

AUTOMÁTICA Y MAQUINAS ELÉCTRICAS

Libro de apuntes

Nicolas Piastrellini

Índice

1. UNIDAD N°1: CONVERSIÓN DE ENERGÍA ELÉCTRICA ↔ MECÁNICA Y CONTROL AUTOMÁTICO 4

1. CONCEPTO Y ESQUEMA GENERAL	4
Motorización	4
Generación	4
PARTES DEL ESQUEMA GENERAL	4
Red eléctrica	4
Sistema mecánico	4
El convertidor electrónico	4
Sistema de control	4
Sistema de medición	4
VARIABLES CONTROLADAS	4
CONTROL AUTOMÁTICO ELECTRÓNICO: LAZO ABIERTO VS LAZO CERRADO	5
Lazo abierto	5
Lazo cerrado	5
2. ACCIONAMIENTO ELÉCTRICO	5
CONCEPTO	5
Acción motor	5
Acción Generador	5
ESQUEMA GENERAL	6
Controlador	6
Parte mecánica	6
SUBSISTEMA MECÁNICO: CARGA	7
MAQUINA ELÉCTRICA	7
Corriente continua	7
Corriente alterna	7
DINÁMICA, EQUILIBRIO Y ESTABILIDAD	8
CONVERTIDOR ELECTRÓNICO DE POTENCIA	9
tipos	9
SUBSISTEMA DE POTENCIA: CUADRANTES	9
Subsistema Eléctrico: Fuente (o Carga)	9
Subsistema de Medición (Sensores)	9
Subsistema de CONTROL	10
REQUERIMIENTOS DEL SISTEMA DE CONTROL	10
TIPOS DE CONTROL	10
(P) Acción Proporcional: proporcional al error o desviación	10
(I) Acción Integral: proporcional a la integral del error o desviación	10
(D) ACCIÓN DERIVATIVA: PROPORCIONAL A LA DERIVADA DEL ERROR O DESVIACIÓN	11
Controlador Proporcional + Integral + Derivativo (PID) + BIAS (general)	11
CONTROL DE POSICIÓN-VELOCIDAD-TORQUE	11

2. UNIDAD N°2: MODELADO Y ANÁLISIS EN ESPACIO DE ESTADO DE SISTEMAS DINÁMICOS ELÉCTRICOS Y MECÁNICOS 12

1. SISTEMAS DINÁMICOS FÍSICOS Y VARIABLES DE ESTADO	12
SISTEMA MECÁNICO 1 G.D.L.: MASA-RESORTE-FRICCIÓN (LINEAL)	12

Resumen Automática y Máquinas Eléctricas	12
Sistema Dinámico Físico	12
Almacenamiento interno: (reversible)	12
Intercambio de energía	12
Dinámica	12
Ecuación de Movimiento en DT	13
Modelo de Estado: Modelo interno DT (Espacio de Estado)	14
2. MODELOS LINEALES INVARIANTES EN EL TIEMPO(LTI)	15
FORMA GENERAL DE UN SISTEMA LINEAL INVARIANTE EN EL TIEMPO (LTI)	15
CONCEPTO DE ESTADO	16
Separación de entradas:	16
REPRESENTACIÓN DE SISTEMAS NO LINEALES	17
Linealización jacobiana	17
3. INTERCONEXIÓN, RESPUESTA DINÁMICA Y ESTABILIDAD	19
INTERCONEXIÓN -> ESTRUCTURAS COMPUESTAS	19
Interconexión en cascada o en serie	19
Interconexión en paralelo	19
Realimentación Constante de Salida	20
Realimentación de Estado	20
SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE ESTADO LTI	20
ESTABILIDAD (SISTEMAS LTI):	22
4. REALIZACIONES CANÓNICAS, CONTROLABILIDAD Y OBSERVABILIDAD	22
CAMBIO DE VARIABLES DE ESTADO	22
Cambio de Base en Espacio de Estado (Transformación Lineal)	23
Invariancia de Matriz de Transferencia y de Autovalores ante Cambio de Base	23
FORMAS O REALIZACIONES CANÓNICAS:	24
Forma canónica controlable	24
Forma canónica diagonal (o Modal)	25
Forma canónica Jordan (generalización)	26
FORMA CANÓNICA DIAGONAL CONJUGADA	27
FORMA CANÓNICA OBSERVABLE	27
CONTROLABILIDAD	28
Criterio de Controlabilidad Completa de Estado en el Espacio de Estado (Kalman)	28
Criterio de controlabilidad en la salida	28
OBSERVABILIDAD	29
Criterio de Observabilidad en el Espacio de Estado (Kalman)	29
3. UNIDAD 3: CONTROL EN ESPACIO DE ESTADO DE SISTEMAS. DINÁMICOS ELÉCTRICOS Y MECÁNICOS	30
1. OBJETIVOS DE CONTROL Y ESPECIFICACIONES	30
ESPECIFICACIONES	30
2. REALIMENTACIÓN DE ESTADO	31
REALIMENTACIÓN DE ESTADO SISO	31
MÉTODO DE ASIGNACIÓN DE POLOS (POLE PLACEMENT)	32
DISEÑO DE SERVOSISTEMAS TIPO 1 SISO	32
Planta tipo 1	32
Planta tipo 0	32
3. ESTIMACIÓN Y OBSERVADORES	33
OBSERVADORES DE ESTADO (SISO)	33

Resumen Automatica y Máquinas Eléctricas	
Modelo de la planta	33
<i>Definición de observador de estado</i>	33
Modelo del observador de estado	33
REALIMENTACIÓN DE ESTADO ESTIMADO	35
Expresión matricial del sistema completo	35
4. DISEÑO. IMPLEMENTACIÓN DISCRETA: CONTROLADOR DIGITAL	35
SISTEMAS DISCRETOS EN TIEMPO CONTINUO	35
Controlador PID	36
4. UNIDAD 4: CONTROL DE ACCIONAMIENTOS DE CORRIENTE CONTINUA	38
1. MÁQUINA DE CORRIENTE CONTINUA DE IMANES PERMANENTES O EXCITACIÓN SEPARADA	38
HOJAS DE DATOS Y ESPECIFICACIONES	38
Parámetros del motor	38
Parámetros Mecánicos	38
Parámetros Eléctricos	39
MÁQUINA DE CC CON ESCOBILLAS	39
Principio de Operación	39
Modelo matemático equivalente	40
Subsistema térmico	42
MODELO FÍSICO IDEALIZADO Y MODELO DINÁMICO PARA MAQUINA CON IMANES PERMANENTES	43
Motor estándar vs Servomotor	44
2. CONTROL DE POSICIÓN/VELOCIDAD POR REALIMENTACIÓN DE ESTADO	45
CONTROL DE POSICIÓN CON MANIPULACIÓN DE LA TENSIÓN DE ARMADURA	45
3. CONTROL EN CASCADA: CORRIENTE/TORQUE	47
CONTROL POR MANIPULACIÓN DE CORRIENTE DE ARMADURA	47
CONTROL POR TORQUE	48
5. UNIDAD N°5: CONTROL DE ACCIONAMIENTOS DE CORRIENTE ALTERNA	54
1. MÁQUINAS DE CA TRIFÁSICA: SINCRÓNICA VS DE INDUCCIÓN	54
PRINCIPIO DE OPERACIÓN	54
Estator	54
Rotor	54
TRASFORMACIÓN DE COORDENADAS ABC EN EL ESTATOR A COORDENADAS QD0 GENERAL	55
Ecuaciones del estator en coordenadas qd0	56
Modelo dinámico en coordenadas qd0	59
Diagrama de bloques completo de la Maquina Sincrónica de imanes permanentes	60
Ecuaciones de Control vectorial Orientado al Campo Magnético	60
2. CONTROL DE CORRIENTE / TORQUE	61
CONTROL VECTORIAL DE LA MAQUINA SINCRÓNICA DE IMANES PERMANENTES (PMSM PERMANENT MAGNET SYNCRONIC MACHINE)	61

1. UNIDAD N°1: Conversión de energía eléctrica ↔ mecánica y Control automático

1. Concepto y esquema general

Un accionamiento eléctrico es un sistema que convierte energía eléctrica en energía mecánica o viceversa de forma útil (y por ende controlada)

La máquina eléctrica puede funcionar de dos maneras:

Motorización

Convierte energía eléctrica a mecánica

Generación

Convierte energía mecánica a eléctrica

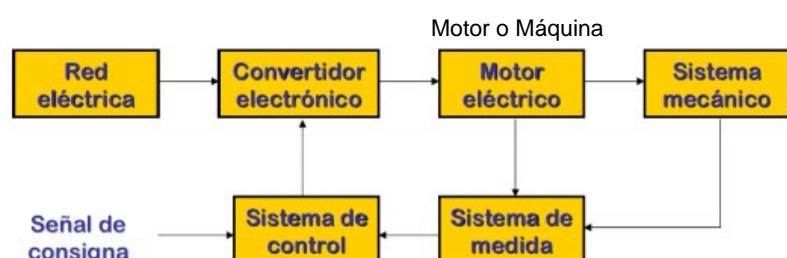
Partes del esquema general

Red eléctrica

Representa a la red de alimentación del motor, puede ser una red interconectada, banco de baterías, etc.

Sistema mecánico

Representa la carga (si funciona como motor) o el sistema impulsor (si funciona como generador)



El convertidor electrónico

Permite manipular el comportamiento del sistema para que la transferencia de energía hacia el motor sea controlada. A través del Convertidor electrónico se puede manipular la velocidad y el par de la máquina eléctrica, puede no estar, y en su lugar se usan protecciones (arranque estrella triángulo, arranque directo, etc.) y luego se alimenta la máquina. El convertidor se va a adecuar a la red si es de CC o CA y el tipo de máquina CC o CA.

Sistema de control

Permite el control del comportamiento del sistema para controlar la transferencia de energía.

Compara la señal de consigna con la medición realizada.

Sistema de medición

Permite medir algunas variables representativas del sistema para realimentar el sistema de control.

Variables controladas

Dependiendo de la aplicación, el sistema se diseña para controlar una o varias variables, las cuales pueden ser las siguientes:

[Al menos se debe poder controlar una de ellas]

- Posición
- Velocidad
- Aceleración Varios
- Torque \Rightarrow potencia[W] = Torque [N/m] * Velocidad[rad/seg]
- Temperatura (monitoreo y protección / limitación) (si llega a un valor que puede ser peligroso se manda una alarma y se detiene la máquina o se disminuye la potencia para evitar sobrecalentamiento)
- Variables de proceso de interés en la aplicación (lazo externo)

Control automático electrónico: Lazo abierto vs lazo cerrado

Permite controlar la máquina. Existen dos métodos para poder controlar el sistema. Siempre se utilizan ambos, debido a que es necesario obtener una realimentación de lo que está pasando en el sistema para poder controlarlo, por lo que se miden las variables más importantes o las que es posible medirlas, y las demás se realiza una estimación mediante cálculos internos.

Estos métodos son:

Lazo abierto

Es más rápido pero tiene la desventaja que no es capaz de hacer un análisis sobre lo que pasa en el sistema en ese momento.

Lazo cerrado o Realimentado

Requiere de un error para poder controlar el sistema, ya que el controlador produce una salida acorde al error que hay entre la variable medida y el set point de dicha variable.

En las aplicaciones posibles, se encuentran los famosos "Electrodomésticos 'Inverter' "

2. Accionamiento eléctrico

Concepto [A norma general, la conversión de Energía Eléctrica a Mecánica y viceversa, se da mediante campos electro-magnéticos]

El accionamiento eléctrico tiene dos formas de funcionamiento que se rigen según las siguientes leyes fundamentales:

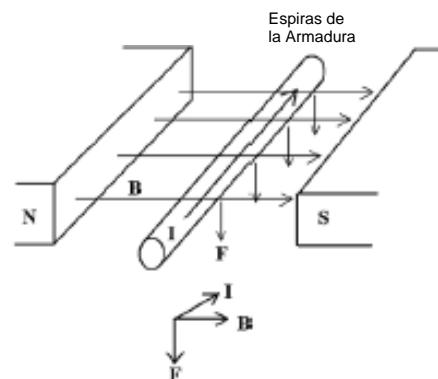
Acción motor

Por ley de Lorenz, al aplicar una corriente por un conductor (espiras del rotor) que está atravesado por un campo magnético (generado por la aplicación de una corriente en el estator) se produce una fuerza impulsora. La dirección de la misma está dada por la regla de la mano derecha.

$$\vec{F} = (\vec{I} * l) \times \vec{B}$$

Fuerza impulsora o frenante

- I= corriente
- L = longitud de la espira
- B = flujo magnético
- F = fuerza de Lorentz [Fuerza perpendicular]

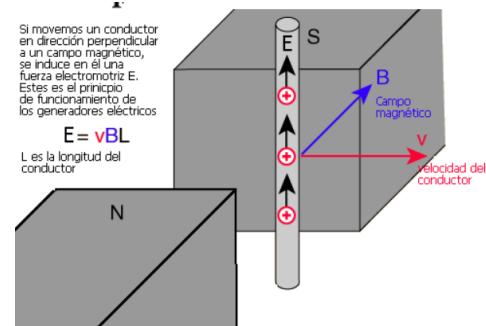


Acción Generador

Si hay un conductor eléctrico que se mueve a una determinada velocidad a través de un campo magnético, se produce una tensión inducida en el conductor debido a la ley de Faraday Lenz.

$$\vec{E} = -N * \frac{d\Phi}{dt} = (\vec{v} * l) \times \vec{B}$$

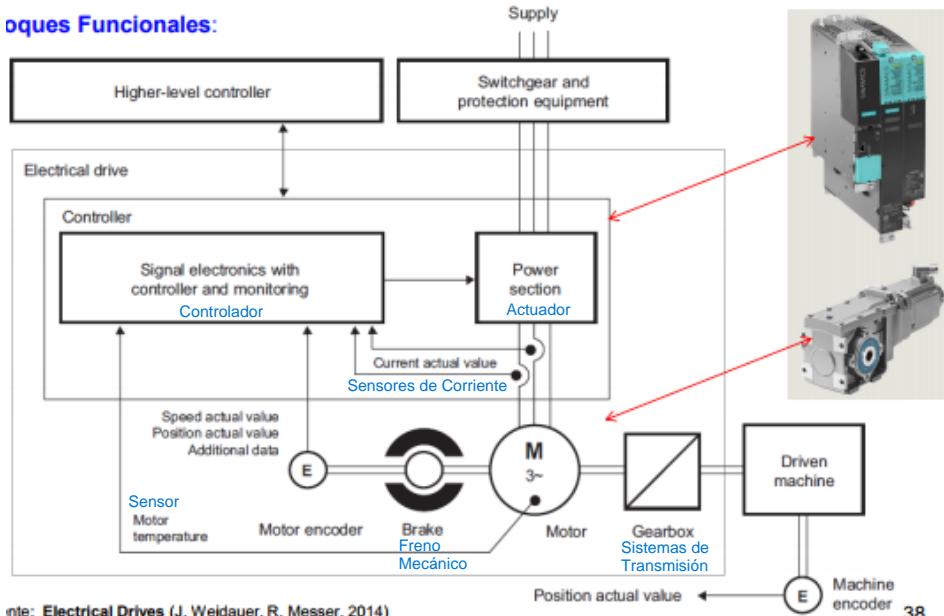
- E = FEM generada [Es una fuerza que se opone al movimiento]
- v = velocidad del flujo magnético
- l = longitud de la espira
- B = flujo magnético



Esquema general

Siempre los sistemas deben ser estables. Para ello se van a calibrar para obtener el mejor desempeño posible adaptándose a las condiciones del servicio. El control automático electrónico puede ser mediante lazo abierto o lazo cerrado.

Pisos Funcionales:



El Corazón del sistema es la maquina eléctrica. Se conecta a la alimentación a través de equipos de protección y maniobra. (contactores, termomagnéticas, etc.)

Controlador

Recibe las señales medidas de la corriente, velocidad, temperatura y genera una respuesta que enviará al Power Section para que manipule al motor.

La consigna con la cual se compara para determinar la respuesta, puede ser fija o variable, pero en muchos casos recibe consignas de un PLC por ejemplo.

Power Section

Representa a la parte de electrónica de potencia dentro del controlador, el cual permite la manipulación del sistema.

Parte mecánica

Gearbox

Es cualquier mecanismo de sistemas de transmisión mecánica que existe entre la maquina eléctrica y la carga (sistema de engranajes, polea y correas, cadenas, etc.)

Freno mecánico

Esta generalmente en la parte de atrás del motor, se opera solamente con la maquina des energizada, para impedir el movimiento en ese estado. Siempre conviene frenar de forma regenerativa, aunque a veces el sistema de control no pueda aportar a la red la corriente generada (se frena por una resistencia).

Encoder

Permite la medición de la posición y/o velocidad instantánea del motor

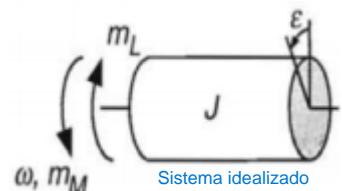
Driven Machine

Representa a la carga aplicada al motor. Puede haber sensores (encoder) para medir el efecto final debido a que por ejemplo la caja puede tener juego y al querer tener un control de movimiento de alta precisión, existen oscilaciones en la cadena cinemática, torsiones, etc. que verifican que se estén entregando las características deseadas.

Subsistema mecánico: Carga

Representa el trabajo mecánico productivo en condiciones controladas.

Está compuesto por un componente inercial (rotor), restringido a 1 GDL (rotación), posee una componente de fricción, que se modela de forma lineal y se opone a la rotación del rotor. **Además se representa también el torque de carga que se opone a la rotación del rotor**



Variables controladas

- **Velocidad**
- **Torque impulsor** [Variable Manipulada]
- **Torque de carga** (reacción que pone la máquina para evitar el movimiento) [Variable de Perturbación]
- **Posición angular instantánea**

De acuerdo con el tipo de aplicación se puede caracterizar el tipo de máquina eléctrica a utilizar, **ya sea** definir la relación del torque respecto de la velocidad:

además se analiza la potencia instantánea, que se define como...

- **Torque Constante (grúa)** [Componente fija o constante = gravedad, carga colgante externa, etc]
- **Torque Variable ()**
- **Potencia Constante**
- **Régimen permanente vs Régimen cíclico**

Es así que las características dadas por la relación del torque resistente (o de carga) y la velocidad de carga, nos determinan el comportamiento de la relación entre la intensidad de corriente y la velocidad en el motor. Esta última nos condiciona la solución y diseño del accionamiento (o en otras palabras lo "dimensiona")

Maquina eléctrica

Conversión de energía eléctrica \leftrightarrow mecánica (Proceso REVERSIBLE: ambos sentidos).

Se clasifican en:

Corriente continua

Permiten un control más simple, pero constructivamente más complejas, pesadas y caras para la misma potencia que una máquina de corriente alterna. requieren mayor mantenimiento (cambio de escobillas)

La misma puede tener distintos tipos de excitación:

excitación por imanes permanentes

implica una excitación fija

excitación independiente [Es una excitación separada con electroimanes pero que se controla de forma independiente]

permite control de forma independiente por armadura y por corriente de campo lo que **permite hacer Field Forcing o Field Weakening** aumentando el campo magnético para obtener un mayor torque o embalando la máquina de forma controlada.

----- Existen además otros tipo de conexiones de excitación, pero no las veremos en profundidad

excitación serie

excitación en paralelo (variable).

Corriente alterna

Son maquinas más robustas, con un menor mantenimiento y costo, **mejor respuesta dinámica (menor inercia por lo tanto se requiere menos toque para moverla)** y mayor densidad potencia. Tenemos dos grandes grupos: *Sincrónica*

Excitación con imanes permanentes / separada / de reluctancia (tienen un apoyo de imanes permanentes de baja calidad que permiten variar la reluctancia de la armadura del rotor)

Asincrónica o de Inducción

Rotor bobinado / DFIM (doblemente alimentados) vs. rotor jaula de ardilla (cortocircuito).

Entre las características más importantes se resalta la importancia de la relación de Torque electromagnético vs la Velocidad

Resumen Automática y Máquinas Eléctricas

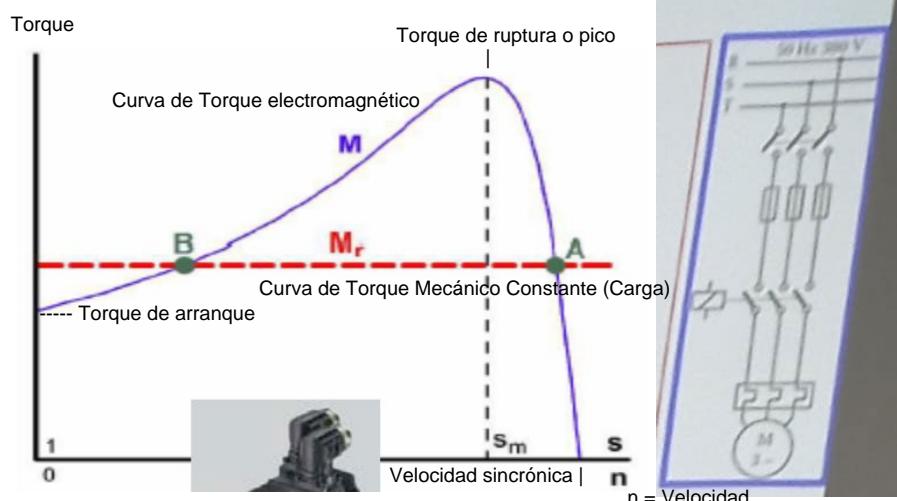
Dinámica, equilibrio y estabilidad

La configuración más básica de todas es la de la figura de la derecha. Ese caso únicamente puede funcionar como motor y corresponde a un motor con arranque directo, por lo que es una curva estática.

Podemos analizar la curva torque – velocidad, Donde podemos ver en abscisas la velocidad y el torque en ordenadas.

La curva azul, llamada curva de torque electromagnético (T_{em})

posee un pico en donde a velocidades mayores, el torque comienza a decaer hasta llegar a 0, donde se llegaría a la velocidad sincrónica (velocidad del campo magnético rodante). En esta máquina, para que circule corriente en el rotor y se produzca un torque en el rotor, debe existir un pequeño resbalamiento. [s = resbalamiento]



La curva Roja es la curva de Torque de Carga (T_l) (generalmente tienen un aumento cuadrático con la velocidad)

Realizando una comparación entre las curvas, se puede analizar el comportamiento de la máquina al aplicarle un torque de carga determinado. La diferencia entre el **Torque electromagnético (T_{em})** y el **torque de carga (T_l)** da como resultado el **torque de aceleración**.

Cuanto más cantidad de pares de polos tenemos, gira más lentamente el campo electromagnético rotante para la misma frecuencia eléctrica .

Puntos de equilibrio dinámico

En los puntos donde se cruzan las curvas de Torque electromagnético y torque de carga, debido a la 2^{da} ley de Newton para rotación se puede analizar que en dichos puntos el rotor gira con una velocidad constante (el momento de inercia se considera constante).

$$a = \frac{\sum T_{ext}}{J} = \frac{T_{em} - T_l}{J} = 0 \Rightarrow v = cte$$

En este caso existen dos puntos de equilibrio dinámico , A y B, donde para analizar su estabilidad, se analizan los puntos cercanos al punto de equilibrio dinámico, ya que son los puntos donde el sistema se va a ubicar al sufrir una perturbación.

Al realizar un análisis del punto B, si por alguna razón la velocidad comienza a aumentar $T_l < T_{em}$ por lo que va a existir un torque de aceleración positivo, entonces cada vez la velocidad del rotor va a continuar aumentando más debido a ese torque de aceleración. Lo mismo pasa en el caso de que la velocidad comience a decrecer por debajo del punto de equilibrio, como $T_{em} < T_l$. El torque de aceleración es negativo y por lo tanto el motor comienza a frenarse hasta llegar a detenerse. Por dicho motivo el **punto B es un punto de equilibrio inestable**.

Haciendo el mismo análisis para el punto A se llega a que el **punto A es un punto de equilibrio estable**.

También se puede llegar a las mismas conclusiones haciendo un análisis de las derivadas parciales de los Torques respecto de la velocidad (Ω)

$$\text{Condición de Estabilidad } \frac{\partial T_{em}}{\partial \Omega} < \frac{\partial T_l}{\partial \Omega}$$

Caso del Punto B cuando se reduce la velocidad y por ende el torque de carga tiende a detener la máquina por ser mayor el T_{em}

Para este caso y considerando la curva roja como torque de carga y la azul como la curva del torque electromagnético, el motor no podría arrancar debido a las condiciones de estabilidad. Se debería utilizar una reducción en el eje del motor para reducir la carga efectiva que afecta al motor o bien implementar un control electrónico para manipular la curva de torque electromagnético. [En otras palabras, hacer que el inicio de la curva azul esté por encima de la roja]

Es así que tenemos el punto A, en dónde a pesar de que hay una perturbación el sistema se restituye. Luego tenemos el punto B, que cuando se presenta una perturbación hacen que el sistema diverja. Finalmente hay un equilibrio que en este caso no aparece, el cual es el equilibrio "Indiferente".

Convertidor electrónico de potencia [Es muy importante porque es el actuador del sistema]

Manipula la corriente a una forma más conveniente para alimentar el motor y controlarlo de la manera deseada.

Permiten a veces bidireccionalidad y a veces no. [Según como sea la estructura de dicho puente] Recordar que la conversión de energía eléctrica fija (una red o fuente) a una eléctrica variable.]

- **CA/CC:** Rectificador (comutación natural [diodos] / controlado [SCRs/IGBTs, etc.]). [IGBT en la mayoría de las aplicaciones industriales]
- **CC/CC:** Troceador o chopper (controlado [MOSFETs/IGBTs, puente h, etc.]) permiten tener una tensión de salida variable en donde se puede cambiar la polaridad.
- **CC/CA:** Inversor (controlado [MOSFETs/IGBTs, etc.]).
- **CA/CA:** Cicloconvertidor (1 etapa [SCRs]) vs. Convertidor (c/ bus CC intermedio) toma una alimentación senoidal trifásica y conmuta las fases de entrada con las de salida para obtener una tensión alterna de frecuencia variable sin tener que utilizar CC como intermediario se usa en aplicaciones muy específicas.

Lo que más se usa en la industria es un variador de frecuencia que está compuesto por un rectificador y un inversor acoplados dando una salida trifásica por PWM.

En otras palabras, sería usar un rectificador para pasar de CA/CC y luego a esta CC (intermedia) le aplico el inversor para pasar de CC/CA

Subsistema de POTENCIA: Cuadrantes [de Operación]

Se pueden analizar el comportamiento de una máquina a través del gráfico de la derecha. (*Los ejes están invertidos respecto al visto en el inciso anterior*)

- **Si los dos signos son iguales, se está motorizando.** (si los dos son positivos gira en un sentido y si no en el inverso)
- **Si los dos signos son distintos, se está generando.** (produce un frenado regenerativo si se usa el convertidor electrónico correspondiente) [generando = frenando = convirtiendo energía mecánica en eléctrica



Las maquinas eléctricas siempre pueden trabajar en los 4 cuadrantes, existen convertidores electrónicos que pueden hacerlo y otros no, dependiendo de la configuración del mismo.

Para motores que trabajan con mucha inercia es necesario trabajar con 4 cuadrantes para frenarlos.

También se usan los 4 cuadrantes donde se necesita que el motor gire en ambos sentidos.

Vale la pena destacar que no todas las máquinas o aplicaciones necesitan tener 4 cuadrantes, todo depende de cómo se la quiera utilizar. Por ejemplo a una bomba nunca se la hace girar en sentido contrario. En los sistemas mecatrónicos siempre se utilizan 4 cuadrantes.

Subsistema Eléctrico: Fuente (o Carga)

[En el esquema general es la parte de "Red eléctrica"]

Provee la energía eléctrica necesaria para convertir en energía mecánica de accionamiento. En ciertos casos puede recibir energía recuperada o regenerada de la carga mecánica (frenado regenerativo, generación eléctrica, etc.)

Sus características determinan el tipo de interface eléctrica requerida en el Convertidor Electrónico.

Depende si es CC o CA, la calidad de la energía provista, existencia de armónicos, etc.

Tensión / frecuencia

Subsistema de Medición (Sensores)

Permiten realizar una realimentación de Estado, proveyendo al controlador información sobre lo que está pasando en el motor.

Existen diferentes tipos de variables que se pueden medir:

- **Variable Controlada:** Sensores externos acoplados mecánicamente: Encoder / Resolver, Tacogenerador, Torque, etc.
- **Variables de Estado:** Sensores internos de tensión, corriente, potencia eléctrica, Temperatura.

Cuando se trabaja en lazo cerrado es indispensable el uso de sensores que realimenten las señales requeridas.

Resumen Automática y Máquinas Eléctricas

Subsistema de CONTROL

El sistema de control nos permite controlar el motor. El mismo puede ser de lazo abierto (no tiene realimentación FFW) o lazo cerrado (realimentado FBK). El de lazo cerrado no va a faltar nunca, pero el de lazo abierto se puede agregar para mejorar el comportamiento mecánico.

Existen dos tipos de controles:

- Control Analógico (originalmente, basado en Amplificadores Operacionales c/redes RC, etc.) Tiempo Continuo. Se usa muy poco en convertidores analógico digitales por ej.
- Control Digital (actual, basado en Microprocesadores, DSPs, Microcontroladores o DSCs) Tiempo Discreto (Muestreo T_s y Cuantización (A/D, D/A: discretización de amplitud de señales).

Requerimientos del sistema de control

Estabilidad

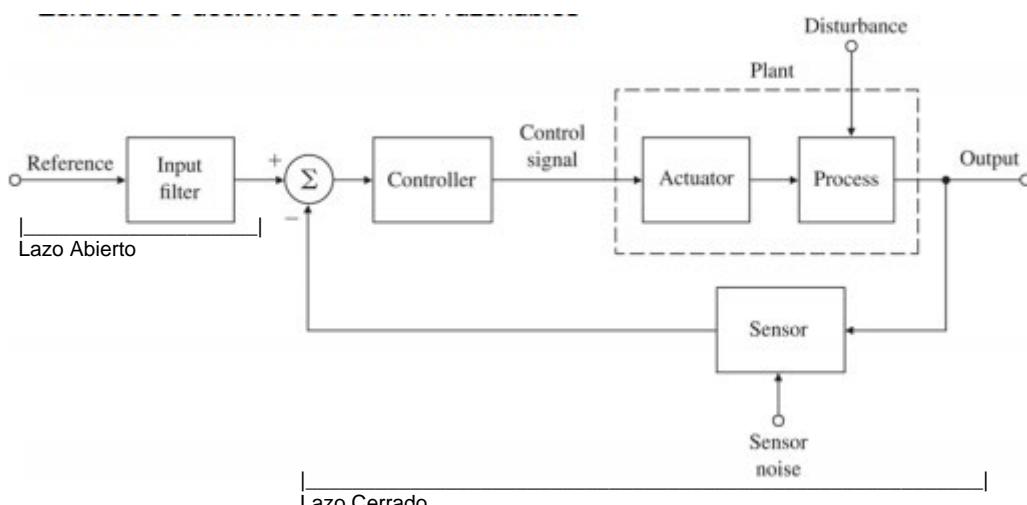
Seguridad y Disponibilidad para operación.

Robustez

frente a Incertidumbre de Modelo o Perturbaciones externas.

Desempeño (Performance) y Optimización (índices o especificaciones)

- Rechazo a Perturbaciones o Cargas (si hay una perturbación, el sistema no varía su velocidad)
- Seguimiento de Consignas o Comandos de Referencia
- Esfuerzos o acciones de Control razonables (los torques aplicados son tolerables por el motor)



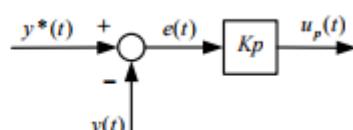
En la imagen de arriba se puede ver un diagrama de control en donde Input filter es un lazo abierto que lo que busca es anticipar el control para tener una respuesta más rápida, y lo que se encuentra a la derecha del sumador es un control realimentado a través de las mediciones realizadas por los sensores. Este sistema tiene dos grados de Libertad, uno en lazo abierto y otro en lazo cerrado.

Tipos de control

(P) Acción Proporcional: proporcional al error o desviación

K_p: Ganancia Proporcional

$$u_p(t) = K_p \cdot e(t)$$

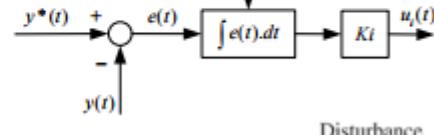


(I) Acción Integral: proporcional a la integral del error o desviación

K_i: Ganancia Integral (Se define también T_i [s]: Tiempo integral o de Reset, tal que K_i = K_p/T_i)

$$u_i(t) = Ki \cdot \left(\int_0^t e(\tau) \cdot d\tau + I_e(0) \right)$$

$$Ki \equiv \frac{K_p}{T_i}$$



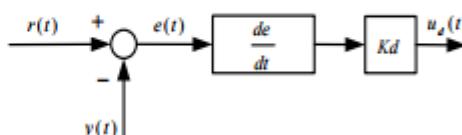
Tiene la propiedad de corregir el error de estado estacionario.

Sobre todo para plantas que son no lineales con no linealidades suaves

(D) Acción Derivativa: proporcional a la derivada del error o desviación

Kd: Ganancia Derivativa (Se define también Td [s]: Tiempo derivativo, tal que Kd = Kp.Td)

$$u_d(t) = Kd \cdot \frac{de(t)}{dt}$$

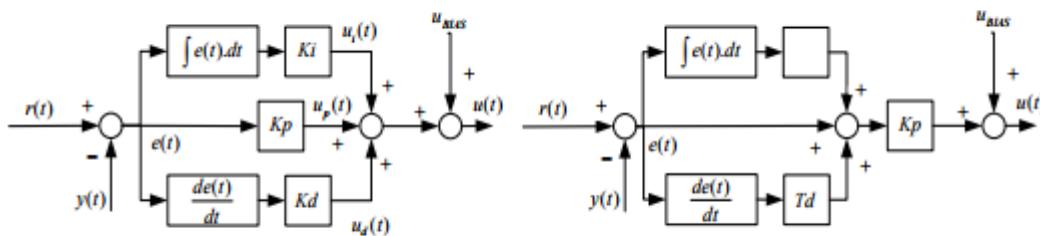


$$Kd \equiv Kp \cdot Td$$

Es proporcional a la derivada del error, por lo tanto es muy sensible al ruido, ya que una señal de baja amplitud y baja frecuencia, la comienza a amplificar debido a que las derivadas son muy pronunciadas

Controlador Proporcional + Integral + Derivativo (PID) + BIAS (general)

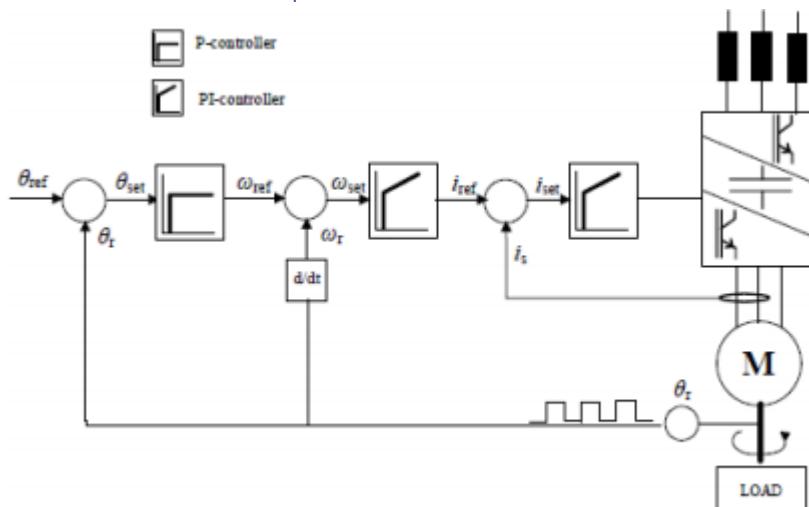
$$u(t) = Kp \cdot e(t) + Ki \cdot \int e(t) \cdot dt + Kd \cdot \frac{de(t)}{dt} = Kp \cdot \left[e(t) + \frac{1}{Ti} \cdot \int e(t) \cdot dt + Td \cdot \frac{de(t)}{dt} \right]$$



a) Forma Paralelo

b) Forma Ideal

Control de posición-velocidad-torque en cascada



Se basa en diferentes controladores PI con unos derivadores que permiten obtener la velocidad

2. Unidad N°2: Modelado y Análisis en Espacio de Estado de Sistemas Dinámicos Eléctricos y Mecánicos

ESPACIO DE ESTADO: Es un espacio vectorial que representa el estado instantáneo del comportamiento de un sistema.

1. Sistemas Dinámicos Físicos y Variables de Estado

Sistema mecánico 1 g.d.l.: Masa-Resorte-Fricción (lineal)

Para este sistema dinámico se plantea un sistema masa resorte con amortiguamiento viscoso.

Tenemos en cuenta que el resorte cumple con la ley de Hooke.

Sistema Dinámico Físico

Se puede denominar a este sistema como un sistema Dinámico físico debido a que hay energía puesta en juego. [Esta energía la expresamos en Joules]

Las energías que interactúan en este sistema son:

Almacenamiento interno: (reversible)

Energía Cinética (en masa o inercia)

$$E_k(t) = \frac{1}{2} * m * v(t)^2$$

Energía Potencial elástica (en resorte)

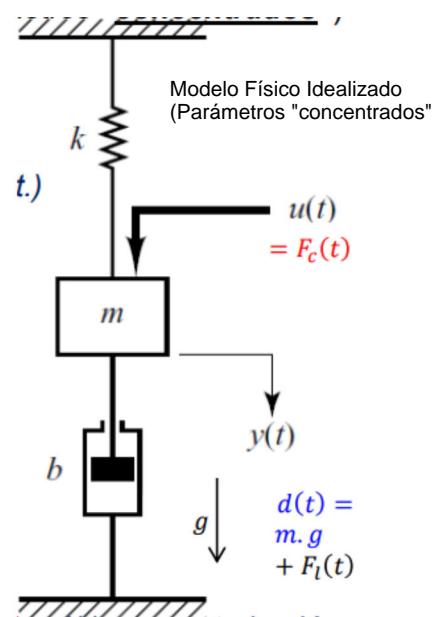
$$E_p(t) = \frac{1}{2} * k * y(t)^2$$

$y(t) = 0$ se fija en el punto de equilibrio del sistema cuando no tiene una carga aplicada.

Energía Potencial gravitatoria (en masa)

$$E_g(t) = P * (h_0 - y(t))$$

Debido a fuerza externa de atracción gravitatoria: peso $P = m.g$ (perturbación constante).



Intercambio de energía

Interno

Es el intercambio de energía que se produce entre componentes o subsistemas. Este es el caso del intercambio entre energía Cinética y potencial de este sistema. Este intercambio es reversible.

Externo

Es el intercambio de energía que se produce con el medioambiente. Para este sistema encontramos dos casos, pero podría haber otros también. Estos son:

Excitación

Es el trabajo realizado por fuentes externas al sistema (control vs. perturbación)

Fricción

A través del Amortiguador viscoso se disipa energía en forma de calor. Dicha energía no puede volver al sistema por lo que es irreversible.

Dinámica

Dentro de todos los sistemas físicos existen retardos ya que los intercambios de energía no son instantáneos a esto se los denomina sistemas dinámicos. Estos retardos diferencian los sistemas físicos de los idealizados, ya que en los idealizados no se tienen en cuenta muchos factores que generan pequeños retardos, como podría ser considerar que el resorte cumple con la ley de Hooke. Sin embargo se puede considerar que se cumple ya que los efectos que se desprecian, no producen una diferencia significativa en el tipo de análisis que se realice.

En otras palabras, un sistema dinámica es aquel en donde están presentes los retardos y las respuestas no son instantáneas.

Resumen Automática y Máquinas Eléctricas

Dentro de los sistemas dinámicos se deben tener en cuenta las Fuerzas, que representan las causas, y los efectos serán las variables en movimiento.

Al analizar un modelo dinámico es fundamental tener en cuenta 3 puntos:

Estructura de Interconexión

Es la forma en la que esta interconectado el sistema, podemos ver para el sistema masa resorte anterior que están los componentes distribuidos en serie. En el caso que hubiese dos resortes por ejemplo no es lo mismo si están dispuestos en serie o en paralelo.

Leyes Constitutivas

Son las leyes Físicas que el sistema cumple. Para este caso el resorte cumple con la ley de Hooke, para la masa debemos considerar la ley de inercia, y se puede aplicar la 2da ley de Newton y hay que considerar que en el amortiguador existe una fricción viscosa que depende de la velocidad.

Parámetros

Representan las entradas y salidas que tiene el sistema. El mismo puede ser de dos formas: Sistema SISO (Single input Single Output) o MIMO (Multiple Input Multiple Output). Es así que definimos nuestro MODELO MATEMÁTICO

Entrada

Representan la excitación del sistema. Estas son Fuerzas externas $u(t)$ que nos permiten influir sobre el sistema. Existen dos tipos:

Entradas de Control $u(t)$

Pueden variar convenientemente para controlar el comportamiento del sistema.

Entradas de Perturbación $d(t)$

Son variables que no se pueden predecir, o en el caso que se pueda predecirlas, no se puede influir directamente sobre ellas. Con sensores adecuados, se podría medirlas.

Salida

Representan la respuesta medida del sistema. En este caso sería el desplazamiento de la masa $y(t)$ respecto al equilibrio

Equilibrio

Se pueden considerar dos casos:

Equilibrio no cargado

Representa al equilibrio cuando no hay cargas aplicadas al resorte.

$$u(t) = u_e = 0 \quad [\text{excitación nula}]$$

$$v(t) = \frac{dy}{dt} = v_e = 0 \quad [\text{energía cinética nula}]$$

Equilibrio cargado

Es cuando se aplica una carga al resorte y por lo tanto el equilibrio no se ubica en el punto de equilibrio para el resorte, sino que se deben considerar las cargas actuantes. Ejemplo: resorte vertical, una vez que llega al equilibrio con la carga.

$$y(t) = y_e = \frac{m \cdot g}{k}$$

Ahora es cuando empezamos a plantear un modelo matemático....

Ecuación de Movimiento en DT

Es un sistema que se modela utilizando las leyes de newton y el principio de D' Alambert. Hay que considerar que el punto de equilibrio planteado es el equilibrio no cargado, debido a que es más representativo, ya que quedan todos los parámetros intervenientes en el sistema, expresados en la ecuación y no queda nada implícito, por este motivo se agrega el peso.

$$\begin{aligned} m \cdot a(t) &= u(t) - b \cdot v(t) - k \cdot y(t) + m \cdot g && [\text{Observar que } g \text{ no depende de } t, \text{ es constante}] \\ v(t) &\equiv \dot{y}(t); \quad a(t) \equiv \ddot{y}(t) = \ddot{y}(t) \end{aligned}$$

El primer miembro de la ecuación corresponde a los efectos, y la segunda a las causas, teniendo en cuenta una perturbación externa y además una entrada de perturbación que es el peso.

$$\begin{array}{c|c} m \cdot \ddot{y}(t) + b \cdot \dot{y}(t) + k \cdot y(t) = u(t) + m \cdot g \\ \hline \text{Fuerzas Internas o Consecuencias} & \text{Fuerzas Externas o Causas} \end{array}$$

Función de transferencia

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación anterior y despejando $G(s)$ y considerando condiciones iniciales nulas se obtiene la siguiente función de transferencia:

$$G(s) \equiv \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{m \cdot s^2 + b \cdot s + k}$$

Este sistema, tiene un comportamiento de un filtro pasa bajo de 2do orden, por lo tanto atenúa las excitaciones de alta frecuencia, y reacciona al sistema cuando las frecuencias son bajas.

Si se aplica una deformación constante, la respuesta del sistema es la ganancia estática.

$$G(0) = \frac{1}{k}$$

Los polos del sistema son las raíces del denominador de la función de transferencia. A partir del análisis de los mismos podemos predecir el comportamiento dinámico del sistema.

$$p_1, p_2 = \frac{b}{2m} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$$

Donde si el $b = 0$, la respuesta es oscilatoria si es distinto de 0, tenemos los casos de subamortiguado, crítico y sobreamortiguado.

Modelo de Estado: Modelo interno DT (Espacio de Estado) [Siempre los modelos serán aproximaciones]

Analizando las ecuaciones diferenciales anteriores podemos ver que es una ecuación diferencial ordinaria, lineal (coeficientes constantes y las relaciones entre las derivadas son proporcionales).

Este tipo de modelo es alternativo al modelo del tiempo

Definiendo variables de estado se puede representar al sistema anterior como un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden definiendo variables de estado (se define más abajo).

Desde un punto de vista físico, se puede analizar a una variable de estado como la variable asociada a cada elemento que almacena energía. Por dicho motivo se considera $y(t)$ en su estado no cargado, ya que representa la energía potencial elástica almacenada en el resorte.

Estado inicial de movimiento

Para resolver la ecuación de segundo orden es necesario conocer las condiciones iniciales donde en este caso son la deformación instantánea respecto al equilibrio no cargado $y(t)$ y su velocidad inicial $\dot{y}(t)$. Dependiendo del estado inicial de movimiento, va a ser el comportamiento del sistema al transcurrir el tiempo.

$$x_1(0) \equiv y(0); \quad x_2(0) \equiv \dot{y}(0) \quad$$

Es decir que estas dos condiciones iniciales es lo que denominamos "Estado Inicial de Movimiento"

Ecuación de estado

Se forma un vector con las condiciones iniciales, y se lo define para poder determinar el estado del sistema en cualquier momento posterior al estado inicial de movimiento.

$$x_1(t) \equiv y(t)$$

$$x_2(t) \equiv v(t) = y'(t)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ m \cdot \ddot{x}_2(t) = -k \cdot x_1(t) - b \cdot x_2(t) + u(t) + m \cdot g \end{cases}$$

[Ecuación de la dinámica del sistema]

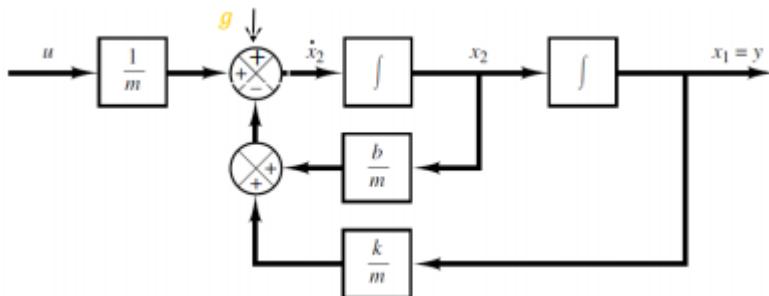
Podemos notar que la primera ecuación es una consideración lógica debido a lo planteado anteriormente, pero por más que sea una respuesta trivial, es necesario colocarla para trabajar en el espacio de estado. Se deben definir "N" variables de estado, siendo N el orden de la ecuación analizada, lo que nos permite transformar el sistema en "N" ecuaciones de primer orden. [Se hace esto porque es más sencillo resolver]

Existe el caso (Trabajo Final) donde existen distintos subsistemas con ecuaciones diferenciales de distintos ordenes acopladas entre sí. En estos casos se deben definir tantas variables de estado como la suma de los órdenes de las ecuaciones diferenciales, donde consecuentemente quedarán la misma cantidad de ecuaciones de primer orden.

Tener en cuenta el caso en que tengamos el caso de ecuaciones no lineales de orden N, en donde este principio se puede aplicar pero hay que tener cuidado con las N ecuaciones resultantes.

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}_1(t)$$

Diagrama de bloques de estado



Nos permite representar gráficamente el modelo, empezando por la ecuación que tiene la derivada más alta, ya que al estar en cascada, nos permite integrar y obtener la variable de estado siguiente.

Se puede interpretar a las variables de estado como las variables que se ubican a la salida de los integradores.

Forma matricial

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{u}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{g}; & \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(0) \\ \mathbf{x}_2(0) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{10} \\ \mathbf{x}_{20} \end{bmatrix} \\ \mathbf{y}(t) = [1 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

El estado inicial resume toda la historia anterior del sistema

Se pasa a forma matricial las ecuaciones armadas arriba con los parámetros ya determinados. Siempre se debe expresar el vector de condiciones iniciales porque muchas veces puede no ser nulo.

La matriz cuadrada se denomina matriz del sistema, y es la que tiene incluido el comportamiento dinámico natural del sistema, en donde los autovalores nos indican las raíces del sistema (son equivalentes a los polos del sistema), y los autovectores nos indican los modos naturales de vibración. Tanto los autovalores como los autovectores son invariantes en el tiempo.

- El vector que acompaña a $\mathbf{u}(t)$ es el vector de entradas de control.
- El vector que acompaña a "g" es el vector de entradas de perturbación.
- El vector que pertenece a la ecuación de $\mathbf{y}(t)$ se denomina vector de salida.

2. Modelos Lineales Invariantes en el Tiempo(LTI)

Forma general de un sistema Lineal Invariante en el tiempo (LTI)

Cualquier sistema con las características mencionadas en el ejemplo anterior, se puede modelar de forma general con las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t); & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}(t) \end{cases}$$

Donde:

$$\mathbf{u}(t)_{m \times 1}, \mathbf{x}(t)_{n \times 1}, \mathbf{y}(t)_{p \times 1}$$

$$\mathbf{A}_{n \times n}, \mathbf{B}_{n \times m}, \mathbf{C}_{p \times n}, \mathbf{D}_{p \times m}$$

Hay que tener en cuenta que es una expresión que contiene dos ecuaciones vectoriales que, por formar un sistema lineal (no hay producto de variables de estado en ninguno de los términos), se puede expresar de forma matricial.

- A es la matriz de coeficientes naturales del sistema.

Resumen Automática y Máquinas Eléctricas

- **B** es el vector de entradas. En este caso está considerando a las entradas de control y las de perturbación. Se recomienda dividir a estas como dos términos separados para un mejor análisis.
- **C** es el vector de salida
- **D** es una matriz de transferencia directa.

El planteo del estado inicial, resume toda la historia del sistema hasta el momento del comienzo del análisis.

Concepto de Estado

Menor conjunto de variables $\{x_i(t)\}$ ("variables de estado") tales que el conocimiento de sus valores $\{x_i(0)\}$ en un instante inicial t_0 ("estado inicial"), junto con el conocimiento de la entrada $u(t)$ para todo $t > t_0$, determina completamente el comportamiento posterior del sistema para cualquier instante de tiempo $t > t_0$

La cantidad de variables de estado seleccionadas, depende de que tan complejo sea el sistema que se está modelando por lo que se podrían hacer modelos más sencillos o más complejos para un mismo sistema.

Separación de entradas:

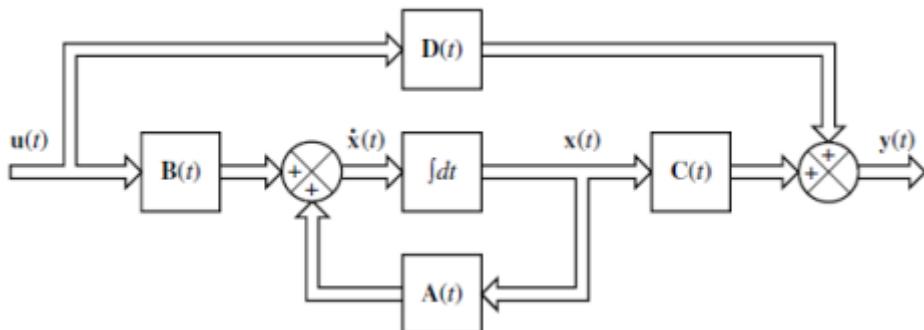
Se separan las entradas en perturbaciones y manipuladas por control.

manipuladas (por control) vs. perturbaciones o cargas

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) = A \cdot x(t) + B_c \cdot u_c(t) + B_d \cdot u_d(t); \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) = C \cdot x(t) + D_c \cdot u_c(t) + D_d \cdot u_d(t) \end{cases}$$

10

Diagrama de Bloques de Estado Matricial



Transferencia Entrada-Salida (Laplace) (Dominio Frecuencia)

Si se aplica la transformada de Laplace y considerando estado inicial Nulo, despejando de forma matricial, es posible obtener la función de transferencia.

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) \mid x_0 \equiv 0$$

Donde:

$$U(s)_{m \times 1}, Y(s)_{p \times 1}$$

$$G(s)_{p \times m}, \quad G(s) = C \cdot [s \cdot I - A]^{-1} \cdot B + D$$

La matriz de transferencia G es de pxm donde cada uno de los elementos contiene la función de transferencia entre cada una de las entradas y cada una de las salidas.

El polinomio característico de la matriz A va a ser siempre el mismo para todas las funciones de entrada salida. Cambian los ceros.

Se puede definir una matriz P, denominada matriz general del sistema que tendrá la siguiente forma.

$$P \sim \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Representación de Sistemas No Lineales

Al trabajar dentro de sistemas no Lineales, las relaciones entre las entradas y las salidas ya no son CL implican Productos de variables de estado entre sí o Funciones trascendentes (exponentiales, cuadráticas, trigonométricas, hiperbólicas), lo que dificulta el trabajo ya que no se puede definir como el producto de una matriz de coeficientes por el vector de estado, ya que van a quedar variables de estado dentro de las matrices. Como son funciones vectoriales se pasa de tener matrices A, B, C, D a campos vectoriales no lineales.

Para encontrar las derivadas se utilizan métodos numéricos de paso fijo o variable, que permiten el cálculo de las derivadas de las funciones no lineales

En los sistemas lineales el punto de equilibrio no cargado está en el origen del espacio de estados, en los no lineales aparecen más puntos de equilibrio.

Un punto de equilibrio es un punto donde se disipa toda la energía. No existe mas movimiento.

Anulando el primer miembro de la ecuación de estado podemos encontrar los puntos de equilibrio de un sistema no Lineal. De esta la ecuación diferencial no lineal se pasa a una ecuación algebraica no lineal, considerando que las entradas de excitación son constantes o nulas y resolviendo la ecuación algebraica, se pueden encontrar los distintos puntos de operación.

$$\dot{x}(t) \equiv 0 = f(x(t), u(t)) = f(x_e, u_e)$$

Un punto de operación es un punto de equilibrio donde no hay movimiento o el movimiento es uniforme.

Cuando no hay movimiento se dice que es un punto de equilibrio estático.

En análisis dinámicos puede llegar a interesar trabajar en puntos donde la derivada es constante por lo que se relaja la condición anterior hasta la nueva determinación.

Vamos entonces a utilizar un enfoque de linealización, el famoso enfoque de la LINEALIZACIÓN JACOBIANA
Linealización jacobiana

Se utiliza esta linealización para analizar todos los puntos cercanos a un punto de operación. El fin de esta linealización es descomponer todas las variables globales en dos partes:

- alta amplitud, baja frecuencia Z_0 . Esta variable define el punto de operación. [O el espacio de puntos de operación]
- baja amplitud, alta frecuencia $\Delta z(t)$. Esta componente define las desviaciones del sistema alrededor de los puntos de operación.

Realizando una Aproximación por serie de Taylor y considerando que las desviaciones sean relativamente pequeñas, se desprecian los términos de orden superior, logrando así una aproximación lineal. para toda variable $z(t)$, se asume:

$$z(t) \equiv Z_0 + \Delta z(t)$$

Para cada punto de operación, la proporcionalidad va a ser distinta, por lo tanto, se define a este modelo como LPV (Lineal de parámetros Variables)

Modelo dinámico Global No Lineal

Al realizar un análisis dinámico del modelo Global no lineal y considerando que las no linealidades están en la ecuación de la derivada del vector de estado, y la ecuación de salida es lineal, procedemos a descomponer a cada una de las variables en dos partes, como se planteó en el inciso anterior. z es una variable genérica. Ahora también consideramos que Z_0 es dependiente del tiempo por lo que obtenemos:

$$z(t) \equiv Z_0(t) + \Delta z(t)$$

Llevando este análisis a las ecuaciones de estado, incluyendo las entradas de manipulación y de perturbación en un mismo vector, llegamos a siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(x(t), u(t), t) \\ x(t_0) &= x_0 \\ y(t) &= C.x(t) \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dX_o(t)}{dt} + \frac{d\Delta x(t)}{dt} = f(X_o(t) + \Delta x(t), U_o(t) + \Delta u(t)) \\ X_o(0) + \Delta x(0) = x_0 \rightarrow X_o(0) \stackrel{\text{def}}{=} x_0; \Delta x(0) \stackrel{\text{def}}{=} 0 \\ Y_o(t) + \Delta y(t) = C.(X_o(t) + \Delta x(t)) \rightarrow Y_o(t) = C.X_o(t); \Delta y(t) = C.\Delta x(t) \end{cases}$$



Al aplicar la ecuación de aproximación al punto inicial, consideramos que el estado inicial es el punto de operación por lo que consideramos que no existen pequeñas variaciones alrededor de dicho punto.

Como se consideró que la ecuación de salida es lineal, se puede decir que hay una relación directa. o mejor dicho una descomposición directa

Como el campo vectorial es no lineal, se expande el campo vectorial en una serie de Taylor donde si los incrementos son pequeños, se puede aproximar la serie de Taylor al primer orden, quedando de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f(X_o(t) + \Delta x(t), U_o(t) + \Delta u(t)) &\approx f(X_o(t), U_o(t)) + \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_o (t). \Delta x(t) + \left[\frac{\partial f}{\partial u} \right]_o (t). \Delta u(t) = \text{Jocobiano} \\ \text{Campo vectorial} \\ &= f(X_o(t), U_o(t)) + \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]_o (t). \Delta x(t) + \left[\frac{\partial f}{\partial u_1} \dots \frac{\partial f}{\partial u_m} \right]_o (t). \Delta u(t) \end{aligned}$$

Se expresa el jacobiano como una matriz, representando al campo escalar dando como resultado la matriz A y la matriz B. Recordar que esto es una aproximación no una igualdad

Luego se hace una separación de modelos:

Espacio Global de Puntos de Operación

Representa el conjunto de todos los puntos de operación, denominado el espacio global de puntos de operación. El mismo sigue siendo no lineal pero es **estacionario o Cuasi-estacionario**. [Dependiendo del rango de operación que utilicemos]

$$\frac{dX_o(t)}{dt} = f(X_o(t), U_o(t)) \approx 0/\text{const}; X_o(0) \stackrel{\text{def}}{=} x_0; Y_o(t) = C.X_o(t)$$

Como en los puntos de operación las derivadas son nulas o constantes, el campo vectorial conforma una ecuación algebraica. Donde el conjunto de puntos que satisfacen esta ecuación nos da todo el espacio de puntos posibles de operación.

Modelo dinámico Local de Pequeñas Desviaciones

Representa las pequeñas desviaciones alrededor del punto de operación. $\Delta x(t)$ es el nuevo vector de variables de estado de pequeñas desviaciones alrededor de cada punto de operación. Las derivadas son derivadas parciales, hay un error de tipoeo.

La evaluación de las derivadas parciales nos determinan cada uno de los elementos de la matriz A

$$\frac{d\Delta x(t)}{dt} \approx \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_o (t) . \Delta x(t) + \left[\frac{\partial f}{\partial u} \right]_o (t) . \Delta u(t); \Delta x(0) \stackrel{\text{def}}{=} 0; \Delta y(t) = C. \Delta x(t)$$

Si se tiene un punto de equilibrio constante y se trabaja con un control regulatorio (se intenta mantener siempre el mismo punto de operación) ~~las derivadas parciales de la matriz A dependen de todo~~

Y se tiene que ~~si A es constante, van a dar coeficientes constantes por lo tanto~~ se tiene un modelo LTI de pequeñas desviaciones a lo largo del punto de operación.

Si se considera el espacio global de operación, para cada uno de los puntos de dicho espacio, los coeficientes de la matriz A dependen del punto de operación, por lo que se tendrá un modelo LPV (lineal de parámetros variables) siendo una generalización que engloba en un solo modelo un conjunto de modelos LTI.

3. Interconexión, Respuesta Dinámica y Estabilidad

[Volvemos a los modelos Lineales (LTI)]

Interconexión -> Estructuras compuestas

La interconexión de subsistemas permite conectar subsistemas más simples e interconectarlos entre sí, lo que implica la conexión de las salidas de un subsistema a las entradas de otro subsistema y viceversa, lo que permite acoplar los comportamientos.

Hay que tener en cuenta que en la ecuación de estado del sistema global hay que eliminar las variables intermedias se plantean dos subsistemas genéricos S1 y S2:

Sean 2 subsistemas:

$$S_1: \begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_1 \cdot x_1(t) + B_1 \cdot u_1(t); x_1(t_0) = x_{10} \\ y_1(t) = C_1 \cdot x_1(t) + D_1 \cdot u_1(t) \end{cases} \quad Y_1(s) = G_1(s) \cdot U_1(s)$$

$$S_2: \begin{cases} \dot{x}_2(t) = A_2 \cdot x_2(t) + B_2 \cdot u_2(t); x_2(t_0) = x_{20} \\ y_2(t) = C_2 \cdot x_2(t) + D_2 \cdot u_2(t) \end{cases} \quad Y_2(s) = G_2(s) \cdot U_2(s)$$

o

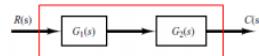
Interconexión en cascada o en serie

La cantidad de salidas del 1^{er} subsistema es la misma que la cantidad de entradas del 1^{er} subsistema. Las salidas del 1^{er} subsistema se conectan a las entradas del 2^{do} subsistema. Hay que tener en cuenta que la interconexión entre sistemas no debe influir sobre el primer sistema. Es necesario que la cantidad de variables de salida del 1^{er} subsistema sea la misma que la cantidad de entradas del segundo.

Relación estructural: $u_2(t) \equiv y_1(t)$; $u(t) = u_1(t)$; $y(t) = y_2(t)$

→ Restricción: $\dim(u_2) = \dim(y_1)$

Estado: $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$



El estado es la unión de las variables de estado de los dos sistemas. Operando de forma algebraica se puede llegar a la siguiente caracterización de la interconexión y su función de transferencia.

Operando:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_1 \cdot x_1(t) + B_1 \cdot u(t) \\ \dot{x}_2(t) = A_2 \cdot x_2(t) + B_2 \cdot (C_1 \cdot x_1(t) + D_1 \cdot u(t)) \\ y(t) = C_2 \cdot x_2(t) + D_2 \cdot (C_1 \cdot x_1(t) + D_1 \cdot u(t)) \end{cases}$$

$$S: \begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 \cdot C_1 & A_2 \end{bmatrix} \cdot x(t) + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \cdot D_1 \end{bmatrix} \cdot u(t); x(t_0) = x_0 \\ y(t) = \begin{bmatrix} D_2 \cdot C_1 & C_2 \end{bmatrix} \cdot x(t) + [D_2 \cdot D_1] \cdot u(t) \end{cases}$$

es decir donde tenemos una función de transferencia para el sistema 1 y una para el sistema 2

En el caso de un sistema con una entrada y una sola salida, el producto es comutativo, pero para casos donde se trabaja con subsistemas multivariados, el producto no es comutativo.

Interconexión en paralelo

La cantidad de entradas deben ser las mismas que las salidas y van conectadas en paralelo. La salida total es la suma de los vectores de salida. Las dimensiones de los dos sistemas deben ser iguales, y el estado es la unión de los estados de los dos subsistemas. En el dominio de la frecuencia las matrices se suman por lo que es comutativa la suma para sistemas multivariados.

Relación estructural: $y(t) \equiv y_1(t) + y_2(t)$; $u(t) \equiv u_1(t) \equiv u_2(t)$;

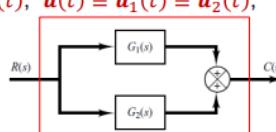
→ Restricción: $\dim(y_2) = \dim(y_1)$;
 $\dim(u_2) = \dim(u_1)$

Estado: $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$

Operando:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_1 \cdot x_1(t) + B_1 \cdot u(t) \\ \dot{x}_2(t) = A_2 \cdot x_2(t) + B_2 \cdot u(t) \\ y(t) = C_1 \cdot x_1(t) + D_1 \cdot u(t) + C_2 \cdot x_2(t) + D_2 \cdot u(t) \end{cases}$$

$$S: \begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \cdot x(t) + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \cdot u(t); x(t_0) = x_0 \\ y(t) = [C_1 \quad C_2] \cdot x(t) + [D_1 + D_2] \cdot u(t) \end{cases}$$



Transferencia: $Y(s) = G(s) \cdot U(s) = [G_1(s) + G_2(s)] \cdot U(s)$ | $x_0 \equiv 0$

Resumen Automática y Máquinas Eléctricas

Realimentación Constante de Salida

Es necesario tener una ley de control constante, sin dinámica, lo que implica que solo hay variables de estado en la planta (G_1) y la entrada a la planta es la diferencia entre la referencia y la salida de la ley de control.

Relación estructural: $\mathbf{u}_1(t) \equiv \mathbf{r}(t) - \mathbf{y}_2(t); \mathbf{y}(t) = \mathbf{u}_2(t) \equiv \mathbf{y}_1(t)$;

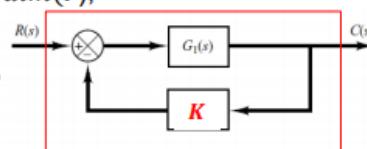
→ Restricción: $\dim(\mathbf{y}_2) = \dim(\mathbf{u}_1) = \dim(\mathbf{r})$;

$\dim(\mathbf{u}_2) = \dim(\mathbf{y}_1)$

Asumimos:

- a) Realim. Constante: $\mathbf{y}_2 = \mathbf{K}, \mathbf{y}_1$
- b) Transmisión directa nula: $\mathbf{D}_1 \equiv \mathbf{0}$

Estado: $\mathbf{x}(t) = [x_1(t)]$



La realimentación permite modificar el comportamiento dinámico del sistema, ya que la matriz A va a tener polos distintos a los de la planta original, los cuales van a depender de los coeficientes de la matriz K, por lo que modificando dichos coeficientes se puede calibrar a voluntad el sistema para obtener la salida deseada.

Operando:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1(t) = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{B}_1 \cdot (\mathbf{r}(t) - \mathbf{K} \cdot \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{x}_1(t)) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{x}_1(t) \end{cases}$$

$$S: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{A}_1 - \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{C}_1] \cdot \mathbf{x}(t) + [\mathbf{B}_1] \cdot \mathbf{r}(t); \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) = [\mathbf{C}_1] \cdot \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

$$\text{Transferencia: } Y(s) = G(s) \cdot R(s) = G_1(s) \cdot [I + \mathbf{K} \cdot G_1(s)]^{-1} \cdot R(s)$$

(demostrar!)

Realimentación de Estado

Requiere realimentar todo el vector de estado por lo tanto es necesario tener acceso a todo el vector de estados, tiene un comportamiento similar a la realimentación constante de salida por lo que manipulando los coeficientes de K se pueden acomodar los polos para obtener la salida deseada, y por lo tanto modificar la dinámica del sistema

Relación estructural: Realim. ESTADO: $\mathbf{u}(t) \equiv \mathbf{r}(t) - \mathbf{K} \cdot \mathbf{x}(t)$;

→ Restricción: $\dim(\mathbf{K} \cdot \mathbf{x}) = \dim(\mathbf{u}) = \dim(\mathbf{r})$;

Asumimos:

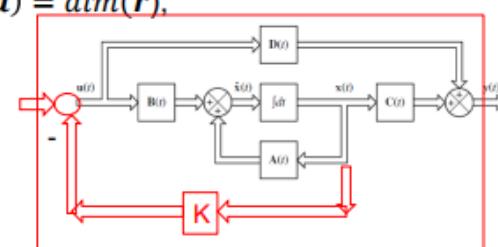
Realim. Constante: $-\mathbf{K} \cdot \mathbf{x}(t)$
(Ley de Control)

Estado: $\mathbf{x}(t) = [x_1(t)]$

Operando:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \cdot (\mathbf{r}(t) - \mathbf{K} \cdot \mathbf{x}(t)) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \cdot (\mathbf{r}(t) - \mathbf{K} \cdot \mathbf{x}(t)) \end{cases}$$

$$S: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{K}] \cdot \mathbf{x}(t) + [\mathbf{B}] \cdot \mathbf{r}(t); \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) = [\mathbf{C} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{K}] \cdot \mathbf{x}(t) + [\mathbf{D}] \cdot \mathbf{r}(t) \end{cases}$$



Solución de la Ecuación de Estado LTI

Se puede encarar por dos caminos:

- Resolver en el dominio del tiempo
- Transformada de Laplace
- Resolver la ED en forma numérica

Ecuación homogénea sin excitación

$$S_{LTI} \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} * \overline{\mathbf{x}(t)} + \mathbf{B} * \overline{\mathbf{u}(t)} \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} * \overline{\mathbf{x}(t)} + \mathbf{D} * \overline{\mathbf{u}(t)} \end{array} \right.$$

1. Solución Analítica: Análisis - Diseño Conceptual

Caso Escalar

Caso Vectorial

En ambos casos hay:

a) Ec. Homogénea

b) Ec. Forzada

En relación a los métodos están:

1) Desarrollo en serie de potencias en Dom. Tiempo

2) Transformada de Laplace en Dom.

Frecuencia

2. Solución Numérica: Simulación de Respuesta Dinámica

$$\dot{x}(t) = A * \bar{x}(t)$$

Proponiendo una solución a través de una serie de potencias [1 Método]

$$x(t) = b_0 + b_1 * t + b_2 * t^2 + \dots + b_k * t^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} b_k * t^k$$

Derivando la serie de potencias

$$\dot{x}(t) = b_1 + 2 * b_2 * t + 3 * b_3 * t^2 + \dots + k * b_k * t^{k-1} + \dots$$

Reemplazando la derivada en la ecuación de la Respuesta Natural

$$\dot{x}(t) = A * b_0 + A * b_1 * t + A * b_2 * t^2 + \dots + A * b_k * t^k + \dots$$

Igualando término a término, podemos obtener el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas lineales que dependen de los términos de la serie de potencias.

$$\bar{b}_1 = A * \bar{b}_0 \Rightarrow \bar{b}_1 = A * \bar{x}_0$$

$$\bar{b}_2 = \frac{1}{2} * A * \bar{b}_1 \Rightarrow \bar{b}_2 = \frac{1}{2!} * A^2 * \bar{x}_0$$

$$\bar{b}_3 = \frac{1}{3} * A * \bar{b}_2 \Rightarrow \bar{b}_3 = \frac{1}{3!} * A^3 * \bar{x}_0$$

$$\bar{b}_k = \frac{1}{k!} * A^k * \bar{x}_0$$

Igualando coeficiente a coeficiente

$$\bar{x}(t) = I * x_0 + A * t * x_0 + \frac{1}{2!} * A^2 * t^2 * x_0 + \dots + \frac{1}{k!} * A^k * t^k * \bar{x}_0$$

Sacando factor común x_0 obtenemos una expresión matricial, que tiene la misma forma que la expansión en serie de potencias que la función exponencial escalar.

$$\bar{x}(t) = \left[I + A * t + \frac{1}{2!} * A^2 * t^2 + \dots + \frac{1}{k!} * A^k * t^k \right] * \bar{x}_0 = e^{At} * \bar{x}_0$$

De esta manera se puede obtener la matriz de transición de estados [Phi]

$$x(t) = e^{At} * x(0) = \Phi(t) * x(0) \quad \text{[2 Método]}$$

Si en vez de realizar el desarrollo anterior en el dominio del tiempo, se aplica transformada de Laplace.

$$\dot{x}(t) = A * x(t) ; u(t) \equiv 0 ; x(0) = x_0$$

$$s * I * \bar{X}(s) - \bar{x}_0 = A * \bar{X}(s)$$

$$\bar{X}(s) = [s * I - A]^{-1} * \bar{x}_0$$

$$\bar{X}(s) = \mathcal{L}[e^{At}] * \bar{x}_0$$

Realizando la Anti transformada de Laplace se llega a la expresión de la solución homogénea.

$$x(t) = e^{At} * \bar{x}_0$$

Realizando un Análisis, se puede ver que la solución homogénea depende del estado inicial, y tiene un comportamiento exponencial, el cual depende de los autovalores de la matriz A, si los autovalores tienen parte real negativa, tendrá un comportamiento estable, y si alguno llega a ser positivo, alguno de los modos de operación será inestable y tendrá un crecimiento sostenido.

Respuesta forzada Este es el caso del punto 1 para el caso Vectorial y la parte b) Ec. Forzada

$$\dot{x}(t) = A * \bar{x}(t) + B * \bar{u}(t)$$

$$x(0) = x_0$$

Resumen Automática y Máquinas Eléctricas

Premultiplicando ambos lados por la exponencial

$$e^{-At} [\dot{x}(t) - A * \underline{x}(t)] = e^{-At} * B * u(t)$$

Se calcula la derivada del producto de funciones, y se saca como factor común a la exponencial.

$$\frac{d}{dt} [e^{-At} * \underline{x}(t)] = e^{-At} * \underline{x}(t) - A * e^{-At} * \underline{x}(t) = e^{-At} [\dot{x}(t) - A * \underline{x}(t)]$$

Reemplazando en la primer ecuación

$$\frac{d}{dt} [e^{-At} * \underline{x}(t)] = e^{-At} * B * u(t)$$

Integrando ambos miembros de 0 a t y se reemplaza t por τ como variable de integración

$$\int_0^t \frac{d}{dt} [e^{-A\tau} * \underline{x}(\tau)] * d\tau = \int_0^t e^{-A\tau} * B * u(\tau) * d\tau$$

$$e^{-A\tau} * \underline{x}(\tau)|_0^t = e^{-At} * \underline{x}(t) - \underline{x}_0 = \int_0^t e^{-A\tau} * B * u(\tau) * d\tau$$

$$\underline{x}(t) = e^{-At} * \underline{x}_0 + e^{-At} \int_0^t e^{-A\tau} * B * u(\tau) * d\tau$$

$$\underline{x}(t) = e^{-At} * \underline{x}_0 + \int_0^t e^{-A(t-\tau)} * B * u(\tau) * d\tau$$

Integral de Convolución

Respuesta Natural **Respuesta Forzada**

Estabilidad (Sistemas LTI):

La estabilidad depende de los autovalores de la matriz A

S_{LTI} estable si, para toda excitación $u(t)$ acotada en $t > t_0$ (respuesta Forzada) \rightarrow todos sus estados $x_i(t)$ toman valores acotados;
 si desaparece la excitación, $u(t) \equiv 0$ (respuesta Natural) \rightarrow el estado tiende al origen del espacio de estado $x=0$.

Lo que quiere decir este enunciado es que un sistema es estable si para el tiempo analizado ninguna variable de estado se dispara de forma no controlada y si desaparece la excitación el estado debe tender al origen.

Criterio de Estabilidad LTI (en Espacio de Estados):

- S_{LTI} estable \leftrightarrow Todos los autovalores de A tienen parte real NEGATIVA

Los ceros del sistema cambian el comportamiento dinámico pero no afectan la estabilidad

4. Realizaciones Canónicas, Controlabilidad y Observabilidad

Cambio de variables de estado

Se representa en el espacio de estado el modelo del sistema LTI de orden N.

$$S_{LTI}: \begin{cases} \dot{x}(t) = A.x(t) + B.u(t); \quad x(t_0) = x_0 \quad u(t)_{m \times 1}, \quad x(t)_{n \times 1}, \quad y(t)_{p \times 1} \\ y(t) = C.x(t) + D.u(t) \end{cases}, \quad A_{n \times n}, \quad B_{n \times m}, \quad C_{p \times n}, \quad D_{p \times m}$$

No olvidar que D es la matriz de transferencia directa

Resumen Automática y Máquinas Eléctricas

Cambio de Base en Espacio de Estado (Transformación Lineal)

Se plantea cambiar la base del sistema utilizando una matriz de cambio de base denominada P , la cual debe ser una matriz no singular, es decir que tiene inversa. Podemos definir a $\mathbf{z}(t)$ como el vector de estado en la nueva base.

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = P \cdot \mathbf{z}(t), \quad \exists P^{-1} \Leftrightarrow \mathbf{z}(t) = P^{-1} \cdot \mathbf{x}(t)}$$

Incluyendo al cambio de base en la definición anterior y premultiplicando por la inversa de la matriz P a la primer ecuación para dejar la derivada del nuevo vector de estado solo en el miembro izquierdo de la ecuación.

$$S_{LTIn}: \begin{cases} \dot{\mathbf{z}}(t) = [P^{-1} \cdot A \cdot P] \cdot \mathbf{z}(t) + [P^{-1} \cdot B] \cdot \mathbf{u}(t); \\ \mathbf{y}(t) = [C \cdot P] \cdot \mathbf{z}(t) + D \cdot \mathbf{u}(t) \end{cases} \quad P \cdot \mathbf{z}(t_0) = P \cdot \mathbf{z}_0$$

De esta manera se pueden encontrar los análogos de A , B , C , Z_0 para la nueva base.

$$S_{LTIn}: \begin{cases} \dot{\mathbf{z}}(t) = \tilde{A} \cdot \mathbf{z}(t) + \tilde{B} \cdot \mathbf{u}(t); \\ \mathbf{y}(t) = \tilde{C} \cdot \mathbf{z}(t) + D \cdot \mathbf{u}(t) \end{cases} \quad \begin{aligned} \tilde{A} &= [P^{-1} \cdot A \cdot P]; & \tilde{B} &= [P^{-1} \cdot B] \\ \tilde{C} &= [C \cdot P]; & z_0 &= P^{-1} \cdot x_0 \end{aligned}$$

Esto indica que para un mismo modelo donde las variables de entrada y de salida son las mismas, se pueden usar distintos sistemas de referencia para mostrar las trayectorias del estado a lo largo del tiempo, ya que el vector de estado es el mismo, pero se observa desde distintos puntos de referencia.

Invariancia de Matriz de Transferencia y de Autovalores ante Cambio de Base

Haremos uso de las siguientes propiedades para el desarrollo de la demostración.

$$(M \cdot N)^{-1} = N^{-1} \cdot M^{-1}; \quad \det(M \cdot N) = \det(M) \cdot \det(N)$$

Partiendo de las funciones de transferencia del sistema en las dos bases, y se opera matricialmente

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) \Rightarrow G(s) &= C \cdot [s \cdot I - A]^{-1} \cdot B + D; & (M \cdot N)^{-1} &= N^{-1} \cdot M^{-1}; \quad \det(M \cdot N) = \det(M) \cdot \det(N) \\ \mathbf{z}(t) \Rightarrow \tilde{G}(s) &= \tilde{C} \cdot [s \cdot I - \tilde{A}]^{-1} \cdot \tilde{B} + D = [C \cdot P] \cdot [s \cdot [P^{-1} \cdot P] - [P^{-1} \cdot A \cdot P]]^{-1} \cdot [P^{-1} \cdot B] + D \end{aligned}$$

Una vez realizadas las operaciones matriciales pertinentes, se puede concluir que las funciones de transferencia son iguales para las dos bases. Esto indica que la relación entre la entrada y salida no se modifica independientemente de la base que se utilice para representar las variables de estado interno.

$$\boxed{\tilde{G}(s) = G(s)}$$

De la misma manera podemos llegar a la conclusión que se tiene el mismo polinomio característico en las dos bases, esto indica que tanto los autovalores como los polos van a ser los mismos independientemente de la base que se utilice para representar las variables de estado interno.

$$\det(\lambda \cdot I - \tilde{A}) = \det(\lambda \cdot [P^{-1} \cdot P] - [P^{-1} \cdot A \cdot P]) = \det(\lambda \cdot I - A) = 0$$

Desde el punto de vista físico

Estas conclusiones nos permiten elegir la base con la que queremos trabajar, ya que necesitamos trabajar en una base que nos permita medir las variables de estado.

Formas o Realizaciones Canónicas:

En forma de ejemplo se va a utilizar sistema LTI de orden 3 SISO. Se puede utilizar de forma general para orden N.

En el modelo vemos una ecuación diferencial de 3er orden tanto en la salida como en la entrada, donde hay 3 polos y 3 ceros en el sistema.

$$\ddot{y}(t) + a_1 \cdot \dot{y}(t) + a_2 \cdot y(t) + a_3 \cdot \dot{y}(t) = b_0 \cdot \ddot{u}(t) + b_1 \cdot \dot{u}(t) + b_2 \cdot u(t) + b_3 \cdot \dot{u}(t)$$

La función de transferencia considerando condiciones iniciales nulas es:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 \cdot s^3 + b_1 \cdot s^2 + b_2 \cdot s + b_3}{s^3 + a_1 \cdot s^2 + a_2 \cdot s + a_3} = b_0 + \frac{(b_1 - a_1 \cdot b_0) \cdot s^2 + (b_2 - a_2 \cdot b_0) \cdot s + (b_3 - a_3 \cdot b_0)}{s^3 + a_1 \cdot s^2 + a_2 \cdot s + a_3}$$

Es una función de transferencia impropia porque hay la misma cantidad de ceros que polos. Para que sea propia tienen que haber menos ceros que polos. El coeficiente que hace a la función impropia es b_0 .

Haciendo el cociente entre el numerador y el denominador llegamos a la función de la derecha, la cual ya es propia.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} = \frac{b_0}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} + \frac{b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} = b_0 + \frac{b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}$$

De esta forma se puede escribir la siguiente expresión, donde el primer término, es un término que no tiene dinámica, por lo que nos da una transferencia Directa (matriz D). En el segundo termino se realizará un análisis para determinar las diferentes formas canónicas.

Nota:

Una función impropia implica una posterior función de transferencia directa. Por lo general no se presenta, pero si tenemos el mismo orden en la salida que en la entrada, entonces sí.

$$Y(s) = b_0 \cdot U(s) + \frac{b(s)}{a(s)} \cdot U(s)$$

Sobre este término es que se hacen los análisis de las 3 formas canónicas

Forma canónica controlable

Para iniciar se define una variable auxiliar ξ , la cual corresponderá a la siguiente expresión.

$$\text{estado controlable } \xi(s) \equiv \frac{1}{a(s)} \cdot U(s) \rightarrow Y(s)$$

Reemplazando a ξ en la expresión anterior

$$Y(s) = b_0 \cdot U(s) + b(s) \cdot \xi(s)$$

Pasando esta expresión al dominio del tiempo vemos que no quedan las derivadas en el segundo miembro, ya que están implícitas en $u(t)$.

Graficado en la parte inferior $\ddot{\xi}(t) + a_1 \cdot \dot{\xi}(t) + a_2 \cdot \xi(t) + a_3 \cdot \dot{\xi}(t) = u(t) \rightarrow A_c: \mathbf{M. Compañera (inferior)}$
 $y(t) = b_0 \cdot u(t) + (b_1 - a_1 \cdot b_0) \cdot \dot{\xi}(t) + (b_2 - a_2 \cdot b_0) \cdot \xi(t) + (b_3 - a_3 \cdot b_0) \cdot \dot{\xi}(t)$

Definiendo como vector de estado a $\xi(t)$ y sus dos primeras derivadas despejando la derivada tercera, se puede armar la ecuación de estado, donde teniendo derivadas solamente en el estado y no en la entrada se puede expresar como una ecuación diferencial de estado de primer orden. Con estas consideraciones las matrices quedan definidas de la siguiente forma:

$$\mathbf{x}_c(t) \equiv \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \dot{\xi}(t) \\ \ddot{\xi}(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = b_0; \\ \mathbf{C}_c = [(b_3 - a_3 \cdot b_0) \quad (b_2 - a_2 \cdot b_0) \quad (b_1 - a_1 \cdot b_0)]$$

La última fila de A_c son los polos
La fila de C_c son los ceros

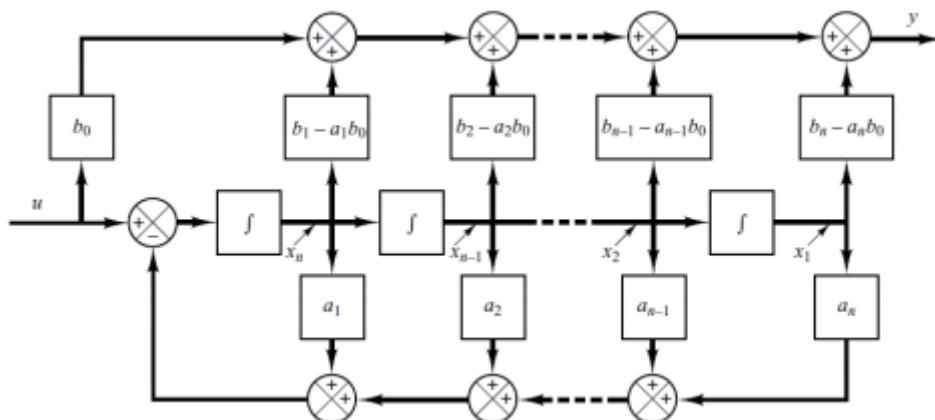
De esta forma obtenemos una realización causal, que nos permite calcular la salida a partir de un estado inicial de forma analógica o numérica del comportamiento del sistema.

Nota: Nosotros podemos hacer análisis en el espacio de estado pero para simularlas necesitamos encontrar esta expresión en el tiempo

Como características principales podemos destacar que A_c es una matriz compañera inferior, una matriz rala, con la diagonal superior a la principal todos 1, en la fila inferior tiene los componentes del polinomio característico, la matriz B tiene un 1 el último elemento y la matriz C tiene las componentes del numerador.

Podemos analizar el diagrama de bloques siguiente considerando que esta realizado para orden N. en donde tenemos una cadena de integradores en cascada.

Representación Interna - Modelo



Estos mecanismos se usan para hacer análisis y para las metodologías sistemáticas de polos como el método de asignación de polos. La ventaja de este método es que no hay derivadas en la entrada al despejar U(s).

Siempre en los sistemas conviene que no haya derivaciones porque se transmiten en forma de ruido el cual es totalmente indeseable. si se deriva una señal de baja amplitud y muy baja frecuencia entonces al aplicar la señal derivativa se amplifica el ruido, Por eso en los PID generalmente se pone antes un filtro pasa bajo para eliminar las altas frecuencias.

Forma canónica diagonal (o Modal)

Partiendo del mismo ejemplo que se detalló al inicio. Esta forma nos permite analizar los modos naturales de vibración del sistema.

$$\ddot{y}(t) + a_1 \cdot \dot{y}(t) + a_2 \cdot y(t) + a_3 \cdot y(t) = b_0 \cdot \ddot{u}(t) + b_1 \cdot \dot{u}(t) + b_2 \cdot u(t) + b_3 \cdot u(t)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} = b_0 + \frac{(b_1 - a_1 \cdot b_0) s^2 + (b_2 - a_2 \cdot b_0) s + (b_3 - a_3 \cdot b_0)}{(s - p_1) \cdot (s - p_2) \cdot (s - p_3)}$$

Para la obtención de la forma canónica diagonal se va a descomponer el segundo término de la función de transferencia en fracciones parciales. Se debe cumplir que los autovalores deben ser reales no repetidos, para la diagonalización total. [Ya que cuando son complejos, es laborioso el análisis. Es por eso que consideramos solo este caso]

$$\Rightarrow Y(s) = b_0 \cdot U(s) + \left[\frac{r_1}{(s - p_1)} + \frac{r_2}{(s - p_2)} + \frac{r_3}{(s - p_3)} \right] \cdot U(s) \rightarrow \text{Desacoplamiento MODAL}$$

|
p1, p2 y p3 son reales y distintos

Una vez encontrados los tres residuos de la descomposición en fracciones parciales, se plantea una ecuación de estado para cada una de las 3 fracciones parciales. Por lo tanto para cada uno de los polos existe un coeficiente que es parte de la matriz C y otro que es parte de la matriz B.

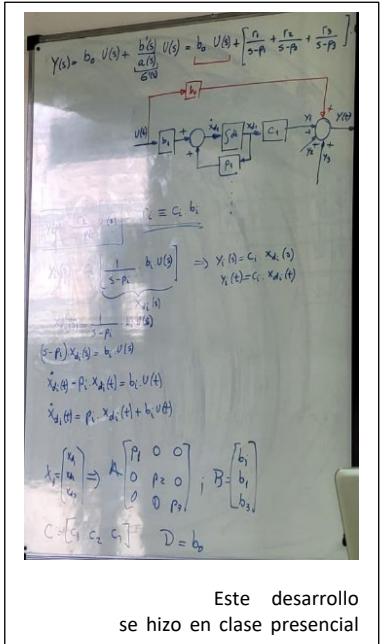
$$r_i \equiv c_{di} \cdot b_{di}$$

A partir de esto podemos plantear la ecuación de estado habiendo desacoplado los modos. [Dependiendo cada uno de sí mismos]

$$\dot{x}_{di}(t) = p_i \cdot x_{di}(t) + b_{di} \cdot u(t); y(t) = \sum_1^3 c_{di} \cdot x_{di}(t) + b_0 \cdot u(t)$$

A partir de la ecuación de estado podemos armar las matrices correspondientes, donde se puede ver que se logra el objetivo de que la matriz A, sea una matriz diagonal con los polos del sistema en la diagonal principal.

$$x_d(t) \equiv \begin{bmatrix} x_{d1}(t) \\ x_{d2}(t) \\ x_{d3}(t) \end{bmatrix} \Rightarrow A_d = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{bmatrix}; B_d = \begin{bmatrix} b_{d1} \\ b_{d2} \\ b_{d3} \end{bmatrix}; C_d = [c_{d1} \ c_{d2} \ c_{d3}]; D = b_0;$$



Este desarrollo se hizo en clase presencial

Se pueden plantear formas equivalentes donde la relación de entrada salida no se altera, pero si se cambia la escala.

- 1) $c_{di} \equiv 1 \Rightarrow r_i \equiv b_{di} \Rightarrow C_d = [1 \ 1 \ 1]; B_d = [r_1 \ r_2 \ r_3]^T$ [Recordar que la T hace referencia a que son vectores columnas]
- 2) $b_{di} \equiv 1 \Rightarrow r_i \equiv c_{di} \Rightarrow C_d = [r_1 \ r_2 \ r_3]; B_d = [1 \ 1 \ 1]^T$

Cómo ingeniero yo tengo que elegir que nos conviene hacer si volcar todo el peso del residuo en Cd o en Bd

Forma canónica Jordan (generalización)

Partiendo del mismo ejemplo que se detalló al inicio. Esta forma sirve para cuando los polos están repetidos. [Como por ejemplo que p1 y p2 son iguales]

$$\ddot{y}(t) + a_1 \cdot \dot{y}(t) + a_2 \cdot y(t) = b_0 \cdot \ddot{u}(t) + b_1 \cdot \dot{u}(t) + b_2 \cdot u(t)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 \cdot s^3 + b_1 \cdot s^2 + b_2 \cdot s + b_3}{s^3 + a_1 \cdot s^2 + a_2 \cdot s + a_3} = b_0 + \frac{(b_1 - a_1 \cdot b_0) \cdot s^2 + (b_2 - a_2 \cdot b_0) \cdot s + (b_3 - a_3 \cdot b_0)}{(s - p_1)^2 \cdot (s - p_3)}$$

Realizando el mismo análisis que para la forma canónica diagonal pero resolviendo el análisis para el polo p1 repetido,

$$\Rightarrow Y(s) = b_0 \cdot U(s) + \left[\frac{r_1}{(s - p_1)^2} + \frac{r_2}{(s - p_1)} + \frac{r_3}{(s - p_3)} \right] \cdot U(s) \rightarrow \text{Desacoplamiento MODAL (Bloques de Jordan)}$$

Tanto para el polo 3 como el polo 2(segundo término), el análisis es el mismo que para la diagonal, pero para la ecuación de estado del primer polo, vemos que tenemos dos sistemas en cascada, lo que genera que aparezca un 1 en (1,2) de A y un 0 en el primer elemento de B, por lo tanto hace que no dependa de la entrada

[En vez de sumarle la entrada, se le suma la salida. Por eso están en cascada]

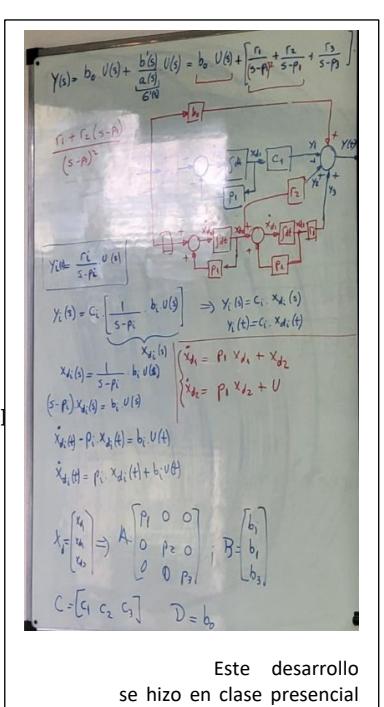
$$x_{d1}(t), \dot{x}_{d1}(t) = p_1 \cdot x_{d1}(t) + x_{d2}(t) \leftarrow \text{"Cascada": } x_{d2}(t) \rightarrow x_{d1}(t)$$

$$x_{d2}(t), \dot{x}_{d2}(t) = p_1 \cdot x_{d2}(t) + u(t) \quad [\text{Volcamos todo el peso del residuo sobre la salida}]$$

Las matrices quedan conformadas de la siguiente forma:

$$x_d(t) \equiv \begin{bmatrix} x_{d1}(t) \\ x_{d2}(t) \\ x_{d3}(t) \end{bmatrix} \Rightarrow A_d = \begin{bmatrix} p_1 & 1 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{bmatrix}; B_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; C_d = [r_1 \ r_2 \ r_3]; D = b_0;$$

Es decir que la salida de un sistema de 1er orden es la entrada a otro sistema de 1er orden



Este desarrollo se hizo en clase presencial

Forma canónica Diagonal Conjugada

Partiendo del mismo ejemplo que se detalló al inicio. Esta forma sirve para cuando los polos son complejos conjugados. [Recordar que como los coeficientes son reales, si los polos son complejos, estos siempre serán complejos conjugados]

$$p_1 = p_2^* \rightarrow s^2 + 2\zeta\omega.s + \omega^2$$

$$\ddot{y}(t) + a_1 \cdot \dot{y}(t) + a_2 \cdot \ddot{y}(t) + a_3 \cdot y(t) = b_0 \cdot \ddot{u}(t) + b_1 \cdot \dot{u}(t) + b_2 \cdot \ddot{u}(t) + b_3 \cdot u(t)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} = b_0 + \frac{(b_1 - a_1 b_0)s^2 + (b_2 - a_2 b_0)s + (b_3 - a_3 b_0)}{(s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2) \cdot (s - p_3)}$$

Realizando la descomposición en fracciones parciales, los bloques con raíces complejas conjugadas se realizan con la forma canónica controlable.

$$\Rightarrow Y(s) = b_0 \cdot U(s) + \left[\frac{r_1 s + r_2}{(s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2)} + \frac{r_3}{(s - p_3)} \right] \cdot U(s) \rightarrow \text{Desacoplamiento MODAL}$$

Conviene Bloque CONJUGADO parcial 2x2 en f. canónica «Controlable»

|| Es importante entender que es una diagonalización parcial

De esta manera quedarían las matrices, evitando el trabajo con números complejos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_d(t) &\equiv \begin{bmatrix} x_\theta(t) \\ \dot{x}_\theta(t) \\ x_{d3}(t) \end{bmatrix} \Rightarrow & \mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\omega^2 & -2\zeta\omega & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \\ & \mathbf{C}_d = [r_2 \quad r_1 \quad r_3]; \quad D = b_0; \end{aligned}$$

Forma canónica observable

Partiendo del mismo ejemplo que se detalló al inicio. Permite diseñar observadores, donde queda una matriz compañera derecha o izquierda.

$$\ddot{y}(t) + a_1 \cdot \dot{y}(t) + a_2 \cdot \ddot{y}(t) + a_3 \cdot y(t) = b_0 \cdot \ddot{u}(t) + b_1 \cdot \dot{u}(t) + b_2 \cdot \ddot{u}(t) + b_3 \cdot u(t)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} = b_0 + \frac{(b_1 - a_1 b_0)s^2 + (b_2 - a_2 b_0)s + (b_3 - a_3 b_0)}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}$$

$$\Rightarrow Y(s) = b_0 \cdot U(s) + \frac{b(s)}{a(s)} \cdot U(s) \rightarrow \text{Facilidad p/ Diseño OBSERVADOR:}$$

Se crea una variable auxiliar $\xi(s)$ de acuerdo con las características de la ecuación planteada abajo.

$$\text{Var.Aux.: «} \text{estado observable } \xi(s) \equiv b(s) \cdot U(s) \rightarrow Y(s) = b_0 \cdot U(s) + \frac{1}{a(s)} \cdot \xi(s) \text{»}$$

$$\dot{x}_{o1}(t) = (b_3 - a_3 \cdot b_0) \cdot u(t) - a_3 \cdot \bar{y}(t) = \ddot{y}(t) + a_1 \cdot \ddot{y}(t) + a_2 \cdot \ddot{y}(t) - (b_1 - a_1 \cdot b_0) \cdot \ddot{u}(t) - (b_2 - a_2 \cdot b_0) \cdot \ddot{u}(t) \rightarrow \text{Integrar: } x_{o1}(t) \rightarrow \text{reordenar / despejar} \rightarrow \dot{x}_{o2}(t) = \dots$$

[Es decir que es el camino opuesto a la forma canónica controlable]

Realizando el siguiente planteo considerando a $y(s)$ como una cascada de integradores

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) + a_1 \cdot \dot{y}(t) + a_2 \cdot \ddot{y}(t) + a_3 \cdot y(t) &= b_0 \ddot{u}(t) + b_1 \cdot \dot{u}(t) + b_2 \cdot \ddot{u}(t) + b_3 \cdot u(t) \\ &[s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3] Y(s) = [b_0 s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3] U(s) \quad \begin{array}{l} b_1' = b_1 - a_1 \cdot b_0 \\ b_2' = b_2 - a_2 \cdot b_0 \\ b_3' = b_3 - a_3 \cdot b_0 \end{array} \\ G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} = b_0 + \frac{b_1' s^2 + b_2' s + b_3'}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} = b_0 + \frac{b_1' s^2 + b_2' s + b_3'}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} \\ Y(s) &= G(s) \cdot U(s) = \left[b_0 + \frac{b_1' s^2 + b_2' s + b_3'}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} \right] U(s) = b_0 \cdot U(s) + \frac{b_1' s^2 + b_2' s + b_3'}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} U(s) \\ &= (s - p_1)/(s - p_2)/(s - p_3) \quad \begin{array}{l} 1/s = \text{Integral Simple} \\ 1/s^2 = \text{Integral Doble} \\ 1/s^3 = \text{Integral Triple} \end{array} \\ &(s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3) Y(s) - (b_0 s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3) U(s) = 0 \\ &s^3 [Y(s) - b_0 \cdot U(s)] + s^2 [a_1 y(s) - b_1 U(s)] + s [a_2 y(s) - b_2 U(s)] + [a_3 y(s) - b_3 U(s)] = 0 \\ &y(s) = b_0 \cdot U(s) - \frac{1}{s} [a_1 y(s) - b_1 U(s)] = \frac{1}{s^2} [a_1 y(s) - b_1 U(s)] = \frac{1}{s^3} [a_1 y(s) - b_1 U(s)] \\ &y(s) = b_0 \cdot U(s) + \frac{1}{s} \left[b_1 U(s) - a_1 y(s) \right] + \frac{1}{s^2} \left[b_2 U(s) - a_2 y(s) \right] + \frac{1}{s^3} \left[b_3 U(s) - a_3 y(s) \right] \quad \begin{array}{l} x_{i_1} \\ x_{i_2} \\ x_{i_3} \end{array} \end{aligned}$$

Antitransformamos

$$\begin{aligned} y(t) &= b_0 \cdot U(t) + x_{i_1}(t) \\ \dot{x}_{i_1}(t) &= b_1 U(t) - a_1 y(t) + x_{i_2}(t) = (b_1 - a_1 \cdot b_0) U(t) - a_1 x_{i_2}(t) + x_{i_2}(t) \\ \dot{x}_{i_2}(t) &= b_2 U(t) - a_2 y(t) + x_{i_3}(t) = (b_2 - a_2 \cdot b_0) U(t) - a_2 x_{i_3}(t) + x_{i_3}(t) \\ \dot{x}_{i_3}(t) &= b_3 U(t) - a_3 y(t) = (b_3 - a_3 \cdot b_0) U(t) - a_3 x_{i_3}(t) \end{aligned}$$

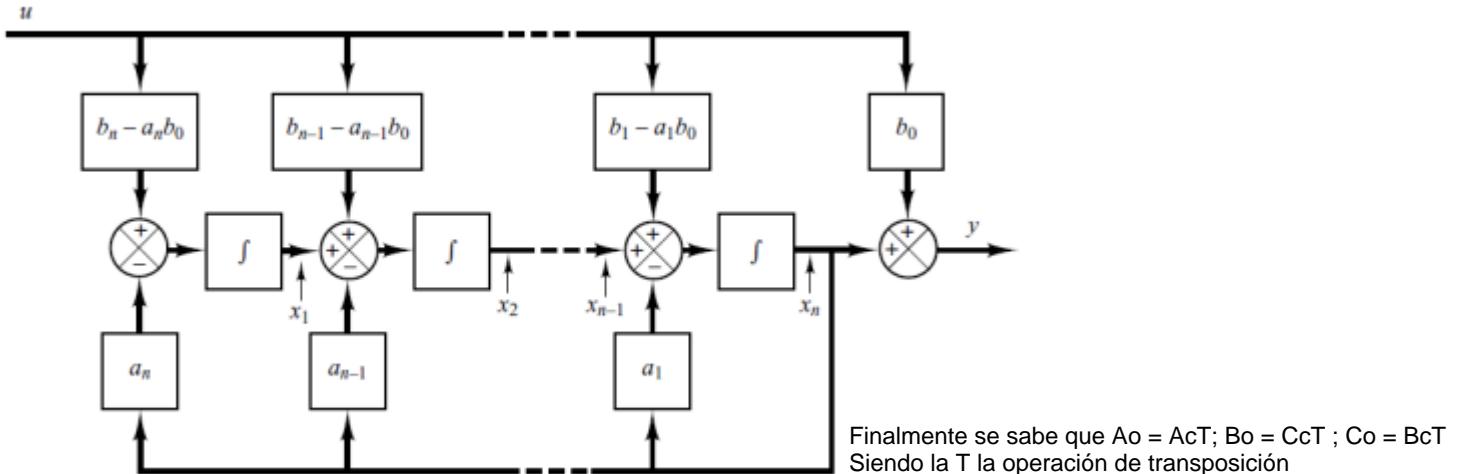
Reemplazamos con la igualdad de $y(t) = b_0 \cdot U(t) + X_3(t)$

Matrices de estado

Obtenemos las matrices, teniendo en cuenta que el vector de estado puede quedar ordenado de cualquier forma, ya que no dependen las variables entre sí.

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{x}_o(t) &\equiv \begin{bmatrix} x_{o1}(t) \\ x_{o2}(t) \\ x_{o3}(t) \equiv \tilde{y}(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix}; \mathbf{B}_o = \begin{bmatrix} (b_3 - a_3 \cdot b_0) \\ (b_2 - a_2 \cdot b_0) \\ (b_1 - a_1 \cdot b_0) \end{bmatrix}; \\ \mathbf{C}_o &= [0 \ 0 \ 1]; \quad \mathbf{D} = b_0 \end{aligned}}$$

Diagrama de bloques



Controlabilidad

Definición de Controlabilidad Completa de Estado

$SLTIn$ es CONTROLABLE en t_0 si se puede transferir desde cualquier estado inicial $x(t_0)$ a cualquier otro estado, mediante un vector de control $u(t)$ no restringido, en un intervalo de tiempo finito.

Permite elegir las variables de manipulación de tal forma que permitan que el sistema sea totalmente controlable, es decir donde hay que influir en el sistema para llevar sus estados al comportamiento deseado.

Si un sistema es controlable, siempre existe una ley de control que permite ubicar todos los polos de lazo cerrado del sistema a voluntad.

Criterio de Controlabilidad Completa de Estado en el Espacio de Estado (Kalman) [Criterio más general]

$SLTIn$ CONTROLABLE

\Leftrightarrow matrices $B \ A \ B \dots A_{n-1} \ B$ Linealmente Independientes

\Leftrightarrow Rango de $C = [B \ A \ B \dots A_{n-1} \ B] = n$ (Matriz de Controlabilidad) [matriz cuadrada]

Si se cumple lo anterior entonces existe alguna Ley de Control que permite ubicar TODOS los polos de lazo cerrado del sistema a VOLUNTAD

Criterio de controlabilidad en la salida

$SLTIn$ CONTROLABLE en la salida

\Leftrightarrow vectores $C \ B \ C \ A \ B \dots C \ A_{n-1} \ B \ D$ Linealmente Independientes

\Leftrightarrow Rango de $C = [C \ B \ C \ A \ B \dots C \ A_{n-1} \ B \ D] = m$ (Matriz de Controlabilidad de Salida)

Observabilidad

Si es observable, se puede diseñar un observador, que a partir de pocas mediciones, se puede reconstruir todo el estado interno del sistema. El sistema NO Forzado debe cumplir $u(t)=0$.

[No es para actuación, es para medición]

Criterio de Observabilidad en el Espacio de Estado (Kalman) [Caso más general]

SLTIn Completamente OBSERVABLE

\Leftrightarrow vectores $C \ C. A \dots C. A^{n-1}$ Linealmente Independientes

$$\Leftrightarrow \text{Rango de } \mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ C. A \\ \vdots \\ C. A^{n-1} \end{bmatrix} = n \text{ (Matriz de Observabilidad)}$$

Si se cumple, entonces existe un observador que permite reconstruir TODO el estado a partir de la salida

A partir de lo planteado podemos llegar a las siguientes conclusiones:

- Si se cumple lo anterior existe observador que permite reconstruir TODO el Estado a partir de salida
- Si el sistema es no es controlable significa que faltan acciones de control o se eligieron mal los actuadores
- Si no es observable es porque no se están ubicando los sensores en el lugar adecuado.

Sis. Observable (Condición Sist. No Forzado: $u(t) = 0$)

SLTIn es OBSERVABLE en t_0 si, con el sistema en el estado inicial (0), es posible DETERMINAR este estado a partir de la observación de la salida durante un intervalo de tiempo finito.

3. Unidad 3: Control en Espacio de Estado de Sistemas Dinámicos Eléctricos y Mecánicos

1. Objetivos de Control y Especificaciones

Características que debe tener un controlador.

Sistema de CONTROL a Lazo Cerrado (realimentado)

Estabilidad

Seguridad y Disponibilidad para operación.

[Es lo primero que tenemos que asegurar como diseñadores]

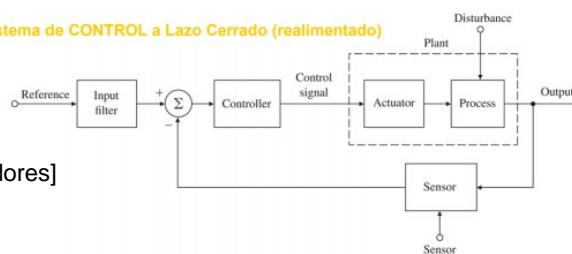
Robustez

Frente a Incertidumbre de Modelo o

Perturbaciones externas.

Desempeño (Performance) → Optimización (índices o especificaciones)

- Rechazo a Perturbaciones o Cargas
- Seguimiento de Consignas o Comandos de Referencia (la respuesta a un cambio de consigna debe ser rápido)
- Esfuerzos o acciones de Control "razonables" (→ "costo" a pagar por desempeño)



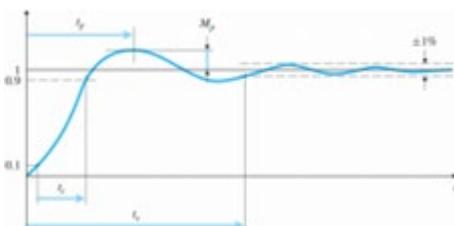
El actuador para nosotros va a estar en el límite entre la planta y el sistema externo

Especificaciones

En el dominio del tiempo: Respuesta a Escalón de Referencia
(requerimientos transitorios)

[Estas pueden ser en el dominio del Tiempo o en el Espacio de Estado]

Las especificaciones son la cuantificación de los objetivos planteados en el inciso anterior.



Rta. Dominante 2º orden sin ceros

En este ejemplo podemos ver la respuesta de un sistema a una excitación con forma de escalón. El control es de dos GDL, el control realimentado permite corregir los errores según las incertidumbres, y el control serie sirve para acelerar el proceso, una vez conocido el sistema. Tiene dos polos dominantes que influyen significativamente en la respuesta.

- Tiene un raise time, que es el tiempo desde el 10% al 90%. [Tiempo máximo de crecimiento]
- El sobre pico es el porcentaje por encima del valor requerido.
- A mayor sobre amortiguamiento menor va a ser el sobre pico.

Existe una banda de aceptación (tiempo de establecimiento Setting time) que según el criterio para cada sistema se acomoda.

En el dominio de la frecuencia o del Espacio de Estado tenemos las siguientes relaciones u observaciones

Rta. Dominante 2º orden sin ceros
(aproximación)

rise time

$$\text{Análisis: } t_r \approx \frac{1.8}{\omega_n}$$

Diseño = síntesis:

$$\omega_n \geq \frac{1.8}{t_r}$$

A mayor frecuencia crece más rápido, donde si el amortiguamiento es muy pequeño puede llegar el sobre amortiguamiento a 200%

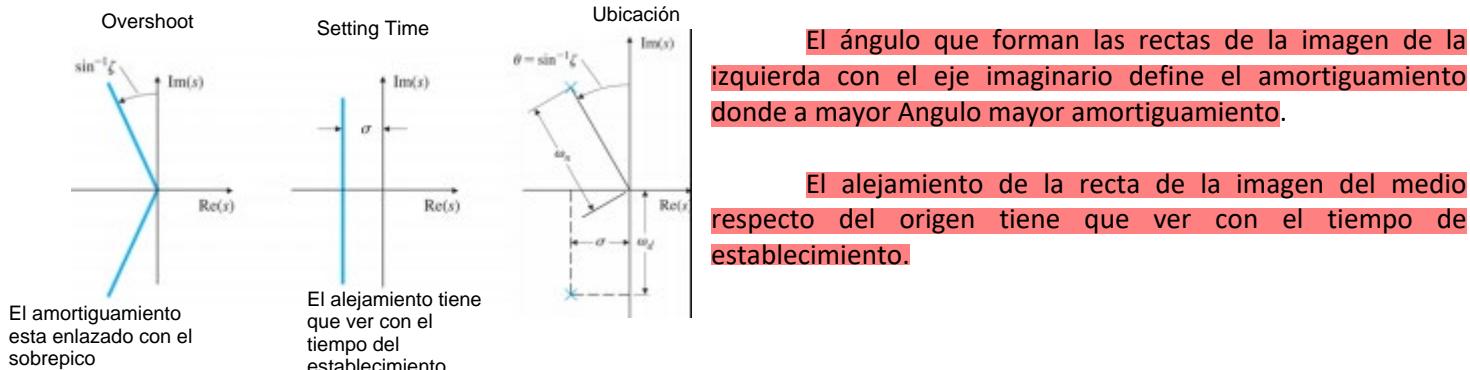
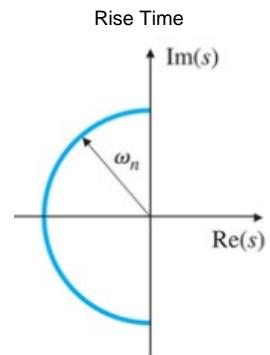
rise time + overshoot + settling time = Ubicación

$$t_s \approx \frac{4.6}{\sigma}$$

$$\sigma \geq \frac{4.6}{t_s}$$

$$\zeta \geq \zeta(M_p)$$

El radio es inversamente proporcional al tiempo de crecimiento y la reacción es más rápida. Además el radio tiene una relación directa con la frecuencia natural de los polos



2. Realimentación de Estado

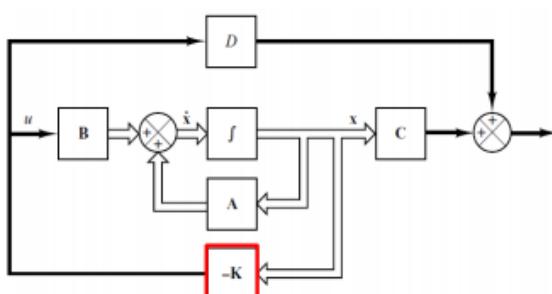
Realimentación de estado SISO

Se plantea una realimentación completa de estado donde asumimos que tenemos acceso a todo el vector de estado y se busca ubicar los polos en un lugar conveniente mediante el **método de asignación de polos**.

Para ello se plantea un sistema LTI de orden N en donde están separadas las entradas de control y perturbación.

$$S_{LTIn}: \begin{cases} \dot{x}(t) = A.x(t) + B.u(t) + B_d.d(t); & x(t_0) = x_0 \\ y(t) = C.x(t) + D.u(t) \end{cases}, \quad A_{n \times n}, B_{n \times 1}, C_{1 \times n}, D_{1 \times 1}$$

El diagrama de bloques del sistema es el siguiente, donde se asume que todas las variables de estado están siendo medidas mediante sensores.



Podemos ver que en la realimentación existe un bloque marcado en rojo. Esa realimentación se llama **Ley de realimentación completa de estado**, y tiene la siguiente estructura:

Ley de Control: Realim. ESTADO

$$u(t) \equiv -K.x(t); \quad r(t) \equiv 0$$

$$K_{1 \times n}$$

Se remplaza la ley anterior en la ecuación de estado.

Operando:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot (-K \cdot x(t)) + B_d \cdot d(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot (-K \cdot x(t)) \end{cases}$$

Operando algebraicamente, podemos determinar que la matriz equivalente de lazo cerrado del sistema realimentado, va a ser distinta a la matriz de lazo abierto A, la cual va a tener autovalores distintos, debido a que se está realizando una realimentación, **y por lo tanto se modifica el comportamiento dinámico del sistema**. Donde si el sistema es totalmente controlable tendremos N polos.

$$S: \begin{cases} \dot{x}(t) = [A - B \cdot K] \cdot x(t) + B_d \cdot d(t); \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) = [C - D \cdot K] \cdot x(t) \end{cases}$$

En este caso, estamos frente a una realimentación por eso las matrices son distintas. NO es lo mismo que el caso de cambio de base

Método de asignación de polos (Pole Placement)

Permite una asignación o ubicación arbitraria de TODOS los "n" POLOS de Lazo Cerrado. El método que se utilizará será el de Sustitución directa el cual permite Determinar matriz de ganancias de realimentación de estado K. [El método de sustitución directa es más intuitivo]

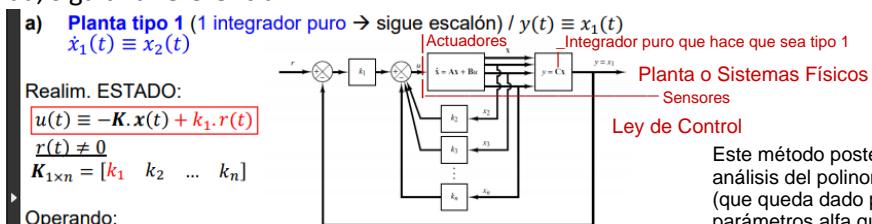
Como condición necesaria y suficiente, se aclara que la planta con realimentación de estado debe ser **totalmente controlable y el esfuerzo de control asociado debe ser moderado**.

Si no lo es necesitamos hacer las transformación necesarias para hacer eso posible.

Diseño de servosistemas tipo 1 SISO

Planta tipo 1 [Error de régimen estacionario] [Se utiliza siempre que yo desee realizar control desde la POSICIÓN]

Una planta es de tipo 1 cuando tiene un integrador en la salida. Lo que se hace es obtener una referencia, y multiplicarla por la misma ganancia por la cual se multiplicaron las realimentaciones, por lo que permite que la salida, siga una referencia.



Este método posteriormente nos lleva a una análisis del polinomio característico del sistema (que queda dado por una expresión con parámetros alfa que son dependientes de las ganancias y de los parámetros de la planta. Siendo este el polinomio que podemos controlar o ajustar. Por el otro lado, se puede establecer el denominado "Polinomio Característico deseado" que resulta de productos de (s - polos) (que queda dado por una expresión con parámetros beta que son dependientes de los polos deseados). Despues mediante operaciones de comparación / álgebra (igualando los alfa con los betas) procedemos a obtener los valores de las ganancias que permitirán que nuestro sistema tenga los polos deseados. [Minuto 44:28 Clase 3 Parte 2/2]

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot (-K \cdot x(t) + k_1 \cdot r(t)) + B_d \cdot d(t); \\ y(t) = C \cdot x(t) = x_1(t) \end{cases}$$

PD: No está presente en el esquema la ganancia k_1 junto con las otras (o arriba de k_2) porque lo que se realizó es un factor común. Ya que multiplica tanto a la salida $y(t) = x(t)$ y a la referencia $r(t)$

Nota: El polinomio deseado suele tener la forma de $s^2 + 2.zita.wn.s + wn^2$. Lo cual nos lleva interpretaciones físicas en este tipo de sistemas.

Planta tipo 0 [Se utiliza siempre que yo desee realizar control desde la VELOCIDAD]

Si la planta no tiene un integrador en la salida, para poder hacer que la planta siga una referencia es necesario agregar un control integral, es decir un integrador en la entrada, por lo que en vez de sumar la ganancia por la referencia, se suma la ganancia a un **nuevo estado**, que es la salida del integrador que vemos en el diagrama de bloques, y su derivada va a ser la diferencia entre el error y la variable de salida. **Por lo tanto si la entrada es de orden N, la salida es de N+1.**

En realidad es que "Si la planta era de orden N, entonces el sistema cerrado nos va a quedar de orden N+1". Siendo esto parecido al PID

b) Planta tipo 0 (no tiene integrador \rightarrow control integral) / $y(t) \equiv x_1(t)$

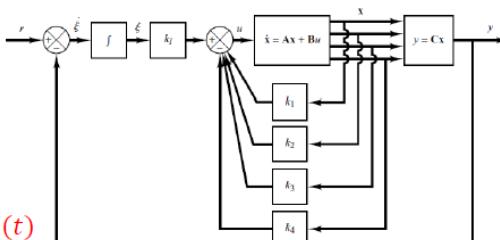
Retroalim. ESTADO:

$$\begin{cases} u(t) \equiv -K \cdot x(t) + k_I \cdot \xi(t) \\ \dot{\xi}(t) = r(t) - y(t) \end{cases}$$

$$r(t) \neq 0$$

$$K_{1 \times n} = [k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_n]$$

Se agrega **nuevo estado** $\xi(t)$



Reemplazando en la ecuación de estado vemos que la ecuación de estado del sistema realimentado queda de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot (-K \cdot x(t) + k_I \cdot \xi(t)) + B_d \cdot d(t) \\ \dot{\xi}(t) = -C \cdot x(t) + r(t) = -x_1(t) + r(t) \end{cases}$$

$$S: \begin{cases} \dot{x}(t) = [A - B \cdot K] \cdot x(t) + B \cdot k_I \cdot \xi(t) + B_d \cdot d(t); \quad x(t_0) = x_0 \\ \dot{\xi}(t) = -x_1(t) + r(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) = x_1(t) \end{cases}; \quad \xi(t_0) = \xi_0$$

15

3. Estimación y observadores

Observadores de estado (SISO)

Modelo de la planta

El modelo de la planta a controlar es el siguiente:

$$S_{LTI}: \begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) + B_d \cdot d(t); \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases}$$

Definición de observador de estado

Un observador es un modelo de la planta que pertenece al controlador y nos permite calcular una salida aproximada. al hacer la diferencia entre la salida del modelo y la del observador de estado obtenemos el error de salida del sistema.

Es importante recordar que no es un sistema físico es solo un modelo

Asumiendo que las matrices A y B son exactas, como C es una matriz rala en donde es difícil obtener errores y no hay perturbaciones, se utiliza una matriz Ke para compensar que no podemos obtener a lazo abierto el estado inicial del sistema. [Y por ende no tendríamos posibilidades de determinarlo a lazo abierto y por eso surge Ke]

Modelo del observador de estado

Con estas consideraciones podemos plantear el modelo del observador:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= A \cdot \tilde{x}(t) + B \cdot u(t) + K_e \cdot (y(t) - \tilde{y}(t)); \quad \tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0 \equiv 0 \\ \tilde{y}(t) &= C \cdot \tilde{x}(t) \end{aligned}$$

[Nota: No estamos incorporando por ahora las perturbaciones]
 [Asumimos esta igualdad a 0 xq no lo conocemos]
 [Lo que está en azul es el término de ajuste]

El estado inicial, como no es un estado conocido al principio y no se puede obtener mediante un sistema de lazo abierto, se lo iguala a cero ya que no tiene sentido que tome otro valor, y luego se busca que converja el comportamiento del observador con el de la planta.

Manipulando la ecuación de estado del observador, y teniendo en cuenta que $y(t) = C \cdot x(t)$ y $\tilde{y}(t) = C \cdot \tilde{x}(t)$, realizando las operaciones correspondientes obtenemos el **modelo de observador Asintótico**. Donde la dinámica va a estar dada por la matriz $[A - K_e \cdot C]$.

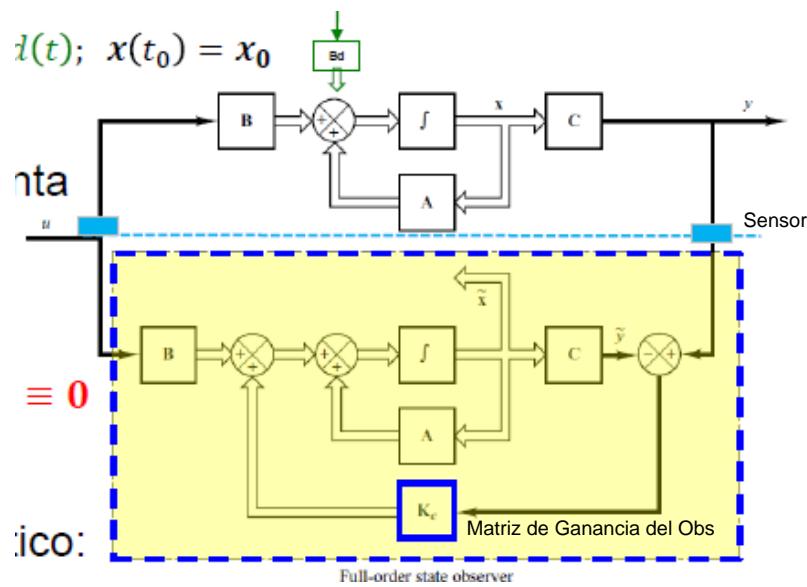
$$\dot{\tilde{x}}(t) = [A - K_e \cdot C] \cdot \tilde{x}(t) + B \cdot u(t) + K_e \cdot y(t); \quad \tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0 \equiv 0$$

Si el sistema original, es totalmente observable, se puede encontrar una matriz de ganancias del observador K_e que permita ubicar los polos del observador en cualquier parte del plano de Laplace, donde si son polos complejos deben ser conjugados. Si se eligen los polos de tal manera que el observador se comporte mucho más rápido que la planta (polos negativos lejos del origen), se puede converger rápidamente al estado de la planta, a pesar que se parte de un estado inicial del observador cero. [Obvio que habrá un error al principio pero convergirá rápido]

[conjugados porque nosotros estamos usando siempre parámetros reales]

Diagrama de bloques

El diagrama de bloques de la planta con el observador se puede apreciar en la siguiente figura:



Se debe tener en cuenta que la parte encerrada por línea punteada corresponde al observador, y la parte no encerrada corresponde a la planta.

Error de observación

Se puede definir al error de observación como:

$$e(t) \equiv x(t) - \tilde{x}(t), e(t_0) = x_0 \text{ porque } x_0 \text{ moñito} = 0$$

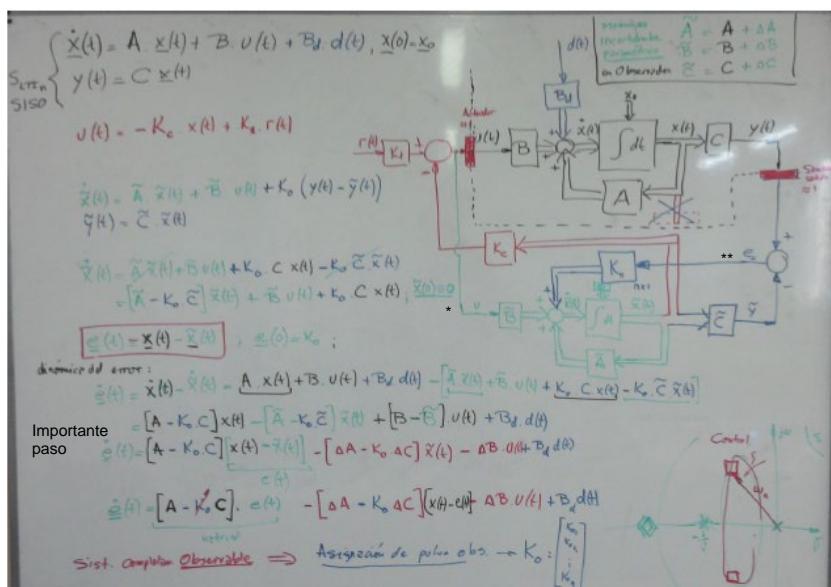
Para obtener la dinámica del error es necesario derivar la ecuación anterior y reemplazar convenientemente quedando de la siguiente forma:

$$\dot{e}(t) = [A - K_e \cdot C] \cdot e(t) + B_d \cdot d(t); e(t_0) = x_0$$

Esta debe ser estable y rápida

Si no se tuviera la entrada de perturbación, se tiene un sistema autónomo en donde debido a las características del sistema, tiene un decaimiento exponencial debido al comportamiento de los polos del sistema y va a converger a cero. Por lo que el estado observado va a converger al estado real. Si se considera la perturbación hay un error permanente debido a la perturbación, que requiere otros mecanismos

Demostración



Se considera que las matrices A B y C tienen una incertidumbre, lo que significa que las matrices no son las mismas para el observador y para la planta.

**** Otra observación muy importante es que los polos del observador puedan y se recomienda que se coloquen más alejados de los polos del controlador, de forma tal que el observador rápidamente converja hacia el valor del vector de estado y ya pueda tomarse ese valor para el controlador.

***** Recordar que el controlador NO agrega estados. En cambio el observador SI agrega estados, agrega N estados. De forma tal que el sistema completo ahora tenga 2N estados. El controlador de por sí me permitía correr a los 2 polos a donde yo desease, ahora con el observador tengo 2 polos nuevos que también tengo que colocarlos alejados del origen para que se cumpla lo del punto ****. Es así que ahora tendrá 4 polos siendo entonces que se tienen 2N estados en total.

* Se toma la línea verde y no antes porque necesitamos que el observador forme parte del controlador, no de la planta.
Si lo tomáramos luego del actuador tendríamos que colocar sensores y es muy complicado

** El error de salida no es lo mismo que el error de estimación, el error de salida es la diferencia entre la salida real y la estimada, Y el error de estimación es la diferencia del vector de estado real y el estimado, por ende tiene más información

*** El término de $B_d \cdot d(t)$ como no tiene ninguna compensación, influye de forma completa en el observador.

Resumen Automática y Máquinas Eléctricas

Realimentación de estado estimado

El modelo de la planta y las ecuaciones del observador asintótico son las mismas que para el observador de estado, lo que se plantea en este inciso es una combinación del observador con una ley de control suponiendo que la planta tiene un integrador en la salida $y(t) = x_1(t)$. [Planta Tipo 1]

Ley de Realimentación de Estado que combina el Observador por la Ley de Control

$$u(t) = -K \cdot \tilde{x}(t) + k_1 \cdot r(t) = -K \cdot (x(t) - e(t)) + k_1 \cdot r(t)$$

Acordarse que son vectores el x y \tilde{x} de $N \times 1$

Realizando las operaciones correspondientes, la ecuación de estado queda dada de la siguiente forma, donde podemos ver que en el segundo término de la primer ecuación esta multiplicado por K , esta diferencia surge debido a que en vez de utilizar "n" sensores, se está utilizando un observador de estados. Se debe buscar que K , influya lo menos posible.

Como el observador agrega "n" estados, aparece la segunda ecuación en el sistema completo, asumiendo que no existe incertidumbre en las matrices.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot (-K \cdot (x(t) - e(t)) + k_1 \cdot r(t)) + B_d \cdot d(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) = x_1(t) \end{cases}$$

Este término es el costo por no querer usar n sensores

$$S: \begin{cases} \dot{x}(t) = [A - B \cdot K] \cdot x(t) + B \cdot K \cdot e(t) + B \cdot k_1 \cdot r(t) + B_d \cdot d(t); \\ \dot{e}(t) = [A - K_e \cdot C] \cdot e(t) + B_d \cdot d(t); \\ x(t_0) = x_0; \quad e(t_0) \equiv x_0 \\ y(t) = r(t) \end{cases}$$

Esto se muestra para evidenciar lo que sucede en nuestro sistema si implementamos este tipo de mecanismos de control

26

Expresión matricial del sistema completo

Haciendo manipulaciones matriciales se puede llegar a estas dos matrices, que son totalmente equivalentes y no influyen en los autovalores del sistema.

+ referencia

a) Estado real Planta
+
ERROR Estimador

En todo este modelo ya esta incluido el control y la referencia (entrada)

Matriz del Sistema de Lazo Cerrado formada por 4 submatrices

b) Estado real Planta
+
ESTADO Estimado

Otro aspecto importante que menciona en el video (Desde el 2:00:00) durante el ejemplo es cómo compensar las desviaciones dadas por las perturbaciones. Estas se resuelven agregando una acción integral en el observador, pero eso conlleva a que el observador ahora sea de $N+1$ grados del polinomio característico, por lo cual en vez de ubicar N nuevos polos ahora también deberíamos agregar 1 polo extra y calcular los nuevos valores de K (que en el video serían 3 ya que el observador ahora tiene 3 GDL) pero eso nos permite por medio del observador rechazar perturbaciones constantes

27

← Compensador "clásico" equivalente:
Obs + Ley Control + referencia

Elegimos otro espacio de vectorial, donde pasamos a de uno de rN a uno de $r2N$. Por eso es que las matrices se aumentan.

Ejemplo importante en el video de la Clase 4 - Parte 1/3. Es importante el análisis que se realiza desde el minuto 1:54:50 hasta el 1:59:00 en donde se analiza de donde conviene tomar la realimentación en el caso del estimador si antes o después de la corrección del error con K_{11} .

En el video (2:15:00) dice que si tenemos un sensor de buena calidad siempre es mejor tomar para el controlador la variable medida que la estimada, pero si el sensor tiene ruido, entonces si se toma la estimada porque al pasar por los procesos de integración en el observador, este ruido se suaviza. Pero son cosas que hay que balancear

4. Diseño. Implementación Discreta: Controlador Digital

Sistemas Discretos en tiempo continuo Discreto (SDTD)

(Ya que es una variable que evoluciona de forma continua)

En estos sistemas se busca discretizar la variable del tiempo, en donde se toman distintas muestras considerando un tiempo de muestreo donde se utiliza la transformada z en vez de la transformada de Laplace.

Para un sistema con las siguientes características:

$$S_{LTI} \begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t); \quad x_0 = x(t_0) \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases}, \text{ donde: } \begin{matrix} u(t)_{m \times 1}, x(t)_{n \times 1}, y(t)_{p \times 1} \\ A_{n \times n}, B_{n \times m}, C_{p \times n}, D_{p \times m} \end{matrix}$$

INTRO:

Dentro de los sistemas discretos cuyos estados son continuos y por lo general activados por el tiempo (Leyes físicas, Fuerzas de la Naturaleza, etc), tenemos el caso en que los modelos pueden ser expresados en "Tiempo Continuo" (SDTC) o en "Tiempo Discreto" (SDTD).

En el caso de los primeros se basa en el principio de almacenamiento e intercambio de energía con el entorno (Ejemplo: Circuito Eléctrico RLC) y en el caso de los vectores de Estado $x(t)$, Entrada $u(t)$ y Salida $y(t)$, se puede observar que se toman valores en conjuntos continuos (finitos o infinitos - Reales) que evolucionan en un tiempo continuo t (Real)

Este tipo de sistemas es el que ya todos conocemos y tiene subclases como ser los: "LTI", "LTV", "LPV" y como caso general el "NL suave", etc.

(Ahora si viene lo Sistemas Discretos en tiempo Discreto (SDTD))

Resumen Automática y Máquinas Eléctricas

El sistema equivalente pero con parámetros discretos es el siguiente:

$$S_{LT} \left\{ \begin{array}{l} x((k+1).T) = [\Phi \equiv e^{A.T}] . x(k.T) + [\Gamma \equiv \int_0^T e^{A.\eta} . d\eta . B] . u(k.T); \quad x_0 = x(0) \\ y(k.T) = C . x(k.T) + D . u(k.T) \end{array} \right.$$

Donde T es el intervalo de tiempo discreto y se debe tener en cuenta que para cada intervalo de muestreo se asume que las entradas son constantes.

Como lo aplicaremos nosotros

Para ello utilizaremos una adaptación, donde se realiza todo el diseño del controlador en tiempo continuo, y una vez que se tiene la ley de control y el observador, se discretiza los componentes específicos de cada uno de los bloques correspondientes. Sirve para cualquier estructura de control.

Este método se llama "Método de Emulación Discreta". A continuación emplearemos este método sobre un controlador PID como EJEMPLO:

Controlador PID

El modelo de un controlador PID en el tiempo continuo es el siguiente:

$$u(t) = K_p . e(t) + K_i . \int_{-\infty}^t e(\tau) . d\tau + K_d . \frac{de(t)}{dt} = K_p \left[e(t) + \frac{1}{Ti} \cdot \int_{-\infty}^t e(\tau) . d\tau + Td \cdot \frac{de(t)}{dt} \right]$$

Para expresar la ecuación anterior de forma discreta consideramos que no hay errores de cuantización, es decir los microprocesadores pueden manipular datos reales de punto flotante.

Acción proporcional

Como la acción proporcional no tiene integradores o derivadores no varía.

Acción Integral

Para analizar la acción integral, se utiliza el método de los rectángulos utilizando el punto anterior (método explícito) o el punto actual (método implícito), pudiendo realizar una mejora con el método de los trapecios, que requeriría calcular el punto intermedio. De más esta decir que este método es recursivo y se calcula para cada uno de los intervalos de tiempo.

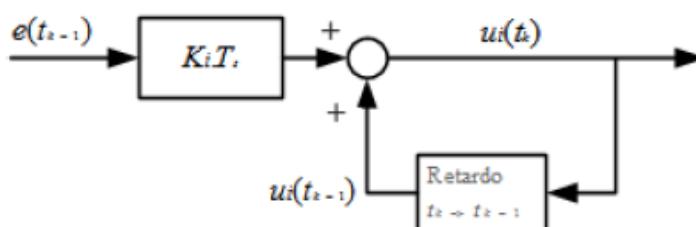
$$\begin{aligned} u_i(t_k) &= K_i I(t_k) = K_i \left[\int_0^{t_k} e(\tau) . d\tau + I_0 \right] = K_i \left[\int_{t_{k-1}}^{t_k} e(\tau) . d\tau + \int_0^{t_{k-1}} e(\tau) . d\tau + I_0 \right] = \\ &= K_i \cdot \int_{t_{k-1}}^{t_k} e(\tau) . d\tau + K_i \cdot \underbrace{\left[\int_0^{t_{k-1}} e(\tau) . d\tau + I_0 \right]}_{\substack{\text{Condiciones iniciales} \\ \text{El famoso método de los trapecios}}} \approx [K_i T_s . e(t_{k-1}) + K_i I(t_{k-1})] \end{aligned}$$

Partiendo del desarrollo anterior, la acción integral quedaría:

$$u_i(t_k) \approx u_i(t_{k-1}) + K_i T_s . e(t_{k-1})$$

Diagrama de bloques

En vez de tener un integrador, se utiliza un retardo al realimentar.



Acción derivativa [Cociente incremental]

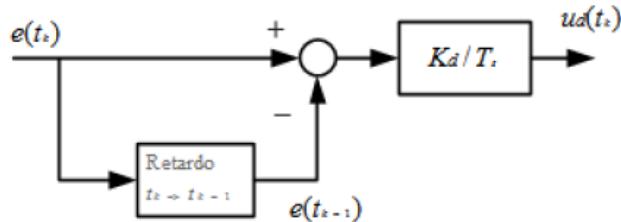
Se utilizan las siguientes expresiones:

$$u_d(t_k) = K_d . D(t_k) = K_d \cdot \left[\frac{de(t_k)}{dt} \right] \approx K_d \cdot \left[\frac{\Delta e(t_k)}{\Delta t} \right] = K_d \cdot \left[\frac{e(t_k) - e(t_{k-1})}{T_s} \right]$$

Donde la expresión final queda de la siguiente forma

$$u_d(t_k) \approx \frac{K_d}{T_s} [e(t_k) - e(t_{k-1})]$$

Diagrama de Bloques



Nota final:

La condición que tiene que cumplirse para poder implementar el método de Emulación en Tiempo Discreto de Control diseñado en tiempo Continuo es que el tiempo de muestreo ($T_s = t_k - t_{k-1}$) tiene que ser lo suficientemente rápido (pequeño) en relación a la variación de las variables del proceso.
 Un criterio teórico que se utiliza es el Teorema del Muestreo ($f_s > 2 * \text{Ancho de Banda del Controlador}$)
 Un criterio práctico es que f_s tiene que ser aproximadamente a 10 veces el Ancho de Banda del Controlador

4. Unidad 4: Control de Accionamientos de Corriente continua

1. Máquina de Corriente Continua de Imanes permanentes o excitación separada

Hojas de datos y especificaciones

Vamos a analizar la hoja de datos de este motor, el cual tiene acoplado un Tacogenerador en la parte posterior.

Parámetros del motor

Continuos Stall Torque

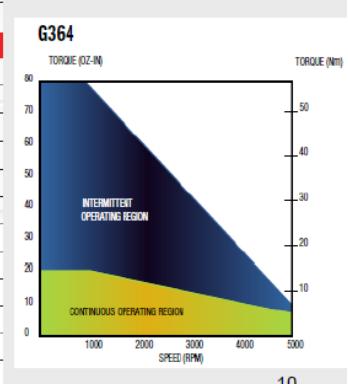
se refiere al torque a baja velocidad, donde el motor podría estar funcionando durante mucho tiempo sin que pase absolutamente nada.

Peak torque

Es el torque pico, nos permite acelerar y frenar la maquina eléctrica pero no podemos mantener ese torque durante mucho tiempo porque se quema el motor.

G360 Series Performance Specifications

Motor Ratings	362	364
Continuous Stall Torque (Ncm)	8.5	14.1
Continuous Stall Torque (oz-in)	12	20
Peak Torque (Ncm)	31.8	56.5
Peak Torque (oz-in)	45	80
Maximum Terminal Voltage (V)	30	30
Maximum Operating Speed (rpm)	5000	5000
Mechanical Data		
Rotor Inertia (kg cm^2)	0.021	0.049
Rotor Inertia (oz-in sec^2)	0.0003	0.0007
Damping Constant (Ncm/krpm)	0.141	0.141
Damping Constant (oz-in/krpm)	0.2	0.2
Thermal Resistance (C/watt)	7.8	7.5
Maximum Armature Temperature ($^\circ\text{C}$)	155	155
Maximum Friction Torque (Ncm)	1.1	1.1
Maximum Friction Torque (oz-in)	1.5	1.6
Maximum Radial Load (25mm from bearing) (Kg)	2.3	2.3
Maximum Radial Load (25mm from bearing) (lbs)	5	5
Weight (Kg)	0.3	0.5
Weight (lbs)	0.7	1.1



Parámetros Mecánicos

Rotor inertia

Momento de inercia del rotor. Para los cálculos se deben considerar el momento de inercia del rotor y el de la carga.

Damping Constant

Constante de amortiguamiento.

Thermal resistance

Resistencia térmica de los devanados del estator.

G360 Series Performance Specifications

Electrical Data	A	A
Kt Torque Constant +10% (Ncm/amp)	4.73	5.65
Kt Torque Constant +10% (oz-in/amp)	6.7	8.0
Ke Voltage Constant +10% (V/Krpm)	4.9	5.9
Terminal Resistance (ohms)	3.5	3.2
Maximum Continuous Current (A)	1.8	1.8
Maximum Peak Current (A)	7	10
Armature Inductance (mH)	1.1	1.3
Tachometer Specifications - (optional)		
Ke Voltage Constant +10% (V/Krpm)	3	
Terminal Resistance (ohms)	42	
Ripple Peak-to-Peak at 1000 rpm (%)	5	
Increase Motor Inertia by: (kg cm^2)	0.007	
Increase Motor Inertia by: (oz-in sec^2)	0.0001	

Maximum Armature Temperature

Máxima temperatura de los conductores del bobinado de la armadura. Si se llega a superar, se quema la aislación de los conductores y por lo tanto no sirven más los bobinados.

Maximum Friction Torque

Esta referido al coeficiente de fricción.

Maximum Radial Load

Carga máxima radial que soporta.

Weight

Peso del motor.

Resumen Automática y Máquinas Eléctricas

Parámetros Eléctricos

KT Torque Constant

Constante de Torque.

Ke Voltage Constant

Constante de Tensión Inducida..

Terminal Resistance

Resistencia del bobinado de la armadura.

Maximum continuos Current

Corriente máxima en régimen continuo

Maximum Peak Current

Corriente pico máxima.

Armature Inductance

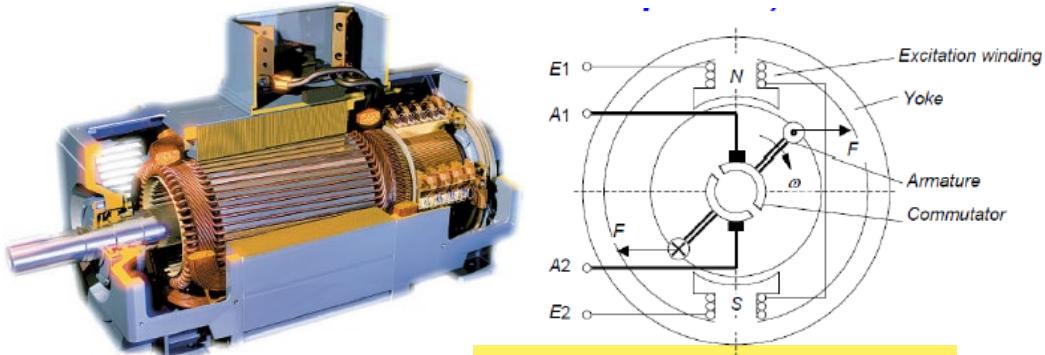
Inductancia de la armadura

Máquina de CC con escobillas

Principio de Operación

Esta máquina es una máquina de corriente continua con escobillas, en la que según el grafico de la derecha tiene dos pares de polos y tenemos acceso a los bornes de armadura y a los bornes de campo, lo que nos permite manipular tanto la tensión de armadura como la de campo.

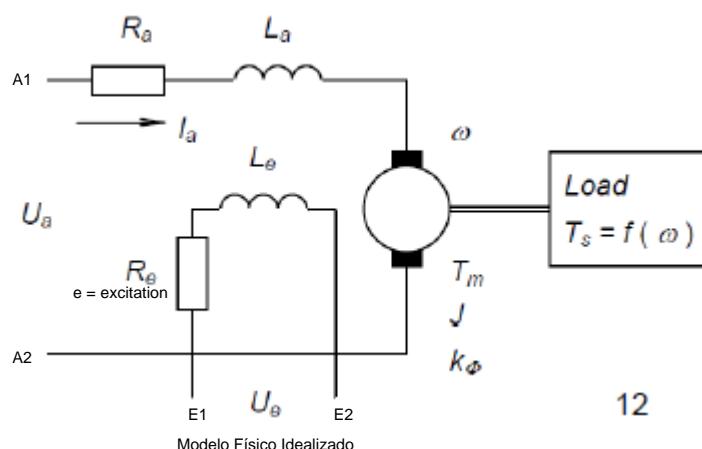
Es decir, que tenemos acceso a 4 bornes



Para hacer el análisis de esta máquina consideramos parámetros concentrados para representar los efectos que se producen en el interior de la misma, como la resistencia de los devanados o la inductancia.

Obteniendo así un modelo físico idealizado (Que luego se representa más abajo)

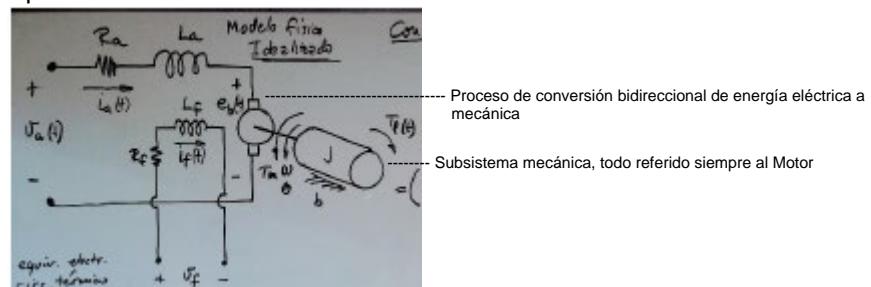
- U_a es la tensión de armadura, U_a va a ser la variable manipulada.
- U_e es la tensión de Campo.
- El bobinado de campo está representado por dos parámetros concentrados equivalentes, R_e y L_e , que representan la resistencia y la inductancia en el bobinado de campo.
- El bobinado de armadura está representado por R_a y L_a que representan la resistencia y la inductancia en el bobinado de armadura | Nota importante: Siempre las pérdidas de calor dadas por la resistencia son las generadas por el efecto Joule



12

Modelo matemático equivalente

A partir de los diagramas planteados en el inciso anterior comenzamos a plantear el modelo matemático de la maquina eléctrica correspondiente.



Para seguir con la demostración, es necesario hacer uso de la **convención idealizada**, para poder expresar correctamente los parámetros de la tensión inducida y del torque motor.

$$e_a(t) = K_e \cdot i_f(t) \cdot \omega(t) \quad \text{Tensión inducida = Proporcional al flujo (que a su vez es proporcional a la corriente } i_f \text{) y a la velocidad (w)}$$

Las K son constantes constructivas

$$T_m(t) = K_t \cdot i_f(t) \cdot i_a(t)$$

K_e y **K_t** son parámetros constantes que deben ser iguales (en magnitud ya que en unidades son distintos), por lo que demostraremos porque es así. **Como no tenemos perdidas en otros lugares** que no sean los parámetros concentrados de resistencia e inductancia tanto para la armadura como para el campo, el torque de carga y las perdidas por fricción en el motor, **la potencia que entrega la maquina eléctrica p_e(t)** debe ser igual que la potencia recibida **p_m(t)** en el motor. [La potencia eléctrica transferida, tiene que ser igual a la potencia mecánica transferida]

$$p_e(t) = i_a(t) \cdot e_a(t) = K_e \cdot i_f(t) \cdot \omega(t) \cdot i_a(t)$$

$$p_m(t) = T_m(t) \cdot \omega(t) = K_t \cdot i_f(t) \cdot \omega(t) \cdot i_a(t)$$

Igualando las ecuaciones

$$K_e \cdot i_f(t) \cdot \omega(t) \cdot i_a(t) = K_t \cdot i_f(t) \cdot \omega(t) \cdot i_a(t)$$

La única posibilidad que queda para cumplir con esta ecuación es

$$K_e = K_t$$

Volviendo al diagrama anterior, podemos plantear la primera ecuación, utilizando la **Ley de mallas de Kirchoff para la armadura**, considerando **e_a(t)** como la tensión inducida, la cual debido a la polaridad, se opone a la tensión inducida

$$V_a(t) = R_a \cdot i_a(t) + L_a \cdot \frac{di_a(t)}{dt} + e_a(t) = R_a \cdot i_a(t) + L_a \cdot \frac{di_a(t)}{dt} + K_e \cdot i_f(t) \cdot \omega(t)$$

El signo depende del sentido de giro (Prestar atención)

Aplicando la **ley de mallas de Kirchoff en el bobinado de campo** se puede llegar a la siguiente ecuación:

$$V_f(t) = R_f \cdot i_f(t) + L_f \cdot \frac{di_f(t)}{dt}$$

Como el campo magnético es mucho más importante a nivel de flujo que la armadura, la influencia de inducción sobre el campo puede considerarse despreciable.

Aplicando la 2^{da} ley de newton para sistemas rotacionales podemos encontrar la ecuación mecánica de este sistema podemos considerar el torque motor **T_m(t)** en sentido positivo al igual que la velocidad **ω(t)**, y el torque de carga **T_l(t)** en sentido opuesto.

Además el momento de inercia **J**, representa el momento de inercia de toda la cadena cinemática acoplada al eje del rotor, mas el momento de inercia del rotor.

$$J \cdot \frac{d\omega(t)}{dt} = T_m(t) - b \cdot \omega(t) - T_l(t) = K_t \cdot i_f(t) \cdot i_a(t) - b \cdot \omega(t) - T_l(t)$$

[Torque de Fricción]

Luego tenemos otra ecuación que es una identidad la cual va a ser:

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \omega(t)$$

Resumen Automática y Máquinas Eléctricas

De esta forma podemos plantear el sistema completo, teniendo a $T_l(t)$ como variable de perturbación y a $V_a(t)$ y $V_f(t)$ como variables manipuladas.

$$\left\{ \begin{array}{l} V_a(t) = R_a \cdot i_a(t) + L_a \cdot \frac{di_a(t)}{dt} + e_a(t) = R_a \cdot i_a(t) + L_a \cdot \frac{di_a(t)}{dt} + K_e \cdot i_f(t) \cdot \omega(t) \\ V_f(t) = R_f \cdot i_f(t) + L_f \cdot \frac{di_f(t)}{dt} \\ J \cdot \frac{d\omega(t)}{dt} = T_m(t) - b \cdot \omega(t) - T_l(t) = K_t \cdot i_f(t) \cdot i_a(t) - b \cdot \omega(t) - T_l(t) \\ \frac{d\theta(t)}{dt} = \omega(t) \end{array} \right.$$

Las variables de estado deben ser fácilmente medibles y deben tener sentido físico, además cada una de ellas está relacionada directamente con alguno de los elementos que almacenan energía, por lo que se eligen las siguientes

$$x(t) = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \\ i_a(t) \\ i_f(t) \end{bmatrix} \quad u(t) = \begin{bmatrix} V_a(t) \\ V_f(t) \end{bmatrix}$$

Despejando el sistema completo y dejando apartadas las derivadas del lado izquierdo de las ecuaciones podemos ver que hay productos de variables de estado (marcados color amarillo), los cuales hacen que este sistema no pueda evaluarse como un sistema lineal.

$$\left\{ \begin{array}{l} L_a \cdot \frac{di_a(t)}{dt} = V_a(t) - R_a \cdot i_a(t) - K_e \cdot i_f(t) \cdot \omega(t) \\ L_f \cdot \frac{di_f(t)}{dt} = V_f(t) - R_f \cdot i_f(t) \\ J \cdot \frac{d\omega(t)}{dt} = K_t \cdot i_f(t) \cdot i_a(t) - b \cdot \omega(t) - T_l(t) \\ \frac{d\theta(t)}{dt} = \omega(t) \end{array} \right.$$

Realizando una linealización jacobiana, podemos analizar el sistema como un sistema LPV, de esta manera se anulan las derivadas y se convierten las ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas.

$$[Ec. 1] T_{m0} = K_t \cdot I_{f0} \cdot I_{a0} \stackrel{\text{aprox }=0}{=} b \cdot \Omega_0 + T_{l0}$$

$$V_{a0} = R_a \cdot I_{a0} + K_e \cdot I_{f0} \cdot \Omega_0$$

$$V_{a0} = \frac{R_a \cdot T_{l0}}{K_t \cdot I_{f0}} + K_e \cdot I_{f0} \cdot \Omega_0$$

$$[Ec. 2] \Omega_0 = \frac{V_{a0} - \frac{R_a \cdot T_{l0}}{K_t \cdot I_{f0}}}{K_e \cdot I_{f0}}$$

[Ec. 1] De la primera ecuación podemos resaltar que el torque de fricción es bastante pequeño respecto al torque de carga y al torque motor, por dicho motivo podemos considerar al torque de fricción como despreciable y por lo tanto el torque motor compensa aproximadamente el torque de carga.

[Ec. 2] De la segunda ecuación se puede concluir que la velocidad depende de la tensión de armadura, y depende de forma inversa de la corriente de campo, esto quiere decir que:

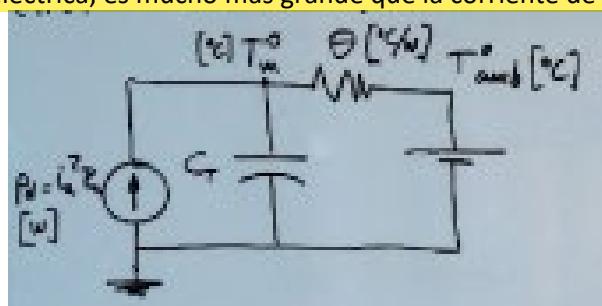
- Si se aumenta la corriente de campo la velocidad disminuye, aumentando el torque (Field forcing), esto se utiliza generalmente para arrancar la máquina consiguiendo un alto par, lo que permite salir de una condición donde la fricción estática podría ser demasiado grande.
- Si la corriente de campo disminuye aumenta la velocidad embala la máquina pudiendo llegar a velocidades más allá de la nominal y disminuyendo el torque (Field Weakening).

- Modificar la corriente de campo permite acciones de control adicionales, que para máquinas con excitación constante o excitación permanente no es posible realizarlo.

Subsistema térmico

El modelo térmico a plantear va a ser un **subsistema térmico de primer orden**, donde los principales elementos van a ser la resistencia de armadura y la resistencia de campo las cuales disipan energía en forma de calor por efecto Joule.

Las pérdidas más significativas se presentan en la armadura, ya que la corriente de armadura generalmente en una máquina eléctrica, es mucho más grande que la corriente de campo.



[2000 a 3000 A]

[20 a 30 A]

Haciendo un análisis del grafico podemos ver que se realiza un equivalente eléctrico del circuito térmico, donde podemos encontrar los siguientes símbolos:

- La referencia a tierra representa al cero absoluto (0 K o 0°C, dependiendo las unidades de trabajo, es solo una referencia)
- La fuente T_{amb} representa la **temperatura media** del lugar donde está trabajando la máquina eléctrica.
- El generador eléctrico de corriente, simboliza la **generación de calor interno dentro de los bobinados**. [Potencia Calórica]
- La capacitancia representa el **calor almacenado** dentro del núcleo de la máquina.
- La resistencia simboliza la **transferencia de calor entre el bobinado y el ambiente**. [Resistencia Térmica Equivalente]
- Se asume que existe transferencia de calor por conducción y también por convección, dando la posibilidad a que si hay un ventilador dentro de la máquina, pueda ser una convección forzada.

Ecuación térmica

Por lo general no se menciona en los libros, pero es muy importante y en los modelos modernos se colocan sensores y todo.

A partir del desarrollo anterior podemos desarrollar la siguiente ecuación, relacionando la potencia disipada con los parámetros térmicos.

Hay que tener en cuenta que al incorporar el modelo térmico, se agrega una nueva variable de perturbación, la temperatura ambiente, la cual puede no ser constante.

Aparece una nueva variable de estado que es la Temperatura de la máquina.

Dentro de la ecuación, el primer término ^{de comportamiento dinámico} representa la acumulación de potencia calórica en la capacitancia térmica y la ^{El segundo término que es} transferencia de calor por conducción equivalente a través de una resistencia térmica por la variación de temperatura. Si hay convección forzada ^{depende del forzamiento de aire por lo que podría ser un parámetro variable para este último caso.} La resistencia térmica

$$P_{perd}(t) \approx R_a \cdot i_a^2(t) + R_f \cdot i_f^2(t) = C_{Tm} \cdot \frac{dT_m(t)}{dt} + \frac{1}{\theta_{Tm-amb}} \cdot (T_m(t) - T_{amb}(t))$$

La potencia de perdidas que depende de dos variables de estado (corriente de armadura y de campo)

Comportamiento Dinámico

El calentamiento de este sistema va a comportarse de forma exponencial.

Modelo físico idealizado y Modelo Dinámico para maquina con imanes permanentes

Si se tiene una máquina eléctrica donde la excitación se mantiene constante (teniendo en cuenta que va a haber un transitorio en el arranque), la corriente de campo I_f deja de ser una variable de estado este modelo no lineal se reduce a un modelo LTI donde lo podemos apreciar en el siguiente gráfico:

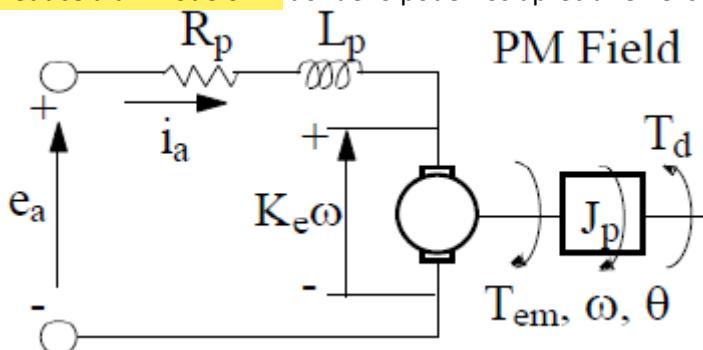
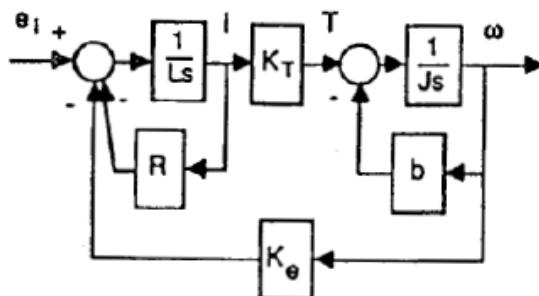


Diagrama de bloques



Casos especiales ----

Armadura a Circuito Abierto

Si se tiene en cuenta el momento en donde la armadura se comporta como un circuito abierto, se puede concluir que:

$$V_a = K_e \cdot \omega$$

Como consecuencia de esto $I_a = 0$

Armadura en Cortocircuito

En estas condiciones, la única carga del circuito es la resistencia de armadura, como esta en cortocircuito $V_a = 0$ y la corriente que circula es la corriente de cortocircuito I_{acc}

Modelo LPV en forma matricial

Como en este modelo la corriente de campo pasa a ser una constante, las variables de estado son:

$$x(t) = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \omega_m(t) \\ i_a(t) \end{bmatrix} \quad u(t) = \begin{bmatrix} V_a(t) \\ T_l(t) \end{bmatrix}$$

Recordar que esta última es de Perturbación

Con esas variables de estado el modelo completo del sistema LPV, modificando el sistema no lineal planteado anteriormente y teniendo en cuenta que $K = k \cdot i_f$ siendo $k = K_e = K_t$ el modelo queda de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \frac{d\theta(t)}{dt} = \omega(t) \\ J_m \cdot \frac{d\omega(t)}{dt} = K \cdot i_a(t) - b \cdot \omega_m(t) - T_l(t) \\ L_a \cdot \frac{di_a(t)}{dt} = V_a(t) - R_a \cdot i_a(t) - K \cdot \omega_m(t) \end{cases}$$

Resumen Automática y Máquinas Eléctricas

Llevando ahora si este modelo a un modelo matricial ya que es un modelo lineal:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b}{J_m} & \frac{K}{J_m} \\ 0 & -\frac{K}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \omega_m(t) \\ i_a(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J_m} \\ \frac{1}{L_a} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a(t) \\ T_l(t) \end{bmatrix} \\ x_0 = \begin{bmatrix} \theta_m(0) \\ \omega_m(0) \\ i_a(0) \end{bmatrix} \\ y(t) = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \omega_m(t) \\ i_a(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

Polinomio Característico y obtención de polos

Aplicando la transformada de Laplace a todas las ecuaciones del modelo planteado anteriormente

$$L_a \cdot s \cdot I_a(s) = V_a(s) - R_a \cdot i_a(s) - K \cdot \omega_m(s) \quad (1)$$

$$J_m \cdot s \cdot \omega_m(s) = K \cdot I_a(s) - b \cdot \omega_m(s) - T_l(s) \quad (2)$$

$$s \cdot \theta(s) = \omega(s) \quad (3)$$

De la ecuación (1) despejamos $I_a(s)$

$$I_a(s) = \frac{V_a(s) - K \cdot \omega_m(s)}{L_a \cdot s + R_a}$$

Esto cuando pasa dividiendo al otro miembro, me da un polo en el origen, es un modo de cuerpo rígido libre de rotar. Es decir que no está vinculado elásticamente al sistema inercial.

De la ecuación (2) reemplazo $I_a(s)$ y despejamos $\omega_m(s)$

$$[J_m \cdot s + b] \cdot \omega_m(s) = K \cdot I_a(s) - T_l(s)$$

$$[J_m \cdot s + b] \cdot \omega_m(s) = K \cdot \frac{V_a(s) - K \cdot \omega_m(s)}{L_a \cdot s + R_a} - T_l(s)$$

$$[(J_m \cdot s + b) \cdot (L_a \cdot s + R_a) + K^2] \cdot \omega_m(s) = K \cdot V_a(s) - (L_a \cdot s + R_a) \cdot T_l(s)$$

$$[(J_m \cdot L_a \cdot s^2 + (J_m \cdot R_a + b \cdot L_a) \cdot s + (b \cdot R_a + K^2)) \cdot \omega_m(s) = K \cdot V_a(s) - (L_a \cdot s + R_a) \cdot T_l(s)]$$

$$\omega_m(s) = \frac{K \cdot V_a(s) - (L_a \cdot s + R_a) \cdot T_l(s)}{[(J_m \cdot L_a \cdot s^2 + (J_m \cdot R_a + b \cdot L_a) \cdot s + (b \cdot R_a + K^2))]}$$

Polinomio Característico

Para realizar el cálculo de los polos faltantes (existe un polo en el origen debido al integrador en la salida), se debe calcular las raíces al denominador de la ecuación despejada de $\omega_m(s)$

$$p_1, p_2 = -\frac{J_m \cdot R_a + b \cdot L_a}{2 \cdot J_m \cdot L_a} \pm \sqrt{\left(\frac{J_m \cdot R_a + b \cdot L_a}{2 \cdot J_m \cdot L_a}\right)^2 - \frac{b \cdot R_a + K^2}{J_m \cdot L_a}}$$

Como hay disipación de energía, y todos los parámetros del primer término son positivos, el sistema siempre es estable. Los términos dentro de la raíz van a determinar si las raíces son reales o complejas conjugadas.

Motor estándar vs Servomotor

Un servomotor es un motor diseñado para aplicaciones de mucha dinámica, donde se busca disminuir el momento de inercia haciendo una reducción del radio (ya que el momento de inercia es proporcional a r^2) y aumentar la longitud. Esto produce que con un menor torque de aceleración se pueda acelerar más rápidamente al servomotor.

Estos motores se diseñan para que el valor de $K_e = K_t$ sean valores grandes y por ende conseguir un comportamiento subamortiguado, lo que se traduce en mayor dinámica pero con existencia de oscilaciones.

Los motores estándar se fabrican para obtener un comportamiento sobreamortiguado ya que $K_e = K_t$ son más pequeñas y el momento de inercia es mayor.

Controlabilidad y Observabilidad

Si se realiza un análisis de controlabilidad y observabilidad para este modelo planteado se puede llegar a las siguientes matrices:

$$\mathcal{C} = [B \ AB \ A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{K}{J_m L_a} \\ 0 & \frac{K}{J_m L_a} & -\left(\frac{b \cdot K}{J_m^2 L_a} + \frac{R_a \cdot K}{J_m L_a^2}\right) \\ \frac{1}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a^2} & -\frac{K^2}{J_m L_a^2} + \frac{R_a^2}{L_a^2} \end{bmatrix} \quad \text{rango } \mathcal{C} = 3 = n$$

Como $\text{rango } \mathcal{C} = 3 = n$ el sistema es totalmente controlable desde la tensión de armadura $V_a(t)$

Para determinar la observabilidad se puede realizar para la medición de cualquiera de las variables de estado.

Observabilidad desde la posición

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_m}{J_m} & \frac{K}{J_m} \end{bmatrix} \quad \text{rango } \mathcal{O} = 3 = n$$

Como $\text{rango } \mathcal{O} = 3 = n$ el sistema es totalmente observable desde la posición.

Observabilidad desde la velocidad y desde la corriente de armadura

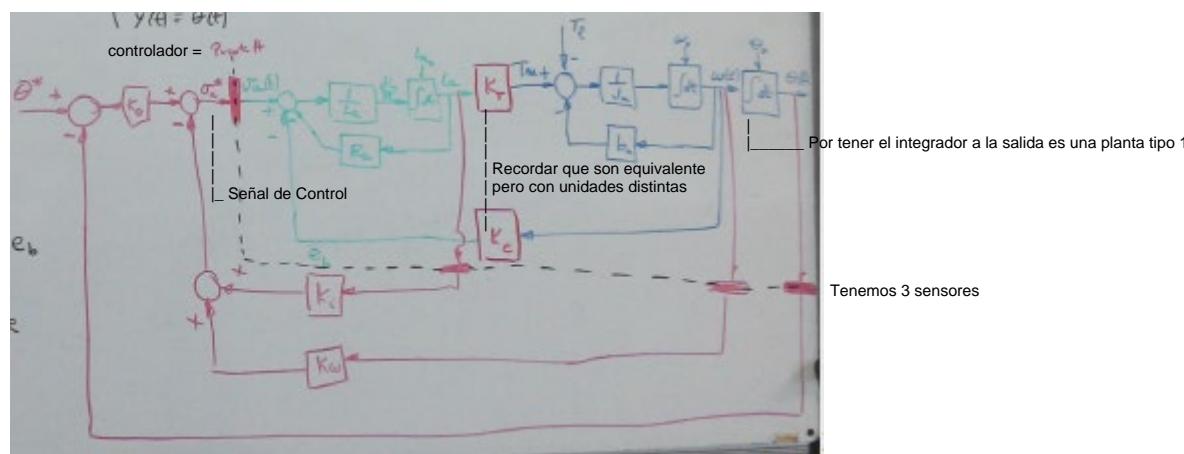
Como la primera columna de A tiene todos ceros y el primer elemento de C es un 0, el rango va a ser menor, lo que quiere decir que el sistema no es totalmente observable ni desde la velocidad, ni desde la corriente de armadura.

2. Control de posición/velocidad por realimentación de estado

Control de Posición con manipulación de la Tensión de armadura

Partiendo del modelo LPV planteado en el punto anterior se realiza un diagrama de bloques delimitando el controlador de la planta donde la entrada de manipulación de la tensión de armadura $V_a(t)$ es un puente H o un chopper quien va a ser el encargado de realizar un control a voluntad de $V_a(t)$.

El control del puente H se realiza mediante PWM lo que implica que la tensión entregada va a ser mediante una onda cuadrada, donde la inductancia de armadura se comporta como un filtro pasa bajo lo que produce un ripple en lugar de una onda pulsante, y mientras mayor sea la frecuencia de conmutación del ripple mejor va a ser el filtrado, asumiendo así que la tensión de armadura, es el valor promedio instantáneo en un ciclo, y puede tomar como valor máximo el valor de la tensión de la fuente.



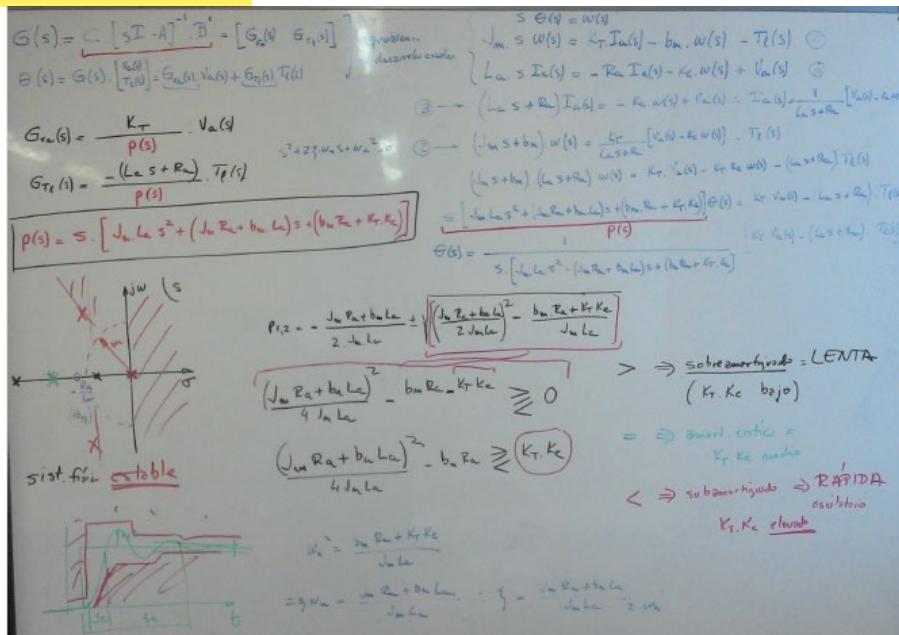
Resumen Automática y Máquinas Eléctricas

Como podemos ver en el diagrama de bloques se trata de una planta tipo uno por lo tanto para realizar la realimentación completa de estado, la ley de control es:

$$V_a^*(t) = -[K_\theta \quad K_\omega \quad K_i] \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \omega_m(t) \\ i_a(t) \end{bmatrix} + K_\theta \cdot \theta^*(t)$$

$$V_a^*(t) = -[K_\omega \quad K_i] \begin{bmatrix} \omega_m(t) \\ i_a(t) \end{bmatrix} + K_\theta \cdot [\theta^*(t) - \theta(t)]$$

Utilizando la realimentación completa de estado podemos reacomodar los polos a la posición más conveniente, eligiendo las frecuencias naturales de los polos y a partir de las frecuencias naturales elegidas se despejan los valores de los K. [Ya que ya comprobamos que es controlable]



Todas estas ecuaciones se usaron para obtener las expresiones de las funciones de transf. para todas la posición y las entradas (V y Tl)

Se puede ver que tenemos un polo en el origen por el integrador de posición y luego los otros dos que pueden ser reales (iguales o distintos) o complejos conjugados

Según el diagrama de bloques para este caso, tenemos como entrada de perturbación al torque de carga y como entrada de manipulación una consigna de posición. La cual hay que convertir en una referencia de tensión de armadura para controlar la máquina eléctrica. Y finalmente la salida es la posición real.

Notas:

Al tener una referencia de posición, si la referencia de posición es constante, la referencia de velocidad es 0, pero al cambiar la consigna de posición, se produce un transitorio donde la consigna de velocidad no es consistente para ese instante.

Para mejorar este problema, se debe agregar una acción de feed Forward en velocidad, lo que equivale a tener un controlador Proporcional – Derivativo.

La elección de los valores de K_T y K_c dependerán de los polos que queramos obtener

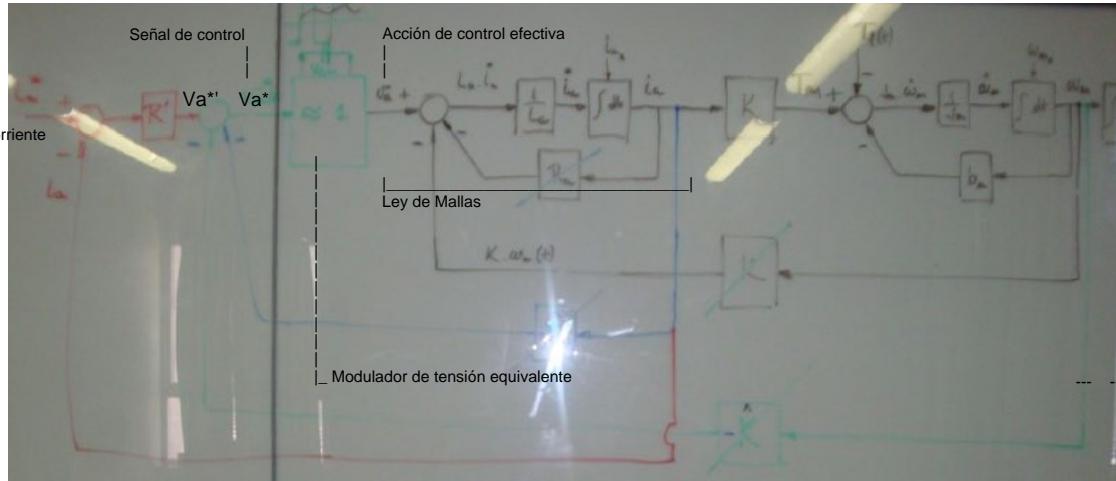
Luego de obtener el polinomio de nuestro sistema, se lo compara con el polinomio de los polos elegidos "(s-p1) x ..." y así se obtienen los valores de K requeridos. La idea es que los 3 polos tengan la misma frecuencia

3. Control en cascada: Corriente/Torque

Ahora procederemos a ver cómo obtener el lazo de control interno y por ende el famoso modulador de torque.

Control por manipulación de corriente de armadura

Diagrama de bloques



Recordar que las variables de estado son las que están por lo general a la salida de los integradores.

Hay que tener en cuenta que no es muy común sensores de velocidad, pero asumiremos que si se puede medir.

En negro podemos ver la máquina eléctrica

En verde podemos ver el modulador de tensión equivalente, este puede ser un chopper.

Es lo que se utiliza para manipular la tensión de armadura que es nuestra entrada de manipulación.
Tiene un ancho de banda muy grande y una ganancia unitaria

(que convierte corriente continua fija en corriente continua variable). Una fuente común es el Puente H ya que tiene incorporado una lógica para invertir las polaridades.

1. Desacoplamiento de la tensión inducida k_e

Con señales de control a través de mediciones debemos compensar la caída de tensión óhmica y la tensión inducida en la armadura, para ello se van a aplicar distintos efectos de control que sean capaces de compensar lo mejor posible estos efectos existentes en la máquina eléctrica.

A través de un sensor de corriente, se va a medir la corriente de armadura (azul). Si suponemos que el modulador de tensión tiene una ganancia aproximadamente unitaria (al dar una consigna de tensión, dicha consigna se impone a la máquina) y además tiene ancho de banda infinito (al variar rápidamente la tensión el modulador responde a esa frecuencia), al medir la velocidad con un sensor o estimarla, y multiplicarla por una constante de tensión inducida K y se procede a realimentarla con el signo cambiado, obtenemos una acción de control que compensa la tensión inducida. Esta compensación produce un efecto de cancelación del efecto físico, aunque siga existiendo, como esta compensado no tiene efecto.

2. Desacoplamiento de la caída de tensión óhmica R_a

Para compensar la caída óhmica, se realiza el mismo procedimiento, nada más que se multiplica la corriente de armadura por $-R_a$. Esta realimentación compensa la caída de tensión en la armadura.

Observar que lo que por lo general cambia es el signo de la constante no el signo en el sumador. Y por el menos de la constante se cumple el $x - = + //$ Pero si cambió el signo del sumador no pasa nada siempre y cuando haya consistencia

3. Lazo de control de corriente

En vez de controlar la tensión de armadura, es necesario poder influir directamente en la corriente de armadura, ya que es la que produce los efectos que deseo realimentar. Para ello se realiza una medición de la corriente de armadura y se la compara con una señal de consigna. Esta comparación arroja como resultado un error de corriente, al cual multiplicamos por una constante con dimensiones óhmicas para convertirlos en un modulador de corriente. Es similar a lo que hacíamos antes con la posición, pero ahora con la corriente.

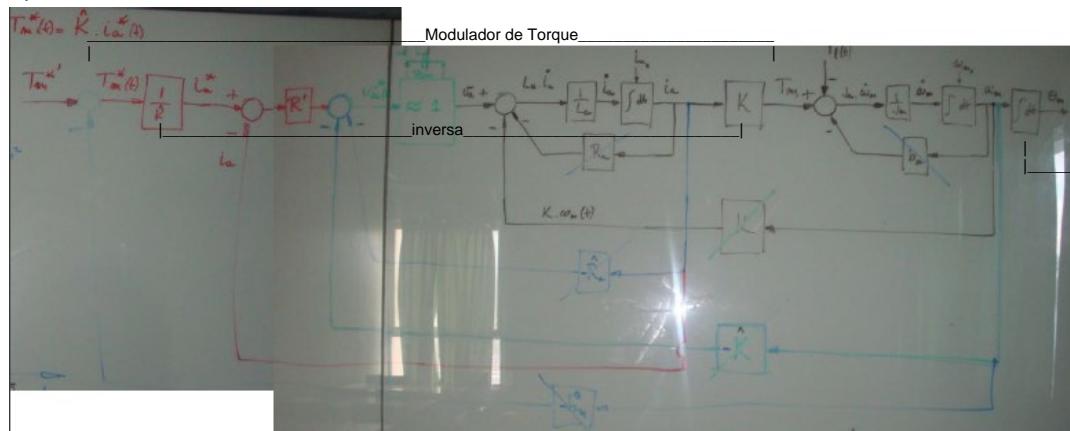
Nota: Es importante recordar que todo lo que agregamos como retroalimentaciones solo forman parte de la ley de control, no es que forman parte del sistema físicamente.

Resumen Automática y Máquinas Eléctricas

Control por Torque

[El lazo de control de corriente permite tener acceso a la manipulación de torque directamente]

El Torque * prima, es el torque equivalente que solo compense el torque de carga y permita acelerar a la máquina.
Esto (retroalimentar b_m para anular el efecto del torque de fricción y por ende pasar de T_m^* a T_m^{**}) podemos hacerlo o no, pero se recomienda que si.



Recordar que la integración pura representa el modo de cuerpo libre porque no tenemos ninguna vinculación elástica del rotor con el sistema inercial o el estator. Y este es el que nos ubica el polo en el origen.

Como la relación entre el torque y la corriente depende de la constante K , para brindar una consigna de torque directamente debo **invertir el efecto** que se produce en la maquina eléctrica, por lo tanto, si se aplica una consigna de torque y se divide por la constante, obtenemos la consigna de corriente necesaria.

4. Desacoplamiento de b_m (realimentación propia de estado mecánico w_m)

Como paso adicional....

También se puede realimentar la fricción si se conoce el modelo de fricción del sistema o uno con buena aproximación también se puede realimentar dicho efecto para compensar también ese efecto, **por lo que se han compensado todas las realimentaciones naturales del sistema.**

Todas las constantes de realimentación dependen de los parámetros de la planta, salvo R' la cual hay que poder calcularla. El cálculo de R' se enuncia a continuación:

$$\text{Analizando la malla de armadura del sistema} \Rightarrow L_a \cdot \frac{di_a(t)}{dt} = V_a(t) - R_a \cdot i_a(t) - K \cdot \omega_m(t)$$

Si el modulador de tensión tiene ganancia unitaria, se puede reemplazar la tensión de armadura $V_a(t)$ por la respectiva señal de tensión de armadura $V_a^*(t)$

$$L_a \cdot \frac{di_a(t)}{dt} \cong V_a^*(t) - R_a \cdot i_a(t) - K \cdot \omega_m(t) = V_a^*(t) + \widehat{R_a} \cdot \widehat{i_a}(t) + \widehat{K} \cdot \widehat{\omega_m}(t) - R_a \cdot i_a(t) - K \cdot \omega_m(t)$$

| Porque decimos que la ganancia es unitaria aprox. para que sea igual debería decir $V_a(t)$

$$L_a \cdot \frac{di_a(t)}{dt} \cong V_a^*(t) = R'(i_a^* - \widehat{i_a}) \Rightarrow \frac{L_a}{R'} \frac{di_a(t)}{dt} + \widehat{i_a} = i_a^*$$

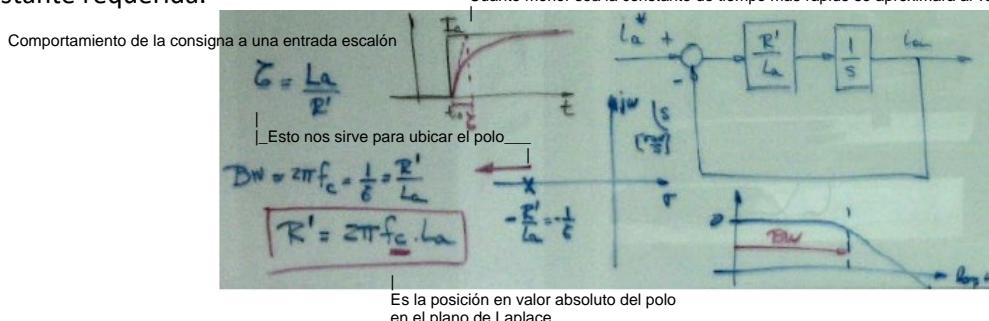
Aplicando transformada de Laplace

$$\left(\frac{L_a}{R'} s + 1 \right) \cdot i_a \cong i_a^*$$

$$\frac{\text{corriente efectiva}}{\text{consigna de corriente}} G_{ia}(s) = \frac{\widehat{i_a}}{i_a^*} \cong \frac{1}{\frac{L_a}{R'} s + 1}$$

Todo esto es asumiendo que las compensaciones son perfectas.
Este polo se trata de que se aleje lo más posible así el ancho de banda es grande

Podemos ver que corresponde al modelo de **un filtro pasa bajos de primer orden**, con una constante de tiempo $\tau = \frac{L_a}{R'}$. A partir del conocimiento de la constante de tiempo se calcula R' . Si no también a partir de un ancho de banda definido, se puede calcular la frecuencia de corte, y a partir de ella se puede calcular la constante requerida.

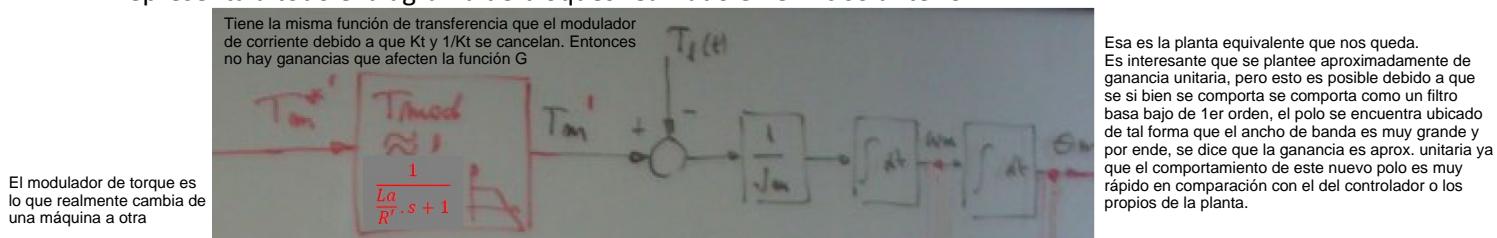


Nota: Luego de calcular o determinar el valor de R' , logramos convertir el modulador de tensión equivalente en un modulador de corriente equivalente

Resumen Automática y Máquinas Eléctricas

Diagrama de Bloques equivalente

Una vez aplicadas todas las realimentaciones se puede realizar el diagrama equivalente en donde T_{mod} , representa a todo el diagrama de bloques realizado en el inciso anterior.



Lo que más tiene costo es la planta en sí, el modulador de tensión y los sensores.

Hasta aquí fue todo lo del Lazo Interno (Es así que necesitamos ahora poder controlar el movimiento de nuestro sistema)

Lazo maestro – Controlador PID

Se desea controlar el movimiento. Lo que se está haciendo hasta el momento es controlar un regulador de posición.

Para aplicar el control PID lo que se busca es obtener cual es el error de velocidad, posición y derivada de la posición y a partir de esos datos multiplicarlos por las respectivas constantes del controlador.

Para que al combinarlas podemos obtener como salida el Torque T_m^* .

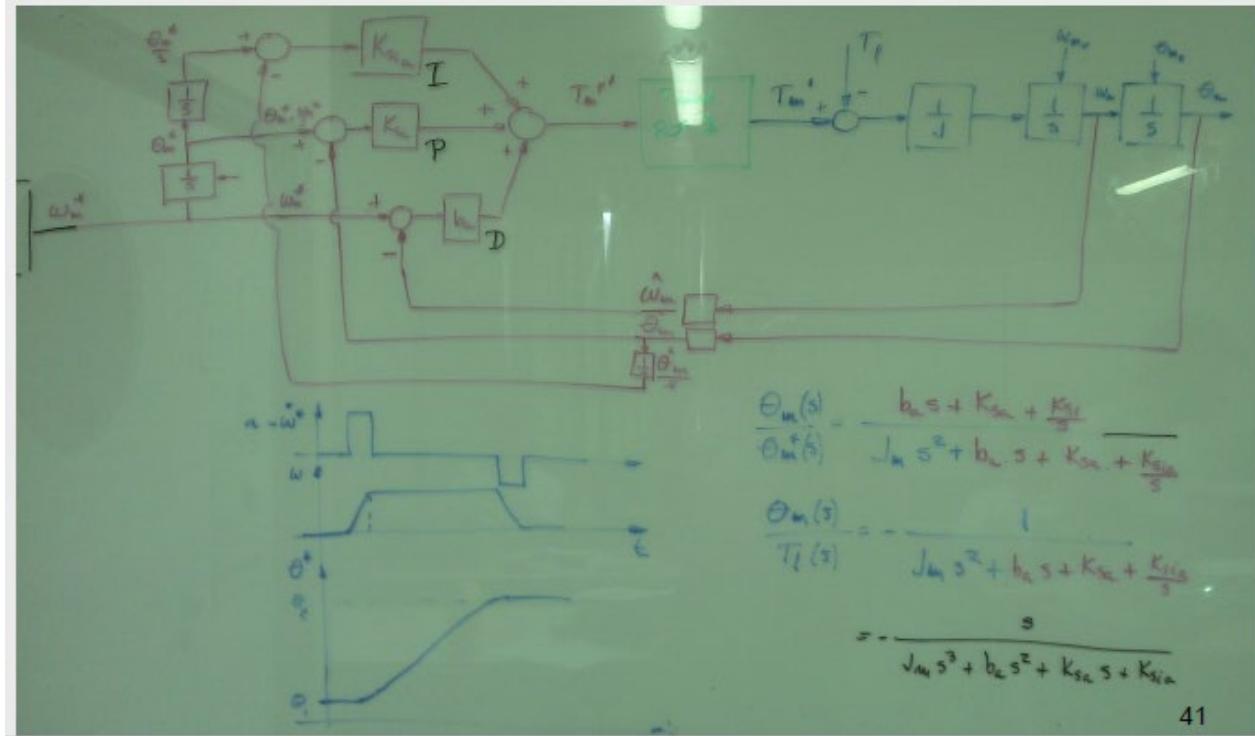
Si se analiza el bloque de la constante derivativa, debe tener unidades de coeficiente de fricción para lograr a la salida una consigna de torque. **Por este motivo se puede ver que un efecto similar a un amortiguador de fricción.**

En este caso no existe una vinculación elástica entre el rotor y el estator. A través del controlador, **se puede agregar con una referencia de control un comportamiento equivalente a esa vinculación elástica**, realimentando la posición, comparándola con una consigna de posición, en donde a la diferencia se la multiplicara por una constante K_s . Esto produce el efecto de un resorte entre el estator y el rotor, por lo que la salida se opone a que la posición se aleje de la posición de referencia. **La gran ventaja es que variando la consigna puedo controlar a voluntad la posición del eje del rotor.**

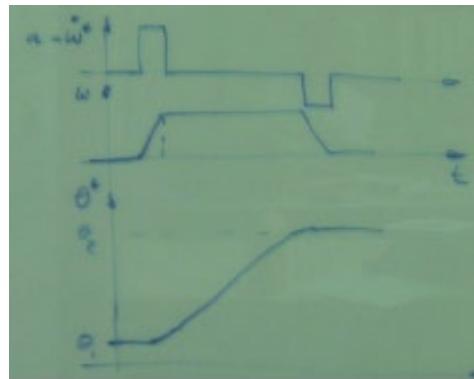
Agregando dentro del controlador un integrador a la posición, se puede realimentar y multiplicar por una **ganancia integral**. **Esta realimentación permite compensar los errores estacionarios que producen las cargas constantes.**

Además sabemos que las consignas se pueden determinar con tres integrales en cascada a partir de una sola consigna de velocidad, por lo que no hace falta generar 3 consignas independientes. Ya que integrándola obtenemos las consignas de los demás

Es importante tener en cuenta que se realimenta la velocidad, para evitar el uso de derivadores, **ya que los derivadores amplifican el ruido**, entonces cualquier interferencia física que pueda existir (por ejemplo electromagnética en los sensores) **se amplifica el ruido y distorsiona el comportamiento del controlador ya que amplifica las altas frecuencias**, que tienen altas pendientes, a pesar de que su amplitud sea pequeña.

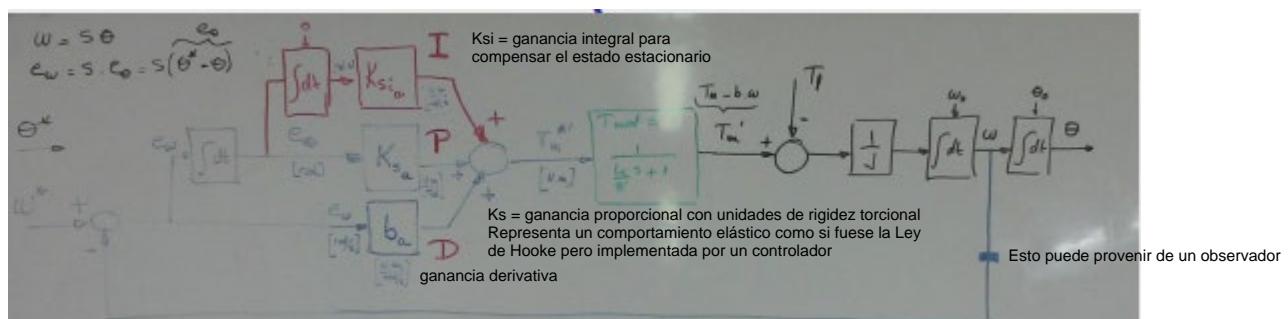


La consigna más simple que se puede dar es una consigna trapezoidal de velocidad. Se puede ver en el grafico superior la aceleración, luego la velocidad y luego la posición.



Es importante saber que las consignas de tensión tienen que ser consistentes, ya que por ejemplo una consigna de velocidad cuadrada conlleva a que la aceleración sea basada en impulsos, lo cual es irrealizable.

Pasando en limpio, se muestra en el siguiente diagrama que solamente se realimenta la velocidad (gran ventaja ya que evita poner sensores de más), se calcula el error de velocidad y luego se realizan las integrales correspondientes.



Resumen Automática y Máquinas Eléctricas

Funciones de transferencia a lazo cerrado del modelo

Para obtener las funciones de transferencia es necesario tener en cuenta las siguientes definiciones

$$\omega = s \cdot \theta$$

$$e_\omega = s \cdot e_\theta = s * (\theta^* - \theta)$$

Analizando el sumador de los torques en el gráfico de la planta y expresándolos en el dominio de Laplace. Luego se remplaza $T'_m(s)$ por todo lo que está a la izquierda, que representa al controlador y que determinan cual va a ser el torque electromagnético a aplicar.

$$\text{Torque de Aceleración} \quad J \cdot s \cdot \omega(s) = T'_m(s) - T_l(s) \cong \left[\frac{1}{\frac{L_a}{R'} \cdot s + 1} \right] \cdot \left[\left(b_a \cdot s + K_{sa} + \frac{K_{sia}}{s} \right) \cdot (\theta^*(s) - \theta(s)) \right] - T_l(s)$$

$$J \cdot s^2 \cdot \theta(s) = \left[\frac{1}{\frac{L_a}{R'} \cdot s + 1} \right] \cdot \left[\left(b_a \cdot s + K_{sa} + \frac{K_{sia}}{s} \right) \cdot \theta^*(s) - \left(b_a \cdot s + K_{sa} + \frac{K_{sia}}{s} \right) \cdot \theta(s) \right] - T_l(s)$$

Pasando al otro lado $\theta(s)$, quedan del lado izquierdo las salidas, y del lado derecho las entradas.

$$\left\{ J \cdot s^2 + \left[\frac{1}{\frac{L_a}{R'} \cdot s + 1} \right] \cdot \left(b_a \cdot s + K_{sa} + \frac{K_{sia}}{s} \right) \right\} \cdot \theta(s) = \left[\frac{1}{\frac{L_a}{R'} \cdot s + 1} \right] \cdot \left[\left(b_a \cdot s + K_{sa} + \frac{K_{sia}}{s} \right) \cdot \theta^*(s) \right] - T_l(s)$$

Planteando que el controlador de corriente es muy rápido (es lo que se busca en la práctica) [verde] podemos asumir que es aproximadamente 1 ya que L_a es mucho menor que R generalmente, y despejando la ecuación.

$$\theta(s) = \frac{b_a \cdot s + K_{sa} + \frac{K_{sia}}{s}}{J \cdot s^2 + b_a \cdot s + K_{sa} + \frac{K_{sia}}{s}} \cdot \theta^*(s) - \frac{1}{J \cdot s^2 + b_a \cdot s + K_{sa} + \frac{K_{sia}}{s}} \cdot T_l(s)$$

Para eliminar la división $\frac{K_{sia}}{s}$ se hace factor común en el denominador $\frac{1}{s}$ y se reacomoda la ecuación

$$\theta(s) = \frac{b_a \cdot s^2 + K_{sa} \cdot s + K_{sia}}{J \cdot s^3 + b_a \cdot s^2 + K_{sa} \cdot s + K_{sia}} \cdot \theta^*(s) - \frac{1}{J \cdot s^3 + b_a \cdot s^2 + K_{sa} \cdot s + K_{sia}} \cdot T_l(s)$$

Podemos analizar que el polinomio característico queda de tercer orden, lo que es lógico ya que estamos agregando un control integral, lo que requiere integrar la posición y por lo tanto añade un polo.

El integrador de la velocidad que se añade en el controlador, no agrega un polo ya que es equivalente al integrador existente en la planta.

Conclusiones

- La Función de transferencia de perturbación tiene un cero en el origen, lo que cancela el efecto de una perturbación constante en la posición, lo que implica que si venimos con un escalón constante, y agregamos carga, va a existir un transitorio pero luego va a desaparecer, ya que ese cero en el origen anula el efecto de la perturbación en la salida.

A baja frecuencia

Aplicamos el teorema de valor final que dice que la salida de la función de salida en tiempo infinito es igual a la evaluación de la transformada a la entrada de escalones cuando s tiende a 0

- La posición de salida ante un escalón de cambio de consigna sigue a la posición, ya que cuando $s \rightarrow 0$ todos los términos se anulan quedando $\frac{K_{sia}}{K_{sia}} \cdot \theta^*(s) = 1 \cdot \theta^*(s)$ y cualquier cambio constante de torque no va a influir ya que se anula el término debido al polo en el origen. [En régimen permanente] [Es así que no tenemos error de estado estacionario]

- En el caso que no se hubiera considerado la acción integral, la función de transferencia hubiera quedado:

$$\theta(s) = \frac{b_a \cdot s + K_{sa}}{J \cdot s^2 + b_a \cdot s + K_{sa}} \cdot \theta^*(s) - \frac{1}{J \cdot s^2 + b_a \cdot s + K_{sa}} \cdot T_l(s)$$

Lo que implica que ante un cambio de posición sigue a la posición debido al mismo análisis de la conclusión anterior.

| Con un torque de carga $T_l = 0$

Resumen Automática y Máquinas Eléctricas

Pero cuando hay un escalón de Carga, una vez pasado el transitorio, va a quedar afectado por $\frac{1}{K_{sa}} \cdot T_l(s)$ por lo que va a quedar un error de estado estacionario. Y ahora la salida será $\Theta - 1/K_{sa} \cdot T_l(s)$

4. En la realimentación completa de estado no hay acción integral, por lo tanto existe el error de estado estacionario para los casos planteados en la conclusión 3. Por eso es mejor este método, aunque haya que agregar la acción integral de forma externa.

5. Si se siguen agregando integradores se pueden seguir compensando efectos, con un integrador más, se compensan cargas de tipo rampa.

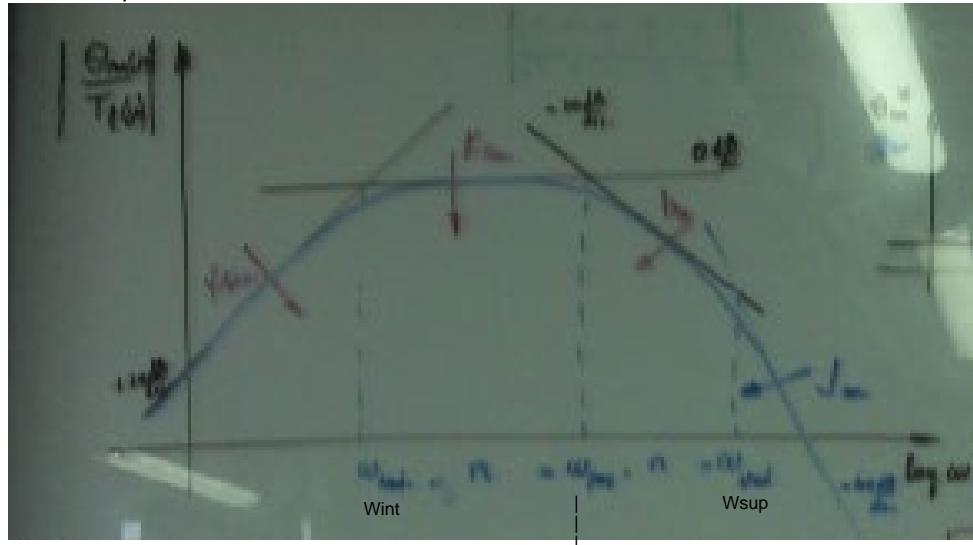
Aquí es donde empiezo con el Método de la Sintonía Serie para ubicación de los polos y las constantes

Cálculo de las constantes b_a , K_{sa} y K_{sia} Es importante recordar que si no hacemos la realimentación del torque de fricción, la función de transferencia va a cambiar

A partir de la inercia equivalente, debemos poder calcular las tres constantes. Para ello vamos a designar un valor para cada uno de los polos, y a partir de eso calcular las constantes. El polinomio característico tiene 3 coeficientes reales y positivos por lo que implica que las raíces deben ser reales o complejas conjugadas, pero no pueden existir raíces complejas sueltas.

Como es un polinomio de 3er orden se puede descomponer en un polinomio de 1er orden y otro de 2do orden. El polinomio de 1er orden nos va a dar siempre un polo en el eje real y en el polinomio de 2do orden pueden ser 2 polos reales distintos, 2 polos reales iguales o 2 polos complejos conjugados, dependiendo de la relación de amortiguamiento relativo (ζ).

Haciendo un análisis del siguiente diagrama de Bode, que es como queremos que responda nuestro controlador, podemos ver que:



Como está en escala logarítmicas tenemos las siguientes restricciones:
 $W_{int} = 1/n \cdot W_n$
 $W_{sup} = n \cdot W_n$

En el eje y vemos la relación entre la salida y la perturbación. Esta función de transferencia es representativa tanto del rechazo a una perturbación estacionaria ya que tenemos un cero en el origen que permite una asíntota con pendiente positiva de 20d/década, después el segundo polo está ubicado de tal forma que se produzca un corte con una asíntota horizontal, luego el próximo polo aporta un decaimiento de -20d/década y el siguiente aporta un decaimiento de -20 d/década. Este funcionamiento representa el funcionamiento esperado del sistema.

Se busca que los polos cumplan con este diagrama de bode ya que son las características de un filtro de Butterworth, donde todos los polos tienen la misma frecuencia.

Debido a esta restricción que planteamos con el diagrama de bode, estamos restringiendo a que el polo real debe tener la misma frecuencia que los dos polos del subsistema de ~~1er~~ orden. Ya que en realidad el polo real podría estar situado en cualquier parte del eje real negativo, pero nosotros aplicamos esta restricción de igualdad de frecuencias

Resumen Automática y Máquinas Eléctricas

A partir del polinomio característico y sacando factor común J queda de la siguiente manera:

Esta ω_n es la frecuencia de corte que nos da la primera atenuación de alta frecuencia del pasa banda.
Qué en nuestro caso será también la frecuencia a la cual estarán situados nuestros polos y va a ser también el ancho de banda del regulador de posición

Es así que el primer polo será $p_1 = -\omega_n$

$$J \cdot (s + \omega_n) (s^2 + (n-1) \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2)$$

Tiene la forma de un polinomio de 2do orden

Esa es la ecuación de los polos en donde los 3 polos tienen la misma distancia radial al origen. Esta restricción se ha puesto con el fin de que cumpla con la forma del diagrama de bode. **Además el factor n representa la separación geométrica entre los cortes de asíntotas que se ven en el diagrama de Bode, las cuales son equivalentes.**

"n" es un número real que tiene que ser mayor que 1, normalmente esta entre 2 y 4.

Si analizamos la ecuación cubica en todos los términos vemos que existe el término:

$$n(s^2 + \omega_n^2) = 1 + 2 * \zeta$$

Reemplazando la ubicación de los polos con la ubicación de las ganancias obtenemos que:

Comparando el polinomio anterior el polinomio característico $J \cdot s^3 + b_a \cdot s^2 + K_{sa} \cdot s + K_{sia}$
 Encontramos la relación:

$$\begin{aligned} b_a &= J \cdot n \cdot \omega_n \\ K_{sa} &= J \cdot n \cdot \omega_n^2 \quad [\text{Ec.1}] \\ K_{sia} &= J \cdot \omega_n^3 \end{aligned}$$

Haciendo el análisis de los polos buscamos cuáles son los valores posibles de n.

- $n = 1 \rightarrow \zeta = 0$: tenemos los polos complejos conjugados sobre el eje complejo, no es deseado ya que el sistema está al margen de la estabilidad, teniendo un comportamiento oscilatorio y dependiendo de los parámetros probablemente sea inestable.

- $n = 2 \rightarrow \zeta = 0,5$: Es una posición más razonable para polos de lazo cerrado. Para que el sistema sea robusto debo agrandar un poco más n y por lo tanto ζ para que en caso de haber un cambio en los coeficientes los valores no den un comportamiento inestable. **El sistema responde como un subamortiguado.** $n=2$, es el mínimo valor que puedo elegir

- $n = 3 \rightarrow \zeta = 1$: Equivale a tener los 3 polos en el mismo lugar, sobre el eje real responde como un sistema con amortiguamiento crítico.

- $n = 4 \rightarrow \zeta = 1,5$: Equivale a tener un sistema sobreamortiguado con los polos en la misma posición que cuando $n=2$.

De esta manera determinando el valor de n para el comportamiento requerido se asignan los polos y se calculan los coeficientes.|| Es así que los datos de entrada son el ancho de banda ω_n y el valor de n (o con zeta pero haciendo uso de la relación con n)

----- Para la función de Transferencia del Torque de Carga, tenemos la presencia de ceros...

Cálculo de los ceros

A partir de las ecuaciones de 2do orden y teniendo en cuenta las siguientes relaciones:

$$s^2 + 2 \cdot \zeta_z \cdot \omega_z \cdot s + \omega_z^2 = b_a \cdot s^2 + K_{sa} \cdot s + K_{sia} = ba \cdot (s^2 + K_{sa}/ba \cdot s + K_{sia}/ba)$$

Despejando se puede llegar a que

$$\begin{aligned} 2 \cdot \zeta_z \cdot \omega_z &= \frac{K_{sa}}{b_a} \Rightarrow \omega_z = \frac{\omega_n}{2 \cdot \zeta_z} \\ \omega_z^2 &= \frac{K_{sia}}{b_a} \Rightarrow \omega_z = \frac{\omega_n}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Ahora hacemos uso de las igualdades dadas por Ec.1

De esta forma se puede hacer el cálculo para los distintos valores de n y determinar ζ_z

Tal que:
 $K_{sa}/ba = \omega_n^2/n$
 $K_{sia}/ba = \omega_n$

Es así que los ceros siempre estarán más cerca al origen que los polos.

Nota: Este método de control por cascada me permite también controlar más de un motor (conectados en paralelo y cada uno con su propio modulador de torque) por si tengo que distribuir la entrega de torque motor sin exigir todo a uno solo. Es decir que para cada máquina diseño el correspondiente PDI y Modulador y luego sumo el correspondiente T_m de cada uno en el sumador junto con el TI para obtener el Torque de Aceleración único del sistema
 Nota2: En las plantas tipo 0 importa mucho más controlar la velocidad que la posición, como ser las escaleras eléctricas donde importa más la velocidad que tiene que la posición exacta de sus escalones.

5. Unidad N°5: Control de Accionamientos de Corriente Alterna

1. Máquinas de CA trifásica: Síncrona vs de Inducción

(O mejor conocidas como Asíncronas)

Principio de Operación

Estator

chapas estatóricas que permiten confinar y orientar el flujo y hay...

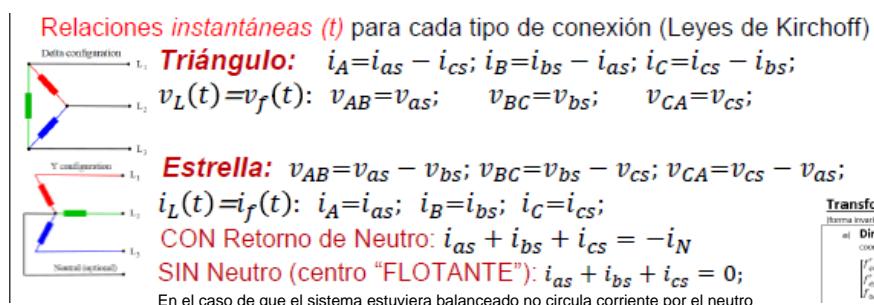
Está compuesto por un bobinado el cual se comporta de forma equivalente al bobinado de armadura de una máquina de corriente continua.

En relación a la alimentación eléctrica CA trifásica Este bobinado es un bobinado fijo en donde circula un sistema de tensiones trifásicas senoidales por

lo que los bobinados de cada una de las fases están desplazados 120° geométricos, pudiendo afectarse por el número de pares de polos y las fases están desplazadas 120° eléctricos. La nomenclatura a utilizar en la catedra para nombrar cada una de las fases será (A,B,C). Si nos referimos netamente al bobinado trifásicos, este tiene 3 fases con distribución espacial senoidal desplazadas 120° Mecánicos / Pp (pares de polos). Ej: Si tenemos 3 pares de polos, tendremos desplazamientos de 40° y 3 juegos de bobina para cada clase intercalados abc a'b'c' a'b"c"

Además, La conexión interna de los bobinados puede ser en estrella o en triángulo. En estrella pueden existir dos casos: con neutro flotante o neutro accesible.

Las relaciones que utilizaremos en el análisis de la máquina según su conexiónado serán de la siguiente forma:



Debido a que las tensiones están desfasadas 120° eléctricos, la amplitud es constante, y la frecuencia es la misma, se inducen corrientes eléctricas en las bobinas, lo que produce un flujo magnético En el entrehierro. Al sumar dichos flujos magnéticos inducidos se produce un campo magnético rotante, el cual es el responsable del funcionamiento de la máquina. [Es decir que se produce el campo magnético rotante o giratorio en el entrehierro gracias a las características de su bobinado trifásico y de la alimentación eléctrica CA trifásica.]

La magnitud del campo magnético rotante es $1.5 \times$ pico de fase del flujo y...

La velocidad de giro de la máquina eléctrica se va a determinar según la siguiente ecuación:

$$n \left[\frac{\text{rev}}{\text{min}} = \text{rpm} \right] = \frac{f_e [\text{Hz}] \cdot 60 \left[\frac{\text{s}}{\text{min}} \right]}{P_p}; \omega_m [\text{rad/s}] = \frac{2 \cdot \pi \cdot f_e [\text{Hz}]}{P_p}$$

Vemos que al aumentar el número de pares de polos la velocidad nominal de la máquina se reduce, produciendo un aumento del torque.

Rotor

La función principal del rotor es seguir el campo magnético rotante. Dentro de las máquinas de corriente alterna se diferencian por el tipo de rotor y la función que cumple.

Maquina Síncrona

En este tipo de máquinas existe una excitación en el rotor, la cual va a ser la encargada de acoplar el rotor con el campo magnético rotante.

La velocidad de la máquina se puede controlar, modificando directamente la velocidad del campo rotante, lo que implica una variación de la frecuencia. Si nosotros podemos controlar la velocidad de giro o si la tenemos fija por ser un accionamiento conectado directo a la red, o si con algún accionamiento electrónico podemos manipular la frecuencia como el rotor va a tener a alinearse con el campo magnético rotante, lo que podemos hacer es controlar la velocidad del rotor a partir de manipular la frecuencia de la línea o la frecuencia de la tensión estatoria.

ángulo de carga que es un retraso eléctrico similar a lo que sería un resorte, el cual no existe realmente pero hay un desplazamiento que es proporcional al torque. Eso aumenta la circulación de corriente en el estator que es el que produce el torque electromagnético que va a compensar ese torque de carga.

Al aplicar una carga se produce un desfase entre el campo magnético rodante y el rotor. El ángulo que se forma se denomina ángulo de carga, el cual es proporcional al torque de carga aplicado.

En palabras simples, se llama sincrónica porque gira a la velocidad del campo magnético rotante.

Esta máquina puede tener diferentes formas para excitar el rotor. Estas pueden ser:

Imanes permanentes [Para máquinas que se utilizan como motores]

Los imanes permanentes proveen la excitación y no es necesario tener bobinas en el estator, por lo tanto, es una conexión más simple y que requiere menos desgaste.

Excitación separada

Generalmente es mediante **electroimanes**, los imanes están **alimentados por una corriente continua** la cual genera una polaridad fija de los mismos. Esto requiere que se deban utilizar anillos rozantes los cuales alimentan las bobinas del rotor con corriente continua.

Maquina Asíncrona

[Tiene el mismo tipo de estator pero distinto rotor] => En una máquina asíncrona el rotor tiene un bobinado trifásico o una jaula...

En esta máquina se utiliza un rotor jaula de ardilla que consiste en **barras eléctricas conductoras cortocircuitadas en los extremos por anillos**. El funcionamiento básico se basa en que al estar el rotor detenido, al producirse el flujo magnético en el entrehierro, se induce una inducción de tensión en las barras, como estas en cortocircuito circulan corrientes dentro de la jaula, lo que produce **un flujo magnético rotórico el cual tiende a alinearse con el campo magnético rodante**.

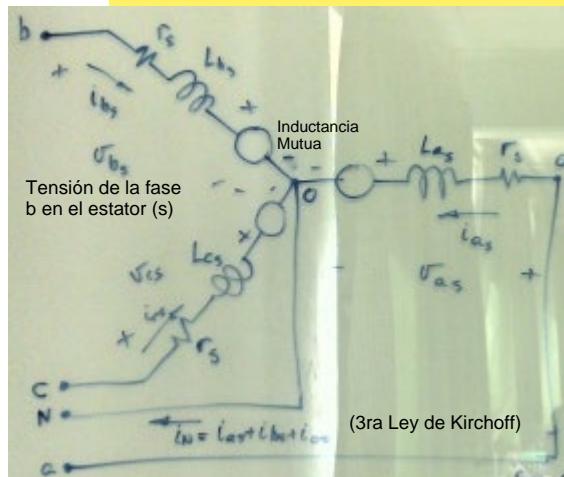
Sin embargo, a diferencia de la máquina sincrónica....

Debe existir un resbalamiento entre el campo magnético rodante y el rotor para que la máquina funcione. Si en algún momento llegan a velocidad de sincronismo deja de haber inducción y el rotor comienza a frenarse hasta que el torque producido por la inducción de las corrientes sea mayor que el de frenado.

[Recordar el gráfico de la Unidad 2]

Trasformación de coordenadas ABC en el estator a coordenadas qd0 general

Podemos ver en el diagrama una conexión trifásica de un motor en estrella considerando parámetros equivalentes para la Resistencia equivalente, la autoinductancia equivalente y la inductancia mutua representada por una tensión equivalente. Todas las variables consideradas son instantáneas.



1. Cada una de estas ramas representa una fase independientemente el número de polos.
2. Cada una de las fases tiene a sus parámetros representados en forma concentrada. Y como parámetros concentrados tienen a la resistencia equivalente (R), la autoinductancia equivalente (L) y la inductancia mutua (Tensión Inducida).
3. Todas las variables son dependientes del tiempo, no fasores ni en régimen permanentes y son instantáneas.
4. Todas las corrientes son corrientes entrantes.
5. Las tensiones inducidas las consideramos con la polaridad en el mismo sentido que las tensiones en los bornes de fase

Por ley de Kirchhoff en los nodos consideramos que la corriente de neutro es igual a la suma vectorial de las corrientes en las 3 fases(si la máquina está equilibrada la corriente de neutro es 0).

De acuerdo con el diagrama podemos expresar las ecuaciones de tensión para cada una de las fases [Que comprenden a la tensión desde el borne de acceso hasta el punto neutro O]

$$\begin{cases} V_{as} = r_s \cdot i_{as} + \frac{d\lambda_{as}}{dt} \\ V_{bs} = r_s \cdot i_{bs} + \frac{d\lambda_{bs}}{dt} \\ V_{cs} = r_s \cdot i_{cs} + \frac{d\lambda_{cs}}{dt} \end{cases}$$

[La derivada con respecto al tiempo del flujo concatenado en la fase a proveniente de las otras fases del estator y del rotor.]

Resumen Automática y Máquinas Eléctricas

Con estas tensiones, corrientes y flujos concatenados, se pueden armar un vectores, los cuales quedan de la siguiente forma:

$$V_{abcs}(t) = \begin{bmatrix} V_{as}(t) \\ V_{bs}(t) \\ V_{cs}(t) \end{bmatrix} \quad i_{abcs}(t) = \begin{bmatrix} i_{as}(t) \\ i_{bs}(t) \\ i_{cs}(t) \end{bmatrix} \quad \lambda_{abcs}(t) = \begin{bmatrix} \lambda_{as}(t) \\ \lambda_{bs}(t) \\ \lambda_{cs}(t) \end{bmatrix}$$

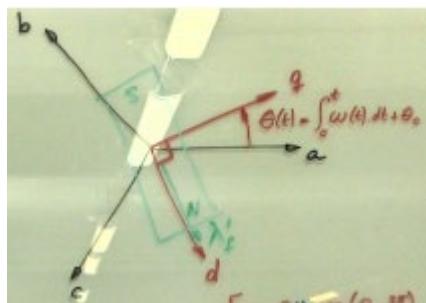
A partir de la utilización de estos vectores podemos expresar de forma matricial las ecuaciones de tensión del estator.

Estator

$$\begin{bmatrix} V_{as}(t) \\ V_{bs}(t) \\ V_{cs}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_s & 0 & 0 \\ 0 & r_s & 0 \\ 0 & 0 & r_s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{as}(t) \\ i_{bs}(t) \\ i_{cs}(t) \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \left(\begin{bmatrix} \lambda_{as}(t) \\ \lambda_{bs}(t) \\ \lambda_{cs}(t) \end{bmatrix} \right)$$

Este sistema es un sistema de 3 coordenadas para expresar un diagrama vectorial en dos dimensiones, por lo que podríamos buscar otro sistema de coordenadas de 2 dimensiones para representarlo. Para ello definimos un sistema qd0, en donde el eje 0 es nulo si el sistema está balanceado, el mismo hace referencia al neutro. Ese eje se dibuja en forma perpendicular, o no se dibuja. Los ejes q (cuadratura) y d (directo), están a 90° entre sí.

Definimos que el eje q está desplazado un ángulo θ respecto al eje a. Ese ángulo θ puede ser un ángulo arbitrario. Los ejes qd pueden girar siempre y cuando $\theta(t)$ sea continuo lo que no implica que sean continuas sus derivadas.



Para transformar el sistema de coordenadas abc a qd0 se plantea la siguiente matriz de transformación:

Es decir que siempre hay que decir que tenemos que tenemos una transformación de 3 a 3 coordenadas por más que el eje 0 no tiene valores o representación en el plano

$$\begin{bmatrix} f_{qs}^r(t) \\ f_{ds}^r(t) \\ f_{0s}^r(t) \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos \theta_r(t) & \cos \left(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3} \right) & \cos \left(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3} \right) \\ \sin \theta_r(t) & \sin \left(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3} \right) & \sin \left(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3} \right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_{as}(t) \\ f_{bs}(t) \\ f_{cs}(t) \end{bmatrix}$$

Para que la transformación sea válida, es necesario que tenga inversa, la cual va a permitir transformar desde las coordenadas qd0 a abc.

$$\begin{bmatrix} f_{as}(t) \\ f_{bs}(t) \\ f_{cs}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_r(t) & \sin \theta_r(t) & 1 \\ \cos \left(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3} \right) & \sin \left(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3} \right) & 1 \\ \cos \left(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3} \right) & \sin \left(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3} \right) & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} f_{qs}^r(t) \\ f_{ds}^r(t) \\ f_{0s}^r(t) \end{bmatrix}$$

El 2/3 que multiplica a la transformación directa, mantiene invariantes a los módulos de las resultantes entre las coordenadas qd0 y abc.

Recordar que siempre son TRANSFORMACIONES ALGEBRAICAS no TRANSFORMADAS.

Ecuaciones del estator en coordenadas qd0

Como mencionamos anteriormente las ecuaciones de las tensiones del estator de una máquina síncrona, independientemente del conexiónado en estrella o triángulo, son:

$$\begin{cases} V_{as} = r_s \cdot i_{as} + \frac{d\lambda_{as}}{dt} \\ V_{bs} = r_s \cdot i_{bs} + \frac{d\lambda_{bs}}{dt} \\ V_{cs} = r_s \cdot i_{cs} + \frac{d\lambda_{cs}}{dt} \end{cases}$$

Resumen Automática y Máquinas Eléctricas

Al analizar estas ecuaciones en coordenadas abc, surge un gran problema, las inductancias mutuas y autoinductancias dependen de la posición instantánea del rotor, lo que genera una complejidad que lleva al problema a un punto inmanejable o muy difícil de hacerlo.

En la derivada del flujo concatenado, hay acoplamiento mutuo, lo que produce una diferencia respecto de las máquinas de corriente continua.

Al aplicar la transformación directa de Park para pasar de coordenadas abc a qd0

$$V_{qd0s}^\theta(t) = K_s(\theta) \cdot \begin{bmatrix} r_s & 0 & 0 \\ 0 & r_s & 0 \\ 0 & 0 & r_s \end{bmatrix} \cdot K_s^{-1}(\theta) \cdot i_{qd0s}^\theta(t) + K_s(\theta) \cdot \frac{d}{dt} (K_s^{-1}(\theta)) \cdot \lambda_{qd0s}^\theta(t)$$

Como tengo la derivada de un producto de funciones aplico la regla del producto

$$\begin{aligned} V_{qd0s}^\theta(t) = K_s(\theta) \cdot & \begin{bmatrix} r_s & 0 & 0 \\ 0 & r_s & 0 \\ 0 & 0 & r_s \end{bmatrix} \cdot K_s^{-1}(\theta) \cdot i_{qd0s}^\theta(t) + K_s(\theta) \cdot K_s^{-1}(\theta) \cdot \frac{d\lambda_{qd0s}^\theta(t)}{dt} \\ & + K_s(\theta) \cdot \frac{d}{dt} (K_s^{-1}(\theta)) \cdot \lambda_{qd0s}^\theta(t) \end{aligned}$$

Podemos ver que $K_s(\theta) \cdot K_s^{-1}(\theta) = I$. Desarrollando la expresión $K_s(\theta) \cdot \frac{d}{dt} (K_s^{-1}(\theta))$ queda de la siguiente manera

$$\begin{aligned} K_s(\theta) \cdot \frac{d}{dt} (K_s^{-1}(\theta)) &= \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos \theta_r(t) & \cos \left(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3} \right) & \cos \left(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3} \right) \\ \sin \theta_r(t) & \sin \left(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3} \right) & \sin \left(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3} \right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \frac{d\theta(t)}{dt} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} -\sin \theta_r(t) & \cos \theta_r(t) & 0 \\ -\sin \theta_r(t) & \cos \theta_r(t) & 0 \\ -\sin \theta_r(t) & \cos \theta_r(t) & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Derivada de } Ks-1(\Theta)} \end{aligned}$$

Multiplicando las matrices:

$$K_s(\theta) \cdot \frac{d}{dt} (K_s^{-1}(\theta)) = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \omega(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \omega(t)$$

Reemplazando en la expresión anterior podemos obtener la ecuación vectorial de tensión del estator en coordenadas qd0 para cualquier ángulo θ :

$$V_{qd0s}^\theta(t) = \begin{bmatrix} r_s & 0 & 0 \\ 0 & r_s & 0 \\ 0 & 0 & r_s \end{bmatrix} \cdot i_{qd0s}^\theta(t) + I \cdot \frac{d\lambda_{qd0s}^\theta(t)}{dt} + \frac{d\theta(t)}{dt} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \lambda_{qd0s}^\theta(t)$$

Expresando la matriz anterior como un sistema de ecuaciones algebraicas. Debemos considerar que se produce un acoplamiento entre las ecuaciones de $V_{qs}^\theta(t)$ y $V_{0s}^\theta(t)$ debido a la matriz del último término de la ecuación matricial anterior.

$$\begin{cases} V_{qs}^\theta(t) = r_s \cdot i_{qs}^\theta(t) + \frac{d\lambda_{qs}^\theta(t)}{dt} + \frac{d\theta(t)}{dt} \cdot \lambda_{ds}^\theta(t) \\ V_{qs}^\theta(t) = r_s \cdot i_{ds}^\theta(t) + \frac{d\lambda_{ds}^\theta(t)}{dt} - \frac{d\theta(t)}{dt} \cdot \lambda_{qs}^\theta(t) \\ V_{0s}^\theta(t) = r_s \cdot i_{0s}^\theta(t) + \frac{d\lambda_{0s}^\theta(t)}{dt} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{[Prestar atención a los} \\ \text{signos de los flujos]} \end{array}$$

Esta expresión es una expresión general para cualquier máquina trifásica. Es necesario definir cómo se va a asignar la coordenada θ para determinar la velocidad de movimiento en el sistema de coordenadas y cómo se comportan los flujos concatenados en esa situación.

Particularizando el sistema de ecuaciones anterior para una máquina síncrona de imanes permanentes, considerando que los circuitos magnéticos son lineales (no hay saturación magnética) y

Resumen Automática y Máquinas Eléctricas

forzando a que la posición instantánea θ en coordenadas qd0 este fija eléctricamente al rotor determinamos las siguientes ecuaciones:

Para que se cumpla esta última condición es necesario definir a Theta como $\theta = P_p \cdot \theta_m$

Siendo θ la posición del campo magnético rodante y θ_m la posición instantánea mecánica del rotor.

Asignando el eje d en la dirección del polo Norte de la excitación en el rotor, la velocidad queda determinada por la siguiente ecuación: $|_{\text{Gracias a que hacemos esto, es posible llegar a la siguiente igualdad}}$

$$\omega = P_p \cdot \omega_m$$

Siendo ω la velocidad del campo magnético rodante y ω_m la velocidad instantánea mecánica del rotor. Es así que referenciamos nuestra posición y nuestra velocidad con respecto al rotor

Haciendo las consideraciones realizadas en las dos ecuaciones anteriores se puede demostrar que los flujos concatenados para cada una de las componentes en coordenadas qd0, tienen la siguiente forma:

$$\lambda_{qs}^r(t) = L_q \cdot i_{qs}^r(t)$$

$$\lambda_{ds}^r(t) = L_d \cdot i_{ds}^r(t) + \lambda_m$$

[Esto se debía a que el eje d está alineado con el sentido del flujo del rotor, por eso es que esta componente del flujo que aporta el rotor o la excitación está en la misma dirección del flujo que aporta la corriente Id que es del estator]

$$\lambda_{0s}^r(t) = L_0 \cdot i_{0s}^r(t)$$

[La inductancia de dispersión por lo general es pequeña y la I0 por lo general es nula]

Siendo λ_m el flujo concatenado por los imanes del rotor en el estator.

Reemplazando las ecuaciones de los flujos magnéticos en el sistema de ecuaciones de tensiones en coordenadas qd0, quedan expresadas de la siguiente forma:

La tensión en bornes equivalentes de la fase virtual q del estator visto desde el rotor es igual..

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{qs}^r(t) = r_s \cdot i_{qs}^r(t) + L_q \cdot \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} + P_p \cdot \omega_m(t) \cdot [L_d \cdot i_{ds}^r(t) + \lambda_m] \\ V_{ds}^r(t) = r_s \cdot i_{ds}^r(t) + L_d \cdot \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} - P_p \cdot \omega_m(t) \cdot L_q \cdot i_{qs}^r(t) \\ V_{0s}^r(t) = r_s \cdot i_{0s}^r(t) + L_0 \cdot \frac{di_{0s}^r(t)}{dt} \end{array} \right. |_{\text{Velocidad del eje de rotación mecánico del rotor}}$$

De esta manera quedan las ecuaciones de tensión de fase en coordenadas qd0 de una máquina sincrónica de imanes permanentes.

Analizando la expresión del torque electromagnético en coordenadas qd0 podemos apreciar que no depende del eje 0. La demostración de la ecuación de torque se puede analizar en el libro de Kraus.

$$T_e = \frac{3}{2} P_p \cdot [\lambda_{ds}^r(t) \cdot i_{qs}^r(t) - \lambda_{qs}^r \cdot i_{ds}^r]$$

El 3/2 tiene que ver con el 2/3 que se usa en la transformaciones de Park y surge como un factor de escala

Reemplazando en la ecuación del torque electromagnético las ecuaciones de flujo magnético obtenidas anteriormente:

$$T_e = \frac{3}{2} P_p \cdot [(L_d \cdot i_{ds}^r(t) + \lambda_m) \cdot i_{qs}^r(t) - L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot i_{ds}^r]$$

Reordenando y sacando factor común $i_{qs}^r(t)$:

$$T_e = \frac{3}{2} P_p \cdot [\lambda_m + (L_d - L_q) \cdot i_{ds}^r] \cdot i_{qs}^r(t)$$

En las máquinas sincrónicas existe una relación entre los parámetros L_d y L_q los cuales dependen de como estén montados los imanes y por lo tanto como se definen constructivamente los caminos de reluctancia. Tanto para las máquinas con excitación separada como para las de imanes permanentes, se puede demostrar que:

- Si el rotor es de polos salientes: $L_d > L_q$
- Si el rotor es liso: $L_d = L_q$

Resumen Automática y Máquinas Eléctricas

Para el caso del rotor de polos salientes, como el término $(L_d - L_q) \cdot i_{ds}^r$ en la ecuación del torque no se anula y el factor $L_d - L_q$ es positivo, se puede aumentar el torque manipulando la corriente i_{ds}^r para una misma corriente i_{qs}^r . Para lograr este efecto se debe manipular la excitación de la máquina, equivalentemente a aumentar la excitación de campo de la máquina de Corriente Continua, es decir tenemos un reforzamiento de campo Field Forcing. De la misma manera si i_{ds}^r es negativa producimos un debilitamiento de campo Field Weakening. Si $i_{ds}^r = 0$ el único flujo actuante es el de los imanes, que al ser constante, se obtiene una relación lineal entre la corriente $i_{qs}^r(t)$ y el torque electromagnético T_e .

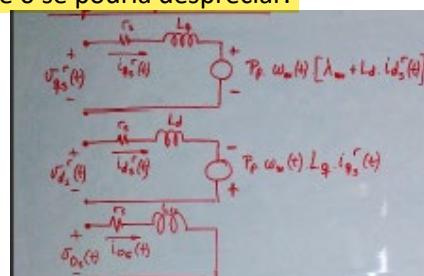
El análisis realizado anteriormente nos permite entender a la máquina trifásica sincrónica de imanes permanentes como si fuera una máquina de corriente continua.

Representación equivalente de las ecuaciones de Tensión

Realizando una representación eléctrica de las ecuaciones de tensión podemos analizar que la primera y la segunda ecuación tienen un comportamiento similar a una máquina de corriente continua con excitación fija.

Es necesario destacar que debido al acoplamiento cruzado se ve que el rotor está alimentado de forma cruzada en el primer y el segundo diagrama.

En condiciones de simetría, el eje 0 se podría despreciar.



Estos circuitos no son reales, son simplemente circuitos equivalentes.

Modelo dinámico en coordenadas qd0

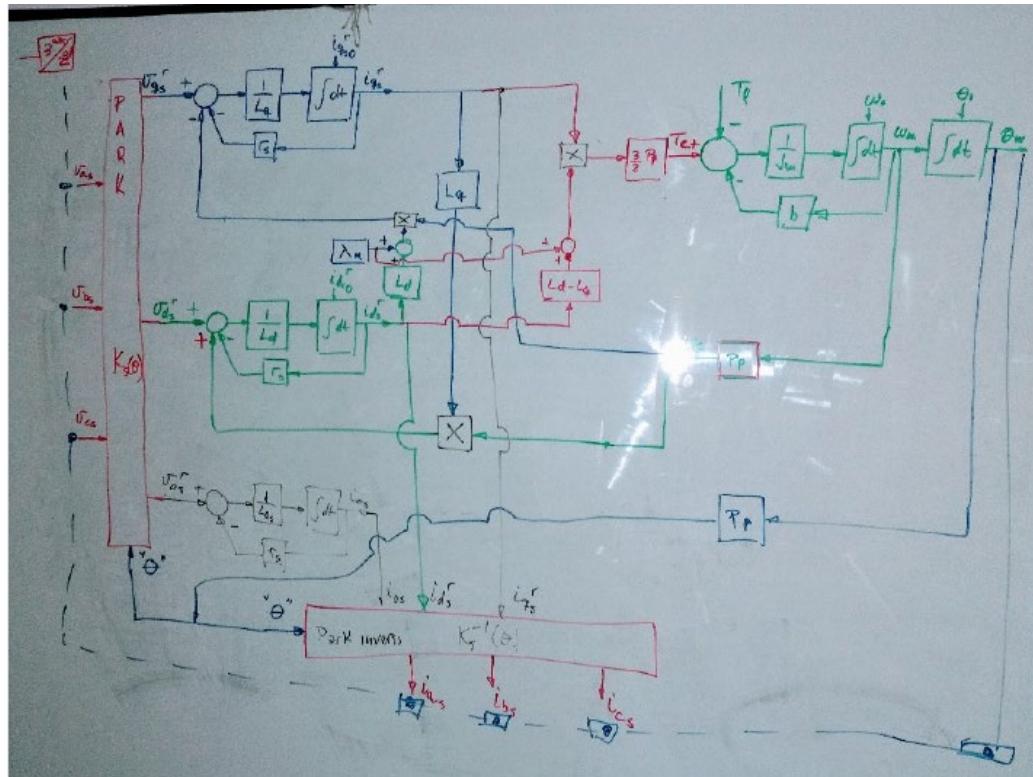
Agregando el subsistema mecánico podemos representar el modelo dinámico con las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} V_{qs}^r(t) = r_s \cdot i_{qs}^r(t) + L_q \cdot \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} + P_p \cdot \omega_m(t) \cdot [L_d \cdot i_{ds}^r(t) + \lambda_m] \\ V_{ds}^r(t) = r_s \cdot i_{ds}^r(t) + L_d \cdot \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} - P_p \cdot \omega_m(t) \cdot L_q \cdot i_{qs}^r(t) \\ V_{0s}^r(t) = r_s \cdot i_{0s}^r(t) + L_0 \cdot \frac{di_{0s}^r(t)}{dt} \\ T_e = \frac{3}{2} P_p \cdot [\lambda_m + (L_d - L_q) \cdot i_{ds}^r] \cdot i_{qs}^r(t) \\ J_m \cdot \frac{d\omega(t)}{dt} = T_e(t) - b \cdot \omega_m(t) - T_l(t) \\ \frac{d\theta(t)}{dt} = \omega_m(t) \end{cases}$$

[Creo que no forma parte así como así del modelo dinámico. Si se utiliza en la ecuación de abajo, pero así como ecuación sola no está involucrada creo]

Resumen Automática y Máquinas Eléctricas

Diagrama de bloques completo de la Maquina Sincrónica de imanes permanentes



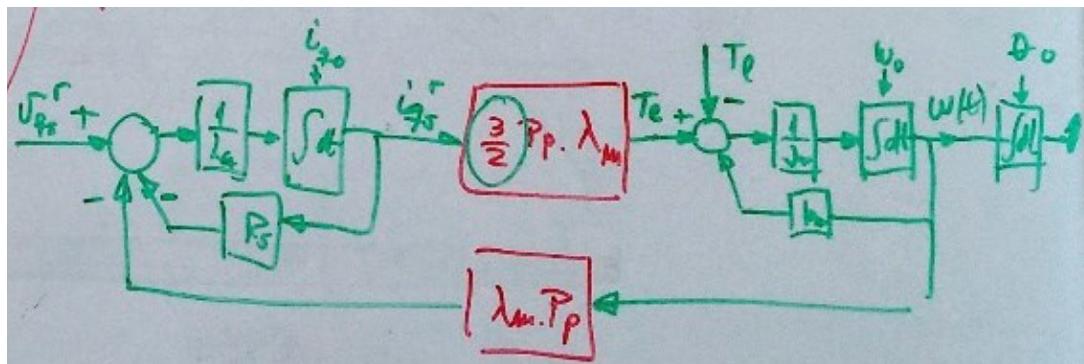
Ecuaciones de Control vectorial Orientado al Campo Magnético

Si de alguna manera se puede forzar que la corriente $i_{ds}^r(t) \equiv 0$ y $\frac{di_{ds}^r(t)}{dt} \equiv 0$ siempre es necesario forzar a que la tensión $V_{ds}^r(t)$ cumpla la siguiente ecuación:

$$V_{ds}^r(t) = -P_p \cdot \omega_m(t) \cdot L_q \cdot i_{qs}^r(t)$$

Para lograr que $V_{ds}^r(t)$ tome ese valor, es necesario realizar dentro del controlador una realimentación para imponer esa tensión en el eje directo.

Este es el modelo equivalente que resulta si anulamos la corriente i_{ds} y la hacemos por ende igual a 0



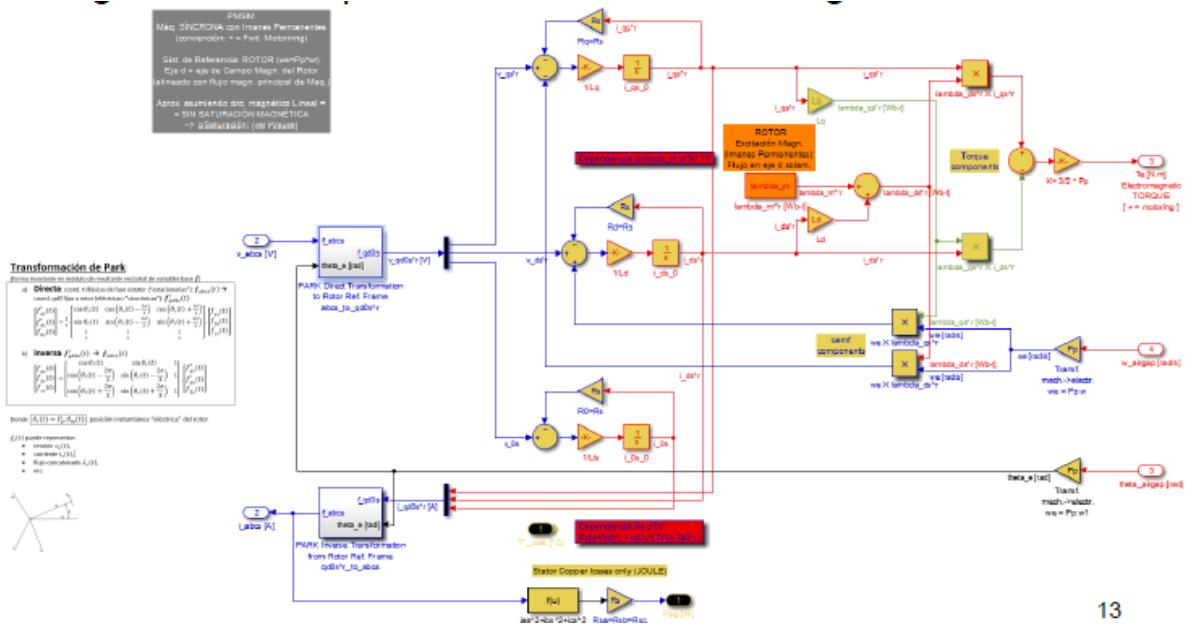
Una vez realizada la realimentación podemos ver que las ecuaciones del modelo que estaban acopladas, quedan como ecuaciones diferenciales autónomas, sin producto entre las variables de estado por lo que desaparecen las no linealidades.

Podemos ver que el diagrama de bloques es el mismo que el de una máquina de corriente continua con excitación constante.

Resumen Automática y Máquinas Eléctricas

$$\begin{cases} V_{qs}^r(t) = r_s \cdot i_{qs}^r(t) + L_q \cdot \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} + P_p \cdot \omega_m(t) \cdot \lambda_m \\ V_{ds}^r(t) = -P_p \cdot \omega_m(t) \cdot L_q \cdot i_{qs}^r(t) \quad \text{forzado} \\ T_e = \frac{3}{2} P_p \cdot \lambda_m \cdot i_{qs}^r(t) \\ J_m \cdot \frac{d\omega(t)}{dt} = T_e(t) - b \cdot \omega_m(t) - T_l(t) \\ \frac{d\theta(t)}{dt} = \omega_m(t) \end{cases}$$

Podemos ver un diagrama de bloques del sistema electromagnético planteado para este caso.



13

2. Control de Corriente / Torque

Control vectorial de la máquina síncrona de imanes permanentes (PMSM permanent Magnet syncronic machine)

En este diagrama se está suponiendo que hay acceso a las coordenadas virtuales q_0, d_0 . Sería necesario Agregar la transformación de park directa e inversa.

Se tiene en cuenta que no está diagramado el eje 0 considerando que es equilibrada la máquina.

En el diagrama se está desacoplando la caída óhmica y el flujo concatenado. Además se está agregando un control proporcional.

Resumen Automática y Máquinas Eléctricas

En negro se encuentra representada la planta. Seguiremos los mismos pasos que para una máquina de corriente continua, determinando el modulador de tensión, las realimentaciones necesarias, el regulador de corriente y finalmente el modulador de torque.

Es así que:

1. Hay que desacoplar los ejes q y d. Se puede hacer esto en forma progresiva o en forma paralela (Ya que llegaremos al mismo resultado). Lo distinto de estos casos es que ahora tenemos 2 ejes que manipular, realimentaciones no lineales y acoplamiento cruzado entre los ejes.

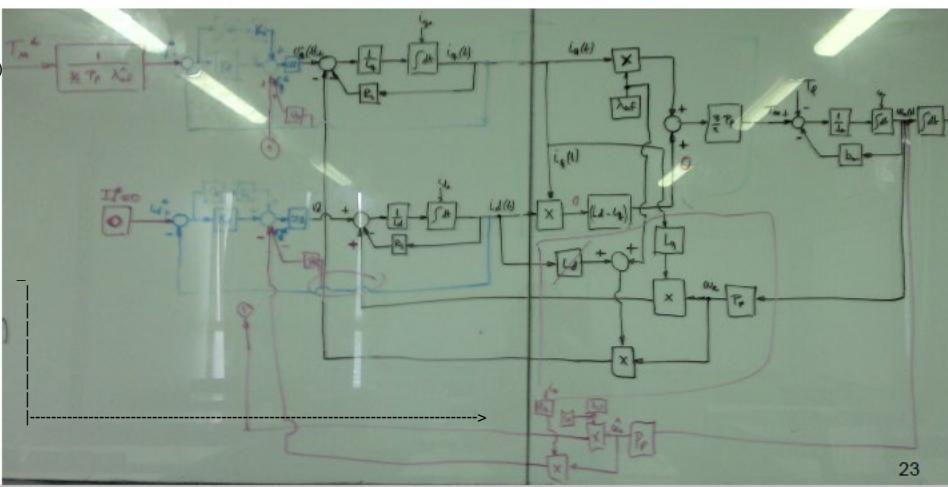
Es así que lo primero que suponemos es que tenemos un modulador de tensión equivalente tanto para el eje d como el q, luego procederemos a realizar las realimentaciones relacionadas a las tensiones.

2. Es así que primero desacoplamos los términos de tensión son lineales y luego pasamos a las tensiones inducidas agregando las realimentaciones necesarias.

3. Luego en el eje q lo que hacemos es plantear un control proporcional de corriente (introduciendo una ganancia con unidad de resistencia R') permitiéndonos así plantear el regulador de corriente y ubicar el polo en la posición que deseamos en el plano de Laplace. Con el eje d se procede de la misma forma.

Nota: En los sistemas comerciales, podrían agregarse acciones de control integral que nos agrega otro polo pero no es indispensable y en muchos casos no se usa.

- **2 lazos separados (desacoplados) de control de corriente: i_d e i_q**
- **Desacoplamiento de realim. propias y cruzadas**
- **Consigna $i_d^*=0 \rightarrow$ Modulador de torque equivalente c/ i_q^***



23

4. En el eje d, nosotros podríamos haber hecho algo más simple que es simplemente hacer la realimentación que me permite hacer que id sea igual a 0. Esto es forzando el valor de Vd y trabajando sobre la ecuación autónoma de 1er orden que tiene un polo que depende de Rs y Ld pero ese polo queda fijo si nosotros hacemos ese forzamiento. Entonces si tuviésemos un valor de entrada i_d^* distinto de 0, al ser estable todo este sistema autónomo el valor de id va a decaer a 0 si siguiendo una constante de tiempo dada por R_s y L_d . Eso ya nos permite hacer que id = 0 y tener el desacoplamiento en los dos ejes.

Pero este decaimiento es relativamente lento, pero si nosotros además de eso, hacemos lo detallado en el punto 3 podemos con R' podemos tener un decaimiento mucho más rápido. Esta es una mejora que no implica mucho, ya que tenemos medida la i y además nos permite agregar una referencia de Id (normalmente 0) que nos permita debilitar o fortalecer el campo.

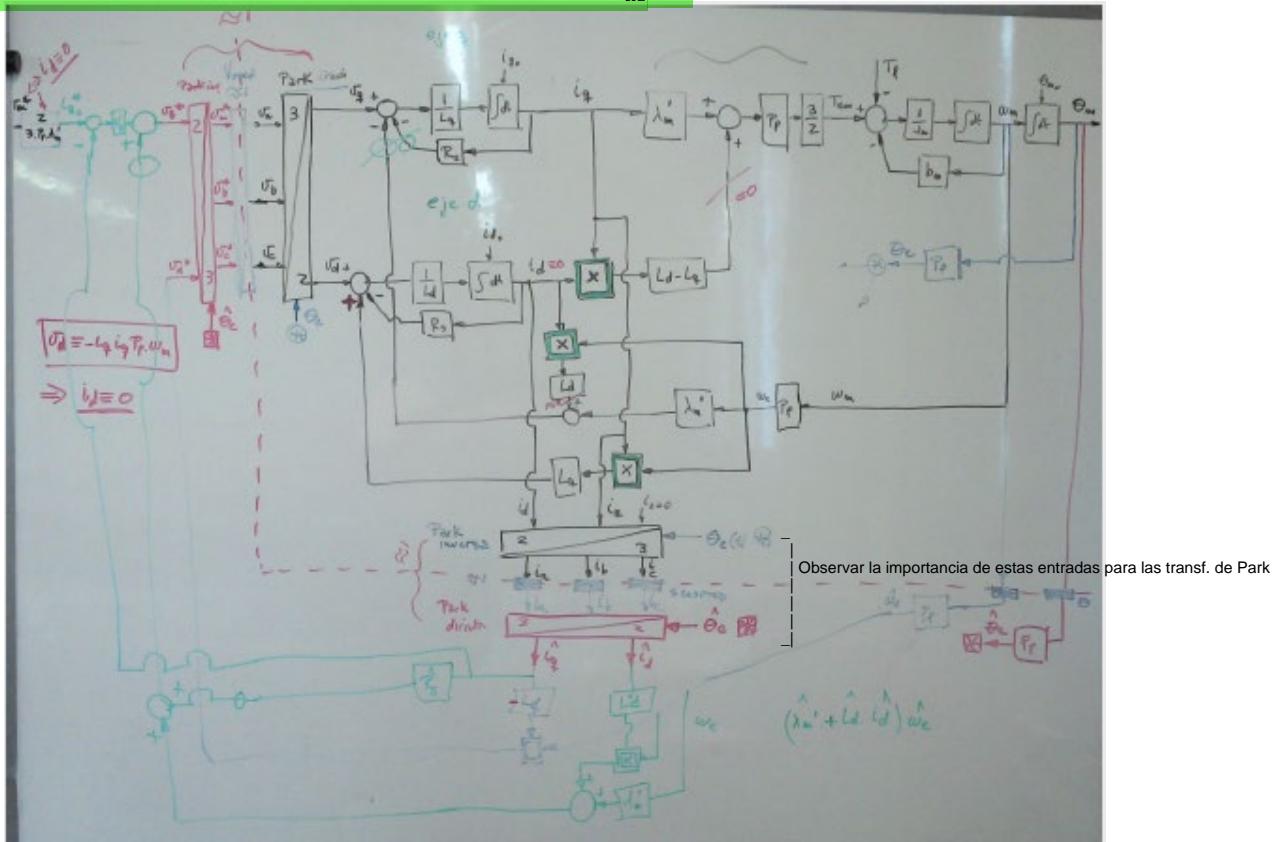
5. Forzando la corriente $i_d=0$, lo que nos queda para el modulador de torque es encontrar la relación entre la consigna de torque T_m^* y la corriente i_q . Y listo.

En el siguiente diagrama podemos ver separado el controlador de la máquina. Para poder realimentar $V_{ds}^r(t)$, es necesario poder medir y manipular dentro del controlador, directamente las variables en coordenadas qd0. Por lo tanto se utiliza la transformación de park directa e inversa para recrear dichas coordenadas dentro del controlador.

Tener en cuenta de que tanto para la directa como la inversa necesito saber la posición del rotor en ese instante y por ende la necesidad de precisión de los sensores o estimadores..

Hay que tener precaución debido a que es necesario medir la posición y la corriente, por lo tanto vamos a necesitar tener sensores con un ancho de banda adecuado y no tener errores de medición, ya que se producen diferencias significativas entre las estimaciones realizadas en el controlador y las variables reales, lo que lleva a que la maquina se comporte de forma muy diferente a como debería hacerlo.

Este diagrama es válido para cuando $i_{ds}^r(t) \equiv 0$. Si se desea que tome otros valores para hacer reforzamiento o debilitamiento de campo es necesario que se modifique el subsistema mecánico, debido que el actual no tiene en cuenta el término dependiente de $i_{ds}^r(t)$. [Ya que sino cometíramos errores de Torque]



62

Recordar que todo esto es parte del Lazo Interno, luego hay que implementar lo que ya sabemos del lazo externo visto para Máquinas de Corriente Continua