1 Extremaalproblemen zonder beperkingen

Bepaal de extremalen van $f(x, y)$. In woorden uitgelegd: kijk naar de determinant van de Hessiaan van f, noem deze Δ.

$\Delta > 0$	lokaal extremum
$\Delta = 0$	GEEN BESLUIT
$\Delta < 0$	zadelpunt

2 Extremaalproblemen met gelijkheidsbeperkingen

Bepaal de extremalen van $f(x, y)$ onderworpen aan de beperking $g(x, y) = 0$.

2.1 Eliminatiemethode

In woorden: herschrijf $g(x, y) = 0$ en vul dit in in de uitdrukking voor $f(x, y)$.

2.2 Lagrangevermenigvuldigers

- STELLING: niveaulijnen van $f(x, y)$ en niveaulijnen van $g(x, y)$ hebben een gemeenschappelijke raaklijn, wiskundig uitgedruk is dit $\boxed{\vec{\nabla} f(a, b) = \lambda \vec{\nabla} g(a, b)}$.
- Zoek de extrema van een nieuw probleem $\boxed{W(x, y, ..., \lambda) = f(x, y, ..) - \sum_i \lambda_i g_i(x, y, ...)}$

3 Extramaalproblemen met ongelijkheidsbeperkingen

Bepaal de extremalen van $f(x, y)$ onderworpen aan de beperking $g(x, y) \leq 0$.

- Voeg eerst nog een extra variabele toe en pas daarna de methode van de Lagrangevermenigvuldigers toe. In het geval van één ongelijkheidsbeperking krijgen we $\boxed{W(x, y, z, \lambda) = f(x, y) - \sum_i \lambda_i[g(x, y) + z_i^2]}$, waar geldt dat $z_k = 0$ voor de gelijkheidsbeperkingen $g_k = 0$.
  - De ongelijkheisbeperking is een gelijkheidsbeperking indien $\lambda \neq 0$
  - Anders geldt $\lambda = 0$

4 Variatierekening

Dit gedeelte komt niet terug in de oefenzitting, maar is wel interessant.

Bepaal $y(x)$ zodat $I = \int_a^b F(x, y(x), y'(x), ...)dx$ maximaal is	
Dirichlet	$y(a) = \alpha$ $y(b) = \beta$
natuurlijk	$y(a) = \alpha$ eindpunt op lijn $x = b$
transversaliteitsvoorwaarden	$y(a) = \alpha$ eindpunt op kromme $\psi(t)$
nevenvoorwaarden	$L = \int_a^b \psi(x, y, y')dx$
Euler-Lagrange differentiaalvergelijking	y is oplossing van $\boxed{F_y - F_{y',x} - F_{y',y}y' - F_{y',y'}y''}$

Toepassingen	
korste weg	
brachistochroon met randvoorwaarden ...	minimaliseer $T = \int_0^a \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}dx$
Dirichlet	$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(a) = b \end{cases}$
natuuurlijk	$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(a) = 0 \end{cases}$
transversaliteitsvoorwaarden	$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(a) = -\dfrac{1}{m} \end{cases}$
kettinglijn	

5 Enkele nuttige MUPAD commando's

- `gradf:=gradient(f,[x,y])`
- `kritisch:=solve(gradf,[x,y])`

Bij het opstellen van dit overzicht werd gebruik gemaakt van [1].

References

[1] Stefan Vandewalle and L Beernaert. *Analyse II: Handboek*. SVB Janssen, Leuven, 2018.