

Trabajo Práctico N° 2. Matemática D1.

Integración Numérica.

Ejercicio 1

Aplicar la regla del trapecio a la integración de \sqrt{x} entre los argumentos 1.00 y 1.30, utilizando la siguiente tabla:

x_i	1.00	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30
$f(x_i)$	1.00000	1.02470	1.04881	1.07238	1.09544	1.11803	1.14017

Acotar el error de discretización y comparar con el valor analítico de la integral.

Ejercicio 2

Dadas las siguientes integrales:

$$1) \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$2) \int_1^2 \frac{2x+1}{x^2+x} dx$$

- Aproximar su valor empleando la regla trapezoidal simple. Acote el error cometido.
- Aproximar su valor empleando la regla de Simpson simple. Acote el error cometido.
- Grafique y compare las aproximaciones realizadas en los incisos anteriores. Puede utilizar el siguiente código como referencia en un software de cálculo numérico.

```
a=1; % limite inferior de integración
b=2; % limite superior de integración
f=inline('1./((1+x.^2)', 'x'); % define la funcion a integrar

xt=a:0.01:b; % define un vector para graficar
yt=feval(f,xt);
plot(xt,yt) % grafica la funcion definida

P1=feval(f,a)+(feval(f,b)-feval(f,a))/(b-a).*(xt-a);
hold on
plot(xt,P1,'r') % grafica la aproximación mediante un trapecio

Itrap=(feval(f,b)+feval(f,a))/2*(b-a) % calcula el valor de la integral

h=(b-a)/2; % aproximación con un polinomio de orden 2
P2= feval(f,a)+(feval(f,a+h)-feval(f,a))/h.*(xt-a)+ (feval(f,b)-2*feval(f,a+h)
+feval(f,a))/2/h.^2.*(xt-a).*(xt-a-h);
plot(xt,P2,'g') % grafica la aproximación mediante un polinomio de orden 2

Isimp=h/3*(feval(f,b)+4*feval(f,a+h)+feval(f,a)) % Calcula el valor de la integral
```

- Aproximar su valor empleando la regla trapezoidal compuesta utilizando un paso $h = 0,1$.
- Aproximar su valor empleando la regla de Simpson compuesta utilizando un paso $h = 0,1$. Comparar con el inciso anterior.
- Obtener el valor exacto de cada integral y calcular el valor del error porcentual de cada resultado obtenido.
- Realice un gráfico esquemático comparando las reglas simple y compuesta de cada método de calculo. Prediga como evoluciona el valor de la integral al aumentar el paso h .

**Ejercicio 3**

Calcular la integral de los siguientes datos tabulados empleando el método de trapecios y Simpson.

Puntos	0	1	2	3	4	5
x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$f(x)$	1	7	4	3	5	2

¿Es posible emplear las fórmulas de cuadraturas Gaussianas para el cálculo de la integral con los datos suministrados?

**Ejercicio 4**

Calcular por la fórmula de los trapecios, con $h = 0,25$ y $h = 0,125$

$$\int_0^3 \frac{1}{1+x^3}$$

Con las soluciones calculadas ¿es posible obtener una mejor aproximación del valor de la integral?

Ejercicio 5

Sabiendo que

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

Calcular aproximadamente $\ln(x)$ para $x=1.1$ con $h=0.1$ empleando la fórmula trapezoidal. Acotar el error y comparar con el error real cometido.

**Ejercicio 6**

Calcular el área de forma exacta de las regiones limitadas por las siguientes funciones empleando el método numérico óptimo.

$$A = \begin{cases} y = x + 1 \\ y = 0 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$B = \begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

**Ejercicio 7**

Evalúe las siguientes integrales, utilizando las fórmulas de cuadratura de Gauss-Legendre. Con dos, tres y cuatro puntos. (Obtener los pesos y raíces de una tabla normalizada)

a) $\int_0^3 \frac{e^x \sin(x)}{1+x^2} dx$

c) $\int_{-1}^1 \frac{\arctg(x)}{1+x} dx$

b) $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} dx$

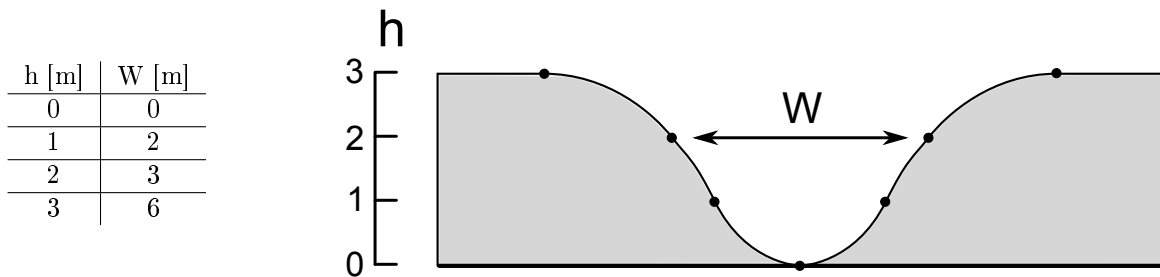
d) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$

**Ejercicio 8**

Hallar numéricamente el volumen del sólido de revolución, obtenido cuando la curva $y = xe^{-x} \cos(x)$ gira alrededor del eje ($0x$) entre $x = 0$ y $x = \pi$.

Ejercicio 9

Dada la sección transversal del canal de la figura y los valores del ancho W medidos para distintas profundidades h , calcular el área de la misma aplicando: a) Regla del Trapecio. b) Fórmula de Simpson.

**Ejercicio 10**

Calcular empleando un software de cálculo numérico la siguiente integral

$$I = \int_{-2}^2 e^{\frac{-x^2}{2}} dx$$

cuyo valor exacto es $I = 2,3925$. Resolver por regla trapezoidal, de Simpson y de cuadratura de Gauss con $h = 1,0$, $h = 0,5$ y $h = 0,25$. Realizar un cuadro comparativo con los resultados obtenidos.

Ejercicio 11

¿Qué diferencias puede mencionar entre los métodos de integración de Newton-Cotes y Gauss?

Ejercicio 12

La velocidad hacia arriba de un cohete se puede calcular con la siguiente fórmula:

$$v = u \cdot \ln \left(\frac{M_0}{M_0 - q t} \right) - g t$$

donde:

u : velocidad a la cual se expulsa el combustible relativa al cohete.

M_0 : masa inicial del cohete.

q : razón de consumo de combustible.

g : aceleración debido a la gravedad. Se supone constante.

Si $u = 2000 \text{ m/s}$, $M_0 = 150000 \text{ kg}$ y $q = 2600 \text{ kg/s}$ calcule la altura del cohete luego de 30 segundos.

Ejercicio 13

Indique si cada proposición es verdadera o falsa. Justifique la respuesta.

- El método de integración del trapecio integra exactamente un polinomio que tiene a lo sumo orden uno.
- El método de Simpson integra exactamente un polinomio que tiene a lo sumo orden dos.
- El error de integrar mediante la fórmula de Simpson utilizando un número par de subintervalos es aproximadamente el doble al error de integrar con un número impar de subintervalos.
- Para integrar una función en un intervalo $[a, b]$ es necesario conocer los valores de $f(a)$ y $f(b)$ por lo menos, independientemente del método de integración utilizado. Sin embargo esta condición no es suficiente