

Capítulo 1

Electrostática. Leyes básicas.

1 Los fenómenos eléctricos.

Como tantos fenómenos naturales, la electricidad estuvo mucho antes del advenimiento de la física. Primero fue un pequeño (y posiblemente inadvertido) conjunto de hechos inconexos carentes de denominación. Luego, el interés de unos pocos (casi siempre griegos) dio lugar a los primeros reportes donde surgieron los nombres. Entonces la electricidad tuvo entidad, y muchos fenómenos se encolumnaron tras este nombre...

El inicio de los tiempos científicos le dio un nuevo impulso al tema. El salto cualitativo fue grande, pasando a una nueva instancia del conocimiento. Además de describir se pretendió comprender. Desentrañar las leyes escondidas en la fenomenología. Y en eso estamos. Humildemente creemos que la comprensión de la electricidad va por buen camino, aunque la ciencia bien entendida siempre se reservará el derecho a la duda (por eso es seria). Tal vez, el principal reaseguro del conocimiento acerca de la electricidad sea la tecnología que de ella deriva. El lector podrá producir una lista de ejemplos que le resulten familiares, por lo que no será necesaria tal enumeración aquí. Sin embargo, es interesante enfatizar que el camino del conocimiento es bastante parecido, cualquiera que sea la fenomenología que se quiere comprender. Por tanto, valga esta pequeña introducción como una mirada global, a lo que fue (y sigue siendo) el desarrollo científico.

2 Breve reflexión sobre la carga eléctrica.

La carga eléctrica es la propiedad de los cuerpos que toman parte en las interacciones eléctricas. Tal vez el lector considere que esta frase no constituye una definición lícita, o acaso no es más que un juego de palabras. Respuestas rápidas a preguntas tales como ¿De qué color son las naranjas? o ¿Qué sabor tiene la sal? adolecen más o menos de los mismos problemas. Sin embargo, la falta de una respuesta categórica (en sentido académico) no impide que las personas tengan pleno conocimiento del color de las naranjas o del sabor de la sal. El conocimiento proviene de la experiencia; después viene el lenguaje que comunica dicho conocimiento y, por

último, su formalización. La carga eléctrica comparte su dificultad de definición con la masa gravitatoria, la masa inercial o el tiempo. Aquí sugerimos al lector que esté entrenado en operar con estos conceptos, que intente definirlos. Luego evalúe cuánto ha significado esta falta de definición formal en su entrenamiento.

3 Concepto de carga eléctrica.

La carga eléctrica admite una definición intuitiva, basada en una serie de propiedades simples observadas experimentalmente. Estas propiedades sólo sugieren una idea difusa sobre la naturaleza de la carga, pero aportan un instrumento concreto y operable sobre el que pudo edificarse la teoría electromagnética macroscópica. Las propiedades observadas más importantes son las siguientes:

a) La carga eléctrica se encuentra en la naturaleza inseparablemente vinculada a un portador material (con masa y volumen no nulos).

b) Si un objeto material no posee carga eléctrica, no podrá esperarse de él ninguna interacción eléctrica¹.

c) Las cargas eléctricas interactúan entre sí manifestándose mediante efectos dinámicos (Atracciones y repulsiones) que permiten distinguir dos clases de carga. Por la manera en que la carga se inserta en el aparato matemático se las distingue con signos + y -, pero la asignación es convencional. Esto significa que los fenómenos que describe la teoría serán idénticos si se permuta la convención de signos.

d) Es posible comparar las cargas eléctricas estableciendo relaciones de orden y equivalencia², con lo que se concluye que es una magnitud medible y por tanto, operativamente apta para la teoría electromagnética. Sólo falta definir una unidad para darle entidad a la carga eléctrica. En el sistema internacional (SI) se adopta como unidad el “Coulomb” o “Coulombio”, simbolizado por “C”. Su inserción en el cuadro de las unidades SI se tratará más adelante.

¹No obstante, la experiencia indica que ningún cuerpo macroscópico resulta completamente insensible a los efectos eléctricos. Esto sugiere el íntimo arraigo de la carga en la materia, aún en los objetos aparentemente neutros.

²En lo que respecta a magnitudes físicas, relaciones de orden y equivalencia existen cuando ciertos instrumentos permiten comparar dicha magnitud entre dos cuerpos (*a* y *b*). La relación de orden surge cuando puede establecerse que la magnitud observada en *a* es mayor que la observada en *b* o viceversa. La relación de equivalencia se tiene cuando el instrumento permite determinar que las magnitudes observadas en ambos cuerpos son iguales. Como ejemplo, si la magnitud observada es la masa, el instrumento adecuado es la balanza de platillo.

4 Enfoques microscópico y macroscópico.

La carga eléctrica fue introducida en la teoría como una propiedad macroscópica continua que podía ser adquirida por la materia. En tal sentido, las primeras ideas sugerían que la materia era eléctricamente neutra, pudiendo activarse su participación en fenómenos eléctricos mediante la adquisición de carga. Sin embargo, desde un principio existían evidencias acerca de la íntima vinculación entre la carga eléctrica y la materia. Un fenómeno muy conocido que permitía especular sobre esto, es aquel en que dos cuerpos se cargan por frotamiento. Uno adquiere carga positiva y el otro negativa. Pero, ¿de dónde sale la carga? lo que se especuló rápidamente fue que los cuerpos poseían cargas compensadas (es decir, tanta carga positiva como negativa), y que el frotamiento, o más precisamente el contacto, eran puentes de transferencia de la carga entre los cuerpos.

A partir del último cuarto del siglo XIX, el conocimiento acerca de la intimidad de la materia ha crecido vertiginosamente. Los modelos y experimentos que fueron perfeccionándose desde entonces, nos dan una idea muy precisa sobre la conexión entre carga eléctrica y materia. Hoy reconocemos que las partículas que poseen carga eléctrica son los protones y los electrones. Ellos tienen cargas positivas y negativas respectivamente, cuyo valor absoluto es

$$e = 1,62 \times 10^{-19} C \quad (1)$$

A esta magnitud se la conoce como carga elemental, y actualmente sabemos que la carga adquirida por un cuerpo macroscópico será siempre un múltiplo de la carga elemental. En este sentido, decimos que la carga es una magnitud “cuantizada”, en contraposición con el carácter continuo que se le atribuyó originalmente. Sin embargo, la pequeñez de la magnitud e hace que la mayoría de los fenómenos macroscópicos sean insensibles a tal cuantización.

Ahora nos referimos brevemente a los electrones y protones. Es importante observar que, a diferencia de los cuerpos macroscópicos, los electrones y protones poseen cargas inalterables. Esto significa que la carga de estas partículas es una propiedad intrínseca de la partícula. Ni los electrones ni los protones pueden ceder o adquirir carga eléctrica³. Como la materia está formada por estructuras compuestas por electrones y protones (átomos, moléculas, iones, etc), debemos entender que en ellos yace la carga eléctrica, y que la misma se encuentra localmente compensada. Cualquier proceso de transferencia de carga es entonces, una transferencia de partículas cargadas.

³Ciertos fenómenos cuánticos que involucran la creación o aniquilación de partículas deben considerarse como una excepción. Pero su tratamiento es “no clásico”, por lo que no lo abordaremos en este curso.

5 Electrostática y soportes mecánicos.

La electrostática describe los fenómenos que tienen lugar en sistemas donde distribuciones de carga eléctrica mantienen su localización invariante en el tiempo. En otras palabras, los cuerpos cargados deben permanecer en reposo. Aún más, cada porción de carga debe permanecer en reposo dentro del cuerpo cargado. Aquí se pone de manifiesto la necesidad de un “soporte mecánico” que permita el equilibrio estable de los cuerpos en los que reside la carga, a la vez que impida la migración de carga dentro de cada cuerpo.

Las interacciones entre cuerpos cargados se manifiestan mediante fuerzas, que debido a su naturaleza se las denomina “fuerzas eléctricas”. Si un cuerpo cargado en reposo estuviera afectado exclusivamente por una fuerza eléctrica no nula, el mismo iniciaría un movimiento. Entonces ya no cumpliría con la condición electrostática. Es por esto que la estabilidad de un cuerpo cargado requiere un soporte mecánico que responda bloqueando la posibilidad de movimiento. Resulta mucho más delicado aún, bloquear las migraciones de carga “dentro” del cuerpo. Esto no es posible en general, aunque bajo ciertas condiciones las distribuciones de carga se estabilizan. Lo que ocurre dentro de los cuerpos (con carga neta o no), es una “redistribución” de la carga que, en ciertos casos, alcanza el equilibrio estable. Durante el proceso en que la carga busca tal estado de equilibrio, decimos que el sistema se encuentra en un régimen transitorio, durante el cual existen desplazamientos de cargas a los que en el futuro identificaremos como “corrientes eléctricas”. Una vez finalizado tal proceso, la carga alcanzará el equilibrio, quedando en condiciones electrostáticas.

Resumamos todo esto en un lenguaje algo más técnico. La condición electrostática se alcanza cuando el sistema de cuerpos cargados está bloqueado por una estructura resistente, y cada cuerpo ha concluido su “relajación interna” hasta alcanzar el equilibrio estable compatible con sus “ligaduras”.

6 Partículas puntuales cargadas.

Muchos fenómenos físicos admiten ser tratados mediante el modelo de partícula. Por ejemplo, la órbita de la tierra alrededor del sol, analizada desde la teoría de gravitación universal, puede determinarse con excelente calidad suponiendo que la tierra es una partícula. En tal caso, suponemos que la masa de la tierra está concentrada en un objeto “puntual”. Este tipo de modelado puede hacerse cada vez que las dimensiones lineales del cuerpo resulten muy pequeñas comparadas con las

distancias involucradas en el fenómeno analizado⁴.

El mismo criterio puede utilizarse en electrostática. Cuando la carga eléctrica reside sobre un cuerpo cuyas dimensiones son muy pequeñas comparadas con las distancias de interacción, podemos modelar al cuerpo como una partícula puntual. Es habitual la denominación “carga puntual” para referirse al caso en que la carga eléctrica reside sobre un cuerpo puntual. Es importante remarcar que las cargas puntuales sólo existen en los modelos; nunca en la realidad.

7 Densidades de carga.

Según hemos visto la carga eléctrica siempre reside sobre un cuerpo material. Bajo condiciones especiales, tales cuerpos pueden representarse con el modelo de partícula (sección 6). Pero en general la carga se distribuirá en el volumen del cuerpo de maneras diversas. Entonces nos encontramos frente a la necesidad de describir qué fracción de la carga se encuentra en cada fracción del volumen del cuerpo. Para ello introducimos el concepto de densidad volumétrica de carga $\delta(\vec{r})$.

Comencemos por considerar un cuerpo sobre el que reside una distribución de cargas. Imaginemos ahora un mallado tridimensional que subdivide al cuerpo en pequeñísimos volúmenes cúbicos. Entonces, si la carga está distribuida de alguna forma sobre el cuerpo, podemos pensar que en cada cubito reside una pequeña fracción de la carga. Sea \vec{r}' el vector que identifica el centro de uno de dichos cubitos. Entonces decimos que la densidad volumétrica de carga $\delta(\vec{r}')$ es, en sentido intuitivo, el cociente entre la carga Δq residente en el cubito centrado en \vec{r}' y el volumen Δv de dicho cubito.

$$\delta(\vec{r}') = \frac{\Delta q}{\Delta v} \quad (2)$$

Una definición rigurosa requiere un paso al límite en que los cubitos sean infinitesimalmente pequeños. Esto es

$$\delta(\vec{r}') = \frac{dq}{dv} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta v} \quad (3)$$

Esta definición es aplicable a todos los casos reales, y su valor será un escalar que, aunque probablemente muy grande, siempre será finito. Sin embargo, en el mundo de los modelos puede a veces resultar infinito. Un ejemplo de tal situación se da para las cargas puntuales. En efecto, la carga toma un valor finito y reside en un soporte de volumen nulo, por lo que la densidad es infinita. Una situación análoga

⁴En el ejemplo consignado observamos que el radio terrestre es aproximadamente 6400 *km*, mientras que la distancia media tierra-sol es 150.000.000 *km*.

se da cuando el soporte de la carga se modela como una curva o como una superficie (objetos geométricos de volumen nulo). En estos últimos casos pueden definirse la densidad lineal de carga $\lambda(\vec{r})$ y la densidad superficial de carga $\sigma(\vec{r})$ dadas por

$$\lambda(\vec{r}_l) = \frac{dq}{dl} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} \quad (4)$$

$$\sigma(\vec{r}_s) = \frac{dq}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta s} \quad (5)$$

donde \vec{r}_l y Δl representan la posición y tamaño del elemento de curva donde reside la carga. De la misma manera \vec{r}_s y Δs representa la posición y tamaño de un elemento de la superficie que contiene la carga. Aquí enfatizamos que tanto las cargas puntuales como las densidades de carga lineales y superficiales sólo existen en los modelos; nunca en la realidad física.

8 Ley de Coulomb.

Considere dos partículas puntuales (en adelante 1 y 2), rígidamente emplazadas en las posiciones \vec{r}_1 y \vec{r}_2 , que poseen cargas eléctricas Q_1 y Q_2 respectivamente. Entonces, la partícula 1 ejerce una fuerza eléctrica \vec{F}_{21} sobre la partícula 2 cuyo

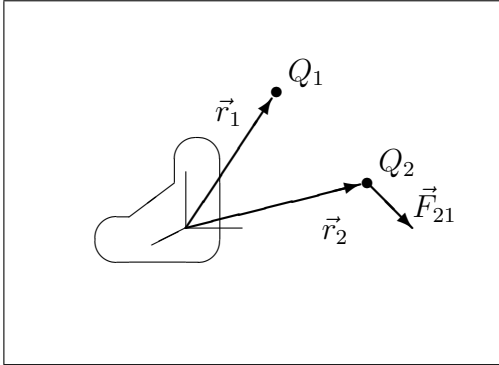


Figure 1: El esquema representa un sistema de referencia sobre el que se ha elegido un origen de coordenadas y se encuentra anclada una terna de ejes. Luego, dos partículas cargadas fijas interactúan eléctricamente de acuerdo con la ley de Coulomb.

módulo resulta directamente proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre las partículas. La dirección de la fuerza coincide con la recta que pasa por ambas partículas y el sentido será atractivo si las cargas son de distinto signo y repulsivo si son del mismo signo. En forma simbólica tenemos

$$\vec{F}_{21} = k \frac{Q_1 Q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \quad (6)$$

donde la constante k vale:

$$k = 9 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \quad (7)$$

Expresión de bolsillo: algunas veces conviene recordar una expresión más compacta para la ley de Coulomb que se construye a partir de un vector \vec{u}_{21} definido por

$$\vec{u}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (8)$$

de donde resulta que

$$u_{21} = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| \quad y \quad \check{u}_{21} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \quad (9)$$

Entonces la forma compacta es

$$\vec{F}_{21} = k \frac{Q_1 Q_2}{u_{21}^2} \check{u}_{21} \quad (10)$$

9 Principio de superposición.

La ley de Coulomb describe la interacción electrostática entre dos partículas cargadas. Ahora cabe preguntarse ¿cómo será la interacción cuando participan más de dos partículas? La respuesta proviene de la experiencia y recibe el nombre de principio de superposición. El mismo puede enunciarse como sigue:

Consideremos N partículas rígidamente emplazadas en posiciones $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$, con cargas respectivas Q_1, \dots, Q_N .

Entonces, la fuerza ejercida sobre la partícula N -ésima por las $N - 1$ restantes, es la suma vectorial de las fuerzas que cada una de las partículas restantes ejerce sobre la N -ésima. Esto es

$$\vec{F}_{RN} = \sum_{i=1}^{N-1} \vec{F}_{Ni} = k \sum_{i=1}^{N-1} \frac{Q_i Q_N}{|\vec{r}_N - \vec{r}_i|^2} \frac{\vec{r}_N - \vec{r}_i}{|\vec{r}_N - \vec{r}_i|} \quad (11)$$

Donde \vec{F}_{RN} representa la fuerza resultante sobre la N -ésima partícula.

Tal vez algún lector pueda pensar que este principio es trivial. Si éste fuera el caso, invitamos al lector a que reflexione sobre otros hechos naturales en los que seguramente no esperaría que la respuesta fuera una simple suma. Por ejemplo si en

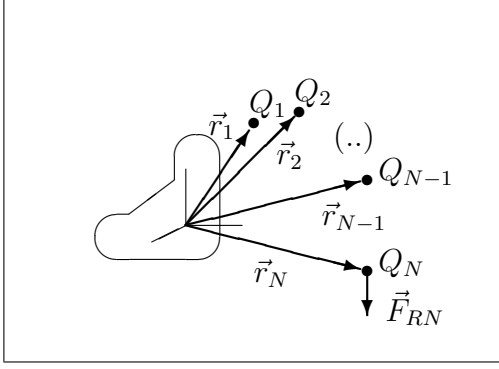


Figure 2: En el esquema indicamos las notaciones de cargas y sus respectivas posiciones para interpretar el principio de superposición, en distribuciones discretas. Note que utilizamos el mismo ícono que en la figura (8) para representar el sistema de referencia y la terna de ejes, interpretación que seguiremos dándole en todo el curso.

un día cuya temperatura es de $25^{\circ}C$ uno admite una sensación térmica confortable, seguramente no creerá que en un día de $50^{\circ}C$ la sensación térmica será doblemente confortable. En otras palabras (algo menos elocuentes), decimos que la naturaleza no responde necesariamente en forma lineal. En tal sentido, el principio de superposición es un obsequio muy apreciable de la naturaleza, especialmente para los que intentamos comprender y describir sus fenómenos desde modestos modelos lógicos.

La ley de Coulomb y el principio de superposición constituyen la base formal de la electrostática. Esto significa que los hechos que ocurren en el marco electrostático pueden ser descriptos a partir de estas leyes. Naturalmente, ciertos fenómenos pueden visualizarse mejor mediante leyes más apropiadas. Sin embargo, tales leyes deben poder deducirse desde la base formal propuesta.

10 Ejemplo 1.

En este ejemplo presentamos una situación muy simple, que admite ser tratada en el plano. Se trata de tres partículas con cargas especificadas, que se encuentran emplazadas de acuerdo con el esquema *a* de la figura 10. La consigna será establecer la fuerza resultante sobre la partícula de carga $-10 \mu C$, debida a la interacción electrostática con las otras dos partículas. En primer lugar elegimos una notación adecuada para las cargas, sus posiciones respectivas y las fuerzas de interacción. Además elegimos el origen y orientación de las coordenadas. Todo esto se indica en el esquema *b*, y es consistente con el siguiente resumen

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= 62,5 \mu C & \vec{r}_1 &= (0, 0) \\
 Q_2 &= -13,5 \mu C & \vec{r}_2 &= (4 \text{ cm}, 0) \\
 Q_3 &= -10 \mu C & \vec{r}_3 &= (4 \text{ cm}, 3 \text{ cm})
 \end{aligned} \tag{12}$$

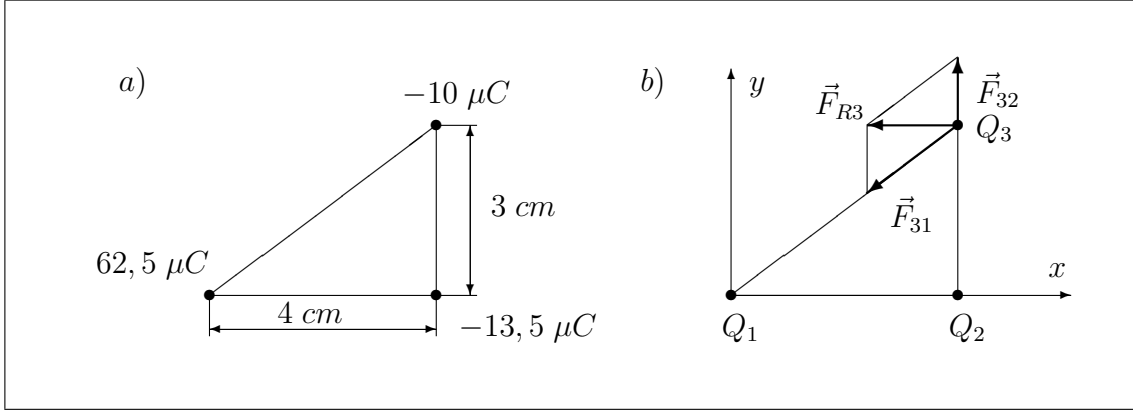


Figure 3: a) Esquema de las partículas interactuantes y sus localizaciones relativas. b) Esquema del mismo montaje, incluyendo el sistema de ejes elegido, y la resolución gráfica de la fuerza sobre la partícula 3.

De acuerdo con la expresión (11), la fuerza \vec{F}_{R3} será

$$\vec{F}_{R3} = k \frac{Q_3 Q_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^2} \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|} + k \frac{Q_3 Q_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^2} \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|} \quad (13)$$

Desarrollemos los vectores, módulos y versores involucrados en esta expresión

$$\begin{aligned} \vec{r}_3 - \vec{r}_1 &= (4 \text{ cm}, 3 \text{ cm}) & |\vec{r}_3 - \vec{r}_1| &= 5 \text{ cm} \\ \vec{r}_3 - \vec{r}_2 &= (0, 3 \text{ cm}) & |\vec{r}_3 - \vec{r}_2| &= 3 \text{ cm} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|} = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right) \quad \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|} = (0, 1) \quad (15)$$

Reemplazando en (13) tenemos

$$\begin{aligned} \vec{F}_{R3} &= 9 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \frac{-10 \times 10^{-6} C \ 62,5 \times 10^{-6} C}{25 \times 10^{-4} m^2} \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right) + \\ &+ 9 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \frac{-10 \times 10^{-6} C \ (-13,5 \times 10^{-6} C)}{9 \times 10^{-4} m^2} (0, 1) \end{aligned} \quad (16)$$

Ahora hacemos las cuentas con cuidado y verificamos las unidades

$$\vec{F}_{R3} = -2250 \text{ N} \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right) + 1350 \text{ N} (0, 1) \quad (17)$$

Finalmente, recordamos las definiciones de suma de vectores y producto de un escalar por un vector. Entonces tenemos

$$\vec{F}_{R3} = (-1800 \text{ N}, -1350 \text{ N}) + (0, 1350 \text{ N}) \quad (18)$$

con lo que concluimos que

$$\vec{F}_{R3} = (-1800 \text{ N} , 0) \quad (19)$$

Analicemos brevemente este resultado. En primer lugar, observemos que la consigna era determinar una fuerza, y el resultado es un vector (como era de esperarse), cuyas componentes tienen la unidad correcta. Luego observemos que el análisis gráfico de las fuerzas en el esquema *b* (que está hecho a escala) concuerda con el resultado obtenido. En efecto, la fuerza \vec{F}_{R3} tiene componente vertical nula, y componente horizontal negativa.

11 Ejemplo 2.

Para ilustrar la forma de operar con vectores en casos tridimensionales, consideremos cuatro partículas con igual carga Q , situadas en los vértices de un tetraedro regular de lado a . Comencemos por elegir el origen de coordenadas en el centro de una cara. El eje x paralelo a uno de los lados de esa cara y eje z pasando por la partícula situada en el vértice opuesto a la cara que contiene al origen. Entonces, las posiciones de las partículas serán

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2\sqrt{3}}, 0 \right) \\ \vec{r}_2 &= \left(\frac{a}{2}, -\frac{a}{2\sqrt{3}}, 0 \right) \\ \vec{r}_3 &= \left(0, \frac{a}{\sqrt{3}}, 0 \right) \\ \vec{r}_4 &= \left(0, 0, \sqrt{\frac{2}{3}} a \right) \end{aligned} \quad (20)$$

Nos proponemos encontrar la fuerza \vec{F}_{R4} resultante sobre la partícula 4, debida a la interacción con las otras tres partículas. Formalmente será

$$\vec{F}_{R4} = \frac{kQ_1Q_4}{|\vec{r}_4 - \vec{r}_1|^2} \frac{\vec{r}_4 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_4 - \vec{r}_1|} + \frac{kQ_2Q_4}{|\vec{r}_4 - \vec{r}_2|^2} \frac{\vec{r}_4 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_4 - \vec{r}_2|} + \frac{kQ_3Q_4}{|\vec{r}_4 - \vec{r}_3|^2} \frac{\vec{r}_4 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_4 - \vec{r}_3|} \quad (21)$$

Los vectores diferencia involucrados en la expresión de la fuerza son

$$\begin{aligned} \vec{r}_4 - \vec{r}_1 &= \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}} a \right) & |\vec{r}_4 - \vec{r}_1| &= a \\ \vec{r}_4 - \vec{r}_2 &= \left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}} a \right) & |\vec{r}_4 - \vec{r}_2| &= a \\ \vec{r}_4 - \vec{r}_3 &= \left(0, -\frac{a}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}} a \right) & |\vec{r}_4 - \vec{r}_3| &= a \end{aligned} \quad (22)$$

con lo que los versores toman la forma

$$\begin{aligned}\frac{\vec{r}_4 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_4 - \vec{r}_1|} &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}} \right) \\ \frac{\vec{r}_4 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_4 - \vec{r}_2|} &= \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}} \right) \\ \frac{\vec{r}_4 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_4 - \vec{r}_3|} &= \left(0, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}} \right)\end{aligned}\tag{23}$$

Como todas las cargas son iguales, y las distancias involucradas también, tenemos que

$$\vec{F}_{R4} = \frac{kQ^2}{a^2} \left[\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}} \right) + \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}} \right) + \left(0, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}} \right) \right] \tag{24}$$

Sumando componente a componente tenemos

$$\vec{F}_{R4} = \frac{kQ^2}{a^2} \left(0, 0, 3\sqrt{\frac{2}{3}} \right) \tag{25}$$

Con lo que obtenemos el vector buscado

$$\vec{F}_{R4} = \left(0, 0, \sqrt{6} \frac{kQ^2}{a^2} \right) \tag{26}$$

En este ejemplo, puede ocurrir que algún estudiante considere que el procedimiento es “algo” tedioso. La idea es que no se desanime, porque muchas veces ocurre que ciertas propiedades geométricas y/o físicas, permiten atajos que facilitan la resolución. Así fue pensado este ejemplo, para que pueda resolverse mediante estrategias alternativas. En este curso, alentaremos siempre al estudiante a que desarrolle tales alternativas de resolución. La clave está en que siempre podemos apartarnos de la “formalidad”, pero sin perder de vista la “rigurosidad conceptual”.

12 Nota sobre partículas cargadas en movimiento.

Según hemos discutido, la electrostática funciona siempre que las partículas cargadas se encuentren en reposo. Veremos más adelante que cuando las partículas cargadas se mueven, aparecen las interacciones magnéticas. Sin embargo, muchos fenómenos que involucran movimiento de cargas, pueden ser tratados mediante las

herramientas de la electrostática. Todo es cuestión de mantenerse dentro del límite de bajas velocidades.

Desarrollemos un ejemplo. Una partícula con carga Q se encuentra firmemente anclada, mientras que otra partícula de carga q y masa m se abandona a una distancia r_0 de la primera. Nos proponemos calcular la velocidad de la segunda partícula como función de la distancia a la primera. Para ello, elegimos el origen de coordenadas en el sitio donde se encuentra la partícula fija. Dado que el movimiento se

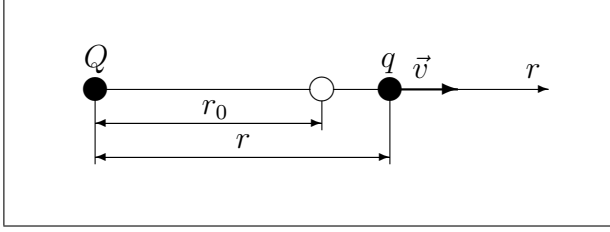


Figure 4: Esquema para analizar el movimiento de una partícula de carga q , bajo la influencia de otra de carga Q fija en el origen.

inicia desde el reposo, la trayectoria será necesariamente recta (¿...?). Entonces el problema puede tratarse en una dimensión (ver figura 12). De la segunda ley de Newton tenemos

$$\vec{F} = \frac{kQq}{r^2} \vec{r} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \frac{dv_r}{dt} \vec{r} \quad (27)$$

que se convierte en la ecuación escalar siguiente

$$\frac{kQq}{r^2} = m \frac{dv_r}{dt} = m \frac{dv_r}{dr} \frac{dr}{dt} = mv_r \frac{dv_r}{dr} \quad (28)$$

Esta es una ecuación diferencial de fácil resolución

$$kQq \frac{dr}{r^2} = mv_r dv_r \quad (29)$$

Integramos ambos miembros reconociendo que la posición inicial es r_0 y la velocidad inicial es nula.

$$kQq \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'^2} = m \int_0^{v_r} v'_r dv'_r \quad (30)$$

De donde resulta que

$$kQq \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right) = m \frac{v_r^2}{2} \quad (31)$$

Finalmente tenemos

$$v_r^2(r) = \frac{2kQq(r - r_0)}{mr_0r} \quad (32)$$

Observe que en este análisis se ha perdido información sobre el signo de la componente de velocidad v_r . Como el primer miembro es definido positivo, los signos de Q , q y $r - r_0$ deben ser tales que su producto resulte positivo. Esto condiciona el sentido de la velocidad, por lo que el vector velocidad debe escribirse cuidadosamente.

$$\vec{v}(\vec{r}) = v_r(r) \hat{r} = \text{signo}(r - r_0) \sqrt{\frac{2kQq(r - r_0)}{mr_0r}} \hat{r} \quad (33)$$

Este resultado ha sido cuidadosamente obtenido a partir de suponer que la partícula de carga q es afectada exclusivamente por la fuerza que la de carga Q hace sobre ella. El resultado es correcto, aunque las condiciones electrostáticas no se cumplen. Entonces ¿Cómo decidir si se puede usar o no la fuerza eléctrica para analizar estos movimientos? En realidad no estamos aún en condiciones de discutir esto, pero podemos adelantar que si hay sólo una partícula libre de moverse bajo la acción de otras fijas, entonces el tratamiento es válido siempre que las velocidades sean relativamente bajas. A lo largo del curso avanzaremos sobre estos conceptos en busca de su debida fundamentación.

Capítulo 2

Campo electrostático.

1 Carga de prueba.

Para desarrollar esta idea, comenzamos por considerar una distribución de carga en equilibrio sobre sus portadores macroscópicos. Esto implica que sobre cada elemento de carga, la fuerza neta es nula. Reflexionemos brevemente sobre esta idea. En ciertos casos, podríamos pensar que las cargas están rígidamente emplazadas en sus posiciones mediante vínculos muy resistentes (imaginemos partículas sostenidas por una estructura mecánica rígida). Pero otras veces, las cargas pueden estar en reposo pero no bloqueadas; es decir que se mantienen en equilibrio estable entre sus propias interacciones y las que experimentan con el soporte mecánico (que no las inmoviliza a priori).

Ahora supongamos que un pequeño objeto cargado se acerca al sistema. La nueva interacción tiene dos consecuencias:

a) Sobre el nuevo objeto aparece una fuerza electrostática debida al sistema de cargas preexistente. Por tanto, para que el objeto se mantenga en el lugar, necesita que un agente externo lo sostenga.

b) Sobre el sistema preexistente aparecerán fuerzas debidas al nuevo objeto, que alterarán el equilibrio original. Si la carga del sistema posee ligaduras no rígidas, habrá un reordenamiento de cargas tendiente a restablecer el equilibrio electrostático.

Un efecto muy buscado en el vasto universo de las técnicas de medición, consiste en “observar algo sin que el sistema a estudiar se de cuenta”. En lo que respecta a nuestro análisis, podríamos decir que nos interesa observar “alguna fuerza” sobre el objeto con la expectativa que el sistema original experimente la menor alteración posible. Naturalmente, esto ocurre cuando la carga del objeto es lo más pequeña posible. Por supuesto que el límite de qué tan pequeña puede ser la carga, lo impone la sensibilidad del instrumento que mide la fuerza sobre ella. Si un objeto pequeño dotado de carga eléctrica es apto para tal propósito, decimos que el mismo es un “objeto de prueba”, o más usualmente llamado “carga de prueba”.

2 Concepto de campo electrostático.

Con la ayuda de una carga de prueba, podemos explorar el espacio circundante de cierta distribución de carga estática. Entonces observaremos que sobre la carga de prueba aparecerán fuerzas distintas según cambie su posición. Una mirada posible sobre esto, consiste en interpretar que el “espacio” posee una propiedad conferida por la distribución de cargas, la cual se manifiesta actuando sobre la carga de prueba, dando lugar a la fuerza que actúa sobre ella. A esta propiedad del espacio se la llama “campo electrostático”, y se dice que las cargas que lo originan son sus “fuentes”. Para independizar la propiedad de la carga de prueba que la detecta, definimos el campo electrostático $\vec{E}(\vec{r})$ en el punto \vec{r} , como el cociente entre la fuerza electrostática \vec{F} que actúa sobre la partícula de prueba y su propia carga, cuando la misma se sitúa en el punto \vec{r} . Esto es

$$\vec{E}(\vec{r}) = \left[\frac{\vec{F}}{q} \right]_{(\vec{r})} \quad (1)$$

Ahora bien, de acuerdo con la forma en que funcionan las cargas de prueba, es esperable que influyan indirectamente sobre el campo electrostático. Esto es, la carga de prueba alterará la distribución de cargas que da origen al campo. Entonces el campo medido de esta manera será siempre un campo alterado por la medición. Pero ¿será posible obtener el campo producido por la distribución de carga, libre de perturbaciones? Al menos, desde el punto de vista teórico, podemos definirlo. Imaginemos una secuencia de mediciones reemplazando en un mismo punto cargas de prueba cada vez más pequeñas. En el límite en que el valor de la carga de prueba tiende a cero, el sistema de cargas vuelve a su equilibrio original. Entonces una definición adecuada para el campo electrostático producido por la distribución no perturbada será

$$\vec{E}(\vec{r}) = \left[\lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q} \right]_{(\vec{r})} \quad (2)$$

Volvamos ahora a la idea de que el campo electrostático es una propiedad del espacio. ¿Cómo podríamos imaginarnos esto? En realidad, nosotros estamos familiarizados con propiedades de este tipo. A veces estamos tan familiarizados que ni siquiera nos damos cuenta. Tal es el caso de la propiedad gravitatoria que “tiene” el espacio en que vivimos (a la que cabe denominar campo gravitatorio). Podríamos decir que esta propiedad es la que nos mantiene pegados al piso, la que hace que los líquidos tengan una superficie horizontal y que cualquier objeto abandonado sin soporte mecánico se caiga. En cierto sentido, podríamos decir que el espacio está afectado por una “propiedad acechante” que afecta a todo objeto material que se encuentre bajo su influencia. Por otra parte, el campo gravitatorio debe ser

representado mediante vectores, dado que sus efectos (fuerzas ejercidas sobre los objetos materiales) poseen dirección y sentido.

El campo electrostático admite una representación análoga, donde el efecto se observa sobre los objetos que poseen carga eléctrica. Aquí nuevamente el espacio puede imaginarse como erizado de vectores al acecho¹, que esperan un objeto cargado para ejercer su influencia.

3 Líneas de campo.

Consideremos un campo vectorial genérico $\vec{A}(\vec{r})$ que se extiende sobre cierta región del espacio. Definimos una línea de campo como la curva que resulta tangente al vector campo $\vec{A}(\vec{r})$ en toda su extensión. Estas curvas responden al sistema de ecuaciones diferenciales siguiente

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z} \quad (3)$$

Las líneas de campo cumplen en general las siguientes propiedades:

a) En cada punto del espacio en que el vector campo es no nulo, pasa una y sólo una línea de campo. De esto puede concluirse que las líneas de campo no se cortan ni se bifurcan, con la posible excepción de los puntos en que el campo es nulo.

b) En cualquier región volumétrica del espacio en la que el campo es no nulo, la cantidad de líneas de campo que atraviezan la región es infinita.

En particular, cuando consideramos el campo electrostático, pueden definirse las líneas de campo electrostático como

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z} \quad (4)$$

que, por supuesto cumplen con las propiedades generales anteriores. Las ecuaciones diferenciales que definen la curva, resultan en general inabordables en forma analítica. Por tal razón suelen ser determinadas en forma numérica.

¹Esta frase poco formal, aunque altamente elocuente la tome prestada del Dr. Alsina Fuentes en su obra “El mundo de la mecánica”.

4 Campo electrostático de una carga puntual.

La ley de Coulomb provee todo lo necesario para derivar el campo electrostático producido por una carga puntual. Supongamos que cierta partícula de carga Q se encuentra rígidamente anclada en la posición \vec{r}' , y una partícula de prueba con carga q se sitúa en la posición \vec{r} donde se quiere determinar el campo. Entonces la fuerza \vec{F} que actúa sobre la partícula de prueba será

$$\vec{F} = k \frac{Qq}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (5)$$

Observando la definición (2), concluimos que el campo electrostático producido por la carga puntual Q es

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{kQ}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (6)$$

El estudiante podrá objetar que no se ha tratado cuidadosamente el límite que

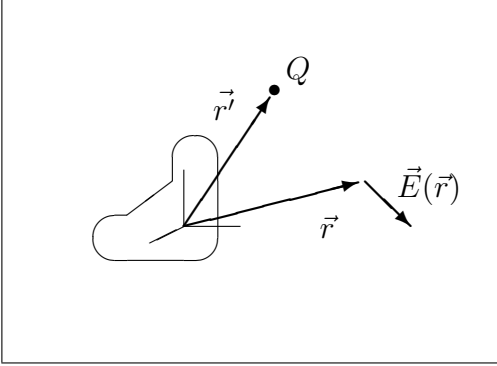


Figure 1: Esquema de los vectores involucrados en la descripción matemática del campo electrostático originado por una partícula cargada.

aparece en la definición (2). Sin embargo, no hay problemas, dado que hemos tenido la precaución de considerar a la partícula fuente del campo, “rígidamente” anclada. Por lo tanto, cualquiera sea el tamaño de la carga de prueba q , no alterará la localización de la fuente.

Ahora damos un poco de terminología. Como ya adelantamos, a las cargas que originan el campo se las llama “fuentes”. Pero dado que la carga eléctrica es una magnitud escalar, también se la suele referir como “fuentes escalares”. Además, a las posiciones \vec{r}' y \vec{r} se las llama “punto fuente” y “punto campo” respectivamente. Esta terminología no es, en principio, tan habitual, pero conviene ir acostumbrándose a ella.

5 Campo electrostático de un sistema de partículas cargadas.

El principio de superposición aporta la manera de extender el resultado (6) para el caso de un sistema de partículas cargadas. El campo electrostático $\vec{E}(\vec{r})$ en un punto \vec{r} será simplemente la suma vectorial de las contribuciones de cada partícula. Sean Q_1, Q_2, \dots, Q_N las cargas de N partículas situadas en posiciones $\vec{r}'_1, \vec{r}'_2, \dots, \vec{r}'_N$ respectivamente. Entonces

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{kQ_i}{|\vec{r} - \vec{r}'_i|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'_i}{|\vec{r} - \vec{r}'_i|} \quad (7)$$

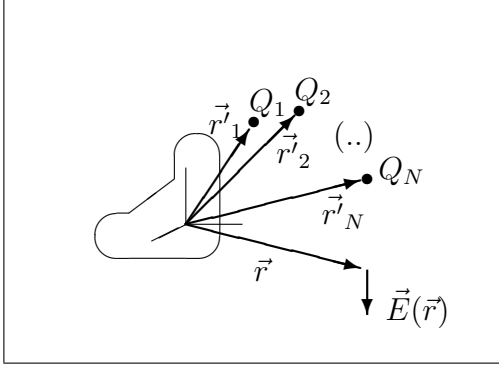


Figure 2: Esquema de los vectores involucrados en la descripción matemática del campo electrostático originado por un sistema de partículas cargadas.

6 Campo electrostático de distribuciones de carga continuas.

La ley de Coulomb y el principio de superposición también conducen a una expresión muy compacta para calcular campos electrostáticos producidos por distribuciones continuas de carga. Consideremos un sustrato material cuyos puntos forman el dominio D . Supongamos que en cada fracción elemental de dicho dominio reside una carga eléctrica dQ cuya localización se representa por \vec{r}' (punto fuente). Entonces el campo electrostático \vec{E} en una posición \vec{r} (punto campo) será

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \int_D \frac{dQ}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (8)$$

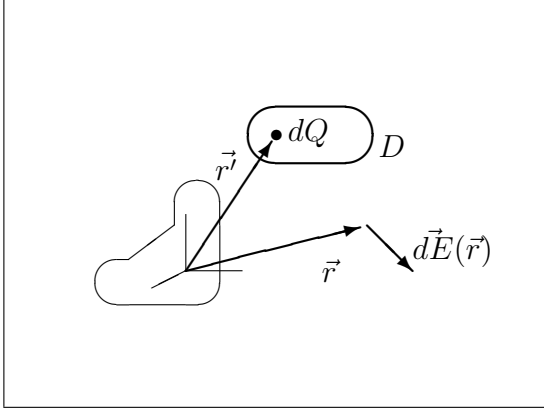


Figure 3: Esquema de los vectores involucrados en la descripción matemática del campo electrostático originado por una distribución de carga continua.

Aquí es posible introducir una versión más compacta de la integral, usando las definiciones siguientes

$$\vec{u} = \vec{r} - \vec{r}' \quad u = |\vec{r} - \vec{r}'| \quad \check{u} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (9)$$

Entonces

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \int_D \frac{dq}{u^2} \check{u} \quad (10)$$

El dominio D puede ser una curva, una superficie o un volumen. Observe que dependiendo de los casos, dq debe reemplazarse en función de la densidad correspondiente. Esto es:

- I) Si D es una curva, $dq = \lambda dl$, donde λ es una densidad lineal de carga.
- II) Si D es una superficie, $dq = \sigma ds$, donde σ es una densidad superficial de carga.
- III) Si D es un volumen, $dq = \delta dv$, donde δ es una densidad volumétrica de carga.

7 Ejemplo 1: Campo electrostático de un dipolo.

Un dipolo eléctrico admite ser modelado como dos partículas puntuales con cargas de igual valor absoluto y distinto signo, emplazadas rígidamente de modo que la distancia entre ellas se mantenga fija. Eliendo un sistema de coordenadas adecuado, supongamos que las cargas son $-Q$ y Q y sus posiciones respectivas son

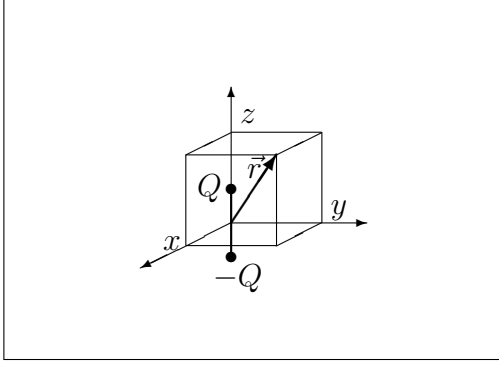


Figure 4: Esquema de un dipolo y el sistema de ejes utilizados en la resolución. Además se indica un vector que caracteriza un punto genérico del espacio, donde queremos calcular el campo electrostático.

$(0, 0, -a/2)$ y $(0, 0, a/2)$. Entonces, el campo electrostático $\vec{E}(\vec{r})$ puede calcularse por superposición de las contribuciones de ambas cargas.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{k(-Q)\left(x, y, z + \frac{a}{2}\right)}{\left[x^2 + y^2 + \left(z + \frac{a}{2}\right)^2\right]^{3/2}} + \frac{kQ\left(x, y, z - \frac{a}{2}\right)}{\left[x^2 + y^2 + \left(z - \frac{a}{2}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (11)$$

Con esto el problema puede considerarse formalmente resuelto.

Sin embargo, resulta de interés analizar el campo detectado por un observador lejano. Para el modo en que fue planteado el problema, la condición resulta

$$a \ll r \quad \rightarrow \quad \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \ll 1 \quad (12)$$

Aquí conviene introducir un vector \vec{a} con las siguientes características

$$\vec{a} = (0, 0, a) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} (0, 0, -\frac{a}{2}) = -\frac{1}{2}\vec{a} \\ (0, 0, \frac{a}{2}) = \frac{1}{2}\vec{a} \end{cases} \quad (13)$$

Comencemos por desarrollar la expresión exacta del campo para reconocer términos despreciables.

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{kQ\left(\vec{r} + \frac{1}{2}\vec{a}\right)}{\left(x^2 + y^2 + z^2 + az + \frac{a^2}{4}\right)^{3/2}} + \frac{kQ\left(\vec{r} - \frac{1}{2}\vec{a}\right)}{\left(x^2 + y^2 + z^2 - az + \frac{a^2}{4}\right)^{3/2}} \quad (14)$$

Los términos que contienen a^2 son muy pequeños en el contexto en que se encuentran, por lo que cabe despreciarlos

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{kQ\left(\vec{r} + \frac{1}{2}\vec{a}\right)}{(r^2 + az)^{3/2}} + \frac{kQ\left(\vec{r} - \frac{1}{2}\vec{a}\right)}{(r^2 - az)^{3/2}} \quad (15)$$

La siguiente operación pone los denominadores en formas adecuadas para realizar aproximaciones.

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{kQ \left(\vec{r} + \frac{1}{2} \vec{a} \right)}{r^3 \left(1 + \frac{az}{r^2} \right)^{3/2}} + \frac{kQ \left(\vec{r} - \frac{1}{2} \vec{a} \right)}{r^3 \left(1 - \frac{az}{r^2} \right)^{3/2}} \quad (16)$$

Las dos expresiones que siguen muestran aproximaciones usuales, que corresponden a desarrollos en series de Taylor cortados a primer orden.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{kQ}{r^3} \left[\frac{-\vec{r} - \frac{1}{2} \vec{a}}{1 + \frac{3az}{2r^2}} + \frac{\vec{r} - \frac{1}{2} \vec{a}}{1 - \frac{3az}{2r^2}} \right] \quad (17)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{kQ}{r^3} \left[\left(-\vec{r} - \frac{1}{2} \vec{a} \right) \left(1 - \frac{3az}{2r^2} \right) + \left(\vec{r} - \frac{1}{2} \vec{a} \right) \left(1 + \frac{3az}{2r^2} \right) \right] \quad (18)$$

Por simple aplicación de la propiedad distributiva, observamos que sobreviven los siguientes términos

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{kQ}{r^3} \left[2\vec{r} \frac{3az}{2r^2} - 2\frac{1}{2} \vec{a} \right] = \frac{kQ}{r^3} \left[\frac{3az}{r^2} \vec{r} - \vec{a} \right] \quad (19)$$

Aquí introducimos un vector \vec{p} llamado momento dipolar eléctrico de la distribución. Para un dipolo, \vec{p} es un vector de módulo Qa , dirigido según la recta que une las cargas y sentido desde la carga negativa hacia la positiva. En nuestro caso toma la forma

$$\vec{p} = (0, 0, Qa) = Q\vec{a} \quad (20)$$

Reemplazando en la expresión del campo tenemos

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{k}{r^3} \left[\frac{3pz}{r} \check{r} - \vec{p} \right] \quad (21)$$

o en una forma más compacta

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{k}{r^3} [3(\vec{p} \cdot \check{r}) \check{r} - \vec{p}] \quad (22)$$

8 Ejemplo 2: Campo electrostático sobre el eje de un anillo uniformemente cargado.

Consideremos un anillo de radio R que posee una carga total Q uniformemente distribuida. Elegimos el origen de coordenadas en el centro del anillo, y el eje z coincidente con su eje de simetría. Nuestro objetivo es encontrar el campo electrostático \vec{E} en un punto de dicho eje, cuya posición será $\vec{r} = (0, 0, z)$. La simetría

azimutal del sistema de cargas nos permite inferir que las componentes del campo perpendiculares al eje z son nulas. Entonces

$$E_x = 0 \quad E_y = 0 \quad E_z = E_z(z) \quad (23)$$

El campo electrostático se obtiene de resolver la integral tridimensional siguiente

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_D \frac{k \, dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (24)$$

donde los vectores \vec{r} y \vec{r}' escritos en componentes cartesianas y coordenadas cilíndricas

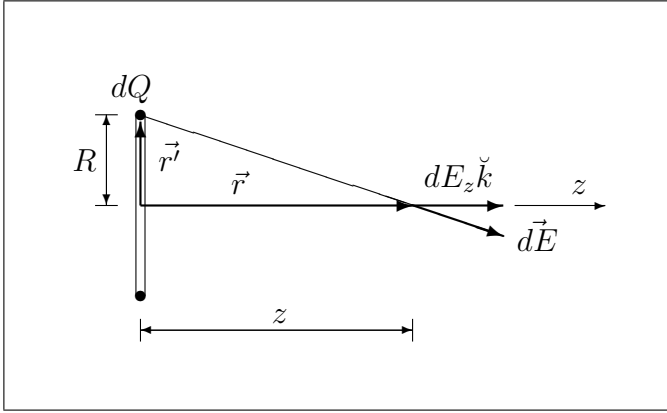


Figure 5: Esquema de referencias geométricas para hallar el campo electrostático en el eje de un anillo uniformemente cargado. El origen fue elegido en el centro del anillo.

son

$$\vec{r} = (0, 0, z) \quad \vec{r}' = (R \cos(\phi'), R \sin(\phi'), 0) \quad (25)$$

Operando con los vectores tenemos que

$$\vec{r} - \vec{r}' = (-R \cos(\phi'), -R \sin(\phi'), z) \quad |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{R^2 + z^2} \quad (26)$$

con lo que la integral toma la forma

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_D \frac{k (-R \cos(\phi'), -R \sin(\phi'), z) \, dq}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad (27)$$

Como sólo necesitamos calcular la componente E_z , tenemos

$$E_z(0, 0, z) = \int_D \frac{kz \, dq}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad (28)$$

Observando que la integral opera sobre el dominio de las variables primadas, tenemos que z es una constante para esta integración. Entonces

$$E_z(0, 0, z) = \frac{kz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \int_D dq \quad (29)$$

La integral simboliza la carga total alojada en el anillo. Entonces

$$E_z(0, 0, z) = \frac{kQz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad (30)$$

O vectorialmente

$$\vec{E}(0, 0, z) = \frac{kQz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \check{k} \quad (31)$$

9 Ejemplo 3: Extensión al caso de un disco uniformemente cargado.

Consideremos un disco de radio R que posee una carga total Q uniformemente distribuida. Utilizando el mismo escenario geométrico que en el ejemplo anterior, queremos calcular el campo electrostático en un punto del eje de simetría, situado a una distancia z del centro. Una estrategia de cálculo, consiste en pensar al disco como una colección de “coronas circulares infinitesimales”, cada una de las cuales se desarrolla entre los radios r y $r + dr$ (con $0 < r < R$). Observe que cada corona infinitesimal tiene el mismo aspecto que un anillo, por lo que podemos aprovechar el resultado (35) obtenido en la sección 8. El único cuidado consiste en escribir correctamente la expresión, teniendo en cuenta su carácter diferencial (en ambos miembros), y el radio correcto. Esto es

$$dE_z(0, 0, z) = \frac{kz dQ}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \quad (32)$$

donde dQ es la carga residente en la corona, de $dE_z(0, 0, z)$ es la contribución al campo en $(0, 0, z)$ debido a dicha corona. Para determinar dQ introducimos la densidad superficial de carga σ que, por hipótesis, es uniforme. Entonces

$$\sigma = \frac{Q}{\pi R^2} \quad dQ = 2\pi\sigma r dr \quad (33)$$

Para tener en cuenta todas las contribuciones, integramos sobre todas las coronas. Esto es

$$E_z(0, 0, z) = \int_0^R \frac{2\pi k\sigma z r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = \pi k\sigma z \int_0^R \frac{2r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \quad (34)$$

La integral ordinaria que queda se puede resolver mediante la sustitución siguiente

$$u = r^2 + z^2 \quad du = 2r dr \quad (35)$$

Reemplazando en (34) tenemos

$$E_z(0,0,z) = \pi k \sigma z \int_{u_1}^{u_2} u^{-3/2} du = \pi k \sigma z \left[-2u^{-1/2} \right]_{u_1}^{u_2} \quad (36)$$

Haciendo la sustitución inversa (y un poco de álgebra) tenemos el resultado que buscamos. Aprovechamos la expresión para agregarle el carácter vectorial mediante el versor \check{k} .

$$\vec{E}(0,0,z) = -2\pi k \sigma z \left[\frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2}} \right] \check{k} \quad (37)$$

Una versión algo más elocuente es

$$\vec{E}(0,0,z) = 2\pi k \sigma \left[\frac{z}{\sqrt{z^2}} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \check{k} \quad (38)$$

Tal vez el estudiante puede verse tentado a simplificar la raíz con el cuadrado, en el primer término del corchete. No olvide que debe tratar esta simplificación como un módulo. Ahora operamos un poco más

$$\vec{E}(0,0,z) = 2\pi k \sigma \frac{z}{|z|} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{z^2}}} \right] \check{k} \quad (39)$$

Una forma compacta de escribir la última expresión, puede obtenerse introduciendo la función signo, dada por

$$\text{sgn}(z) = \begin{cases} -1 & \text{si } z < 0 \\ 1 & \text{si } z > 0 \end{cases} \quad (40)$$

Entonces

$$\vec{E}(0,0,z) = 2\pi k \sigma \text{sgn}(z) \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{z^2}}} \right] \check{k} \quad (41)$$

Esta expresión es exacta y válida sobre todo el eje z , (tanto en valores positivos como negativos).

Una conducta muy apreciada en el tratamiento matemático de un modelo físico, consiste en desarrollar algún criterio de control sobre los resultados obtenidos. En el caso del campo electrostático, siempre que las distribuciones de carga no sean infinitamente extendidas, podemos controlar que desde muy lejos parezcan fuentes puntuales. Veamos como se hace esto. Estar muy lejos sugiere que $z \gg R$, o bien

$$\frac{R}{z} \ll 1 \quad (42)$$

En este caso conviene usar una aproximación sencilla (aunque no trivial), que proviene de desarrollos en serie de Taylor. Si $a \ll 1$, entonces se cumple que²

$$\frac{1}{\sqrt{1+a}} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}a} = 1 - \frac{1}{2}a \quad (43)$$

La aproximación puede usarse en el resultado (41), cuando analizamos el caso en que se cumple la condición (42). Entonces

$$\vec{E}(0,0,z) = 2\pi k\sigma \operatorname{sgn}(z) \left[1 - 1 + \frac{R^2}{2z^2} \right] \check{k} = 2\pi k\sigma \operatorname{sgn}(z) \frac{R^2}{2z^2} \check{k} \quad (44)$$

que con un reordenamiento sencillo se convierte en

$$\vec{E}(0,0,z) = k \left(\pi R^2 \sigma \right) \frac{\operatorname{sgn}(z)}{z^2} \check{k} = \frac{kQ \operatorname{sgn}(z)}{z^2} \check{k} \quad (45)$$

Esta expresión es exactamente el campo electrostático producido por una carga puntual situada en el origen, vista por un observador situado en el eje z . Este resultado constituye una “contrastación” de la expresión (41). Es imprescindible que esto funcione, aunque no constituye una “garantía de confiabilidad del resultado”. ¿Pero entonces para que lo hacemos? Simplemente porque si no hubiera dado correctamente, habría permitido la detección de un error en (41).

10 Ejemplo 4: Extensión al caso de un plano uniformemente cargado.

Si ahora queremos abordar el problema de un plano infinito uniformemente cargado con densidad superficial σ , podemos pensarlo simplemente como un disco de radio infinito. El resultado puede obtenerse haciendo el límite para R tendiendo a infinito en la expresión (41). Esto es

$$\vec{E}(0,0,z) = \lim_{R \rightarrow \infty} 2\pi k\sigma \operatorname{sgn}(z) \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{z^2}}} \right] \check{k} = 2\pi k\sigma \operatorname{sgn}(z) \check{k} \quad (46)$$

Recordando que la constante k puede escribirse en función de ϵ_0 , tenemos

$$\vec{E}(0,0,z) = \frac{\sigma \operatorname{sgn}(z)}{2\epsilon_0} \check{k} \quad (47)$$

²Si el lector no estuviera familiarizado con estas aproximaciones, sugerimos que al menos las compruebe en su calculadora, haciendo por ejemplo $a = 0,001$.

O en una forma alternativa

$$\vec{E}(0, 0, z) = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \check{k} & \text{si } z < 0 \\ \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \check{k} & \text{si } z > 0 \end{cases} \quad (48)$$

Este resultado tiene una nota interesante. Observe el lector que el campo electrostático calculado vale para el “eje de simetría”, pensando al plano como un gran disco. Sin embargo el plano tiene una simetría mayor que el disco, por lo que pierde sentido pensar en un único eje de simetría. En tal caso podríamos decir que cualquier recta perpendicular al plano es un eje de simetría, y por tanto el resultado (53) es válido en todas partes. Así tenemos que

$$\vec{E}(x, y, z) = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \check{k} & \text{si } z < 0 \\ \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \check{k} & \text{si } z > 0 \end{cases} \quad (49)$$

11 Ejemplo 5: Campo electrostático de un hilo uniformemente cargado.

Consideremos un hilo recto de longitud l , sobre el cual reside una carga eléctrica Q uniformemente distribuida. Nos proponemos determinar el campo electrostático $\vec{E}(\vec{r})$ en todas partes. Comencemos por reconocer que la simetría azimutal de la distribución de carga sugiere el uso de coordenadas cilíndricas ρ, ϕ, z . Analizando dicha simetría, concluimos que las componentes del campo deben ser de la forma

$$E_\rho = E_\rho(\rho, z) \quad E_\phi = 0 \quad E_z = E_z(\rho, z) \quad (50)$$

Observando que la carga se encuentra sobre un soporte lineal, el cálculo de las componentes del campo puede hacerse mediante la integral siguiente

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_C \frac{k\lambda \, dl}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (51)$$

donde

$$\lambda = \frac{Q}{l} \quad y \quad dl = dz' \quad (52)$$

mientras que los vectores \vec{r} y \vec{r}' en componentes cartesianas expresadas en coordenadas cilíndricas son

$$\vec{r} = (\rho \cos(\phi), \rho \sin(\phi), z) \quad \vec{r}' = (0, 0, z') \quad (53)$$

Operando con los vectores tenemos que

$$\vec{r} - \vec{r'} = (\rho \cos(\phi), \rho \sin(\phi), z - z') \quad |\vec{r} - \vec{r'}| = \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2} \quad (54)$$

Entonces la integral toma la forma

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_{x'_1}^{x'_2} \frac{k\lambda (\rho \cos(\phi), \rho \sin(\phi), z - z') dz'}{[\rho^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \quad (55)$$

donde z'_1 y z'_2 son los límites de integración sobre el parámetro z' , que satisfacen $z'_2 - z'_1 = l$. Observe que la última expresión constituye una integral vectorial, que puede descomponerse en tres integrales escalares, de las cuales sólo hay que resolver dos. Ellas son

$$a) \quad E_\rho(\rho, z) = k\lambda \rho \int_{z'_1}^{z'_2} \frac{dz'}{[\rho^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \quad (56)$$

$$b) \quad E_z(\rho, z) = k\lambda \int_{z'_1}^{z'_2} \frac{(z - z') dz'}{[\rho^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \quad (57)$$

La resolución de estas integrales nos permite alcanzar el objetivo planteado. Nótese que (56) y (57) son integrales ordinarias en el dominio unidimensional de la variable z' , a diferencia de (55) que simboliza una integral vectorial.

a) Para resolver la primera integral, comenzamos por reescribirla como sigue

$$E_\rho(\rho, z) = \frac{k\lambda}{\rho} \int_{z'_1}^{z'_2} \frac{\frac{dz'}{\rho}}{\left[1 + \left(\frac{z-z'}{\rho}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (58)$$

Luego proponemos la siguiente sustitución trigonométrica

$$\frac{z - z'}{\rho} = \operatorname{tg}(u) \quad \rightarrow \quad -\frac{dz'}{\rho} = \frac{du}{\cos^2(u)} \quad (59)$$

con lo que la integral toma la forma

$$E_\rho(\rho, z) = -\frac{k\lambda}{\rho} \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{[1 + \operatorname{tg}^2(u)]^{3/2} \cos^2(u)} \quad (60)$$

Utilizando identidades trigonométricas tenemos

$$1 + \operatorname{tg}^2(u) = 1 + \frac{\sin^2(u)}{\cos^2(u)} = \frac{\cos^2(u) + \sin^2(u)}{\cos^2(u)} = \frac{1}{\cos^2(u)} \quad (61)$$

Reemplazando, podemos resolver la integral

$$E_\rho(\rho, z) = -\frac{k\lambda}{\rho} \int_{u_1}^{u_2} \cos(u) du = -\frac{k\lambda}{\rho} [\sin(u_2) - \sin(u_1)] \quad (62)$$

Ahora recordamos una identidad trigonométrica no tan conocida

$$\sin(u) = \frac{tg(u)}{\sqrt{1 + tg^2(u)}} \quad (63)$$

Utilizándola tenemos

$$\sin(u) = \frac{\frac{z-z'}{\rho}}{\sqrt{1 + \left(\frac{z-z'}{\rho}\right)^2}} = \frac{z-z'}{\sqrt{\rho^2 + (z-z')^2}} \quad (64)$$

con lo que el resultado final toma la forma

$$E_\rho(\rho, z) = \frac{k\lambda}{\rho} \left[\frac{z-z'_1}{\sqrt{\rho^2 + (z-z'_1)^2}} - \frac{z-z'_2}{\sqrt{\rho^2 + (z-z'_2)^2}} \right] \quad (65)$$

b) La integral(??) es mucho más sencilla que la anterior. La transcribimos simplemente para tenerla presente

$$E_z(\rho, z) = k\lambda \int_{z'_1}^{z'_2} \frac{(z-z') dz'}{[\rho^2 + (z-z')^2]^{3/2}} \quad (66)$$

Para resolverla proponemos la sustitución

$$u = \rho^2 + (z-z')^2 \quad \rightarrow \quad du = -2 (z-z') dz' \quad (67)$$

Entonces reemplazamos y resolvemos

$$E_z(\rho, z) = -\frac{k\lambda}{2} \int_{u_1}^{u_2} u^{-3/2} du = k\lambda \left[u_2^{-1/2} - u_1^{-1/2} \right] \quad (68)$$

Luego, el resultado final es

$$E_z(\rho, z) = k\lambda \left[\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z-z'_2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z-z'_1)^2}} \right] \quad (69)$$

Así completamos la resolución de las integrales. Las transcribimos reemplazando la densidad en función de los datos Q y l .

$$\begin{cases} E_\rho(\rho, z) = \frac{kQ}{\rho l} \left[\frac{z-z'_1}{\sqrt{\rho^2 + (z-z'_1)^2}} - \frac{z-z'_2}{\sqrt{\rho^2 + (z-z'_2)^2}} \right] \\ E_z(\rho, z) = \frac{kQ}{l} \left[\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z-z'_2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z-z'_1)^2}} \right] \end{cases} \quad (70)$$

Pero aún sobrevive una dificultad. La primera de las integrales se indetermina para $\rho = 0$. Para encontrar el límite, comenzamos por buscar una aproximación para pequeños valores de ρ . Para ello reescribimos E_ρ en la forma siguiente

$$E_\rho(\rho, z) = \frac{kQ}{\rho l} \left[\frac{\text{sgn}(z - z'_1)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{z - z'_1}\right)^2}} - \frac{\text{sgn}(z - z'_2)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{z - z'_2}\right)^2}} \right] \quad (71)$$

Luego aproximamos las raíces

$$E_\rho(\rho, z) = \frac{kQ}{\rho l} \left\{ \text{sgn}(z - z'_1) \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{z - z'_1} \right)^2 \right] - \text{sgn}(z - z'_2) \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{z - z'_2} \right)^2 \right] \right\} \quad (72)$$

con lo que operando obtenemos

$$E_\rho(\rho, z) = \frac{kQ}{l} \left\{ \frac{\text{sgn}(z - z'_1) - \text{sgn}(z - z'_2)}{\rho} - \frac{\rho}{2} \left[\frac{\text{sgn}(z - z'_1)}{(z - z'_1)^2} - \frac{\text{sgn}(z - z'_2)}{(z - z'_2)^2} \right] \right\} \quad (73)$$

Con este resultado estamos en condiciones de hacer el límite

$$E_\rho(0, z) = \lim_{\rho \rightarrow 0} E_\rho(\rho, z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < z'_1 \\ \rightarrow \infty & \text{si } z'_1 < z < z'_2 \\ 0 & \text{si } z'_2 < z \end{cases} \quad (74)$$

Para completar el análisis, observemos el límite análogo para E_z .

$$E_z(0, z) = \frac{kQ}{l} \left[\frac{1}{\sqrt{(z - z'_2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(z - z'_1)^2}} \right] \quad (75)$$

que puede reescribirse como

$$E_z(0, z) = \frac{kQ}{l} \left[\frac{1}{|z - z'_2|} - \frac{1}{|z - z'_1|} \right] \quad (76)$$

12 Ejemplo 6: Extensión al caso de un hilo infinito.

El resultado (71) puede extenderse al caso en que el hilo se hace infinitamente largo, mediante el procedimiento que describimos a continuación. En primer lugar,

hacemos $z'_1 = -a$ y $z'_2 = a$, donde a es una constante positiva medida en unidades de longitud. Entonces, las expresiones (71) toman la forma

$$\begin{cases} E_\rho(\rho, z) = \frac{k\lambda}{\rho} \left[\frac{z+a}{\sqrt{\rho^2+(z+a)^2}} - \frac{z-a}{\sqrt{\rho^2+(z-a)^2}} \right] \\ E_z(\rho, z) = k\lambda \left[\frac{1}{\sqrt{\rho^2+(z+a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2+(z-a)^2}} \right] \end{cases} \quad (77)$$

Ahora buscamos la forma que adquieren estas expresiones en $z = 0$ (es decir, a la altura de la mitad del hilo), para cualquier valor de ρ . Así tenemos

$$\begin{cases} E_\rho(\rho, 0) = \frac{k\lambda}{\rho} \left[\frac{a}{\sqrt{\rho^2+a^2}} - \frac{-a}{\sqrt{\rho^2+a^2}} \right] \\ E_z(\rho, 0) = k\lambda \left[\frac{1}{\sqrt{\rho^2+a^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2+a^2}} \right] \end{cases} \quad (78)$$

De esto se concluye que la componente E_z en $z = 0$ es nula para todo valor de ρ . Pero como a nosotros nos interesa el caso en que el hilo es infinito, analizamos la situación en que $a \gg \rho$. Así tendremos

$$\begin{cases} E_\rho(\rho, 0) = \frac{k\lambda}{\rho} \left[\frac{a}{\sqrt{a^2}} - \frac{-a}{\sqrt{a^2}} \right] \\ E_z(\rho, 0) = 0 \end{cases} \quad (79)$$

Entonces el comportamiento para grandes valores de a será

$$\begin{cases} E_\rho(\rho, 0) = \frac{2k\lambda}{\rho} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho} \\ E_z(\rho, 0) = 0 \end{cases} \quad (80)$$

En particular si a tiende a infinito, las expresiones (80) quedan habilitadas para todo valor de ρ . También puede observarse que un deslizamiento del origen a lo largo del eje z no alterará el resultado, por lo que (80) también está habilitada para todo valor de la coordenada z . Entonces, la forma vectorial compacta de este resultado será

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{2k\lambda}{\rho} \check{\rho} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho} \check{\rho} \quad (81)$$

Capítulo 3

Ley de Gauss. Simetrías.

1 Concepto de flujo de un campo vectorial.

El concepto de “flujo de un campo vectorial a través de una superficie” tiene una definición matemática estricta, pero la diversidad de ejemplos físicos permite una comprensión intuitiva bastante accesible. Comencemos por definir rigurosamente. En primer lugar, supongamos que un campo vectorial $\vec{A}(\vec{r})$ existe en cierta región del espacio. Supongamos además que en dicha región definimos una superficie simple imaginaria¹, y elegimos una de sus caras para caracterizar su orientación. Luego nos imaginamos un mallado que subdivida la superficie en fragmentos diferencialmente pequeños. Sobre cada uno de ellos definimos un vector \vec{ds} cuyo módulo coincide con el área del fragmento de superficie, su dirección es perpendicular al elemento (y por tanto perpendicular a la superficie), y su sentido es saliente de la cara elegida cuando se orientó la superficie. Entonces, el flujo $\Phi_{\vec{A}S}$ del campo vectorial $\vec{A}(\vec{r})$ a través de la superficie orientada S se define como

$$\Phi_{\vec{A}S} = \int_S \vec{A} \cdot \vec{ds} \quad (1)$$

Recordando que una integral representa la suma de contribuciones diferenciales, podemos interpretar la definición como sigue. En el mallado de la superficie, nos situamos sobre uno de los elementos, y sobre él identificamos los vectores \vec{A} y \vec{ds} . Luego efectuamos el producto escalar $\vec{A} \cdot \vec{ds}$ correspondiente al elemento elegido y el resultado (escalar) lo guardamos. Pasamos a otro elemento y repetimos el procedimiento. Así sucesivamente hasta recorrer todos los elementos de la superficie. Finalmente, sumamos todos estos resultados parciales para obtener el flujo.

Aquí conviene hacer hincapié en que el símbolo de integración, a pesar de ser gráficamente análogo, no representa una integral ordinaria, sino una integral de superficie. Este tipo de integrales requieren en general, técnicas especiales de resolución, que nosotros sólo abordaremos en casos de extrema simplicidad.

¹Descartamos aquí superficies con propiedades topológicas complejas, como aquellas que se cortan a sí mismas, o las que se cierran en forma extraña como las cintas de Moebius.

2 Flujo del campo electrostático.

En este curso, el concepto de flujo será muy recurrente, debido a la diversidad de campos vectoriales que se utilizan para la debida descripción de la teoría electromagnética. Aquí va nuestro primer ejemplo. El flujo del campo electrostático $\vec{E}(\vec{r})$ a través de la superficie orientada S será

$$\Phi_{\vec{E}S} = \int_S \vec{E} \cdot \vec{ds} \quad (2)$$

Aquí conviene remarcar que el flujo de un campo vectorial requiere siempre una doble especificación. Uno debe consignar cuál es el campo vectorial (en este caso el campo electrostático \vec{E}), y sobre que superficie orientada S se lo calcula. De estas especificaciones surge la notación que proponemos, que para este caso se subindica $\vec{E}S$.

Por otra parte, cabe observar que el flujo es una magnitud escalar, que puede tomar valores positivos y negativos. Una interpretación intuitiva del signo del flujo (aunque no estricta) puede elaborarse de la siguiente manera. Si el flujo es positivo, podemos imaginar que, predominantemente, los vectores \vec{E} y \vec{ds} están del mismo lado de la superficie. Análogamente tendremos valores negativos de flujo cuando los vectores \vec{E} y \vec{ds} queden, predominantemente, uno a cada lado de la superficie².

3 Ejemplo de cálculo de flujo.

Consideremos el campo electrostático producido por un hilo recto infinito, con densidad lineal de carga uniforme λ . Según hemos visto, si el hilo se encuentra sobre el eje z , el campo $\vec{E}(\vec{r})$ viene dado por

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho} \check{\rho} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\sqrt{x^2+y^2}} \frac{(x, y, 0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{(x, y, 0)}{(x^2+y^2)} \quad (3)$$

donde la segunda expresión no es más que la traducción en componentes y coordenadas cartesianas.

Como ejemplo, proponemos calcular el flujo del campo electrostático $\vec{E}(\vec{r})$ a través de una superficie cuadrada de lado l , situada como indica la figura. En este contexto, los vectores \vec{ds} tienen la forma siguiente

$$\vec{ds} = dy dz \check{i} = dy dz (1, 0, 0) \quad (4)$$

²Lo que hace imprecisa la interpretación es la palabra “predominantemente”. Esta palabra se utiliza para indicar que sobre la superficie, puede haber zonas donde el campo E esté a un lado de S , y otras zonas en que ocurra lo contrario. Entonces el signo del flujo corresponderá al comportamiento dominante.

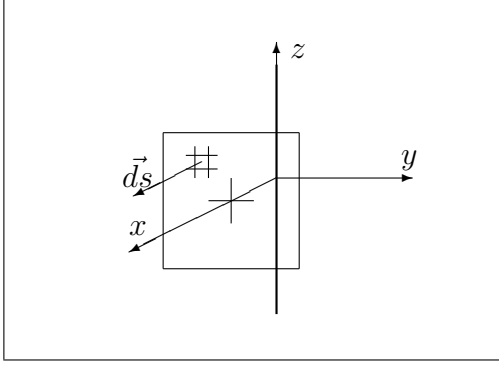


Figure 1: Esquema de un hilo recto infinitamente largo sobre el eje z , y una superficie cuadrada paralela al plano $x-z$ centrada en un punto del eje x .

Así tenemos todos los ingredientes para resolver la integral (2). Por simplicidad mantendremos la notación x para indicar la coordenada correspondiente a la localización de la superficie. Entonces tenemos que

$$\Phi_{\vec{E}S} = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_S \frac{\lambda(x, y, 0)}{2\pi\epsilon_0(x^2 + y^2)} \cdot dy dz \quad (1, 0, 0) \quad (5)$$

Resolviendo el producto escalar y agregando los límites de integración, tenemos

$$\Phi_{\vec{E}S} = \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\lambda x dy dz}{2\pi\epsilon_0(x^2 + y^2)} = \frac{\lambda x}{2\pi\epsilon_0} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dy}{x^2 + y^2} \int_{-l/2}^{l/2} dz \quad (6)$$

La segunda integral es de resolución inmediata, mientras que la primera puede escribirse en un formato conocido

$$\Phi_{\vec{E}S} = \frac{\lambda l}{2\pi\epsilon_0} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dy}{x \left[1 + \left(\frac{y}{x} \right)^2 \right]} \quad (7)$$

Esta integral admite la sustitución siguiente

$$u = \frac{y}{x} \quad \rightarrow \quad du = \frac{dy}{x} \quad (8)$$

con lo que se obtiene

$$\Phi_{\vec{E}S} = \frac{\lambda l}{2\pi\epsilon_0} \int_{-l/2x}^{l/2x} \frac{du}{1 + u^2} = \frac{\lambda l}{2\pi\epsilon_0} \left[\arctg\left(\frac{l}{2x}\right) - \arctg\left(-\frac{l}{2x}\right) \right] \quad (9)$$

Observando que el arcotangente es una función impar obtenemos el resultado final

$$\Phi_{\vec{E}S} = \frac{\lambda l}{\pi\epsilon_0} \arctg\left(\frac{l}{2x}\right) \quad (10)$$

4 Ley de Gauss.

Consideremos una región del espacio en la que existe un campo electrostático $\vec{E}(\vec{r})$ y sus fuentes (cargas eléctricas estáticas), descritas mediante una densidad volumétrica $\delta(\vec{r}')$. Ahora elegimos una superficie cerrada imaginaria cualquiera S que limita un volumen V . Elegimos la orientación de la superficie S de modo que sus vectores normales \vec{ds} resulten exteriores. Entonces el flujo del campo electrostático \vec{E} a través de la superficie cerrada S es proporcional a la carga Q_{RS} residente en el volumen V limitado por dicha superficie. Esto es

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \delta \, dv \quad (11)$$

donde la constante ϵ_0 vale

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8,842 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2} \quad (12)$$

Teniendo en cuenta la notación introducida para flujos, podemos escribir una expresión de bolsillo equivalente

$$\Phi_{\vec{E}S} = \frac{Q_{RS}}{\epsilon_0} \quad (13)$$

La ley de Gauss es una de las ecuaciones integrales del campo electrostático, y su aplicabilidad es universal. Esto es, no tiene restricciones para su aplicación en electrostática. Sin embargo, no constituye en general una herramienta que, por si misma, permita determinar el campo electrostático a partir de la distribución de fuentes. Sólo si la distribución es altamente simétrica, la ley de Gauss puede proveer una técnica de cálculo viable a tal fin. Nosotros abordaremos esta técnica, después de discutir algunos conceptos relacionados con la simetría. Por el momento daremos algunas aplicaciones directas para ilustrar el uso de la ley de Gauss en relación con los flujos.

5 Ejemplo de aplicación de la ley de Gauss.

Consideremos un cuerpo cúbico de lado l que aloja una carga total Q uniformemente distribuida en su volumen. Supongamos que el origen de coordenadas lo elegimos coincidente con el centro del cubo. Nos proponemos calcular el flujo del campo electrostático a través de las superficies siguientes.

- a) Una superficie esférica S_a , de radio $3l/8$ centrada en el origen.

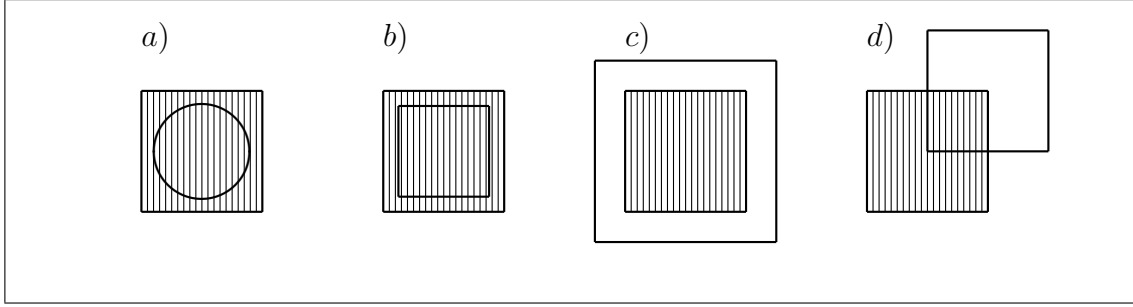


Figure 2: Esquema de una distribución de carga uniformemente distribuida en un sustrato cúbico. En la secuencia se muestran cuatro superficies cerradas que abarcan distintas porciones de la carga. El flujo del campo electrostático a través de cada superficie puede determinarse mediante la ley de Gauss.

- b) Una superficie cúbica S_b , de lado $3l/4$ centrada en el origen.
- c) Una superficie cúbica S_c , de lado $3l/2$ centrada en el origen.
- d) Una superficie cúbica S_d , de lado l con un vértice en el origen.

En primer lugar observemos que la densidad volumétrica de carga δ es constante, y vale

$$\delta = \frac{Q}{l^3}. \quad (14)$$

La estrategia para obtener el flujo del campo \vec{E} producido por la distribución, consiste en determinar la cantidad de carga “encerrada” dentro de cada superficie. En los casos *a* y *b*, los volúmenes limitados por las superficies están completamente ocupados por la distribución de carga. Entonces tenemos que

$$\Phi_{\vec{E}S_a} = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{27}{512} \frac{l^3 \delta}{\epsilon_0} = \frac{9\pi Q}{128 \epsilon_0} \quad (15)$$

$$\Phi_{\vec{E}S_b} = \frac{27}{64} \frac{l^3 \delta}{\epsilon_0} = \frac{27}{64} \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (16)$$

Por su parte, la superficie S_c contiene toda la carga de la distribución en el volumen que ella limita. Por último, la superficie S_d contiene la octava parte de la carga total. Entonces tenemos

$$\Phi_{\vec{E}S_c} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (17)$$

$$\Phi_{\vec{E}S_d} = \frac{Q}{8 \epsilon_0} \quad (18)$$

Observe el lector, que la ley de Gauss nos ha permitido el cálculo de los respectivos flujos “sin calcular” el campo \vec{E} (que dicho sea de paso, no es nada fácil de calcular para esta distribución).

6 Relación entre líneas de campo y fuentes.

La Ley de Gauss permite el análisis de la relación que existe entre las líneas de campo electrostático y las cargas (fuentes escalares) que le dan origen a dicho campo. Comencemos por imaginar una carga puntual y una superficie esférica imaginaria centrada en ella. Si la carga es positiva y la esfera suficientemente pequeña, el campo electrostático sobre la superficie estará representado por vectores exteriores a la misma. En cierto modo, pensando en la orientación de las líneas de campo, podríamos decir que ellas “salen” de la superficie esférica. Por extensión, podríamos decir que “nacen” en la carga positiva.

El mismo análisis es válido para cargas negativas, aunque las mismas representarán el punto de finalización de la línea de campo. En conclusión, decimos que las líneas de campo se inician en cargas positivas y terminan en cargas negativas.

Supongamos ahora que cierta superficie cerrada no posee cargas eléctricas en su interior. Entonces dentro de ella no se inician ni terminan líneas de campo. En otras palabras, si una línea de campo cruza la superficie en un punto en sentido entrante, necesariamente debe cruzarla otra vez (por supuesto, en otro punto) en sentido saliente³.

Algunos autores suelen referirse a esta propiedad diciendo que si en el interior de una superficie cerrada no residen cargas eléctricas, entonces habrá tantas líneas de campo entrantes como salientes. En apariencia este enunciado parece ser una buena síntesis de la propiedad presentada anteriormente. Sin embargo, no es apropiado considerar cuantitativamente a las líneas de campo, dado que cualquiera sea el tamaño de la superficie, siempre habrá una cantidad infinita de ellas que la atraviezan. En tal caso conviene decir que cada línea de campo que “entra” en la superficie también “sale” de la misma.

7 Simetría de distribuciones y campos.

Las propiedades integrales de los campos, como la ley de Gauss y otras que trataremos más adelante, constituyen una herramienta de cálculo muy práctica para ciertos casos en que las fuentes del campo tienen alta simetría. Pero esto sólo es un pretexto para introducir algunas ideas sobre simetría que, como seguramente el estudiante podrá apreciar, exceden ampliamente al tema que aquí tratamos. La intención es promover la creatividad operativa, en detrimento de tediosos cálculos formales, a la vez que intentamos generar criterios de control simples y eficaces.

³Esta conclusión falla en los casos especiales en que existen puntos de campo nulo en el volumen limitado por la superficie cerrada. Estos casos especiales serán tratados más adelante.

Comencemos reconociendo una propiedad más que evidente. Cuando una distribución de fuentes se traslada o cambia de orientación sin modificar su forma, el campo asociado a ella se traslada o rota con ella. Los ejemplos son muy elocuentes. La tierra lleva consigo los campos magnético y gravitatorio que genera. Evidencia de ello es que las brújulas de los marinos siguen apuntando al norte, mientras que las plomadas de los albañiles siguen apuntando hacia abajo, tanto en invierno como en verano, y tanto de día como de noche. Un ejemplo más cotidiano lo representan los imanes. Cuando alguien compra un imán, en realidad está interesado en su campo magnético, el cual “viaja” junto con el imán a todas partes. En cierto modo podríamos decir que el campo está “atado” a las fuentes que lo originan⁴.

Ahora centremos la atención en cuestiones geométricas. Comencemos por imaginar un cuerpo sólido sobre el que reside una distribución de cargas. Cualquier cambio de lugar u orientación del cuerpo puede pensarse como una secuencia de rotaciones y traslaciones. Pero en ciertas circunstancias, el movimiento del cuerpo lo sitúa de modo que la distribución de cargas es idéntica a la que había originalmente. Como ejemplo imaginemos una pieza cuadrada que posee cargas puntuales positivas idénticas en sus vértices. Si la misma rota en un ángulo $\alpha = \pi/2$ alrededor de un eje que pasa por el centro del cuadrado, y es perpendicular al plano que lo contiene (ver figura), el aspecto de la distribución rotada coincide con la forma original. En ese caso decimos que la distribución de cargas tiene una “simetría de rotación”. Además decimos que el eje mencionado es un “eje de simetría” de la distribución.

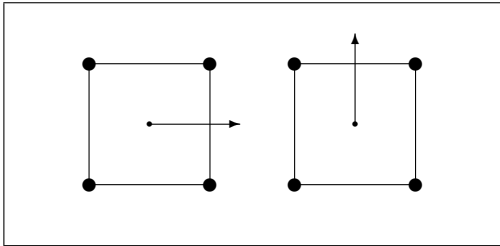


Figure 3: Esquema de cuatro cargas puntuales idénticas situadas en los vértices de un cuadrado. Si el sistema se rota en $\pi/2$ alrededor de un eje perpendicular al plano del cuadrado que pasa por su centro, la figura rotada coincide con la original.

El paso siguiente consiste en preguntarnos por el campo electrostático asociado a la distribución. Es evidente que si las distribuciones original y rotada son indistinguibles, los campos que generan también lo serán. Entonces la simetría de la distribución de fuentes se observa también en el campo que ella genera.

Un razonamiento análogo puede hacerse para el caso de traslaciones, aunque sólo se observará simetría (en sentido estricto) cuando las distribuciones sean infinitamente extendidas. Por tanto, este tipo de simetría sólo será admitida en el mundo de los modelos.

⁴Veremos más adelante que esto no siempre es así. Podríamos decir en forma algo más precisa, que esta propiedad asiste a los campos estáticos, como es el caso del campo electrostático, y los otros mencionados en los ejemplos. Más adelante trataremos los campos dependientes del tiempo donde las cosas son diferentes.

Volvamos al ejemplo del cuadrado. ¿Qué nos puede decir la simetría acerca del campo? Veamos un modo posible de análisis. Supongamos que un sistema

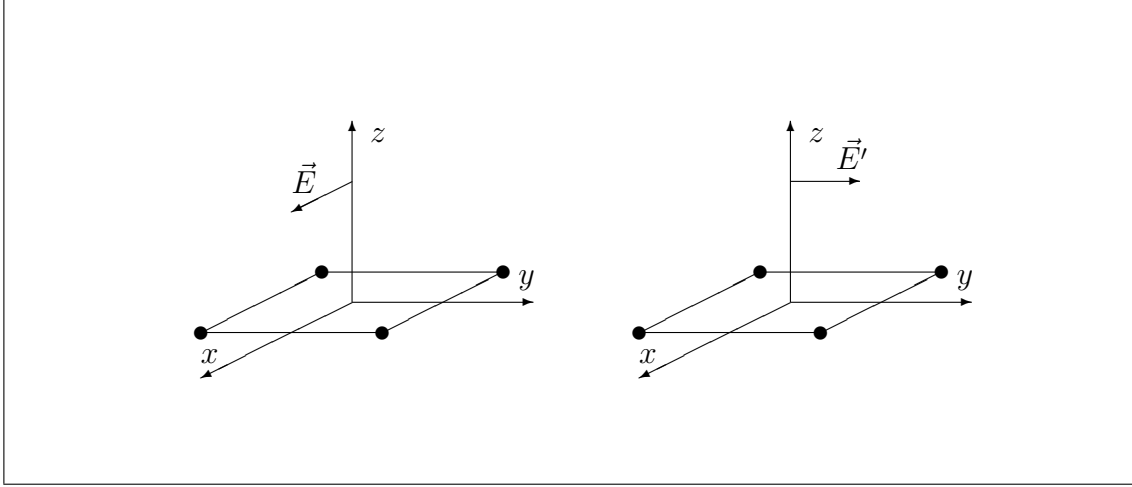


Figure 4: En el esquema se representa la misma distribución de cargas de la figura 7, en las dos posiciones indicadas en dicha figura. Aquí se muestra el campo hipotético sobre el eje z , y su forma rotada, incompatibles con la indistinguibilidad derivada de la simetría.

de coordenadas cartesianas se sitúa como indica la figura 7, y estamos interesados en saber “algo” respecto del campo electrostático sobre el eje z . En principio, no sabemos la orientación del campo, por lo que aventuramos que el mismo apunta en el sentido positivo del eje x (primera figura). Luego rotamos la distribución un ángulo $\alpha = \pi/2$ alrededor del eje z (segunda figura). Observemos dos detalles

a) Como el campo está “atado” a la distribución, debe girar con ella, por lo que quedará apuntando en la dirección del eje y .

b) Como z es un eje de simetría, la distribución rotada es idéntica a la original. por lo que debe producir exactamente el mismo campo.

Las dos afirmaciones resultan incompatibles, por lo que concluimos que nuestra hipótesis es errónea. Por lo tanto el campo electrostático no podrá tener componente x . El mismo análisis cabe para la componente y , por lo que concluimos que

$$\vec{E}(0, 0, z) = E_z(z) \check{k} \quad (19)$$

Observe que la simetría no permitió la determinación del campo, pero a través de este análisis pudimos determinar dos de las tres componentes. Este tipo de tratamiento es indispensable antes de utilizar la ley de Gauss como recurso para la determinación de un campo.

8 Distribuciones con simetría esférica.

Una distribución de carga con simetría esférica, es aquella en que la densidad de carga $\delta(\vec{r})$ depende exclusivamente de la distancia a un centro. Si elegimos como origen de coordenadas a dicho centro, y utilizamos coordenadas esféricas, tenemos que

$$\delta = \delta(r') \quad (20)$$

Para analizar la simetría del campo generado por la distribución, consideremos un punto P cualquiera (que no sea el origen), cuya distancia al origen es r . La recta determinada por P y el origen, es un eje de simetría de la distribución. Entonces en P sólo sobrevive la componente en la dirección del eje, es decir la componente radial. Por otra parte, cualquier rotación de la distribución debe mantener inalterable el campo en P , por lo que todos los puntos que se encuentren sobre una superficie esférica de radio r centrada en el origen, tendrán la misma componente radial del campo \vec{E} . Esto nos permite caracterizar al campo electrostático como

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r) \check{r} \quad (21)$$

Esta conclusión es de crucial importancia para que la ley de Gauss pueda funcionar como recurso para la determinación del campo electrostático. Nótese que la simetría nos permitió determinar ya dos de las tres componentes esféricas del campo

$$E_\theta(\vec{r}) = E_\phi(\vec{r}) = 0 \quad (22)$$

Veamos ahora como hacer la determinación de $E_r(\vec{r})$. Estamos interesados en conocer la componente radial en el punto P situado en \vec{r} , por lo que la distancia al centro es r (coordenada radial). Siempre existe una superficie esférica S centrada en el origen, que pasa por P , cuyo radio es r . ¿Qué nos dice la ley de Gauss? Transcribimos la expresión (11)

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \delta dv \quad (23)$$

donde V es el volumen limitado por S , \vec{E} es de la forma (21), δ viene dada por (20) y los diferenciales involucrados son

$$\vec{ds} = ds \check{r} \quad y \quad dv = 4\pi r'^2 dr' \quad (24)$$

Note que la variable r' recorre todo el dominio entre 0 y r , para cubrir todo el volumen V . Entonces tenemos

$$\oint_S E_r(r) \check{r} \cdot ds \check{r} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r \delta(r') 4\pi r'^2 dr' \quad (25)$$

En la primera integral podemos observar que el producto escalar opera entre dos versores iguales. Entonces

$$\check{r} \cdot \check{r} = 1 \quad (26)$$

En la misma integral, observemos además que, a pesar que r es una variable, en el dominio de integración constituido por la superficie S , todos los puntos involucrados tienen la “misma” coordenada r . Por tanto, la componente $E_r(r)$ es constante a los fines de esta integración. Entonces

$$E_r(r) \oint_S ds = \frac{4\pi}{\epsilon_0} \int_0^r r'^2 \delta(r') dr' \quad (27)$$

La integral de superficie representa el área de la superficie esférica de radio r , por lo que tenemos

$$E_r(r) 4\pi r^2 = \frac{4\pi}{\epsilon_0} \int_0^r r'^2 \delta(r') dr' \quad (28)$$

Finalmente

$$E_r(r) = \frac{1}{\epsilon_0 r^2} \int_0^r r'^2 \delta(r') dr' \quad (29)$$

Este análisis es válido para todas las distribuciones de carga cuya densidad volumétrica tiene simetría esférica. Sin embargo, algunas veces conviene trabajar con una expresión equivalente, que puede resultar más intuitiva

$$E_r(r) = \frac{Q_{RS}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (30)$$

donde Q_{RS} representa la carga residente en el volumen V interior a la superficie S .

9 Ejemplo de aplicación.

Consideremos una esfera de radio R con carga Q uniformemente distribuida en su volumen. Su densidad constante será

$$\delta_0 = \frac{3Q}{4\pi R^3} \quad (31)$$

Supongamos primero que $r < R$, por lo que la superficie esférica imaginaria utilizada para aplicar la ley de Gauss está dentro de la región de cargas. Aplicamos (29) observando que δ es constante. Entonces

$$E_r(r) = \frac{\delta_0}{\epsilon_0 r^2} \int_0^r r'^2 dr' \quad (32)$$

Resolviendo la integral tenemos

$$E_r(r) = \frac{\delta_0}{\epsilon_0} \frac{r^3}{r^2} \frac{1}{3} \quad (33)$$

Reemplazando δ_0 por (31) y simplificando obtenemos

$$E_r(r) = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \quad (34)$$

Ahora tratamos el caso $r > R$. Aquí observamos que toda la carga de la distribución queda dentro de la superficie gaussiana. Por tanto conviene utilizar (30), haciendo que $Q_{RS} = Q$. Entonces

$$E_r(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (35)$$

El resultado final del problema se obtiene combinando (34) y (36), confiriéndole carácter vectorial

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{r} & \text{si } r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{r} & \text{si } r > R \end{cases} \quad (36)$$

10 Distribuciones con simetría cilíndrica.

Los sistemas con simetría cilíndrica sólo existen en el mundo de los modelos, ya que se trata de objetos infinitamente largos. Entonces comencemos por imaginar una distribución de carga que se extiende infinitamente a lo largo del eje z . Utilizando coordenadas cilíndricas ρ, ϕ, z , decimos que la distribución tiene simetría cilíndrica cuando la densidad volumétrica de carga es sólo función de la coordenada ρ .

$$\delta(\vec{r}') = \delta(\rho') \quad (37)$$

Analicemos ahora la simetría del campo electrostático. Para ello elegimos un punto P cualquiera que no pertenezca al eje z , y trazamos una recta que corte perpendicularmente al eje z pasando por P . Ahora tratemos de convencernos que dicha recta es un eje de simetría. Para ello observemos simplemente que si rotamos la distribución en un ángulo $\alpha = \pi$ alrededor de la recta, el aspecto de la distribución rotada coincide exactamente con el aspecto original. Entonces podemos concluir que la única componente no nula del campo es E_ρ . Por otra parte, desplazamientos de la distribución a lo largo del eje z , o rotaciones de cualquier ángulo alrededor del

mismo, no alteran el campo en P . Por lo tanto, la componente E_ρ es la misma sobre una superficie cilíndrica de radio ρ centrada en el eje z . En otras palabras, E_ρ sólo depende de la coordenada ρ . Entonces

$$\begin{aligned} E_\rho &= E_\rho(\rho) \\ E_\phi &= 0 \\ E_z &= 0 \end{aligned} \quad (38)$$

O en forma vectorial

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_\rho(\rho) \check{\rho} \quad (39)$$

Ahora nos disponemos a buscar el campo electrostático, en el punto P , (cuya coordenada radial es ρ) mediante la ley de Gauss. Para ello elegimos una superficie cilíndrica de radio ρ y longitud l , coaxial con la distribución. Para que la superficie sea cerrada, la completamos con dos tapas circulares en los extremos. A las tres partes que componen la superficie cerrada S las llamaremos respectivamente S_C , S_{T1} y S_{T2} , de modo que

$$S = S_C \cup S_{T1} \cup S_{T2} \quad (40)$$

Los vectores normales exteriores a cada parte de la superficie S son de las formas siguientes

$$\begin{aligned} \vec{ds}_C &= ds_C \check{\rho} \\ \vec{ds}_{T1} &= -ds_{T1} \check{k} \\ \vec{ds}_{T2} &= ds_{T2} \check{k} \end{aligned} \quad (41)$$

Por su parte, los diferenciales de volumen de la distribución, que quedan dentro de la superficie cerrada S , pueden escribirse como sigue

$$dv = 2\pi l \rho' d\rho' \quad (42)$$

Aquí estamos en condiciones de aplicar la ley de Gauss (11), que toma la forma

$$\oint_S E_\rho(\rho) \check{\rho} \cdot \vec{ds} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \delta(\rho') 2\pi l \rho' d\rho' \quad (43)$$

En virtud de (40) la integral de superficie puede separarse en tres partes. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{S_C} E_\rho(\rho) \check{\rho} \cdot \vec{ds}_C + \int_{S_{T1}} E_\rho(\rho) \check{\rho} \cdot \vec{ds}_{T1} + \int_{S_{T2}} E_\rho(\rho) \check{\rho} \cdot \vec{ds}_{T2} &= \\ &= \frac{2\pi l}{\epsilon_0} \int_0^\rho \rho' \delta(\rho') d\rho' \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \int_{S_C} E_\rho(\rho) \check{\rho} \cdot ds_C \check{\rho} + \int_{S_{T1}} E_\rho(\rho) \check{\rho} \cdot (-ds_{T1} \check{k}) + \int_{S_{T2}} E_\rho(\rho) \check{\rho} \cdot ds_{T2} \check{k} &= \\ &= \frac{2\pi l}{\epsilon_0} \int_0^\rho \rho' \delta(\rho') d\rho' \end{aligned} \quad (45)$$

Los productos escalares que aparecen en las integrales de superficie son

$$\check{\rho} \cdot \check{\rho} = 1 \quad \check{\rho} \cdot \check{k} = 0 \quad (46)$$

con lo que las integrales sobre las tapas S_{T1} y S_{T2} son nulas. Entonces tenemos

$$\int_{S_C} E_\rho(\rho) ds_C = \frac{2\pi l}{\epsilon_0} \int_0^\rho \rho' \delta(\rho') d\rho' \quad (47)$$

Ahora observemos que todos los puntos de la superficie de integración S_C tienen la misma coordenada ρ , por lo que la componente $E_\rho(\rho)$ es constante sobre S_C . Entonces podemos extraer la componente de la integral

$$E_\rho(\rho) \int_{S_C} ds_C = \frac{2\pi l}{\epsilon_0} \int_0^\rho \rho' \delta(\rho') d\rho' \quad (48)$$

La integral de superficie que nos queda puede interpretarse como el área de la superficie S_C . Entonces

$$E_\rho(\rho) 2\pi l \rho = \frac{2\pi l}{\epsilon_0} \int_0^\rho \rho' \delta(\rho') d\rho' \quad (49)$$

Con lo que finalmente tenemos

$$E_\rho(\rho) = \frac{1}{\epsilon_0 \rho} \int_0^\rho \rho' \delta(\rho') d\rho' \quad (50)$$

Observe que desapareció el parámetro l (como era de esperarse), dado que el mismo es completamente artificial en relación con el modelo de distribución de carga.

11 Ejemplo de aplicación.

Consideremos un cuerpo cilíndrico macizo de radio R infinitamente largo, que posee una densidad volumétrica de carga dada por

$$\delta(\rho') = a \rho'^2 \quad (\rho' < R) \quad (51)$$

Aquí tenemos que analizar dos situaciones. Primero tratamos el caso en que el punto P está dentro del cuerpo cilíndrico ($\rho < R$). Por aplicación de (50) tenemos

$$E_\rho(\rho) = \frac{a}{\epsilon_0 \rho} \int_0^\rho \rho'^3 d\rho' = \frac{a}{\epsilon_0 \rho} \frac{\rho^4}{4} = \frac{a \rho^3}{4 \epsilon_0} \quad (52)$$

Ahora veamos que ocurre si P está fuera del cuerpo ($\rho > R$). Nuevamente aplicamos (50), pero observando que la contribución a la carga requiere integrar desde cero hasta R , dado que más allá de R no hay carga (densidad nula). Entonces

$$E_\rho(\rho) = \frac{a}{\epsilon_0 \rho} \int_0^R \rho'^3 d\rho' = \frac{a}{\epsilon_0 \rho} \frac{R^4}{4} = \frac{aR^4}{4\epsilon_0 \rho} \quad (53)$$

El resultado final, incluyendo el caracter vectorial del campo será

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{a\rho^3}{4\epsilon_0} \check{\rho} & \text{si } \rho < R \\ \frac{aR^4}{4\epsilon_0 \rho} \check{\rho} & \text{si } \rho > R \end{cases} \quad (54)$$

12 Distribuciones con simetría plana.

La simetría plana es otro caso que sólo ocurre en el mundo de los modelos, ya que se trata de distribuciones infinitamente extendidas. Para caracterizar estas distribuciones utilizamos coordenadas cartesianas, y decimos que la densidad volumétrica de carga sólo depende de una de dichas coordenadas, por ejemplo z' . Entonces tenemos

$$\delta(\vec{r}') = \delta(z') \quad (55)$$

Para analizar la simetría del campo electrostático, usamos la misma estrategia que en los casos anteriores. Esto es, tratamos de encontrar un eje de simetría de la distribución. Para ello, elegimos un punto P cualquiera y hacemos pasar por él una recta paralela al eje z . Luego observamos que si la distribución de carga rota un ángulo cualquiera alrededor de la recta, el aspecto de la distribución rotada coincide con su aspecto original. Entonces la recta constituye un eje de simetría, y por tanto la única componente que sobrevive en P es E_z . Por otra parte, si la distribución se desplaza paralelamente al plano xy , el campo en P debe permanecer invariante, por lo que el campo debe tener idéntica componente E_z sobre todo el plano paralelo a xy que contiene a P . Esto significa que la componente E_z no puede depender de las coordenadas x e y . Entonces

$$E_x = E_y = 0 \quad E_z = E_z(z) \quad (56)$$

Aunque esta información es análoga a las de los casos de simetría tratados anteriormente, la aplicación de la ley de Gauss para la determinación del campo electrostático es posible, pero en general no inmediata. En este caso será necesario definir una distribución elemental a modo de “prototipo”, determinar su contribución al

campo, y luego resolver aplicando el principio de superposición. Afortunadamente, este cálculo es bastante sencillo, por lo que lo abordaremos ahora.

Para comenzar, trataremos un caso particular que servirá como “prototipo” para tratamientos posteriores. Consideremos una distribución de carga contenida en un plano infinitamente extendido, cuya densidad superficial de carga uniforme es σ . Observe que su simetría corresponde al caso que tratamos, por lo que el campo que genera tiene las componentes dadas por (56). Nos proponemos calcular la componente E_z del campo electrostático en un punto P , situado a una distancia z del plano de la distribución. Por sencillez elegimos el origen sobre el plano de carga, de modo que el mismo coincida con el plano $x - y$, y el eje z pase por P . Para aplicar la ley de Gauss, elegimos una superficie cilíndrica S_C de longitud $2z$ y radio cualquiera, cuyo eje coincida con el eje z , y se extiende simétricamente a cada lado de la distribución. Para que la superficie sea cerrada, completamos con dos tapas circulares T_1 y T_2 , paralelas al plano $x - y$, situadas respectivamente en $-z$ y z . De este modo, la superficie cerrada S se compone como sigue

$$S = S_C \cup T_1 \cup T_2 \quad (57)$$

y los respectivos vectores diferenciales normales exteriores son

$$\vec{ds}_{SC} = ds_{SC} \check{\rho} \quad \vec{ds}_{T1} = -ds_{T1} \check{k} \quad \vec{ds}_{T2} = ds_{T2} \check{k} \quad (58)$$

Ahora observemos un detalle de simetría. Si la distribución se gira un ángulo $\alpha = \pi$ alrededor del eje x , la distribución rotada y la original tienen el mismo aspecto. Por lo tanto en P se debe observar el mismo campo. Pero como el campo está “atado” a la distribución, su estructura a un lado del plano $x - y$, debe ser una imagen especular de la estructura del otro lado. Esto es

$$E_z(-z) \check{k} = -E_z(z) \check{k} \quad (59)$$

Nótese que esta propiedad sólo vale para el prototipo, de modo que no hubiéramos podido aplicarla para cualquier distribución con simetría plana.

Ahora estamos en condiciones de utilizar la ley de Gauss dada por la expresión (11).

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{Q_{RS}}{\epsilon_0} \quad (60)$$

Reemplazando (56), (57) y (58) en (60), tenemos

$$\int_{S_C} E_z(z) \check{k} \cdot \vec{ds}_{SC} + \int_{T_1} E_z(-z) \check{k} \cdot \vec{ds}_{T1} + \int_{T_2} E_z(z) \check{k} \cdot \vec{ds}_{T2} = \frac{Q_{RS}}{\epsilon_0} \quad (61)$$

Aplicando la condición de simetría (59) y detallando los versores involucrados en los diferenciales de superficie, tenemos

$$\begin{aligned} \int_{S_C} E_z(z) \check{k} \cdot ds_{SC} \check{\rho} - \int_{T_1} E_z(z) \check{k} \cdot (-ds_{T1} \check{k}) + \\ \int_{T_2} E_z(z) \check{k} \cdot ds_{T2} \check{k} = \frac{Q_{RS}}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (62)$$

Resolviendo los productos escalares entre versores, observamos que la primera integral es nula.

$$\int_{T_1} E_z(z) ds_{T_1} + \int_{T_2} E_z(z) ds_{T_2} = \frac{Q_{RS}}{\epsilon_0} \quad (63)$$

Como las tapas T_1 y T_2 tienen todos sus puntos a la misma distancia del plano de cargas, los integrandos son constantes. Entonces

$$E_z(z) \int_{T_1} ds_{T_1} + E_z(z) \int_{T_2} ds_{T_2} = \frac{Q_{RS}}{\epsilon_0} \quad (64)$$

Las integrales representan las áreas de las tapas. Las mismas son iguales y coinciden además con el área de la fracción del plano de cargas que hay dentro de la superficie S . A todas estas áreas las llamamos A . Entonces

$$E_z(z) A + E_z(z) A = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \quad (65)$$

Con lo que finalmente concluimos que

$$E_z(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (66)$$

Note que el resultado es independiente de la localización z del punto P . Teniendo en cuenta la simetría (59), la forma vectorial final es

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \check{k} & si \ z < 0 \\ \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \check{k} & si \ z > 0 \end{cases} \quad (67)$$

Para que el prototipo adquiera generalidad operativa, conviene plantearlo en una localización arbitraria z' , con lo que (67) toma la forma más general siguiente

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \check{k} & si \ z < z' \\ \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \check{k} & si \ z > z' \end{cases} \quad (68)$$

O en la versión más compacta

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \operatorname{sgn}(z - z') \check{k} \quad (69)$$

13 Ejemplo de aplicación.

Consideremos una placa plana infinitamente extendida, cuyo espesor es d . La densidad volumétrica de carga es δ (uniforme). La simetría de la distribución admite un tratamiento por superposición de campos del tipo (69). Podemos elegir el origen de coordenadas dentro de la placa, en un punto equidistante de sus caras. Imaginemos ahora una porción infinitesimalmente delgada de la placa, situada entre z' y $z' + dz'$. La carga contenida en dicha porción contribuirá al campo en cualquier punto \vec{r} con el formato (69). Esto es

$$d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\delta dz'}{2\epsilon_0} \text{sgn}(z - z') \check{k} \quad (70)$$

Luego el resultado se obtiene por integración sobre toda la placa., Formalmente resulta

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\delta \check{k}}{2\epsilon_0} \int_{-d/2}^{d/2} \text{sgn}(z - z') dz' \quad (71)$$

La integración es muy simple. Sin embargo, conviene advertir al lector que deben tratarse por separado tres casos: primero cuando $z < -d/2$, luego cuando $-d/2 < z < d/2$ y finalmente cuando $z > d/2$. Con un poquito de cuidado se obtiene que

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} -\frac{\delta d}{2\epsilon_0} \check{k} & \text{si } z < -\frac{d}{2} \\ \frac{\delta z}{\epsilon_0} \check{k} & \text{si } -\frac{d}{2} < z < \frac{d}{2} \\ \frac{\delta d}{2\epsilon_0} \check{k} & \text{si } \frac{d}{2} < z \end{cases} \quad (72)$$

Capítulo 4

Potencial electrostático.

1 Repaso sobre conceptos mecánicos básicos.

a) **Trabajo:** Supongamos que una partícula se encuentra en una región del espacio en la que existe un campo de fuerzas $\vec{F}(\vec{r})$. Sean \vec{r}_1 y \vec{r}_2 las posiciones de dos puntos de la región, y sea C una curva simple orientada, que comienza en \vec{r}_1 y termina en \vec{r}_2 . Ahora subdividimos la curva en segmentos diferencialmente pequeños. En cada uno de dichos segmentos, definimos un vector \vec{dl} cuyo módulo coincide con la longitud del segmento, su dirección es tangente a la curva C en el segmento y su sentido coincide con la orientación de la curva. Supongamos ahora que la partícula se mueve sobre C desde \vec{r}_1 hasta \vec{r}_2 ¹. Entonces definimos el trabajo

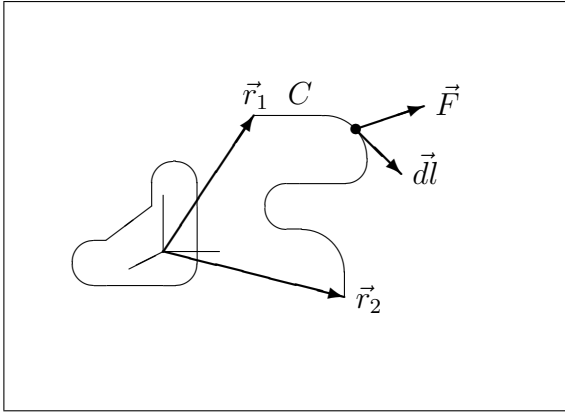


Figure 1: Escenario para la definición del trabajo de una fuerza. Se trata de una curva C que se extiende entre los puntos \vec{r}_1 y \vec{r}_2 . Sobre ella se definen los vectores tangentes \vec{dl} .

asociado a la fuerza \vec{F} realizado sobre la partícula a lo largo de la curva C como

$$W_{\vec{F}C} = \int_C^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot \vec{dl} \quad (1)$$

Como ejemplo consideremos el caso en que una fuerza constante actúa sobre una partícula que se mueve en línea recta. Si elegimos que la trayectoria de la partícula coincida con el eje x , y que su desplazamiento comience en $x = 0$ y termine en $x = d$, tendremos que los vectores \vec{dl} serán de la forma

¹En la mayor parte de los casos será necesario que actúen otras fuerzas además de \vec{F} para que la partícula recorra una curva especificada. Sin embargo, no resulta relevante la existencia de estas fuerzas para los objetivos de esta sección.

$$\vec{dl} = (dx, 0, 0) \quad (2)$$

Entonces el trabajo de la fuerza F sobre la partícula será

$$W_{\vec{F}C} = \int_C^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot \vec{dl} = \int_0^d (F_x, F_y, F_z) \cdot (dx, 0, 0) \quad (3)$$

$$W_{\vec{F}C} = \int_0^d F_x dx = F_x \int_0^d dx = F_x d \quad (4)$$

Esta última expresión es ampliamente difundida en textos básicos de física, por lo que conviene recalcar que sólo constituye un resultado particular cuya aplicabilidad es muy limitada.

b) Fuerzas conservativas: Consideremos nuevamente un campo de fuerzas $\vec{F}(\vec{r})$ y una partícula bajo su influencia. Consideremos también una curva simple cerrada C , sobre la que la partícula es obligada a moverse. Entonces, si para toda curva cerrada C el trabajo de \vec{F} sobre la partícula es nulo,

$$W_{\vec{F}C} = \oint_C \vec{F} \cdot \vec{dl} = 0 \quad (5)$$

decimos que $\vec{F}(\vec{r})$ es un campo de fuerzas conservativas. Una consecuencia inmediata con grandes ventajas operativas puede obtenerse por aplicación del teorema de Stokes. Esto es, $\vec{F}(\vec{r})$ es un campo de fuerzas conservativas si y sólo si en toda la región vale que

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \quad (6)$$

Entre los ejemplos más básicos de fuerzas conservativas podemos citar la fuerza gravitatoria ejercida por la tierra sobre los objetos de su entorno, y la fuerza elástica ejercida por un resorte sobre un objeto acoplado a él.

El término “fuerza conservativa” alude al hecho que las fuerzas que poseen esta propiedad no operan en detrimento de la energía mecánica de la partícula, y por tanto cabe caracterizarlas como que “conservan” dicha energía.

c) Independencia de caminos: Una consecuencia inmediata de la definición de fuerza conservativa es la independencia de caminos. Sean C_a y C_b dos curvas cualesquiera, tales que ambas comienzan en \vec{r}_1 y terminan en \vec{r}_2 . Entonces, Si $\vec{F}(\vec{r})$ es un campo de fuerzas conservativas se cumple que

$$W_{\vec{F}C_a} = W_{\vec{F}C_b} \quad \int_{C_a}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot \vec{dl} = \int_{C_b}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot \vec{dl} \quad (7)$$

d) Energía potencial: Si un campo de fuerzas $\vec{F}(\vec{r})$ es conservativo, entonces es posible definir una energía potencial $U_{\vec{F}}$ asociada a dicho campo, tal que

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U_{\vec{F}} \quad (8)$$

Una representación del gradiente en coordenadas cartesianas será

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U_{\vec{F}}}{\partial x}, \frac{\partial U_{\vec{F}}}{\partial y}, \frac{\partial U_{\vec{F}}}{\partial z}\right) \quad (9)$$

En los ejemplos mencionados de fuerzas conservativas, puede observarse esta relación. Para la fuerza gravitatoria \vec{P} (en notación habitual) tenemos que

$$U_{\vec{P}} = mgy \quad \rightarrow \quad \vec{P} = (0, -mg, 0) \quad (10)$$

Por su parte, en el caso de la fuerza elástica de un resorte se cumple que

$$U_{\vec{F}_e} = \frac{1}{2}kx^2 \quad \rightarrow \quad \vec{F}_e = (-kx, 0, 0) \quad (11)$$

Ahora proponemos una definición formal para la energía potencial, a partir del campo de fuerzas $\vec{F}(\vec{r})$. Sea \vec{r}_{REF} un punto arbitrariamente elegido en la región donde existe el campo de fuerzas conservativas $\vec{F}(\vec{r})$. A dicho punto lo llamaremos en lo sucesivo “punto de referencia”. Sea \vec{r} un punto genérico de la misma región y sea C una curva cualquiera que se inicia en \vec{r}_{REF} y termina en \vec{r} . Supongamos ahora que una partícula es transportada cuasiestáticamente a lo largo de C bajo la acción de la fuerza \vec{F} y otra que la contrarresta punto a punto \vec{F}_{EXT} ejercida por un agente externo de modo que

$$\vec{F}_{EXT}(\vec{r}') = -\vec{F}(\vec{r}') \quad (12)$$

para todos los puntos \vec{r}' pertenecientes a C . Entonces, la energía potencial $U_{\vec{F}}(\vec{r})$ asociada a la fuerza \vec{F} , adquirida por la partícula cuando la misma se encuentra en el punto \vec{r} , coincide con el trabajo que debe realizar el agente externo para transportar cuasiestáticamente la partícula desde el punto de referencia hasta el punto \vec{r} .

$$U_{\vec{F}}(\vec{r}) = W_{\vec{F}_{EXT}C} = \int_C^{\vec{r}}_{\vec{r}_{REF}} \vec{F}_{EXT} \cdot d\vec{l} \quad (13)$$

Una consecuencia inmediata es que

$$U_{\vec{F}}(\vec{r}) = -W_{\vec{F}C} = -\int_C^{\vec{r}}_{\vec{r}_{REF}} \vec{F} \cdot d\vec{l} \quad (14)$$

e) Extensiones terminológicas: En el mundo matemático se ha adoptado la terminología surgida de la mecánica para aplicarla a campos en general. Así

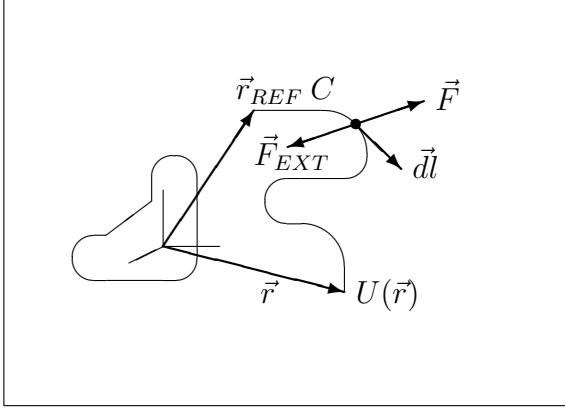


Figure 2: Escenario para la definición de la energía potencial. Se trata de una curva C que comienza en la posición de referencia \vec{r}_{REF} y termina en \vec{r} . La energía potencial es el trabajo cuasi-estático de la fuerza \vec{F}_{EXT} .

tendremos que si un campo vectorial $\vec{A}(\vec{r})$ de cualquier naturaleza se lo llamará “conservativo”, si para toda curva cerrada C satisface

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (15)$$

Entonces existirá un campo escalar $h_{\vec{A}}(\vec{r})$ llamado generalmente “potencial” asociado al campo \vec{A} , que satisface

$$\vec{A} = -\vec{\nabla} h_{\vec{A}} \quad (16)$$

Sugerimos que el lector reflexione sobre la terminología, porque la misma se presta a confusiones, especialmente cuando la naturaleza del campo vectorial ya no pueda identificarse con una fuerza.

2 ¿Será conservativa la fuerza electrostática?

Para contestar esta pregunta podríamos proceder de un modo muy simple, evaluando el rotor del campo electrostático producido por una carga puntual. En primer lugar observemos que el campo electrostático producido por una carga puntual tiene la forma

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\vec{r} \quad (17)$$

Cuando los campos presentan estos tipos de simetría se los llama “Campos Centrales”. Teniendo en cuenta la definición de rotor en coordenadas esféricas se deduce que el mismo es nulo en todas partes. Luego extendemos esta conclusión mediante el principio de superposición, al campo producido por cualquier distribución de cargas. Con lo que se concluye que el campo electrostático es conservativo.

Ahora recordemos que la fuerza electrostática sobre una partícula con carga q , esta relacionada con el campo electrostático mediante

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad (18)$$

Entonces, es inmediato que si \vec{E} es un campo conservativo, la fuerza F también lo será.

3 Energía potencial electrostática.

Como la fuerza electrostática es conservativa, debe existir una energía potencial electrostática asociada que satisfaga

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U_{\vec{F}} \quad (19)$$

Siguiendo los lineamientos sugeridos para fuerzas conservativas en general, podemos definir la energía potencial electrostática como sigue. Sean \vec{r}_{REF} y \vec{r} un punto de referencia y un punto genérico respectivamente. Supongamos que una partícula cargada es trasladada desde \vec{r}_{REF} hasta \vec{r} bajo la acción de un campo electrostático y un agente externo. Entonces la energía potencial electrostática adquirida por la partícula al alcanzar el punto \vec{r} , es igual al trabajo realizado por el agente externo para transportarla cuasiestáticamente a lo largo de cualquier curva desde \vec{r}_{REF} hasta \vec{r}

$$U_{\vec{F}}(\vec{r}) = W_{\vec{F}_{EXT}C} = \int_C^{\vec{r}}_{\vec{r}_{REF}} \vec{F}_{EXT} \cdot d\vec{l} \quad (20)$$

Una consecuencia inmediata es que

$$U_{\vec{F}}(\vec{r}) = -W_{\vec{F}C} = -\int_C^{\vec{r}}_{\vec{r}_{REF}} \vec{F} \cdot d\vec{l} \quad (21)$$

4 Concepto de potencial electrostático.

Ahora centremos nuestra atención en que el campo electrostático es conservativo. Entonces debe existir un potencial electrostático asociado (Campo escalar), al que llamaremos $V(\vec{r})$, que debe cumplir

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V \quad (22)$$

La definición de V es análoga a la de $U_{\vec{r}}$, y por tanto puede calcularse a partir del campo electrostático \vec{E} como sigue

$$V(\vec{r}) = - \int_C^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (23)$$

Observe que multiplicando ambos miembros por la carga de la partícula se puede recuperar la expresión para la energía potencial electrostática. En tal sentido, podemos decir que el potencial electrostático es una propiedad del espacio que representa la energía potencial electrostática por unidad de carga que habría de adquirir una partícula cargada que se sitúa en el punto considerado. La unidad de potencial electrostático es el “Volt” (o Voltio) que se representa por la letra V . Su relación con las otras unidades del sistema MKS es

$$V = \frac{J}{C} = \frac{Nm}{C} \quad (24)$$

Aquí conviene enfatizar que el potencial, de la misma manera que el campo electrostático, constituye una propiedad del espacio. Esto significa que será necesario que algún objeto sensible se sitúe en el espacio dotado de un potencial electrostático, para que se verifiquen efectos observables.

Por último observemos que la expresión (23) constituye un método de cálculo para el potencial electrostático. En efecto, si se ha determinado el campo electrostático $\vec{E}(\vec{r})$ en un conjunto conexo de puntos que contenga a \vec{r}_{REF} y a \vec{r} , la mencionada expresión permite calcular $V(\vec{r})$. Sin embargo, este no es el único método, ya que el potencial también puede deducirse a partir del conocimiento detallado de la distribución de cargas.

5 Superficies equipotenciales.

El potencial electrostático es una propiedad escalar continua, definida en el espacio tridimensional. Como ocurre siempre con los campos escalares tridimensionales regulares, es posible definir una familia de superficies llamadas equipotenciales, donde cada una de ellas está formada por puntos de igual potencial. Esto es

$$S_{V_0} = \{ \vec{r} / V(\vec{r}) = V_0 \} \quad (25)$$

donde S_{V_0} representa la superficie en que todos los puntos que la componen tienen potencial V_0 .

Si una partícula se desplaza sobre una superficie equipotencial, su energía potencial electrostática se mantiene constante. Esto significa que la fuerza eléctrica

que actúa sobre ella no hace trabajo. Esto sólo puede darse si la fuerza, y por añadidura el campo, resultan perpendiculares a la superficie. La conclusión que se desprende de este razonamiento, es que las superficies equipotenciales son siempre perpendiculares a las líneas de campo.

Como ejemplo elemental podemos citar el caso de una carga puntual, en que las líneas de campo son radiales. Entonces las superficies equipotenciales son esféricas.

6 Elección de referencias.

El potencial electrostático está definido a menos de una constante aditiva. Esto ocurre porque los potenciales que difieren sólo en una constante aditiva, tienen las mismas derivadas, y por tanto conducen al mismo campo electrostático. Esta arbitrariedad permite que podamos elegir la posición de referencia \vec{r}_{REF} de la manera más conveniente. Naturalmente, tal conveniencia debe analizarse de acuerdo a la simplicidad matemática de los cálculos que hemos de realizar.

Ahora recordemos algo que suele olvidarse en la práctica cotidiana de la física. Una cosa es el mundo real y otra cosa son los modelos que utilizamos para su representación. Esto parecerá obvio, pero aquí no podemos correr riesgos conceptuales. Entonces va una definición: decimos que una distribución de cargas es finitamente confinada, si existe una esfera imaginaria de radio finito tal que la distribución sea interior a la misma. Es evidente que “todas” las distribuciones reales de carga caben en esta definición, por lo que la misma parecería superflua. Sin embargo, en el mundo de los modelos pasan cosas raras. Por ejemplo existen planos infinitos uniformemente cargados, hilos rectos infinitamente largos (también con carga), etc. Y estos sí quedan fuera de la definición. Y como nuestras cuentas viven en el mundo de los modelos, la definición es relevante.

Ahora estamos en condiciones de recomendar una elección apropiada. Si la distribución de cargas es finitamente confinada, es muy práctico elegir la posición de referencia en el infinito. Esto es que

$$\lim_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} V(\vec{r}) = 0 \quad (26)$$

Esta elección puede hacerse porque el potencial en el infinito adquiere el mismo valor por cualquier camino por el que nos alejemos de la distribución de cargas.

Ahora trataremos otras cuestiones que “sólo” pueden ocurrir en los modelos. En efecto, algunos modelos incluyen puntos en que la densidad de carga es infinita. Este es el caso de cargas puntuales, hilos (tratados como soportes unidimensionales de carga), y hojas (modeladas como soportes bidimensionales de carga). En particular, las posiciones en que hay cargas puntuales o hilos cargados, no admiten ser elegidas

como referencia para el potencial. Esto se debe a que el potencial diverge (tiende a infinito) en dichos puntos. Observe que las distribuciones superficiales de carga no tienen este problema, por lo que están habilitadas como posibles referencias.

En resumen la elección del punto de referencia puede hacerse:

- a) En cualquier punto de posición finita en el vacío.
- b) En el infinito, si el sistema de cargas es finitamente confinado.
- c) Sobre la distribución de cargas, excepto cuando sean cargas puntuales o distribuciones de carga unidimensionales.

7 Potencial asociado a una partícula puntual cargada.

Consideremos una partícula puntual que utilizaremos para modelar un pequeño cuerpo que posee una carga neta Q . Comencemos por elegir el origen de coordenadas sobre la partícula, por lo que su campo electrostático se reduce a

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{kQ}{r^2} \vec{r} \quad (27)$$

Nos proponemos determinar el potencial $V(\vec{r})$ en un punto arbitrario \vec{r} del espacio. Entonces tenemos que elegir una referencia apropiada. Como la distribución es finitamente confinada, elegimos la referencia en infinito. Esto es $|\vec{r}_{REF}| \rightarrow \infty$. Ahora observamos que una curva muy apropiada para recorrer desde \vec{r}_{REF} hasta \vec{r} es la semirrecta radial que nace en \vec{r} y se extiende hasta el infinito, tomando valores crecientes de la coordenada radial r (que para no confundirla con el módulo del vector \vec{r} la llamaremos r''). Entonces los elementos de la curva pueden parametrizarse como

$$\vec{dl} = -dr'' \vec{r} \quad (28)$$

donde el signo menos se debe a que la curva será recorrida en sentido contrario al sentido de crecimiento del parámetro r'' .

Ahora estamos en condiciones de calcular el potencial

$$V(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_{REF}}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot \vec{dl} = - \int_r^\infty \frac{kQ}{r'^2} \vec{r} \cdot (-dr'' \vec{r}) \quad (29)$$

En esta última expresión, suele ocurrir cierta confusión debida al aspecto de los límites de integración. Aquí pareciera que hemos invertido los límites. Sin embargo esto no es así. Lo que ocurre es que la primera integral es del tipo curvilínea, mientras que la segunda es ordinaria, y como tal debe ser recorrida en el sentido en

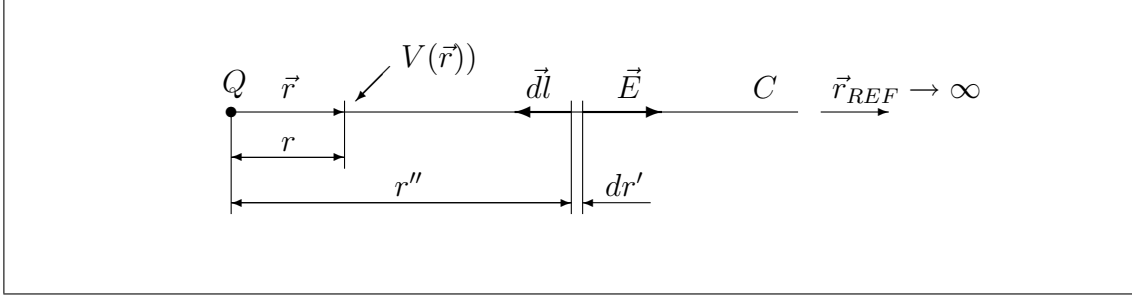


Figure 3: Esquema de los elementos geométricos necesarios para desarrollar el potencial de una partícula puntual cargada. La partícula se encuentra en el origen y el parámetro r'' recorre la semirrecta que viene radialmente desde el infinito hasta \vec{r} .

que crece el parámetro r'' . El recorrido sobre la curva en sentido contrario ha sido tenido en cuenta en la parametrización de \vec{dl} .

Ahora resolvemos la integral

$$V(\vec{r}) = kQ \int_r^\infty \frac{dr''}{r''^2} = kQ \left[-\frac{1}{r''} \right]_r^\infty \quad (30)$$

con lo que obtenemos

$$V(\vec{r}) = \frac{kQ}{r} \quad (31)$$

Recordemos que este resultado fue desarrollado para una partícula puntual cargada situada en el origen, eligiendo la referencia para el potencial en el infinito. Una extensión inmediata para el caso en que la partícula esté situada en la posición genérica \vec{r}' será

$$V(\vec{r}) = \frac{kQ}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (32)$$

8 Potencial de una distribución de cargas.

El paso siguiente consiste en encontrar el potencial producido por una distribución de cargas. Pueden darse dos casos y sus combinaciones. En primer lugar, supongamos que la distribución está formada por una colección finitamente confinada de partículas puntuales cargadas. Sean Q_1, Q_2, \dots, Q_n las cargas residentes en

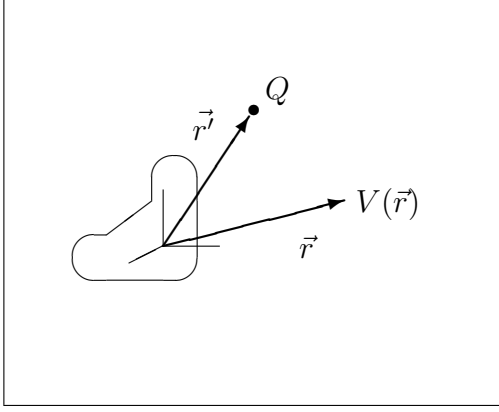


Figure 4: Esquema de los vectores involucrados en el potencial producido por una partícula cargada. Los vectores \vec{r} y \vec{r}' representan las posiciones de la partícula y de la posición donde se evalúa el potencial respectivamente.

las partículas situadas en las posiciones $\vec{r}'_1, \vec{r}'_2, \dots, \vec{r}'_n$ respectivamente. Entonces el potencial se obtiene por simple superposición

$$V(\vec{r}) = k \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}'_i|} \quad (33)$$

donde la referencia de potencial ha sido elegida en el infinito (por lo que rige la restricción de confinamiento finito).

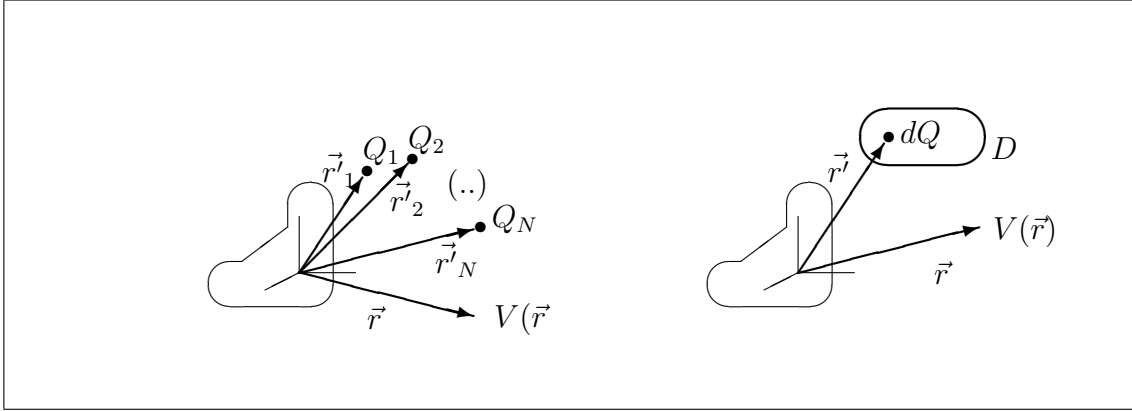


Figure 5: Los esquemas representan los escenarios para la determinación de potenciales producidos por distribuciones de cargas. El esquema de la derecha corresponde al caso discreto, y el de la izquierda al caso continuo.

Ahora analizamos el caso en que la distribución es continua. En este caso siempre es posible subdividir el dominio D en que residen las cargas, en elementos de tamaño diferencial que admiten ser tratados como cargas puntuales. Sea dq la carga residente

en un elemento del dominio D , cuya posición es \vec{r}' . Entonces el potencial en \vec{r} será

$$V(\vec{r}) = k \int_D \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (34)$$

Nuevamente, la referencia de potencial ha sido elegida en el infinito, por lo que el dominio D debe ser finitamente confinado. Como habíamos visto en el cálculo del campo electrostático, el dominio D puede ser una curva, una superficie o un volumen. Entonces el diferencial de carga dQ debe ser reemplazado en la integral, con el mismo criterio discutido para el campo.

9 Ejemplo: Potencial en el eje de un anillo.

Este ejemplo es sumamente esclarecedor, dado que permite ser resuelto, tanto por integración del campo electrostático, como a partir de la distribución de fuentes. Dado que la distribución de cargas es finitamente confinada, es apropiado elegir la referencia de potencial en el infinito (Si no fuera así, no sería posible la segunda variante). A continuación analizamos ambas posibilidades.

a) Como ya hemos deducido, el campo electrostático en el eje de un anillo de radio R , que posee una carga Q uniformemente distribuida, viene dado por

$$\vec{E}(0, 0, z) = \frac{kQz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \check{k} \quad (35)$$

Elegimos como curva de integración la semirrecta que se desarrolla sobre el eje z , desde $\vec{r} = (0, 0, z)$ hasta infinito. Por supuesto, el recorrido se hará en sentido contrario, es decir desde infinito a \vec{r} . Para no confundir el parámetro de integración con la posición del punto de llegada, decimos que la coordenada que corre a lo largo de la semirrecta se llama z'' . Entonces un elemento de dicha recta será

$$\vec{dl} = -dz''\check{k} \quad (36)$$

donde el signo menos pone de manifiesto que la curva se recorre acercándose al origen. Entonces el potencial será

$$V(0, 0, z) = - \int_C^{\vec{r}} \vec{E} \cdot \vec{dl} = - \int_z^\infty \frac{kQz''}{(R^2 + z''^2)^{3/2}} \check{k} \cdot (-dz''\check{k}) \quad (37)$$

Resolviendo el producto escalar tenemos

$$V(0, 0, z) = kQ \int_z^\infty \frac{z'' dz''}{(R^2 + z''^2)^{3/2}} \quad (38)$$

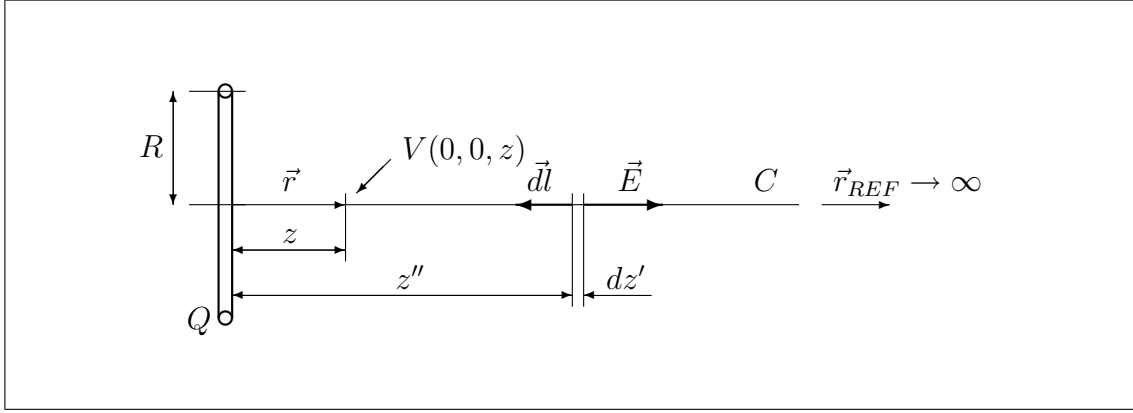


Figure 6: El esquema representa un anillo situado en un plano perpendicular al papel. El origen está en el centro del anillo y el eje z va horizontalmente. Observe cuidadosamente las notaciones.

La integral se resuelve fácilmente por sustitución haciendo

$$u = R^2 + z'^2 \quad \rightarrow \quad du = 2z' dz' \quad (39)$$

Entonces

$$V(0,0,z) = \frac{kQ}{2} \int_{R^2+z^2}^{\infty} \frac{du}{u^{3/2}} = \frac{kQ}{2} \frac{2}{\sqrt{R^2+z^2}} \quad (40)$$

O en forma más compacta

$$V(0,0,z) = \frac{kQ}{\sqrt{R^2+z^2}} \quad (41)$$

b) Ahora repetimos el cálculo a partir de la distribución de carga. Para ello utilizamos la integral sobre el dominio de la distribución, que para este caso toma la forma

$$V(0,0,z) = k \int_D \frac{dQ}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = k \int_D \frac{dQ}{(R^2+z^2)^{1/2}} \quad (42)$$

donde se ha observado que el denominador del integrando es simplemente la distancia entre un elemento del anillo y el punto $(0,0,z)$. Como tal distancia es invariante en el proceso de integración, puede ser tratada como una constante. Entonces

$$V(0,0,z) = \frac{k}{(R^2+z^2)^{1/2}} \int_D dQ \quad (43)$$

La integral remanente puede interpretarse como la carga total del anillo, por lo que concluimos que

$$V(0, 0, z) = \frac{kQ}{\sqrt{R^2 + z^2}} \quad (44)$$

que coincide con el resultado de la parte *a*.

El lector podrá apreciar que la segunda resolución es claramente más sencilla que la primera. Esto no siempre es así, por lo que sugerimos que se ejercite mucho sobre este tipo de resoluciones, hasta adquirir experiencia para elegir el camino.

10 Energía potencial de un sistema de partículas cargadas.

Consideremos un sistema de partículas con cargas Q_1, Q_2, \dots, Q_N , rígidamente emplazadas en posiciones $\vec{r}'_1, \vec{r}'_2, \dots, \vec{r}'_n$. La energía potencial electrostática que posee el sistema, por definición, coincide con el trabajo cuasiestático hecho por agentes externos para “construirlo”. En otras palabras, es el trabajo que hubo que hacer para transportar cada partícula desde el infinito hasta su posición \vec{r}'_i . Para calcular estos trabajos, pensemos que el proceso es secuencial. Primero supongamos que todas las partículas están en el infinito. Para traer la primera, no hay que enfrentar ningún campo, por lo que el trabajo es nulo. Así situamos la partícula 1 en \vec{r}'_1 . Ahora hay que traer la partícula 2 hasta \vec{r}'_2 . Entonces nos enfrentamos al campo producido por la 1. Si logramos instalar la 2 en su posición definitiva, habremos realizado un trabajo igual a la energía potencial adquirida por el sistema de dos partículas. Esto es

$$U_{12} = \frac{kQ_1Q_2}{|\vec{r}'_2 - \vec{r}'_1|} \quad (45)$$

Al traer la tercera partícula, el recorrido debe hacerse bajo la influencia de las dos primeras. Y así sucesivamente hasta completar el procedimiento. En la tabla siguiente, mostramos los trabajos involucrados en cada traslado

$$\begin{aligned}
\text{Particula 1 :} & \quad 0 \\
\text{Particula 2 :} & \quad \frac{kQ_1Q_2}{|\vec{r}'_2 - \vec{r}'_1|} \\
\text{Particula 3 :} & \quad \frac{kQ_1Q_3}{|\vec{r}'_3 - \vec{r}'_1|} + \frac{kQ_2Q_3}{|\vec{r}'_3 - \vec{r}'_2|} \\
\text{Particula 4 :} & \quad \frac{kQ_1Q_4}{|\vec{r}'_4 - \vec{r}'_1|} + \frac{kQ_2Q_4}{|\vec{r}'_4 - \vec{r}'_2|} + \frac{kQ_3Q_4}{|\vec{r}'_4 - \vec{r}'_3|} \\
& \dots \\
\text{Particula } N : & \quad \frac{kQ_1Q_N}{|\vec{r}'_N - \vec{r}'_1|} + \frac{kQ_2Q_N}{|\vec{r}'_N - \vec{r}'_2|} + \frac{kQ_3Q_N}{|\vec{r}'_N - \vec{r}'_3|} + \dots + \frac{kQ_{N-1}Q_N}{|\vec{r}'_N - \vec{r}'_{N-1}|}
\end{aligned} \tag{46}$$

La energía potencial adquirida por el arreglo final es la suma de todos los trabajos realizados en el proceso constructivo. Observe que la suma de todos los términos de la tabla puede sintetizarse como sigue

$$U = \sum_{j=2}^N \sum_{i=1}^{j-1} \frac{kQ_iQ_j}{|\vec{r}'_j - \vec{r}'_i|} \tag{47}$$

Capítulo 5

Electrostática en medios conductores.

1 El modelo microscópico.

Comencemos por imaginar un modelo microscópico de conductor sólido. Una versión muy simplificada se compone de las siguientes partes:

a) Un arreglo tridimensional compacto de iones positivos, cuyas posiciones relativas se mantienen constantes (red fija). Cada uno de los iones puede pensarse como un átomo del metal, que ha cedido uno o dos electrones al momento de tomar parte del cuerpo al que pertenece.

b) Un gas ideal de electrones de conducción, que deambulan libremente como si estuvieran en una cavidad cuyas paredes son las fronteras del cuerpo. Estos electrones son cedidos por los átomos al convertirse en iones positivos para formar el cuerpo.

Con este modelo cabe imaginar que la carga positiva permanece fija dentro del conductor y distribuida uniformemente en su volumen. Por su parte, los electrones de conducción son móviles y se distribuyen en forma estadísticamente uniforme en todo el volumen del conductor. Con esto, podemos entender que el conductor resulte a priori local y globalmente neutro.

Ahora nos preguntamos ¿Cuánta carga positiva y negativa habrá dentro de un conductor? Para fijar ideas, imaginemos una muestra cúbica de metal de 1 *cm* de lado. Una distancia típica de separación entre núcleos atómicos en un sólido es del orden de 1 *Armstrong* = 10^{-8} *cm*. Entonces en la muestra caben 10^{24} iones. Si por cada ión existe 1 electrón de conducción, la muestra tendrá un gas ideal formado por 10^{24} electrones uniformemente distribuidos en 1 *cm*³. Por tanto, la densidad será típicamente del orden de 10^{24} partículas por centímetro cúbico. Recordando que la carga elemental es $e = 1.6 \times 10^{-19}$ *C*, tenemos que la densidad de carga positiva fija en la red de iones será

$$\rho_+ = 1,6 \times 10^5 \text{ C/cm}^3 \quad (1)$$

Por su parte, los electrones de conducción se distribuyen estadísticamente con una densidad promedio

$$\rho_- = -1,6 \times 10^5 \text{ C/cm}^3 \quad (2)$$

Por ser el conductor eléctricamente neutro, tanto en general como localmente, el mismo no genera a priori campos electrostáticos macroscópicos.

Este modelo, a pesar de ser muy simplificado, posee los elementos modernos esenciales. Esto es, da cuenta de los portadores de carga tal como se los concibe actualmente, incluyendo sus condiciones de movilidad. Sin embargo, cuando se formuló la teoría electromagnética hoy vigente (mediados del siglo XIX), los científicos estaban aún muy lejos de la formulación de un modelo microscópico detallado. Evidentemente la carencia de dicho modelo no fue escollo para alcanzar una formulación correcta. Por esto es que conviene repasar brevemente lo que pensaban en lo que llamaremos “el modelo clásico”.

2 El modelo clásico.

La concepción clásica acerca de la carga consiste en suponer que sus dos formas posibles (positiva y negativa) pueden interpretarse como dos fluidos análogos. Esto es que ambos tienen idéntica movilidad y que ambos residen en idénticas proporciones dentro de los conductores. Así es que los científicos antiguos pensaban en la posibilidad de migración tanto de cargas positivas como negativas.

¿Por qué este modelo no falla? Simplemente porque la formulación del electromagnetismo no puede distinguir a priori si un cuerpo cargado positivamente, lo está por exceso de carga positiva o por defecto de carga negativa. En tal sentido, el modelo clásico no es erróneo al nivel en que la teoría lo requiere¹.

3 Conductores con carga no compensada.

Cuando nos referimos a un conductor cargado, entendemos que sobre él pueden reconocerse sectores en los que existe carga no localmente compensada. Esto puede darse mediante dos mecanismos:

a) Cuando el conductor tiene un exceso real de cargas de un tipo, ya sea por exceso de electrones de conducción (carga negativa), o por defecto de los mismos (carga positiva). Para que tal mecanismo pueda darse, es indispensable el tránsito de cargas desde o hacia otros cuerpos, por lo que decimos que el proceso de carga es por contacto.

b) Cuando el conductor es sometido a un campo externo, su carga interna se redistribuye originando sectores con densidades de carga no nulas. Cuando un cuerpo adquiere carga local mediante este mecanismo, decimos que ha sido cargado por

¹Una paradoja que puso de manifiesto las limitaciones del modelo clásico surgió con el efecto Hall, al que nos referiremos más adelante.

inducción.

En lo que sigue de esta sección, nos referiremos al caso en que el conductor ha adquirido un exceso de carga (caso *a*). Pospondremos el tratamiento del caso inductivo para secciones posteriores.

Para comprender los procesos internos en el conductor, cuando el mismo adquiere un exceso de carga, utilizaremos una idea basada en el modelo clásico (aunque con algo de caricatura). Imaginemos una pizzera sobre una mesa desprovista de toda propiedad eléctrica. Supongamos ahora que tres pelotitas de ping-pong igualmente cargadas, se liberan sobre la pizzera. Sus repulsiones mutuas las llevarán a topar con el borde y quedar estáticas en posiciones que forman los vértices de un triángulo equilátero. En tales condiciones, cada pelotita estará afectada por las fuerzas de interacción con las otras dos, y la fuerza de vínculo debida al borde de la pizzera. Observe que cada una de las pelotitas se encuentra en equilibrio estable. Si el experimento se repitiera con n pelotitas, es fácil imaginar que las mismas se acomodarían sobre el borde de la pizzera formando los vértices de un polígono regular de n lados.

Homologando esta idea intuitiva con el funcionamiento de un medio conductor, podemos extraer algunas conclusiones importantes. En primer lugar, si pensamos que dentro de un sólido conductor existe un exceso de carga, sus interacciones múltiples combinadas con su movilidad las llevarán hasta la superficie. Durante el “proceso transitorio” en que las cargas están reorganizándose, no habrá equilibrio, por lo que diremos que la situación no es electrostática. Finalmente se alcanzará el equilibrio estable cuando la carga se sitúe sobre la superficie.

Nótese que esta conclusión es independiente de la forma del cuerpo.

Por otra parte, la simetría del modelo planteado conduce a una distribución de carga uniforme. De esto puede concluirse que un exceso de carga en una esfera conductora se distribuirá sobre su superficie con una densidad uniforme. Nótese que este efecto requiere la simetría del cuerpo, por lo que no debe considerarse un resultado general.

4 Campo y potencial electrostáticos en el interior de un conductor.

Ya hemos visualizado que los excesos de carga, en condiciones electrostáticas, se sitúan en la superficie del conductor. Ahora podemos preguntarnos ¿Cómo será el campo electrostático generado por la distribución de carga superficial? Para responder esta pregunta, comencemos por recordar que, tanto en el modelo microscópico como en el clásico, el conductor está dotado de cargas libres de moverse por su volumen. Entonces si hubiera campo electrostático dentro del conductor, habría

migración de cargas libres. Tal movimiento estaría animado por las fuerzas electrostáticas que el campo ejercería sobre dichas cargas. En conclusión, estaríamos en una situación no electrostática, en clara contradicción con la hipótesis de partida. Por lo tanto, estamos en condiciones de asegurar que el campo electrostático en el interior de un conductor, en condiciones electrostáticas, es nulo.

Por otra parte, dado que el campo electrostático puede derivarse siempre de un potencial, concluimos que el potencial electrostático dentro de un conductor (en las condiciones antes mencionadas) debe ser constante. Obsérvese en particular, que la superficie del conductor debe ser una superficie equipotencial. De esto último se deduce que el campo electrostático (que se desarrolla hacia afuera del conductor) debe ser localmente perpendicular a la superficie.

5 El fenómeno de inducción electrostática.

Se denomina inducción a la reorganización de cargas que tiene lugar en un conductor, cuando el mismo se encuentra bajo los efectos de un campo electrostático de origen externo. Para fijar ideas consideremos el ejemplo en que una esfera conductora neutra y aislada, se encuentra frente a una partícula que posee carga positiva. Aunque dentro de la esfera ocurrirá un único proceso relativamente complicado, nosotros podemos enumerar una serie de procesos simples que ayudarán a la comprensión del fenómeno en conjunto.

a) La partícula con carga positiva genera un campo electrostático que, en principio, ocupa todo el espacio circundante incluyendo el interior del conductor.

b) El gas de electrones libres del conductor es afectado por el campo externo, por lo que dichos electrones se mueven orientados por el campo hasta que cierta fracción de carga negativa alcanza la superficie.

c) La carga negativa acumulada en la superficie genera un campo electrostático adicional que se propaga tanto dentro como fuera del conductor.

d) El flujo de carga negativa hacia la superficie termina cuando el campo en el interior del conductor se hace nulo. Esto ocurre cuando la carga negativa residente en la superficie genera un campo que cancela en todos los puntos interiores al campo externo.

e) El gas de electrones remanente se redistribuye uniformemente en el interior del conductor. En estas condiciones, las cargas positivas y negativas de la parte volumétrica quedan descompensadas. Sobre la esfera reside una distribución volumétrica uniforme de carga positiva, que genera un campo electrostático radial (dirigido hacia afuera) en toda la región interna.

f) Nuevamente el gas de electrones libres es afectado por un campo electrostático que lo obliga a contraerse a un volumen ligeramente menor que el de la esfera. Tal contracción se detiene cuando la densidad de electrones aumenta hasta compensar

la densidad de carga positiva.

g) La compensación de cargas debida a la contracción del gas de electrones, cancela nuevamente el campo interno. Como consecuencia de la contracción, aparece un delgado casquete de carga positiva no compensada, que admite ser modelado como una densidad superficial de carga positiva. La simetría del sistema permite inferir que tal distribución es uniforme.

h) Finalmente el sistema se encuentra en equilibrio electrostático.

Analicemos ahora la situación final. La carga macroscópicamente observable se encuentra distribuida en la superficie de la esfera. La densidad superficial de carga se compone de dos contribuciones cualitativamente diferentes. La primera es una distribución de carga negativa (en general asimétrica) debida directamente a la influencia del campo externo. La segunda es una distribución de carga positiva (en este caso simétrica), que se debe al reordenamiento de la carga remanente del conductor. Obsérvese que ambas distribuciones deben ser tales que el campo electrostático interno se anule.

Finalmente analicemos el campo electrostático externo. Recordemos que originalmente sólo existía el campo generado por la partícula de carga positiva. Ahora debemos agregar las contribuciones de las dos clases de carga que residen en la superficie.

6 Otra vuelta de tuerca sobre los mismos conceptos.

La secuencia detallada en la sección anterior, permite discriminar acerca de la “funcionalidad” de las dos distribuciones de carga que conviven en la superficie del conductor. La primera, negativa y asimétrica, es la encargada de garantizar la nulidad del campo electrostático interior “ante el intento invasivo del campo externo”. Con esta mirada, podríamos decir que estas cargas inducidas son “centinelas” del conductor. Ellas están obligadas a permanecer en sus emplazamientos mientras el campo externo siga presente.

Por su parte, la carga remanente permanece ajena a la disputa. Ella se comporta como cualquier excedente de carga. Se sitúa en la superficie a expensas de sus interacciones múltiples, de modo de no afectar con su propio campo al volumen interior del conductor. Esta parte de la carga superficial es “transferible” por contacto a otros cuerpos. Asimismo, carga proveniente de otros cuerpos puede ser recibida y se reorganizarán sin perjuicio de las cargas centinelas. A todas estas cargas que se ponen en juego por contacto, las llamaremos “cargas circulantes”, para diferenciarlas de las cargas centinelas que están obligadas a permanecer fijas.

Aún cuando todo el razonamiento anterior haya sido comprendido y aceptado, sobrevive una pregunta algo molesta: ¿Qué hubiera ocurrido si la partícula generadora del campo externo hubiese tenido carga negativa? Nuestro modelo microscópico nos dice que el razonamiento no puede ser análogo. En efecto, la diferencia de movilidad entre cargas positivas y negativas hace que el modelo no sea “simétrico” en su respuesta. Sin embargo, el modelo clásico admite tal simetrización. ¿Cómo salimos de este enredo? Una idea muy viable consiste en suponer que el déficit de electrones de conducción en cualquier porción del conductor, pueda interpretarse como carga positiva. Y más aún, si las densidades de carga positiva fluctúan con el tiempo (procesos transitorios), podemos atribuir tales fluctuaciones al “flujo” de carga positiva entre diferentes partes del conductor. Así los dos modelos convergen, y podemos decir que las conclusiones alcanzadas para el caso de la partícula positiva son cualitativamente idénticas al caso de carga negativa. Sólo se requiere permutar los signos de las cargas².

7 Generalizaciones y resumen de propiedades.

Hasta este punto hemos presentado algunos modelos que facilitan la comprensión de los procesos internos en un conductor. Aunque los mismos fueron utilizados para analizar situaciones particulares, algunas conclusiones resultan de carácter general. En tal sentido, transcribimos aquí estas propiedades generales, apelando a la reflexión del lector en lo que concierne al alcance de las generalizaciones. Las propiedades que siguen valen para todos los conductores en condiciones electrostáticas.

- I) La carga macroscópicamente observable se aloja en la superficie del cuerpo.
- II) El campo electrostático en el interior del cuerpo es nulo.
- III) El potencial electrostático en el interior del cuerpo es constante, por lo que su superficie es equipotencial.

²El lector habrá advertido que la simetría entre los resultados no implica la simetría de los procesos. En efecto, un buen ejercicio podría ser que el estudiante imagine el proceso para el caso de carga negativa, según las pautas del modelo microscópico.

8 El electroscope.

El electroscope es un instrumento diseñado para detectar carga eléctrica no compensada, residente en cuerpos macroscópicos. El mismo está formado por una pequeña esfera, una varilla de transmisión y dos ojuelas articuladas. Todas estas partes son conductoras y conectadas entre sí (ver figura). Con excepción de la esfera, el resto de las partes se encuentra dentro de una cápsula de vidrio para evitar interacciones atmosféricas no deseadas.

Veamos como funciona el electroscope. Comencemos por lo más simple que consiste en poner en contacto la esfera del instrumento con el cuerpo a medir. Si dicho cuerpo está cargado, transferirá una parte de su carga al electroscope. Esta carga se distribuirá por la superficie de todo el cuerpo conductor que forma el instrumento, incluyendo las ojuelas metálicas articuladas. Estas últimas, al adquirir cargas del mismo signo se repelen entre sí, separándose apreciablemente. Tal separación de las ojuelas se utiliza como recurso de visualización acerca de la carga residente en el instrumento.

Veamos ahora una situación algo más compleja. Si un electroscope descargado se acerca (sin tocar) a un cuerpo cargado, se pone bajo la influencia de su campo electrostático. Entonces sobre la esfera ocurre el fenómeno de inducción. Esto es, cargas centinela neutralizan el campo interno, mientras un remanente de cargas circulantes se redistribuye por todo el cuerpo del electroscope. Estas últimas alcanzan las ojuelas y se observa su separación. En tal sentido, decimos que el electroscope funciona también como detector de campos electrostáticos.

9 Conexión a tierra.

Consideremos dos esferas conductoras idénticas y supongamos que una de ellas se encuentra inicialmente cargada mientras que la otra permanece neutra. Nos proponemos un análisis intuitivo acerca del estado final que alcanzarán las esferas si se las pone en contacto. Para ello retomamos nuestro modelo caricatura, ahora considerando dos pizzerías iguales. Para representar el contacto imaginamos que las pizzerías se tocan, y en el punto de contacto se hace un corte en las paredes, que permite el paso de pelotitas de ping pong de una pizzería a la otra. Supongamos que inicialmente en una de las pizzerías habían 21 pelotitas. Las mismas estarían uniformemente distribuidas sobre el borde y en equilibrio mecánico estable. Tal equilibrio se logra cuando la pared de la pizzería aporta una fuerza sobre cada pelotita, de igual módulo y sentido contrario a la que ejercen sobre ella las 20 restantes. Ahora bien, supongamos que una pelotita está justo en la puerta que conecta las dos pizzerías. Allí la pared no aporta su fuerza equilibrante, por lo que la pelotita es

expulsada hacia la otra pizzera. Las 20 restantes se reordenan, y supongamos que una de ellas queda nuevamente en el punto de contacto. El proceso se repite. . .

Pero, ¿hasta cuándo seguirá este proceso? Supongamos que 10 pelotitas han pasado y la onceava está en puerta. Sobre ella ejercerán fuerzas las 10 que aún permanecen en la primera pizzera, pero también se harán notar las 10 que ya pasaron. La simetría del sistema garantiza que la suma de las fuerzas sobre la onceava pelotita es nula. Entonces el proceso se interrumpe, y más allá del hecho anecdótico de quién se quedará con la onceava pelotita, podemos decir que ambas pizzeras se habrán repartido las pelotitas en partes iguales.

Este análisis caricaturezco puede considerarse análogo al reparto de cargas entre dos esferas conductoras idénticas, que puestas en contacto adquirirán idénticas cantidades de carga. Pero ¿si las esferas no fueran iguales? O bien, ¿si las pizzeras no fueran iguales? Reflexionemos sobre esto. Consideremos la misma situación anterior, aunque ahora la pizzera inicialmente vacía tiene un radio mayor que la cargada. El proceso es esencialmente el mismo hasta que la onceava pelotita llega a la puerta. Ahora las interacciones no son simétricas, dado que las distancias son mayores en la pizzera grande. Por tanto la fuerza resultante sigue apuntando en el sentido que favorece la transferencia. Por supuesto, el proceso continuará hasta que las cantidades de carga de uno y otro lado equilibren la fuerza sobre la partícula en puerta. Así tendremos que el número de pelotitas finales será mayor en la pizzera más grande. Por extensión inmediata, diremos que si una esfera cargada se conecta con otra descargada de mayor radio, al final la carga se habrá repartido de modo que la mayor de las esferas tenga más carga que la otra.

Si existe un sistema que ha sido objeto de los más diversos modelados, ese sistema es nuestro nunca bien ponderado planeta. Desde el humillante modelo de partícula, hasta los complejos (pero no menos reduccionistas) modelos macroeconómicos, la tierra sigue adaptándose a las miradas científicas. Nosotros, para no ser menos, modelaremos la tierra como una gran esfera conductora neutra. Y lo interesante es que la tierra, conciente de nuestra necesidad académica, nos complace respondiendo razonablemente bien a tan extraño requerimiento³.

Una vez admitido esto, es fácil imaginar lo que sucede si una esfera cargada, cuyo radio es del orden de nuestra escala cotidiana, se conecta a tierra. Simplemente, se descarga. En sentido estricto, nuestro razonamiento anterior conduce a que la carga se repartirá entre la tierra y la esfera en partes de algún modo relacionadas con sus respectivos tamaños. De esto se desprende que, al resultar la esfera muy pequeña comparada con la tierra, la carga que puede retener en el proceso es despreciablemente pequeña.

Naturalmente, este razonamiento puede extenderse a cualquier cuerpo conductor de dimensiones del orden de nuestras escalas cotidianas. El proceso se denomina

³Valga esta pequeña humorada, para que el estudiante nunca olvide que todo cuanto especulamos se encuentra en el universo de los modelos. Será pues la naturaleza la que siempre tendrá la última palabra acerca de nuestras especulaciones.

conexión a tierra, y en todos los casos tiene como consecuencia la descarga del cuerpo, cualquiera que hubiera sido el signo de su carga.

10 Más sobre electroscópios.

Un procedimiento habitual con el electroscópio consiste en cargarlo a partir de la inducción. Veamos cuáles son los pasos:

a) En primer lugar, la esfera del electroscópio se pone bajo la influencia de un campo electrostático generado por cualquier objeto cargado (sin que se produzca el contacto). Entonces, sobre el instrumento aparecerán cargas centinela y el correspondiente remanente de cargas circulantes. Las primeras se sitúan en la esfera, mientras que las otras se distribuyen por toda la superficie metálica, dando lugar a la separación de las ojuelas. Observemos los signos. Las cargas centinelas son de signo opuesto al de la fuente del campo. Por su parte, las cargas circulantes tienen el mismo signo que dicha fuente.

b) En segundo lugar se establece la conexión a tierra del electroscópio. Esto puede hacerse simplemente tocando la esfera con la mano. En este proceso, las cargas circulantes abandonan el electroscópio y las ojuelas se juntan. Mientras tanto, las cargas centinela permanecen en sus lugares.

c) Finalmente, se retira la fuente del campo. Las cargas centinela quedan liberadas y constituyen un exceso neto de carga en el conductor.

Entonces se distribuyen por toda su superficie, haciendo que las ojuelas se separen nuevamente. Nótese que el instrumento ha adquirido carga neta, y la misma es de signo contrario al de la fuente inductora.

11 Una mirada más formal sobre las esferas cargadas.

Hasta este punto, hemos visto intuitivamente que un exceso de carga residente en una esfera conductora, se distribuye uniformemente en su superficie. Dada la simetría de la distribución, es fácil reconocer, con ayuda de la ley de Gauss, que el campo electrostático exterior a la esfera, coincide con el de una partícula puntual que concentre la misma carga que la esfera y se sitúe en la misma posición de su centro. Se sigue de esto que el potencial asociado también corresponde al de una carga

puntual. Entonces, si la esfera tiene radio R y carga Q , tenemos

$$\vec{E}(r) = \frac{kQ}{r^2} \check{r} \quad V(r) = \frac{kQ}{r} \quad R < r \quad (3)$$

donde el cero de potencial se ha elegido en el infinito.

En particular, el campo electrostático justo afuera de la superficie, y el potencial sobre ella (y en todo su interior) serán

$$\vec{E}(r \rightarrow R^+) = \frac{kQ}{R^2} \check{r} \quad V(r = R) = \frac{kQ}{R} \quad (4)$$

La correspondiente densidad superficial de carga será

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2} \quad (5)$$

Resulta interesante relacionar el campo electrostático justo afuera de la superficie de la esfera, con la densidad de carga residente en dicha superficie. Para ello combinamos las expresiones (4) y (5), con lo que obtenemos

$$\vec{E}(r \rightarrow R^+) = 4\pi k \sigma \check{r} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \check{r} \quad (6)$$

Esta relación indica que el campo electrostático es proporcional a la densidad superficial de carga.

Analicemos ahora la conexión entre dos esferas cargadas. Supongamos que sus radios son R_1 y R_2 y sus cargas iniciales respectivas Q_1 y Q_2 . Para que puedan despreciarse sus influencias mutuas, supongamos que las esferas están situadas en posiciones muy distantes. Entonces estamos en condiciones de hacer la conexión mediante un cable largo. Cuando se hace efectiva la conexión, ocurrirá un reordenamiento de cargas, hasta restituir el equilibrio electrostático. Dicho equilibrio se dará cuando ambas esferas alcancen el mismo potencial⁴. Una vez concluido el proceso transitorio, retiramos el cable. Denotaremos con letras primadas las magnitudes correspondientes al estado final. La figura 11 esquematiza la secuencia de pasos. De la conservación de la carga tenemos

$$Q'_1 + Q'_2 = Q_1 + Q_2 \quad (7)$$

De la igualdad de los potenciales tenemos

$$V'_1 = V'_2 \quad \rightarrow \quad \frac{kQ'_1}{R_1} = \frac{kQ'_2}{R_2} \quad \rightarrow \quad \frac{Q'_1}{Q'_2} = \frac{R_1}{R_2} \quad (8)$$

⁴Esto debe darse porque el cable junto con las dos esferas, mientras dura la conexión, constituyen un único conductor. Por tanto, el potencial debe ser el mismo en todas las partes.

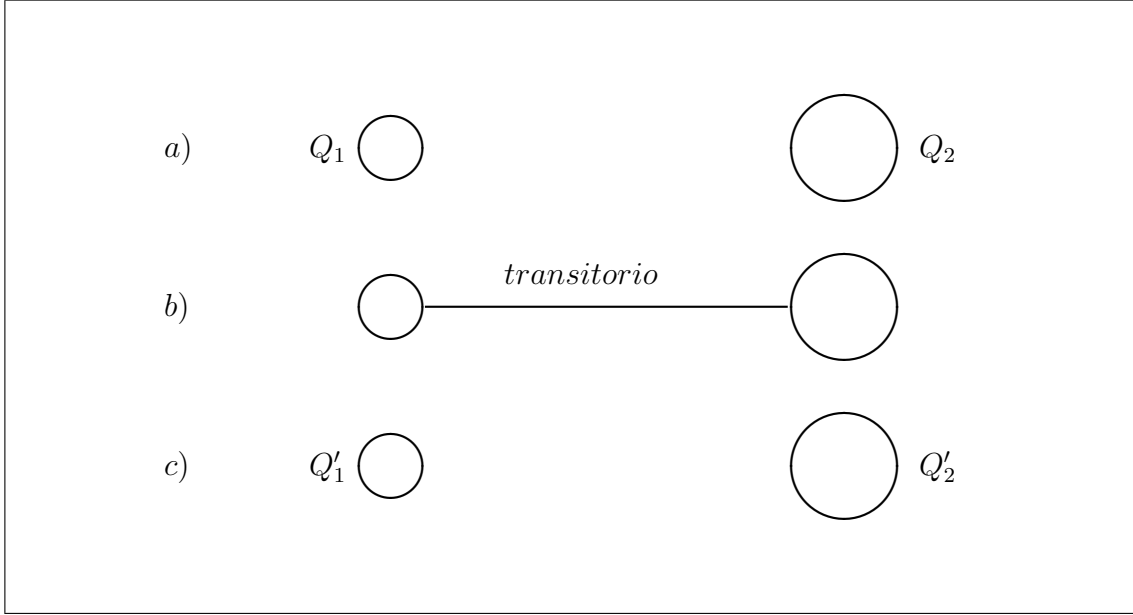


Figure 1: El esquema representa dos esferas conductoras muy alejadas entre si, en una secuencia de estados. Primero están simplemente cargadas. Luego se las conecta mediante un conductor hasta recuperar el equilibrio electrostático. Finalmente se las desconecta, quedando ambas con el mismo potencial y con las cargas reorganizadas.

Obsérvese que esta conclusión coincide con la idea intuitiva desarrollada en secciones anteriores. Pero ahora tenemos precisión: El cociente entre las cargas es igual al cociente entre los radios respectivos. Veamos qué sucede con las densidades.

$$\frac{\sigma'_1}{\sigma'_2} = \frac{Q'_1}{4\pi R_1^2} \frac{4\pi R_2^2}{Q'_2} = \frac{Q'_1}{Q'_2} \frac{R_2^2}{R_1^2} = \frac{R_1}{R_2} \frac{R_2^2}{R_1^2} = \frac{R_2}{R_1} \quad (9)$$

Entonces, el cociente entre las densidades superficiales de carga es igual a la inversa del cociente de los radios respectivos. Esto significa que, una vez restituido el equilibrio electrostático, la esfera de menor radio tendrá menor carga, pero mayor densidad superficial de carga y mayor módulo del campo electrostático justo afuera de la superficie.

12 Condiciones de contorno.

Cuando existe una superficie límite entre dos medios cualitativamente diferentes, decimos que la misma es una frontera o un contorno. Las condiciones de contorno en sentido físico, son propiedades de los campos (escalares o vectoriales) que, de

acuerdo con las características de los medios en contacto, pueden deducirse a priori. Entonces, tales condiciones pueden imponerse en los cálculos, muchas veces como recurso indispensable para ciertas resoluciones.

En nuestro caso particular, estudiamos la superficie límite entre el vacío y un medio conductor⁵.

Según hemos discutido ya ampliamente, el campo electrostático dentro de un conductor en equilibrio electrostático es nulo. Por esto, su volumen es equipotencial y, en particular su superficie también lo es. Entonces la condición de contorno para el potencial es

$$V(\vec{r}_s) = V_0 \text{ (constante)} \quad (10)$$

donde \vec{r}_s representa cualquier punto de la superficie del conductor.

Por su parte, las condiciones para el campo electrostático pueden sintetizarse como sigue

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}_s^1) &= \frac{\sigma(\vec{r}_s)}{\epsilon_0} \vec{n} \\ \vec{E}(\vec{r}_s^2) &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

donde \vec{r}_s^1 y \vec{r}_s^2 son posiciones justo afuera y justo adentro de la frontera respectivamente, en inmediaciones del punto \vec{r}_s , mientras que \vec{n} es el versor normal exterior a la frontera en \vec{r}_s .

13 Más generalizaciones y resumen de propiedades.

Los tratamientos de las secciones anteriores, admiten ser generalizados, para cuerpos conductores de formas arbitrarias. Sin embargo, la complejidad matemática de tales generalizaciones nos impide abordarlas en este contexto. Por tanto nos restringiremos a enunciar, sin demostración, algunas propiedades generales que se agregan a la lista dada en la sección 7. Naturalmente, sugerimos que el lector reflexione sobre la consistencia de estos enunciados con los casos particulares tratados.

IV) La densidad superficial de carga es tanto mayor, cuanto menor sean los radios de curvatura de la superficie.

⁵Es habitual referirse a las superficies límite entre dos medios como interfaces. Observe que en singular la palabra es interfaz, la que podría interpretarse como “cara intermedia”. Hacemos esta aclaración porque probablemente la palabra proviene de traducciones del inglés, y podría confundirse con “interfase” (“s” en lugar de “c”), que significa “intermedio entre dos fases” en terminología química.

V) El campo electrostático justo al lado de la superficie es proporcional a la densidad de carga residente en ese lugar de la superficie. La relación es

$$\vec{E}(\vec{r}_s^+) = 4\pi k\sigma(\vec{r}_s)\vec{n} = \frac{\sigma(\vec{r}_s)}{\epsilon_0}\vec{n} \quad (12)$$

donde \vec{r}_s es una posición sobre la superficie, \vec{r}_s^+ es un punto infinitesimalmente proximo a \vec{r}_s justo afuera de la superficie, y \vec{n} es un versor normal exterior a la superficie en el punto \vec{r}_s .

14 Cavidades de paredes conductoras. Blindaje.

Consideremos una cavidad cerrada de forma arbitraria que se encuentra dentro de un conductor (figura 14.a). Supongamos que la cavidad no aloja cargas en su volumen, mientras que cierto exceso de carga se encuentra en el conductor. Como ya sabemos, la carga se distribuirá sobre la superficie del conductor. Pero ahora el conductor tiene superficie de afuera y superficie de adentro. Entonces nos preguntamos ¿Habrà carga distribuida en la superficie de adentro? ...

Comencemos el análisis eligiendo una superficie cerrada S imaginaria completamente contenida en la parte material del cuerpo (ver figura 14.b). Esto es, que no asoma ni fuera del conductor ni dentro de la cavidad. Entonces si aplicamos la ley de Gauss sobre S tenemos

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{RS}}{\epsilon_0} \quad (13)$$

La integral es nula porque el campo es nulo sobre toda la superficie S . Entonces la carga Q_{RS} alojada en el interior de S también debe ser nula. Como no hay carga en la cavidad (por hipótesis), ni la puede haber en la parte maciza del conductor, concluimos que la carga neta sobre la superficie de la cavidad es nula.

El lector puede estar tentado de pensar que la pregunta ha sido contestada. Sin embargo, cabe una sutileza; ¿No podría ocurrir que en la superficie de la cavidad haya una región con carga positiva y otra región con carga negativa, tal que la carga total sea nula? En principio, el razonamiento anterior no permite descartarlo, y por tanto debemos indagar sobre esta posibilidad.

Nuestra estrategia consiste en razonar por el absurdo. Supongamos que efectivamente existe una distribución superficial de cargas en la frontera de la cavidad (ver figura 14.c). Como la carga total debe ser nula, habrá una región con carga positiva y otra región con carga negativa. Entonces, en el interior de la cavidad habrá líneas de campo que comienzan en las cargas positivas y terminan en las negativas. Elijamos una de dichas líneas, identificándola como el tramo de curva C_1 .

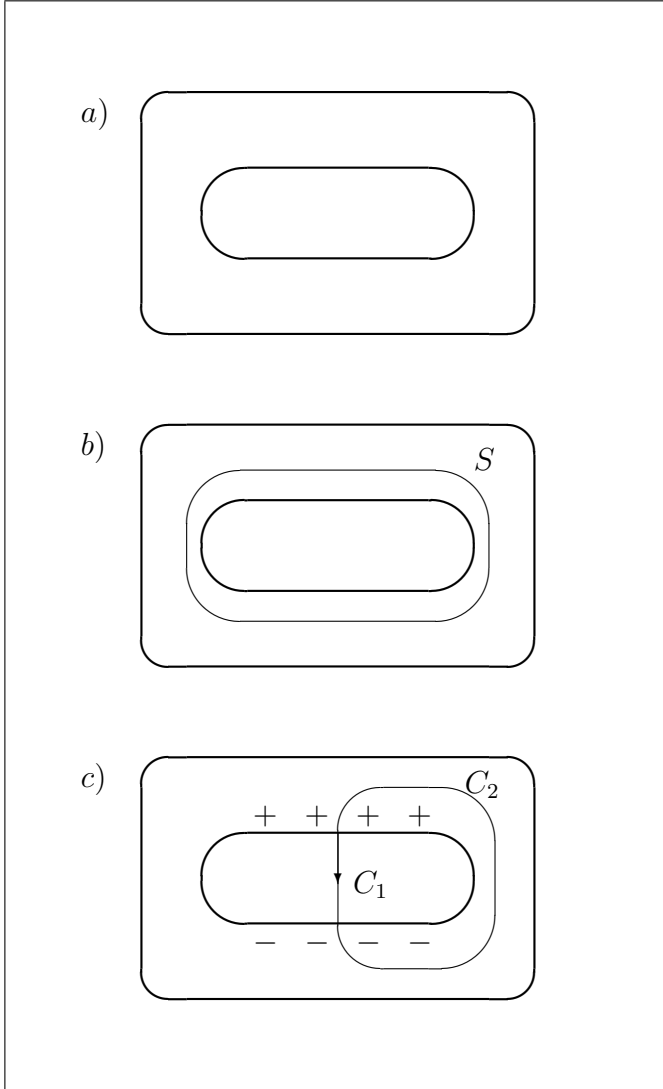


Figure 2: El esquema representa un cuerpo conductor que posee una cavidad completamente cerrada (a). En el gráfico (b) se agrega una superficie gaussiana totalmente contenida en el conductor. En el gráfico (c) se agrega una curva cerrada que cruza por dentro de la cavidad y se cierra por dentro del conductor.

Luego, imaginamos un segundo tramo de curva C_2 , cuyos puntos extremos coinciden con los extremos de C_1 , pero se desarrolla dentro de la parte maciza del conductor. Observe que la unión de C_1 y C_2 constituye una curva cerrada, a la que llamaremos C . Entonces, como el campo electrostático es conservativo, debe cumplirse que

$$C = C_1 \cup C_2 \quad \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{C_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (14)$$

La integral sobre C_2 es nula por ser nulo el campo \vec{E} dentro del conductor. Entonces

$$\int_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (15)$$

Para analizar la integral sobre C_1 comencemos por reconocer que \vec{E} sobre una línea de campo nunca se invierte. Es decir que el campo siempre apunta en el sentido en

que se recorre la curva desde la carga positiva hacia la carga negativa. Si adoptamos esta misma orientación para los vectores diferenciales \vec{dl} , observamos que la integral sobre C_1 suma sobre términos estrictamente positivos. Por tanto la integral resulta estrictamente positiva. Esto es

$$\int_{C_1} \vec{E} \cdot \vec{dl} > 0 \quad (16)$$

Las expresiones (15) y (16) son claramente contradictorias. Dicha contradicción proviene de suponer que existe carga distribuida en la superficie de la cavidad. Por tanto, hemos probado que, bajo las hipótesis propuestas, no habrá carga distribuida en las superficies de cavidades cerradas.

El análisis anterior es válido para el caso en que un exceso de carga reside en el conductor. Ahora bien, tal exceso puede ser un exceso neto debido al agregado o sustracción de electrones de conducción. Pero también puede aplicarse al caso de las cargas circulantes en el proceso de inducción. Cuando este es el caso, se que el conductor sive de “blindaje” a la cavidad. Esta terminología responde a que el campo externo no puede “propagarse” dentro de la cavidad, impedido por el recubrimiento del conductor. Esta propiedad es ampliamente utilizada como recurso tecnológico para blindar instrumentos que pudieran ser afectados por campos eléctricos externos. Aunque el análisis fue realizado para una cavidad cerrada, los blindajes funcionan aún cuando el conductor no rodea completamente la región a proteger. Estos blindajes abiertos se conocen como “jaulas de Faraday”, y constituyen una extensión (no tan inmediata) de los conceptos explicados.

15 Efecto de puntas.

Cuando un conductor de forma arbitraria posee un exceso de carga eléctrica, dicho exceso se reparte en su superficie. La densidad superficial de carga en general no será uniforme, a menos que el cuerpo sea altamente simétrico. Lo que siempre ocurrirá es que el cuerpo sea un volumen equipotencial. Un ejemplo de ello, es el cuerpo formado por las dos esferas del apartado 11, cuando las mismas están conectadas mediante un conductor. Según la relación (9), las densidades superficiales en cada esfera están en relación inversa a sus respectivos radios.

$$\frac{\sigma'_1}{\sigma'_2} = \frac{R_2}{R_1} \quad \rightarrow \quad \sigma'_1 R_1 = \sigma'_2 R_2 \quad (17)$$

Esta relación puede interpretarse (en un sentido no estricto), como que el producto de la densidad superficial de carga por el radio de curvatura local de la superficie

es una constante sobre toda la superficie del cuerpo⁶. Así tendremos que la mayor densidad de carga estará en los lugares donde la curvatura de la superficie sea más pequeña.

En particular, las puntas poseen radios de curvatura extremadamente pequeños, por lo que las densidades de carga en ellas son muy grandes. Por ejemplo, si un cubo metálico macizo posee un exceso de carga, sus vértices presentaran la maxima densidad de carga. En menor grado habrá carga en las aristas, y por último podrá haber una densidad muy baja en las caras. Esta propiedad selectiva de la carga en relación con su distribución en la superficie de los conductores da lugar al llamado efecto de puntas.

⁶El caracter informal de esta relación reside en que no es posible ajustar una forma arbitraria de superficie localmente con una esfera, salvo en casos excepcionales. En general esto podrá hacerse con un elipsoide, por lo que debieran especificarse dos radios en lugar de uno para definir la curvatura.

Capítulo 6

Capacidad y capacitores

1 Concepto de capacidad.

Hasta este punto, hemos aprendido que en condiciones electrostáticas, los cuerpos conductores resultan “volúmenes equipotenciales”. Ahora nos proponemos analizar la relación existente entre el potencial adquirido por un cuerpo conductor, y la carga neta residente en su superficie. A modo introductorio, recordemos que una esfera de radio R que posee una carga Q , adquiere un potencial V (respecto del infinito) dado por

$$V = \frac{kQ}{R} \quad (1)$$

Esta expresión permite observar una propiedad que se repite en todos los cuerpos, que podría sintetizarse como sigue: El potencial observado sobre el cuerpo (respecto del infinito), es proporcional a la carga que posee. La diferencia que presentan los cuerpos respecto de esta propiedad, queda siempre restringida a la constante de proporcionalidad. Entonces cabe definir una magnitud característica del cuerpo, asociada con dicha constante, llamada “capacidad”. La misma se representa por C y se define como el cociente entre la carga Q residente en el cuerpo y el potencial V adquirido por el mismo.

$$C = \frac{Q}{V} \quad (2)$$

Esta definición permite evaluar la capacidad a partir de las mediciones simultáneas de carga y potencial sobre el cuerpo. Sin embargo la capacidad contiene sólo información geométrica acerca del cuerpo. Por ejemplo en el caso de la esfera tenemos

$$C = \frac{R}{k} = 4\pi\epsilon_0 R \quad (3)$$

En otras palabras, la capacidad es una propiedad intrínseca del cuerpo, y por tanto inalterable mientras el cuerpo no experimente modificaciones geométricas¹.

¹El factor ϵ_0 que aparece en el ejemplo de la esfera, también aparece en todos los cuerpos conductores. El mismo debe interpretarse como un indicador que da cuenta que el espacio que rodea al cuerpo es enteramente vacío. En tratamientos posteriores, veremos que la capacidad también depende del medio circundante.

La unidad de capacidad es el “Faradio”, que se representa por F . Su relación con las unidades introducidas hasta ahora es

$$[C] = F = \frac{C}{V} = \frac{C^2}{J} \quad (4)$$

Aunque en la actualidad existen dispositivos cuya capacidad es del orden del Faradio, la unidad es demasiado grande. En tal sentido, se usan más frecuentemente los submúltiplos “microfaradio (μF)” y “nanofaradio” (nF).

2 Capacidad en sentido relativo.

Consideremos dos cuerpos conductores que mantienen fijas sus posiciones relativas. Supongamos que ambos son originalmente neutros, y que elegimos la referencia de potencial en uno de ellos (cuerpo 1). Ahora imaginemos una transferencia de carga del cuerpo 1 al 2, de modo que al final del proceso, las cargas respectivas serán $-Q$ y Q . En estas condiciones, podemos calcular el potencial del cuerpo 2, que de acuerdo con la referencia elegida, coincide con la diferencia de potencial entre ambos cuerpos. En estas condiciones, definimos la capacidad relativa del sistema como el cociente entre la carga adquirida por el cuerpo 2 y su potencial respecto del cuerpo 1.

$$C = \frac{Q}{V} \quad (5)$$

Esta definición es formalmente análoga a la propuesta en la sección anterior, aunque la incorporación de un “cuerpo” de referencia la hace operativamente más adecuada (como veremos en las aplicaciones). Nuevamente, la capacidad es una propiedad intrínseca del sistema, que depende de la geometría. Esto es, de la forma de cada cuerpo y de la posición y orientación relativas entre ambos. Además, la capacidad podrá depender de las propiedades del medio en el que se encuentran inmersos los cuerpos conductores. Como hasta este punto, nuestro análisis ha sido aplicado sólo a cuerpos en el vacío, las expresiones de capacidad sólo contendrán la constante ϵ_0 .

3 Capacitores.

Cuando el sistema de dos cuerpos conductores de la sección anterior, se diseña con fines tecnológicos, toma el nombre de capacitor o condensador. El desafío tecnológico consiste en producir capacitores pequeños de gran capacidad. Analizaremos ahora

algunas claves de estos diseños, a partir del estudio del más simple de los montajes. Esto es, el capacitor de placas plano-paralelas.

Consideremos dos placas metálicas de área A , emplazadas paralelamente de modo que la distancia entre ellas es d . Diremos que el capacitor está cargado con carga Q , cuando en sus placas residen respectivamente cargas $-Q$ y Q . Diremos además que la diferencia de potencial (o simplemente el potencial) del capacitor, será la magnitud medida sobre la placa de carga Q respecto de la otra placa.

No resulta a priori sencillo entender la forma que adopta la distribución de cargas en este tipo de capacitores, por lo que nos limitaremos a describirlo sin una fundamentación sólida². En general se considera una buena aproximación, suponer que las cargas se distribuyen uniformemente en las caras enfrentadas de ambas placas. Entonces, a menos de pequeños efectos de borde, cabe modelar el capacitor como “una muestra finita” del sistema formado por dos planos infinitos uniformemente cargados con densidades $-\sigma$ y σ . Recordando el campo electrostático producido por un plano infinito uniformemente cargado, tendremos las contribuciones que se detallan en la figura 3. El lector observará que las contribuciones de ambas placas

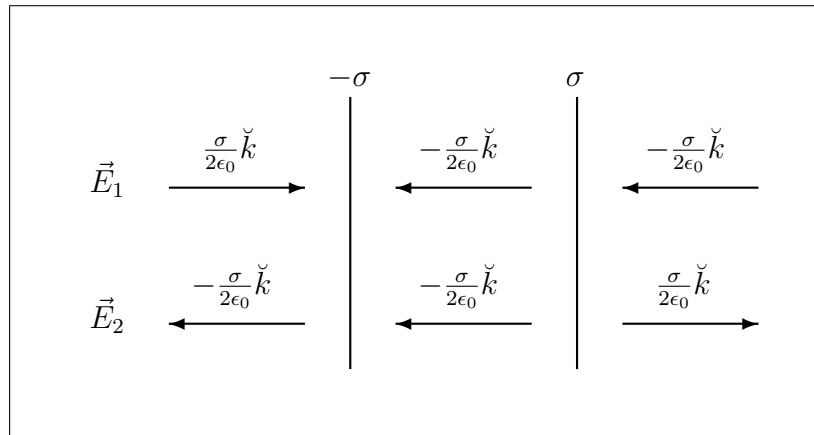


Figure 1: En el esquema se indican dos placas infinitamente extendidas, con densidades de carga $-\sigma$ y σ uniformes. Además se indican los campos \vec{E}_1 y \vec{E}_2 producidos por cada placa en las distintas regiones.

se cancelan en las partes exteriores, mientras que se refuerzan en la parte interna. Así tenemos que el campo interno es

$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{k} \quad (6)$$

El capacitor modelado de esta manera toma el aspecto que se muestra en la figura 3, donde cada placa tiene área A y la distancia entre ellas es d . Con la técnica de

²Una explicación adecuada de este fenómeno requiere técnicas abordables en un curso de electromagnetismo más avanzado.

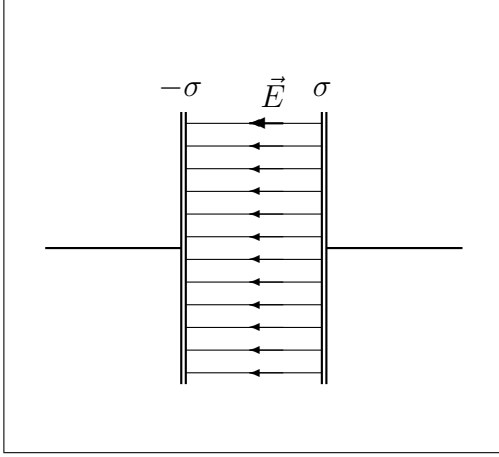


Figure 2: Esquema de un capacitor de placas plano-paralelas, indicando las densidades de carga en cada placa, y el campo electrostático correspondiente.

resolución habitual, el potencial en la placa 2, con respecto a la placa 1 será

$$V = - \int_{\vec{r}_{REF}}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_0^d \left(-\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{k} \right) \cdot dz \vec{k} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \int_0^d dz = \frac{\sigma d}{\epsilon_0} \quad (7)$$

Reemplazando la densidad de carga σ (que en nuestro modelo es uniforme), tenemos

$$V = \frac{Qd}{\epsilon_0 A} \quad (8)$$

Con lo que la capacidad resulta

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad (9)$$

Esta expresión muestra que la capacidad es tanto mayor, cuanto mayor sea el área de las placas y menor la distancia entre ellas. Esta es la clave de diseño de los capacitores, que aunque raramente son planos, respetan una regla similar: dos armaduras metálicas de gran área y muy próximas, son las claves para obtener capacidades significativas.

4 Ejemplo: Capacitor esférico.

Consideremos el montaje formado por dos piezas metálicas esféricas. La pieza 1 es una esfera maciza de radio R_1 , y la pieza 2 es un casquete esférico de radio interior R_2 . Ambas piezas se montan en forma concéntrica. Supongamos ahora que la pieza 1 posee una carga $-Q$, mientras que la 2 tiene carga Q . Argumentos de

simetría y la nulidad del campo electrostático en volúmenes conductores, llevan a que la carga se distribuya uniformemente sobre las superficies de radios R_1 y R_2 . De los mismos argumentos se desprende que sólo habrá campo electrostático en el espacio comprendido entre ambas superficies. Dicho campo tendrá la forma

$$\vec{E} = -\frac{kQ}{r^2} \check{r} \quad (10)$$

Ahora calculamos el potencial de la pieza 2 respecto de la 1.

$$V = - \int_{\vec{r}_{REF}}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{R_1}^{R_2} \left(-\frac{kQ}{r'^2} \check{r} \right) \cdot dr' \check{r} = kQ \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr'}{r'^2} \quad (11)$$

$$V = kQ \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (12)$$

Para obtener la capacidad buscamos una forma más compacta para V

$$V = \frac{kQ(R_2 - R_1)}{R_1 R_2} = \frac{Q(R_2 - R_1)}{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2} \quad (13)$$

Entonces

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad (14)$$

Esta expresión es muy apropiada para analizar la influencia de la “forma” del capacitor, respecto de la regla de diseño propuesta en la sección 3. Para este caso, si la distancia d entre superficies es muy pequeña, tendremos que

$$d = R_2 - R_1 \quad R_1 = R_2 = R \quad (15)$$

Con lo que la capacidad toma la forma

$$C = \frac{\epsilon_0 4\pi R^2}{d} = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad (16)$$

Esta expresión es idéntica a la obtenida para capacitores plano-paralelos, por lo que cabe concluir que, al menos entre las formas analizadas, la capacidad se hace poco sensible a la forma del dispositivo, cuando la distancia entre conductores es muy pequeña.

5 Una analogía esclarecedora.

Antes de abordar el análisis de la carga de un capacitor, conviene examinar una analogía hidráulica. Imaginemos dos recipientes con sus bases unidas por un tubo.

El nivel de líquido será el mismo en ambos recipientes. Supongamos que el tubo de conexión posee una exclusiva y una bomba (ver figura 5.a). Supongamos ahora que inicialmente la exclusiva está abierta, y se pone en marcha la bomba. Entonces el líquido sube en el recipiente de la izquierda y baja en el de la derecha. Este proceso continúa hasta alcanzar el límite de la capacidad de la bomba. Si ahora se cierra la exclusiva, los niveles de líquido quedarán como en la figura 5.b.

Analicemos algunos aspectos de lo ocurrido. En primer lugar, nótese que la bomba hizo trabajo sobre el fluido, que se manifiesta presentando un “desnivel”. Este desnivel puede considerarse como, una “reserva de energía”, aportada por la bomba, que puede “guardarse” en el dispositivo formado por los dos recipientes. El montaje puede ser transportado sin perjuicio de la energía que almacena y la misma puede ser utilizada cuando sea necesario. ¿Cómo se la puede utilizar? Simplemente colocando en el lugar de la bomba, una máquina hidráulica cualquiera que se accione por circulación del fluido a través de ella. Observemos además que el fluido devolverá la energía almacenada con la asistencia de un campo conservativo: el campo gravitatorio.

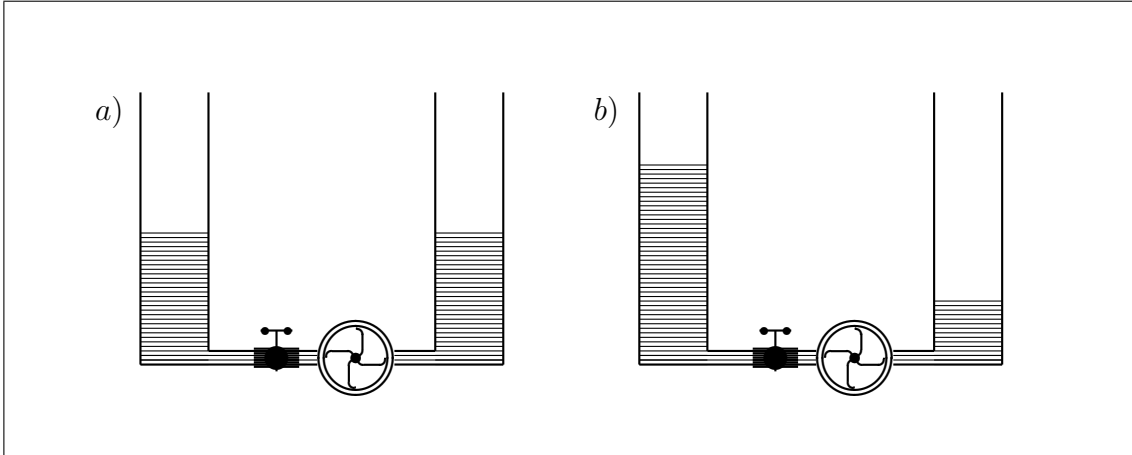


Figure 3: Analogía hidráulica del funcionamiento de un capacitor. Se trata de un tubo en forma de U, que posee una bomba y una exclusiva en la conexión de sus brazos. La figura *a* representa el agua en estado de equilibrio. La figura *b* muestra lo que ocurre después que opera la bomba y se cierra la exclusiva.

En varios aspectos, los capacitores funcionan en forma análoga al sistema hidráulico presentado. En la sección siguiente desarrollaremos la analogía.

6 Carga de capacitores.

En primer lugar, corresponde que interpretemos el capacitor como el montaje formado por los dos recipientes. Por su parte, el campo electrostático residente en el capacitor cargado, juega un papel análogo al del campo gravitatorio. El objeto eléctrico equivalente a la bomba es una pila. Aunque más adelante trataremos en detalle el funcionamiento de la pila, en este punto la introducimos simplemente como un objeto que puede aportar energía y garantizar una diferencia de potencial (de la misma manera que la bomba puede producir una diferencia de alturas en los niveles de fluido en cada recipiente). Por último, la exclusiva puede homologarse con un

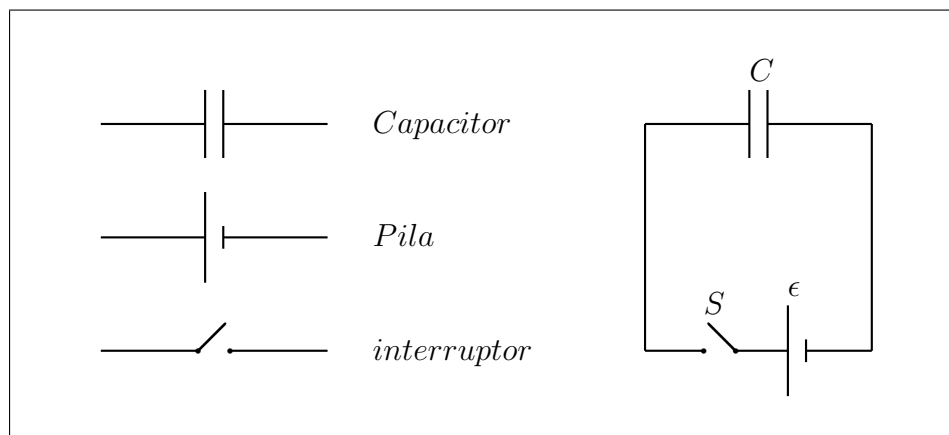


Figure 4: Simbología para la representación de circuitos con capacitores. El circuito de la derecha es uno de los más elementales posibles.

interruptor. Los símbolos usuales se muestran en la figura 6, y luego se los combina para representar un sistema análogo al montaje hidráulico. Este tipo de diagrama representa un “circuito”, donde las líneas que unen los elementos son conductores (por ejemplo, cables). En nuestro modelo didáctico lo análogo a los cables son los tubos por los que circula el fluido.

¿Que podemos decir entonces de un capacitor cargado de esta manera?

- Que alcanzará una diferencia de potencial equivalente a la que garantiza la pila.
- Que acumulará energía cedida en forma de trabajo por la pila.
- Que dicha energía podrá guardarse en el capacitor, aún cuando se haya desconectado la pila.
- Que la energía podrá ser devuelta por acción del campo electrostático residente en el interior del capacitor.

7 Conexión entre capacitores.

Consideremos dos capacitores cuyas capacidades son C_1 y C_2 . Suponga que se los conecta respectivamente a pilas que garantizan diferencias de potencial V_1 y V_2 . Entonces, las cargas serán.

$$Q_1 = C_1 V_1 \quad y \quad Q_2 = C_2 V_2 \quad (17)$$

Supongamos ahora que los capacitores se conectan como indica la figura 7.a. Aquí resulta muy importante observar la polaridad de los capacitores. Esto es, cuál de sus placas es positiva y cuál es negativa. Observemos el caso planteado en la figura 7. Las placas de la izquierda están conectadas por un conductor, por lo que ambas deben tener el mismo potencial, al que podemos elegir como “cero”. Recordemos que la

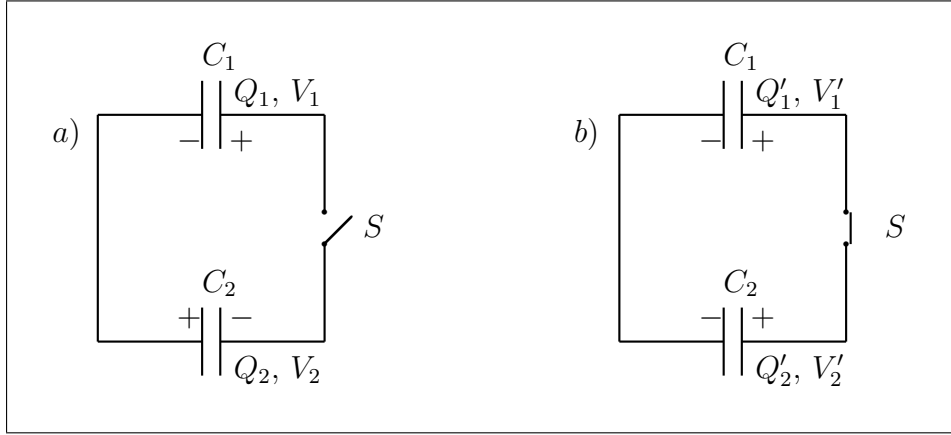


Figure 5: Conexión elemental entre dos capacitores. a) Antes de cerrar el circuito cada capacitor tiene cargas arbitrarias Q_1 y Q_2 , y los correspondientes potenciales (distintos) V_1 y V_2 . b) Al cerrar el circuito el sistema evoluciona hasta alcanzar el nuevo equilibrio electrostático, con cargas respectivas Q'_1 y Q'_2 y la misma diferencia de potencial V' en ambos capacitores.

carga de un capacitor y su potencial se miden sobre una de las armaduras, respecto de la otra. Respetando una única referencia y observando los signos indicados en la figura 7, tenemos que Q_1 y V_1 son magnitudes positivas, mientras que Q_2 y V_2 son negativas (observadas sobre las placas de la derecha).

Ahora supongamos que se cierra el interruptor S , de modo que luego de un breve lapso, el conjunto recupera el equilibrio electrostático. En las condiciones finales (figura 7.b), también el potencial del lado derecho debe ser el mismo en ambas placas. Entonces, si indicamos las magnitudes del estado final con letras primadas, tendremos

$$\begin{cases} V'_1 = \frac{Q'_1}{C_1} \\ V'_2 = \frac{Q'_2}{C_2} \end{cases} \quad V'_1 = V'_2 \quad \rightarrow \quad \frac{Q'_1}{C_1} = \frac{Q'_2}{C_2} \quad (18)$$

Por otra parte, la conservación de la carga implica que

$$Q'_1 + Q'_2 = Q_1 + Q_2 \quad (19)$$

Las relaciones (18) y (19) constituyen un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, cuya solución es inmediata

$$\begin{aligned} Q'_1 &= C_1 \frac{Q_1 + Q_2}{C_1 + C_2} \\ Q'_2 &= C_2 \frac{Q_1 + Q_2}{C_1 + C_2} \end{aligned} \quad (20)$$

Reemplazando en cualquiera de las primeras ecuaciones (18), obtenemos el potencial del estado final

$$V'_1 = V'_2 = \frac{Q_1 + Q_2}{C_1 + C_2} \quad (21)$$

Aquí debemos enfatizar que Q_1 y Q_2 tienen signos determinados por la “polaridad” que les corresponde a cada capacitor en la conexión inicial. Entonces la suma $Q_1 + Q_2$ tendrá un signo que debe respetarse. La figura 7.b corresponde al caso en que la suma es positiva. Entonces queda la polaridad indicada, y el potencial es mayor en las armaduras derechas que en las izquierdas. Pero habrá casos en que ocurre lo contrario, o más aún, que tanto las cargas finales y el potencial final resulten nulos. Dejamos a cargo del lector que analice las circunstancias en que pueda ocurrir esto.

8 Capacitores en serie y en paralelo.

En algunas situaciones, dispositivos que forman parte de un circuito se conectan en formas que reciben nombres particulares. Nosotros veremos dos casos muy frecuentes de conexión que se conocen como serie y paralelo. A continuación describimos cada caso.

a) Conexión en serie: cuando dos capacitores inicialmente descargados, se conectan uno a continuación del otro, formando parte de un circuito más grande, se dice que están conectados en serie. (ver figura 8.a). Note que una placa del capacitor 1 está conectada con una placa del capacitor 2, y el conductor que las une no tiene bifurcaciones. Como inicialmente ambos capacitores están descargados, la carga total residente en las placas vinculadas y el cable que las une, debe ser nula. Entonces si una placa adquiere carga Q , la otra debe tener $-Q$. En otras palabras, los dos capacitores adquieren la misma carga. Por otra parte, la diferencia de potencial entre los puntos A y B será la suma de las diferencias de potencial de cada capacitor. Esto es

$$Q_1 = Q_2 = Q \quad y \quad V_B - V_A = V_1 + V_2 \quad (22)$$

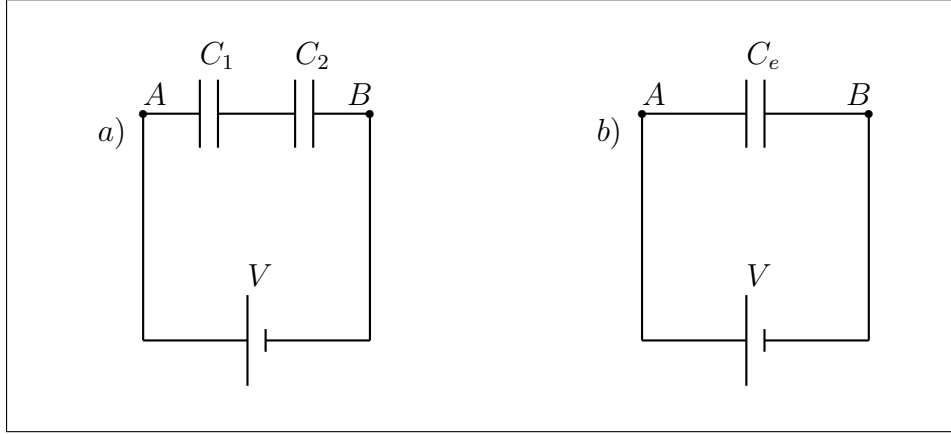


Figure 6: a) Esquema de un circuito que contiene dos capacitores en serie.
b) Esquema del circuito equivalente, donde la serie ha sido reemplazada por un único capacitor.

Combinando estas expresiones tenemos

$$V_B - V_A = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} = Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \quad (23)$$

Ahora podríamos preguntarnos ¿Será posible reemplazar los capacitores en serie, por un único capacitor equivalente? Si, podríamos. El circuito equivalente es el de la figura 8.b y la capacidad equivalente debe satisfacer

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad o \text{ bien } \quad C_e = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \quad (24)$$

Con lo que concluimos que

$$V_B - V_A = \frac{Q}{C_e} \quad (25)$$

Aquí observamos que el capacitor equivalente adquiere la misma carga Q cuando se lo somete a la misma diferencia de potencial $V_B - V_A$.

b) Conexión en paralelo: en la figura 8 presentamos dos capacitores conectados en paralelo. El aspecto más relevante de esta conexión radica en que las placas de la izquierda están conectadas entre si, por lo que ambas tienen el mismo potencial. Ocurre lo mismo con las placas de la derecha, por lo que cabe concluir que ambos capacitores presentan la misma diferencia de potencial $V_B - V_A$. Entonces

$$V_B - V_A = V_1 = V_2 \quad (26)$$

Nuevamente buscamos un capacitor equivalente, es decir que adquiera la misma carga total del conjunto cuando se lo somete a la misma diferencia de potencial. En

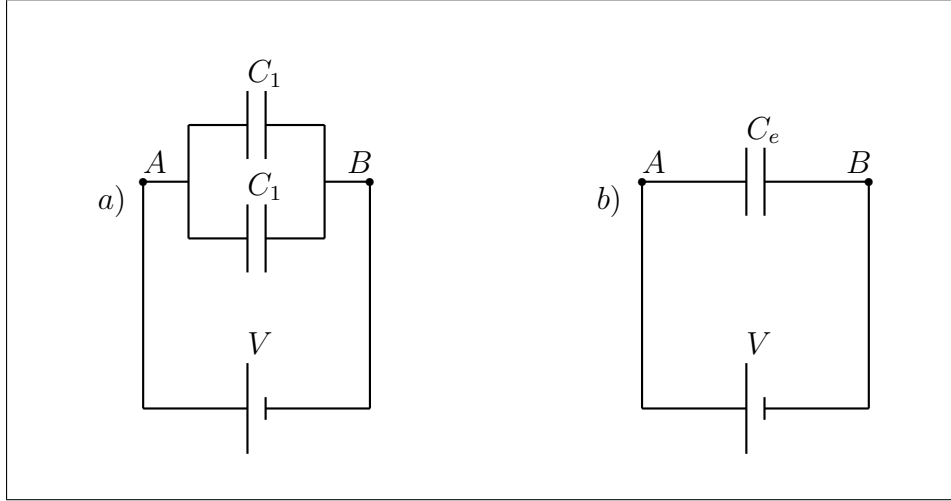


Figure 7: a) Esquema de un circuito que contiene dos capacitores conectados en paralelo. b) Esquema del circuito equivalente, donde se ha reemplazado el paralelo por un único capacitor equivalente.

este caso, la carga total es la suma de las dos cargas. Entonces tenemos

$$Q_1 + Q_2 = C_1 V_1 + C_2 V_2 = (V_B - V_A) (C_1 + C_2) \quad (27)$$

Definiendo la capacidad como

$$C_e = C_1 + C_2 \quad (28)$$

Reconocemos que

$$Q_1 + Q_2 = (V_B - V_A) C_e \quad (29)$$

9 Energía almacenada en un capacitor.

Para evaluar la energía residente en un capacitor cargado, podemos calcular el trabajo cuasiestático que debe realizar un agente externo para cargarlo. Resolvamos el caso de un capacitor de capacidad C , que adquiere una carga Q . Comencemos por suponer que el proceso de carga ha ocurrido parcialmente, de modo que las placas poseen cargas $-q$ y q respectivamente (con $0 < q < Q$). El potencial de la placa positiva respecto de la negativa en estas condiciones será

$$V(q) = \frac{q}{C} \quad (30)$$

donde se agregó la dependencia funcional $V(q)$, para poner de manifiesto que el proceso de carga no ha terminado. Supongamos ahora que transportamos una nueva porción de carga dq desde la placa negativa a la positiva. El trabajo necesario para ello coincide con el aumento de energía potencial electrostática dU . Esto es

$$dW_{F_{EXT}} = dU = V(q) dq = \frac{q dq}{C} \quad (31)$$

El trabajo total realizado en el proceso, que coincide con la energía potencial electrostática adquirida se obtiene por integración de (31). Esto es

$$W_{F_{EXT}} = U = \int_0^Q \frac{q dq}{C} = \frac{Q^2}{2C} \quad (32)$$

Este resultado es de carácter general, ya que no se utilizaron detalles geométricos particulares de un montaje específico. Si llamamos simplemente V a la diferencia de potencial $V(Q)$ obtenida al final del proceso de carga, tenemos varias expresiones

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2 \quad (33)$$

Capítulo 7

Corriente eléctrica.

1 ¿Qué es la corriente eléctrica?

Cuando desarrollamos los aspectos básicos de la electrostática, vimos que la carga eléctrica reside en partículas subatómicas (electrones y protones). También hemos observado que dichas partículas pueden tener distinto grado de movilidad (aunque hasta el momento sólo tratamos casos estáticos). Recordemos por ejemplo que, cuando un conductor se pone bajo la influencia de un campo electrostático externo, en él ocurre un reordenamiento de cargas, que implica un tránsito de electrones entre distintas partes del conductor sólido. También cuando decimos que un capacitor se carga, imaginamos que la carga “viaja” de alguna manera hasta situarse en las placas del capacitor. Estos ejemplos contienen todo lo necesario para comprender el concepto. Cada vez que existe un tránsito de partículas cargadas decimos que hay una corriente eléctrica. En general se considera que la corriente eléctrica es un concepto macroscópico, es decir que la carga se traslada en forma colectiva. En tal sentido, la corriente puede ser asimilada a un modelo de “fluido”, y la terminología física asociada al fenómeno suele tener muchas analogías (incluso el término corriente, proviene del mundo de los fluidos).

Aunque para fijar ideas, hemos utilizado ejemplos basados en “fluir” de electrones dentro de un conductor sólido, el concepto de corriente eléctrica es mucho más general. Ejemplos de naturaleza diferente se dan en medios semiconductores y dieléctricos. También, la corriente se da en medios con distintos estado de agregación (sólidos, líquidos y gases) y no existe ningún impedimento para que pueda darse en el vacío. Los rayos en las tormentas eléctricas, los electrones en un tubo de rayos catódicos y la corriente en un diodo o en un transistor, son sólo el inicio de una inmensa lista de fenómenos que involucran corrientes eléctricas.

2 Densidad de corriente.

Como habíamos adelantado, la corriente eléctrica puede imaginarse como un fluido en que lo que “fluye” son partículas cargadas. Ahora bien, la pregunta es ¿Cómo la describimos? Pues parece natural describirla como fluido. Recordemos

entonces que el modelo más simple de fluido es el que describe los casos laminares. En este modelo, las partículas tienen un comportamiento colectivo que permite identificar “líneas” de flujo, que resultan tangentes a la velocidad en cada punto. Entonces, en el caso de los fluidos puede definirse un campo vectorial (campo de velocidades) tal que las líneas de campo representan las trayectorias de las partículas.

Para describir el movimiento de partículas cargadas, comencemos por imaginar que sus trayectorias son suficientemente simples como para representarlas por un conjunto de líneas de corriente instantáneamente reconocibles. Estas líneas son tangentes a la velocidad de las partículas en cada punto. Entonces, podemos aprovechar el campo de velocidades como representación del flujo de partículas. Esto es efectivamente lo que se hace, pero con una variante leve. Se define un campo vectorial que se denomina “densidad de corriente eléctrica” $\vec{J}(\vec{r}, t)$ cuyas líneas coinciden con las del campo de velocidades. Pero su módulo representa la cantidad de carga eléctrica que atraviesa una unidad de superficie perpendicular a la línea de corriente, por unidad de tiempo. Es importante observar que la magnitud \vec{J} es una densidad “volumétrica”, ya que sus componentes dependen de la posición en un volumen.

Relacionemos la densidad de corriente \vec{J} con la velocidad de las partículas. Supongamos que en cierto lugar del espacio, $n(\vec{r}, t)$ representa la densidad de partículas cargadas en tránsito, en las inmediaciones del punto \vec{r} y al tiempo t . Supongamos además que cada partícula posee una carga q , y se mueven en forma colectiva con una velocidad media $\vec{v}(\vec{r}, t)$. Entonces

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = q n(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t) \quad (1)$$

Nótese que la densidad de corriente \vec{J} siempre comparte la dirección con la velocidad media de las partículas, pero no necesariamente el sentido. En efecto, el sentido está condicionado por el signo de la carga q . Más aún, si cierta corriente de partículas positiva comparte el patrón de velocidades y densidades con una corriente de partículas negativas que viajan en sentido contrario, las densidades de corriente de uno y otro sistema son idénticas.

La mirada que hemos planteado hasta aquí está basada en el modelo microscópico, al menos en lo que concierne a que la carga viaja sobre partículas portadoras. Sin embargo, es importante enfatizar que la física de fluidos es una teoría de medios continuos. Por lo tanto, debemos entender al campo vectorial \vec{J} como perteneciente a una teoría de medios continuos, tal como debe considerarse el electromagnetismo que nosotros estudiamos. Siempre debemos recordar que el electromagnetismo clásico era una realidad de este mundo, cuando el electrón sólo cabía en la ciencia-ficción.

3 Corriente eléctrica en sentido estricto.

Aquí trataremos de aclarar algunas cuestiones semánticas respecto de “corriente eléctrica”. Estos vocablos definen el conjunto de fenómenos descritos en las secciones anteriores. Pero también se usan para denominar al flujo del campo vectorial \vec{J} a través de una superficie especificada. Supongamos que en cierta región existe un tránsito de partículas cargadas, que puede representarse por el campo vectorial $\vec{J}(\vec{r}, t)$. Sea S una superficie imaginaria y \vec{ds} sus vectores normales infinitesimales con una orientación previamente elegida. Entonces definimos la corriente $I(t)$ a través de la superficie S como

$$I(t) = \Phi_{\vec{J}S} = \int_S \vec{J}(\vec{r}_s, t) \cdot \vec{ds} \quad (2)$$

donde \vec{r}_s representa los puntos incluidos en el dominio S . Observe que I no puede definirse independientemente de S , por lo que toda vez que se habla de una corriente es imprescindible especificar sobre qué superficie se la mide¹.

4 Continuidad de la carga.

Volvamos por un rato a la mirada microscópica. Como la carga eléctrica reside en los electrones y los protones, la posibilidad de crear o aniquilar carga equivale a la posibilidad de crear o aniquilar las partículas que la contienen. La física actual viene de dar grandes pasos respecto del nacimiento y muerte de estas partículas, por lo que tales hechos ya no son imposibles. Sin embargo, las condiciones en que se da la creación o aniquilación de partículas no son tan usuales. Más aún, podemos decir que raramente ocurren en fenómenos terrestres cotidianos. Probablemente esta falta histórica de evidencias llevó a los pioneros del electromagnetismo a suponer que la carga eléctrica es una propiedad “permanente”, es decir que no se crea ni se destruye².

Siguiendo la línea histórica, nos preguntamos ¿Cómo podrá describirse esta propiedad de permanencia de la carga? Formalmente decimos que la carga cumple con cierta ecuación de continuidad. Examinemos el término “continuidad”. El mismo sugiere que “algo” debe continuar, es decir, seguir estando o seguir existiendo³. Hecha esta aclaración conectemos algunas ideas. Supongamos que en cierta región

¹En algunos textos, este flujo se define como “intensidad de corriente eléctrica”. Nosotros omitiremos en general la palabra intensidad, porque en física se suele reservar este término para otros fines.

²Algo similar ocurría en esos tiempos, en relación con la masa.

³Esta aclaración la hacemos para no caer en la tentación de suponer que el término alude a lo “continuo” en el sentido en que la palabra se usa, por ejemplo, cuando decimos “medio continuo”.

del espacio existe una distribución de carga, que no se halla en equilibrio electrostático, a la que denotamos con $\rho(\vec{r}, t)$. La dependencia temporal indica su variabilidad, la que sólo puede ocurrir a expensas del traslado de cargas. Entonces, este tránsito de cargas define una densidad de corriente $\vec{J}(\vec{r}, t)$. Ahora nos preguntamos ¿Cómo se relacionan $\rho(\vec{r}, t)$ y $\vec{J}(\vec{r}, t)$? Comencemos por elegir una superficie cerrada cualquiera S con sus vectores diferenciales normales \vec{ds} elegidos exteriores. Sea V el volumen interior a la superficie S . Entonces, el cambio de la carga total contenida en el volumen V , ocurrido en el lapso comprendido entre t y $t + dt$, debe coincidir con la cantidad de carga que atraviesa la superficie S en el mismo lapso. Esto es

$$d \left[\int_V \rho(\vec{r}, t) dv \right] = - \left[\oint_S \vec{J}(\vec{r}_s, t) \cdot \vec{ds} \right] dt \quad (3)$$

O en su forma más habitual

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho(\vec{r}, t) dv + \oint_S \vec{J}(\vec{r}_s, t) \cdot \vec{ds} = 0 \quad (4)$$

Esta es la llamada ecuación de continuidad de la carga. Es importante que el estudiante recuerde la forma de esta ecuación, porque en el futuro se encontrará con muchas propiedades que, igual que la carga eléctrica, poseen la propiedad de permanencia y por tanto, satisfacen la misma ecuación. Tal vez el ejemplo más cercano sea la masa en la dinámica de fluidos.

5 Dinámica de la circulación de corriente eléctrica.

Cuando tratamos la electrostática de los conductores, nos referimos a procesos transitorios que ocurrían cuando el conductor era sometido a un campo externo. También vimos que partículas en el vacío responden acelerándose frente a los campos electrostáticos. Lo natural sería decir que las partículas cargadas son afectadas por los campos electrostáticos. Las fuerzas eléctricas que provienen de dichos campos promueven el movimiento de las partículas, siempre que sus ligaduras lo permitan. Supongamos que cierta partícula tiene masa m y carga q . Si la misma se encuentra exclusivamente bajo la acción de un campo electrostático \vec{E} , la fuerza eléctrica y la aceleración correspondiente serán

$$\vec{F} = q\vec{E} = m\vec{a} \quad (5)$$

Seguir esta línea etimológica generaría sólo confusión. Tal vez resultaría más apropiado decir ecuación de permanencia, en lugar de ecuación de continuidad.

Pero en realidad conviene introducir otro punto de vista. Recordemos que el campo electrostático es conservativo, por lo que puede derivarse de un potencial (reflexione sobre la palabra “derivarse”).

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V \quad (6)$$

Si el campo es no nulo, el potencial no puede ser constante. Entonces las partículas cargadas se mueven entre puntos con diferente potencial. O equivalentemente decimos que las partículas cargadas libres de moverse, efectivamente se moverán si existe una diferencia de potencial que las active.

Prestemos atención a los signos de las cargas. Como ya hemos visto, cuando un mismo campo actúa sobre partículas con cargas de distinto signo, produce fuerzas opuestas. Así, las cargas positivas son aceleradas hacia menores potenciales, mientras que las negativas se aceleran hacia potenciales mayores. Sin embargo, el análisis energético conduce a una conclusión que unifica las conductas. Para ello, comencemos por un tratamiento unidimensional. Supongamos que la partícula sólo puede moverse en la dirección del eje x . Entonces las magnitudes en cuestión se relacionan como sigue

$$\begin{aligned} F_x &= qE_x & E_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} \\ U(x) &= qV(x) & F_x &= -\frac{\partial U}{\partial x} \end{aligned} \quad (7)$$

En primer lugar observemos que el campo y el potencial electrostáticos no dependen de la carga de la partícula (esto ya debe estar muy claro). Entonces observemos que tanto la fuerza como la energía potencial dependen de la carga. Ambas cambian de signo ante la permutación del signo de la carga. Pero esta influencia se neutraliza en la relación entre fuerza y energía, por lo que la fuerza “siempre” apunta hacia donde disminuye la energía potencial, independientemente del signo de la carga⁴. El tratamiento en tres dimensiones es análogo.

$$\begin{aligned} \vec{F} &= q\vec{E} & \vec{E} &= -\vec{\nabla}V \\ U(\vec{r}) &= qV(\vec{r}) & \vec{F} &= -\vec{\nabla}U \end{aligned} \quad (8)$$

La discusión anterior, arroja cierta luz sobre una conducta bastante general de los sistemas físicos. Cuando un sistema está afectado por fuerzas conservativas, evolucionará espontáneamente hacia estados de menor energía potencial, en tanto sus ligaduras se lo permitan.

Si ahora pensamos en los procesos colectivos en que muchas partículas siguen patrones de movimiento análogos, podemos decir que una diferencia de potencial puede dar lugar a una corriente eléctrica. ¿Por qué decimos “puede dar lugar” en vez de afirmarlo? Simplemente porque el medio puede permitirlo o no. Una diferencia de potencial entre dos puntos de un conductor promueve una corriente.

⁴Al estudiante que le cueste ver esta conclusión, le recomendamos que observe que el signo de la componente de la fuerza es opuesto al signo de la derivada de la energía potencial.

Si ahora reemplazamos el medio por un dieléctrico, la misma diferencia de potencial no promueve nada⁵.

Para terminar este análisis, podríamos preguntarnos ¿Hasta cuándo podrá prolongarse una corriente eléctrica? Aunque parezca modesta, la pregunta es de capital importancia. En principio, podríamos argumentar que si un sistema de cargas no está en condiciones electrostáticas, entonces habrá corrientes eléctricas hasta tanto alcance dicho estado. ¿Pero siempre podrá alcanzar el equilibrio? ... (no se pierda la próxima sección).

6 Corrientes estacionarias.

Un problema tecnológico de nuestro tiempo consiste en sostener corrientes durante tiempos indefinidamente largos. El problema está parcialmente resuelto, dado que uno puede encender la luz en su casa, y mantenerla encendida mientras quiera (claro que esto tiene un costo ...). Así estamos en condiciones de afirmar que la corriente que pasa por el cable que alimenta la lámpara, es estacionaria. Esto es, que no varía con el tiempo (a menos durante un buen rato). Dos conclusiones:

- a) No todo sistema de cargas alcanza el equilibrio electrostático.
- b) Las corrientes estacionarias existen.

Examinemos algunos antecedentes prehistóricos donde se daban corrientes estacionarias⁶. No resultará extraño al lector, imaginar que cierto río de montaña mantenía un fluir uniforme durante una tarde de primavera, ante los ojos de un habitante primitivo. Este habitante (probablemente sin cuestionárselo) era testigo de una corriente estacionaria (claro que de agua). Algunos miles de años después, y con la abstracción bien entrenada podemos imaginarnos que el agua de ese río, fue después lago, luego mar, más tarde vapor y nube, probablemente nieve o hielo para luego volver a ser río de montaña. El agua cumplió un ciclo, o bien siguió un “circuito”. Si ahora observamos el circuito con sumo cuidado, podemos decir que mientras la nieve caía o el río bajaba, no hacían más que dejarse llevar por la gravedad que, a riesgo de romper el clima, debemos recordar que es una fuerza conservativa. Como siempre ella quiere que todo vaya a parar a la mínima energía potencial. Pero lo raro está en la parte en que el agua sube. En este tramo la cosa es al revés. mientras la gravedad tira para abajo, el agua viaja para arriba. Y es tan cotidiano ...! Aquí estamos frente al sistema de bombeo que nos mantiene vivos. La energía la aporta generosamente el sol (notese que aún no ha sido arancelado, al

⁵A menos que la diferencia de potencial sea tan grande que cambie las propiedades del medio, convirtiéndolo en conductor.

⁶Digo prehistóricos para que se entienda que la naturaleza aportó los ejemplos sin necesidad de involucrar al hombre es su proyecto.

menos en forma directa). El mecanismo es la evaporación del agua de los mares, ríos, lagos, lagunas, charcos o simplemente, ropa tendida. Este mecanismo en apariencia perpetuo, podría decirse que esconde una “fuerza acuomotriz”, y que la misma opera por incorporación de “energía solar”.

Ahora que sabemos quién aporta la energía, y también sabemos quién la “transporta”, nos falta saber ¿Quién se la queda? la respuesta es bien simple. Mientras el agua baja, en todos los procesos hay fuerzas disipativas. Algunas muy evidentes como la viscosidad. Otras no tanto, como la radiación o el sonido. Otras más indirectas, como los cantorrodados arrastrados por la corriente que se depositarán en un remanso. Pero en todos los casos la energía mecánica será convertida en “otra clase” de energía, que no quedará alojada en el sistema (a menos de tiempos relativamente cortos). En general diremos que la misma es transferida al entorno del sistema (en este caso el planeta ¿o el universo? ...).

La tecnología suele ser una combinación ingeniosa de fenómenos naturales, adaptados a las necesidades de la “naturaleza” humana. Ahora que todo está listo, es fácil imaginarlo. Si queremos una corriente eléctrica estacionaria, necesitamos una “fuerza electromotriz” ¿Qué funcione a energía solar? No nos apresuremos (capaz que si ...) Por de pronto quedémonos con la fuerza electromotriz, que la definimos a partir de su utilidad. ¿Para qué sirve? Para que las cargas eléctricas que se encuentran en un campo conservativo, adquieran nuevamente energía potencial cada vez que la pierdan, y así seguir tomando parte en un proceso dinámico continuo.

7 Fuentes de fuerza electromotriz.

La producción de fuerza electromotriz (f.e.m) ha dado lugar a importantísimos desarrollos tecnológicos, que podríamos agruparlos en dos grandes líneas

- a) Generadores electromecánicos (dínamos y alternadores).
- b) Generadores electroquímicos (pilas y baterías).

Por supuesto que esta clasificación no agota la diversidad de mecanismos que producen fuerza electromotriz, pero contiene los ejemplos más habituales. Nosotros no discutiremos aquí los principios de funcionamiento. Simplemente introducimos el concepto como recurso para sostener corrientes estacionarias en circuitos eléctricos. Una mirada “idealizada” acerca de un generador, nos permitiría definirlo como sigue: Un generador es un dispositivo que garantiza una diferencia de potencial especificada⁷. Esta diferencia de potencial puede ser constante, o variar en el tiempo como una función previamente conocida. En este curso trataremos con dos clases de

⁷Esta idealización puede resultar grotesca (o tal vez hasta ofensiva) para las legiones de ingenieros que desarrollaron durante dos siglos la tecnología que hoy disfrutamos. Entonces quisiera expresar mi más absoluta admiración por tan basto desarrollo, y a la vez aclarar que la física es así. Si los fenómenos fueran abordados con su real complejidad, probablemente el método de la física no hubiera servido.

generadores. Las baterías como fuentes de f.e.m. constante, y las fuentes de f.e.m. alterna, cuyas funciones del tiempo son de la forma

$$\epsilon(t) = \epsilon_0 \cos(\omega t) \quad (9)$$

donde $\epsilon(t)$ representa la f.e.m. alterna, ϵ_0 es su amplitud y ω su frecuencia angular.

8 Corrientes en medios conductores.

Ahora nos disponemos a estudiar un caso particular de circulación de corriente, que merece una atención especial por su importancia tecnológica. Es el caso de los conductores metálicos, cuyo modelo básico recordaremos a continuación.

Según hemos visto, un conductor puede modelarse como una colección más o menos ordenada de iones positivos fijos, y un gas de electrones de conducción que deambulan libremente dentro del volumen del cuerpo. En condiciones normales, el metal es estadísticamente neutro. Para fijar ideas, supongamos que nuestro conductor es un macizo cilíndrico de radio R , longitud l y n electrones de conducción por unidad de volumen (magnitud esta, que dependerá del material y sus detalles de agregación). Supongamos ahora que este conductor es sometido a una diferencia de potencial V entre sus extremos, de modo que un campo eléctrico \vec{E} se origina en su interior. Por simplicidad imaginemos que las líneas de campo son rectas paralelas al eje del cilindro. Supongamos además, que la diferencia de potencial es sostenida por una batería, que retira electrones por un extremo del conductor y los reinserta por el otro extremo con su energía potencial restituida.

Ahora nos preguntamos ¿Cómo viajan los electrones por el conductor? Nada menos placentero que viajar como electrones en un conductor⁸. Los electrones se aceleran bajo la influencia del campo eléctrico, pero cuando adquieren algo de velocidad, chocan con los iones de la red del conductor. En el choque intercambian energía (como se pueda) y salen dispersados (para donde se pueda). Y todo vuelve a empezar. Otra aceleración, y otro choque, y así siempre ...

Observemos dos detalles importantes.

a) La energía que el campo eléctrico le aporta al electrón, este se la transfiere a la red de iones. Por tanto la velocidad del electrón, en promedio, no progresa.

b) La energía transferida a los iones contribuye esencialmente a aumentar las amplitudes de sus vibraciones en la red, que dicho de otra manera, significa que aumentará la energía térmica del conductor.

9 Ley de Ohm.

⁸Para hacerse una imagen, es aun peor que viajar en trenes suburbanos en hora pico.

Para muchos conductores de uso frecuente en la tecnología, es posible modelar la transferencia energética entre los electrones de conducción y los iones de la red, como el resultado de la existencia de una fuerza viscosa. Esto es, una fuerza disipativa proporcional a la velocidad, que se opone al desplazamiento. En nuestro modelo microscópico, es posible imaginar una velocidad promedio de los electrones en dirección del campo eléctrico y en sentido contrario al mismo. En tal sentido, podemos pensar que cada electrón viaja por el conductor de modo que la resultante de las fuerzas que actúan sobre él es nula. En otras palabras, la fuerza eléctrica y la fuerza disipativa son de igual módulo y dirección, pero de sentido contrario⁹. Sea \vec{F}_d la fuerza disipativa proporcional a la velocidad y de sentido opuesto a la misma. Esto es

$$\vec{F}_d = -\alpha \vec{v} \quad (10)$$

donde α es una constante característica del medio. Para el caso de corriente de electrones, la densidad de corriente toma la forma

$$\vec{J} = -ne\vec{v} \quad (11)$$

con lo que se tiene que

$$\vec{F}_d = -\alpha \left(-\frac{\vec{J}}{ne} \right) = \left(\frac{\alpha}{ne} \right) \vec{J} \quad (12)$$

Recordando que en régimen estacionario, la fuerza eléctrica y la disipativa suman cero, tenemos

$$\vec{F}_e + \vec{F}_d = 0 \quad -e\vec{E} + \left(\frac{\alpha}{ne} \right) \vec{J} = 0 \quad (13)$$

Con lo que se obtiene la relación

$$\vec{J} = + \left(\frac{ne^2}{\alpha} \right) \vec{E} \quad (14)$$

Nótese que la expresión entre paréntesis está formada por constantes características del conductor. Todas ellas pueden compactarse en una única magnitud σ a la que llamaremos conductividad del material. Entonces concluimos que

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (15)$$

A este resultado se lo conoce como ley de Ohm. Muchas veces se dice que esta forma de la ley de Ohm constituye su versión microscópica. Sin embargo, tal denominación

⁹Para imaginarse esto, el lector puede recurrir al ejemplo de un paracaidista. El mismo está afectado por la fuerza gravitatoria y la fuerza viscosa que el aire ejerce sobre su paracaidas. La suma de ambas es nula, y por tanto el paracaidista baja a velocidad constante.

no es correcta, ya que tanto la densidad de corriente \vec{J} como la conductividad σ son magnitudes definidas en el mundo macroscópico. En todo caso, la denominación correcta será “forma local de la ley de Ohm”, para diferenciarla de una forma operativa muy difundida en aplicaciones tecnológicas, que desarrollaremos en la próxima sección.

Es importante resaltar que la ley de Ohm, tal como la hemos presentado, proviene de un modelo, y como tal no es esperable que todos los materiales conductores le respondan favorablemente. Los que si lo hacen reciben el nombre de “conductores óhmicos”.

10 Resistividad y resistencia.

Ahora veremos qué consecuencia global tiene la ley de Ohm, cuando se analiza un cierto volumen de conductor óhmico sometido a un campo eléctrico conocido. Para fijar ideas, consideremos un cilindro macizo de longitud l y área a , sobre el que se sostiene un campo eléctrico uniforme longitudinal \vec{E} . Supongamos que \vec{E} apunta hacia la derecha, y elegimos la referencia de potencial en el extremo derecho del cilindro. Entonces el potencial en el extremo izquierdo puede calcularse por integración sobre la curva C , elegida coincidente con el eje del cilindro. Esto es

$$V = - \int_C^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_0^l E \vec{i} \cdot (-dx \vec{i}) = El \quad (16)$$

Por otra parte, la corriente total a través de una sección del cilindro puede tratarse mediante la ley de Ohm local, como sigue

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = \int_S \sigma \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_S \sigma E \vec{i} \cdot d\vec{s} = \sigma E \int_S ds = \sigma E a \quad (17)$$

Combinando los resultados (16) y (17) tenemos

$$I = \sigma E a = \sigma a \frac{V}{l} \quad (18)$$

Es costumbre en usos tecnológicos, definir una magnitud característica de cada material, llamada resistividad, a la que se la denota por ρ . La misma se define como la inversa de la conductividad. Esto es

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \quad (19)$$

Con esta definición, (18) puede reescribirse como sigue

$$I = \left(\frac{a}{\rho l} \right) V \quad o \quad bien \quad V = I \left(\frac{\rho l}{a} \right) \quad (20)$$

Al factor entre paréntesis se lo denomina “resistencia eléctrica” del objeto, y lo denotaremos con R .

$$R = \frac{\rho l}{a} \quad (21)$$

Nótese que esta magnitud representa una propiedad del cuerpo conductor, que involucra su geometría y su composición. La expresión (21) es específica para objetos cilíndricos (por ejemplo alambres), de modo que en casos de geometrías distintas debe ser recalculada.

Volvamos ahora a la expresión (20). Ella provee una forma operativa de la ley de Ohm

$$V = IR \quad (22)$$

Esta expresión, como habíamos anticipado, es ampliamente difundida en el mundo de los cálculos de aplicación tecnológica. Aunque la expresión fue deducida para un caso particular, su forma es de carácter general, ya que las diferencias se manifiestan en la forma particular que se derive para la resistencia. En otras palabras, la ley de Ohm describe la proporcionalidad entre la corriente que circula por un conductor, y la diferencia de potencial que le da origen.

Muchas aplicaciones tecnológicas requieren dispositivos con resistencia especificada, a los que se los llama “resistores”. Pero la resistencia también aparece en los conductores que forman las redes de distribución eléctrica (cables), o dentro de las pilas. Por tanto, un proyecto real no puede dejar de tener en cuenta los efectos surgidos de la resistencia de los distintos medios por los que circula corriente. La unidad de resistencia es el “Ohm” o “Ohmio”, y se la representa por Ω . Su relación con las unidades previas es

$$\Omega = \frac{V}{A} = \frac{Js}{C^2} = \frac{s}{F} \quad (23)$$

11 Efecto Joule.

Como el modelo propuesto responde razonablemente bien para describir la dinámica del tránsito de cargas a través de un conductor, nos vemos alentados a explorar sus predicciones en el terreno energético. Ya que la fuerza viscosa es de tipo “no conservativa”, el trabajo que ella realiza sobre las cargas coincide con el cambio de energía mecánica que experimenta dichas cargas. Volvamos al caso del conductor cilíndrico de la sección 10. Dentro del tramo de conductor considerado, la carga libre existente al iniciar el análisis (carga total de los electrones de conducción), viene dada por

$$Q = -neal \quad (24)$$

Pasado un tiempo Δt , todos los electrones habrán recorrido una distancia l a velocidad constante \vec{v} hacia la izquierda, ocupando ahora un volumen igual al inicial en un tramo contiguo del conductor. El trabajo realizado sobre cada electrón por la fuerza viscosa, es opuesto al realizado por el campo. Esto es

$$w_{\vec{F}_v} = -w_{\vec{F}_e} = -\int_1^2 (-e) \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (25)$$

Veamos con detalle cada factor del integrando.

$$\vec{E} = E \check{i} \quad d\vec{l} = -dx' \check{i} \quad (26)$$

Con lo que tenemos

$$w_{\vec{F}_v} = -\int_x^{l+x} (-e) E \check{i} \cdot (-dx' \check{i}) = -elE \quad (27)$$

Como todos los electrones recorren el mismo camino bajo la acción de las mismas fuerzas, el trabajo total de la fuerza viscosa será

$$W_{\vec{F}_v} = nal w_{\vec{F}_v} = -enal^2 E \quad (28)$$

Recordemos ahora el análisis de la sección 10, donde habíamos obtenido que

$$V = El = IR \quad (29)$$

y además observemos que

$$I = \frac{neal}{\Delta t} \quad (30)$$

(reflexione cuidadosamente sobre el signo). Entonces, reemplazando (29) y (30) en (28), tenemos

$$W_{\vec{F}_v} = -I^2 R \Delta t \quad (31)$$

Entonces la potencia $P_{\vec{F}_v}$ asociada la disipación será

$$P_{\vec{F}_v} = \frac{W_{\vec{F}_v}}{\Delta t} = -I^2 R \quad (32)$$

Reconstruyamos brevemente el significado de esta potencia. Los electrones son acelerados por el campo eléctrico, de modo que la energía potencial eléctrica conferida a los electrones por una fuente de fuerza electromotriz (pila), se convierte en energía cinética. Luego los electrones chocan con los iones de la red fija, cediéndoles energía en cada colisión. La misma pasa a formar parte de la energía interna del material y puede abandonar el conductor por los mecanismos usuales (transmisión, convección o radiación). A la secuencia que acabamos de describir se la conoce como “efecto Joule”.

Observemos ahora el signo menos de la relación (32). El mismo se debe a que, desde el punto de vista mecánico, el sistema ha perdido energía. En general diremos que la potencia P_R disipada por el resistor será

$$P_R = I^2 R \quad (33)$$

Capítulo 8

Magnetostática.

1 Una mirada sobre la historia.

La palabra “magnetismo” evoca la antigua ciudad tesalonicense de Magnesia, en la mesopotamia asiática. Según registros provenientes de la Grecia antigua, en la citada ciudad se conocían rocas, cuyas extrañas propiedades eran semejantes a las de los imanes actuales. Lo extraño era que tales propiedades eran “naturales” en estas rocas. Este parece ser el inicio histórico del conocimiento acerca del magnetismo. Tales de Mileto y, probablemente, Sócrates se ocuparon del tema, y elaboraron algunas especulaciones (por supuesto a la manera griega¹).

Por su parte, los chinos también conocieron esta fenomenología. A ellos se les atribuye la primera observación del magnetismo terrestre, y su conexión con la orientación de objetos magnéticos. Tanto en Grecia como en China, parece que este conocimiento fue adquirido algunos siglos antes de Cristo.

El primer objeto verdaderamente trascendental que aportó el magnetismo, fue la “brújula”. Bastará evaluar el cambio operado en la navegación a partir de su implementación, para estimar su importancia. Tal vez, podríamos situar el nacimiento de la brújula como un hito histórico, en el que se sintetiza el valor de las conexiones surgidas de la observación cuidadosa de hechos naturales. Esto no es trivial; y cuanto más conocimiento haya sobre los fenómenos físicos, más se amplía el horizonte de tales conexiones. “Pero hay que descubrirlas”.

Retomemos el hilo de la historia. El estado actual de conocimiento sobre el magnetismo, revela que la ventana que se abrió en Magnesia, dejaba ver muy poco de lo que habría dentro del basto laberinto. Es cierto también que las ventanas que se abren serán siempre un buen augurio, pero en este caso no se pudo ver, sino hasta dos mil años después, el segundo capítulo de la historia. ¿Casualidad o no? no lo sabremos. Pero un día en que los tránsitos de corriente eléctrica a través de conductores ya eran frecuentes, ocurrieron simultáneamente dos cosas: La primera fue que una brújula yacía cerca de un conductor, en el preciso momento en que circulaba por él una corriente. La segunda fue que alguien con capacidad de asombro y discernimiento, lo observó. Aquí surgió la clave de la concepción actual

¹No quisiera que el lector tome esta aclaración en un sentido que induzca a la desvalorización del pensamiento antiguo. En tal caso léase que los griegos vivieron mucho antes de los inicios de la ciencia moderna, por lo que sus formas de concebir la naturaleza estaba muy lejos de nuestro modo de pensar. Creo oportuno enfatizar aquí, que el pensamiento científico “debe” nutrirse de todas las vertientes, cosa que afortunadamente ha ocurrido con el legado de la Grecia antigua.

del magnetismo. Los trabajos de H. C. Oersted en 1820 establecieron la conexión entre fenómenos eléctricos y magnéticos, y desde entonces comenzó a vislumbrarse la posibilidad de una teoría unificada que vinculara ambas interacciones. En la década de 1860 se alcanzó la unificación en lo que se dio en llamar “teoría electromagnética clásica”, de la cual nos ocuparemos más adelante.

2 Corriente eléctrica y campo magnético.

La concepción actual acerca del magnetismo consiste en que tal interacción se dará entre dos partículas dotadas de carga eléctrica, cuando cada una de ellas se encuentre en movimiento. En tal sentido, diremos que las partículas involucradas interactúan mediante dos mecanismos que dan lugar a fuerzas bien diferenciables: la eléctrica y la magnética.

Puede que al lector le resulte algo extraño que la interacción magnética dependa del movimiento, especialmente pensando en el carácter relativo de este último. Si esto es así, resultará que ciertos observadores notarán la interacción magnética (los que ven moverse ambas partículas), mientras que otros observadores no notarán la interacción (los que ven al menos una de las partículas en reposo). La verdad es que suena raro. Pero las evidencias mandan, y se han requerido mentes brillantes (y especialmente abiertas) para construir un marco teórico que respalde esta rareza (y otras tantas). La teoría moderna de la relatividad, que viera la luz hacia 1905 a partir de los trabajos de A. Einstein, tuvo entre sus objetivos originales, la misión de dar sustento “mecánico” a las extrañas conclusiones que surgían del electromagnetismo.

De la misma manera que la interacción eléctrica, la interacción magnética puede ser tratada como un campo. En efecto, puede definirse un “campo magnético” que, en general, dependerá de la posición y del tiempo. Sus fuentes serán las cargas en movimiento, ya sea individualmente o en la forma colectiva habitual de corrientes eléctricas. ¿Sobre qué se hará notar? Sobre otras cargas en movimiento (o corrientes). El campo magnético es una propiedad acechante, que “habita” en el espacio esperando que partículas viajeras pasen bajo su influencia.

3 Magnetostática. Ley de Biot-Savart.

La magnetostática constituye el estudio de las interacciones magnéticas, que pueden ser representadas por campos magnéticos independientes del tiempo. Esto sólo puede darse cuando las fuentes del campo son corrientes “estacionarias”. Esto

es, corrientes que no dependen del tiempo. Los campos que pueden encuadrarse en este requerimiento son los que surgen de la ley de Biot-Savart, que enunciamos a continuación.

Consideremos una región del espacio en que existe una distribución de corriente estacionaria, cuya densidad volumétrica es $\vec{J}(\vec{r}')$. Supongamos que la misma da origen a un campo magnético $\vec{B}(\vec{r})$ que ocupa la misma región. Entonces, el elemento de corriente que ocupa el volumen infinitesimal dv situado en \vec{r}' , contribuye con un aporte $d\vec{B}$ al campo magnético en el punto \vec{r} dado por

$$d\vec{B}(\vec{r}) = k' \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv \quad (1)$$

donde la constante k' en el sistema MKS vale

$$k' = 10^{-7} \frac{Tm}{A} \quad (2)$$

Esta es la forma diferencial de la ley de Biot-Savart, que admite ser integrada directamente por aplicación del principio de superposición. Así tendremos

$$\vec{B}(\vec{r}) = k' \int_D \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv \quad (3)$$

donde D representa el dominio donde hay corrientes.

Expresión de bolsillo: Una forma de recordar la ley de Biot-Savart consiste en definir un vector \vec{u} como sigue

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{r} - \vec{r}' \\ u &= |\vec{r} - \vec{r}'| \end{aligned} \quad \check{u} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (4)$$

con lo que obtenemos

$$\vec{B}(\vec{r}) = k' \int_D \frac{\vec{J} \times \check{u}}{u^2} dv \quad (5)$$

Nunca será suficiente insistir en que esta expresión “no es” la ley de Biot-Savart, sino un ayuda memoria para “construir” la expresión correcta.

4 Circuitos como fuentes de campo magnético.

Muchas veces el campo magnético se origina por la circulación de corriente estacionaria en un circuito. Supongamos que el conductor que forma el circuito es suficientemente delgado, comparado con las dimensiones generales del circuito, y que no resulta de interés el campo magnético “dentro” del conductor. Entonces podemos modelar la distribución de fuentes como una curva sobre la que circula una corriente única. Sea C una curva cerrada que representa la forma del circuito, y sea I la corriente que circula por el circuito. Entonces la ley de Biot-Savart toma la forma simplificada siguiente

$$\vec{B}(\vec{r}) = k' \int_C \frac{I d\vec{l}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (6)$$

donde $d\vec{l}$ es un elemento infinitesimal de la curva C , orientado en el sentido en que circula la corriente.

5 Ejemplo 1: Hilo recto de longitud finita.

El lector podrá preguntarse, ¿Cómo es posible que exista este tipo de fuentes? Y la pregunta es muy razonable, dado que no podrá establecerse una corriente estacionaria en tal sistema. Sin embargo, el principio de superposición nos permite analizar los circuitos “por partes”, y luego sumar los resultados. Por ejemplo, una espira cuadrada genera un campo de inducción magnética \vec{B} que puede estudiarse como la suma de cuatro contribuciones del tipo “hilo recto de longitud finita”.

La geometría del problema sugiere el uso de coordenadas cilíndricas ρ , ϕ y z . En la figura se ha elegido que el plano del papel contenga al hilo y al punto donde queremos calcular el campo de inducción magnética (observe que esto no le resta generalidad al análisis). El origen de coordenadas fue elegido en el punto medio del hilo. Luego indicamos en la figura 16 un elemento de corriente $I d\vec{l}$ y su contribución al campo $d\vec{B}$ (por simplificar el dibujo, hemos omitido los vectores \vec{r} y \vec{r}' , que el lector podrá situar fácilmente). La ley de Biot-Savart nos da la siguiente relación diferencial

$$d\vec{B}(\vec{r}) = k' \frac{I d\vec{l}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (7)$$

Tanto el vector $d\vec{l}(\vec{r}')$ como el $\vec{r} - \vec{r}'$ están contenidos en el plano del dibujo. Por tanto, la contribución $d\vec{B}(\vec{r})$ será perpendicular a dicho plano. Como esto se repite para

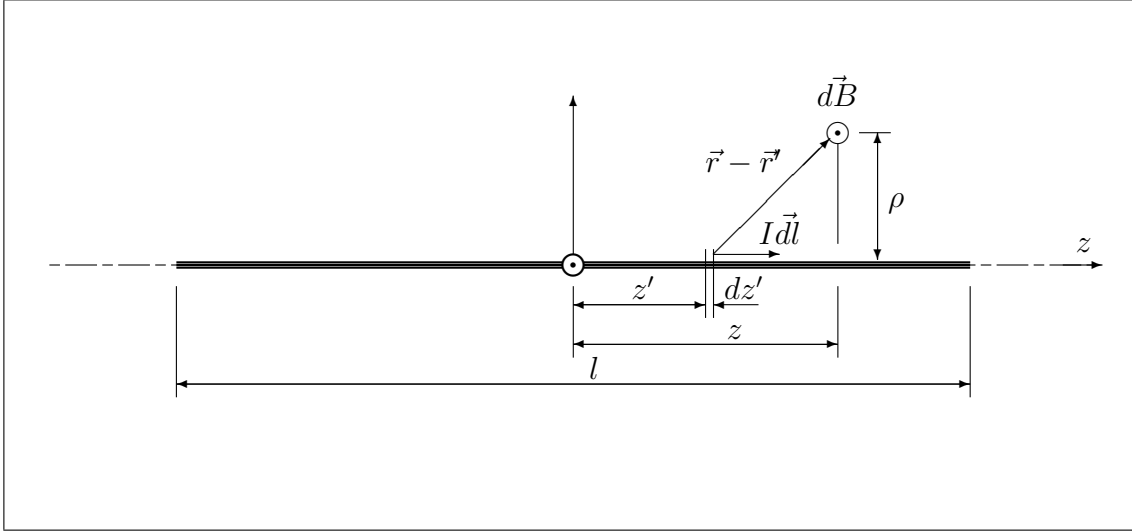


Figure 1: Esquema de los elementos geométricos involucrados en el cálculo del campo de inducción magnética \vec{B} , producido por un hilo recto de longitud l por el que circula una corriente constante I .

todos los elementos de corriente, concluimos que el campo de inducción magnética integrado $\vec{B}(\vec{r})$ tiene dirección perpendicular al plano del dibujo. Por otra parte, el campo es insensible a rotaciones alrededor del eje z , por lo que cabe interpretar que sólo tiene componente azimutal, y que la misma no depende de la coordenada ϕ . Entonces

$$B_\rho = B_z = 0 \quad B_\phi = B_\phi(\rho, z) \quad (8)$$

Esta última conclusión nos indica que sólo debemos calcular la componente B_ϕ . Para ello, reconozcamos que

$$d\vec{l} = dz' \check{k} \quad (9)$$

y utilizando las formas simplificadorias (4) tenemos

$$dB_\phi(\vec{r}) = k'I \frac{|\vec{dl} \times \check{u}|}{u^2} \quad (10)$$

Sea β el ángulo entre los vectores \vec{dl} y \check{u} , entonces tenemos

$$B_\phi(\vec{r}) = k'I \int_C \frac{|\vec{dl} \times \check{u}|}{u^2} = k'I \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\sin(\beta) dz'}{u^2} \quad (11)$$

que explícitamente toma la forma

$$B_\phi(\vec{r}) = k'I \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\rho dz'}{[\rho^2 + (z - z')^2]^{3/2}} = \frac{k'I}{\rho^2} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dz'}{\left[1 + \left(\frac{z-z'}{\rho}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (12)$$

Esta integral puede resolverse mediante la siguiente sustitución trigonométrica

$$\frac{z - z'}{\rho} = tg(w) \quad \rightarrow \quad -\frac{dz'}{\rho} = \frac{dw}{\cos^2(w)} \quad (13)$$

con lo que la integral toma la forma

$$B_\phi(\vec{r}) = -\frac{k'I}{\rho} \int_{w_1}^{w_2} \frac{dw}{[1 + tg^2(w)]^{3/2} \cos^2(w)} \quad (14)$$

Utilizando identidades trigonométricas tenemos

$$1 + tg^2(w) = 1 + \frac{\sin^2(w)}{\cos^2(w)} = \frac{\cos^2(w) + \sin^2(w)}{\cos^2(w)} = \frac{1}{\cos^2(w)} \quad (15)$$

Reemplazando, podemos resolver la integral

$$B_\phi(\vec{r}) = -\frac{k'I}{\rho} \int_{w_1}^{w_2} \cos(w) dw = -\frac{k'I}{\rho} [\sin(w_2) - \sin(w_1)] \quad (16)$$

Ahora recordamos una identidad trigonométrica no tan conocida (aunque ya la habíamos recordado algún tiempo atrás)

$$\sin(w) = \frac{tg(w)}{\sqrt{1 + tg^2(w)}} \quad (17)$$

Utilizándola tenemos

$$\sin(w) = \frac{\frac{z-z'}{\rho}}{\sqrt{1 + \left(\frac{z-z'}{\rho}\right)^2}} = \frac{z - z'}{\sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}} \quad (18)$$

con lo que el resultado final toma la forma

$$B_\phi(\rho, z) = \frac{k'I}{\rho} \left[\frac{z + \frac{l}{2}}{\sqrt{\rho^2 + \left(z + \frac{l}{2}\right)^2}} - \frac{z - \frac{l}{2}}{\sqrt{\rho^2 + \left(z - \frac{l}{2}\right)^2}} \right] \quad (19)$$

Este resultado pone de manifiesto un problema habitual inherente al uso de coordenadas cilíndricas o esféricas. La componente B_ϕ se indetermina cuando ρ tiende a cero². Analicemos este límite, modificando adecuadamente la expresión. (19).

$$B_\phi(\rho, z) = \frac{k'I}{\rho} \left[\frac{\operatorname{sgn}\left(z + \frac{l}{2}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{z + \frac{l}{2}}\right)^2}} - \frac{\operatorname{sgn}\left(z - \frac{l}{2}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{z - \frac{l}{2}}\right)^2}} \right] \quad (20)$$

²Esto mismo puede ocurrir en otros campos con la componente radial.

Con excepción de los extremos del hilo, siempre es posible acercarse al eje z lo suficiente para que valgan las siguientes aproximaciones

$$\frac{\rho}{z + \frac{l}{2}} \ll 1 \quad \frac{\rho}{z - \frac{l}{2}} \ll 1 \quad (21)$$

Reemplazando en (20) y desarrollando cada término a primer orden en serie de Taylor alrededor de $\rho = 0$, tenemos

$$B_\phi(\rho, z) = \frac{k'I}{\rho} \left[\operatorname{sgn}\left(z + \frac{l}{2}\right) \left(1 - \frac{\rho^2}{2\left(z + \frac{l}{2}\right)^2}\right) - \operatorname{sgn}\left(z - \frac{l}{2}\right) \left(1 - \frac{\rho^2}{2\left(z - \frac{l}{2}\right)^2}\right) \right] \quad (22)$$

Aquí conviene definir la función $f(z)$ dada por

$$f(z) = -\frac{\operatorname{sgn}\left(z + \frac{l}{2}\right)}{2\left(z + \frac{l}{2}\right)^2} + \frac{\operatorname{sgn}\left(z - \frac{l}{2}\right)}{2\left(z - \frac{l}{2}\right)^2} \quad (23)$$

Esta función se indetermina en $z = -l/2$ y en $z = l/2$, por lo que excluimos dichos puntos de su dominio. Entonces la componente B_ϕ próxima al eje z puede reescribirse en forma compacta como sigue

$$B_\phi(\rho, z) = \begin{cases} \frac{k'I}{\rho} [2 + \rho^2 f(z)] & \text{si } -\frac{l}{2} < z < \frac{l}{2} \\ k'I\rho f(z) & \text{si } z < -\frac{l}{2} \text{ o } \frac{l}{2} < z \end{cases} \quad (24)$$

Ahora estamos en condiciones de evaluar el límite para ρ tendiendo a cero.

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} B_\phi(\rho, z) = \begin{cases} \rightarrow \infty & \text{si } -\frac{l}{2} < z < \frac{l}{2} \\ 0 & \text{si } z < -\frac{l}{2} \text{ o } \frac{l}{2} < z \end{cases} \quad (25)$$

Este resultado permite observar algunas cuestiones físicamente interesantes. En primer lugar, permite visualizar que sobre la recta que contiene al hilo, no aparecen influencias magnéticas (note que esta conclusión hubiera sido más directa por simple observación de la ley de Biot-Savart). Por otra parte, el campo de inducción magnética \vec{B} se indetermina sobre el hilo. Este resultado es claramente “no físico” y podemos atribuirlo al “modelo”, que parte de suponer que un hilo puede tener radio nulo³.

³Este resultado se repite en todos los casos en que la distribución de corriente se modela como una curva. Sin embargo, en general no será fácil de visualizar matemáticamente excepto en el caso de segmentos rectos.

6 Ejemplo 2: Hilo recto infinito.

El resultado obtenido en (19), o su forma modificada (20), pueden ser fácilmente extendidos al caso infinitamente largo. Para ello, bastará hacer el límite para l tendiendo a infinito. esto es

$$B_{\phi}(\rho, z) = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{k'I}{\rho} \left[\frac{\operatorname{sgn}\left(z + \frac{l}{2}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{z + \frac{l}{2}}\right)^2}} - \frac{\operatorname{sgn}\left(z - \frac{l}{2}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{z - \frac{l}{2}}\right)^2}} \right] \quad (26)$$

Observando que para todo z finito, las funciones signo tienden respectivamente a 1 y -1 , concluimos que el corchete tiende a 2. Entonces tenemos

$$B_{\phi}(\rho) = \frac{2k'I}{\rho} \quad (27)$$

Nótese en este resultado que desapareció la dependencia con la coordenada z (como el estudiante seguramente habrá previsto, al investigar la simetría).

7 Ejemplo 3: Espira circular (Campo en el eje).

Una espira es un anillo de alambre (conductor), cuyo radio R es mucho mayor que el diámetro de la sección transversal del alambre. Supongamos que por la espira circula una corriente estacionaria I . Buscaremos ahora el campo magnético \vec{B} en un punto del eje de simetría de la espira. Para ello, situamos el origen de coordenadas en el centro de la espira, y orientamos el eje z a lo largo del eje. Entonces el punto campo será $\vec{r} = (0, 0, z)$. Argumentos de simetría permiten reconocer que las componentes del campo \vec{B} perpendiculares al eje z son nulas.

$$B_x(0, 0, z) = B_y(0, 0, z) = 0 \quad (28)$$

Este es un problema que admite varios caminos para su resolución. Aquí no elegimos el más simple o directo, sino el que nos enseña un poco del manejo formal de vectores. Comencemos por identificar los vectores requerido en la ley de Biot-Savart. Para fijar ideas, supongamos que la corriente circula en sentido antihorario, cuando miramos la espira desde un punto situado en el semieje positivo de z .

$$\begin{aligned} \vec{r} &= (0, 0, z) \\ \vec{r}' &= (R \cos(\theta'), R \sin(\theta'), 0) \\ d\vec{l} &= (-R \sin(\theta') d\theta', R \cos(\theta') d\theta', 0) \end{aligned} \quad \begin{aligned} \vec{r} - \vec{r}' &= (-R \cos(\theta'), -R \sin(\theta'), z) \\ |\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{R^2 + z^2} \end{aligned} \quad (29)$$

Una versión levemente modificada de la ley de Biot-Savart escrita en la componente z , viene dada por

$$B_z(0,0,z) = k'I \int_C \frac{[\vec{dl}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')]_z}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (30)$$

Analicemos el producto vectorial

$$[\vec{dl} \times (\vec{r} - \vec{r}')]_z = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ -R \sin(\theta') d\theta' & R \cos(\theta') d\theta' & 0 \\ -R \cos(\theta') & -R \sin(\theta') & z \end{vmatrix}_z = R^2 d\theta' \quad (31)$$

Reemplazando en la integral tenemos

$$B_z(0,0,z) = k'I \int_0^{2\pi} \frac{R^2 d\theta'}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{k'IR^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\theta' \quad (32)$$

Con lo que finalmente tenemos

$$B_z(0,0,z) = \frac{2\pi k'IR^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad (33)$$

Insistimos en que este resultado puede obtenerse de formas más simples, por lo que sería muy provechoso que el estudiante intente otras variantes. Usted tendrá aquí la ventaja de saber de antemano el resultado. Pocas veces uno tiene este privilegio, por lo que la sugerencia es que no pierda la oportunidad de probar.

8 Ejemplo 4: Solenoide (Campo en el eje).

Un solenoide es un arrollamiento de espiras apretadas sobre un soporte cilíndrico. Este arrollamiento suele construirse con alambre de cobre, que posee un esmaltado como recurso de aislación. Gracias a dicho esmaltado, es posible poner las espiras en contacto mecánico, sin que ocurra el contacto eléctrico. El soporte cilíndrico puede omitirse en el modelo, salvo que sus propiedades magnéticas sean relevantes.

Ahora modelamos. Dado que conocemos el campo magnético producido por una única espira, es factible pensar al solenoide como una colección secuencial de N espiras de radio R , que forman una “superficie” cilíndrica de longitud l . Supongamos que el origen de coordenadas está exactamente en el centro del solenoide, y que el eje z corre a lo largo de su eje de simetría. Estamos interesados en determinar el campo de inducción magnética \vec{B} en puntos del eje z , por lo que, sin pérdida de generalidad, nos referiremos al punto P (ver figura ??)⁴. Como las espiras son

⁴Aunque el punto P ha sido elegido “dentro” del solenoide, el análisis que sigue será válido para cualquier localización sobre el eje.

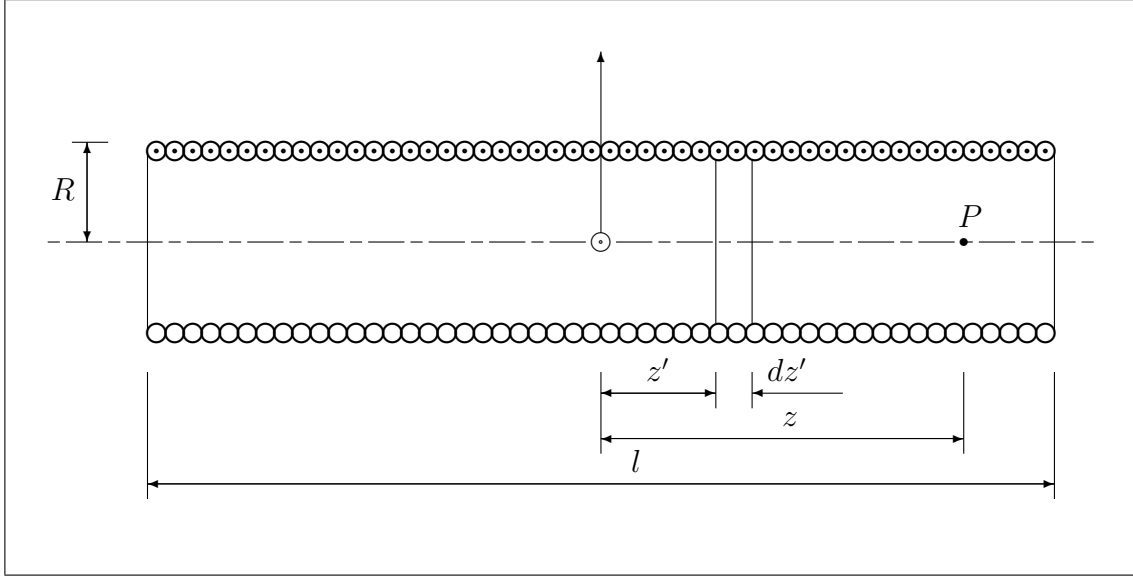


Figure 2: Esquema de los elementos geométricos utilizados para la determinación del campo de inducción magnética \vec{B} en el eje de un solenoide de radio R y longitud l .

“coaxiales”, la suma de sus contribuciones al campo de inducción magnética sólo tendrá componente z . Esto es

$$B_x (0, 0, z) = B_y (0, 0, z) = 0 \quad (34)$$

Consideremos las espiras que se encuentran en el intervalo comprendido entre z' y $z' + dz'$. Su contribución a la componente B_z en P será de la forma (33), aunque algo adaptada a la geometría del solenoide

$$dB_z (0, 0, z) = \frac{2\pi k' R^2}{[R^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \left(\frac{IN dz'}{l} \right) \quad (35)$$

donde la expresión entre paréntesis representa la parte proporcional de la corriente total del solenoide, que queda comprendida en el intervalo citado. El problema se resuelve integrando esta expresión. Así tenemos

$$B_z (0, 0, z) = \frac{2\pi k' IN R^2}{l} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dz'}{[R^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \quad (36)$$

o equivalentemente

$$B_z (0, 0, z) = \frac{2\pi k' IN}{lR} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dz'}{\left[1 + \left(\frac{z - z'}{R} \right)^2 \right]^{3/2}} \quad (37)$$

Esta integral es formalmente idéntica a la (12), Por lo que su resolución recorre el mismo camino desde la expresión (12) hasta la (19). La correspondiente sustitución será

$$\frac{z - z'}{R} = \operatorname{tg}(w) \quad \rightarrow \quad -\frac{dz'}{R} = \frac{dw}{\cos^2(w)} \quad (38)$$

siguiendo los mismos lineamientos, tenemos

$$B_z(0, 0, z) = \frac{2\pi k' IN}{l} \left[\frac{z + \frac{l}{2}}{\sqrt{R^2 + \left(z + \frac{l}{2}\right)^2}} - \frac{z - \frac{l}{2}}{\sqrt{R^2 + \left(z - \frac{l}{2}\right)^2}} \right] \quad (39)$$

9 Fuerza magnética.

Hasta este punto nos ocupamos de la producción de campos de inducción magnética, a partir de corrientes estacionarias. Ahora abordaremos la descripción de los efectos que tienen lugar cuando estos campos influyen sobre partículas en movimiento. Comencemos por suponer que en cierta región del espacio existe un campo de inducción magnética $\vec{B}(\vec{r})$ estacionario. Si en dicha región viaja una partícula de carga Q , con velocidad \vec{v} , el campo ejercerá una fuerza \vec{F} sobre ella, dada por

$$\vec{F} = Q\vec{v} \times \vec{B} \quad (40)$$

Esta es la fuerza magnética o fuerza de Lorentz. Algunos detalles saltan a primera vista. Note que la fuerza es perpendicular a la velocidad, y por tanto, al desplazamiento. Inmediatamente se sigue que la fuerza magnética no puede realizar trabajo sobre las partículas que se mueven bajo su influencia. El teorema de trabajo y energía nos permite concluir que, si la partícula está exclusivamente afectada por fuerzas magnéticas, su energía cinética se mantendrá invariante. En otras palabras, las fuerzas magnéticas pueden alterar la dirección de la velocidad de la partícula, pero no su módulo.

Ahora centraremos la atención en el caso en que las partículas cargadas viajan por un conductor largo de pequeña sección, dando lugar a una corriente eléctrica. Aquí las interacciones microscópicas entre los electrones de conducción y los iones fijos de la red que forma el soporte sólido, hacen que la fuerza se manifieste directamente como un efecto macroscópico sobre el conductor. Supongamos nuevamente que un campo de inducción magnética $\vec{B}(\vec{r})$ ha sido establecido en la región del espacio

en la que yace un conductor por el que circula corriente I . Sea \vec{dl} un elemento de la curva que describe el conductor, orientado en el sentido de circulación de la corriente. Entonces, la fuerza que “ejerce el campo” sobre el elemento de conductor que se encuentra sobre el tramo de curva dl viene dada por

$$d\vec{F} = I\vec{dl} \times \vec{B} \quad (41)$$

La fuerza total sobre el conductor se obtiene por integración sobre la curva que contiene al circuito.

$$\vec{F} = \int_C I\vec{dl} \times \vec{B} \quad (42)$$

Es interesante notar que, aunque la curva que contiene a un circuito es cerrada, no hemos utilizado la notación para integrales cerradas. Esto se debe a que generalmente es de interés la fuerza magnética que actúa sobre un tramo del circuito, y no sobre el circuito completo.

10 Ejemplo 5: Órbitas en campos uniformes.

Supongamos que un campo de inducción magnética uniforme \vec{B}_0 ocupa todo el espacio. Para fijar ideas, supongamos que el mismo está orientado en el sentido positivo del eje z . Por otra parte, supongamos que una partícula de masa m y carga Q , es lanzada con velocidad inicial \vec{v}_0 , desde el origen de coordenadas. Entonces los vectores involucrados son

$$\vec{B}_0 = (0, 0, B_0) \quad \vec{r}_0 = (0, 0, 0) \quad \vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}) \quad (43)$$

Combinando la fuerza de Lorentz con la segunda ley de Newton, tenemos

$$\vec{F} = Q\vec{v} \times \vec{B}_0 = m\vec{a} \quad (44)$$

donde \vec{v} y \vec{a} son los vectores que representan instantáneamente la velocidad y aceleración de la partícula. Desarrollemos

$$\begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ Qv_x & Qv_y & Qv_z \\ 0 & 0 & B_0 \end{vmatrix} = m (a_x, a_y, a_z) \quad (45)$$

De aquí obtenemos las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} QB_0 v_y &= m \frac{dv_x}{dt} \\ -QB_0 v_x &= m \frac{dv_y}{dt} \\ 0 &= m \frac{dv_z}{dt} \end{aligned} \quad (46)$$

La tercera de las ecuaciones tiene una solución inmediata. Ya que se trata de una derivada primera igualada a cero, tenemos que la velocidad mantendrá constante la componente z , es decir, la componente paralela al campo \vec{B}_0 . Aplicando las condiciones iniciales tenemos

$$\begin{aligned} v_z(t) &= v_{0z} \text{ (constante)} \\ z(t) &= v_{0z}t \end{aligned} \quad (47)$$

Las otras dos ecuaciones pueden desacoplarse derivándolas y reemplazando

$$\begin{aligned} -\left(\frac{QB_0}{m}\right)^2 v_x &= \frac{d^2 v_x}{dt^2} \\ -\left(\frac{QB_0}{m}\right)^2 v_y &= \frac{d^2 v_y}{dt^2} \end{aligned} \quad (48)$$

Cada una de estas ecuaciones diferenciales puede ser resuelta por separado. Como la velocidad es la derivada primera de la posición respecto del tiempo, la primera integración es directa. Administrando cuidadosamente las constantes, tenemos

$$\begin{aligned} -\left(\frac{QB_0}{m}\right)^2 (x - x_c) &= \frac{d^2 x}{dt^2} & o \text{ bien } & \frac{d^2 (x - x_c)}{dt^2} + \left(\frac{QB_0}{m}\right)^2 (x - x_c) = 0 \\ -\left(\frac{QB_0}{m}\right)^2 (y - y_c) &= \frac{d^2 y}{dt^2} & & \frac{d^2 (y - y_c)}{dt^2} + \left(\frac{QB_0}{m}\right)^2 (y - y_c) = 0 \end{aligned} \quad (49)$$

donde x_C e y_C son constantes de integración a determinar. Las formas de la derecha han sido incorporadas para que el estudiante recuerde los osciladores armónicos. En efecto, ellos tenían la misma ecuación diferencial, y por tanto, la misma clase de soluciones. Entonces no hace falta calcular. Simplemente escribimos las soluciones y sus derivadas primeras, que serán útiles después

$$\begin{aligned} x - x_C &= A_x \sin(\omega t + \phi_x) & y - y_C &= A_y \sin(\omega t + \phi_y) \\ v_x &= A_x \omega \cos(\omega t + \phi_x) & v_y &= A_y \omega \cos(\omega t + \phi_y) \end{aligned} \quad (50)$$

donde las amplitudes A_x y A_y , junto con las fases iniciales ϕ_x y ϕ_y son constantes a determinar, mientras que la frecuencia angular ω es la misma en ambas soluciones y vale

$$\omega = \frac{QB_0}{m} \quad (51)$$

En el instante inicial tendremos

$$\begin{aligned} -x_C &= A_x \sin(\phi_x) & -y_C &= A_y \sin(\phi_y) \\ v_{0x} &= A_x \omega \cos(\phi_x) & v_{0y} &= A_y \omega \cos(\phi_y) \end{aligned} \quad (52)$$

El panorama podrá resultar algo desalentador, si observamos que disponemos de cuatro condiciones iniciales y seis constantes a determinar. Pero no hay que alarmarse, especialmente si recordamos que las fuerzas magnéticas, cuando actúan solas, cuidan de no cambiar la energía cinética. Esto puede escribirse como sigue

$$\frac{1}{2}m \left[v_{0x}^2 + v_{0y}^2 \right] = \frac{1}{2}m\omega^2 \left[A_x^2 \cos^2(\omega t + \phi_x) + A_y^2 \cos^2(\omega t + \phi_y) \right] \quad (53)$$

Esta expresión merece una atención muy especial, porque probablemente nunca hayamos tratado algo parecido. Comencemos por observar que el primer miembro es constante, mientras que el segundo es una función del tiempo. Como la igualdad debe cumplirse para todo tiempo t , el corchete del segundo miembro debe ser constante. Esto sólo puede lograrse haciendo

$$A_y = A_x \quad y \quad \cos(\omega t + \phi_y) = \sin(\omega t + \phi_x) = \cos\left(\omega t + \phi_x - \frac{\pi}{2}\right) \quad (54)$$

de donde se concluye que

$$\phi_y = \phi_x - \frac{\pi}{2} \quad (55)$$

Para simplificar la notación hacemos $A = A_x$ y $\phi = \phi_x$, con lo que las condiciones iniciales toman la forma

$$\begin{aligned} -x_C &= A \sin(\phi) & y_C &= A \cos(\phi) \\ v_{0x} &= A\omega \cos(\phi) & v_{0y} &= A\omega \sin(\phi) \end{aligned} \quad (56)$$

Ahora si tenemos cuatro ecuaciones y cuatro constantes a determinar. Con un poco de trabajo llegamos a

$$A = \frac{1}{\omega} \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} \quad \phi = \arctg\left(\frac{v_{0y}}{v_{0x}}\right) \quad \begin{aligned} x_C &= -A \sin(\phi) \\ y_C &= A \cos(\phi) \end{aligned} \quad (57)$$

Con esto quedan completamente caracterizadas las funciones del tiempo que describen la posición de la partícula. Las pasamos en limpio para analizarlas.

$$\begin{aligned} x - x_C &= A \sin(\omega t + \phi) \\ y - y_C &= A \cos(\omega t + \phi) \\ z &= v_{0z}t \end{aligned} \quad (58)$$

Entre las dos primeras funciones podemos eliminar el tiempo para tener una idea de la trayectoria. Para ello, elevamos al cuadrado ambas funciones, y luego las sumamos. Así obtenemos

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = A^2 \quad (59)$$

Esta es la relación funcional que define una circunferencia de radio A , centrada en (x_C, y_C) . Observando que el movimiento contiene además un desplazamiento uniforme en z , concluimos que la órbita será una hélice de paso constante alrededor de un eje paralelo al campo \vec{B}_0 que pasa por (x_C, y_C) . La misma se desarrolla sobre una superficie cilíndrica de radio A .

11 Las leyes integrales de la magnetostática.

Cuando tratamos la electrostática, analizamos el comportamiento del campo \vec{E} bajo dos miradas integrales. En la ley de Gauss estudiamos el flujo de \vec{E} a través de cualquier superficie cerrada. Luego, vimos que también resultaba conservativo al analizar la circulación sobre cualquier curva cerrada. Ahora nos proponemos hacer los mismos análisis sobre el campo de inducción magnética \vec{B} . Estos resultados podrían derivarse de la ley de Biot-Savart, pero nosotros no haremos tales deducciones. Nos limitaremos a dar enunciados precisos y centraremos la atención en sus consecuencias más importantes.

12 Ley de Gauss magnética.

Consideremos una región del espacio en la que existe un campo de inducción magnética $\vec{B}(\vec{r})$ invariante con el tiempo. Sea S una superficie cerrada imaginaria cualquiera que se encuentra en la región. Sea \vec{ds} el nombre genérico de los vectores diferenciales normales exteriores de la superficie S . Entonces, el flujo del campo de inducción magnética $\vec{B}(\vec{r})$ a través de la superficie cerrada S , es siempre nulo.

$$\oint_S \vec{B} \cdot \vec{ds} = 0 \quad (60)$$

A partir de este enunciado podemos sacar algunas conclusiones inmediatas. En primer lugar, recordemos brevemente el caso electrostático. En ese caso, el flujo era proporcional a la carga eléctrica neta encerrada por la superficie, y decíamos que las cargas eran las “fuentes escalares” del campo. Además era precisamente en las cargas donde empezaban y terminaban las líneas de campo.

La ley de Gauss magnética, por analogía nos dice que el campo de inducción magnética $\vec{B}(\vec{r})$ “no posee fuentes escalares”. En otras palabras, no existe un análogo magnético de la carga eléctrica. A la vez, de esta propiedad se desprende que las líneas del campo $\vec{B}(\vec{r})$ no tienen ni inicio ni fin. Esto sugiere que las mismas son necesariamente cerradas.

13 Ley de Ampere.

Consideremos una región del espacio en que yace una distribución de corriente estacionaria $\vec{J}(\vec{r})$, y el campo de inducción magnética $\vec{B}(\vec{r})$ que ella produce. Sea C

una curva simple cerrada cualquiera, y sea S una cualquiera de las superficies limitadas por la curva C . Sea \vec{dl} un elemento de longitud de la curva C , cuya orientación ha sido elegida arbitrariamente. Sea \vec{ds} un elemento de área de la superficie S , cuya orientación cumple con la regla de la mano derecha respecto de \vec{dl} . Entonces, La circulación del campo de inducción magnética $\vec{B}(\vec{r})$ a lo largo de la curva cerrada C , es proporcional al flujo de la densidad de corriente $\vec{J}(\vec{r})$ a través de la superficie S .

$$\oint_C \vec{B} \cdot \vec{dl} = 4\pi k' \int_S \vec{J} \cdot \vec{ds} \quad (61)$$

Expresión de bosillo: La ley de Ampere suele recordarse observando que la integral del segundo miembro es la corriente que atraviesa la superficie S . Llamando I_S a tal corriente podemos escribir

$$\oint_C \vec{B} \cdot \vec{dl} = 4\pi k' I_S \quad (62)$$

La principal observación que surge de la ley de Ampere es que el campo de inducción magnética $\vec{B}(\vec{r})$ es “no conservativo”. Por lo tanto no será posible derivarlo de un potencial escalar, tal como hacíamos con el campo electrostático. Por otra parte, esta ley puede utilizarse para el cálculo del campo $\vec{B}(\vec{r})$ en casos muy particulares, en los que la distribución de corrientes presentan muy alta simetría.

14 Otra vuelta de tuerca sobre simetrías.

Y otra vez la cuestión de las simetrías... Pero ahora en relación con la ley de Ampere. ¿Qué nuevo condimento tienen los fenómenos magnéticos? Aparece una diferencia fundamental, residente en que las fuentes del campo $\vec{B}(\vec{r})$ son fuentes vectoriales (corrientes estacionarias). Esta diferencia con el caso electrostático (en que las fuentes eran escalares) genera una nueva variante de simetría, que en algunas áreas de la física suelen llamarse simetrías magnéticas⁵.

Como siempre, estamos interesados en extraer conclusiones acerca de las componentes de $\vec{B}(\vec{r})$, por observación de la simetría de la distribución de corrientes. Para ello, comencemos por reconocer dos propiedades simples que surgen de la ley de Biot-Savart

$$\vec{B}(\vec{r}) = k' \int_D \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv \quad (63)$$

⁵Por ejemplo en cristalografía.

Supongamos que D representa el dominio sobre el que se desarrolla la distribución de corriente. Así tendremos

a) Si la dirección de $\vec{J}(\vec{r}')$ es la misma sobre todo el dominio D , entonces la componente del campo $\vec{B}(\vec{r})$ en dicha dirección es nula.

b) Si la distribución de corrientes se invierte (es decir que se cambia $\vec{J}(\vec{r}')$ por $-\vec{J}(\vec{r}')$), entonces el campo $\vec{B}(\vec{r})$ también se invierte. Esto es, $\vec{B}(\vec{r})$ se convierte en $-\vec{B}(\vec{r})$.

Veamos cómo operan estos conceptos en algunos ejemplos de alta simetría.

I) **Hoja de corriente plana infinitamente extendida:** Consideremos un plano infinitamente extendido sobre el cual se desarrolla una corriente uniforme, que cabe ser descripta por una “densidad superficial” constante $\vec{\kappa}$. Note que $\vec{\kappa}$ hace las veces de \vec{J} en problemas donde la distribución se desarrolla sobre dominios superficiales (su unidad será A/m). Para analizar las componentes del campo $\vec{B}(\vec{r})$, elegimos un punto P cualquiera, no contenido en el plano. Sin pérdida de generalidad, podemos elegir el eje z pasando por P en dirección perpendicular al plano de corrientes. El origen lo elegimos en el pie de dicha perpendicular sobre el plano. El eje x lo elegimos coincidente con la dirección de $\vec{\kappa}$, y eje y (por supuesto sobre el plano) de modo que forme una terna directa.

Apliquemos ahora las condiciones a y b . Como los vectores $\vec{\kappa}$ apuntan todos en dirección x la condición a puede aplicarse, por lo que la componente B_x es nula. Ahora imaginemos una rotación en π alrededor del eje z . Recordando que el campo está “atado” a sus fuentes, $\vec{B}(\vec{r})$ gira con el sistema. Al completar el giro, la distribución de fuentes se invirtió respecto de su posición original. Esto es, equivalente a decir que se cambió $\vec{\kappa}$ por $-\vec{\kappa}$. Sin embargo, la componente B_z se mantuvo inalterada. Por tanto B_z entra en contradicción con la propiedad b derivada de la ley de Biot-Savart. Entonces, B_z debe ser nula. Así concluimos que la única componente no nula de \vec{B} es B_y . Indagamos ahora acerca de su variabilidad en el espacio. Si la distribución se traslada distancias arbitrarias en x y en y , su aspecto es invariante para un observador situado en P . Por tanto, el campo no puede depender de las coordenadas x e y . Entonces concluimos que el campo de inducción magnética $\vec{B}(\vec{r})$, toma la forma simple

$$\vec{B}(\vec{r}) = B_y(z) \hat{j} \quad (64)$$

II) **Cilindro infinito con corriente axial:** Consideremos ahora un objeto conductor infinitamente largo, por él circula una corriente axial cuya densidad volumétrica \vec{J} depende exclusivamente de la coordenada radial ρ . Esto es, en coordenadas cilíndricas

$$\vec{J}(\vec{r}) = J_z(\rho) \hat{k} \quad (65)$$

donde el eje z corre a lo largo del eje del sistema. Nuevamente elegimos un punto P no contenido en el eje de la distribución. Como \vec{J} tiene dirección z en todo

el dominio, la componente B_z en P debe ser nula. Ahora imaginemos un eje que pasa por P y corta perpendicularmente al eje z . Si giramos la distribución en π alrededor del eje que pasa por P , su nuevo aspecto tiene los vectores \vec{J} invertidos. Sin embargo, la componente B_ρ mantiene la orientación ante dicha rotación. Esto está en contradicción con la propiedad b , por lo que b_ρ debe ser nula. Para finalizar el análisis, reconozcamos que un observador situado en P no detecta cambios por rotaciones alrededor del eje de simetría, ni por traslaciones a lo largo del mismo. Entonces \vec{B} no puede depender ni de ϕ ni de z . Así concluimos que el campo de inducción magnética $\vec{B}(\vec{r})$ en este tipo de sistemas tendrá la forma

$$\vec{B}(\vec{r}) = B_\phi(\rho) \check{\phi} \quad (66)$$

15 Ejemplo 6:Hilo recto infinito.(otro enfoque).

Consideremos un hilo conductor recto infinitamente largo, por el que circula una corriente estacionaria I . Naturalmente, trabajamos en coordenadas cilíndricas. El análisis de la simetría nos permite concluir que la única componente no nula de $\vec{B}(\vec{r})$ es la azimutal y sólo depende de la coordenada radial ρ . Entonces

$$B_\rho = B_z = 0 \quad B_\phi = B_\phi(\rho) \quad (67)$$

De lo que inmediatamente se deduce que las líneas del campo $\vec{B}(\vec{r})$ son circunferencias contenidas en planos perpendiculares al hilo, cuyos centros están precisamente en el hilo. Esta simetría es especialmente apta para determinar el campo de inducción magnética utilizando la ley de Ampere.

Comencemos por elegir como curva de integración C , una línea de campo de radio ρ . La superficie S limitada por C puede ser el círculo de radio ρ contenido en el plano de la circunferencia. Para fijar ideas, supongamos que la corriente circula en el sentido positivo del eje z ⁶. Elegimos los vectores \vec{dl} en sentido antihorario visto desde el lado positivo del eje z . En consecuencia, los vectores \vec{ds} deben orientarse en el sentido positivo de z (regla de la mano derecha).

Trabajemos con el primer miembro de la ley de Ampere

$$\oint_C \vec{B} \cdot \vec{dl} = \oint_C B_\phi(\rho) \check{\phi} \cdot dl \check{\phi} = \oint_C B_\phi(\rho) dl \quad (68)$$

⁶Es interesante observar que la corriente es una magnitud escalar, por lo que le corresponde un signo. En tal sentido, la elección hecha aquí puede considerarse como una convención de signos. Esto significa que los resultados que se obtengan podrán ser utilizados aún cuando la corriente vaya en sentido contrario, siempre que al reemplazar su valor se respete su signo.

Como el dominio de integración tiene ρ constante, la componente $\vec{B}_\phi(\rho)$ puede salir de la integral. Entonces

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_\phi(\rho) \int_C dl = 2\pi\rho B_\phi(\rho) \quad (69)$$

Ahora pongamos atención en el segundo miembro de la ley de Ampere. Observemos que el dato del problema es la corriente I , con lo que podríamos utilizar simplemente la forma de bosillo. Sin embargo, corresponde una reflexión acerca del signo. En realidad, la corriente es el flujo del vector \vec{J} a través del área del conductor. Por su parte, el área del conductor en el plano de la espira forma parte de la superficie S . Por tanto, I debe considerarse positiva si atraviesa la superficie en el sentido de $d\vec{s}$ y negativa en caso contrario. Esto está en concordancia con nuestra elección de I por lo que no aparecen incompatibilidades de signo. Entonces tenemos

$$2\pi\rho B_\phi(\rho) = 4\pi k' I \quad (70)$$

De donde tenemos finalmente que

$$B_\phi(\rho) = \frac{2k' I}{\rho} \quad (71)$$

o recuperando la forma vectorial

$$\vec{B}(\rho) = \frac{2k' I}{\rho} \hat{\phi} \quad (72)$$

16 Solenoide infinito.

En la sección 7 encontramos una expresión para el campo de inducción magnética \vec{B} , para puntos del eje de un solenoide de longitud finita l y N espiras. Ahora nos proponemos extender este resultado al caso ideal en que el solenoide es infinitamente largo, manteniendo la misma densidad de espiras por unidad de longitud. Además buscaremos para este caso, una expresión que permita determinar el campo \vec{B} en todo el espacio.

El primer objetivo es muy accesible. Para ello denotamos por n a la densidad de espiras por unidad de longitud, la cual será

$$n = \frac{N}{l} \quad (73)$$

Luego, la extensión al caso infinitamente largo consiste simplemente en llevar al límite la expresión (39), cuando tanto N como l tienden a infinito manteniendo n

constante. Esto es

$$B_z(0,0,z) = \lim_{l \rightarrow \infty} 2\pi k' l n \left[\frac{\frac{l}{2} - z}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{l}{2} - z\right)^2}} + \frac{\frac{l}{2} + z}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{l}{2} + z\right)^2}} \right] \quad (74)$$

Es fácil reconocer que cada término del corchete tiende a la unidad, por lo que el límite resulta

$$B_z(0,0,z) = 4\pi k' l n \quad (75)$$

Nótese que, como era de esperarse, el campo de inducción magnética en el eje del solenoide infinitamente largo, no puede depender de la coordenada z . Si acaso esto no fuera evidente, reflexione el lector acerca de la equivalencia de los puntos del eje, respecto de su localización dentro del solenoide.

Afrontamos ahora la determinación del campo $\vec{B}(\vec{r})$ en el resto del espacio. Para esto nos valemos de consideraciones de simetría. La geometría del sistema nos sugiere el uso de coordenadas cilíndricas ρ , ϕ y z . En primer lugar, observamos que rotaciones alrededor del eje de simetría y traslaciones paralelas al mismo no alteran el aspecto de la distribución de corrientes, y por tanto no alteran el campo. De esto se sigue que los campos no pueden depender de las coordenadas ϕ y z . Ahora imaginemos un punto P no perteneciente al eje de simetría, y la recta perpendicular a dicho eje que pasa por P . Supongamos que en P existiera la componente B_ρ . Si rotamos el solenoide alrededor de la recta que contenga a B_ρ en un ángulo π , las corrientes quedan exactamente invertidas. Pero la componente B_ρ queda inalterada, en clara contradicción con la propiedad b de la sección 13. Entonces dicha componente debe ser nula.

$$B_\rho = 0 \quad (76)$$

Ahora imaginemos una circunferencia que pasa por el punto P centrada en el eje de simetría del solenoide, y contenida en un plano perpendicular a dicho eje. Llamamos C a la circunferencia y S a la superficie plana que ella limita. La ley de Ampere nos dice que

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad (77)$$

de la orientación de los vectores se tiene que

$$\begin{aligned} \vec{B} &= B_\phi(\rho) \check{\phi} + B_z(\rho) \check{k} & \vec{J} &= J_\phi \check{\phi} \\ d\vec{l} &= dl \check{\phi} & d\vec{s} &= ds \check{k} \end{aligned} \quad (78)$$

Entonces

$$\oint_C [B_\phi(\rho) \check{\phi} + B_z(\rho) \check{k}] \cdot dl \check{\phi} = \mu_0 \int_S J_\phi \check{\phi} \cdot ds \check{k} \quad (79)$$

Operando los productos escalares entre versores, las integrales anteriores se reducen a

$$\oint_C B_\phi(\rho) dl = 0 \quad (80)$$

Como la circunferencia C se desarrolla en una posición donde ρ resulta constante, podemos decir que $\vec{B}_\phi(\rho)$ es constante sobre el dominio de integración. Entonces

$$B_\phi(\rho) \oint_C dl = B_\phi(\rho) 2\pi\rho = 0 \quad (81)$$

de donde se concluye que la componente azimutal del campo es nula

$$B_\phi(\rho) = 0 \quad (82)$$

Entonces tenemos que la única componente no nula del campo es B_z , y que la misma sólo depende de la coordenada ρ . Esto significa que en cualquier lugar del espacio vale que

$$B_\rho = B_\phi = 0 \quad B_z = B_z(\rho) \quad (83)$$

En este punto damos por concluido el análisis de simetría. Veremos que el último resultado tiene información suficiente para resolver el problema en todo el espacio, mediante una aplicación ingeniosa de la ley de Ampere.

Consideremos la curva cerrada C (de aspecto rectangular), localizada como se indica en la figura ???. Elegimos sobre ella los vectores tangentes \vec{dl} en sentido antihorario, subindicánolos consistentemente con el tramo de curva sobre el que se encuentran. La superficie S limitada por C la elegimos como la figura plana rectangular contenida en el plano del dibujo. Sus vectores normales \vec{ds} , en virtud de la regla de la mano derecha, resultan salientes del plano del dibujo.

Ahora apliquemos la ley de Ampere sobre C , observando que

$$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \quad (84)$$

Entonces la ley de Ampere toma las formas siguientes

$$\int_{C_1} \vec{B} \cdot \vec{dl}_1 + \int_{C_2} \vec{B} \cdot \vec{dl}_2 + \int_{C_3} \vec{B} \cdot \vec{dl}_3 + \int_{C_4} \vec{B} \cdot \vec{dl}_4 = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \vec{ds} \quad (85)$$

Observando el dibujo, es evidente que las integrales subindicadas con números pares son nulas. Esto es porque los vectores de campo de inducción magnética \vec{B} y los vectores tangentes \vec{dl} son mutuamente perpendiculares. Además observemos que la superficie S no es atravesada por corrientes. Entonces concluimos que

$$\int_{C_1} \vec{B} \cdot \vec{dl}_1 + \int_{C_3} \vec{B} \cdot \vec{dl}_3 = 0 \quad (86)$$

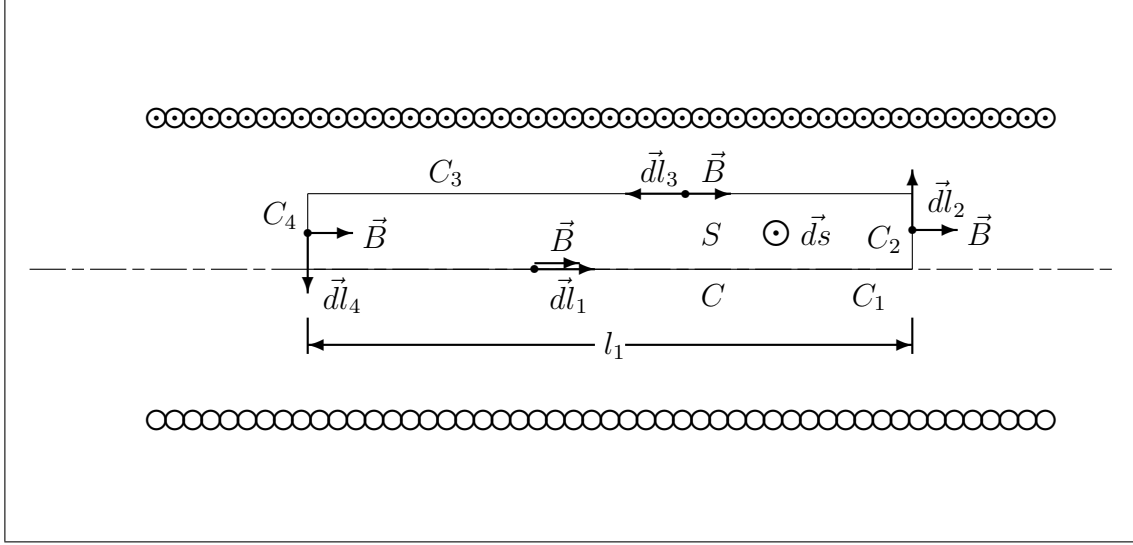


Figure 3: Esquema de los elementos geométricos involucrados en la determinación del campo de inducción magnética \vec{B} en la región interior de un solenoide de longitud infinita.

Observemos las integrales anteriores en un formato más explícito. Sobre el tramo 1 el campo \vec{B} es conocido, mientras que en el tramo 3, aunque no sea conocido, sabemos de sus propiedades de simetría. Entonces tenemos

$$\int_0^{l_1} \mu_0 i n \check{k} \cdot dz \check{k} - \int_0^{l_1} B_z(\rho) \check{k} \cdot (-dz \check{k}) = 0 \quad (87)$$

En las dos integrales, los productos escalares entre versores \check{k} se reducen a la unidad, mientras que los integrandos son constantes en sus respectivos dominios. Así tenemos

$$\mu_0 i n \int_0^l dz - B_z(\rho) \int_0^l dz = 0 \quad (88)$$

Las dos integrales miden l_1 , con lo que obtenemos

$$\mu_0 i n l_1 - B_z(\rho) l_1 = 0 \quad (89)$$

con lo que finalmente concluimos

$$B_z(\rho) = \mu_0 i n \quad (90)$$

Observemos que el resultado es independiente de ρ , por lo que corresponde interpretar que el campo de inducción magnética interno \vec{B} en el solenoide es uniforme, con el mismo valor obtenido sobre el eje.

Ahora nos proponemos determinar el campo de inducción magnética \vec{B} en puntos exteriores al solenoide. Para ello, repetimos la construcción anterior haciendo que

la curva C (rectangular) alcance la región exterior, como mostramos en la figura ?? . El análisis realizado para la región interna vale en todos aspectos, excepto en que

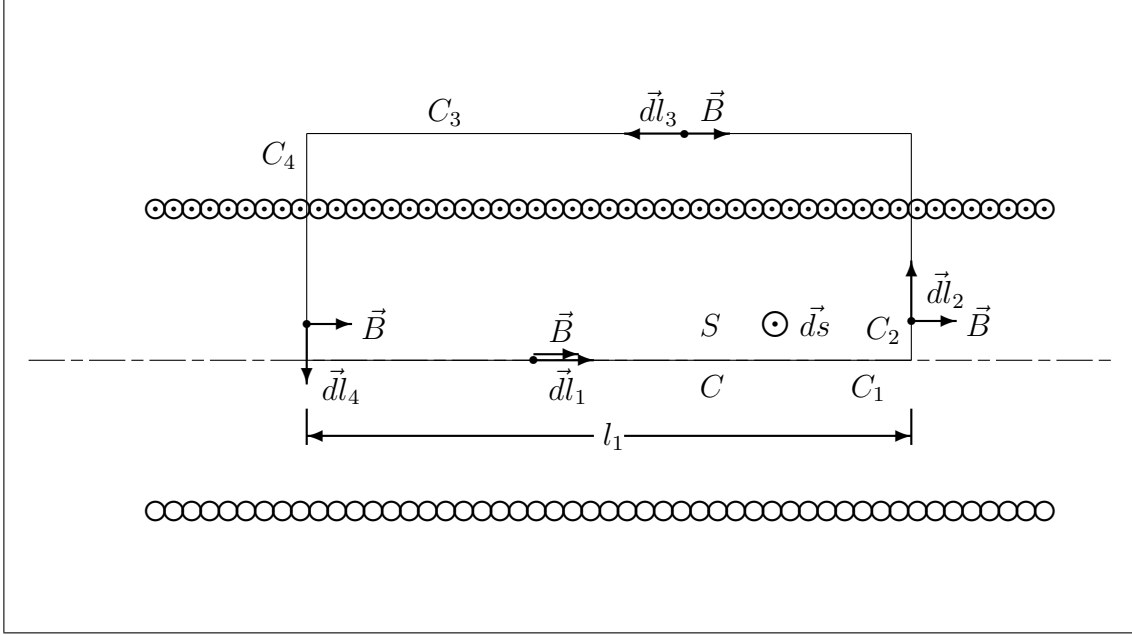


Figure 4: Esquema de los elementos geométricos utilizados en la determinación del campo de inducción magnética \vec{B} en la región exterior de un solenoide infinitamente largo.a

el segundo miembro de (85) ahora no es nulo. Observe que la corriente que circula por el solenoide corta la superficie S tantas veces como espiras haya enlazadas con la curva C . Esto es

$$\int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = inl_1 \quad (91)$$

Entonces tenemos

$$\int_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{l}_1 + \int_{C_3} \vec{B} \cdot d\vec{l}_3 = \mu_0 inl_1 \quad (92)$$

Repitiendo los pasos del tratamiento anterior, tenemos que

$$\mu_0 inl_1 - B_z(\rho) l_1 = \mu_0 inl_1 \quad (93)$$

de donde concluimos que $B_z(\rho)$ es nula fuera del solenoide

$$B_z(\rho) = 0 \quad (94)$$

Entonces podemos escribir el resultado final en forma compacta

$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \mu_0 in & si \quad \rho < R \\ 0 & si \quad R < \rho \end{cases} \quad (95)$$

Este resultado parece en extremo artificial, dado que el sistema que estudiamos es descabelladamente irreal. Sin embargo, constituye una herramienta valiosa por su simplicidad, al modelar solenoides largos. Esto es, cuando la longitud l es mucho mayor que el radio R . En sentido práctico, podemos imaginar un solenoide largo como un cilindro con tapas. La aproximación habitual consiste en suponer que el campo \vec{B} es uniforme dentro del cilindro y nulo afuera.

Capítulo 9

Campos variables en el tiempo.

1 Ley de Faraday.

Consideremos una región del espacio donde yacen simultáneamente un campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$ y un campo de inducción magnética $\vec{B}(\vec{r}, t)$ que pueden variar con el tiempo. Elegimos una curva simple cerrada C cualquiera (que no cambie con el tiempo), y una de las superficies limitadas por C (también fija), a la que llamaremos S . Luego elegimos una orientación para circular sobre C , definiendo los vectores \vec{dl} tangentes a C , en el sentido elegido. Consistentemente, definimos los vectores \vec{ds} perpendiculares a S , cuyo sentido debe respetar la regla de la mano derecha en relación con \vec{dl} . Entonces, la circulación del campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$ sobre la curva cerrada C , es proporcional al valor cambiado de signo, que adquiera la derivada temporal del flujo magnético a través de la superficie S . Esto es

$$\oint_C \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \vec{ds} \quad (1)$$

Una lectura inmediata de la ley de Faraday nos indica la aparición de una nueva variedad de campos eléctricos. ¿Por qué una nueva variedad? Observe el lector que la integral de circulación del primer miembro era ya conocida en el contexto de la electrostática. Justamente, en dicho contexto resultaba siempre nula, por lo que decíamos que el campo electrostático es conservativo. Ahora resulta que esto ya no es así. Cuando se admiten modificaciones temporales, el campo eléctrico puede ser “no conservativo”, en cuyo caso sus fuentes están relacionadas con la variación temporal del flujo magnético. En otras palabras, decimos que variaciones temporales del flujo magnético, dan lugar a la creación de un campo eléctrico no conservativo.

En el segundo miembro de la ley de Faraday, observamos que la derivada temporal abarca la integral de flujo magnético. Entonces, cualquier modificación de dicho flujo dará lugar a que la derivada tome valores no nulos. Aquí debemos enfatizar que la curva C y la superficie S involucradas no admiten modificaciones en el tiempo. Por lo tanto, esta versión de la ley de Faraday “sólo” permite que el flujo magnético se modifique por cambios temporales del campo de inducción magnética \vec{B} . En tal sentido, la expresión (1) podría escribirse como sigue

$$\oint_C \vec{E} \cdot \vec{dl} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{ds} \quad (2)$$

En la sección siguiente, veremos que puede ensayarse una extensión más abarcativa.

2 Extensión al caso de geometría variable.

Analicemos qué hechos pueden dar lugar a variaciones del flujo magnético. Aquí van algunas posibilidades

- a) Que el campo de inducción magnética \vec{B} varíe con el tiempo.
- b) Que la curva C , y por consiguiente la superficie S , cambien de posición u orientación con el tiempo.
- c) Que la curva C y la superficie S cambie de forma con el tiempo.

Por supuesto que cuando ocurre alguno de estos hechos, no hay garantía de que el flujo efectivamente varíe. Habrá que analizar cada caso en particular. Sin embargo, la ley de Faraday tal como fue enunciada no contempla los casos *b* y *c*, porque no cumplen con la condición que la curva C sea fija.

Una extensión operativamente útil puede resolver el problema. Consideremos una curva cerrada C que puede moverse o deformarse de manera continua en el tiempo (sin perder su carácter de curva cerrada). Sea S una superficie limitada por C que puede deformarse acompañando los cambios de C . Entonces, la versión extendida de la ley de Faraday toma la forma

$$\oint_C (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (3)$$

donde \vec{v} representa la velocidad con que se desplaza el elemento $d\vec{l}$ de la curva C que se está considerando en la integración.

3 Proyección tecnológica.

La ley de Faraday constituye uno de los logros más trascendentales de la historia de la ciencia. Calificativo que merecería ya por ser una pieza clave en la formulación de la teoría electromagnética. Pero hubo mucho más... Según cuentan los que conocen la historia, parece que un distinguido científico (casi seguramente miembro de la Royal Society) le preguntó a Faraday: ... más allá del simpático efecto al que usted refiere, dígame ¿para qué puede “servir” que en un lazo conductor se establezca una corriente, frente a la variación del flujo magnético? Naturalmente, Faraday desconocía la respuesta, por lo que contestó con una nueva pregunta... Y usted podría decirme a priori ¿para qué sirve un bebé que hoy mismo estará naciendo? Si quiere saberlo, debe esperar pacientemente acompañando su desarrollo con esmerados cuidados... La historia mostró que aquel efecto sería uno de los principales promotores del desarrollo tecnológico desde el último cuarto del siglo XIX hasta nuestros días.

Pero ¿Cómo fue esa historia? En realidad, la ley de Faraday no nació con el formato que la presentamos hoy, sino que había una diferencia menor (¿menor?): La curva cerrada C no era una curva imaginaria cualquiera del espacio, sino un hilo conductor cerrado. Esta posibilidad sigue siendo válida en la formulación actual, aunque se admiten otras variantes. Pero centrémonos en esa primera mirada, desarrollando el ejemplo más elemental posible.

Consideremos una horquilla formada por dos varillas conductoras paralelas, unidas por un puente resistivo en uno de los extremos (ver figura 3). Otra varilla con-

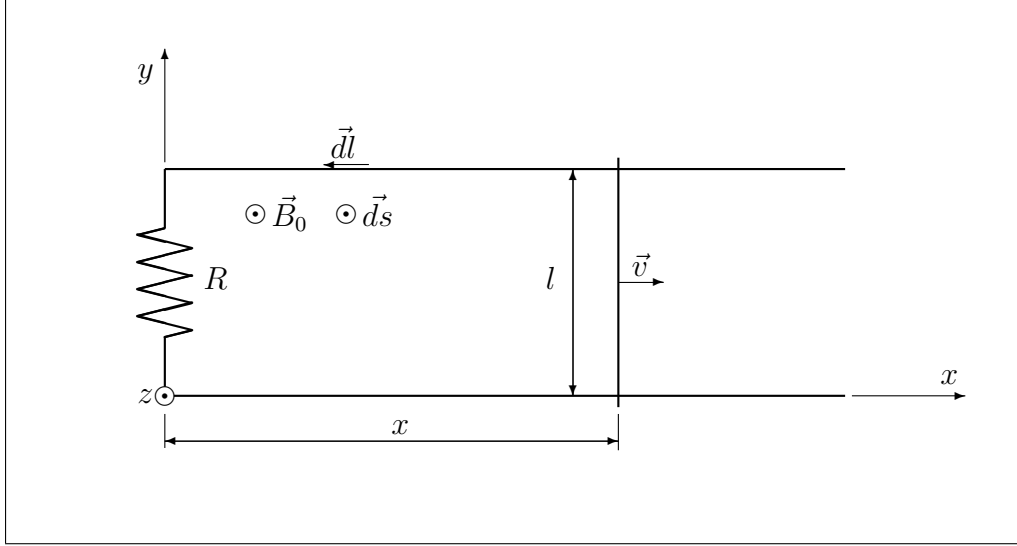


Figure 1: Esquema de una horquilla fija sobre la que se desplaza una varilla. El montaje está inmerso en un campo de inducción magnética perpendicular al plano de la horquilla. Luego se especifican los elementos geométricos involucrados en el análisis.

ductora se desliza sobre los lados paralelos, de modo que con su contacto cierra un circuito rectangular de área variable. Para fijar ideas, suponga que la varilla móvil viaja hacia la derecha con velocidad constante \vec{v} , mientras que el montaje completo se encuentra inmerso en un campo magnético uniforme \vec{B}_0 , perpendicular al plano de la horquilla y saliente del dibujo. El origen de coordenadas, y la terna directa de ejes se indican en la figura 3, con lo que los vectores velocidad y campo magnético toman la forma

$$\vec{v} = v \hat{i} \quad \vec{B}_0 = B_0 \hat{k} \quad (4)$$

¿Cuál será la expectativa respecto del funcionamiento de este sistema? Vayamos por partes,

a) En primer lugar, supongamos que el circuito formado por la horquilla y la varilla, constituye la curva C . Como se trata de una curva variable en el tiempo, para aplicar la ley de Faraday debemos utilizar la versión (3).

b) Al moverse la varilla cambia el área de la superficie S , y por consiguiente cambia el flujo magnético a través de la misma. Esto dará lugar a que la circulación del primer miembro de (3) resulte no nula. Siempre que ocurre esto sobre un circuito, decimos que el circuito está afectado por una fuerza electromotriz ϵ dada por

$$\epsilon = \oint_C (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \quad (5)$$

Recordando la relación entre esta integral y el trabajo mecánico, podemos definir la fuerza electromotriz inducida ϵ como el trabajo por unidad de carga móvil del circuito, aportado por el fenómeno electromagnético.

c) Como consecuencia de la fuerza electromotriz aparecerá una corriente en el circuito, dando lugar a la disipación térmica por efecto Joule en el resistor.

d) Dado que por la varilla móvil circula una corriente, y que la misma se desplaza dentro de un campo magnético, aparecerá sobre ella una fuerza magnética.

e) Para que la velocidad sea constante, será necesario que un agente externo aporte una fuerza que compense la fuerza magnética.

Antes de comenzar con la resolución, definamos la geometría. Llamaremos C a la curva que describe el circuito, la cual tendrá un formato variable. Sobre ella elegimos que los vectores $d\vec{l}$ estén orientados en sentido antihorario. Luego elegimos que la superficie S sea el sector del plano limitado por C , y sus vectores normales $d\vec{s}$, en virtud de la regla de la mano derecha, resultan salientes del plano del dibujo.

$$d\vec{s} = ds \check{k} \quad (6)$$

Ahora estamos en condiciones de aplicar la ley de Faraday (3). Comencemos por calcular el flujo magnético.

$$\Phi_{\vec{B}S} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_S B_0 \check{k} \cdot ds \check{k} = \int_S B_0 ds = B_0 \int_S ds = B_0 A \quad (7)$$

donde $\Phi_{\vec{B}S}$ se ha utilizado como notación habitual para flujos. Observe que A es el área variable de la superficie S que puede escribirse como

$$A = lx \quad (8)$$

donde l es la separación entre los lados paralelos de la horquilla. Ahora escribimos la ley de Faraday en una forma “casi” de bolsillo¹.

$$\epsilon = - \frac{d\Phi_{\vec{B}S}}{dt} \quad (9)$$

¹Decimos casi, porque este formato no es terminológicamente adecuado para todos los casos. La fuerza electromotriz es un concepto de neto corte tecnológico, por lo que no se condice con usos de la ley de Faraday en aplicaciones en el vacío libre de cargas.

Reemplazando (6) y (7) en (8) y operando, tenemos

$$\epsilon = -\frac{d}{dt}(B_0 l x) = -B_0 l \frac{dx}{dt} = -B_0 l v_x = B_0 l v \quad (10)$$

Si R es la resistencia del circuito, la ley de Ohm nos conduce a la corriente I que circula por el mismo

$$\epsilon = IR \quad \rightarrow \quad I = -\frac{B_0 l v}{R} \quad (11)$$

y la potencia convertida por efecto Joule en el resistor es

$$P = I^2 R = \frac{B_0^2 l^2 v^2}{R} \quad (12)$$

Analicemos la fuerza magnética que actúa sobre la varilla móvil. Para ello imaginamos la varilla segmentada en tramos diferenciales, cada uno de los cuales está caracterizado por un vector \vec{dl} . Por otra parte, el campo magnético \vec{B}_0 ejerce su influencia sobre cada uno de estos elementos. Las formas vectoriales consistentes con la geometría planteada son

$$\vec{dl} = dy \check{j} \quad I \vec{dl} = -\frac{B_0 l v}{R} dy \check{j} \quad \vec{B}_0 = B_0 \check{k} \quad (13)$$

Entonces, la contribución $d\vec{F}_M$ a la fuerza magnética sobre cada elemento \vec{dl} de la varilla viene dada por

$$d\vec{F}_M = I \vec{dl} \times \vec{B}_0 = -\frac{B_0 l v}{R} dy \check{j} \times \vec{B}_0 \check{k} = -\frac{B_0^2 l v}{R} dy \check{i} \quad (14)$$

La fuerza total se obtiene por integración sobre toda la varilla. Observando las constantes del caso, tenemos

$$\vec{F}_M = -\frac{B_0^2 l v}{R} \int_0^l dy = -\frac{B_0^2 l^2 v}{R} \check{i} \quad (15)$$

Entonces concluimos que la fuerza magnética \vec{F}_M es opuesta a la velocidad. Ahora bien, según hemos propuesto en las hipótesis, la varilla viaja a velocidad constante \vec{v} , por lo que la fuerza neta sobre ella debe ser nula. De esto se deriva que hay otra fuerza sobre la varilla, que compensa el efecto magnético. Esta fuerza debe ser aportada por un agente externo, por lo que la llamaremos “fuerza externa” y la denotaremos por \vec{F}_{EXT} . Entonces

$$\vec{F}_M + \vec{F}_{EXT} = 0 \quad (16)$$

Aquí cabe preguntarse, ¿Qué potencia mecánica estará aportando el agente externo para sostener el movimiento de la varilla? Consideremos el desplazamiento de la

varilla entre dos posiciones rotuladas como x_1 y x_2 , por las que la misma pasa en los tiempos t_1 y t_2 respectivamente. La potencia media P_{EXT} desarrollada por el agente externo en este recorrido será

$$P_{EXT} = \frac{W_{\vec{F}_{EXT}}}{\Delta t} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_1^2 \vec{F}_{EXT} \cdot d\vec{l}' \quad (17)$$

donde $d\vec{l}'$ es un elemento del camino. Los vectores involucrados son

$$\vec{F}_{EXT} = \frac{B_0^2 l^2 v}{R} \check{i} \quad y \quad d\vec{l}' = dx \check{i} \quad (18)$$

Entonces

$$P_{EXT} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{x_1}^{x_2} \frac{B_0^2 l^2 v}{R} \check{i} \cdot dx \check{i} = \frac{B_0^2 l^2 v}{R} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \quad (19)$$

Como la velocidad es constante, el segundo cociente coincide con el módulo de dicha velocidad. Finalmente tenemos que

$$P_{EXT} = \frac{B_0^2 l^2 v^2}{R} \quad (20)$$

Este resultado coincide exactamente con la potencia convertida por efecto Joule, que fuera obtenida en (11). Discutamos la trascendencia de este resultado. En primer lugar observemos que el mecanismo en conjunto permite la conversión de trabajo mecánico en energía térmica disponible para ser transferida en forma de calor en diversos usos. ¿De qué manera se ha utilizado esto como clave del progreso tecnológico? Para comprender esto, nos remitiremos a una historia que, aunque ficticia, podría representar la realidad muchas veces repetida. Cuando los antiguos pobladores de una pequeña comunidad se organizaron en forma colectiva, tenían la necesidad de recolectar leña en los alrededores de la aldea. Esta tarea de acarreo y almacenamiento era trabajosa pero simple. Sin embargo, las ventajas de vivir en comunidades concentradas en pueblos, llevó a una creciente demanda energética que complicaba las cosas. La naturaleza no proveía suficiente leña en bosques cercanos, por lo que los acarreos eran largos y dificultosos. Apareció la competencia con los poblados vecinos por el control de los recursos energéticos, y todo lo que ya sabemos ... El sistema colapsó. Pasaron algunos siglos de acuerdos y desacuerdos (que por supuesto, siguen hasta hoy), hasta que apareció una alternativa al problema de transporte de energía (Entiéndase bien, sólo se resuelve en parte el problema de transporte). ¿Cómo funciona? Se convierte energía mecánica en electricidad, donde hay recursos naturales. Luego se “transporta” la electricidad por los cables hasta los centros de consumo. Allí se la reparte (se la factura) y se la reconvierte para diversos usos.

4 Ejemplo 1. Espiras rotantes.

Consideremos una espira plana que es obligada a girar con velocidad angular constante ω , alrededor de un eje contenido en el mismo plano de la espira. Suponga que el montaje se encuentra inmerso en un campo de inducción magnética \vec{B} uniforme e invariante en el tiempo, cuya orientación es perpendicular al eje de giro. El movimiento de la espira es garantizado por el trabajo que aporta un agente externo. Para fijar ideas, consideremos que la espira es un alambre conductor de forma rectangular, que gira alrededor de un eje que pasa por su centro como indica la figura 4. Para aplicar la ley de Faraday, elegimos la curva cerrada C sobre la espira,

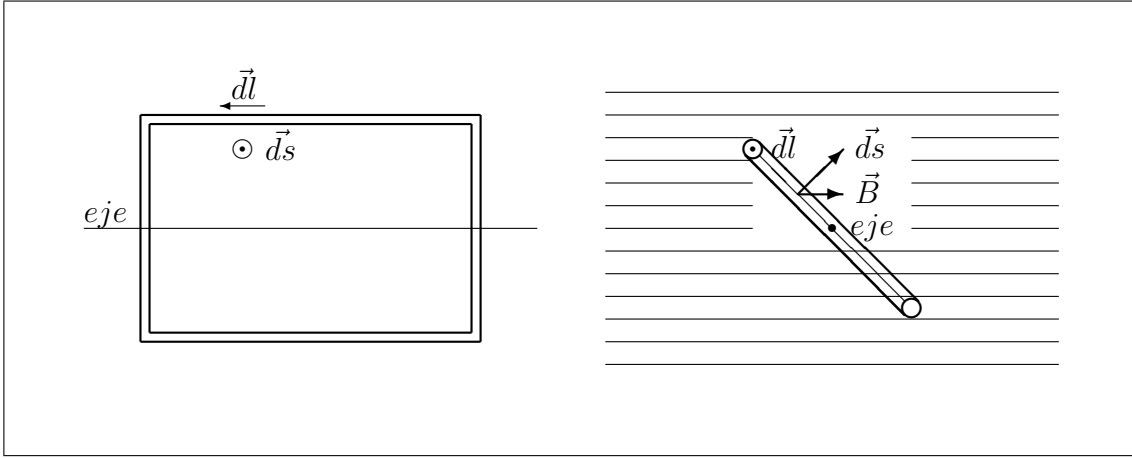


Figure 2: A la derecha representamos una espira rectangular que puede girar alrededor de un eje que pasa por su centro y es paralelo a dos de sus lados. A la izquierda mostramos la misma espira vista de perfil, en un instante mientras rota con velocidad angular constante dentro de un campo de inducción magnética uniforme.

y la superficie S como el sector plano rectangular limitado por C . Elegimos la circulación antihoraria como positiva, y consistentemente la superficie queda orientada con sus vectores normales salientes del plano del dibujo. Aquí hay que tener mucho cuidado, porque la espira cambiará de posición con el tiempo por lo que la orientación elegida puede prestarse a confusiones. Entonces debemos enfatizar que la orientación elegida debe respetarse en todo tiempo sobre la espira, por lo que una buena práctica sería “pintar” el alambre con la flecha que indica el sentido elegido para los vectores \vec{dl} .

Ahora imaginemos que la espira está moviéndose dentro del campo de inducción magnética \vec{B} . Entonces aparecerá sobre ella una fuerza electromotriz inducida ϵ dada por

$$\epsilon = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \vec{ds} \quad (21)$$

Los vectores involucrados en el flujo son \vec{B} y \vec{ds} . Sus módulos son constantes, pero sus orientaciones relativas varían con el tiempo. En la figura 4 vemos la espira en un instante mientras gira. Los vectores son idénticos sobre toda la superficie, y el ángulo que forman en ese instante es

$$\theta = \theta_0 + \omega t \quad (22)$$

Entonces

$$\epsilon = -\frac{d}{dt} \int_S B \cos(\theta_0 + \omega t) ds = -\frac{d}{dt} \left[B \cos(\theta_0 + \omega t) \int_S ds \right] \quad (23)$$

La integral representa el área de la espira, a la que identificaremos por A . Resolviendo la derivación, tenemos

$$\epsilon = BA\omega \sin(\theta_0 + \omega t) \quad (24)$$

Este resultado representa una fuerza electromotriz oscilante de amplitud ϵ_0 , con lo que tenemos

$$\epsilon_0 = BA\omega \quad \rightarrow \quad \epsilon(t) = \epsilon_0 \sin(\theta_0 + \omega t) \quad (25)$$

Cuando la fuerza electromotriz tiene esta forma de variación temporal, la llamamos f.e.m. alterna.

El fenómeno que describimos en este ejemplo constituye la base de funcionamiento de la más difundida clase de generadores eléctricos. Habitualmente, los generadores que suministran una f.e.m. alterna se llaman “alternadores”. Otras máquinas que funcionan bajo la misma idea básica se llaman “dínamos”, pero un mecanismo de conmutación hace que la f.e.m. que producen sea del tipo continua.

La expresión (26) muestra que la amplitud de la f.e.m alterna depende del área de la espira, por lo que los diseños compactos de generadores no utilizan una única espira, sino un arrollamiento formado por N espiras muy apretadas. En estos casos, la amplitud se convierte en

$$\epsilon_0 = NBA\omega \quad (26)$$

5 Ejemplo 2. Espira móvil.

Supongamos que cierta región del espacio de ancho $2d$ está afectada por un campo de inducción magnética uniforme \vec{B} . Supongamos además que una espira cuadrada de lado $2l$ y resistencia R , se desplaza perpendicularmente al campo con velocidad constante \vec{v} , como indica la secuencia de la figura 5. Nos preguntamos acerca de la corriente que circulará por la espira en cada tramo de su recorrido.

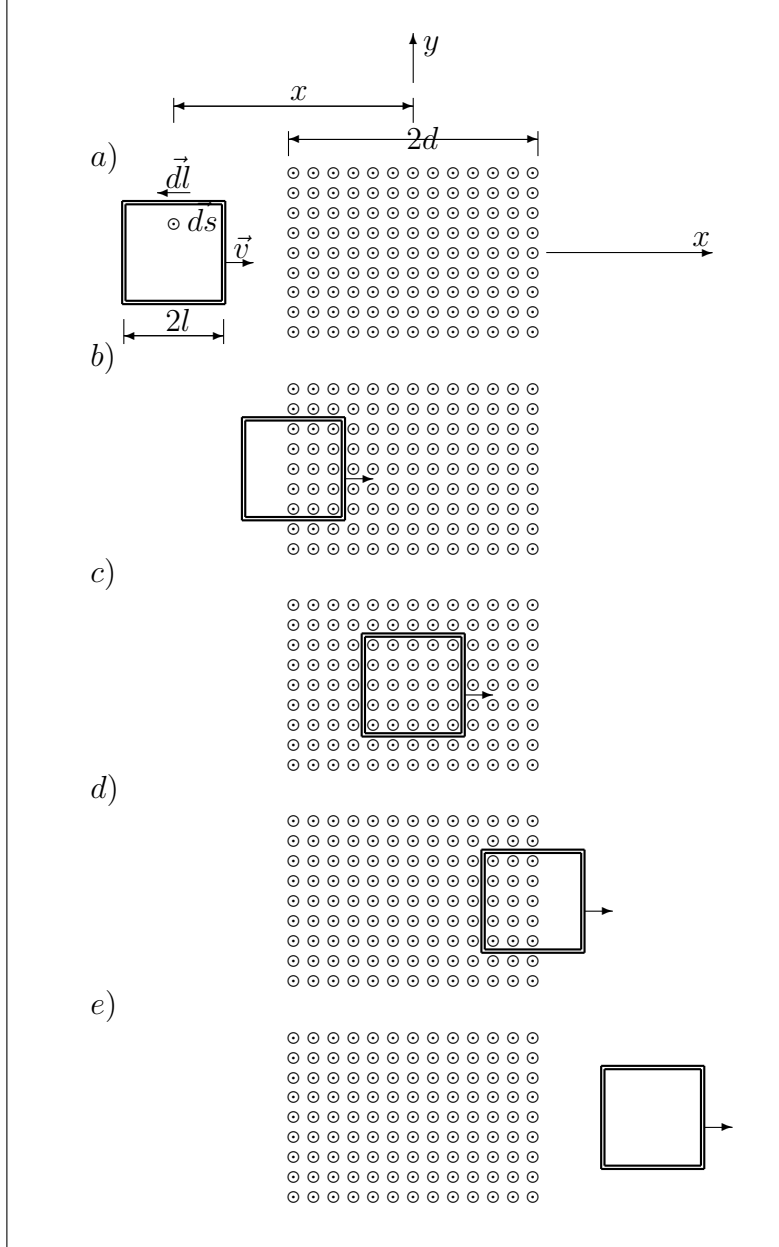


Figure 3: La secuencia de gráficos representa el tránsito de una espira cuadrada, a través de una región de campo de inducción magnética uniforme. En el primer esquema indicamos los elementos geométricos involucrados en el análisis.

Para desarrollar el problema, necesitamos un marco geométrico adecuado. Elegi-

mos el origen de coordenadas y los ejes como se indica en el primer dibujo de la secuencia. Luego reservaremos la notación x para identificar la abscisa del centro de la espira (Note que inicialmente es negativa). Ahora elegimos el sentido de circulación antihorario como positivo sobre la espira, por lo que la superficie plana limitada por la misma queda orientada con sus vectores normales salientes. Aquí proponemos que el estudiante determine el flujo por observación directa sobre el gráfico, hasta convencerse de lo que sigue

$$\Phi_{\vec{B}S}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -(d+l) \\ 2Bl(x+d+l) & \text{si } -(d+l) < x < -(d-l) \\ 4Bl^2 & \text{si } -(d-l) < x < (d-l) \\ 2Bl(x-d-l) & \text{si } (d-l) < x < (d+l) \\ 0 & \text{si } (d+l) < x \end{cases} \quad (27)$$

En la figura 5 representamos el flujo magnético $\Phi_{\vec{B}S}$ como función de la coordenada x . Apliquemos la ley de Faraday, pero cuidando mucho el detalle de la derivación.

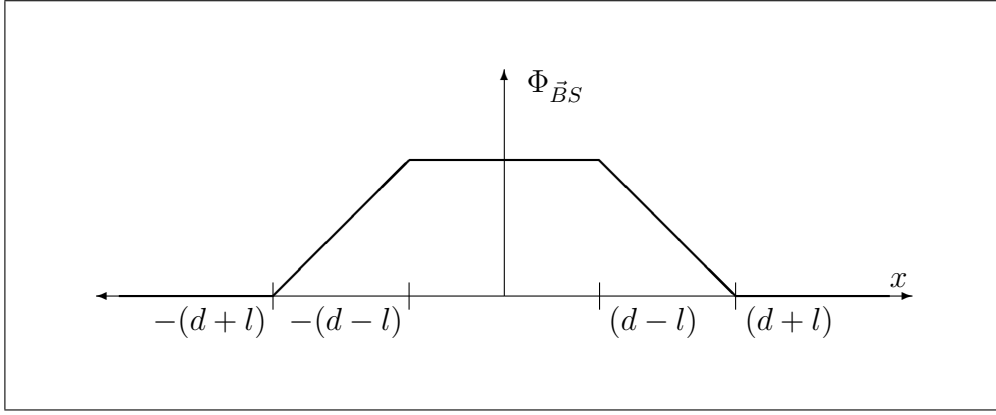


Figure 4: Con referencia a la figura anterior, el gráfico representa el flujo magnético que atraviesa la espira, como función de la posición de la misma.

Observe que utilizamos la regla de la cadena

$$\epsilon = -\frac{d}{dt} \Phi_{\vec{B}S} = -\frac{d}{dx} \Phi_{\vec{B}S}(x) \frac{dx}{dt} = -v_x \frac{d}{dx} \Phi_{\vec{B}S}(x) \quad (28)$$

Y la corriente se obtiene simplemente dividiendo por R .

$$i(x) = -\frac{v_x}{R} \frac{d}{dx} \Phi_{\vec{B}S}(x) \quad (29)$$

Reemplazando y operando obtenemos

$$i(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -(d+l) \\ -\frac{2Blv_x}{R} & \text{si } -(d+l) < x < -(d-l) \\ 0 & \text{si } -(d-l) < x < (d-l) \\ \frac{2Blv_x}{R} & \text{si } (d-l) < x < (d+l) \\ 0 & \text{si } (d+l) < x \end{cases} \quad (30)$$

En la figura 5 representamos la corriente i como función de la coordenada x . Observe la relación entre este gráfico y el anterior. Los únicos tramos del recorrido

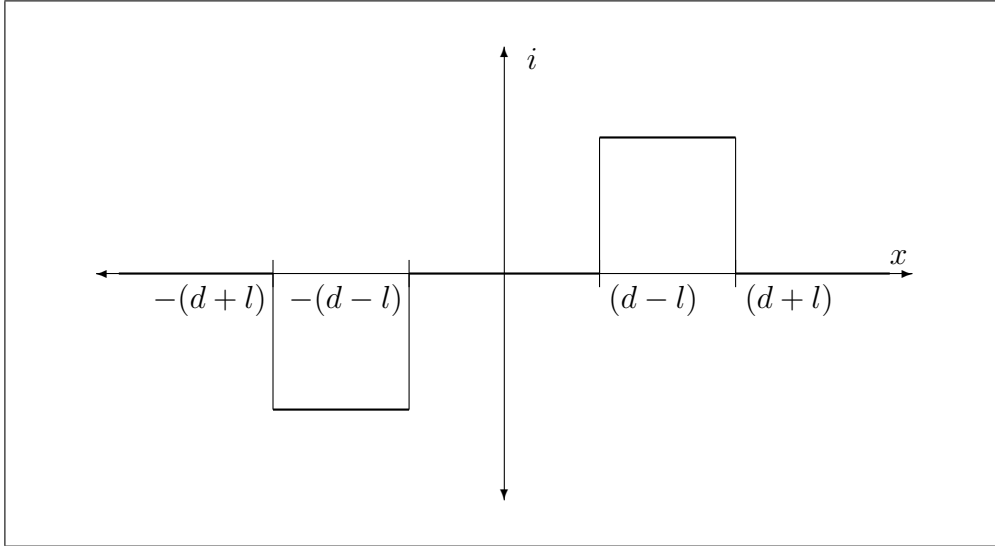


Figure 5: En relación con las figuras anteriores, el , gráfico representa la corriente a través de la espira como función de la posición de la misma.

en los que aparecen corrientes son los indicados por b y d en la secuencia. Estos tramos coinciden con la entrada de la espira en la región de campo, y su posterior salida. La corriente durante la entrada es negativa, por lo que interpretamos que circula en sentido horario. Contrariamente en la salida la corriente circula en sentido antihorario. Como ya hemos visto, la energía disipada por efecto Joule en la espira debe ser aportada por un agente externo, que realice trabajo para sostener el movimiento. Es interesante observar que durante la entrada de la espira (tramo b), la fuerza magnética total sobre ella es la que opera sobre el lado derecho, donde la corriente circula hacia abajo. Utilizando la regla de la mano derecha, observamos que la fuerza magnética apunta hacia la izquierda. Observe que en la salida (tramo d) la fuerza magnética apunta nuevamente hacia la izquierda, ya que la corriente es antihoraria, pero se involucra el lado izquierdo de la espira. Este simple razonamiento nos permite concluir que el agente externo debe hacer fuerza hacia la derecha en ambos tramos para mantener el movimiento.

6 Regla de Lenz.

Demos otra vuelta de tuerca sobre el ejemplo anterior. Comencemos por centrar

nuestra atención en el tramo b donde la corriente circula en sentido horario. Si pensamos que tal corriente es la fuente de un campo de inducción magnética adicional, es fácil observar que el flujo de dicho campo a través de la espira será negativo (flujo entrante)². Si ahora observamos lo que ocurre en el tramo d , encontramos que el flujo debido a la corriente es positivo (saliente). ¿Qué detalle comparten estos comportamientos? A riesgo de incurrir en una personificación de dudosa rigurosidad, me permito atribuirle cierta “voluntad” a la espira. Podemos imaginar que su carácter es conservador, de modo que su respuesta ocurre en oposición a los cambios. Pero ¿Qué tipo de cambios? Justamente, cambios en el flujo a través de ella. Si observamos cuidadosamente, vemos que, tanto en el tramo b como en el d , la espira “produjo” corrientes que generaron flujos en “oposición” al cambio del flujo preexistente. En efecto, en el tramo b el flujo preexistente era saliente y su valor aumentaba. Entonces el flujo aportado por la corriente fue entrante, como un intento de evitar el cambio que estaba ocurriendo. En el tramo d , el flujo preexistente era saliente pero disminuía. Entonces, para evitar tal disminución, la corriente en la espira circuló de modo tal que el flujo producido tendiera a “reforzar”, apuntalando el estado previo.

Este modo de pensar, tal vez algo informal, es muy práctico y difundido, especialmente en ámbitos tecnológicos. El mismo recibe el nombre de regla de Lenz, y constituye una excelente herramienta intuitiva para la determinación del sentido de circulación de la corriente. No obstante, es conveniente remarcar que la ley de Faraday tiene un espectro muy abarcativo de fenómenos, en los que no siempre hay corrientes involucradas. Por tanto la regla de Lenz no es una ley general, al menos en el sentido informal que la definimos. Sin embargo, un intento de formalización no nos conduciría más que a la ley de Faraday tal y como ya la enunciamos. Algunos autores, atendiendo a un merecido homenaje, suelen referirse a la ley de Faraday-Lenz.

7 Inducción mutua.

Consideremos dos circuitos fijos a los que identificaremos por 1 y 2, tales que sean muy próximos entre sí. Cuando decimos fijos, entendemos que no varían ni sus formas ni las posiciones relativas entre ellos. Supongamos ahora que a lo largo del circuito 1 circula una corriente instantánea $i_1(t)$, que genera un campo de inducción magnética $\vec{B}_1(t)$. Este influye sobre el circuito 2, originando un flujo $\Phi_{\vec{B}_1 S_2}$ a través de una superficie S_2 limitada por la curva C_2 sobre la que se desarrolla dicho circuito. Supongamos además que las variaciones temporales de i_1 son relativamente pequeñas, de modo que el campo \vec{B}_1 pueda aproximarse con la ley de Biot-Savart.

²Si para el lector no fuera evidente, sugerimos el uso de la regla de la mano derecha.

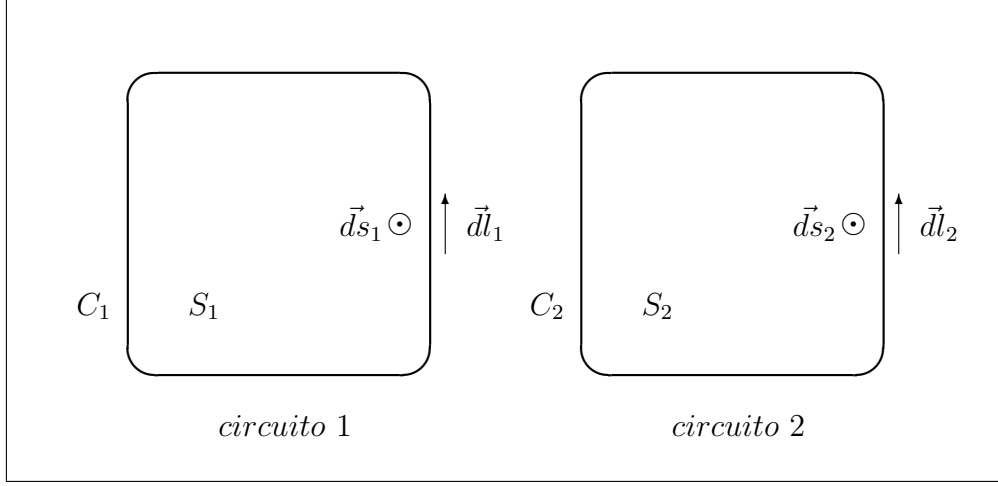


Figure 6: Esquema de dos circuitos genéricos en los que indicamos los elementos necesarios para definir el coeficiente de inducción mutua.

Entonces en el instante t tenemos

$$\Phi_{\vec{B}_1 S_2}(t) = \int_{S_2} \vec{B}_1(\vec{r}_2, t) \cdot \vec{dS}_2 \quad (31)$$

donde \vec{r}_2 representa los puntos de la superficie S_2 , y $\vec{B}_1(\vec{r}_2, t)$ viene dado por la ley de Biot-Savart

$$\vec{B}_1(\vec{r}_2, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C_1} \frac{i_1(t) d\vec{l}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} = \frac{\mu_0 i_1(t)}{4\pi} \int_{C_1} \frac{d\vec{l}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \quad (32)$$

En esta expresión, las posiciones \vec{r}_1 representan los puntos de la curva C_1 , sobre la que se desarrolla el circuito 1. Reemplazando (32) en (31) y operando obtenemos

$$\Phi_{\vec{B}_1 S_2}(t) = \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_2} \int_{C_1} \frac{d\vec{l}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \cdot \vec{dS}_2 \right] i_1(t) \quad (33)$$

donde $i_1(t)$ pudo extraerse de las integrales porque resulta independiente de la geometría sobre la que operan las integrales. En otras palabras, vista desde los dominios de integración, $i_1(t)$ es una constante. Ahora centremos la atención en la expresión entre corchetes (que por cierto, asusta). Observemos que la misma depende exclusivamente de la geometría de los circuitos, que por hipótesis es fija. Entonces estamos en condiciones de asegurar que la expresión entre corchetes es una constante a la que llamaremos “coeficiente de inducción mutua” del montaje, y denotaremos por M . Entonces

$$M = \frac{\Phi_{\vec{B}_1 S_2}(t)}{i_1(t)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_2} \int_{C_1} \frac{d\vec{l}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \cdot \vec{dS}_2 \quad (34)$$

Aunque la definición de M tiene un aspecto muy desagradable, resulta reparador saber que rara vez se utiliza en forma tan cruda. Luego lo comprobaremos con un ejemplo. Lo que es verdaderamente significativo es la versatilidad operativa que aporta a la ley de Faraday, cuando la misma se aplica a la interacción entre circuitos. Supongamos que han sido debidamente elegidas las orientaciones de curvas y superficies en el montaje de los circuitos 1 y 2. Entonces, combinando la ley de Faraday con (34) tenemos

$$\epsilon_{21} = -\frac{d}{dt} \Phi_{\vec{B}_1 S_2}(t) = -M \frac{d}{dt} i_1(t) \quad (35)$$

donde ϵ_{21} representa la f.e.m inducida sobre el circuito 2, debido a la variación temporal de la corriente que circula por 1.

Una propiedad sumamente útil puede demostrarse a partir de la reciprocidad del análisis anterior. Si hubiéramos considerado que la corriente circulaba por el circuito 2 y estudiábamos su influencia sobre el 1, habríamos obtenido el mismo coeficiente M . Esto es

$$M = \frac{\Phi_{\vec{B}_1 S_2}(t)}{i_1(t)} = \frac{\Phi_{\vec{B}_2 S_1}(t)}{i_2(t)} \quad (36)$$

8 Ejemplo de cálculo.

Consideremos un hilo conductor recto infinitamente largo. Una espira rectangular conductora, cuyos lados tienen longitudes a y b , se encuentra en el mismo plano que el hilo, de modo que sus lados menores sean paralelos al hilo. Supongamos además que la distancia del hilo al centro de la espira es c como se muestra en la figura 8 ($c > a/2$). Nos proponemos determinar el coeficiente de inducción mutua del montaje, y la fuerza electromotriz inducida en la espira, cuando una corriente alterna de amplitud I_1 y frecuencia angular ω circula por el hilo infinito.

Para comenzar, elegimos el origen y los ejes de coordenadas como se indica en la figura 8. Identificamos como circuito 1 al hilo y como circuito 2 a la espira. Luego elegimos los sentidos de circulación sobre cada circuito, para tener claro el significado de los signos de fuerzas electromotrices y corrientes sobre los mismos. Como tenemos que utilizar el flujo magnético a través de la superficie limitada por el circuito 2, elegimos la superficie plana del rectángulo limitado por el circuito, y la orientamos consistentemente. Entonces la geometría ya está preparada.

Ahora tenemos que determinar el flujo $\Phi_{\vec{B}_1 S_2}$. Los vectores involucrados son

$$\vec{B}_1(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 i_1(t)}{2\pi y} \check{k} \quad \vec{ds}_2 = dx dy \check{k} \quad (37)$$

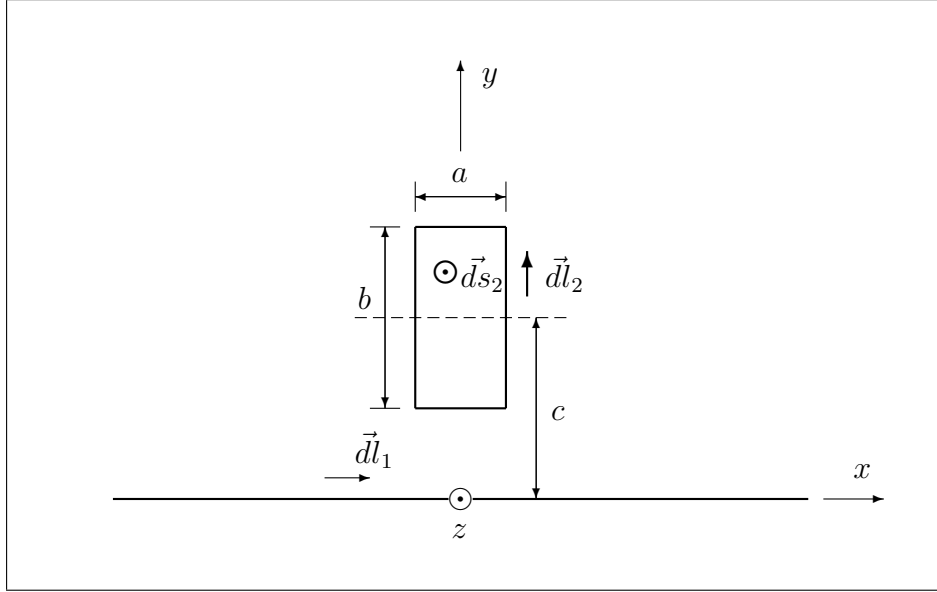


Figure 7: Esquema de un conductor recto infinitamente largo y una espira conductora rectangular. Ambos circuitos se encuentran en el mismo plano, y dos de los lados de la espira son paralelos al conductor infinito. En el esquema indicamos los elementos geométricos referidos en el análisis.

Entonces el flujo es

$$\Phi_{\vec{B}_1 S_2} = \int_{S_2} \vec{B}_1(\vec{r}, t) \cdot d\vec{s}_2 = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{c-b/2}^{c+b/2} \frac{\mu_0 i_1(t)}{2\pi y} \vec{k} \cdot dx dy \vec{k} \quad (38)$$

El producto de los versores es la unidad. Luego tenemos

$$\Phi_{\vec{B}_1 S_2} = \frac{\mu_0 i_1(t)}{2\pi} \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{c-b/2}^{c+b/2} \frac{dy}{y} \quad (39)$$

Las integrales son inmediatas, con lo que concluimos que el flujo es

$$\Phi_{\vec{B}_1 S_2} = \frac{\mu_0 a i_1(t)}{2\pi} \ln \left(\frac{c + b/2}{c - b/2} \right) \quad (40)$$

Ahora, el coeficiente de inducción mutua se obtiene muy fácilmente

$$M = \frac{\Phi_{\vec{B}_1 S_2}}{i_1(t)} = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln \left(\frac{c + b/2}{c - b/2} \right) \quad (41)$$

El estudiante podría pensar que hemos tenido mucha suerte en que la corriente se pudiera simplificar con tanta facilidad. Sin embargo, esto debe ocurrir cualquiera sea la complejidad del montaje. Esto se debe a que siempre existirá (según hemos demostrado) una relación lineal entre flujo y corriente.

Para determinar la fuerza electromotriz inducida utilizamos la forma compacta derivada de la ley de Faraday.

$$\epsilon = -M \frac{d}{dt} i_1(t) = -\frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln \left(\frac{c+b/2}{c-b/2} \right) \frac{d}{dt} [I_1 \sin(\omega t + \phi)] \quad (42)$$

Entonces

$$\epsilon = -\frac{\mu_0 a I_1 \omega}{2\pi} \ln \left(\frac{c+b/2}{c-b/2} \right) \cos(\omega t + \phi) \quad (43)$$

9 Autoinducción.

Siguiendo lineamientos análogos a los que conducen al concepto de inducción mutua, podemos establecer una relación entre el flujo que atraviesa la superficie limitada por el circuito 1, originado por la corriente $i_1(t)$ que circula por él. Para

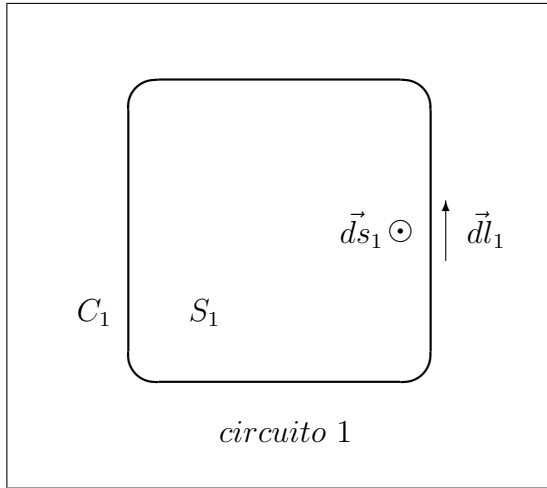


Figure 8: Esquema de un circuito genérico, indicando los elementos geométricos necesarios para la definición del coeficiente de autoinducción.

ello consideremos un circuito fijo sobre la curva C_1 y una de las superficies limitadas por dicha curva, a la que llamaremos S_1 . La corriente $i_1(t)$ dará lugar a un campo de inducción magnética $\vec{B}_1(t)$, y éste a un flujo $\Phi_{\vec{B}_1 S_1}(t)$ a través de S_1 . Entonces, definimos el coeficiente de autoinducción L del circuito, como

$$L = \frac{\Phi_{\vec{B}_1 S_1}(t)}{i_1(t)} \quad (44)$$

Esta expresión es análoga a la (34), aunque ha sido voluntariamente omitida la definición constructiva ¿por qué? Simplemente porque el modelo que representa un

circuito como contenido en una curva cerrada colapsa en el intento de calcular la autoinducción. En efecto, el flujo $\Phi_{\vec{B}_1 S_1}$ va a infinito en este modelo, en contra de la observación experimental que da cuenta de un coeficiente de autoinducción siempre finito. Aquí nuevamente planteamos un energético alerta acerca de la representatividad de los modelos, recordando que los mismos son caricaturas de la realidad, por lo que la interpretación queda a cargo de quien lo utiliza.

Pero entonces, ¿Qué modelo podemos usar? En principio, la restricción sólo pesa sobre representaciones lineales de conductores con corriente. Ya una representación superficial de la corriente puede utilizarse. Por supuesto, siempre podrá modelarse la corriente sobre un sustrato volumétrico.

Por último, tratamos la fuerza electromotriz autoinducida ϵ_{11} en el circuito, a partir de las variaciones temporales de la corriente $i_1(t)$ que circula por él. Supongamos que las reglas geométricas han sido debidamente respetadas para poder aplicar la ley de Faraday. Entonces tenemos

$$\epsilon_{11} = -\frac{d}{dt} \Phi_{\vec{B}_1 S_1}(t) = -L \frac{d}{dt} i_1(t) \quad (45)$$

La tecnología ha requerido la creación de objetos compactos de gran autoinducción, a los que se los denomina “inductores”. El uso llevó a la necesidad de una unidad para los coeficientes M y L . La misma se llama “Henrio” y se representa por H . Su relación con las unidades previas es

$$H = \frac{Tm^2}{A} = \frac{Vs}{A} = \Omega s = \frac{s^2}{F} \quad (46)$$

Para concluir este tratamiento, es importante resaltar el valor de la expresión (45), y su análoga (35). Ambas proporcionan una forma compacta de representar la influencia de elementos inductivos en circuitos. Como veremos más adelante, los inductores tienen un gran protagonismo en cuestiones tecnológicas muy diversas.

10 Ejemplo. Autoinducción de un solenoide.

Como ejemplo, desarrollemos el cálculo de la autoinducción de un solenoide de radio R y longitud l , formado por N espiras muy apretadas (ver figura). Según hemos tratado anteriormente, el campo de inducción magnética producido por un solenoide cuya longitud es bastante mayor que su radio, puede aproximarse como uniforme dentro de su volumen y nulo afuera. En la región interior viene dado por

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 i_1(t) N}{l} \vec{i} \quad (47)$$

donde $i_1(t)$ representa la corriente que circula por el solenoide, y hemos asumido que el eje x positivo corre hacia la derecha a lo largo del eje de simetría.

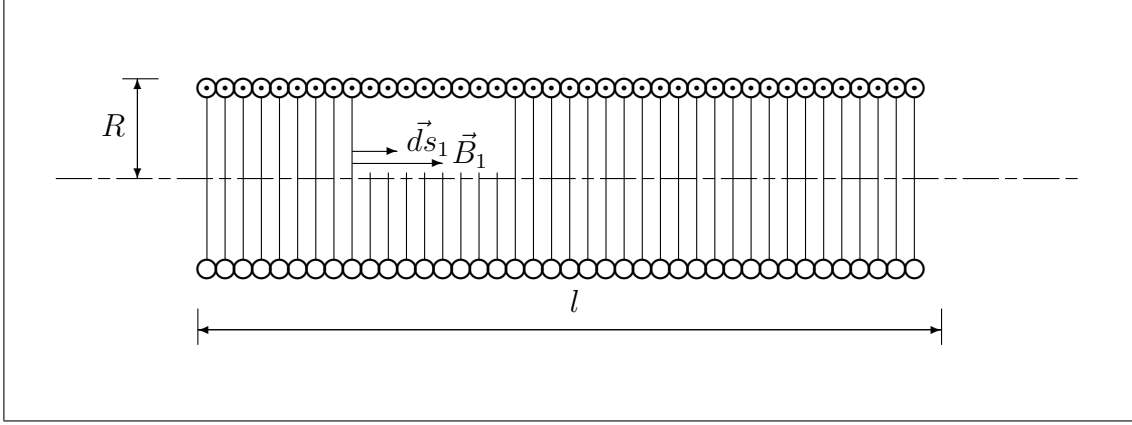


Figure 9: Esquema de un solenoide donde indicamos los elementos geométricos involucrados en la determinación de su autoinducción.

Para determinar el flujo magnético $\Phi_{\vec{B}_1 S_1}$, observemos que la superficie involucrada proviene de unir las N superficies circulares limitadas respectivamente por las N espiras. Llamaremos S_e a la superficie limitada por cada espira. Como el campo \vec{B}_1 es uniforme dentro del solenoide, tenemos que

$$\Phi_{\vec{B}_1 S_1} = \int_{S_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{s}_1 = N \int_{S_e} \frac{\mu_0 i_1(t) N}{l} \vec{i} \cdot d\vec{s}_1 \vec{i} = \frac{\mu_0 i_1(t) N^2}{l} \int_{S_e} ds_1 \quad (48)$$

la integral remanente no es más que el área de la superficie limitada por una de las espiras. Entonces

$$\Phi_{\vec{B}_1 S_1} = \frac{\mu_0 i_1(t) N^2 \pi R^2}{l} \quad (49)$$

Por último, determinamos el coeficiente de autoinducción L . Como era de esperarse, el flujo magnético resultó lineal con la corriente, por lo que L se obtiene muy sencillamente.

$$L = \frac{\pi \mu_0 N^2 R^2}{l} \quad (50)$$

Observemos que el coeficiente de autoinducción depende exclusivamente de magnitudes geométricas, y de la constante μ_0 . Esta última refiere a que el campo de inducción magnética involucrado se desarrolla en el vacío.

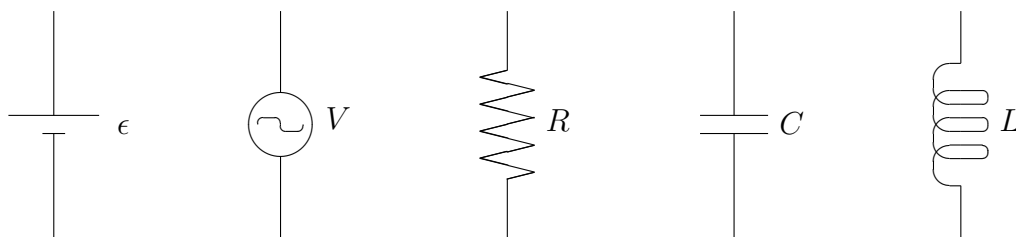
Capítulo 10

Circuitos elementales.

1 Introducción.

Resulta sumamente difícil dar una definición formal en relación con los circuitos eléctricos, debido a la enorme diversidad de objetos tecnológicos que se alinean bajo esta denominación. Por tanto, resulta conveniente una aproximación conceptual más intuitiva que formal. Para ello diremos que la tecnología provee de dispositivos cuyo funcionamiento requiere una “conexión” eléctrica. Diremos entonces que un circuito es un conjunto de dispositivos y conexiones, cuando los mismos forman una unidad funcional. Como vemos, esto es más bien una caracterización que una definición, cuya única virtud radica en su generalidad aunque prácticamente carece de contenido.

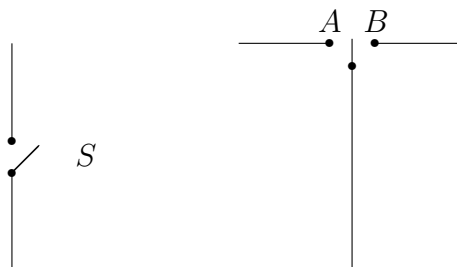
Nosotros centraremos nuestra atención en lo que daremos en llamar “circuitos elementales”. Pero, ¿a qué llamaremos circuito elemental? Bueno, simplemente diremos que se trata de una unidad funcional en que se conectan componentes básicos mediante cables. En nuestro caso, los componentes básicos son fuentes de tensión continua o alterna, resistores, capacitores e inductores. Cada uno de estos dispositivos han sido tratados en capítulos anteriores, y ahora serán utilizados bajo la simbología que se detalla en la figura. Todos estos elementos serán considerados



“ideales”. Esto es, que las únicas magnitudes significativas del objeto son las que se indican al lado del símbolo¹.

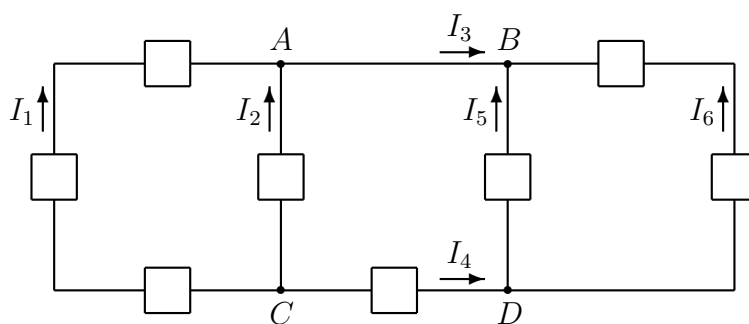
¹Los componentes reales suelen tener más especificaciones. Por ejemplo las baterías poseen una resistencia interna. Los inductores también presentan resistencia. Además todos los dispositivos traen especificado el régimen de funcionamiento que admiten, por ejemplo, tensiones, corrientes o cargas máximas admitidas. En diseños reales, todos estos parámetros deben ser tenidos en cuenta.

En los gráficos de circuitos, los componentes se vinculan mediante líneas que representan conductores ideales (es decir, libres de resistencia). Por último, diremos que el circuito puede tener elementos de comando. En nuestros circuitos sólo encontraremos interruptores y conmutadores, cuyos símbolos son los que mostramos en la figura siguiente



2 Aspectos topológicos.

Los circuitos elementales que trataremos en este capítulo, admiten ser representados en el plano mediante la simbología introducida en la sección 1. Ahora incorporamos la terminología necesaria para tratar las formas de conexión posibles. En primer lugar, representamos un circuito en sentido genérico, donde los cuadrados vacíos pueden ser reemplazados por cualquier componente. Las definiciones que dare-



mos a continuación son de carácter general, en el sentido que pueden aplicarse a cualquier circuito. Por tanto, es indispensable familiarizarse con este lenguaje, para

luego comprender una serie de reglas muy prácticas vinculadas a la resolución de problemas.

I) Nodo: Es cualquier punto del circuito en que se vinculan al menos tres conductores. En el circuito de la figura son los puntos A, B, C, D . El número total de nodos de un circuito lo denotamos por N_n . Entonces en el ejemplo tenemos $N_n = 4$.

II) Rama: Es cualquier tramo de un circuito que se inicia en un nodo y termina en otro, sin contener ningún nodo intermedio. En el ejemplo, tenemos dos ramas que vinculan los nodos A y B . El número total de ramas del circuito lo denotamos por N_r , y en el ejemplo tenemos $N_r = 6$. Note que una rama puede tener varios dispositivos conectados, aunque también puede ocurrir que sea simplemente un cable.

III) Malla: Es cualquier camino cerrado que pueda establecerse en un circuito, tal que al recorrerlo, no se pase dos veces por un mismo nodo. En el ejemplo podemos reconocer seis mallas.

IV) Provincia: Este término es de uso exclusivo en el curso, por lo que sugerimos que siempre que se utilice en otro contexto, se explique su significado. Si un circuito plano se lo identifica como un mapa de país con división política, pueden identificarse “fronteras” de provincias. Nosotros llamaremos provincia a la malla que representa la frontera de una provincia. El número de provincias de un circuito lo identificamos por N_p . En el ejemplo de la figura tenemos $N_p = 3$.

V) Propiedad topológica: En un circuito que admite representación plana, el número de ramas coincide con la suma del número de provincias y de nodos menos uno.

$$N_r = N_p + N_n - 1 \quad (1)$$

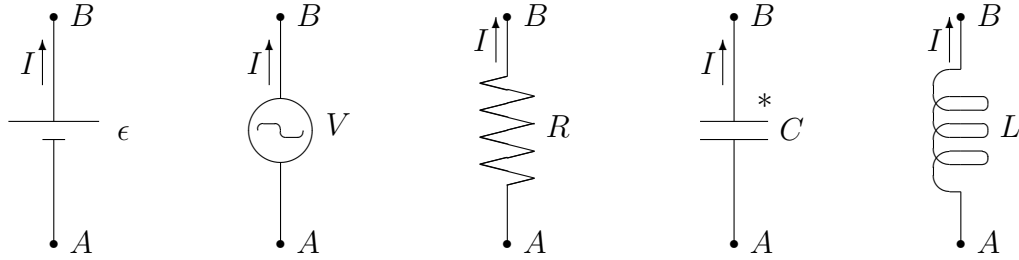
Dejamos a cargo del estudiante que verifique que el ejemplo cumple con esta regla topológica.

3 Reglas de Kirchhof.

Hasta este punto, hemos presentado sólo simbología circuital y cuestiones terminológicas. Ahora comenzamos con el tratamiento físico de los circuitos elementales. Para ello comencemos por observar, que en cada rama de un circuito habrá una única corriente (magnitud escalar) que requiere identificación consistente con la rama. Además debemos elegir un sentido de circulación que indique hacia dónde va la corriente cuando su valor es positivo. Volviendo al ejemplo de la sección anterior,

observemos en el gráfico que han sido elegidas las notaciones para las corrientes y sus respectivos sentidos.

Los circuitos siempre pueden entenderse como una red en que cada tramo de conductor posee un potencial instantáneamente uniforme. Por su parte, cada dispositivo se inserta aportando una diferencia de potencial que depende de su naturaleza física. En algunos componentes, la diferencia de potencial entre sus terminales depende del sentido de la corriente (resistores e inductores). Para que no queden dudas en relación con los signos, en la figura siguiente incorporamos notaciones consistentes con las relaciones que se detallan luego



$$\begin{aligned}
 V_B - V_A &= \epsilon & (pila) \\
 V_B - V_A &= V_F \sin(\omega t) & (Fuente de tension alterna) \\
 V_B - V_A &= -IR & (Resistor) \\
 V_B - V_A &= \frac{Q^*}{C} & (Capacitor) \\
 V_B - V_A &= -L \frac{di}{dt} & (inductor)
 \end{aligned} \tag{2}$$

Note que la diferencia de potencial del capacitor tiene indicado con un asterisco la cara en que reside la carga considerada (ver figura). Ahora estamos en condiciones de enunciar las reglas de Kirchhof.

* **Regla de mallas:** En cualquier malla, la suma orientada de las diferencias de potencial medidas entre terminales de los dispositivos que la componen, debe ser nula.

* **Regla de nodos:** En cualquier nodo, la suma de las corrientes que circulan por los conductores que se vinculan en el nodo, debe ser nula.

Estas reglas se pueden deducir con facilidad a partir del teorema de trabajo y energía, y de la ecuación de continuidad de la carga respectivamente.

4 Régímenes transitorio y estacionario.

Según hemos anticipado, los circuitos elementales pueden tener elementos de comando como interruptores y conmutadores. Cada vez que se opera alguno de estos elementos, el circuito experimenta cambios en sus corrientes y en otras magnitudes relacionadas. Estos cambios, en general no son instantáneos. Si al momento de operar el interruptor (o conmutador) lo identificamos como el inicio del conteo de tiempos, observamos que en un lapso relativamente corto se dan fluctuaciones temporales importantes en las corrientes, en las cargas de capacitores, en las energías almacenadas en inductores, etc. Si este proceso tiende a la estabilización de las magnitudes, decimos que el mismo es un proceso transitorio, o que el circuito se encuentra en régimen transitorio. Si a posteriori, las magnitudes afectadas dejan de variar, decimos que el circuito alcanzó el régimen estacionario. El término “estacionario”, suele utilizarse como sinónimo de “independiente del tiempo”, aunque, en circunstancias, no conviene aferrarse mucho a esta asociación terminológica. En el curso veremos algunos ejemplos en que el término se usa para denotar conductas repetitivas o localizadas, que no implican invariancia temporal.

Nosotros trataremos, en primer lugar los circuitos elementales en régimen estacionario. Luego abordaremos algunos casos simples de procesos transitorios.

5 Régimen estacionario.

En esta sección presentaremos algunas reglas prácticas que pueden aplicarse cuando el circuito alcanza el régimen estacionario. Si el circuito contiene fuentes de tensión alterna, no podrá alcanzar el régimen estacionario (al menos en el sentido de la independencia temporal de las corrientes). Pospondremos el tratamiento de estos circuitos para el capítulo siguiente donde discutiremos un significado ampliado del término “estacionario”. Hecha esta salvedad, las reglas son las siguientes:

a) Si una rama contiene un capacitor, la corriente en la rama es nula, y el capacitor estará cargado con una diferencia de potencial compatible con su entorno circuital. Entonces almacenará energía en el campo eléctrico de acuerdo con

$$U_C = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2 \quad (3)$$

b) Si una rama contiene un inductor, la corriente a lo largo de dicha rama será la misma que si el inductor se reemplazara por un conductor ideal. El inductor

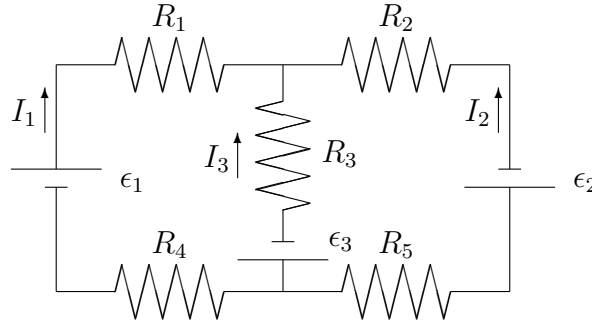
almacenará energía en el campo de inducción magnética de acuerdo con

$$U_L = \frac{1}{2} L I^2 \quad (4)$$

Estas dos reglas permiten la simplificación de los circuitos, de modo que al momento de encontrar las corrientes, sólo habrá pilas y resistores. Una vez reducido el circuito a su formato más simple, podemos aplicar la siguiente regla topológica:

c) La cantidad de corrientes (incógnitas) será siempre igual al número de ramas. Para evitar inconvenientes relacionados con la dependencia lineal de las ecuaciones, debemos utilizar tantas ecuaciones de mallas como provincias tenga el circuito, y tantas ecuaciones de nodos como el número de nodos menos uno.

Ilustramos con un ejemplo. En la figura, observamos que el circuito tiene tres ramas, dos provincias y dos nodos. Por tanto tenemos tres corrientes (incógnitas) y necesitamos tres ecuaciones linealmente independientes. Entonces podemos plantear dos ecuaciones de mallas y una ecuación de nodos. Observemos en la figura que



han sido elegidos los sentidos de circulación en que las corrientes serán consideradas positivas. Para construir las ecuaciones, elegimos las mallas que coinciden con los contornos de las dos provincias, y el nodo superior.

$$\begin{cases} \epsilon_1 - R_1 I_1 + R_3 I_3 + \epsilon_3 - R_4 I_1 = 0 \\ -\epsilon_3 - R_3 I_3 + R_2 I_2 + \epsilon_2 + R_5 I_2 = 0 \\ I_1 + I_2 + I_3 = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Reordenando nos queda el siguiente sistema lineal inhomogéneo

$$\begin{cases} (R_1 + R_4) I_1 - R_3 I_3 = \epsilon_1 + \epsilon_3 \\ (R_2 + R_5) I_2 - R_3 I_3 = \epsilon_3 - \epsilon_2 \\ I_1 + I_2 + I_3 = 0 \end{cases} \quad (6)$$

cuya solución se obtiene de resolver los siguientes determinantes

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{\begin{vmatrix} (\epsilon_1 + \epsilon_3) & 0 & -R_3 \\ (\epsilon_3 - \epsilon_2) & (R_2 + R_5) & -R_3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (R_1 + R_4) & 0 & -R_3 \\ 0 & (R_2 + R_5) & -R_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} \\
I_2 &= \frac{\begin{vmatrix} (R_1 + R_4) & (\epsilon_1 + \epsilon_3) & -R_3 \\ 0 & (\epsilon_3 - \epsilon_2) & -R_3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (R_1 + R_4) & 0 & -R_3 \\ 0 & (R_2 + R_5) & -R_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} \\
I_3 &= \frac{\begin{vmatrix} (R_1 + R_4) & 0 & (\epsilon_1 + \epsilon_3) \\ 0 & (R_2 + R_5) & (\epsilon_3 - \epsilon_2) \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (R_1 + R_4) & 0 & -R_3 \\ 0 & (R_2 + R_5) & -R_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}
\end{aligned} \tag{7}$$

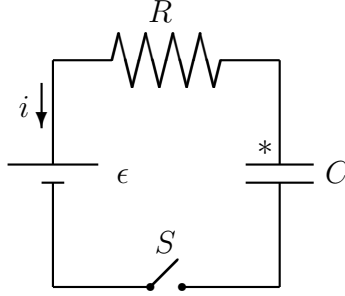
Entonces, operando cuidadosamente tenemos

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{(\epsilon_1 + \epsilon_3)(R_2 + R_3 + R_5) - (\epsilon_3 - \epsilon_2) R_3}{(R_1 + R_4)(R_2 + R_5) + R_3 (R_1 + R_2 + R_4 + R_5)} \\
I_2 &= \frac{(\epsilon_3 - \epsilon_2)(R_1 + R_3 + R_4) - (\epsilon_1 + \epsilon_3) R_3}{(R_1 + R_4)(R_2 + R_5) + R_3 (R_1 + R_2 + R_4 + R_5)} \\
I_3 &= \frac{-(\epsilon_1 + \epsilon_3)(R_2 + R_5) - (\epsilon_3 - \epsilon_2)(R_1 + R_4)}{(R_1 + R_4)(R_2 + R_5) + R_3 (R_1 + R_2 + R_4 + R_5)}
\end{aligned} \tag{8}$$

Esta resolución es verdaderamente simple. Pero a menudo ocurren dos tipos de errores. El primero consiste en equivocarse al momento de plantear las ecuaciones. El segundo surge de cuestiones numéricas debidas a la abundancia de cuentas. Lo único que podemos sugerir al respecto, es que tanto el planteo como el cálculo se hagan con sumo cuidado, y que posteriormente se reemplace el resultado en las ecuaciones como método de control.

6 Carga y descarga de capacitores.

El tratamiento de circuitos en régimen transitorio siempre presenta un grado mayor de complejidad matemática, ya que las reglas de Kirchhof desembocan en ecuaciones diferenciales acopladas. En general, estos tratamientos exceden los objetivos de este curso. Sin embargo, algunas situaciones muy simples pueden tratarse, Tal es el caso de la carga y descarga de capacitores. Comencemos por el proceso de carga para el que utilizaremos el circuito de la figura. Antes de iniciar el análisis observemos



que al referirnos a la carga de un capacitor, estamos nombrando la carga de una de sus placas. En ciertas circunstancias es imprescindible identificar a qué placa nos referimos al indicar la carga. Por tanto, nosotros identificaremos con un asterisco(*) a la placa en cuestión. Luego, también necesitaremos un sentido prefijado para la corriente que identificaremos como positiva (ver figura). Entonces la carga del capacitor y la corriente están relacionadas por

$$i(t) = -\frac{dq(t)}{dt} \quad (9)$$

donde $i(t)$ y $q(t)$ representan los valores instantáneos de corriente y carga respectivamente². Ahora comenzamos con la resolución, planteando la regla de Kirchhof para la malla única que constituye el circuito. Supongamos que el interruptor S se cierra en el instante $t = 0$. Entonces, en cualquier instante posterior tenemos

$$-\epsilon - iR + \frac{q}{C} = 0 \quad (10)$$

donde ϵ es la fuerza electromotriz aportada por la pila, R es la resistencia y C la capacidad, todas magnitudes indicadas en el circuito. Reemplazando (9) en (10)

²En lo que resta del tratamiento de circuitos, adoptaremos las letras minúsculas para indicar funciones del tiempo.

tenemos

$$-\frac{\epsilon}{R} + \frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = 0 \quad (11)$$

Despejando la derivada obtenemos una forma adecuada para la ecuación diferencial

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{RC} (Q - \epsilon C) \quad (12)$$

En vistas a la integración, conviene un cambio de variable

$$u = q - \epsilon C \quad \rightarrow \quad du = dq \quad (13)$$

Reemplazando y separando variables, estamos en condiciones de integrar a ambos miembros.

$$\frac{du}{u} = -\frac{dt}{RC} \quad \rightarrow \quad \int_{u_0}^u \frac{du'}{u'} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt' \quad (14)$$

Observe que al plantear las integrales, las variables de integración se indican primadas. Esto se hace para evitar que las mismas se confundan con los límites superiores de integración, que también son variables. Así tenemos

$$\ln\left(\frac{u}{u_0}\right) = -\frac{t}{RC} \quad \rightarrow \quad \frac{u}{u_0} = e^{-\frac{t}{RC}} \quad (15)$$

Aquí definimos dos constantes, τ y Q_∞ llamadas constante de tiempo del circuito y carga límite del capacitor respectivamente. Las mismas vienen dadas por

$$\tau = RC \quad Q_\infty = \epsilon C \quad (16)$$

dejamos a cargo del lector comprobar que τ tiene unidades de tiempo. Volviendo del cambio de variable e incorporando las nuevas constantes, tenemos

$$q(t) - Q_\infty = -Q_\infty e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (17)$$

con lo que finalmente obtenemos

$$q(t) = Q_\infty \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad (18)$$

Es interesante observar aquí el significado de la constante de tiempo τ . Observemos que cuando el tiempo toma este valor ($t = \tau$), la carga del capacitor alcanza el 63 % de su valor máximo.

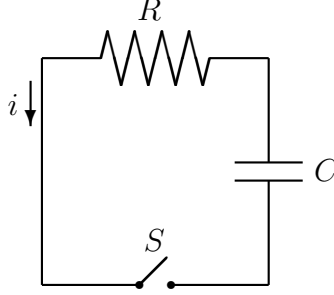
$$q(\tau) = Q_\infty (1 - e^{-1}) = 0,63 Q_\infty \quad (19)$$

Así concluimos que τ puede utilizarse como una medida de cuán rápida resulta la carga del capacitor. Para obtener la corriente, utilizamos la relación (9)

$$i(t) = -\frac{Q_\infty}{RC} e^{-\frac{t}{\tau}} = -I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (20)$$

donde I_0 representa la corriente inicial. Aquí nuevamente el valor de τ resulta un estimador de la rapidez del proceso, en este caso indicando cuánto tarda la corriente en alcanzar el 37 % de su valor inicial.

Ahora nos ocupamos del proceso de descarga. Para ello utilizamos el circuito de la figura siguiente. Aquí utilizamos los mismos criterios de signos que en el caso



anterior, por lo que la relación entre carga y corriente nuevamente viene dada por (9). Supongamos ahora que al tiempo $t = 0$ se cierra el interruptor S . Entonces a cualquier tiempo posterior la regla de mallas de Kirchhof conduce a

$$-iR + \frac{q}{C} = 0 \quad (21)$$

Reemplazando (9) en (21) tenemos

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = 0 \quad (22)$$

Esta es una ecuación diferencial formalmente idéntica a (14), por lo que procedemos en forma análoga

$$\frac{dq}{q} = -\frac{dt}{RC} \quad \rightarrow \quad \int_{Q_0}^q \frac{dq'}{q'} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt' \quad (23)$$

Integrando a ambos miembros tenemos

$$\ln\left(\frac{q}{Q_0}\right) = -\frac{t}{RC} \quad \rightarrow \quad \frac{q}{Q_0} = e^{-\frac{t}{RC}} \quad (24)$$

Utilizando la misma definición de τ dada en (16) obtenemos la expresión para la carga como función del tiempo

$$q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (25)$$

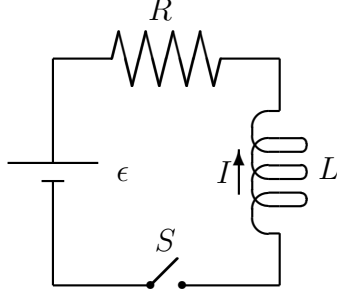
Para obtener la corriente como función del tiempo, utilizamos nuevamente (9)

$$i(t) = \frac{Q_0}{RC} e^{-\frac{t}{\tau}} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (26)$$

donde I_0 es la corriente inicial.

7 Conexión y desconexión de inductores.

La conexión y desconexión de un inductor que forma parte de un circuito elemental, pueden resolverse con relativa facilidad. Consideremos en primer lugar, el proceso de conexión utilizando el circuito de la figura siguiente. Sobre el inductor está indicado



el sentido en que la corriente será considerada positiva. Supongamos que al tiempo $t = 0$, se cierra el interruptor S . Entonces para tiempos posteriores tenemos la ecuación de malla dada por

$$\epsilon - iR - L \frac{di}{dt} = 0 \quad (27)$$

Buscamos una forma apropiada para la ecuación diferencial, que nuevamente será análoga a (14).

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L} \left(i - \frac{\epsilon}{R} \right) \quad (28)$$

Aquí introducimos un cambio de variable tendiente a la integración de (28).

$$u = i - \epsilon R \quad \rightarrow \quad du = di \quad (29)$$

con lo que tenemos

$$\frac{du}{u} = -\frac{R}{L} dt \quad \rightarrow \quad \int_{u_0}^u \frac{du'}{u'} = -\frac{R}{L} \int_0^t dt' \quad (30)$$

Resolvemos las integrales de ambos miembros y obtenemos

$$\ln \left(\frac{u}{u_0} \right) = -\frac{Rt}{L} \quad \rightarrow \quad \frac{u}{u_0} = e^{-\frac{Rt}{L}} \quad (31)$$

Aquí introducimos las constantes τ y I_∞ . La primera es la constante de tiempo del circuito, operativamente análoga a la presentada en la carga de capacitores.

La segunda representa la corriente que alcanzará el circuito al finalizar el proceso transitorio.

$$\tau = \frac{L}{R} \quad I_{\infty} = \frac{\epsilon}{R} \quad (32)$$

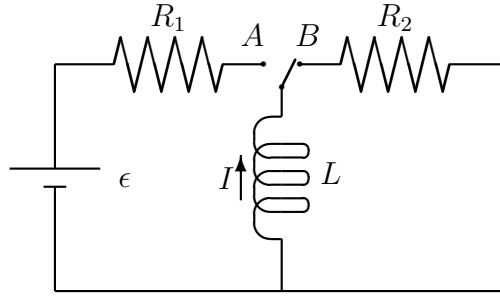
Reemplazando, tenemos

$$i(t) - I_{\infty} = -I_{\infty} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (33)$$

con lo que la corriente como función del tiempo

$$i(t) = I_{\infty} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad (34)$$

Ahora tratamos el proceso de desconexión. Este requiere un circuito algo más complicado, porque el inductor no puede tener una corriente apriori sin una fuente que la sostenga. Entonces el circuito elemental que representa el proceso es el siguiente



donde el proceso transitorio se inicia al tiempo $t = 0$, cuando el conmutador pasa de la posición A a la posición B . La corriente que circula inicialmente por el inductor es la que sostiene la pila y viene dada por

$$I_0 = \frac{\epsilon}{R_1} \quad (35)$$

Después de la conmutación, la regla de mallas conduce a

$$-iR_2 - L \frac{di}{dt} = 0 \quad (36)$$

de donde la ecuación diferencial puede escribirse como sigue

$$\frac{di}{dt} + \frac{iR_2}{L} = 0 \quad (37)$$

Separando variables como en los casos anteriores, tenemos

$$\frac{di}{i} = -\frac{R_2 dt}{L} \rightarrow \int_{I_0}^i \frac{di'}{i'} = -\frac{R_2}{L} \int_0^t dt' \quad (38)$$

Integrando a ambos miembros tenemos

$$\ln\left(\frac{i}{I_0}\right) = -\frac{R_2 t}{L} \rightarrow \frac{i}{I_0} = e^{-\frac{R_2 t}{L}} \quad (39)$$

Definimos la constante de tiempo τ como

$$\tau = \frac{L}{R_2} \quad (40)$$

con lo que la corriente como función del tiempo toma la forma

$$i(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (41)$$

El problema queda así formalmente resuelto. Pero es interesante observar la fuerza electromotriz inducida en el inductor, a la que llamaremos ϵ_L . La misma se obtiene como sigue

$$\epsilon_L(t) = -L \frac{di}{dt} = I_0 R_2 e^{-\frac{t}{\tau}} = \epsilon_{L0} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (42)$$

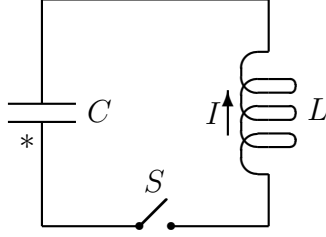
donde ϵ_{L0} representa la fuerza electromotriz inicial en el inductor, es decir, justo después de operada la conmutación. Observemos el detalle siguiente, teniendo en cuenta la expresión (35)

$$\epsilon_{L0} = I_0 R_2 = \frac{R_2}{R_1} \epsilon \quad (43)$$

Este resultado esconde una propiedad bastante sorprendente. Tanto los resistores de 1Ω como los de 10000Ω son fácilmente conseguibles. Las pilas de $1,5 V$ más fáciles aún. Entonces, haciendo $R_1 = 1 \Omega$, $R_2 = 10000 \Omega$ y $\epsilon = 1,5 V$, podemos obtener (aunque por un lapso extremadamente corto) una tensión $\epsilon_{L0} = 15000 V$. Este tipo de circuitos es utilizado en los dispositivos que producen chispas, como por ejemplo los encendedores electrónicos.

8 Circuitos oscilantes.

Algunos circuitos elementales, al menos en formato teórico, no alcanzan un régimen estacionario en el sentido propuesto en este capítulo. Aquí proponemos un ejemplo



muy simple de este tipo de circuito. El mismo conecta en una malla, un capacitor y un inductor. El capacitor está inicialmente cargado con una carga Q_0 , y el interruptor se acciona al tiempo $t = 0$. La relación entre cargas y corrientes sigue siendo compatible con (9). La regla de mallas conduce a

$$\frac{q}{C} - L \frac{di}{dt} = 0 \quad (44)$$

Reemplazando (9) en (44), y dividiendo por L tenemos

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0 \quad (45)$$

Esta es la ecuación diferencial de un oscilador armónico simple, en la variable $q(t)$. Recordemos brevemente los osciladores mecánicos. Si la variable oscilante es x tenemos

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad (46)$$

donde ω es la frecuencia de oscilación. Las soluciones son de la forma

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (47)$$

Homologando nuestra ecuación diferencial (45) con la solución mecánica (46), y teniendo en cuenta las condiciones iniciales, tenemos la siguiente solución

$$q(t) = Q_0 \cos(\omega t) \quad \text{con} \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (48)$$

Capítulo 11

Circuitos con fuentes de tensión alterna.

1 Introducción.

Los circuitos de corriente alterna constituyen un ejemplo cotidiano de aplicación del electromagnetismo, ya que las redes domiciliarias son circuitos de este tipo. Cuando tratamos la ley de Faraday, observamos que los montajes de bobinas giratorias en campos magnéticos uniformes generan fuerzas electromotrices oscilantes, a expensas de la energía aportada por un agente externo (motor). Tal dispositivo puede utilizarse como fuente de alimentación para un circuito, en cuyo caso diremos que el dispositivo es una “fuente de tensión alterna”, y que el circuito está sometido a un “régimen de corriente alterna”¹. En nuestro tratamiento, nos remitiremos exclusivamente a fuentes de tensión alterna que suministran tensiones de la forma

$$v_F(t) = V_F \sin(\omega t + \phi) \quad (1)$$

donde $v_F(t)$ representa la diferencia de potencial garantizada entre los terminales de la fuente en cada instante (note que es una función del tiempo). Como se trata de una magnitud que oscila armónicamente, cabe definir su amplitud V_F , su frecuencia angular ω y su fase inicial ϕ .

Los circuitos que trataremos en este curso serán sólo los más elementales, incluyendo resistores, inductores y capacitores, bajo la acción de una única fuente de tensión alterna. Como ya es sabido, la puesta en marcha de un circuito que contiene inductores y capacitores da lugar a un régimen transitorio. Nosotros no analizaremos tales efectos, por lo que asumiremos que la conexión de la fuente con el circuito se ha realizado largo tiempo atrás². En estas condiciones, puede probarse que todas las tensiones y corrientes medibles del circuito oscilan armónicamente con la misma frecuencia que la fuente. Si llamamos $u(t)$ a una tensión medida entre dos puntos del circuito, o a una corriente medida en un punto del circuito, la misma será de la forma

$$u(t) = U \sin(\omega t + \delta) \quad (2)$$

donde ω siempre es la misma frecuencia angular de la fuente y δ es una fase relativa particular de cada magnitud medida.

¹En realidad, la tecnología actual provee de fuentes de tensión alterna que funcionan por principios muy diversos, por lo que los dispositivos mencionados deben tomarse como un ejemplo para fijar ideas.

²En terminología más estricta, decimos que el régimen es “estacionario”, aunque la palabra se presta a confusión por la variabilidad temporal de las magnitudes involucradas.

Con respecto a las notaciones, observemos como ejemplo la función (2). Reservaremos las letras minúsculas para identificar los valores instantáneos de una magnitud (variable dependiente del tiempo), y su homóloga mayúscula para la amplitud asociada.

2 La representación fasorial.

Como sabemos, los vectores en el plano pueden representarse como segmentos orientados. Un fasor es un vector “rotante”, tal que el segmento que lo representa mantiene uno de sus extremos fijos, mientras que el otro (el que tiene flecha) gira sobre una circunferencia. Nosotros utilizaremos esta representación para el caso particular en que el fasor gira con frecuencia angular constante ω en sentido antihorario (ver figura 1). Sea $\vec{U}(t)$, un fasor genérico, cuyas componentes en la notación habitual serán

$$u_x(t) = U \cos(\omega t + \delta) \quad (3)$$

$$u_y(t) = U \sin(\omega t + \delta) \quad (4)$$

donde U representa el módulo del fasor. Observe la completa analogía entre las funciones (2) y (4). En virtud de tal comparación, podemos interpretar que las funciones del tipo (2) “son” las proyecciones de fasores sobre el eje “ y ”. En tratamientos posteriores nos referiremos a fasores reservando las notaciones vectoriales a tal fin.

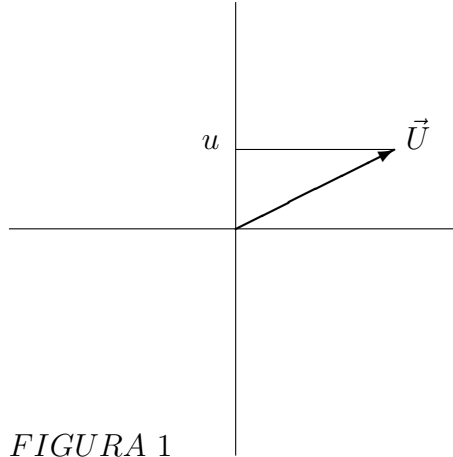


FIGURA 1

La principal ventaja de esta representación radica en que los fasores representativos de todas las magnitudes físicas giran a la misma velocidad, por lo que sus posiciones relativas se mantienen en el tiempo como si fuera un rotador rígido. Esto

permite evaluar relaciones vectoriales a un tiempo, sabiendo que dichas relaciones se mantienen para todo tiempo posterior.

3 Los circuitos más elementales.

Los montajes más elementales que pueden concebirse en corriente alterna, surgen de la conexión de un único dispositivo (resistor, capacitor o inductor) con la fuente de tensión alterna. Estos circuitos se representan en las figuras 2.a, 2.b y 2.c.

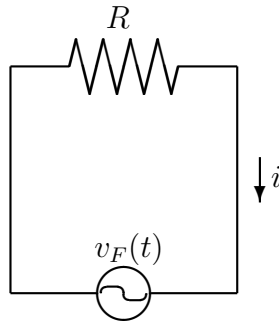


FIGURA 2.a

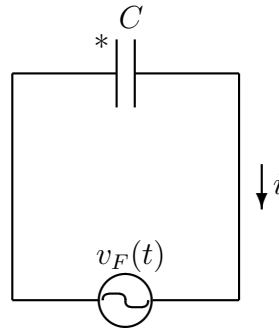


FIGURA 2.b

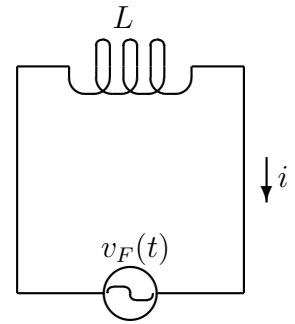


FIGURA 2.c

Observe que en las figuras se indican sentidos de circulación para la corriente, aún cuando sabemos que la misma será oscilante. En realidad, la flecha indica que cuando la corriente en nuestros cálculos resulte positiva, interpretaremos que circula a favor de la flecha y viceversa. Estos sentidos se eligen en forma arbitraria, pero las ecuaciones deben ser consistentes con la convención adoptada³.

A continuación trabajaremos con cada uno de los circuitos, para establecer la corriente como función del tiempo en cada caso. Asimismo, aprovecharemos este análisis para definir magnitudes muy útiles en circuitos más complejos. En todos los casos supondremos que la fuente suministra una tensión alterna del tipo (1) con fase inicial nula.

$$v_F(t) = V_F \sin(\omega t) \quad (5)$$

a) Circuito con un resistor de resistencia R (figura 2.a): Aplicando la regla de Kirchhoff, instantáneamente en la malla tenemos que

$$v_F - iR = 0 \quad (6)$$

³La elección de los sentidos de circulación es análoga a la que se plantea en circuitos de corriente continua.

donde se han omitido las dependencias temporales por simplicidad. Reemplazando por (5) tenemos

$$i = \frac{v_F}{R} = \frac{V_F}{R} \sin(\omega t) \quad (7)$$

Homologando con la forma 2 tenemos

$$i(t) = I \sin(\omega t) \quad I = \frac{V_F}{R} \quad (8)$$

donde I es la amplitud de la corriente y además puede observarse que la fase relativa de la corriente es nula. En tal sentido, se dice que en un resistor, la tensión y la corriente están en fase.

b) Circuito con un capacitor de capacidad C (figura 2.b): En este punto cabe una consideración sutil; la carga del capacitor varía con el tiempo en forma armónica, por lo que sus valores serán alternativamente positivos y negativos. Como las dos placas del capacitor siempre tienen cargas opuestas, hay que adoptar una de ellas como referencia para la carga. La convención que elegimos aquí, es medir la carga sobre la placa en la que la corriente entra cuando es positiva (recordar el sentido de circulación). Como ayuda, colocamos en el dibujo un asterisco en la placa elegida. Con la convención establecida, la relación entre la carga del capacitor y la corriente en la rama que lo contiene es

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (9)$$

Ahora aplicamos nuevamente la regla de Kirchhoff sobre la malla:

$$v_F - \frac{q}{C} = 0 \quad (10)$$

de donde se tiene que

$$q = Cv_F = CV_F \sin(\omega t) \quad (11)$$

Entonces la corriente será

$$i = \omega CV_F \cos(\omega t) \quad (12)$$

Buscamos ahora que la corriente tenga un formato análogo a la función (2). Así tenemos

$$i(t) = I \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad I = \omega CV_F \quad (13)$$

Con esta homologación tenemos una expresión para la amplitud de la corriente, a la vez que observamos que la fase relativa es $\pi/2$. En este sentido decimos que en

una rama que contiene un capacitor, la corriente “adelanta” en $\pi/2$ respecto de la tensión.

Una magnitud muy práctica en la resolución de circuitos es la reactancia capacitiva χ_C que se define como

$$\chi_C = \frac{1}{\omega C} \quad (14)$$

Dejamos a cargo del estudiante probar que la unidad de esta magnitud coincide con la unidad de resistencia. Observe además que la relación entre las amplitudes de la tensión y la corriente toma la forma

$$I = \frac{V_F}{\chi_C} \quad (15)$$

c) Circuito con un inductor de autoinducción L (figura 2.c): Recordando la respuesta de los inductores (reparar ley de Faraday y autoinducción) tenemos por aplicación de la regla de Kirchhoff

$$v_F - L \frac{di}{dt} = 0 \quad (16)$$

Esta es una ecuación diferencial que puede resolverse fácilmente. En primer lugar la escribimos como sigue

$$di = \frac{1}{L} v_F(t) dt = \frac{V_F}{L} \sin(\omega t) dt \quad (17)$$

$$(18)$$

Luego integramos en ambos miembros en forma indefinida

$$i = \frac{V_F}{L} \int \sin(\omega t) dt + \text{constante} \quad (19)$$

Con un cambio de variable muy simple tenemos que

$$i = -\frac{V_F}{\omega L} \cos(\omega t) + \text{constante} \quad (20)$$

Como la corriente debe tener la forma funcional (2), la constante debe ser nula. Así tenemos

$$i(t) = I \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad I = \frac{V_F}{\omega L} \quad (21)$$

Con esta homologación tenemos una expresión para la amplitud de la corriente, a la vez que observamos que la fase relativa es $-\pi/2$. Por esto decimos que en la rama que contiene a un inductor la corriente “atrás” $\pi/2$ con respecto a la tensión. Aquí

también es conveniente introducir la magnitud χ_L llamada reactancia inductiva, cuya definición es

$$\chi_L = \omega L \quad (22)$$

Nuevamente dejamos a cargo del lector probar que χ_L tiene unidades de resistencia. La relación entre las amplitudes de tensión y corriente es

$$I = \frac{V_F}{\chi_L} \quad (23)$$

Las representaciones fasoriales a $t = 0$ de estos circuitos elementales son las siguientes.



FIGURA 3.a

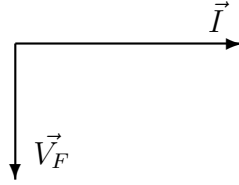


FIGURA 3.b

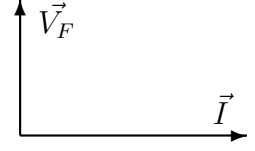


FIGURA 3.c

4 El circuito RLC serie.

El circuito RLC serie se compone de un resistor, un capacitor y un inductor conectados en serie con la fuente de tensión alterna (figura 4).

Como se trata de un circuito serie, la corriente instantánea en cualquier punto del circuito debe ser la misma. Por simplicidad supondremos entonces que la fase inicial de la corriente es nula, y referiremos a ella todos los defasajes de las demás magnitudes oscilantes. Teniendo en cuenta los resultados obtenidos para los circuitos más elementales podemos escribir a priori la forma en que varían las tensiones en cada dispositivo. Esto es

$$i(t) = I \sin(\omega t) \quad (24)$$

$$v_F(t) = V_F \sin(\omega t + \phi) \quad (25)$$

$$v_R(t) = V_R \sin(\omega t) \quad (26)$$

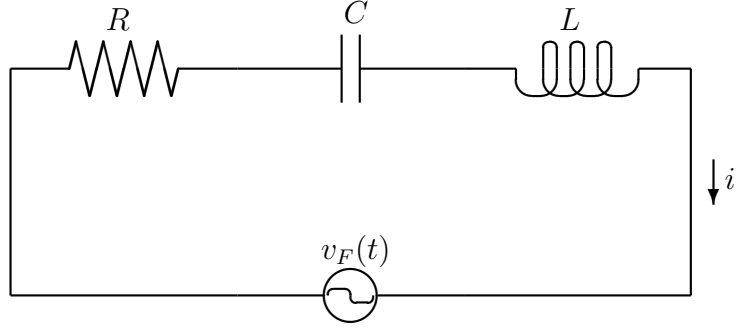


FIGURA 4

$$v_C(t) = V_C \sin(\omega t - \pi/2) \quad (27)$$

$$v_L(t) = V_L \sin(\omega t + \pi/2) \quad (28)$$

Las tensiones subindicadas corresponden a los terminales de cada dispositivo. La solución del problema consiste en establecer la amplitud I de la corriente, y la diferencia de fase ϕ entre la tensión v_F en terminales de la fuente y la corriente i del circuito. El correspondiente diagrama fasorial a $t = 0$ se muestra en la figura 5.a.

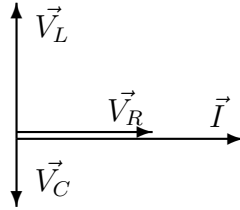


FIGURA 5.a

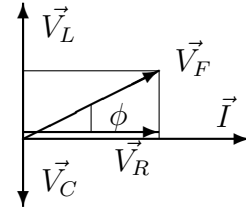


FIGURA 5.b

La aplicación de la regla de Kirchhoff en un instante sobre el circuito conduce a

$$v_F - v_R - v_C - v_L = 0 \quad (29)$$

o bien

$$v_F = v_R + v_C + v_L \quad (30)$$

Invocando la naturaleza fasorial de las magnitudes en juego, podemos aplicar propiedades vectoriales. En particular, la componente y de la suma de tres vectores es igual a la suma de las componentes y de cada uno de ellos. La figura 5.b es idéntica a la 5.a, con el agregado del vector \vec{V}_F que se obtiene como sigue

$$\vec{V}_F = \vec{V}_R + \vec{V}_C + \vec{V}_L \quad (31)$$

De la construcción geométrica se deduce que la relación entre módulos de los vectores anteriores es

$$V_F = \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2} \quad (32)$$

mientras que la fase ϕ puede obtenerse de

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{V_L - V_C}{V_R} \quad (33)$$

Recordemos ahora las relaciones de amplitudes desarrolladas para los circuitos elementales

$$V_R = IR \quad V_C = I\chi_C \quad V_L = I\chi_L \quad (34)$$

Reemplazando en (32) tenemos que

$$V_F = \sqrt{I^2 R^2 + (I\chi_L - I\chi_C)^2} \quad (35)$$

$$V_F = I \sqrt{R^2 + (\chi_L - \chi_C)^2} \quad (36)$$

Así podemos determinar la amplitud de la corriente en términos de los datos del circuito. Aprovechamos la circunstancia para definir una magnitud llamada impedancia del circuito, y habitualmente representada por Z . Dicha magnitud en general relaciona las amplitudes de la tensión entre terminales de la fuente, con la corriente que circula por ella. Esto es

$$V_F = IZ \quad (37)$$

En nuestro caso particular, la impedancia es

$$Z = \sqrt{R^2 + (\chi_L - \chi_C)^2} \quad (38)$$

Con un procedimiento análogo se obtiene la diferencia de fase ϕ . Reemplazando las relaciones (34) en (33) tenemos

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{I\chi_L - I\chi_C}{IR} = \frac{\chi_L - \chi_C}{R} \quad (39)$$

Cuando el ángulo ϕ toma valores positivos decimos que el circuito es inductivo. Por el contrario, si el ángulo ϕ es negativo se dice que el circuito es capacitivo. En el caso particular en que ϕ es nulo, decimos que el circuito está en resonancia.

5 Valores eficaces.

El valor medio temporal de cualquier magnitud que oscila armónicamente, es nulo cuando se lo evalúa en un período de dicha oscilación. Por tanto, tal valor medio

carece de interés como indicador para las magnitudes relevantes en corriente alterna. Un indicador no nulo es el llamado “valor eficaz”. Sea $u(t)$ una magnitud física oscilante. Su valor eficaz U_e se define como

$$U_e = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt} \quad (40)$$

En el caso de interés en corriente alterna, en que las magnitudes son del tipo (2), tenemos

$$U_e = U \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t + \delta) dt} \quad (41)$$

La expresión que queda bajo la raíz cuadrada puede resolverse con un poco de trabajo, o puede encontrarse en una tabla⁴. Su valor es 1/2, por lo que

$$U_e = \frac{U}{\sqrt{2}} \quad (43)$$

6 Potencia suministrada por la fuente de tensión alterna.

Las fuentes de tensión alterna no suministran energía a un ritmo constante, por lo que cabe definir una potencia instantánea dada por

$$p(t) = i_F(t) v_F(t) \quad (44)$$

No obstante, podemos establecer un valor medio significativo en virtud de la periodicidad de $p(t)$. Comencemos por recordar que para una función periódica en el tiempo con período T , el valor medio viene dado por

$$\langle U \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt \quad (45)$$

que en nuestro caso se convierte en

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T i_F(t) v_F(t) dt \quad (46)$$

⁴En una tabla de integrales definidas, tendremos

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(x) dx = \frac{1}{2} \quad (42)$$

Este resultado conviene recordarlo, ya que las integrales que pueden llevarse a esta forma aparecen muy frecuentemente en diversas áreas de la física y la ingeniería.

La situación más general será cuando exista un defasaje ϕ entre la tensión y la corriente, en cuyo caso tendremos

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T I_F \sin(\omega t) V_F \sin(\omega t + \phi) dt \quad (47)$$

Recordemos aquí una propiedad de la suma de ángulos

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta) \quad (48)$$

Aplicando esta propiedad tenemos

$$\langle P \rangle = \frac{I_F V_F}{T} \left[\cos(\phi) \int_0^T \sin^2(\omega t) dt + \sin(\phi) \int_0^T \sin(\omega t) \cos(\omega t) dt \right] \quad (49)$$

La segunda integral es nula, mientras que la primera es análoga a la resuelta en la sección anterior. Finalmente tenemos

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_F V_F \cos(\phi) \quad (50)$$

Recordando la definición de valor eficaz de una magnitud oscilante, podemos reescribir el último resultado como

$$\langle P \rangle = I_{Fe} V_{Fe} \cos(\phi) \quad (51)$$

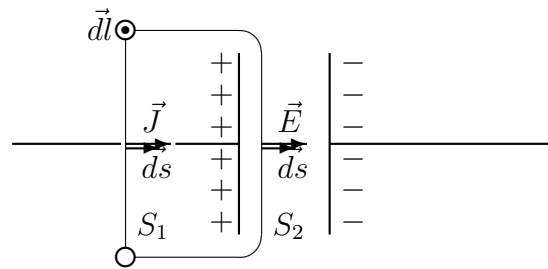
En terminología técnica, la magnitud $\cos(\phi)$ se denomina factor de potencia del circuito. Observando los diagramas fasoriales de los circuitos elementales, vemos que el factor de potencia vale la unidad cuando el circuito es resistivo, y es nulo cuando el circuito es inductivo o capacitivo puro (ver figuras 3). En el circuito RLC el factor de potencia vale uno en la resonancia.

Capítulo 12

Ecuaciones de Maxwell.

1 Comencemos por una paradoja.

Cuando el desarrollo del electromagnetismo estaba bastante avanzado, los investigadores iban por más, hilando fino sobre las leyes ya establecidas. A esta altura de los acontecimientos, era importante determinar si las variaciones temporales del campo eléctrico eran fuentes de “algo”, tal como las variaciones del campo de inducción magnética lo eran en virtud de la ley de Faraday. Para analizar esto, podemos pensar en el más simple de los dispositivos que produce campos eléctricos variables: un capacitor en proceso de carga. Como la corriente de carga es variable con el tiempo, no estamos habilitados para aplicar la ley de Ampere (recordar que sólo puede aplicarse en magnetostática, donde las corrientes son estacionarias). Sin embargo, una práctica habitual consiste en “forzar” las leyes para evaluar si resisten una generalización. En este marco, consideremos el montaje formado por un capacitor y los conductores de alimentación que permiten su carga. Supongamos además que dicha carga está ocurriendo. Para aplicar la ley de Ampere, elegimos una curva cerrada C , que rodea a uno de los conductores. Como la ley involucra una superficie cualquiera limitada por la curva C , elegimos dos alternativas: la superficie S_1 que es atravesada por el conductor, y la S_2 que pasa por el espacio interior al capacitor (ver figura).



Aplicemos la ley de Faraday para ambas alternativas. En la primera el flujo a través de S_1 es mayor que cero debido a que \vec{J} es significativo sobre la sección del conductor. Por el contrario, el flujo sobre S_2 es nulo debido a que dicha superficie

no es atravesada por corrientes de conducción.

$$1) \quad \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{s} > 0 \quad (1)$$

$$2) \quad \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_{S_2} \vec{J} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (2)$$

Este resultado adverso, da por tierra con nuestro intento de generalizar la ley de Ampere. Basta este simple contraejemplo para decir que esta ley no admite ser utilizada en casos donde las corrientes varían con el tiempo¹. Esta paradoja podría considerarse como un disparador para lanzarse a una nueva búsqueda. Hay una ley faltante ...

2 Ley de Ampere-Maxwell.

La ley faltante la propuso Maxwell como una modificación de la ley de Ampere. El hallazgo fue de carácter especulativo, a diferencia de lo sucedido con las leyes previas en la historia del electromagnetismo. La especulación giró alrededor de las variaciones temporales del campo eléctrico, tal como parecía sugerir cierta “simetría” con la ley de Faraday. Aquí va una versión modernizada de la ley de Ampere-Maxwell

Consideremos una región del espacio en la que existen el campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$, el campo de inducción magnética $\vec{B}(\vec{r}, t)$ y una distribución de corrientes $\vec{J}(\vec{r}, t)$, donde todas las magnitudes pueden variar con el tiempo. Sean C una curva cerrada cualquiera y S una superficie limitada por C . Sean $d\vec{l}$ un vector elemental, tangente a la curva C , y $d\vec{s}$ un vector elemental normal a la superficie S . Los vectores $d\vec{l}$ y $d\vec{s}$ se eligen de modo que cumplan con la regla de la mano derecha. Entonces, la circulación del campo de inducción magnética \vec{B} a lo largo de la curva C viene dada por

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (3)$$

Aquí introducimos nueva terminología. Recordemos que el flujo del vector \vec{J} a través de una superficie es lo que definimos como corriente I . A estas magnitudes las referiremos en adelante como densidad de corriente de conducción y corriente de

¹Aquí hay que ser cuidadoso. El contraejemplo no invalida la ley de Ampere, sino que indica que no puede generalizarse para hipótesis menos restrictivas. En efecto, la misma sólo puede ser usada en el contexto de la magnetostática.

conducción respectivamente. Observando la ley de Ampere-Maxwell, podemos escribir una forma de blsillo, introduciendo el concepto de corriente de desplazamiento I_D , dada por

$$I_D = \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot \vec{ds} \quad (4)$$

Entonces la ley puede escribirse como

$$\oint_C \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 (I + I_D) \quad (5)$$

Siguiendo el camino de la analogía, podemos definir una densidad de corriente de desplazamiento \vec{J}_D como sigue

$$\vec{J}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (6)$$

Esta definición podría introducirse en la forma integral (3) de la ley de Ampere-Maxwell, imponiéndole la restricción de mantener la curva C y la superficie S invariantes en el tiempo². Entonces tenemos otra forma posible (aunque restringida) de la ley

$$\oint_C \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 \int_S (\vec{J} + \vec{J}_D) \cdot \vec{ds} \quad (7)$$

La corriente de desplazamiento es una nueva magnitud física, cuya interpretación no es directa. En principio, decimos que es una corriente porque tiene unidades de corriente y opera al mismo nivel que la corriente de conducción en el marco de la teoría. Sin embargo, no implica el movimiento real de cargas. Por otra parte, podemos decir que tanto la corriente de conducción como la de desplazamiento, pueden darse simyltáneamente en un mismo lugar del espacio, ya sea en el vacío como en los medios materiales.

En muchos casos las corrientes de conducción y de desplazamiento en un mismo lugar, difieren en varios órdenes de magnitud, por lo que una de ellas puede despreciarse frente a la otra. Citamos aquí dos ejemplos habituales.

a) Dentro de los conductores en régimen estacionario o cuando circulan corrientes de conducción de baja frecuencia, la corriente de desplazamiento puede despreciarse.

b) En el vacío libre de cargas y corrientes de conducción, dominará la corriente de desplazamiento.

²Con esta restricción sería lícito permutar el operador de derivación con la integral en la forma

$$\frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot \vec{ds} = \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{ds}$$

3 Ecuaciones de Maxwell en el vacío.

Los fenómenos electromagnéticos en el vacío pueden describirse completamente si en la región del espacio a estudiar, se especifican los campos eléctrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$ y de inducción magnética $\vec{B}(\vec{r}, t)$. Estos campos pueden originarse en la existencia de cargas eléctricas, y en los movimientos de las mismas³. Tales “fuentes” se representan mediante las densidades de carga $\rho(\vec{r}, t)$ y de corriente $\vec{J}(\vec{r}, t)$ ⁴. La relación espacio-temporal entre los campos (incluyendo el efecto de las fuentes), viene dada por las ecuaciones de Maxwell. En realidad, estas ecuaciones ya son bien conocidas para nosotros, pues provienen de evidencias experimentales y razonamientos teóricos vistos en capítulos anteriores. Sin embargo resulta muy instructivo observarlas en conjunto, para comprender la interrelación entre los campos. Presentaremos aquí sus formas integrales en el vacío, y pospondremos para un capítulo posterior el tratamiento de las formas diferenciales. Un detalle sutil consiste en observar que, aún cuando hablamos de vacío, incluimos las cargas y las corrientes. Ya sabemos que ellas requieren un sustrato material, como por ejemplo un electrón. Sin embargo, un electrón puede estar en el vacío, o inmerso dentro de un medio material. En este tratamiento descartamos los medios materiales que llenan el espacio (por eso decimos vacío), pero admitimos el sustrato material de las cargas.

Ahora preparamos la geometría para las ecuaciones de Maxwell. Consideremos que en cierta región del espacio conviven cargas (posiblemente en movimiento) con campos eléctrico y de inducción magnética. Supongamos que todo puede fluctuar en el tiempo. Necesitamos imaginar dos montajes en el vacío. 1) Sea C_1 una curva cerrada que resulta el límite de una superficie S_1 (naturalmente no cerrada). Llamamos $d\vec{l}_1$ a cada uno de los vectores infinitesimales tangentes a la curva C_1 , y $d\vec{S}_1$ a los vectores infinitesimales normales a la superficie S_1 . Recuerde que los sentidos de $d\vec{l}_1$ y $d\vec{S}_1$ deben satisfacer la regla de la mano derecha. Entonces podemos enunciar respectivamente las leyes de Faraday y Ampere-Maxwell.

$$\oint_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{l}_1 = -\frac{d}{dt} \int_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S}_1 \quad (8)$$

$$\oint_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{l}_1 = \mu_0 \left[\int_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{S}_1 + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 \right] \quad (9)$$

En palabras la ley de Faraday nos dice que la circulación del campo eléctrico sobre la curva C_1 , es proporcional a la variación temporal del flujo magnético a través de

³Veremos más adelante que de las ecuaciones de Maxwell se desprenden otros orígenes posibles para los campos.

⁴Aquí la palabra “fuente” se utiliza en el sentido de causa (que de origen).

la superficie S_1 . Por su parte, la ley de Ampere-Maxwell expresa que la circulación del campo de inducción magnética a lo largo de la curva C_1 es proporcional a la suma de la corriente de conducción y la corriente de desplazamiento a través de la superficie S_1 .

2) Sea S_2 una superficie cerrada que limita una región del espacio V_2 . Supongamos que $d\vec{S}_2$ representa cada vector infinitesimal normal exterior a la superficie S_2 , mientras que dV_2 se refiere a cada elemento de volumen de la región V_2 . Así las leyes de Gauss eléctrica y magnética son

$$\oint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V_2} \rho dV_2 \quad (10)$$

$$(11)$$

$$\oint_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S}_2 = 0 \quad (12)$$

La ley de Gauss para el campo eléctrico establece que el flujo de dicho campo a través de la superficie S_2 es proporcional a la carga residente en la región V_2 . La otra ley expresa que el flujo del campo de inducción magnética a través de S_2 es siempre nulo. Esta última ley suele nombrarse por una propiedad intrínsecamente contenida en ella, como ley de la no existencia de monopolos magnéticos.

4 El campo electromagnético.

Las ecuaciones de Maxwell ponen en evidencia que los campos eléctrico y de inducción magnética no son independientes, cuando experimentan cambios en el tiempo. Esto lleva a pensar que los fenómenos eléctricos y magnéticos son manifestaciones distintas que provienen de una raíz común. En este sentido decimos que la teoría electromagnética es unificadora. Siguiendo esta idea, se suele llamar campo electromagnético al par de campos $\vec{E}(\vec{r}, t)$ y $\vec{B}(\vec{r}, t)$.

Centremos nuestra atención en las ecuaciones de Maxwell. Observemos que las mismas valen aún cuando los campos y las fuentes dependen del tiempo. Esto sugiere implícitamente una extensión de la validez de algunas de las leyes a contextos más amplios que los estudiados inicialmente. Por ejemplo las ecuaciones (??) y (??) han sido introducidas en electrostática y magnetostática respectivamente, y sin embargo siguen valiendo en general. Estas extensiones no son triviales, sino que han exigido rigurosas verificaciones experimentales

5 Ecuaciones de Maxwell en el vacío libre de cargas y corrientes.

Una situación especialmente interesante se da cuando en cierta región del espacio existe campo electromagnético en ausencia de cargas y corrientes. En este caso, las ecuaciones de Maxwell toman las formas siguientes

$$\oint_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{l}_1 = - \frac{d}{dt} \int_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S}_1 \quad (13)$$

$$\oint_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{l}_1 = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 \quad (14)$$

$$\oint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 = 0 \quad (15)$$

$$\oint_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S}_2 = 0 \quad (16)$$

En este punto podemos observar la gran simetría que presentan las ecuaciones, respecto de la forma en que relacionan los campos $\vec{E}(\vec{r}, t)$ y $\vec{B}(\vec{r}, t)$. Esta simetría será de importancia crucial en las formulaciones modernas del electromagnetismo, y probablemente haya resultado inspiradora para la formulación de la teoría de la relatividad especial.

6 Formas diferenciales.

Hasta este punto, hemos tratado siempre con ecuaciones de Maxwell en su formato integral, que resulta muy aconsejable desde el punto de vista didáctico. Sin embargo, resulta operativamente conveniente escribirlas en un formato diferencial, donde campos y fuentes se relacionan localmente. Estas ecuaciones son mucho más versátiles, aunque su significado parece, a primera vista, algo más difícil de comprender.

Para pasar de las formas integrales a las diferenciales, utilizamos los teoremas integrales de Stokes y de Gauss. Bajo las mismas condiciones geométricas con las que enunciamos las ecuaciones de Maxwell, estos teoremas vienen dados por

$$\oint_{C_1} \vec{\eta} \cdot d\vec{l}_1 = \int_{S_1} (\vec{\nabla} \times \vec{\eta}) \cdot d\vec{S}_1 \quad (17)$$

$$\oint_{S_2} \vec{\eta} \cdot d\vec{S}_2 = \int_{V_2} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\eta}) dV_2 \quad (18)$$

donde $\vec{\eta}$ representa cualquier campo vectorial con debidas condiciones de regularidad. A continuación trataremos cada caso.

a) Leyes de circulación: comencemos por reconocer que en las leyes de Faraday (8) y Ampere-Maxwell (9), podemos intercambiar los operadores de derivación con las integrales, suponiendo que la curva C_1 y la superficie S_1 son fijas. En tal caso, los operadores pasan de derivadas totales a parciales. Entonces tendremos

$$\oint_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{l}_1 = - \int_{S_1} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}_1 \quad (19)$$

$$\oint_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{l}_1 = \int_{S_1} \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}_1 \quad (20)$$

Ahora aplicamos el teorema de Stokes (17) para convertir las integrales curvilíneas de los primeros miembros en integrales de superficie. Así tenemos

$$\int_{S_1} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S}_1 = - \int_{S_1} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}_1 \quad (21)$$

$$\int_{S_1} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S}_1 = \int_{S_1} \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}_1 \quad (22)$$

Observando que los dominios de integración coinciden a ambos lados, tenemos

$$\int_{S_1} \left[\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right] \cdot d\vec{S}_1 = 0 \quad (23)$$

$$\int_{S_1} \left[\vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \right] \cdot d\vec{S}_1 = 0 \quad (24)$$

Aquí hay que observar cuidadosamente las expresiones. En general, que una integral valga cero, no implica que el integrando sea nulo. Pero en estos casos si lo es, porque debe cumplirse que la integral sea nula “para todos” los integrandos posibles, es decir, para todas las superficies S_1 que puedan definirse. Entonces tenemos

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (25)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0 \quad (26)$$

que constituyen las formas diferenciales buscadas.

b) Leyes de flujo: este es el caso de las leyes de Gauss eléctrica (11) y magnética (12). Sobre ellas podemos operar directamente con el teorema de Gauss para convertir las integrales de superficie de los primeros miembros en integrales de volumen. Esto es

$$\int_{V_2} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dV_2 = \int_{V_2} \frac{\rho}{\epsilon_0} dV_2 \quad (27)$$

$$\int_{V_2} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) dV_2 = 0 \quad (28)$$

Las integrales de (27) tienen el mismo dominio de integración, por lo que pueden escribirse como sigue

$$\int_{V_2} \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right] dV_2 = 0 \quad (29)$$

Como las integrales de (29) y (28) deben anularse para todos los posibles dominios V_2 , sus integrandos deben ser nulos. Esto es

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \quad (30)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (31)$$

Estas últimas expresiones son las formas diferenciales buscadas.

Una síntesis organizada de las ecuaciones de Maxwell en sus formas diferenciales es la siguiente

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (32)$$

Las correspondientes versiones para el caso libre de cargas y corrientes son

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
\vec{\nabla} \times \vec{B} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0
\end{aligned} \tag{33}$$

donde se pone de manifiesto en forma aún más elocuente, la simetría entre los campos dentro de las ecuaciones.

7 Ondas electromagnéticas.

Para afrontar la deducción de la ecuación diferencial que describe las ondas electromagnéticas en el vacío, comenzamos por recordar una identidad vectorial

$$\vec{\nabla}^2 \vec{\eta} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\eta}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\eta}) \tag{34}$$

donde η representa un campo vectorial regular y $\vec{\nabla}^2$ es el operador laplaciano. Aplicando esta identidad a los campos eléctrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$ y de inducción magnética $\vec{B}(\vec{r}, t)$ en el vacío libre de cargas y corrientes, tenemos

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}^2 \vec{E} &= \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \\
\vec{\nabla}^2 \vec{B} &= \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = -\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B})
\end{aligned} \tag{35}$$

donde utilizamos que en las condiciones mencionadas, las divergencias son nulas. Ahora reemplazamos los rotores y luego permutamos los operadores espaciales y temporales. Así tenemos

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}^2 \vec{E} &= -\vec{\nabla} \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \\
\vec{\nabla}^2 \vec{B} &= -\vec{\nabla} \times \left(\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{E})
\end{aligned} \tag{36}$$

Finalmente, volvemos a reemplazar los rotores, y operando obtenemos

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}^2 \vec{E} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\
\vec{\nabla}^2 \vec{B} &= -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{37}$$

Las ecuaciones diferenciales (37) son ecuaciones de onda en formato tridimensional. Pero aún falta analizar el factor que acompaña las derivadas temporales, que dicho sea de paso, es el mismo en ambos casos. En primer lugar, observemos que las constantes involucradas son ϵ_0 y μ_0 . La primera proviene de la base misma de la electrostática, mientras que la segunda surgió con los primeros fenómenos magnéticos. Nada parece indicar a priori, que entre ellas debiera haber alguna relación. Sin embargo, esconden una relación sorprendente. Desarrollemos

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} &= \sqrt{\frac{4\pi k}{\mu_0}} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2 \text{C}^{-2}}{4\pi \times 10^{-7} \text{ TmA}^{-1}}} = \\ &= \sqrt{\frac{9 \times 10^{16} \text{ Nm}^2 \text{C}^{-2}}{NC^{-1}m^{-1}s \text{ mC}^{-1}s}} = \sqrt{9 \times 10^{16} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = 3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned} \quad (38)$$

Este resultado constituye nada menos que la rapidez de la luz en el vacío, a la que en lo sucesivo denotaremos por c .

$$c = 3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (39)$$

Con este resultado, las ecuaciones diferenciales de onda toman la forma siguiente

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}^2 \vec{E} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ \vec{\nabla}^2 \vec{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (40)$$

8 Soluciones armónicas planas.

Las ecuaciones diferenciales de onda admiten soluciones tridimensionales múltiples, entre las que resulta especialmente simple la solución plana armónica dada por

$$\begin{aligned} \vec{E}(z, t) &= \vec{E}_0 \sin(kz - \omega t + \phi) \\ \vec{B}(z, t) &= \vec{B}_0 \sin(kz - \omega t + \phi) \end{aligned} \quad (41)$$

donde \vec{E}_0 y \vec{B}_0 son las amplitudes de los campos eléctrico y de inducción magnética respectivamente, k es el número de onda, ω es la frecuencia angular y ϕ la fase inicial. Nótese que el eje z positivo se ha elegido (sin pérdida de generalidad) en la dirección y sentido de propagación de la onda. Apliquemos las ecuaciones de

Maxwell para establecer condiciones sobre las amplitudes. Veamos qué ocurre con las divergencias nulas. Como los campos dependen sólo de la coordenada z , tenemos que

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0\end{aligned}\tag{42}$$

Con esto, podemos asegurar que las componentes E_z y B_z no pueden depender de la coordenada z . Entonces la única posibilidad compatible con (41) es

$$E_z = 0 \quad B_z = 0\tag{43}$$

De este resultado concluimos que las ondas electromagnéticas planas son transversales. Supongamos entonces que el campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$ está linealmente polarizado en la dirección del eje x . Entonces puede escribirse como sigue

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \sin(kz - \omega t + \phi) \check{i}\tag{44}$$

Buscaremos ahora, qué restricción imponen las ecuaciones de Maxwell sobre la amplitud del campo de inducción magnética $\vec{B}(\vec{r}, t)$. Para ello utilizamos la ley de Faraday

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\tag{45}$$

Desarrollemos el rotor

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial E_x}{\partial z} \check{j}\tag{46}$$

Reemplazando en (45) y recordando que el campo \vec{B} no tiene componente B_z , tenemos

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} \check{j} = -\frac{\partial}{\partial t} (B_x \check{i} + B_y \check{j})\tag{47}$$

de donde concluimos que

$$B_x = 0\tag{48}$$

y que

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}\tag{49}$$

Las formas explícitas de las componentes no nulas son

$$\begin{aligned} E_x(z, t) &= E_0 \sin(kz - \omega t + \phi) \\ B_y(z, t) &= B_0 \sin(kz - \omega t + \phi) \end{aligned} \quad (50)$$

Resolviendo las derivadas de (49) tenemos

$$kE_0 \cos(kz - \omega t + \phi) = \omega B_0 \cos(kz - \omega t + \phi) \quad (51)$$

de donde concluimos que

$$kE_0 = \omega B_0 \quad (52)$$

Recordando que

$$\frac{\omega}{k} = \frac{2\pi\omega}{2\pi k} = f\lambda = c \quad (53)$$

encontramos una relación sumamente simple entre las amplitudes de campos.

$$E_0 = c B_0 \quad (54)$$

Nótese que esta relación puede extenderse al valor instantáneo de los campos

$$E_x(z, t) = c B_y(z, t) \quad (55)$$

9 Aspectos energéticos.

Para afrontar el análisis energético de los fenómenos electromagnéticos en el vacío, cuando en la región no hay ni cargas ni corrientes, deben considerarse las densidades volumétricas de energía residente en los campos. Dichas densidades en una posición y a un tiempo serán

$$u_e(\vec{r}, t) = \frac{\epsilon_0}{2} E^2(\vec{r}, t) \quad u_m(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\mu_0} B^2(\vec{r}, t) \quad (56)$$

Siguiendo la misma línea, definimos la densidad de energía electromagnética en un punto y a un tiempo como

$$u_{em}(\vec{r}, t) = u_e(\vec{r}, t) + u_m(\vec{r}, t) \quad (57)$$

Hasta aquí, las definiciones son generales. Ahora trataremos el caso especial en que los campos se relacionan como los de una onda plana, según la relación (55). En estas condiciones, la densidad de energía magnética puede tratarse como sigue

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{E^2}{2\mu_0 c^2} = \frac{\epsilon_0 \mu_0 E^2}{2\mu_0} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \quad (58)$$

con lo que la densidad de energía electromagnética toma la forma simple siguiente

$$u_{em}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 E^2(\vec{r}, t) \quad (59)$$

Ahora escribimos la densidad de energía electromagnética para el caso particular de una onda del tipo (41). Esto es

$$u_{em}(z, t) = \epsilon_0 E_0^2 \sin^2(kz - \omega t + \phi) \quad (60)$$

El valor medio temporal de la densidad de energía en un punto, lo denotaremos por $\langle u_{em} \rangle$. El mismo viene dado por

$$\langle u_{em} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u_{em} dt = \epsilon_0 E_0^2 \left[\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(kz - \omega t + \phi) dt \right] \quad (61)$$

para resolver la integral proponemos un cambio de variable dado por

$$v = kz - \omega t + \phi \quad dv = -\omega dt \quad (62)$$

Además observemos que

$$\omega T = 2\pi f \frac{1}{f} = 2\pi \quad (63)$$

entonces

$$\langle u_{em} \rangle = \epsilon_0 E_0^2 \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(v) dv \right] \quad (64)$$

Ésta es una integral tabulada muy frecuente, cuyo resultado es 1/2. Entonces concluimos que

$$\langle u_{em} \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \quad (65)$$

Observe que este resultado no depende de la posición. Esto no será así en general, sino que es una consecuencia de que la onda es plana e infinitamente extendida. Sin embargo, la forma de la expresión será válida, asumiendo que la dependencia espacial la tiene la amplitud E_0 .

10 Vector de Poynting

El vector de Poynting constituye un campo vectorial asociado al campo electromagnético que se define como

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) \quad (66)$$

Nosotros abordaremos su significado en relación con las ondas electromagnéticas planas. En este caso toma la forma

$$\vec{S}(z, t) = \frac{E_0 B_0}{\mu_0} \sin^2(kz - \omega t + \phi) \check{k} \quad (67)$$

Nótese que el producto vectorial hace que el vector de Poynting adquiera la dirección y sentido de la propagación de la onda. Trabajemos ahora sobre el factor constante que acompaña al seno cuadrado. Utilizando (39) y (54) tenemos

$$\frac{E_0 B_0}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} = \frac{c E_0^2}{\mu_0 c^2} = \frac{\epsilon_0 \mu_0 c E_0^2}{\mu_0} = \epsilon_0 c E_0^2 \quad (68)$$

con lo que el vector de Poynting toma la forma

$$\vec{S}(z, t) = \epsilon_0 c E_0^2 \sin^2(kz - \omega t + \phi) \check{k} \quad (69)$$

Ahora analizamos el valor medio temporal del vector de Poynting. Para ello aplicamos la definición habitual

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{S} dt = \epsilon_0 c E_0^2 \left[\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(kz - \omega t + \phi) dt \right] \check{k} \quad (70)$$

La integral del corchete es idéntica a la resuelta en (61), y su resultado vale 1/2. Entonces

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 \check{k} \quad (71)$$

Aquí nuevamente obtenemos un resultado independiente de la posición que no puede ser tratado como general, sino que sólo será válido para el caso de ondas planas. Ahora indagemos un poco sobre su significado. Para ello imaginemos que la onda viene propagándose, de modo que ya ha avanzado sobre el semiespacio $z < 0$. Entonces el primer frente de onda se encuentra en el plano $z = 0$. Para fijar ideas, tomemos un círculo de área A contenido en el primer frente de onda y centrado en el eje z . Cuando la onda avanza durante un tiempo Δt , el círculo viaja con el frente de onda una distancia $c \Delta t$. Todos los puntos por los que pasó el círculo, forman un cilindro de área A y longitud $c \Delta t$, dentro del cual ahora oscilan los campos \vec{E} y \vec{B} ,

dando lugar a una densidad volumétrica de energía cuyo valor medio temporal en cada punto viene dado por (65). Si Δt es bastante grande comparado con el período T de oscilación de los campos, la energía residente en el volumen cilíndrico es

$$U_{em} = \langle u_{em} \rangle Ac \Delta t = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 Ac \Delta t \quad (72)$$

Pero la energía residente en el volumen cilíndrico coincide con la que atravesó el círculo original en el tiempo Δt . Por tanto, si quisieramos saber la energía que atravesó el círculo por unidad de área y unidad de tiempo, hacemos

$$\frac{U_{em}}{A \Delta t} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 \quad (73)$$

Comparando este resultado con (71) podemos construir una interpretación física del valor medio temporal del vector de Poynting. El módulo de dicho vector representa la densidad media de flujo de energía transportada por la onda, por unidad de área y unidad de tiempo.