II.-9. Transitorios RC y RL.

Resumen

Régimen transitorio:

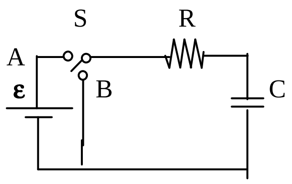
a. Cuando se conecta un **capacitor** a una fuente de tensión continua, la carga que éste adquiere está determinada por su capacidad y por la tensión de la fuente. Esta carga no aparece instantáneamente sobre las placas, se necesita un cierto tiempo, durante el cual las magnitudes eléctricas cambian. Lo mismo sucede si una vez cargado se permite la descarga.

b. En el caso de las bobinas, dada la inducción de fuerzas electromotrices que se oponen a la variación de la corriente, se necesita un cierto tiempo para establecer valores estacionarios en éstas.

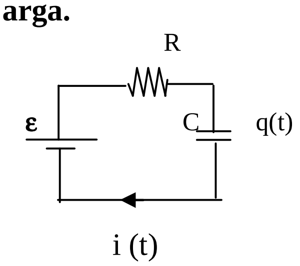
Circuito RC.

Consideremos el circuito de la fig.1. La llave permite cargar el capacitor y descargarlo. La resistencia R limita la corriente que circula protegiendo a la fuente.

Figura 1



Carga.



$\mathbf{iR + q / c = \varepsilon}$	Ecuación diferencial
$\mathbf{i = dq/dt}$	Vinculación entre **q** e **i**
$\mathbf{q\,(0) = 0}$	Condición inicial

Solución de la ecuación diferencial:

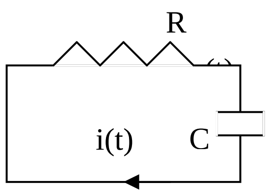
$$\mathbf{q\,(t) = C\,\varepsilon\,(1 - e^{-t/RC})} \qquad ; \qquad \mathbf{i\,(t) = \varepsilon / R\ e^{-t/RC}}$$

τ = **RC** es la constante de tiempo del circuito.

Descarga.

El problema se puede resolver por dos caminos diferentes:

1. Conectar el interruptor con el punto B, hacer ε igual a cero manteniendo las otras variables como se las había supuesto:



$\mathbf{iR + q / c = 0}$	Ecuación diferencial
$\mathbf{i = dq/dt}$	Vinculación entre **q** e **i**
$\mathbf{q\,(0) = Q_o}$	Condición inicial

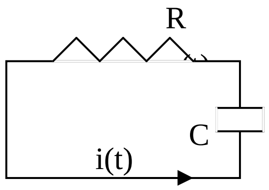
Solución de la ecuación diferencial:

$$q\,(t) = Q_o\ e^{-t/RC} \qquad ; \qquad i\,(t) = -Q_o/RC\ e^{-t/RC}$$

el signo menos en la corriente significa que dicha corriente de descarga circula en sentido contrario al supuesto.

τ = **RC** es la constante de tiempo del circuito

2. Conectar el interruptor con el punto B, hacer ε igual a cero y partir de la suposición de que el sentido de circulación de la corriente de descarga es contrario al sentido de la corriente de carga y que la carga
circulante decrece con el tiempo (i = -dq/dt)

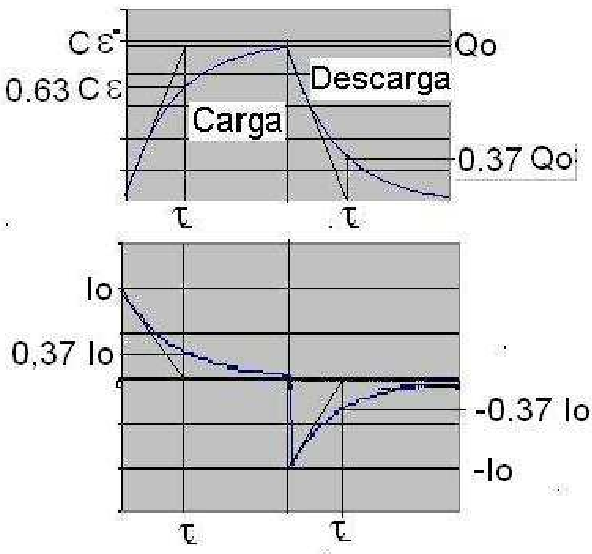


$-iR ++ q / c = 0$	Ecuación diferencial
$i = -dq/dt$	Vinculación entre **q** e **i**
$q\,(0) = Q_0$	Condición inicial

Solución de la ecuación diferencial:

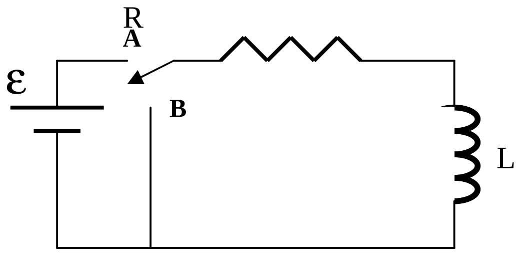
$$q\,(t) = Q_o\ e^{-t/RC} \qquad ; \qquad i\,(t) = Q_o/RC\ e^{-t/RC}$$

al ser positivo el signo de la corriente, la corriente transitoria de descarga circula en el sentido propuesto.

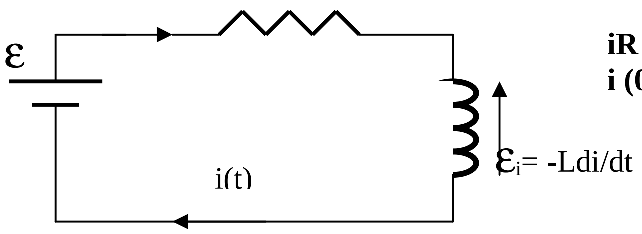


Circuito RL.

Consideremos el circuito de la fig.2. La llave permite conectar y desconectar la fuente. La resistencia R limita la corriente que circula protegiendo a la fuente.



Fuente conectada.



$\mathbf{iR - \varepsilon + L \quad = 0}$	Ecuación diferencial
$\mathbf{i\,(0) = 0}$	Condición inicial

Solución de la ecuación diferencial:

$$\mathbf{i\,(t) = \varepsilon/R\,(1 - e^{-tL/R})}$$

$\tau =$ **L/R** es la constante de tiempo del circuito.

Fuente desconectada.

El problema se puede resolver por dos caminos diferentes, **uno es**

1. Conectar el interruptor con el punto B, hacer ε igual a cero manteniendo las otras variables como se las había supuesto:

$\mathbf{iR + L \quad = 0}$	Ecuación diferencial
$\mathbf{i\,(0) = Io = \varepsilon/R}$	Condición inicial

Solución de la ecuación diferencial:

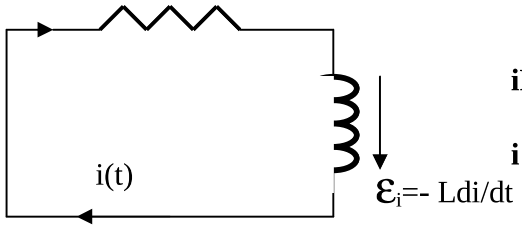
$$\mathbf{i\,(t) = Io\; e^{-tL/R}}$$

el sentido propuesto para la corriente es el correcto, no así el sentido de la fuerza electromotriz inducida ya que la corriente decrece con el tiempo (di/dt < 0).

$\tau =$ **L/R** es la constante de tiempo del circuito.

el otro es:

2. Conectar el interruptor con el punto B, hacer ε igual a cero, partir de la suposición de que el sentido de circulación de la corriente es el mismo y que la corriente decrece con el tiempo (di/dt < 0) por lo cual el sentido de fuerza electromotriz inducida es el de la figura:



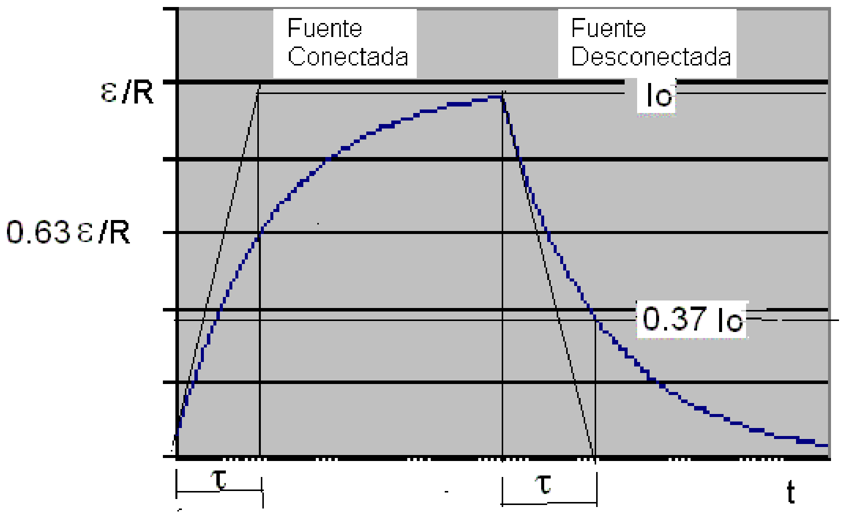
iR - L = 0 Ecuación diferencial

i (0) = Io = ε/R Condición inicial

Solución de la ecuación diferencial:

$$\mathbf{i\ (t) = Io\ e^{-tL/R}}$$

el sentido propuesto para la corriente y la fuerza electromotriz es el correcto.



II.-10. Corriente Alterna.

Resumen.

La forma más común de producir energía eléctrica, al nivel de las necesidades de nuestra época, es a través de **generadores de corriente alterna** (c.a.), donde el valor instantáneo de la **fem** es de la forma: **$\varepsilon = \varepsilon o$ sen wt,** siendo w = 2 π f la frecuencia angular. En nuestro país la frecuencia f es de 50 Hz.

Cuando una fuente de este tipo alimenta circuitos en los que participan resistencias, capacitores y/o bobinas, las magnitudes eléctricas dependen del tiempo (valores instantáneos), y al **circuito** se lo denomina de **corriente alternada**. La característica fundamental de estos circuitos es que que existe un **desfasaje** entre los valores instantáneos de las diferencias de potencial entre los extremos de los elementos que almacenan energía (condensadores y autoinducciones) y la corriente que circula por ellos

Se puede simplificar el tratamiento de estos circuitos (al menos en casos de configuraciones sencillas) utilizando el concepto de **fasor**, valido solamente para excitaciones senoidales.

En los **diagramas fasoriales**, las cantidades que se alternan como corriente o diferencias de potencial se representan mediante **vectores rotatorios** denominados fasores. La longitud del fasor representa la amplitud (el valor máximo) de la cantidad, en tanto que su proyección sobre el eje vertical representa el valor instantáneo de esa cantidad.

Un **fasor rota** con velocidad angular **ω** igual a la frecuencia angular del generador de alterna, tomándose como convención el sentido de rotación antihorario.

El método aplicado para la resolución de circuitos de corriente alterna en general se basa en la utilización de representación mediante exponenciales complejos. En este curso utilizaremos la representación mediante fasores debido a la sencillez de los problemas tratados y para evitar el uso de recetas de resolución a través de cálculos matemáticos que ocultan el concepto teórico, indispensable para esta etapa del aprendizaje.

Circuitos de alterna: a continuación se resaltan los desfasajes que se producen entre la diferencia de potencial y la corriente cuando **se conecta un generador de alterna a una**

a.- Resistencia sola.

Fuente: $\varepsilon(t) = \varepsilon o$ sen wt
Resistencia **v(t) = Vo sen wt** **Valores instantáneos**

Resulta **i(t) = Io sen wt**

donde Vo ; εo
Io = Vo/R **Valores máximos o pico.**

La corriente y la diferencia de potencial a través del resistor están en fase

b.-Circuito capacitivo.

Fuente: $\varepsilon(t)$ εo sen wt
Condensador **v(t) = Vo sen wt** **Valores instantáneos**

Resulta **i(t) = Io sen (wt + π/2)**

donde Vo ; εo

$I_o = V_o / X_c$ **Valores máximos o pico.**

$X_c = 1/wC$ = reactancia capacitiva

La diferencia de potencial en el capacitor se atrasa respecto a la corriente en un cuarto de ciclo (90°).

c.- Circuito inductivo.

Fuente: $\varepsilon(t)\ \varepsilon o$ sen wt

Bobina **v(t) = Vo sen wt** **Valores instantáneos**

Resulta **i(t) = Io sen (wt - π/2)**

donde Vo ; εo

$I_o = V_o / X_L$ **Valores máximos o pico.**

$X_L = wL$ = reactancia inductiva.

La diferencia de potencial en la bobina se adelanta respecto a la corriente en un cuarto de ciclo (90°)

d.- Circuito serie.

La misma corriente circula por los elementos: **i(t) = Io sen wt**

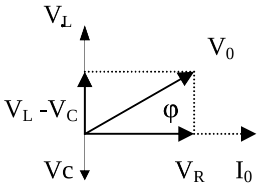
La diferencia de potencial instantánea en los terminales de la fuente es **v (t) = Vo sen (wt ± φ),** siendo **φ** el desfasaje entre la tensión y la corriente. El signo del desfasaje, que indica si la tensión atrasa o adelanta respecto a la corriente, dependerá de sí el circuito es capacitivo o inductivo.

En todo instante se cumple:

$v(t) = v_R(t) + v_L(t) + v_C(t)$ **Suma algebraica de valores instantáneos**

$$V_o \,\text{sen}\,(wt \pm \varphi) = I_o R \,\text{sen}\, wt + I_o X_L \,\text{sen}\,(wt + \pi/2) + I_o X_C \,\text{sen}\,(wt - \pi/2)$$

Para resolver esta ecuación se puede utilizar el **método de los fasores**:



$\vec{V}_o = \vec{V}_R + \vec{V}_L + \vec{V}_C$ **suma vectorial de valores picos**

$V_o = [\,(V_R)^2 + (V_L - V_C)^2\,]^{1/2}$ módulo del valor máximo

$Z = [R^2 + (X_L - X_C)^2]^{1/2}$ **impedancia del circuito**

$\text{tg}\ \varphi = |V_L - V_C| / V_R = |X_L - X_C| / R$

Note *que para resolver el circuito serie en corriente alterna, reemplaza la* ***suma algebraica*** *de valores instantáneos de tensiones por la* ***suma vectorial*** *de valores picos de tensiones.*

e.- Circuito paralelo.

Los elementos del circuito están sometidos a la misma diferencia de potencial: **v (t) = Vo sen wt**

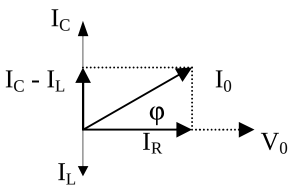
El valor instantáneo de la corriente que circula por la fuente es $i(t) = Io\ sen\ (wt \pm \varphi)$, siendo φ el desfasaje entre la tensión y la corriente. El signo del desfasaje, que indica si la corriente atrasa o adelanta respecto a la tensión, dependerá de si el circuito es inductivo o capacitivo .

En todo instante se cumple:

$$i\,(t) = i_R(t) + i_L(t) + i_C(t)$$ **Suma algebraica de valores instantáneos**

$$Io\ sen\ (wt \pm \varphi) = V_R\,/R\ sen\ wt + V_L/\,X_L\ sen\ (wt - \pi/2) + V_C\,/X_C\ sen\ (wt + \pi/2)$$

Para resolver esta ecuación se puede utilizar el método de los fasores:



$$\vec{\mathbf{I}}_{\mathbf{o}} = \vec{\mathbf{I}}_{\mathbf{R}} + \vec{\mathbf{I}}_{\mathbf{L}} + \vec{\mathbf{I}}_{\mathbf{C}}$$ **suma vectorial de valores picos**

$$I_o = [(I_R)^2 + (I_L - I_C)^2]^{1/2}$$ módulo del valor máximo

$$\mathbf{1/Z = [(1/R)^2 + (1/X_L - 1/X_C)^2]^{1/2}}$$ **impedancia del circuito**

$$tg\ \varphi = |I_L - I_C| / I_R = |1/X_L - 1/X_C| / 1/R$$

Note *que para resolver el circuito paralelo en* corriente *alterna, reemplaza la* ***suma algebraica*** *de valores instantáneos de corrientes por la* ***suma vectorial*** *de valores picos de corrientes.*

La potencia suministrada por un generador de c.a. a un circuito es:

$$\mathbf{P = ½\ Io\ Vo\ cos\ \varphi = Ie\ Ve\ cos\ \varphi}$$

siendo:

Ie $= 1/T \int i^2\,(t)\,dt$ el **valor eficaz** o valor cuadrático medio (rms) de la corriente.

Ve $= 1/T \int v^2\,(t)\,dt$ el **valor eficaz** o valor cuadrático medio (rms) de la tensión

cos φ el factor de potencia

En un circuito en **régimen estacionario** se cumple, que en todo instante, la **potencia promedio** suministrada por el generador se disipa en la resistencia, por consiguiente :

$$\mathbf{P = ½\ Io\ Vo\ cos\ \varphi = Ie\ Ve\ cos\ \varphi = i^2\ R}$$

No hay pérdidas de potencia en un inductor o capacitor ideal.

Un circuito entra en **resonancia** cuando la reactancia capacitiva es igual a la reactancia inductiva. La **frecuencia angular de resonancia** es $\boldsymbol{\omega_0 = 1 / (LC)^{½}}$

En un circuito **serie en resonancia** la corriente alcanza su valor máximo, por el contrario en un **circuito paralelo** alcanza su valor mínimo.

II.-11. Ecuaciones de Maxwell en el vacío.
Ondas Electromagnéticas

Resumen.

Las Ecuaciones de Maxwell son la base de la teoría de los fenómenos electromagnéticos.

Las Ecuaciones de Maxwell, para campos estáticos, representan leyes independientes que gobiernan el comportamiento de los campos eléctricos y magnéticos.
Esta independencia entre las leyes se pierde cuando los campos son dependientes del tiempo (campos no estacionarios), es entonces cuando se habla del **campo electromagnético**.

Un campo magnético variable en el tiempo genera un campo eléctrico; como lo asegura la ley de inducción de Faraday. Recordemos:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S \overline{B}(r,t).\overline{da}$$

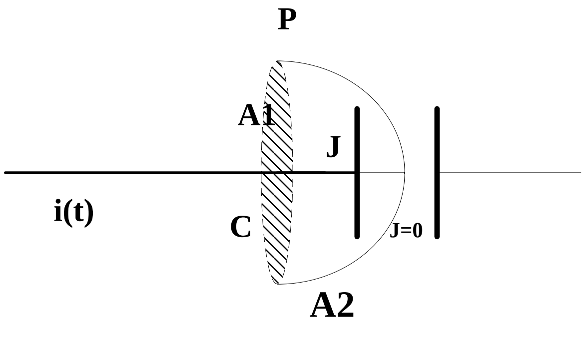
Si la superficie de integración es fija se puede introducir la derivada dentro de la integral, resultando.

$$\varepsilon_i = \oint \overline{E}(r,t).\overline{dl} = -\int_S \frac{\delta \overline{B}(r,t)}{\delta t}.\overline{da}$$ **(I) Ley de Inducción de Faraday**

donde el campo **E** es no conservativo.

Un campo eléctrico variable en el tiempo ¿generará un campo magnético?

Para encontrar la respuesta, **planteamos una nueva cuestión**: Al estudiar los circuitos de corriente continua en régimen transitorio y los de corriente alternada que poseían capacitores, **uno se pregunta** ¿cómo es posible la circulación de corriente, si entre las placas de los mismos no existe un medio conductor (electrones de conducción) sino por el contrario hay vacío? Aún más **si se aplica la Ley de Ampere** a la rama del circuito que contiene un capacitor y por donde circula una corriente de conducción $\mathbf{i_c}$ variable en el tiempo (en el dibujo circula hacia la derecha y se la denomina i(t)) resulta:



$$\oint \overline{B}.\overline{dl} = \mu_o i_c = \mu_o \int_{A1} \overline{J}.\overline{da} = \mu_o \int_{A2} \overline{o}.\overline{da}$$ **(II)**

donde $\mathbf{A_1}$ y $\mathbf{A_2}$ son áreas que tienen el mismo contorno **C** y $\vec{J}$ es la densidad de corriente.

La ecuacióm planteada muestra la siguiente **incongruencia: el campo magnético** que genera la corriente i(t) en un punto P del espacio **es distinto de cero** si se calcula **el flujo** del vector **J** a través de la **superficie $\mathbf{A_1}$** y es **cero** si se calcula el flujo del vector **J** a través de la **superficie $\mathbf{A_2}$.**

¡Imposible! el valor del campo en el punto debe ser único.

Maxwell salva esta situación, postulando la existencia de **la corriente de desplazamiento $\mathbf{i_d}$.**

La carga que se deposita sobre las armaduras del condensador, al circular una corriente no estacionaria varía con tiempo. Esta carga q(t), genera entre las placas un campo eléctrico no estacionario:

$$\int_{SC} \overline{E}(r,t).\overline{da} = \frac{q_n(t)}{\varepsilon_o}$$

$$q_n(t) = \varepsilon_o \int \overline{E}(r,t).\overline{da}$$

Por consiguiente se puede definir **una corriente de desplazamiento** entre las armaduras que resulta igual a:

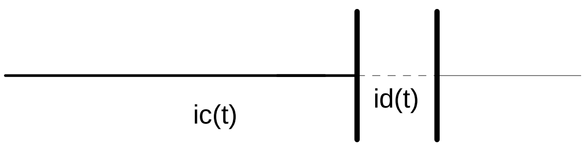
$$i_d = \frac{d[q_n(t)]}{dt} = \varepsilon_o \frac{d}{dt} \int_{Sc} \overline{E}(r,t).\overline{da}$$

si la superficie de integración es fija $\boxed{i_d = \varepsilon_o \int \frac{\delta \overline{E}(r,t)}{\delta t} .\overline{da}}$

Teniendo en cuenta la existencia de la corriente de desplazamiento, queda resuelta la incongruencia planteada. La ecuación (II) resulta ahora igual a:

$$\oint \overline{B}.\overline{dl} = \mu_o i_c = \mu_o \int_{A1} \overline{J}.\overline{da} = \mu_o \varepsilon_o \int_{A2} \frac{\delta \overline{E}(r,t)}{\delta t} .\overline{da} = \mu_o i_d \quad \textbf{(III)}$$

si existe en el cable sólo la corriente de conducción, y entre las armaduras del condensador sólo la corriente de desplazamiento (no hay fugas). De cumplirse estas condiciones **en todo instante**, por el principio de conservación de la carga, estas corrientes son iguales, $\mathbf{i_c = i_d}$, siendo i_d la corriente de desplazamiento que abarca toda la sección del capacitor



Ahora estamos en condiciones de **responder a la pregunta original**, de la ecuación (III) se desprende que:

¡SI! un campo eléctrico variable en el tiempo genera un campo magnético.

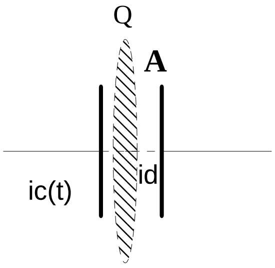
La Ecuación (III), quitando la restricción de la existencia de un único tipo de corriente en el cable y entre las armaduras, se escribe:

$$\oint \overline{B}.(r,t).\overline{dl} = \mu_o(i_c + i_d) = \mu_o \int_{SC} \overline{J}.\overline{da} + \mu_0\varepsilon_o \int_{SC} \frac{\delta \overline{E}(r,t)}{\delta t}.\overline{da} \qquad \textbf{(IV)}$$

y representa la **Ley de Ampere - Maxwell** en el vacío.

Comentario sobre la **corriente de desplazamiento**: esta **corriente** si bien, no es una corriente en el sentido que represente un flujo de cargas, **sí lo es** en el sentido de que posee la propiedad esencial de toda corriente, la de **estar asociada a un campo magnético.**

Ejemplo: para calcular el campo magnético en el punto Q generado por la corriente de desplazamiento en un condensador plano de placas circulares de área A, basta aplicar la Ley de Ampere: se elige como curva de integración, respetando la simetría del problema, una circunferencia de radio r que pase por el punto Q como se indica en la figura, resultando:



$$\oint \overline{B}.\overline{dl} = \mu_o i_d = \mu_o\varepsilon_o \int_A \frac{\delta \overline{E}(r,t)}{\delta t}.\overline{da}$$

B 2π r = $\mu_0 i_c$ resultando $\mathbf{B = \mu_0 i_c / 2\pi r}$

igual al campo magnético generado por la corriente que circula por el cable en un punto exterior al mismo.

Las Ecuaciones de Maxwell:

$$\int_{SC} \overline{E}(r,t).\overline{da} = \frac{q_n(t)}{\varepsilon_o} = \frac{1}{\varepsilon_o}\int_{VC} \rho_n d(volumen)$$

$$\int_{SC} \overline{B}(r,t).\overline{da} = 0$$

$$\oint \overline{E}(r,t).\overline{dl} = -\int_S \frac{\delta \overline{B}(r,t)}{\delta t}.\overline{da}$$

$$\oint \overline{B}.(r,t).\overline{dl} = \mu_o(i_c + i_d) = \mu_o \int_{SC} \overline{J}.\overline{da} + \mu_0\varepsilon_0 \int_{SC} \frac{\delta \overline{E}(r,t)}{\delta t}.\overline{da}$$

resumen las propiedades de los campos electromagnéticos y su aplicación ha revolucionado la historia de la humanidad.

La primera de estas ecuaciones es la **Ley de Gauss** para el campo eléctrico **E**; y nos dice que las fuentes de este campo son las cargas eléctricas. En casos estáticos esta ley es una generalización de la Ley de Coulomb. Mientras que la ley de Coulomb sólo es aplicable cuando la carga que genera el campo es estática, la Ley de Gauss es válida aún cuando éstas no sean estacionarias.

La segunda de estas ecuaciones es **la Ley de Gauss** para el campo magnético **B**, y nos asegura la no existencia del monopolo magnético. Esta ecuación es también válida para campos magnéticos que varían en función del tiempo.

La tercera de estas ecuaciones es **la Ley de Inducción de Faraday**, una variación del campo magnético en el tiempo genera un campo eléctrico E no conservativo. En casos estáticos el campo eléctrico E es conservativo.

La cuarta de estas ecuaciones es **la Ley de Ampere - Maxwell**, los campos magnéticos pueden generarse tanto por corrientes de conducción como por campos eléctricos variables en el tiempo. Tanto en los casos estacionarios como en los no estacionarios, el campo magnético B es no conservativo.

Las bases experimentales completas del electromagnetismo están resumidas en estas cuatro ecuaciones, conjuntamente con la ecuación que define a la Fuerza de Lorentz: **F** = q**E** + q**vB**

La virtud de Maxwell al plantear sus ecuaciones, no se restringe al mero hecho de introducir la corriente de desplazamiento y generalizar la ley de Ampere sino que, por sobre todo, es haber postulado una total simetría entre los campos eléctricos y magnéticos. Su conclusión fue, que cuando en el vacío existe un campo variable, también debe existir un campo magnético y viceversa. Encontró además que estos campos apareados, llamados colectivamente campos electromagnéticos, se pueden propagar en el vacío a manera de ondas y pudo obtener una expresión para su velocidad de propagación.

Las Ecuaciones de Maxwell relacionan los campos eléctricos y magnéticos entre sí, y con la densidad de carga eléctrica y la densidad de corriente de conducción. **El conjunto de ecuaciones de Maxwell no es totalmente simétrico,** aun en regiones donde la densidad de corriente de conducción sea cero, el universo contiene monopolos eléctricos (carga eléctrica) pero aparentemente no contiene monopolos magnéticos.

Las Ecuaciones de Maxwell se hacen totalmente simétricas en regiones completamente desprovistas de los elementos de carga constitutivos de la materia, es decir, **en el vacío.**

Ecuaciones de Maxwell en el vacío

$$\int_{SC} \overline{E}(r,t).\overline{da} = 0$$

$$\int_{SC} \overline{B}(r,t).\overline{da} = 0$$

$$\oint \overline{E}(r,t).\overline{dl} = -\int_{S} \frac{\delta \overline{B}(r,t)}{\delta t}.\overline{da}$$

$$\oint \overline{B}.(r,t).\overline{dl} = \mu_o \varepsilon_o \int_{SC} \frac{\delta \overline{E}(r,t)}{\delta t}.\overline{da}$$

Las ecuaciones tercera y cuarta establecen relaciones que se deben satisfacer en el vacío, entre la dependencia espacial de campo eléctrico y la dependencia temporal del campo magnético, y también entre la dependencia espacial del campo magnético y la dependencia temporal del campo eléctrico.

Las ecuaciones de Maxwell en el vacío, además de dar el enlace final entre los campos eléctricos y magnéticos, predicen la existencia de ondas electromagnéticas que se propagan a través del espacio con la velocidad de la luz. Esta predicción fue confirmada por la experiencia llevada a cabo por Hertz, quince años después, donde se generan y detectan por primera vez ondas de radio. El descubrimiento de la onda electromagnética dio origen a muchos sistemas prácticos de comunicación, incluyendo la radio, la televisión y el radar. Desde el punto de vista conceptual, Maxwell unificó la luz con el electromagnetismo, desarrollando la idea que la luz es una forma de radiación electromagnética.

Las Ecuaciones de Maxwell se han presentado en su **forma integral**. Para expresarlas en su **forma diferencial** se utilizan los teoremas:

de Gauss $$\oint_s \overline{A}.d\overline{s} = \int_v div\overline{A}.dv$$

y de Stokes $$\oint_l \overline{A}.d\overline{l} = \int_s rot\overline{A}.d\overline{s}$$

de donde:

$$\oint_s \overline{E}.d\overline{a} = 0 = \int_v div\,\overline{E}.dv$$

$$\oint_S \overline{B}\,.\,d\,\overline{a} = 0 = \int div\,\overline{B}\,.\,dv$$

$$\oint_l \overline{E}.d\overline{l} = -\frac{d}{dt}\int_s \overline{B}.d\overline{a} = \int_s rot\overline{E}.d\overline{a}$$

$$\oint_l \overline{B}.d\overline{l} = \mu_o\varepsilon_o\frac{d}{dt}\int_s \overline{E}.d\overline{a} = \int_s rot\overline{B}.d\overline{a}$$

resultan las **Ecuaciones de Maxwell en forma diferencial (en el vacio)**

$$div\overline{E} = 0$$

$$div\overline{B} = 0$$

$$rot\overline{E} = -\frac{\delta\overline{B}}{\delta t}$$

$$rot\overline{B} = \mu_o\varepsilon_o\frac{\delta\overline{E}}{\delta t}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla}x\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}x\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Las ecuaciones de Maxwell integrales son validas para contornos de integración en reposo respecto a un observador en reposo. Al pasar a las ecuaciones diferenciales desaparecen los contornos de integración y aparecen en cambio las características puntuales del campo en el medio, por eso a la teoría se la llama **Electromagnetismo de los medios en reposo**

Aplicando el rot del rot a la ecuación de Ampere Maxwel se obtiene

$$\vec{\nabla}x(\vec{\nabla}x\vec{B}) = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial(\vec{\nabla}x\vec{E})}{\partial t} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t})$$

Recordando la relación :

$$\vec{\nabla}x(\vec{\nabla}x\vec{B}) = \vec{\nabla}.(\vec{\nabla}.\vec{B}) - \nabla^2\vec{B}$$

y que la divergencia del campo magnético en el vacío es igual a cero, la ecuacióndel rotor del rotor resulta :

$$\vec{\nabla}x(\vec{\nabla}x\vec{B}) = -\nabla^2\vec{B} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$$

En esta ecuación se puede observar que tanto la variación espacial como la temporal del campo magnético tienen el mismo orden. A esta ecuacion se la compara con la ecuación de onda para la magnitud ψ:

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

donde v representa la rapidez de propagación de la onda, entonces para la rapidez de la onda de $\vec{B}$

se tiene que $$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = c \qquad \text{con } c = 3.10^8 \ \frac{m}{s}$$

Con igual tratamiento se obtiene la ecuación de onda para el campo eléctrico $\vec{E}$, de manera que en el vacío las ecuaciones de onda para los campos eléctrico y magnético son :

$$\nabla^2\vec{B} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} \qquad \nabla^2\vec{E} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

*Las Ecuaciones de Maxwell implican que tanto los vectores campos **E** como **B** obedecen a ecuaciones de ondas.*

En el espacio libre (vacío) en el cual no hay cargas ni corrientes analizaremos por el momento solo el caso en que E y B son funciones del tiempo y de una sola coordenada x. Una onda de este tipo se denomina **onda plana,** porque las magnitudes de los campos son constantes a través de cualquier plano perpendicular al eje x. **Para una onda plana** que se propaga paralelamente al eje x, las componentes x de los campos son nulos, de modo que los vectores E y B son perpendiculares al eje x y obedecen respectivamente a las siguientes **ecuaciones de onda**

$$\boxed{\frac{\delta^2\vec{E}}{\delta\ x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\delta^2\vec{E}}{\delta\ t^2}} \qquad \boxed{\frac{\delta^2\vec{B}}{\delta\ x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\delta^2\vec{B}}{\delta\ t^2}}$$

En general para la función ψ, la ecuación diferencial de onda plana resulta:

$$\frac{\delta^2\vec{\psi}}{\delta^2 x} = \frac{1}{v^2}\frac{\delta^2\vec{\psi}}{\delta^2 t}$$

Las soluciones de esta ecuación son funciones de ondas armónicas de la forma:

$$\psi\ (x,t) = \psi_0\ (x,t)\ \text{sen}\ (kx - \omega t)$$

donde $k = 2\pi / \lambda$ es el número de onda y $\omega = 2\pi$ f es la frecuencia angular.

II.-12. Ondas Electromagnéticas. Ondas mecánicas. Propagación

Resumen

Las Ecuaciones de Maxwell implican que tanto los vectores campos ***E*** *como* ***B*** *obedecen a ecuaciones diferenciales de ondas.*

En el espacio libre (vacío) en el cual no hay cargas ni corrientes analizaremos por el momento solo el caso en que E y B son funciones del tiempo y de una sola coordenada x. Una onda de este tipo se denomina **onda plana,** porque las magnitudes de los campos son constantes a través de cualquier plano perpendicular al eje x. **Para una onda plana** que se propaga paralelamente al eje x, las componentes x de los campos son nulos, de modo que los vectores E y B son perpendiculares al eje x y obedecen respectivamente a las siguientes **ecuaciones diferenciales de onda**

$$\boxed{\frac{\delta^2 \vec{E}}{\delta\ x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\delta^2 \vec{E}}{\delta\ t^2}} \qquad \boxed{\frac{\delta^2 \vec{B}}{\delta\ x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\delta^2 \vec{B}}{\delta\ t^2}}$$

En general para la función ψ, la ecuación diferencial de onda plana resulta:

$$\frac{\delta^2 \vec{\psi}}{\delta^2 x} = \frac{1}{v^2}\frac{\delta^2 \vec{\psi}}{\delta^2 t}$$

Las soluciones de esta ecuación son funciones de ondas armónicas de la forma:

$$\boldsymbol{\psi\ (x,t) = \psi_0\ (x,t)\ \text{sen}\ (kx - \omega t)}$$

donde $k = 2\pi / \lambda$ es el número de onda y $\omega = 2\pi f$ es la frecuencia angular.

Son solución de la ecuación de onda las:

Ondas electromagnéticas	**Ondas mecánicas**
Se auto propagan	Necesitan un medio elástico para propagarse
Ondas transversales	Ondas longitudinales y Ondas transversales
Trataremos: Ondas unidimensionales	Trataremos: Ondas unidimensionales
Ejemplos: Espectro electromagnético	Ejemplos: Ondas transversales en cuerdas. Ondas longitudinales en resortes. Ondas sonoras (longitudinales), etc
Trataremos: **Ondas planas linealmente polarizadas** **Ondas planas:** en cualquier instante los campos son constantes en cualquier plano perpendicular a la dirección de propagación	Trataremos : **Ondas transversales en cuerdas** **Ondas planas:** en cualquier instante los campos son constantes en cualquier plano perpendicular a la dirección de propagación

$\rightarrow$ E (x,t) de la Ec. de Max. div **E** = 0 resulta $\dfrac{\delta E_x(x,t)}{\delta x} = 0$ $\rightarrow$ E_x (x,t) = cte $\rightarrow$ * E debe ser perpendicular a x. Se elige la componente **Ey** (**linealmente polarizada**) (* Para la propagación de la onda se necesitan variaciones de campos en el tiempo y en el espacio)	El desplazamiento de las partículas respecto a su posición de equilibrio es perpendicular a la dirección de propagación x. **Es una onda linealmente polarizada**
Bajo estas condiciones la **ecuación diferencial de onda** para el vector **E**, resulta $\dfrac{\delta^2 E_y(x,t)}{\delta\ x^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\delta^2 E_y(x,t)}{\delta\ t^2}$; donde c = $(\varepsilon_0\ \mu_0)^{-1/2}$	La **ecuación diferencial de onda** que la representa es**:** $\dfrac{\delta^2 y}{\delta^2 x} = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\delta^2 y}{\delta\ t^2}$ donde v = $(T/\mu)^{1/2}$ siendo T la tensión de la cuerda y μ su densidad lineal .
Cuya **solución** es **E_y (x,t) = E_{0y} (x,t) sen (kx - ωt** (Ecuación de onda**)** En cualquier punto del espacio son funciones armónicas del tiempo y en cualquier instante la variación espacial de los campos es también armónica **λ = c / f k = 2π/λ w =2πf** λ: longitud de onda; f: frecuencia; 1/f: período c: velocidad de propagación de la onda, velocidad de la luz, k = número de onda, w: frecuencia angular	Cuya **solución** es **y (x,t) = y_0 (x,t) sen (kx - ωt)** (Ecuación de onda) **y:** desplazamiento a partir de la posición de equilibrio. En cualquier punto del espacio son funciones armónicas del tiempo y en cualquier instante la variación espacial del desplazamiento es también armónica **λ = v / f k = 2π/λ w =2πf** λ: longitud de onda; f: frecuencia; 1/f: período v: velocidad de propagación de la onda, función de las características del medio elástico k = número de onda, w: frecuencia angular
¿Cómo será B? de la Ec. de Max . rot **E = -** δ**B** /δt resulta $\dfrac{\delta E_y}{\delta x}\breve{k} = -\dfrac{\delta B_z}{\delta t}\breve{k}$ **B es perpendicular a la dirección de propagación y al campo E** $\rightarrow$ $B_z = -\int \dfrac{\delta E_y}{\delta x} dt$ $\rightarrow$ B_z = 1/c E_{oy} sen (kx - ωt) $\rightarrow$ **B_z (x,t) = B_{0z} (x,t) sen (kx - ωt)** (Ecuación de onda) **Solución de la ecuación diferencial de onda para el**	

vector B $$\frac{\delta^2 B_z(x,t)}{\delta\ x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\delta^2 B_z(x,t)}{\delta\ t^2}$$ **Resumiendo:** La onda electromagnética plana linealmente polarizada tiene como soluciones a la ecuación diferencial de onda: **E_y (x,t) = E_{0y} (x,t) sen (kx - ωt)** **B_z (x,t) = B_{0z} (x,t) sen (kx - ωt)** Que muestra que:	**Resumiendo:** La onda transversal en una cuerda tiene como solución a la ecuación de onda **y (x,t) = y_0 (x,t) sen (kx - ωt)** **Similar a las soluciones para E y B para una onda electromagnética plana linealmente polarizada**
E y **B** son perpendiculares a la dirección de propagación (**onda transversal**) **E** y **B están en fase** **E** y **B** en cualquier punto del espacio son funciones armónicas del tiempo y en cualquier instante la variación espacial de los campos es también armónica **E_y = c B_z** **E_{0y} = c B_{oz}**	
	Trataremos : **Ondas longitudinales**
	El desplazamiento de las partículas respecto a su posición de equilibrio es **paralelo** a la dirección de propagación x.
	La **ecuación diferencial de onda** que la representa es**:** $$\frac{\delta^2 y}{\delta^2 x} = \frac{1}{v^2}\frac{\delta^2 y}{\delta\ t^2}$$ donde v es la velocidad de propagación que es función de las características del medio elástico
	Cuya **solución** es **y (x,t) = y_0 (x,t) sen (kx - ωt)** (Ecuación de onda) **y:** desplazamiento (**en la dirección de la propagación**) a partir de la posición de equilibrio. En cualquier punto del espacio son funciones armónicas del tiempo y en cualquier instante la variación espacial del desplazamiento es también armónica **λ = v / f** **k = 2π/λ** **w =2πf** λ: longitud de onda; f: frecuencia;1/f:período

	v: velocidad de propagación de la onda, k = número de onda

- Al argumento de las funciones senoidales **($kx - \omega t$)** se lo denomina **fase**. A la superficie (superficie geométrica) que conecta puntos de igual fase en todas las ondas se la denomina **frente de onda.** Se define **rayo** a la línea a lo largo de la cual se propaga la onda. Los rayos son normales a los frentes de onda.

- Una fuente puntual de radiación, emite ondas en todas direcciones, la superficie que conecta los puntos de igual fase es una esfera y por esa razón se la denomina **onda esférica.** A medida que el frente de onda se aleja de la fuente, su curvatura va aumentando. A distancias grandes del emisor el frente de onda se puede considerar plano y los rayos paralelos a la dirección de propagación, es el caso dela **onda plana**

- Las soluciones armónicas no son las únicas soluciones de la ecuación de onda. Toda onda compleja puede descomponerse en un cierto número de otras simples. **Teorema de Fourier: cualquier función periódica puede representarse como suma de un cierto número de funciones senos y cosenos.**

- A las ondas tratadas hasta aquí, ondas que se propagan en un medio continuo (sin fronteras), se las denomina **ondas progresivas o viajeras.** Además el medio es **homogéneo e isótropo**

- Las ondas viajeras, tanto las electromagnéticas (OEM) como las mecánicas, satisfacen la misma ecuación de onda, pero tienen diferentes velocidades de propagación. Las **OEM** viajan con la **velocidad de la luz**. Las **ondas mecánicas** lo hacen con diferentes velocidades, **dependiendo en cada caso de las características del medio** en el cual se propagan.

- **Los medios de producción** de las OEM y de las ondas mecánicas **son totalmente diferentes**:
  Las OEM se producen cuando se aceleran cargas eléctricas o cuando los electrones ligados a átomos y moléculas verifican transiciones a estados de menor energía. Los **emisores** que generan el **espectro electromagnético** son **muy distintos**. Por ejemplo, las **ondas de radio** son generadas por **dipolos oscilantes** mientras que los **rayos gamma** son emitidos por **núcleos radioactivos** durante ciertas reacciones nucleares.
  Las ondas mecánicas son generadas por esfuerzos sobre el medio elástico. Las **ondas transversales** por **esfuerzos de corte**. **Las longitudinales** por **esfuerzos normales** compresión, tensión)

  - Del **análisis de la Ecuaciones de Ma**xwell para campos estáticos y no estáticos **surg**e que:

a) Una carga puntual en reposo genera un campo **E**, pero no genera un campo **B**
b) Una carga puntual que se desplaza con velocidad constante genera un campo **E** y un campo **B** pero no genera una OEM (para generarla es necesario la variación temporal y espacial de los campos)
c) Una **carga puntual acelerada** genera un campo **E** no conservativo variable en el tiempo, que genera un campo **B** variable también en el tiempo y que genera a su vez un campo **E** también variable, es decir que toda carga puntual acelerada **genera una OEM que se propaga en el espaci**o

Características del Movimiento Ondulatorio

Las ondas transportan energía y cantidad de movimiento a través del espacio sin transportar materia

En las **ondas mecánicas** este proceso tiene lugar mediante una **perturbación del medio**

En las **ondas electromagnéticas** este proceso tiene lugar por la **variación temporal y espacial de los campos eléctricos y magnéticos**
Son propios de este movimiento los fenómenos **de interferencia, difracción y polarización.**

II.- 13. Interferencia: Constructiva y destructiva, Batido, Ondas estacionarias
Resonancia. Características del sonido. Efecto Doppler

Resumen

Se recomienda visitar los sitios Web de las Universidades :
a) País Vasco. España. http://www.ehu.es/acustica/espanol/basico/suones/suones.html
b) Kettering University. Michigan. EE UU. http://www.gmi.edu/~drussell/Demos.html
Las imágenes y parte del texto han sido copiados de estas web

Interferencia

Cuando dos ondas se encuentran en un punto o una región del espacio, el resultado es una nueva onda cuya perturbación es la suma de las perturbaciones de las dos ondas originales.
Se denomina **interferencia** al resultado de la superposición de dos o más ondas
Las interferencias se observan únicamente en el caso de ondas procedentes de **fuentes coherentes**. Dos fuentes que están en fase o que tienen diferencia de fases constantes son coherentes
A continuación consideramos la superposición e interferencia de ondas armónicas

a) Interferencia de dos ondas armónicas de igual amplitud y frecuencia, viajando hacia la derecha, interferencia constructiva y destructiva

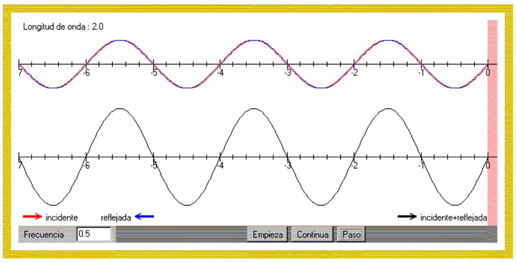
Supongamos que superponemos dos ondas armónicas, p_1 y p_2, de igual amplitud y frecuencia, desfasadas una cantidad δ

$$p_1 = P_0 \sin(kx - \omega t) \qquad\qquad p_2 = P_0 \sin(kx - \omega t + \delta)$$

La superposición de ambas ondas da como resultado una tercera onda armónica, cuya amplitud depende de la diferencia de fase entre las dos ondas originales:

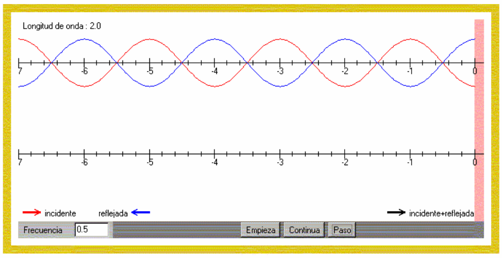
$$p_1 + p_2 = 2P_0 \cos\frac{\delta}{2} \sin\left(kx - \omega t + \frac{\delta}{2}\right)$$

Si las dos ondas están en fase, la interferencia es constructiva y la amplitud de la onda resultante es el doble de la de una cualquiera de las ondas primitivas. Si las dos ondas están en oposición de fase, la interferencia es destructiva y las ondas se anulan entre sí.



do

Interferencia constructiva



Interferencia destructiva

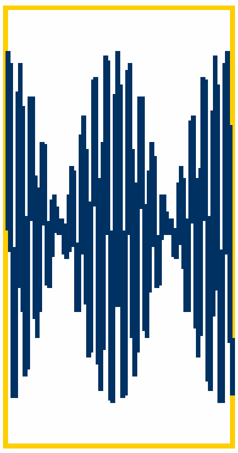
b) Batido

Este fenómeno es un caso particular de interferencia. Cuando **dos trenes de ondas de igual amplitud pero frecuencias ligeramente diferentes coinciden en el espacio**, dan lugar a una vibración cuya amplitud varía con el tiempo. Si se trata de ondas sonoras, estas variaciones de amplitud se percibirán como variaciones de sonoridad, o lo que es lo mismo, aumentos o disminuciones periódicas de intensidad, que se denominan batidos o pulsaciones.

Consideremos dos ondas sonoras, p_1 y p_2, de frecuencias ω_1 y ω_2, de la misma amplitud, con desfase nulo, y veamos como se comporta la onda resultante, p, en un punto cualquiera del espacio en función del tiempo:

$$p_1 = P_o \sin(k_1 x - \omega_1 t) \qquad p_2 = P_o \sin(k_2 x - \omega_2 t)$$

$$p = 2P_o \cos\left(\frac{(k_2 - k_1)x - (\omega_2 - \omega_1)t}{2}\right)\sin\left(\frac{(k_2 + k_1)x - (\omega_2 + \omega_1)t}{2}\right)$$



Dado que los números de ondas y las frecuencias de ambas ondas son muy próximos podemos hacer la siguiente aproximación:

$$\frac{k_1 + k_2}{2} \approx k_1 \qquad \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \approx \omega_1$$

y denominando $k_1 - k_2 = \Delta k$ y $\omega_1 - \omega_2 = \Delta\omega$, la ecuación queda:

$$p = 2P_o \cos\left(\frac{\Delta k}{2} x - \frac{\Delta\omega}{2} t\right)\sin(k_1 x - \omega_1 t)$$

es decir la onda resultante oscila con la misma frecuencia que las dos originales, pero su amplitud no es constante, sino que varía de forma armónica.

El observador aprecia una oscilación en la intensidad del sonido con una frecuencia doble que $\Delta\omega/2$, por lo que se denomina frecuencia de batido a la cantidad $\Delta\omega$.

Aclaración: la amplitud de la onda $2\ P_0\ \cos(\Delta k/2\ \mathbf{x} - \Delta\omega/2\ \mathbf{t})$ fluctúa muy lentamente ya que su frecuencia de vibración $\Delta\omega$ es muy pequeña. La gráfica del batido muestra como la amplitud de la onda varía con el tiempo. Cuando la amplitud es grande el sonido es intenso y viceversa. El oído percibe esta variación periódica lenta de amplitud como pulsaciones. La pulsación, es decir un máximo de amplitud , tendrá lugar cuando $\cos(\Delta k/2\ \mathbf{x} - \Delta\omega/2\ \mathbf{t})$ sea igual a 1 ó a –1. como cada uno de estos valores se produce una vez en cada período, el número de pulsaciones por segundo es dos veces la frecuencia $\Delta\omega/2$ o sea, **el número de pulsaciones por segundo es igual a $\Delta\omega$**

c) Ondas estacionarias

Este fenómeno es un caso particular de interferencia. Se produce cuando una onda llega a una superficie y se refleja totalmente. En la reflexión se puede producir o no un desfasaje entre la onda incidente y la reflejada. Cuando la onda se refleja en un medio más denso que el medio donde se propaga la onda incidente la onda reflejada se desfasa en **π respecto a la incidente.** Cuando se **refleja en un medio menos denso no se produce desfasaje.**

Para deducir la ecuación de la onda resultante de la superposición de la onda incidente y la reflejada, consideraremos que la onda reflejada tiene un desfasaje **π.** Ambas ondas tienen la misma amplitud y se propagan con la misma velocidad

Onda incidente: Y_0 sen (kx - ωt) = Y_0 sen k (x - vt)

Onda reflejada: Y_0 sen (kx + ωt + π) = Y_0 sen k (x + vt + π) = **-** Y_0 sen k (x + vt)

Onda resultante

Y(x, t) = Y_0 sen k (x - vt) **-** Y_0 sen k (x + vt)

Recordando que sen α - sen β = 2 sen ½ (α - β) cos ½ (α + β), resulta

Y(x, t) = - [2 Y_0 sen ωt] cos kx **Ecuación de onda estacionaria**

La onda resultante es onda sinusoidal de amplitud variable en el tiempo y de variables separadas.

Note que:

en la onda viajera Y_0 sen (kx - ωt), en la mima fase están las variables espacial y temporal, mientras que en la onda estacionaria Y(x, t) = **-** [2 Y_0 sen ωt] cos kx **,** las variables espacial y temporal están en las fases de funciones distintas. Es por esta razón que **en las ondas estacionarias existen siempre puntos, donde el desplazamiento (o presión) es siempre cero.**

Estos puntos**, denominados nodos, se obtienen haciendo cero la función cuya variable es x**

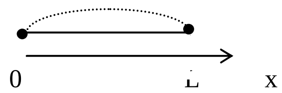
Si bien la deducción de la ecuación de onda se hizo para un caso particular, se la puede generalizar, resultando:

Ecuación de onda estacionaria **Y(x, t) = 2 Y_0 sen ωt cos kx**

Cuando se la utiliza para **resolver casos particulares** hay que tener en cuenta **las condiciones de contorno**

Ejemplo. Onda estacionaria en una cuerda tensa fija en ambos extremos

En esta caso en los extremos de la cuerda hay nodos de desplazamiento



Se utiliza la **Ecuación de onda estacionaria general** **Y(x, t) = 2 Y_0 sen ωt cos kx** para hallar los nodos

La ecuación se debe ajustar a la situación planteada, es decir que para **X = 0, Y(x, t)** debe ser cero y, que para **X = L, Y(x, t)** también debe ser cero

Como la función coseno no se anula para X = 0, se debe reemplazar el coseno por el seno para que satisfaga la condición de contorno:

Y(x, t) = 2 Y_0 sen ωt sen kx

Para hallar los otros nodos (Y(x, t) = 0), se debe cumplir que **sen kL = 0** o sea **kL = n π** o sea **λ = 2L/n**

Ondas estacionarias en cuerdas

En una cuerda tensa de longitud L con los extremos fijos, los dos puntos extremos corresponden con un nodo de la onda estacionaria.

Por lo tanto, debe haber un número entero de semilongitudes de onda $\lambda_n/2$ que ajuste la longitud total de la cuerda, es decir:

$$n\frac{\lambda_n}{2} = L$$

de donde se deduce que una onda estacionaria no pude tener una longitud de onda cualquiera, sino que estas longitudes de onda λ_n posibles, y las frecuencias f_n correspondientes, van a quedar delimitadas por la longitud de la cuerda.

Si v es la velocidad de propagación de la onda en la cuerda:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = nf_1 \qquad n = 1,2,3,...$$

denominadas frecuencias naturales o armónicos, siendo el valor más bajo, correspondiente a n=1, la frecuencia fundamental.

Ondas estacionarias en columnas gaseosas

Los tubos que contienen columnas gaseosas pueden tener los dos extremos abiertos (tubo abierto) o un extremo abierto y el otro cerrado (tubo cerrado).

Tubos abiertos:

En el caso de un tubo abierto de longitud L, los dos extremos corresponden a vientres de la onda estacionaria. Debido a que la distancia entre dos vientres sucesivos es la misma que entre dos nodos sucesivos, este caso es similar al descrito para la cuerda, invirtiendo las posiciones de los nodos y los vientres y siendo v la velocidad de propagación de la onda en el medio gaseoso.

Tubos cerrados:

En el caso de un tubo cerrado de longitud L, el extremo cerrado del tubo coincide con un nodo mientras que el libre coincide con un vientre. Por lo tanto, debe haber un número entero impar de cuartos de longitud de onda que ajuste la longitud total del tubo, es decir, se cumple:

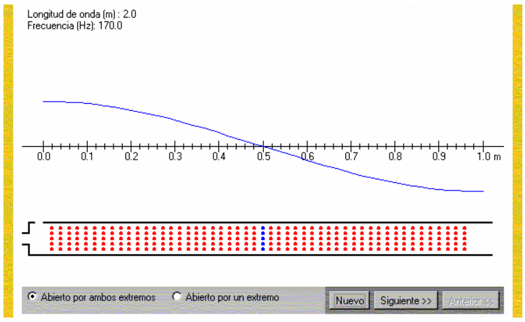
$$\lambda_{2n-1} = \frac{4L}{(2n-1)}$$

$$f_{2n-1} = \frac{v}{\lambda_{2n-1}} = (2n-1)f_1$$

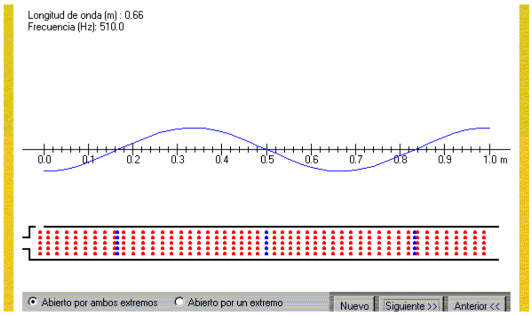
$n = 1,2,3,...$

donde n=1 corresponde al armónico fundamental. Nótese que en este caso no aparece ninguno de los armónicos pares.

Tubos abiertos



Modo fundamental



2do armónico

Ondas sonoras: se puede trabajar con **ondas de desplazamiento u ondas de presión**.
Las condiciones de contorno para las ondas de presión son:
Tubo abierto, ambos extremos son nodos de presión
Tubo cerrado, extremo abierto nodo, extremo cerrado vientre de presión
Las ondas de desplazamiento y las ondas de presión están desfasadas en $\pi/2$

Resonancia

Siempre que un cuerpo capaz de oscilar se somete a una serie periódica de impulsos con frecuencia igual a una de las frecuencias naturales de oscilación del mismo, éste entra en vibración con una amplitud relativamente grande. Este fenómeno se denomina **resonancia.** Ej**:** Si dos diapasones de igual frecuencia se colocan uno enfrente del otro, y se golpea uno de ellos, se oirá el otro cuando se pare el primero repentinamente

Características del sonido:

- **Intensidad**

$I = P/A = \frac{1}{2}\ \rho\ v\ w^2\ Y_o^2 = p_0^2 / \rho\ v$, en donde se ha utilizado $Y_o = p_0^2/\rho v w$
Que la intensidad de la onda sea proporcional al cuadrado de la amplitud, es una propiedad general de las ondas armónicas.
Intervalo audible: 10^{-12} W/m^2 (umbral de audición) **-** 1 W/m^2 (sensación dolorosa)
Nivel de intensidad: debido al intervalo tan grande de intensidades a las que resulta sensible el oído y a que la sensación fisiológica de fuerza sonora es más bien logarítmica, se utiliza una escala logarítmica para describir el nivel de intensidad de una onda sonora

$$\beta = 10 \log I/I_0$$

donde I es la intensidad e I_0 un nivel de referencia, el umbral de audición.
El nivel de intensidad se mide en **decibeles dB**
El umbral de dolor es igual a 120 dB

- **Tono**

Es una cualidad de la sensación sonora que permite clasificar una nota como “alta” o como “baja”. El tono está relacionado con la frecuencia, pero entre ambos no existe una relación biunívoca

- ### Timbre

El timbre de un sonido está determinado por el número de armónicos presentes y sus respectivas intensidades

Efecto Doppler

Cuando un foco emisor de ondas y un receptor se están moviendo uno respecto al otro, la frecuencia, f' , percibida por el receptor no es la misma que la emitida por el foco, f_0. Cuando se están acercando entre sí, la frecuencia percibida es mayor que la del foco, mientras que resulta menor si se están alejando.
La variación de la frecuencia de la onda sonora, cuando sólo se mueve el foco respecto al medio, se produce por la variación de la longitud de onda. Mientras que si es el receptor el que se mueve respecto al medio la variación es debida a que el receptor en su movimiento se encuentra con mayor o menor número de ondas en un tiempo determinado
Cuando tanto el foco como el receptor se están moviendo respecto al medio, la frecuencia que percibe el observador resulta:

$$f' = \frac{(\mathbf{1} \pm u_r / v)}{\mathbf{1} \pm u_f / v)} f_{\mathbf{0}}$$

siendo $\mathbf{u_r}$, $\mathbf{u_f}$, y $\mathbf{v}$ las velocidades (respecto al medio) del receptor, de la fuente y de la onda respectivamente
Para seleccionar correctamente los signos más o menos conviene recordar que la frecuencia aumenta cuando la fuente y el receptor se están moviendo el uno hacia el otro y que disminuye si se alejan.