

# 1 Machtreksen

reeks van getallen	reeks van functies	machtreeks
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n$	$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$

convergentie-interval $(x_0 - R, x_0 + R)$ met convergentiestraal $R$
$R = \sup \left\{  x - x_0  \left  \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \text{convergent} \right. \right\}$ $R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{ a_n }}$ $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left  \frac{a_n}{a_{n+1}} \right $

Taylor veelterm	$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$
$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(x_0)}{k!} (x - x_0)$	$R_n(x) = \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$ $R_n(x) = f^{(n+1)}(\xi) \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$
indien functie analytisch in open interval $I$ rond $x_0$	$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$
Maclaurinreeks Taylorreeks rond $x_0 = 0$	zie formularium a.u.b.

## 1.1 Oplossen van differentiaalvergelijkingen a.h.v. reeksontwikkeling

$a_0(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x) = 0$ $y(x_0) = 0$ $y'(x_0) = y_1$	
zijn $\frac{a_1(x)}{a_0(x)}$ en $\frac{a_2(x)}{a_0(x)}$ analytisch in $x_0$ ?	
JA: $x_0$ is <b>regulier punt</b>	NEEN : $x_0$ is <b>singulier punt</b>
	zijn $\boxed{q(x) = (x - x_0) \frac{a_1(x)}{a_0(x)}}$ en $\boxed{r(x) = (x - x_0)^2 \frac{a_2(x)}{a_0(x)}}$ analytisch in $x_0$ ? JA: $x_0$ is een <b>regulier-singulier punt</b>
	normaalvorm Frobenius $\boxed{(x - x_0)^2 y''(x) + (x - x_0)q(x)y'(x) + r(x)y(x) = 0}$ ... los indexvergelijking op: $\boxed{I(\nu) = \nu(\nu - 1) + q(x_0)\nu + r(x_0) = 0}$
$\boxed{y(k) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k(x - x_0)^k}$	$y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2$ $\stackrel{1}{=} c_1  x - x_0 ^{\nu_1} \sum_{k=0}^{\infty} C_k(x - x_0)^k + c_2  x - x_0 ^{\nu_2} \sum_{k=0}^{\infty} B_k(x - x_0)^k$ $\stackrel{2}{=} (c_1 + c_2 A \ln  x - x_0 )  x - x_0 ^{\nu_1} \sum_{k=0}^{\infty} C_k(x - x_0)^k + c_2  x - x_0 ^{\nu_2} \sum_{k=0}^{\infty} B_k(x - x_0)^k$ $\stackrel{3}{=} (c_1 + c_2 \ln  x - x_0 )  x - x_0 ^{\nu_1} \sum_{k=0}^{\infty} C_k(x - x_0)^k + c_2  x - x_0 ^{\nu_2} \sum_{k=0}^{\infty} B_k(x - x_0)^k$ <p> <b>geval 1:</b> <math> \nu_2 - \nu_1  \notin \mathbb{N}</math> en <math>C_0 \neq 0</math> en <math>B_0 \neq 0</math>  <b>geval 2:</b> <math> \nu_2 - \nu_1  \in \mathbb{N}</math> en <math>C_0 \neq 0</math> en <math>B_0 \neq 0</math>  <b>geval 3:</b> <math>\nu_1 = \nu_2</math> en <math>C_0 \neq 0</math> </p> <p>vind ook recursiebetrekking voor <math>C_k</math></p> <p>vind ook recursiebetrekking voor <math>C_k</math></p>
speciaal geval: Bessel differentiaalvergelijking $\boxed{x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - p^2)y(x) = 0}$	

Bij het opstellen van dit overzicht werd gebruik gemaakt van [1].

## References

- [1] Stefan Vandewalle and L Beernaert. *Analyse II: Handboek*. SVB Janssen, Leuven, 2018.