ESTIMADORES

ESTIMADORES

Un *estimador* es un estadístico (una función de la muestra) utilizado para estimar un parámetro desconocido de la población.

Por ejemplo, si se desea conocer el precio medio poblacional de un artículo (parámetro desconocido) se recogen observaciones del precio de dicho artículo en diversos establecimientos (muestra) pudiendo utilizarse la media aritmética de las observaciones para estimar el precio medio poblacional.

Para *cada parámetro* pueden existir varios *estimadores diferentes*. En general, se elige el estimador que posea mejores propiedades que los restantes.

SESGO

Se denomina *sesgo* de un estimador a la diferencia entre la esperanza (valor esperado) del estimador y el verdadero valor del parámetro a estimar. Es deseable que un estimador sea *insesgado o centrado*, esto es, que el sesgo sea nulo para que la esperanza del estimador sea igual al valor del parámetro que se desea estimar.

Por ejemplo, si se desea estimar la media de una población, la media aritmética de la muestra es un estimador insesgado de la misma, ya que la esperanza (valor esperado) es igual a la media poblacional.

Si una muestra $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ procede de una población de media μ:

$E[x_i] = \mu$ para $i = (1, 2, \cdots n)$

- La media aritmética muestral es un estimador insesgado de la media poblacional:

$$E[\overline{x}] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \frac{1}{n}E\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[x_i] = \frac{1}{n}\left(E[x_1] + E[x_2] + \cdots + E[x_n]\right) = \frac{1}{n}\,n\mu = \mu$$

- La varianza muestral de una muestra aleatoria simple es un estimador insesgado de la varianza poblacional:

$$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}$$

📖 Un estimador $\hat{\theta}$ es *insesgado* cuando $E(\hat{\theta}) = \theta$

📖 Un estimador $\hat{\theta}$ es *sesgado* cuando $E(\hat{\theta}) = \theta + \underbrace{b(\hat{\theta})}_{\text{sesgo}} \Rightarrow b(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$

📖 Un estimador $\hat{\theta}$ es *asintóticamente insesgado* si su posible sesgo tiende a cero al aumentar el tamaño muestral que se calcula: $\lim_{n\to\infty} b(\hat{\theta}) = 0$

Sea el estimador $\hat{\theta} = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} x_i$

$$E(\hat{\theta}) = E\left[\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \frac{1}{n+1}E\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} E(x_i) = \frac{1}{n+1}(n\mu) = \frac{n\mu}{n+1}$$

$$b(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \mu = \frac{n\mu}{n+1} - \mu = \frac{n\mu - n\mu - \mu}{n+1} = \underbrace{-\frac{\mu}{n+1}}_{\substack{\text{insesgado}\\ \text{asintóticamente}}} \xrightarrow{n \longrightarrow \infty} 0$$

ERROR CUADRÁTICO MEDIO DE LOS ESTIMADORES (ECM)

La utilización de la estimación puntual como si fuera el verdadero valor del parámetro conduce a que se pueda cometer un error más o menos grande.

El Error Cuadrático Medio (ECM) de un estimador $\hat{\theta}$ viene definido:

$$ECM(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2 = V(\hat{\theta}) + \left[\underbrace{E(\hat{\theta}) - \theta}_{\text{sesgo}}\right]^2 \quad \text{siendo el sesgo } b(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$$

Cuando el estimador es centrado, el sesgo $b(\hat{\theta}) = 0 \quad \rightarrow \quad ECM(\hat{\theta}) = V(\hat{\theta})$

Un error cuadrático medio pequeño indicará que en media el estimador $\hat{\theta}$ no se encuentra lejos del parámetro θ.

CONSISTENCIA

Si no es posible emplear estimadores de mínima varianza, el requisito mínimo deseable para un estimador es que a medida que el tamaño de la muestra crece, el valor del estimador tienda a ser el valor del parámetro poblacional, propiedad que se denomina *consistencia*.

si un estimador $\theta\hat{}$ es un estimador asintóticamente insesgado cuya varianza tiende a cero al aumentar el tamaño muestral entonces es un estimador consistente .

El estimador $\hat{\theta}$ es *consistente* cuando $\lim\limits_{n\to\infty} E(\hat{\theta}) = \theta$ y $\lim\limits_{n\to\infty} V(\hat{\theta}) = 0$

EFICIENCIA

Un estimador es más *eficiente* o más *preciso* que otro estimador, si la varianza del primero es menor que la del segundo.

Sean $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ dos estimadores insesgados, se dice que $\hat{\theta}_1$ es *más eficiente* que $\hat{\theta}_2$ si se verifica que $Var(\hat{\theta}_1) < Var(\hat{\theta}_2)$

La *eficiencia relativa* se mide por el ratio: $\dfrac{Var(\hat{\theta}_1)}{Var(\hat{\theta}_2)}$

CÁLCULO DE LA INSESGADEZ y EFICIENCIA DE LOS ESTIMADORES

1.- La variable aleatoria poblacional "renta de las familias" del municipio de Madrid se distribuye siguiendo un modelo $N(\mu, \sigma^2)$. Se extraen muestras aleatorias simples de tamaño 4. Como estimadores del parámetro μ, se proponen los siguientes:

$$\hat{\mu}_1 = \frac{x_1 + 2x_2 + 3x_3}{6}$$

$$\hat{\mu}_2 = \frac{x_3 - 4x_2}{-3}$$

$$\hat{\mu}_3 = \overline{x}$$

Se pide:

a) Comprobar si los estimadores son insesgados

b) ¿Cuál es el más eficiente?

c) Si tuviera que escoger entre ellos, ¿cuál escogería?. Razone su respuesta a partir del Error Cuadrático Medio.

Solución:

a) Un estimador $\hat{\theta}$ es insesgado (o centrado) cuando se verifica $\boxed{E(\hat{\theta}) = \theta}$

$$E(\hat{\mu}_1) = E\left[\frac{x_1 + 2x_2 + 3x_3}{6}\right] = \frac{1}{6} E\left[x_1 + 2x_2 + 3x_3\right] =$$

$$= \frac{1}{6}\left[E(x_1) + 2E(x_2) + 3E(x_3)\right] = \frac{1}{6}\left[6\mu\right] = \mu$$

$$E(\hat{\mu}_2) = E\left[\frac{x_1 - 4x_2}{-3}\right] = -\frac{1}{3} E\left[x_1 - 4x_2\right] = -\frac{1}{3}\left[E(x_1) - 4E(x_2)\right] =$$

$$= -\frac{1}{3}\left[-3\mu\right] = \mu$$

$$E(\hat{\mu}_3) = E\left[\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}\right] = \frac{1}{4} E\left[x_1 + x_2 + x_3 + x_4\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[E(x_1) + E(x_2) + E(x_3) + E(x_4)\right] = \frac{1}{4}\left[4\mu\right] = \mu$$

Los tres estimadores son insesgados o centrados.

b) El estimador *más eficiente* es el que tenga menor varianza.

$$V\left[\hat{\mu}_1\right] = V\left[\frac{x_1 + 2x_2 + 3x_3}{6}\right] = \frac{1}{36} V\left[x_1 + 2x_2 + 3x_3\right] =$$

$$= \frac{1}{36}\left[V(x_1) + 4V(x_2) + 9V(x_3)\right] = \frac{1}{36}\left[14\sigma^2\right] = \frac{14}{36}\sigma^2 = 0{,}39\sigma^2$$

$$V\left[\hat{\mu}_2\right] = V\left[\frac{x_1 - 4x_2}{-3}\right] = \frac{1}{9} V\left[x_1 - 4x_2\right] = \frac{1}{9}\left[V(x_1) + 16V(x_2)\right] =$$

$$= \frac{1}{9}\left[17\sigma^2\right] = \frac{17}{9}\sigma^2 = 1{,}89\sigma^2$$

$$V\left[\hat{\mu}_3\right] = V\left[\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}\right] = \frac{1}{16} V\left[x_1 + x_2 + x_3 + x_4\right] =$$

$$= \frac{1}{16}\left[V(x_1) + V(x_2) + V(x_3) + V(x_4)\right] = \frac{1}{16}\left[4\sigma^2\right] = \frac{4}{16}\sigma^2 = 0{,}25\sigma^2$$

El estimador $\hat{\mu}_3$ es el más eficiente.

c) Se elige el estimador que presente menor Error Cuadrático Medio (ECM)

$$ECM(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2 = V(\hat{\theta}) + \left[\underbrace{E(\hat{\theta}) - \theta}_{\text{sesgo}}\right]^2 \qquad \text{sesgo } b(\hat{\theta}) = \left[E(\hat{\theta}) - \theta\right]$$

$$\text{Si } \underbrace{E(\hat{\theta}) = \theta}_{\text{insesgado}} \Rightarrow ECM(\hat{\theta}) = V(\hat{\theta})$$

Al ser los tres estimadores insesgados (centrados), se elige al que menor varianza presenta, que coincidirá con el que menor ECM tiene, es decir, se opta por el estimador $\hat{\mu}_3$

Adviértase que si el estimador $\hat{\theta}$ es insesgado: $ECM(\hat{\theta}) = V(\hat{\theta})$

ESTIMADORES SESGADOS:

CÁLCULO DEL SESGO Y ESTIMACIÓN PUNTUAL

2.- La variable aleatoria X representa los gastos mensuales de una empresa, cuya función de densidad es $f(\theta, x) = \theta x^{\theta-1}$ con $\theta > 0$ y $0 < x < 1$. Se realiza una m.a.s. de tamaño 3, y se proponen tres estimadores:

$$\hat{\theta}_1 = \overline{x}$$
$$\hat{\theta}_2 = \frac{x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2}{6}$$
$$\hat{\theta}_3 = \frac{x_3 - 2x_1 + 4x_2}{6}$$

a) Calcule los sesgos

b) Si la muestra que se obtiene es (0,7 ; 0,1 ; 0,3), calcule las estimaciones puntuales

c) ¿Cuáles son las funciones estimadas para las estimaciones anteriores?

Solución:

Un estimador $\hat{\theta}$ es insesgado (centrado) cuando $E(\hat{\theta}) = \theta$.

Un estimador $\hat{\theta}$ es sesgado cuando $E(\hat{\theta}) = \theta + \underbrace{b(\hat{\theta})}_{\text{sesgo}} \Rightarrow b(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$

X = ”gastos mensuales de la empresa”

$f(\theta, x) = \theta x^{\theta-1}$ con $\theta > 0$ y $0 < x < 1$ m.a.s. con n = 3

- Sesgo del estimador $\hat{\theta}_1 = \overline{x}$

$$\hat{\theta}_1 = \overline{x} \Rightarrow E(\hat{\theta}_1) = E\left[\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right] = \frac{1}{3} E\left[x_1 + x_2 + x_3\right] = \frac{1}{3}(3\mu) = \mu \text{ (media poblacional)}$$

donde

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x,\theta)\, dx = \int_0^1 x\, f(x,\theta)\, dx = \int_0^1 x\, \theta x^{\theta-1}\, dx = \int_0^1 \theta\, x^{\theta}\, dx = \left[\frac{\theta\, x^{\theta+1}}{\theta+1}\right]_0^1 = \frac{\theta}{\theta+1}$$

El sesgo: $b(\hat{\theta}_1) = E(\hat{\theta}_1) - \theta = \dfrac{\theta}{\theta+1} - \theta = -\dfrac{\theta^2}{\theta+1}$

- Sesgo del estimador $\hat{\theta}_2 = \dfrac{x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2}{6}$

$$E(\hat{\theta}_2) = E\left[\frac{x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2}{6}\right] = \frac{1}{6}\left[\underbrace{E(x_1^2)}_{\alpha_2} + 2\underbrace{E(x_2^2)}_{\alpha_2} + 3\underbrace{E(x_3^2)}_{\alpha_2}\right] = \frac{1}{6}(6\alpha_2) = \alpha_2 \quad (*)$$

donde α_2 es el momento de orden 2 respecto al origen.

$$\alpha_2 = E(x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \; f(x,\theta)\, dx = \int_0^1 x^2 \; f(x,\theta)\, dx = \int_0^1 x^2\, \theta \; x^{\theta-1}\, dx = \int_0^1 \theta \; x^{\theta+1} dx =$$

$$= \left[\frac{\theta \; x^{\theta+2}}{\theta+2}\right]_0^1 = \frac{\theta}{\theta+2}$$

entonces,

$$E(\hat\theta_2) = E\left[\frac{x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2}{6}\right] = \frac{1}{6}\left[\underbrace{E(x_1^2)}_{\alpha_2} + 2\underbrace{E(x_2^2)}_{\alpha_2} + 3\underbrace{E(x_3^2)}_{\alpha_2}\right] = \alpha_2 = \frac{\theta}{\theta+2}$$

El sesgo: $b(\hat\theta_2) = E\left(\hat\theta_2\right) - \theta = \dfrac{\theta}{\theta+2} - \theta = -\dfrac{\theta^2+\theta}{\theta+2}$

- Sesgo del estimador $\hat\theta_3 = \dfrac{x_3 - 2x_1 + 4x_2}{6}$

$$E(\hat\theta_3) = E\left[\frac{x_3 - 2x_1 + 4x_2}{6}\right] = \frac{1}{6} E\left[x_3 - 2x_1 + 4x_2\right] = \frac{1}{6}(3\mu) = \frac{1}{2}\mu$$

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \; f(x,\theta)\, dx = \int_0^1 x \; f(x,\theta)\, dx = \int_0^1 x \; \theta x^{\theta-1}\, dx = \int_0^1 \theta \; x^{\theta}\, dx = \left[\frac{\theta \; x^{\theta+1}}{\theta+1}\right]_0^1 = \frac{\theta}{\theta+1}$$

El sesgo: $b(\hat\theta_3) = E(\hat\theta_3) - \theta = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\theta}{\theta+1}\right) - \theta = -\dfrac{2\theta^2+\theta}{2(\theta+1)}$

b) Si la muestra que se obtiene es (0,7 ; 0,1 ; 0,3), calcule las estimaciones puntuales.

$$\hat\theta_1 = \frac{0,7 + 0,1 + 0,3}{3} = 0,367$$

$$\hat\theta_2 = \frac{0,7^2 + 2.0,1^2 + 3.0,3^2}{6} = 0,13$$

$$\hat\theta_3 = \frac{0,3 - 2.0,7 + 4.0,1}{6} = -\,0,117 \;\mapsto \text{no puede ser, puesto que } \hat\theta > 0$$

c) ¿Cuáles son las funciones estimadas para las estimaciones anteriores?

$\hat\theta_1 \Rightarrow \; f(0,367, x) \; = \; 0,367 \; x^{0,367-1} \; = \; 0,367 \; x^{-0,633}$

$\hat\theta_2 \Rightarrow \; f(0,13, x) \; = \; 0,13 \; x^{0,13-1} \; = \; 0,367 \; x^{-0,87}$

CÁLCULO EFICIENCIA RELATIVA Y ERROR CUÁDRATICO MEDIO

3.- Sea una población con media μ de la que se extraen m.a.s. de tamaño n. Considere los siguientes estimadores de la media:

$$\hat{\mu}_1 = \overline{x} \qquad\qquad \hat{\mu}_2 = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

a) Estudie la insesgadez, la eficiencia relativa y la consistencia de ambos estimadores

b) Elija uno de los dos en término del error cuadrático medio

Solución:

a) Insesgadez

Un estimador $\hat{\theta}$ es insesgado (o centrado) cuando se verifica $E(\hat{\theta}) = \theta$

Un estimador $\hat{\theta}$ es sesgado cuando $E(\hat{\theta}) = \theta + \underbrace{b(\hat{\theta})}_{\text{sesgo}} \Rightarrow \underbrace{b(\hat{\theta})}_{\text{sesgo}} = E(\hat{\theta}) - \theta$

Un estimador $\hat{\theta}$ es *asintóticamente insesgado* si su posible sesgo tiende a cero al aumentar el tamaño muestral que se calcula: $\lim\limits_{n\to\infty} b(\hat{\theta}) = 0$

$$E(\hat{\mu}_1) = E(\overline{x}) = E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i) = \frac{1}{n} E(\sum_{i=1}^{n} x_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(x_i) = \frac{1}{n}(n\mu) = \mu$$

$$b(\hat{\mu}_1) = E(\hat{\mu}_1) - \mu = \mu - \mu = 0$$

$$E(\hat{\mu}_2) = E(\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} x_i) = \frac{1}{n+1} E(\sum_{i=1}^{n} x_i) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} E(x_i) = \frac{1}{n+1}(n\mu) = \frac{n\mu}{n+1}$$

$$b(\hat{\mu}_2) = E(\hat{\mu}_2) - \mu = \frac{n\mu}{n+1} - \mu = \frac{n\mu - n\mu - \mu}{n+1} = \underbrace{\overbrace{-\frac{\mu}{n+1}}^{\to 0 \text{ cuando 'n' aumenta}}}_{\substack{\text{sesgado} \\ \text{asintoticamente}}}$$

- Eficiencia

Sean $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ dos estimadores insesgados de un parámetro desconocido θ.

Decimos que $\hat{\theta}_1$ es ***más eficiente*** que $\hat{\theta}_2$ si se verifica que $Var(\hat{\theta}_1) < Var(\hat{\theta}_2)$

La *eficiencia relativa* se mide por el ratio: $\dfrac{Var(\hat{\theta}_1)}{Var(\hat{\theta}_2)}$

$$V(\hat{\mu}_1) = V(\overline{x}) = V(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(x_i) = \frac{1}{n^2}(n\sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$V(\hat{\mu}_2) = V(\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} x_i) = \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{i=1}^{n} V(x_i) = \frac{1}{(n+1)^2}(n\sigma^2) = \frac{n}{(n+1)^2}\sigma^2$$

$$\text{eficiencia relativa} \equiv \frac{Var(\hat{\mu}_1)}{Var(\hat{\mu}_2)} = \frac{\sigma^2/n}{n\sigma^2/(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2}{n^2} > 1 \mapsto Var(\hat{\mu}_1) > Var(\hat{\mu}_2)$$

El estimador $\hat{\mu}_2$ tiene menor varianza, por lo que es *más eficiente* que $\hat{\mu}_1$

- Consistencia

Un estimador $\hat{\theta}$ *consistente* es un estimador asintóticamente insesgado cuya varianza tiende a cero al aumentar el tamaño muestral.

El estimador $\hat{\theta}$ es *consistente* cuando $\lim\limits_{n\to\infty} E(\hat{\theta}) = \theta$ y $\lim\limits_{n\to\infty} V(\hat{\theta}) = 0$

$$\hat{\mu}_1 \equiv \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} E(\hat{\mu}_1) = \lim\limits_{n\to\infty} E(\overline{x}) = \mu \\ \lim\limits_{n\to\infty} V(\hat{\mu}_1) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sigma^2}{n} = 0 \end{cases} \qquad \textit{es consistente}$$

$$\hat{\mu}_2 \equiv \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} E(\hat{\mu}_2) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\mu - \dfrac{1}{n+1}\mu\right) = \mu \\ \lim\limits_{n\to\infty} V(\hat{\mu}_2) = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{n}{(n+1)^2}\sigma^2\right] = 0 \end{cases} \qquad \textit{es consistente}$$

b) Elegir uno de los dos en término del error cuadrático medio.

El Error Cuadrático Medio (ECM) de un estimador $\hat{\theta}$ viene definido:

$$ECM(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2 = V(\hat{\theta}) + \left[\underbrace{E(\hat{\theta}) - \theta}_{\text{sesgo}}\right]^2 \qquad \text{sesgo } b(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$$

$$\text{Si } \underbrace{E(\hat{\theta}) = \theta}_{\text{insesgado}} \Rightarrow ECM(\hat{\theta}) = V(\hat{\theta})$$

$$ECM(\hat{\mu}_1) = V(\hat{\mu}_1) + \left[b(\hat{\mu}_1)\right]^2 = \frac{\sigma^2}{n} + 0 = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$ECM(\hat{\mu}_2) = V(\hat{\mu}_2) + \left[b(\hat{\mu}_2)\right]^2 = \frac{n}{(n+1)^2}\sigma^2 + \left(\frac{1}{n+1}\mu\right)^2 = \frac{n\sigma^2 + \mu^2}{(n+1)^2}$$

El estimador $\hat{\mu}_1$ será el que presenta menor ECM cuando $ECM(\hat{\mu}_1) \le ECM(\hat{\mu}_2)$

En esta línea,

$$\frac{\sigma^2}{n} \leq \frac{n\sigma^2+\mu^2}{(n+1)^2} = \frac{n\sigma^2}{(n+1)^2} + \frac{\mu^2}{(n+1)^2} \Rightarrow \frac{\sigma^2}{n} - \frac{n\sigma^2}{(n+1)^2} \leq \frac{\mu^2}{(n+1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(n+1)^2\sigma^2 - n^2\sigma^2}{n(n+1)^2} \leq \frac{\mu^2}{(n+1)^2} \Rightarrow \frac{(n+1)^2-n^2}{n}\sigma^2 \leq \mu^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2n+1}{n}\sigma^2 \leq \mu^2 \Rightarrow \frac{2n+1}{n} \leq \frac{\mu^2}{\sigma^2}$$

$$\begin{cases} \text{Si } \dfrac{2n+1}{n} \leq \dfrac{\mu^2}{\sigma^2} \mapsto \hat{\mu}_1 \text{ se elige antes que } \hat{\mu}_2 \\[2ex] \text{Si } \dfrac{2n+1}{n} \geq \dfrac{\mu^2}{\sigma^2} \mapsto \hat{\mu}_2 \text{ se elige antes que } \hat{\mu}_1 \end{cases}$$

4- Sea $x_1, x_2, \cdots, x_n$ una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria X con $E(X) = \mu$ y $Var(X) = \sigma^2$. Calcular el error cuadrático medio para los siguientes estimadores de μ:

$$\hat{\mu}_1 = x_1 \qquad \hat{\mu}_2 = \frac{3x_1 - 2x_2 + x_3}{6}$$

Solución:

a) Estudio de la insesgadez

$$E(\hat{\mu}_1) = E(x_1) = \mu \mapsto b(\hat{\mu}_1) = 0$$

$$E(\hat{\mu}_2) = E\left[\frac{3x_1 - 2x_2 + x_3}{6}\right] = \frac{1}{6}\left[3E(x_1) - 2E(x_2) + E(x_3)\right] = \frac{1}{6}(3\mu - 2\mu + \mu) = \frac{2}{6}\mu = \frac{1}{3}\mu$$

$$b(\hat{\mu}_2) = E(\hat{\mu}_2) - \mu = \frac{1}{3}\mu - \mu = -\frac{2}{3}\mu$$

Respecto al sesgo es mejor el primer estimador $\hat{\mu}_1$ que es insesgado o centrado.

b) Estudio de la varianza

$$Var(\mu_1) = \sigma^2$$

$$Var(\mu_2) = Var\left(\frac{3x_1 - 2x_2 + x_3}{6}\right) = \frac{1}{36}Var(3x_1 - 2x_2 + x_3) = \frac{1}{36}\left[9\,Var(x_1) + 4\,Var(x_2) + Var(x_3)\right] =$$

$$= \frac{1}{36}\left[9\sigma^2 + 4\sigma^2 + \sigma^2\right] = \frac{14}{36}\sigma^2 = \frac{7}{18}\sigma^2$$

Respecto a la varianza es mejor el segundo estimador $\hat{\mu}_1$ por ser $\frac{7}{18}\sigma^2 < \sigma^2$

El mejor estimador será el que presente menor Error Cuadrático Medio (ECM):

$$\text{ECM}(\hat{\mu}_1) = V(\hat{\mu}_1) + \left[b(\hat{\mu}_1)\right]^2 = \sigma^2 + 0 = \sigma^2$$

$$\text{ECM}(\hat{\mu}_2) = V(\hat{\mu}_2) + \left[b(\hat{\mu}_2)\right]^2 = \frac{7}{18}\sigma^2 + \left(-\frac{2}{3}\mu\right)^2 = \frac{7}{18}\sigma^2 + \frac{4}{9}\mu^2$$

El primer estimador μ_1 será mejor si $\sigma^2 < \frac{7}{18}\sigma^2 + \frac{4}{9}\mu^2 \quad \mapsto \quad \frac{11}{18}\sigma^2 < \frac{4}{9}\mu^2$

$$\sigma^2 < \frac{4\times 18}{9\times 11}\mu^2 \quad \mapsto \quad \sigma^2 < \frac{8}{11}\mu^2$$

5- Sea x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria X con distribución normal con media $(\mu - 5)$ y varianza σ^2. Se proponen los siguientes estimadores:

$$\hat{\mu}_1 = \sum_{i=1}^{5} x_i \qquad\qquad \hat{\mu}_2 = 8x_2 - 3x_5$$

Determinar cuál es el mejor estimador para μ. Justificar la respuesta.

Solución:

a) Estudio de la insesgadez

$$E(\hat{\mu}_1) = E\left(\sum_{i=1}^{5} x_i\right) = E\left(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5\right) = 5(\mu - 5)$$

$$E(\hat{\mu}_2) = E\left[8x_2 - 3x_5\right] = 8E(x_2) - 3E(x_5) = 8(\mu - 5) - 3(\mu - 5) = 5(\mu - 5)$$

ambos estimadores son sesgados, con idéntico sesgo:

$$b(\hat{\mu}_1) = b(\hat{\mu}_2) = 5(\mu - 5) - \mu = 4\mu - 25$$

b) Estudio de la varianza

$$\text{Var}(\mu_1) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^{5} x_i\right) = 5\,\text{Var}(x) = 5\sigma^2$$

$$\text{Var}(\mu_2) = \text{Var}\left(8x_2 - 3x_5\right) = 8^2\,\text{Var}(x_2) + 3^2\,\text{Var}(x_5) = 64\sigma^2 + 9\sigma^2 = 73\sigma^2$$

Dado que los dos estimadores tienen el mismo sesgo y el primer estimador μ_1 tiene menor varianza, será el estimador óptimo.

Puede observarse que presenta el menor Error Cuadrático Medio:

$$ECM(\hat{\mu}_1) = V(\hat{\mu}_1) + \left[b(\hat{\mu}_1) \right]^2 = 5\sigma^2 + (4\mu - 25)^2$$

CÁLCULO INSESGADEZ y EFICIENCIA

7.- El peso en kilos de los jamones vendidos por una empresa sigue una distribución normal con varianza 4 y peso medio desconocido. Se conoce que el peso medio de los jamones vendidos es superior a 5 kg, y se toman m.a.s. de tamaño 4 para estimar θ. ¿Cuál de los dos estimadores sería el mejor respondiendo a la insesgadez y eficiencia?

$$\hat{\theta}_1 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{4} \qquad \hat{\theta}_2 = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Solución:

Un estimador es insesgado (centrado) si $E(\hat{\theta}) = \theta$

Un estimador es sesgado si $E(\hat{\theta}) = \theta + b(\hat{\theta}) \quad \mapsto \quad \underbrace{b(\hat{\theta})}_{\text{sesgo}} = E(\hat{\theta}) - \theta$

La v.a $X_i = \text{'peso en kg de los jamones'}$ sigue una distribución normal de varianza 4

Para estudiar la insesgadez de los estimadores se calculan sus esperanzas:

- $E(\hat{\theta}_1) = E\left[\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{4}\right] = \dfrac{1}{4}\left[E(x_1) + E(x_2) + E(x_3) \right] = \dfrac{3}{4}\theta$

El sesgo del estimador $\hat{\theta}_1$ será: $b(\hat{\theta}_1) = E(\hat{\theta}_1) - \theta = \dfrac{3}{4}\theta - \theta = -\dfrac{1}{4}\theta$

- $E(\hat{\theta}_2) = E\left[\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right] = \dfrac{1}{2}\left[E(x_1) + E(x_2) \right] = \dfrac{2}{2}\theta = \theta$

El estimador $\hat{\theta}_2$ es insesgado, $b(\hat{\theta}_2) = 0$

Atendiendo al sesgo se elige $\hat{\theta}_2$

Para analizar la eficiencia relativa de los dos estimadores se calculan las respectivas varianzas

$$V(\hat{\theta}_1) = V\left[\frac{x_1 + x_2 + x_3}{4}\right] = \frac{1}{16}\left[\underbrace{V(x_1 + x_2 + x_3)}_{\substack{\text{las observaciones} \\ \text{son independientes}}} \right] = \frac{1}{16}\left[V(x_1) + V(x_2) + V(X_3) \right] =$$

$$\overset{V(X_i)=4}{=} \frac{1}{16} 12 = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

$$V(\hat{\theta}_2) = V\left[\frac{x_1 + x_2}{2}\right] = \frac{1}{4}\left[\underbrace{V(x_1 + x_2)}_{\substack{\text{las observaciones} \\ \text{son independientes}}}\right] = \frac{1}{4}\left[V(x_1) + V(x_2)\right] \overset{V(X_i)=4}{=} \frac{1}{4}\,8 = 2$$

Respecto a la varianza se elige el estimador $\hat{\theta}_1$ por ser el de menor varianza.

Aparecen propiedades contrapuestas, de modo que el estimador insesgado $\hat{\theta}_2$ es el de mayor varianza. Se elige el estimador en base al error cuadrático medio (ECM):

$$ECM = \text{Varianza} + (\text{sesgo})^2 \equiv \begin{cases} ECM(\hat{\theta}_1) = \dfrac{3}{4} + \left(-\dfrac{\theta}{4}\right)^2 = \dfrac{\theta^2 + 12}{16} \\ \\ ECM(\hat{\theta}_2) = 2 + 0 = 2 \end{cases}$$

Se analiza cuando es mayor el ECM del primer estimador $\hat{\theta}_1$: $ECM(\hat{\theta}_1) > ECM(\hat{\theta}_2)$

$$\frac{\theta^2 + 12}{16} > 2 \quad \Rightarrow \quad \theta^2 > 20 \quad \Rightarrow \quad |\theta| > \sqrt{20} \approx 4{,}47$$

Si θ es en valor absoluto mayor que 4,47, el error cuadrático medio de $\hat{\theta}_1$ es mayor, con lo que se elige el estimador $\hat{\theta}_2$.

Se conoce que el peso medio de los jamones es superior a 5 kg, no queda duda que el estimador a elegir (con menor error cuadrático medio) es $\hat{\theta}_2$.

8.- La distribución del peso de las manzanas de una determinada cosecha sigue una distribución normal, cuyo peso medio es desconocido y cuya desviación típica es 7 gramos. Se pide:

a) Analizar cuál de los estimadores $\hat{\mu}_1,\ \hat{\mu}_2$ del peso medio es mejor respecto del sesgo y de la eficiencia, para una muestra aleatoria simple de tamaño cinco.

b) Si $\hat{\mu}_1 = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} X_i}{5}$ y $\hat{\mu}_2 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 - x_5$, obtener los pesos medios estimados a partir de la siguiente muestra (125, 135, 130, 137, 142).

Solución:

a) El peso de las manzanas sigue una distribución $N(\mu, 7)$
Se calculan las esperanzas de los estimadores para analizar el sesgo de los estimadores

$$E(\hat{\mu}_1) = E\left[\sum_{i=1}^{5} x_i/5\right] = \frac{1}{5}E\left[\sum_{i=1}^{5} x_i\right] = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} E\left[x_i\right] \overset{E(x_i)=\mu}{=} \frac{1}{5}(5\mu) = \mu$$

$$E(\hat{\mu}_2) = E(x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 - x_5) = E(x_1) + 2E(x_2) + 3E(x_3) - 4E(x_4) - E(x_5) =$$
$$= \mu + 2\mu + 3\mu - 4\mu - \mu = \mu$$

Los estimadores $\hat{\mu}_1,\ \hat{\mu}_2$ son insesgados (centrados).

b) Para analizar la eficiencia de los estimadores se obtienen las varianzas:

$$V(\hat{\mu}_1) = V\left[\sum_{i=1}^{5} x_i/5\right] = \frac{1}{25}V\left[\sum_{i=1}^{5} x_i\right] = \frac{1}{25}\sum_{i=1}^{5} V\left[x_i\right] \overset{V(X_i)=7^2}{=} \frac{1}{25}(5.49) = \frac{49}{5}$$

$$V(\hat{\mu}_2) = V(x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 - x_5) = V(x_1) + 4V(x_2) + 9V(x_3) + 16V(x_4) + V(x_5) =$$
$$= (49) + 4\,(49) + 9\,(49) + 16\,(49) + (49) = 31\,(49) = 1519$$

Como los dos estimadores son insesgados y $V(\hat{\mu}_1) < V(\hat{\mu}_2)$ se elige como mejor el estimador $\hat{\mu}_1$, el peso medio de la muestra de las cinco manzanas.

9.- Supongamos que la distribución de ingresos de una cierta población es una variable aleatoria con media μ desconocida y varianza σ^2 también desconocida. Si queremos estimar el ingreso medio de la población mediante una m.a.s. de tamaño n, respecto de la insesgadez y de la eficiencia. ¿Cuál de los dos estimadores elegiríamos?. ¿Son consistentes?

$$\hat{\mu}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n-1} \qquad \hat{\mu}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Solución:

La v.a $x_i = \text{'ingresos de cierta población'}$ sigue una distribución normal $N(\mu, \sigma)$

Para analizar el sesgo de los estimadores, hallamos la esperanza:

$$E(\hat{\mu}_1) = E\left[\sum_{i=1}^{n} x_i/(n-1)\right] = \frac{1}{n-1} E\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} E(x_i) = \frac{1}{n-1}(n\mu) = \frac{n}{n-1}\mu$$

El sesgo del estimador $\hat{\mu}_1$ será: $b(\hat{\mu}_1) = E(\hat{\mu}_1) - \mu = \frac{n}{n-1}\mu - \mu = \frac{1}{n-1}\mu$

$$E(\hat{\mu}_2) = E\left[\sum_{i=1}^{n} x_i/n\right] = \frac{1}{n} E\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(x_i) = \frac{1}{n}(n\mu) = \mu$$

El estimador $\hat{\mu}_2$, que es la media muestral, es insesgado (centrado).

- La eficiencia de los estimadores se analiza a través de su varianza:

$$V(\hat{\mu}_1) = V\left[\sum_{i=1}^{n} x_i/(n-1)\right] = \frac{1}{(n-1)^2} V\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \frac{1}{(n-1)^2}\sum_{i=1}^{n} V(x_i) = \frac{1}{(n-1)^2}(n\sigma^2) = \frac{n\sigma^2}{(n-1)^2}$$

$$V(\hat{\mu}_2) = V\left[\sum_{i=1}^{n} x_i/n\right] = \frac{1}{n^2} V\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} V(x_i) = \frac{1}{n^2}(n\sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n}$$

El estimador más eficiente será el de menor varianza. Comparando las varianzas de los estimadores:

$$V(\hat{\mu}_2) = \frac{\sigma^2}{n} < \frac{n\sigma^2}{(n-1)^2} = V(\hat{\mu}_1) \quad \text{puesto que } (n-1)^2 < n^2$$

El estimador $\hat{\mu}_2$, que es la media muestral, es el mejor tanto al sesgo como a la eficiencia.

Los dos estimadores son consistentes: $\begin{cases} \lim_{n\to\infty} E(\hat{\mu}_1) = \mu \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} V(\hat{\mu}_1) = \lim_{n\to\infty} \frac{n\sigma^2}{(n-1)^2} = 0 \\ \lim_{n\to\infty} E(\hat{\mu}_2) = \mu \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} V(\hat{\mu}_2) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^2}{n} = 0 \end{cases}$