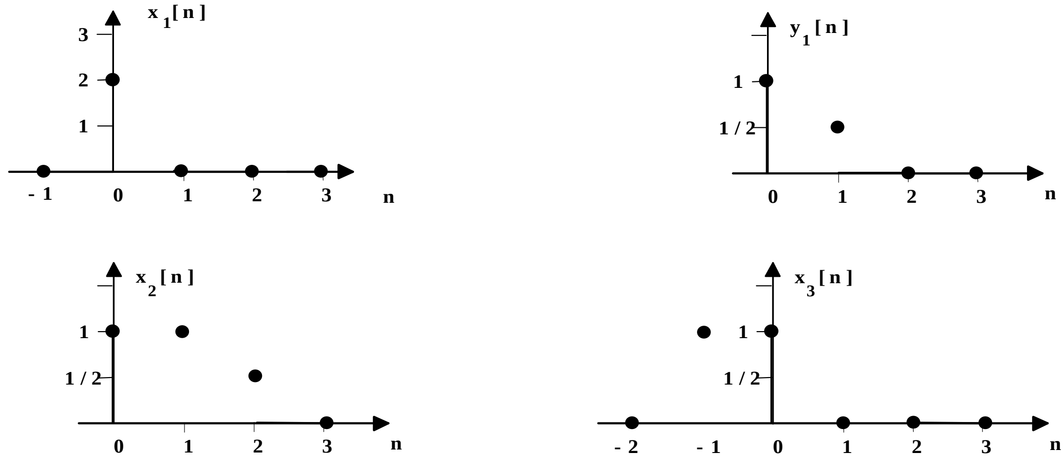
INTRODUCCIÓN AL PROCESAMIENTO DE SEÑALES

Práctica 3:

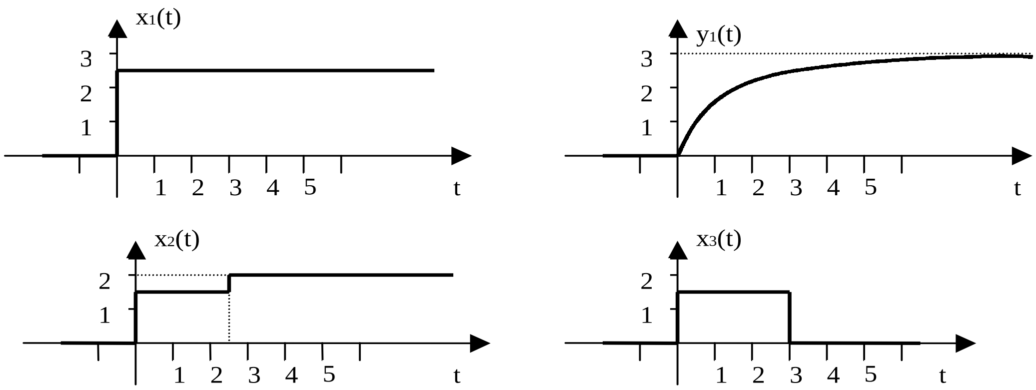
Sistemas Lineales. Respuesta al Impulso. Convolución.

1. **Aprovechando la linealidad**

   a) Sea $S1$ un SLID cuya respuesta a la señal $x_1[n]$ es $y_1[n]$. Halle sus respuestas a $x_2[n]$ y a $x_3[n]$.



   b) El SLIT $S2$ responde a $x_1(t)$ con $y_1(t) = 3(1 - e^{-2t})u(t)$. Halle sus respuestas a $x_2(t)$ y a $x_3(t)$.



   c) Halle las respuestas impulsionales de los sistemas $S1$ y $S2$.

   d) Halle la respuesta del sistema $S2$ a la señal $x_4(t) = t.u(t)$ en función de $y_1(t)$. Para ello trate de vincular $x_4(t)$ con $x_1(t)$.

   Ayuda: En el ejercicio 3 de la práctica 2 demostramos que si se tienen dos SLIDs, $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$, conectados en cascada, el sistema $\mathcal{S}$ también resulta SLID. En este caso, se puede demostrar (luego veremos cómo) que al intercambiar el orden de $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ se obtiene el mismo sistema $\mathcal{S}$. Esto puede serle de utilidad para los incisos *c*) y *d*).

2. **Respuesta al impulso**

   En forma general, diremos que cuando a un sistema lineal discreto se le aplica a su entrada una delta de Kronecker en el instante k, $x[n] = \delta[n-k]$, se obtiene como respuesta la señal $\bar{h}[n,k]$.

   a) En base al conocimiento de $\bar{h}[n,k]$, ¿cómo resulta la salida del sistema a una entrada cualquiera $x[n]$?

   b) ¿Qué condición debe cumplir $\bar{h}[n,k]$ para que represente a un sistema lineal causal?

   c) ¿Qué condición debe cumplir $\bar{h}[n,k]$ para que represente a un sistema sin memoria?

d) ¿Qué condición debe cumplir $\bar{h}[n,k]$ para que represente a un sistema invariante al desplazamiento? ¿Cómo resulta la salida del sistema a una entrada cualquiera $x[n]$ en este caso?

e) Para el caso

$$\bar{h}[n,k] = \begin{cases} 1 & -1 \leq n \leq k,\ k = 0 \\ 1/k & k-1 \leq n \leq k+3,\ k \neq 0 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Calcule la secuencia de salida $y[n]$ para $-2 \leq n \leq 6$ cuando se aplica al sistema la entrada $x[n] = u[n] - u[n-3]$

3. **Convolución de señales VIC**

a) Sea $y(t) = \{x * h\}(t)$ la convolución entre las señales $x(t)$ y $h(t)$

I. ¿Cómo resulta la convolución entre $x(t-t_0)$ y $h(t)$, con $t_0 \in \mathbb{R}$?

II. ¿Cómo resulta la convolución entre $x(t)$ y $h(t-t_1)$, con $t_1 \in \mathbb{R}$?

III. ¿Cómo resulta la convolución entre $x(t-t_0)$ y $h(t-t_1)$, con $t_0,\ t_1 \in \mathbb{R}$? Compruebe que este resultado verifica los dos casos anteriores.

b) Calcular la convolución continua $y(t) = \{x * h\}(t)$ para los casos:

I. $x(t) = \mathrm{sinc}(t)$ y $h(t) = \delta(t)$

II. $x(t) = \sqcap(t)$ y $h(t) = \sqcap(t-1)$

III. $x(t) = \sqcap(t)$ y $h(t) = \sqcap(t/2)$

IV. Una forma "ingeniosa" de resolver el inciso anterior sería escribir $\sqcap(t/2) = \sqcap(t+\frac{1}{2}) + \sqcap(t-\frac{1}{2})$ y utilizar el resultado de 3*b*II. Verifique su resultado con este procedimiento.

V. $x(t) = 2\bigwedge(t+1)$ y $h(t) = \sqcap(t-1)$

VI. $x(t) = 2\bigwedge(t+1)$ y $h(t) = \delta(t-\frac{1}{2}) - \delta(t-\frac{3}{2})$

VII. Calcule $\displaystyle\int_{-\infty}^{t} y(\tau)\ d\tau$ para el inciso anterior y compárela con el resultado del inciso 3*b*V. ¿A qué se debe este resultado?

VIII. $x(t) = e^{-\alpha t}\, u(t)$ y $h(t) = e^{-\beta t}\, u(t)$ para $\alpha \neq \beta$ y para $\alpha = \beta$

c) En los incisos anteriores, ¿qué largo tiene el soporte de la señal $y(t)$? ¿Cómo resulta en términos de los soportes de $x(t)$ y $h(t)$?

d) Definimos el área bajo la curva de una señal $x(t)$ como $A_x = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt$. Demuestre que si $y(t) = \{x * h\}(t)$, entonces $A_y = A_x\ A_h$. Verifique los resultados de los incisos anteriores utilizando esta propiedad.

4. **Convolución de señales VID**

a) Calcular la convolución discreta $y[n] = \{x * h\}[n]$ para los casos:

I. $x[n] = 0{,}5^n\, u[n]$ y $h[n] = 4^n\, u[n-2]$

II. $x[n] = \delta[n+2]$ y $h[n] = a^{-n}\, u[-n] \qquad 0 < a < 1$

III. $x[n] = 1$ y $h[n] = \sqcap_{\mathbf{5}}[n]$

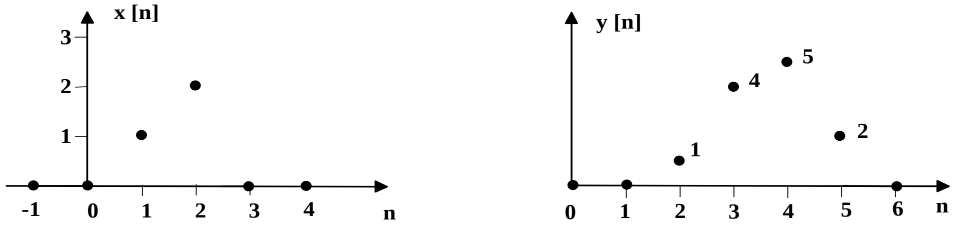
IV. $x[n] = u[n]$ y $h[n] = n\sqcap_{\mathbf{7}}[n]$

V. $x[n] = \sqcap_{\mathbf{3}}[n]$ y $h[n] = \sqcap_{\mathbf{3}}[n-1]$

b) Analice cómo queda el soporte de la señal $y[n]$ en términos de los soportes de $x[n]$ y $h[n]$.

c) Enuncie propiedades similares a las de los incisos 3*a* y 3*d*, para el caso de señales VID.

d) Obtener $h[n]$ (ó $x[n]$) si se conocen $y[n] = \{x * h\}[n]$ y $x[n]$ (ó $h[h]$), lo que se denomina "deconvolución", es en general una tarea complicada. Existen, sin embargo casos sencillos donde la misma puede resolverse, por ejemplo en base a plantear un sistema de ecuaciones. En el siguiente gráfico, la señal $y[n]$ es la convolución entre $x[n]$ y $h[n]$. Sabiendo que $h[-1] = 0$, calcular $h[n]$.



5. **Promedio Móvil**

   El cálculo del promedio móvil de $M = 2N + 1$ muestras de una secuencia dada puede obtenerse aplicando esta secuencia a la entrada de un SLID cuya respuesta impulsional es:

$$h[n] = \frac{1}{2N+1} \sum_{m=-N}^{N} \delta[n-m]$$

   a) Halle la ecuación en diferencias que describe al sistema.
   b) ¿Es el sistema causal? ¿Cómo es posible usar este sistema con datos "del mundo físico"?
   c) Obtenga la salida si la entrada es $x[n] = A + \mathrm{sen}(2\pi n/M)$; con $A \in \mathbb{R}$ constante.
   d) Analice (se recomienda utilizar Octave) qué ocurriría si la entrada es $x[n] = A + \mathrm{sen}(2\pi n/K)$; con $A \in \mathbb{R}$, y con K un número entero no necesariamente igual a $2N + 1$, por ejemplo $A = 1$, $N = 2$, $K = 3, 4, 6, 7, \ldots$

6. **Realización de Sistemas**

   Dadas las siguientes ecuaciones en diferencias/diferenciales que describen sistemas LID/LIT:

   S1) $2\ y[n] + y[n-1] - 4y[n-3] = x[n] + 3\ x[n-5]$
   S2) $y[n] = x[n] - x[n-1] + 2\ x[n-2] - 3\ x[n-4]$
   S3) $\dot{y}(t) + \dfrac{1}{RC}\ y(t) = \dfrac{1}{RC}\ x(t)$
   S4) $\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - 2\ y(t) = x(t)$

   a) Halle la realización de los sistemas en la forma directa I.
   b) Halle la realización de los sistemas en la forma directa II.
   c) En cada caso: ¿qué realización utiliza menor cantidad de bloques de retardo/integradores? ¿Y sumadores?
   d) Determine si los sistemas *S1* y *S2* son de tipo FIR o IIR.

7. **Convoluciones en Octave**

   a) En el ambiente de trabajo de Octave defina los vectores `x` y `h` correspondientes a señales discretas y calcule la convolución entre ellas ejecutando las siguientes sentencias:

```
N1 = -20; N2 = 20; n = [N1:N2];
x = zeros(size(n)); x((n>=-5)&(n<=5)) = 1;
h = zeros(size(n)); h((n>=-9)&(n<=9)) = [[1:1:10] [9:-1:1]];
n2 = [2*n(1):2*n(end)]; y = conv(x,h);
```

   I. Grafique utilizando el comando `stem` (tenga en cuenta que debería hacer `stem(n,x)`, `stem(n,h)` y `stem(n2,y)`). Recuerde que puede poner las tres gráficas en una misma figura utilizando el comando `subplot`.
   II. Pruebe qué sucede al modificar los valores de `N1` y `N2`.

III. Podría desplazar la señal `x`, mediante las sentencias `K = 5; x = circshift(x,[0,K]);`. Vuelva a calcular la convolución en este caso e interprete sus resultados. Pruebe qué sucede con diferentes valores de desplazamiento `K`.

b) Con la misma idea del inciso anterior se podría intentar calcular las respuestas a las excitaciones `x1`, `x2` y `x3` de un sistema con respuesta impulsional `h`, mediante las siguientes sentencias:

```
N1 = -60; N2 = 60; n = [N1:N2];
h = zeros(size(n)); h(n>0) = exp(-.2*n(n>0));
x1 = zeros(size(n)); x1((n>=0) & (n<=10)) = 1;
x2 = zeros(size(n)); x2((n>=0)) = 1;
x3 = zeros(size(n)); x3((n>=0)) = 1; x3((n>=20)) = 1.5;
y1 = conv(x1,h); y2 = conv(x2,h); y3 = conv(x3,h);
n2 = [2*n(1):2*n(end)];
```

Interprete qué ocurre en `y2` a partir de `n2 = 61` (recuerde que `conv` resuelve la convolución entre secuencias de largo finito).

c) Verificar el resultado del problema 4*d*.

Algunos resultados

2. *e*) Para $-2 \leq n \leq 6$, $y[n] = \left\{0,\ 1,\ 2,\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right\}$

3. *b*) I. $y(t) = \mathrm{sinc}(t)$
   II. $y(t) = \bigwedge(t-1)$
   III. $y(t) = (t+3/2)\sqcap(t+1) + \sqcap(t) + (3/2-t)\sqcap(t-1)$
   IV. $y(t) = \bigwedge(t+1/2) + \bigwedge(t-1/2)$
   V. $y(t) = (t+3/2)^2\sqcap(t+1) + (3/2-2t^2)\sqcap(t) + (t-3/2)^2\sqcap(t-1)$
   VI. $y(t) = 2\ \bigwedge(t+1/2) - 2\ \bigwedge(t-1/2)$
   VIII. $(\beta-\alpha)^{-1}(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})u(t)$ si $\alpha \neq \beta$; $t\ e^{-\alpha t}u(t)$ si $\alpha = \beta$

4. *a*) I. $y[n] = \dfrac{8}{7}\ (4^n - 8.0,5^n)u[n-2]$
   II. $y[n] = \dfrac{a^{-n}}{a^2}\ u[-n-2]$
   III. $y[n] = 5$
   IV. $y[n] = \left(\displaystyle\sum_{k=-3}^{n} k\right)(u[n+3] - u[n-3]) = \dfrac{(n+4)(n-3)}{2}(u[n+3] - u[n-3])$
   V. $y[n] = \bigwedge_3[n-1]$

   d) $h[n] = \delta[n-1] + 2\ \delta[n-2] + \delta[n-3]$

5. *c*) $y[n] = A$