1 Machtreeksen

reeks van getallen	reeks van functies	machtreeks
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n$	$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$

convergentie-interval $(x_0 - R, x_0 + R)$ met convergentiestraal R
$R = \sup \left\{ \lvert x - x_0 \rvert \,\middle\vert\, \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \text{convergent} \right\}$
$\boxed{R = \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n \rvert}}}$
$\boxed{R = \lim_{n\to\infty} \left\lvert \dfrac{a_n}{a_{n+1}} \right\rvert}$

Taylor veelterm	$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$
$P_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)$	$R_n(x) = \int_{x_0}^{x} \dfrac{(x-t)^n}{n!} f^{n+1}(t)dt$ $R_n(x) = f^{(n+1)}(\xi)\dfrac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$
indien functie analytisch in open interval I rond x_0	$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$
Maclaurinreeks Taylorreeks rond $x_0 = 0$	zie formularium a.u.b.

1.1 Oplossen van differentiaalvergelijkingen a.h.v. reeksontwikkeling

<table>
<tr><td colspan="2">$$\begin{aligned} a_0(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x) &= 0 \\ y(x_0) &= 0 \\ y'(x_0) &= y_1 \end{aligned}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">zijn $\dfrac{a_1(x)}{a_0(x)}$ en $\dfrac{a_2(x)}{a_0(x)}$ analytisch in x_0?</td></tr>
<tr><td>JA: x_0 is regulier punt</td><td>NEEN : x_0 is singulier punt</td></tr>
<tr><td></td><td>zijn $\boxed{q(x) = (x-x_0)\dfrac{a_1(x)}{a_0(x)}}$ en $\boxed{r(x) = (x-x_0)^2\dfrac{a_2(x)}{a_0(x)}}$ analytisch in x_0 ?
JA: x_0 is een regulier-singulier punt</td></tr>
<tr><td></td><td>normaalvorm Frobenius $\boxed{(x-x_0)^2y''(x) + (x-x_0)q(x)y'(x) + r(x)y(x) = 0}$
... los indexvergelijking op: $\boxed{I(\nu) = \nu(\nu-1) + q(x_0)\nu + r(x_0) = 0}$</td></tr>
<tr><td>$\boxed{y(k) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k(x-x_0)^k}$
vind ook recursiebetrekking voor C_k</td><td>$$\boxed{\begin{aligned} y(x) &= c_1y_1 + c_2y_2 \\ &\overset{1}{=} |x-x_0|^{\nu_1}\sum_{k=0}^{\infty} C_k(x-x_0)^k + |x-x_0|^{\nu_2}\sum_{k=0}^{\infty} B_k(x-x_0)^k \\ &\overset{2}{=} (1 + A\ln|x-x_0|)\,|x-x_0|^{\nu_1}\sum_{k=0}^{\infty} C_k(x-x_0)^k + |x-x_0|^{\nu_2}\sum_{k=0}^{\infty} B_k(x-x_0)^k \\ &\overset{3}{=} (1 + \ln|x-x_0|)\,|x-x_0|^{\nu_1}\sum_{k=0}^{\infty} C_k(x-x_0)^k + |x-x_0|^{\nu_2}\sum_{k=0}^{\infty} B_k(x-x_0)^k \end{aligned}}$$
<code>geval 1</code>: $|\nu_2 - \nu_1| \notin \mathbb{N}$, <code>geval 2</code>: $|\nu_2 - \nu_1| \in \mathbb{N}$, <code>geval 3</code>: $\nu_1 = \nu_2$
vind ook recursiebetrekking voor C_k</td></tr>
<tr><td colspan="2">speciaal geval: Bessel differentiaalvergelijking $\boxed{x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - p^2)y(x) = 0}$</td></tr>
</table>

Bij het opstellen van dit overzicht werd gebruik gemaakt van [1].

References

[1] Stefan Vandewalle and L Beernaert. *Analyse II: Handboek*. SVB Janssen, Leuven, 2018.