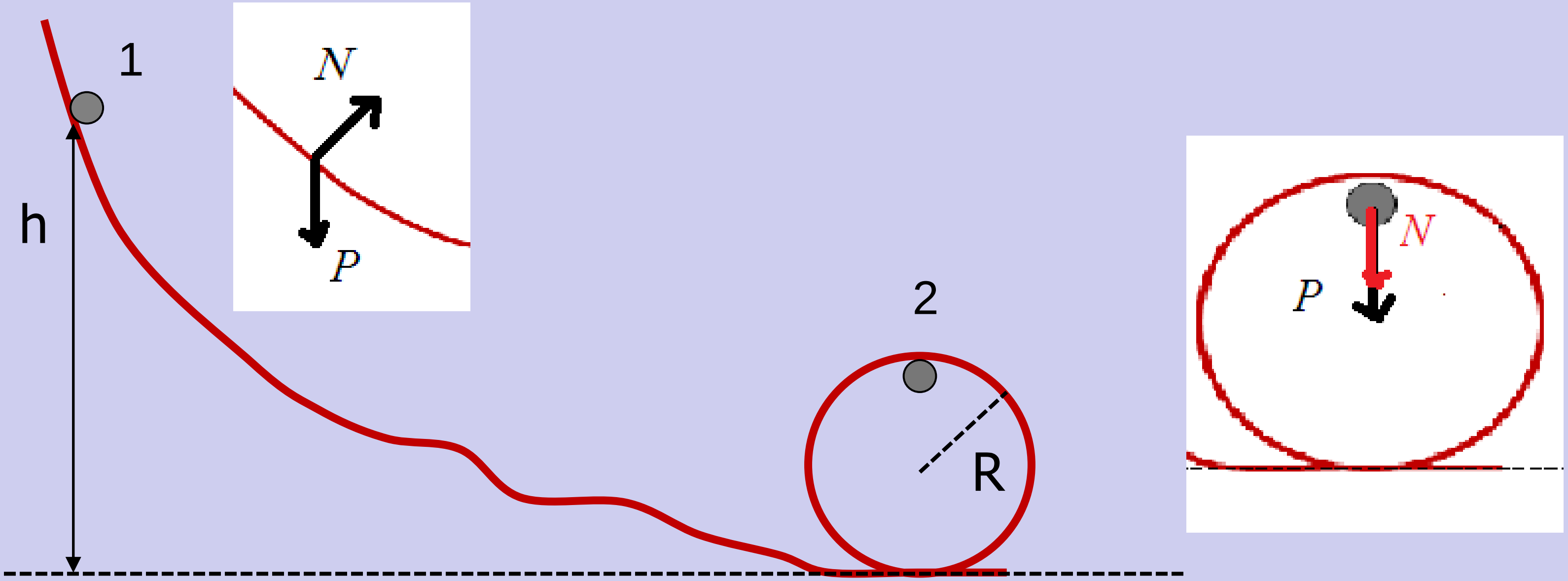
$$v_f = \sqrt{2\, \frac{(3kg.\ 9{,}8\ m/s^2.\ 0{,}05m - \frac{1}{2}\ 588N/m.\ 0{,}05m^2)}{3\ kg}}$$

$$\boxed{v_f = \pm\ 0{,}7\ m/s}$$

**Ejercicio:** El rizo analizado con conceptos energéticos

Una bolita desliza (sin fricción) por una pista con un rizo (como se muestra en la figura). Si la pelotita es liberada en un punto de la pista de altura h ¿Cuál debe ser el mínimo valor de h para que la bolita de una vuelta completa por el rizo de radio R?. ¿Su respuesta depende de la forma de la pista antes del rizo?



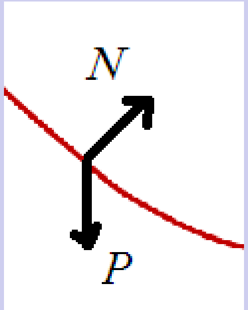



Sistema: Bola modelada como partícula + Tierra

$$Wnc = \Delta E_M = 0 \quad \rightarrow \qquad E_M i = E_M f$$

Condición: La bolita da la vuelta sin despegarse,

$$N \neq 0, \quad v \neq 0$$

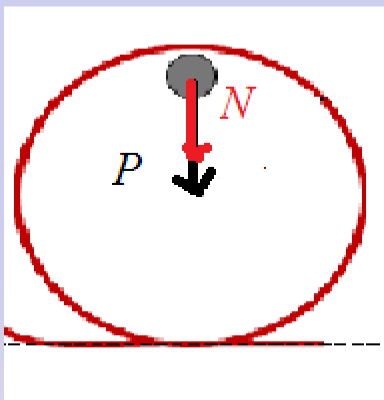



$$W_{nc} = \Delta E_M = 0 \rightarrow \quad E_M i = E_M f$$

$$E_m i = m\,g\,h_1$$

$$E_m f = m\,g\,2R + \tfrac{1}{2}\,m\,v_2^2$$

En 2



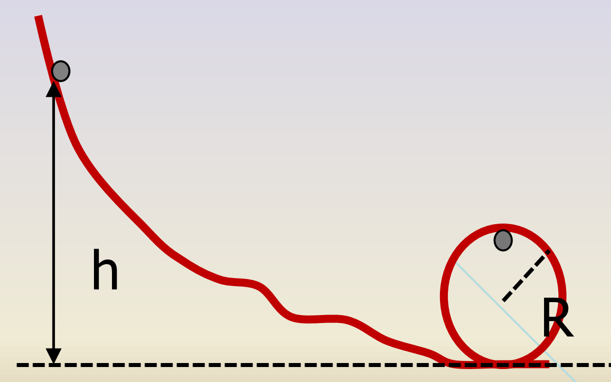

$$\sum F_{rad} = \cancel{N} + P = m\,\frac{v_2^2}{R}$$

En la situación limite N=0
Se desprende de la pista

$$\cancel{m}.g = \cancel{m}\,\frac{v_{min}^2}{R}$$

$$\boxed{R\,g = v_{min}^2}$$

$$\cancel{m}\,\cancel{g}\,h_{1lim} = \cancel{m}\,\cancel{g}\,2R + \tfrac{1}{2}\,\cancel{m}\,\cancel{g}\,R$$




$$h_{1lim} = 2R + \tfrac{1}{2}R = \boxed{\frac{5}{2}R}$$

**Ejercicio para entregar:**

**Objetivo:** Integrar conceptos energéticos y dinámicos.

Una esferita de acero cuelga sujeta a una cuerda de longitud L. a)¿Cuál es la velocidad mínima con la que debe llegar, para que pueda alcanzar una altura H = 2L, sin salir de la trayectoria circular? ¿Cuál es la fuerza resultante que actúa sobre la esferita en esa posición?

b)¿Con que velocidad pasa por el punto mas bajo de la circunferencia para llegar arriba con la velocidad calculada?

c) ¿Qué trabajo realiza la cuerda durante el movimiento?

Con sus conocimientos de las magnitudes trabajo y energía, explique por qué se modifica la energía cinética de la bolita a lo largo de la trayectoria.

d) ¿Cambiaria la situación si cambiamos la soga por una  varilla rígida?.