1 Reeksen van getallen (oneindige sommen)

Definities

reeks van reëele getallen $(\{u_n\}_{n\geq l}, \{s_n\}_{n\geq l})$	
termenrij $\{u_n\}_{n\geq l}$	rij van partieelsommen $\{s_n\}_{n\geq l}$
korte notatie $s_n = \sum_{k=l}^{n} u_k$	

Convergentie van een reeks: convergentie van haar rij van partieelsommen.	
absoluut convergent $\sum_{n=1}^{\infty} \lvert u_n \rvert$ is convergent	voorwaardelijk convergent convergentie maar GEEN absolute convergentie

Convergentietesten

algemeen: criterium Cauchy	
convergentie	$\forall \epsilon > 0, \exists N,$ zodat $\forall m \geq n \geq m$ $\lvert u_n + u_{n+1} + \ldots + u_m \rvert < \epsilon$
NODIGE voorwaarde	$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$
divergentie	$\exists \epsilon > 0, \forall N,$ zodat $\exists m \geq n \geq m$ $\lvert u_n + u_{n+1} + \ldots + u_m \rvert \geq \epsilon$

	vergelijkingstest	integraaltest	d'Alembert (I)	d'Alembert (II) verhoudingstest	Cauchy	Raabe
reeksen met enkel positieve termen $\sum u_n$						
CONV	$\sum v_k$ conv $u_n \leq v_n$	$\int_1^{\infty} f(x)dx$ conv	$\limsup_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$	$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$	$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} < 1$	$c > 1$ $c = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$
DIV	$\sum v_k$ div $v_n \leq u_n$	anders	$\liminf_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$	$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$	$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} > 1$	$c < 1$
reeksen met enkel negatieve termen, idem op tegengestelde na						
wisselreeksen, bv. Leibnizreeks						

Enkele memorabele reeksen

reeks van Grandi	$1-1+1-1+\dots$	divergent	rij van partieelsommen $1,0,1\dots$ heeft geen limiet
harmonische reeks	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$	divergentie	voldoet niet aan Cauchy criterium
meetkundige reeks, *reden* q	$\sum_{n=0}^{\infty}q^k$	$\lvert q\rvert<1$: convergentie $\lvert q\rvert>1$: divergentie	$s_n=\frac{1}{1-q}$ niet voldaan aan $\lim_{n\to\infty}u_n=0$
Dirichletreeks	$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-p}$	$p>1$: convergentie $p<1$: divergentie	$p=2$: $s_n=\frac{\pi^2}{6}$ $p=4$: $s_n=\frac{\pi^4}{90}$
(Riemann-zetafunctie)	$\zeta(p)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$	met $p\in\mathbb{C}$	toepassing: getaltheorie
leuke reeks (1)	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p\ln(n)}$	$p\leq 1$: divergentie $p>1$: convergentie	
leuke reeks (2)	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^p(n)}$	$p\leq 1$: divergentie $p>1$: convergentie	
Leibnizreeks	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ $u_1\geq\dots u_1\geq 0$ $\lim_{n\to\infty}u_n=0$	convergent	
harmonische wisselreeks	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$	convergentie	$s_n=\ln(2)$

Enkele memorabele andere identiteiten, gerelateerd aan de oefeningen

Euler getal	$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$	
	$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}$	bv. neem ln van beide leden
indien $\lim_{x\to\bar{x}}f(x)=a$ en $\lim_{x\to\bar{x}}g(x)=b$	$\lim_{x\to\bar{x}}f(x)g(x)=ab$	$\lim_{x\to\bar{x}}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a}{b}$
kan handig zijn	$\lim_{n\to\infty}n^{1/n}=1$	bv. neem exp en ln

END

Bij het opstellen van dit overzicht werd gebruik gemaakt van [1].

References

[1] Stefan Vandewalle and L Beernaert. *Analyse II: Handboek*. SVB Janssen, Leuven, 2018.