Fuentes Imágenes

Este resumen tiene la idea de detallar como se obtiene la posición de una fuente imagen (FI) en un sistema de coordenadas de tres dimensiones $[x, y, z]$, a partir de una fuente (F) y una superficie (S). Además, indicar que pruebas son necesarias para determinar si la FI calculada es visible en la posición del receptor (R).

1. Creación de una Superficie

La S de la Figura 1.1 se crea mediante cuatro puntos distribuidos en el espacio (P_0, P_1, P_2, P_3). Con estos puntos es posible calcular el vector normal unitario ($\hat{n}$) de S, por medio las Ecuaciones 1.1 y 1.2.

$$\begin{aligned} v_1 &= P_1 - P_0 \\ v_2 &= P_2 - P_0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} n &= v_1 \times v_2 \\ \hat{n} &= \frac{n}{|n|} \end{aligned} \tag{1.2}$$

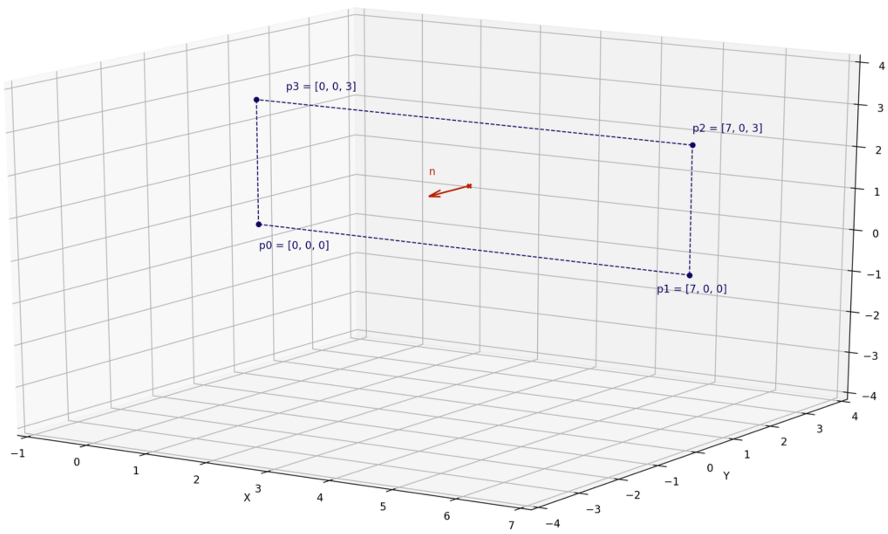


Figura 1.1. S y $\hat{n}$ creados mediante cuatro puntos.

2. Algoritmo Para Determinar la Posición de la FI

Datos necesarios para realizar los cálculos:

- Vector normal unitario de la superficie, $\hat{\boldsymbol{n}}$.
- Distancia del plano de la superficie al origen de coordenadas, **p**.
- Posición de la fuente, **F**, y su distancia al plano de la superficie, $\boldsymbol{d}$.

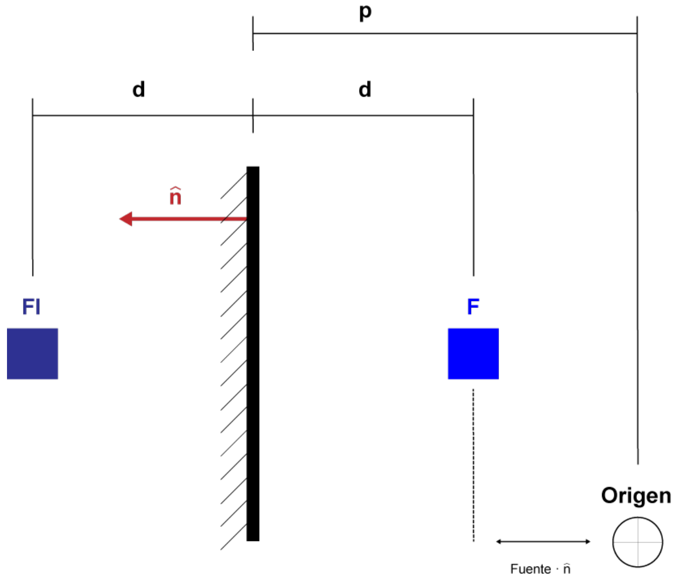


Figura 2.1. Diagrama en 2D del sistema a analizar.

2.1. Distancia del Plano al Origen → p

Ya existe una solución al caso de la Fig. 2.2, la Ecuación 2.1. Donde el vector normal unitario es, $\hat{n} = [A,\ B,\ C]$ y el punto es, $\mathrm{P} = \left[x_{\mathrm{p}}, y_{\mathrm{p}}, z_{\mathrm{p}}\right]$.

$$\mathrm{p} = \frac{\left|Ax_{\mathrm{p}} + By_{\mathrm{p}} + Cz_{\mathrm{p}} + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{2.1}$$

La Ecuación 2.1 puede ser simplificada. Como, $\mathrm{P}_{origen} = [0, 0, 0]$, y, como se trabaja con el vector normal unitario, $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = 1$. Por ende:

$$\mathrm{p} = |D| \tag{2.2}$$

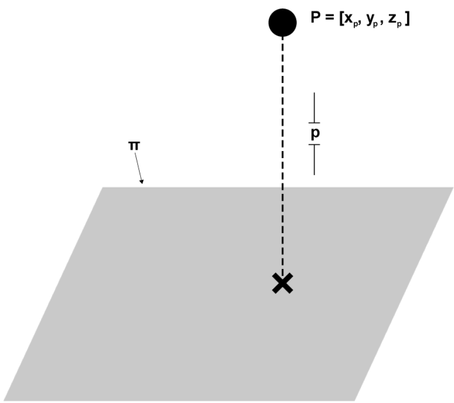


Figura 2.2. Distancia de un plano y un punto P.

Es decir, que solo se necesita saber el valor D, de la ecuación del plano (2.3). El resto se descarta. Notar que el punto $[x_0, y_0, z_0]$ puede ser cualquier punto del plano. En este caso va ser uno de los vértices con los que se creó la superficie. El resultado de este proceso es la Ecuación 2.4.

$$\pi \equiv \mathrm{A}(x - x_0) + \mathrm{B}(y - y_0) + \mathrm{C}(z - z_0) = 0 \tag{2.3}$$

$$D = Ax_0 + By_0 + Cz_0 \tag{2.4}$$

2.2. Distancia del Plano a la Fuente → d

El valor de d se halla con la Ecuación 2.5, en la cual se le resta a p el producto punto entre F y $\hat{n}$.

$$d = \mathrm{p} - \mathrm{F} \cdot \hat{n} \tag{2.5}$$

Acá hay dos posibilidades para el valor de d. Solamente si es igual o mayor a 0, la FI que se creará será válida.

2.3. Cálculo de la posición de la Fuente Imagen

Ahora que se cuenta con todos los datos necesario, se debe determinar la posición de la FI. La siguiente ecuación es la usada para esto.

$$\mathrm{FI} = \mathrm{F} + (2 * d * \hat{n}) \tag{2.6}$$

En el Ejemplo #1 se realizan estos cálculos. Para ello se introdujo a la Fig. 1.1 una fuente en la posición $[1, 2, 1.5\ ]$.

Ejemplo #1

Tomando como referencia la Figura 1.1 y la Figura 2.3, los datos iniciales son:

- $P_0 = [0,\ 0,\ 0]$
- $P_1 = [7,\ 0,\ 0]$
- $P_2 = [7,\ 0,\ 3]$
- $P_3 = [0,\ 0,\ 3]$
- $F\ = [1,\ 2,\ 1.5]$

1. Continuando, se calcula $\hat{n}$ con las Ecuaciones 1.1 y 1.2:

- $v_1 = P_1 - P_0 = [7-0,\ 0-0,\ 0-0] = [7,\ 0,\ 0]$
- $v_2 = P_2 - P_0 = [7-0,\ 0-0,\ 3-0] = [7,\ 0,\ 3]$
- $n\ = v_1 \times v_2 = [0, -21,\ 0]$
- $\hat{n}\ = \frac{n}{|n|} = \frac{[0,-21,0]}{\sqrt{0^2+(-21)^2+0^2}} = [0, -1,\ 0]$

2. Ahora, se debe hallar p. (Usando P_1)

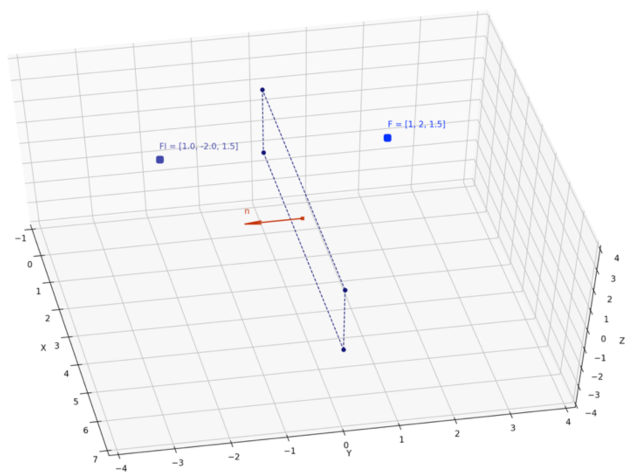
- $p = |D| = |0 * 7, (-1) * 0,\ 0 * 0| = 0$

3. Con este dato se sigue con la Ecuación 2.5.

- $d = p - (F * \hat{n}) = 0 - [1 * 0 + 2 * (-1) + 1.5 * 0] = 0 + 2 = 2$

4. Una vez que se cuenta con todos los datos, solamente queda calcular la posición de la FI.

- $FI = F + (2 * d * \hat{n}) = [1,\ 2,\ 1.5] + [4 * 0,\ 4 * (-1),\ 4 * 0] = [1, -2,\ 1.5]$



3. Pruebas para Determinar la Visibilidad de la FI

Cada fuente imagen que se calcule deberá ser sometida a una sucesión de exámenes para determinar si la FI es visible en la posición del receptor.

3.1. Validez

Prueba de d

Como se explicó en la sección 2.2, si el valor de d es negativo, la posición de la fuente imagen, no será válida. La forma de saber si las coordenadas de la FI son la correcta, es comprobar que la dirección del $\hat{n}$ tenga el sentido donde se ubicará la FI. En la Fig. 3.1. se muestran un ejemplo de como la dirección de $\hat{n}$ influye.

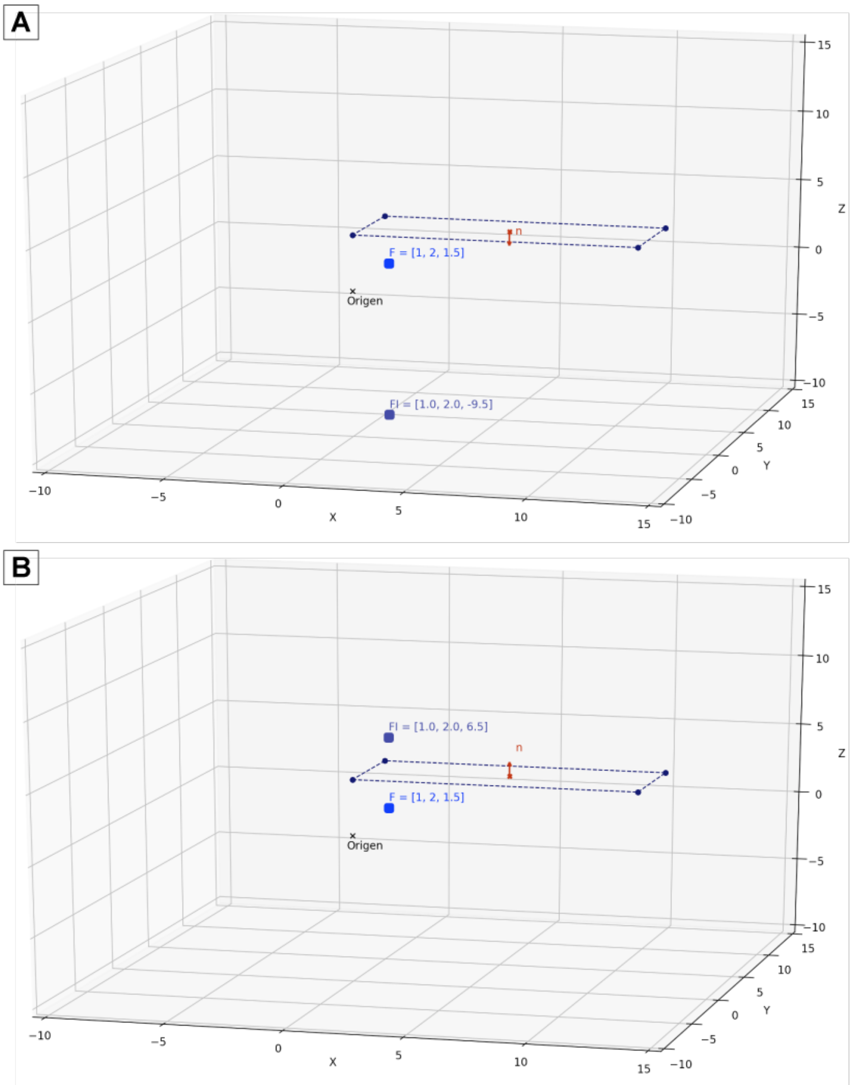


Figura 3.1. Superficie creada con $P_0 = [0,0,4]$, $P_1 = [12,0,4]$, $P_2 = [12,5,4]$ y $P_3 = [0,5,4]$.

3.2. Proximidad

Distancia F-R vs. Distancia FI-R

Aquí se comprueba que la distancia entre la FI y el R no sea menor que separa a la F y al R. La forma de obtener la distancia entre dos puntos es calculando el módulo del vector que se forma entre estos puntos.

3.3. Audibilidad:

Prueba del Punto en el Polígono

Una vez que se tiene la posición de la FI, hay que asegurarse que el recorrido que el "rayo sonoro" hace hasta R cruce por dentro de la superficie con la cual se creo. El método elegido para realizar esta prueba es un llamado *punto en el polígono*. En el cual, primero se determina el punto exacto donde le rayo cruza el plano de la superficie, y luego, se crean vector entre el punto de intersección y cada uno de los vértices. Los productos cruz de los sucesivos pares de estos vectores son vectores ortogonales al plano de dicha superficie. Si cada uno de los vectores ortogonales calculados tienen la misma dirección, entonces el punto de intersección está dentro de la superficie (Fig. 3.2.a). Por el contrario, si algún vector ortogonal tiene dirección contraria, el punto está afuera (Fig. 3.2.b).

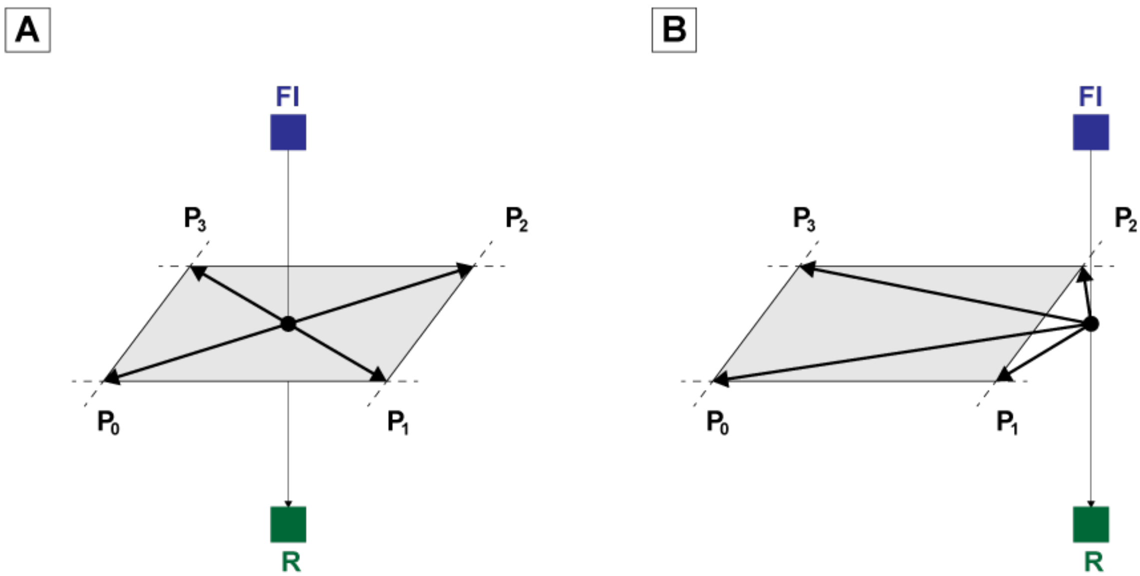


Figura 3.2. A: Punto de intersección dentro de la superficie; B: Punto de intersección fuera de la superficie.

El primer paso para resolver problema es encontrar la ecuación paramétrica de la recta que forman FI y R. Tomando v_A como el vector formado entre estos puntos.

$$L: \begin{cases} x = x_{\mathrm{R}} + x_{v_A} t \\ y = y_{\mathrm{R}} + y_{v_A} t \\ z = z_{\mathrm{R}} + z_{v_A} t \end{cases} \tag{3.1}$$

Resolviendo la Ecuación 3.1 tendríamos el punto exacto en que L cruce el plano de la superficie. Para ello se necesita saber el valor de t.

$$t = \frac{\hat{n} \cdot v_B}{\hat{n} \cdot v_A} \tag{3.2}$$

Donde, $v_B = \overrightarrow{\mathrm{RP}}$, siendo R la posición del receptor y P un punto del plano. Notar que si el producto punto entre $\hat{n}$ y v_1 es igual a 0, t está indeterminado. Significando que ambos vectores son ortogonales y, por ende, el rayo no cruza el plano.

Una vez que se tiene el punto de intersección (I), se crean cuatro vectores normales con usando el I y los sucesivos pares de vértices de la superficie. Si todos los cuatros son iguales, el punto de intersección está dentro de los limites de la superficie. Tener en cuenta que, si uno de los vectores normales tiene como módulo cero, quiere decir que I está situado sobre el borde de la superficie.

$$v_1 = \mathrm{P}_0 - \mathrm{I}$$

$$v_2 = \mathrm{P}_1 - \mathrm{I}$$

$$n_1 = v_1 - v_2$$

$$\widehat{\boldsymbol{n_1}} = \frac{\boldsymbol{n_1}}{|\boldsymbol{n_1}|}$$

$$v_1 = \mathrm{P}_1 - \mathrm{I}$$

$$v_2 = \mathrm{P}_2 - \mathrm{I} \tag{3.3}$$

$$n_2 = v_1 - v_2$$

$$\widehat{\boldsymbol{n_2}} = \frac{\boldsymbol{n_2}}{|\boldsymbol{n_2}|}$$

$$v_1 = \mathrm{P}_2 - \mathrm{I}$$

$$v_2 = \mathrm{P}_3 - \mathrm{I}$$

$$n_3 = v_1 - v_2$$

$$\widehat{\boldsymbol{n_3}} = \frac{\boldsymbol{n_3}}{|\boldsymbol{n_3}|}$$

$$v_1 = \mathrm{P}_0 - \mathrm{I}$$

$$v_2 = \mathrm{P}_1 - \mathrm{I}$$

$$n_4 = v_1 - v_2$$

$$\widehat{\boldsymbol{n_4}} = \frac{\boldsymbol{n_4}}{|\boldsymbol{n_4}|}$$
