1 Differentiaalvergelijkingen

Belangrijk: maak een onderscheid tussen lineaire en niet-lineaire differentiaalvergelijking. De oplossingsmethode verschilt en het is dus belangrijk van in het begin te kijken met welk geval we te maken hebben.

1.1 Lineaire differentiaalvergelijking

Voor de algemene oplossing van $Ly = f$ geldt altijd: $y_{algemeen} = y(x) = y_p + \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$ waarin y_i met $i = 1..n$ een fundamenteel stel vormt.

willekeurige coefficienten, eerste orde $y' = a(x)y + b(x)$	
(scheiding der veranderlijken)	
$y_H = Cy_1(t) = C\exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t)dt\right)$	$y_P = C(x)\exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{y_1(t)}dt\right)$

constante coefficienten, willekeurig orde $p(D)y = f$		
homogeen	partikulier	
$\rightarrow$ bepaal fundamenteel stel (zie Tabel 1.1 op pagina 19)	f zelf oplossing van een of andere $p(D)y = 0$ $\rightarrow$ 'methode onbepaalde coefficienten' $f(x) = P_m(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x) + Q_m(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ $y_P = x^l\left[(...)e^{\alpha x}\cos(\beta x) + (...)e^{\alpha x}\sin(\beta x)\right]$	anders $\rightarrow$ 'variatie van de constante' functie van Green $K(x,t)$ $y_P = \int_{x_0}^{x} K(x,t)\frac{f(t)}{a_0(t)}dt$

Euler differentiaalvergelijking
(veranderlijke coefficienten, willekeurige orde, speciaal geval)

1.2 Niet-Lineaire differentiaalvergelijkingen

Het beginwaardeprobleem $y' = f(x,y)$ met $y(x_0) = y_0$ heeft een unieke oplossing.

Bernouilli differentiaalvergelijking $y' = a(x)y + b(x)y^{\alpha}$
pas transformatie $y = z^{\beta}$ toe met $\beta = \frac{1}{1-\alpha}$
los de nieuwe (lineaire) differentiaalvergelijkin op

differentiaalvergelijking $Mdx + Ndy = 0$		
(I) 'scheiding van de veranderlijken'	(II) 'exacte differentiaalvergerlijking'	(III) 'integrerende factor'
(speciaal geval) integreer $Mdx + Ndy = 0$ en werk verder uit	indien $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ geldt $G(x,y) = C$ (G is impliciete voortelling oplossing) $\rightarrow G = \int Mdx + F(y)$ en $\frac{\partial G}{\partial y} = N$ $\rightarrow G = \int Ndy + F(x)$ en $\frac{\partial G}{\partial yx} = M$	indien $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ kies factor $P(x)$ ga naar (II)

oplossing via parametrisatie

mogelijke toepassingen		
stroomlijnen	orthogonale krommen	steilste-hellingspad

2 Stelsels Lineaire Differentiaalvergelijkingen

1. Breng een stelsel differentiaalvergelijking naar de standaardvorm:

$$Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t) \tag{1}$$

2. los het stelsel (1) op.

<table>
<tr><th></th><th>algemeen geval</th><th>constante matrix $A = PJP^{-1}$</th></tr>
<tr><td>homogeen stelsel</td><td>bepaal fundamenteel stel oplossingen $Y_i(t)$</td><td>$Y_i(t) = P_i e^{\lambda_i t}$</td></tr>
<tr><td>$Y'(t) = A(t)Y(t)$</td><td colspan="2">matrixoplossing $Z(t) = \left[Y_1(t) \dots Y_n(t)\right]$
$\det[Z(t)] \neq 0$: stel linear onafhankelijk
$Y_h(t) = Z(t)C$</td></tr>
<tr><td>particuliere oplossing
$Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)$</td><td>"variatie van de constanten"
$Y_p(t) = Z(t)C(t)$
$Y(t) = Z(t)\left[Z(0)^{-1}Y_0 + \int_{t_0}^{t} Z^{-1}(\xi)B(\xi)d\xi\right]$
nadeel: bereken inverse van matrix van functies</td><td>"exponentiële van een matrix"
$e^{At} = Z(t)Z(0)^{-1}$
$Y(t) = e^{At}\left[Y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A\xi}B(\xi)d\xi\right]$
niet nodig om inverse berekenen</td></tr>
</table>

Bij het opstellen van dit overzicht werd gebruik gemaakt van [1].

References

[1] Stefan Vandewalle and L Beernaert. *Analyse II: Handboek*. SVB Janssen, Leuven, 2018.