

1 Reeksen van getallen (oneindige sommen)

Definities

reeks van reële getallen ($\{u_n\}_{n \geq l}, \{s_n\}_{n \geq l}$)	
termenrij	rij van partieelsommen
$\{u_n\}_{n \geq l}$	$\{s_n\}_{n \geq l}$
korte notatie $s_n = \sum_{k=l}^n u_k$	

Convergentie van een reeks: convergentie van haar rij van partieelsommen.	
absoluut convergent	voorwaardelijk convergent
$\sum_{n=1}^{\infty} u_n $ is convergent	convergentie maar GEEN absolute convergentie

Convergentietesten

algemeen: criterium Cauchy	
convergentie	$\forall \epsilon > 0, \exists N, \text{ zodat } \forall m \geq n \geq N$ $ u_n + u_{n+1} + \dots + u_m < \epsilon$
NODIGE voorwaarde	$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$
divergentie	$\exists \epsilon > 0, \forall N, \text{ zodat } \exists m \geq n \geq N$ $ u_n + u_{n+1} + \dots + u_m \geq \epsilon$

reeksen met enkel positieve termen $\sum u_n$						
	vergelijkingstest	integraaltest	d'Alembert (I)	d'Alembert (II) verhoudingstest	Cauchy	Raabe
CONV	$\sum v_k$ conv $u_n \leq v_n$	$\int_1^{\infty} f(x)dx$ conv	$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$	$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} < 1$	$c > 1$ $c = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$
DIV	$\sum v_k$ div $v_n \leq u_n$	anders	$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$	$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} > 1$	$c < 1$
reeksen met enkel negatieve termen, idem op tegengestelde na						
wisselreeksen, bv. Leibnizreeks						

Enkele memorabele reeksen

reeks van Grandi	$1 - 1 + 1 - 1 + \dots$	divergent	rij van partielsommen $1, 0, 1, \dots$ heeft geen limiet
harmonische reeks	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$	divergentie	voldoet niet aan Cauchy criterium
meetkundige reeks, reden q	$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$	$ q < 1$: convergentie $ q \geq 1$: divergentie	$s_n = \frac{1}{1-q}$ niet voldaan aan $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$
Dirichletreeks	$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$	$p > 1$: convergentie	$p = 2$: $s_n = \frac{\pi^2}{6}$
		$p \geq 1$: divergentie	$p = 4$: $s_n = \frac{\pi^4}{90}$
(Riemann-zetafunctie)	$\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$	met $p \in \mathbb{C}$	toepassing: getaltheorie
leuke reeks (1)	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \ln(n)}$	$p \leq 1$: divergentie $p > 1$: convergentie	
leuke reeks (2)	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p(n)}$	$p \leq 1$: divergentie $p > 1$: convergentie	
Leibnizreeks	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ $u_1 \geq \dots u_n \geq 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$	convergent	
harmonische wisselreeks	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$	convergent	$s_n = \ln(2)$

Enkele memorabele andere identiteiten, gerelateerd aan de oefeningen

Euler getal	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$	
	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$	bv. neem ln van beide leden
indien $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = a$ en $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} g(x) = b$	$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x)g(x) = ab$	$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$
kan handig zijn	$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1$	bv. neem exp en ln
Taylorreeks voor $\arctan(x)$	$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$	

END

Bij het opstellen van dit overzicht werd gebruik gemaakt van [1]. Dank aan de heer N. Scheerlinck voor het ontdekken van fouten/typo's!

References

- [1] Stefan Vandewalle and L Beernaert. *Analyse II: Handboek*. SVB Janssen, Leuven, 2018.