

# Lecture 5: Modelo Monocéntrico con Vivienda

## Urban Economics

Ignacio Sarmiento-Barbieri

Universidad de los Andes

August 23, 2023

- ▶ El objetivo del modelo es explicar la distribución espacial de la población en una ciudad.
- ▶ El mecanismo principal es la relación entre los costos de transporte, el precio de la vivienda y el consumo de vivienda.
- ▶ Estamos interesados en derivar un conjunto de gradientes observados.
- ▶ **Resultados:**
  - 1 Los precios de la vivienda disminuyen con la distancia al CBD.
  - 2 El consumo de vivienda aumenta con la distancia al CBD.
  - 3 La densidad y la relación capital-tierra disminuyen con la distancia al CBD.

# Problema de Maximización de los Residentes

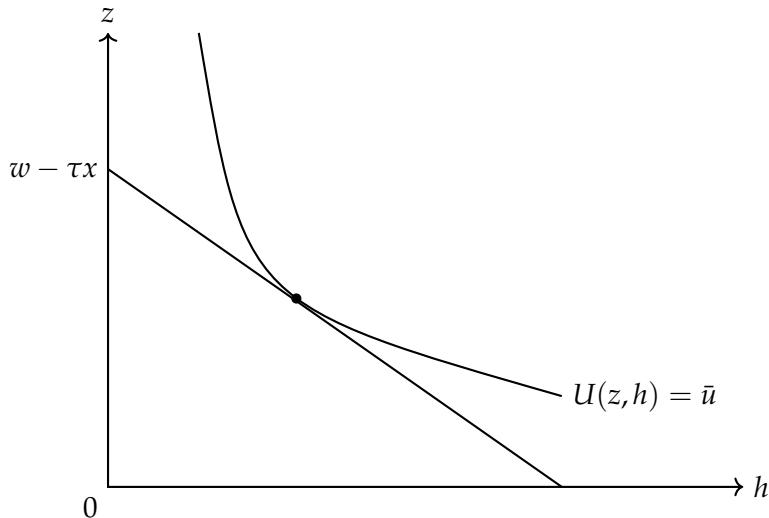
- ▶ Los consumidores tienen utilidad  $U(z, h)$  sobre el bien numerario  $z$  y la vivienda  $h$ .
- ▶ El costo de transporte es  $\tau$
- ▶ Dada la restricción presupuestaria:  $z + p(x) \cdot h(x) + \tau \cdot x = w$ .
- ▶ En equilibrio espacial  $U(z, h) = \bar{u}$
- ▶ Problema de maximización:

$$\max_h U(w - \tau \cdot x - p(x)h(x), h(x)) = \bar{u} \quad (1)$$

- ▶ FOC del problema

$$\frac{\partial U}{\partial h(x)} - \frac{\partial U}{\partial z} p(x) = 0 \quad (2)$$

# Problema de Maximización de los Residentes



# Derivando el gradiente de precios

- Diferenciando toda la expresión:

$$\frac{\partial U}{\partial h(x)} \frac{\partial h(x)}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z} p(x) \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z} \left( \tau + h(x) \frac{\partial p(x)}{\partial x} \right) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial h(x)}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial h(x)} - \frac{\partial U}{\partial z} p(x) \right) - \frac{\partial U}{\partial z} \left( \tau + h(x) \frac{\partial p(x)}{\partial x} \right) = 0 \quad (4)$$

- Resultado:

$$\frac{\partial p(x)}{\partial x} = \frac{-\tau}{h(x)} \quad (5)$$

# Gradiente de Precio: Condición Alonso-Muth

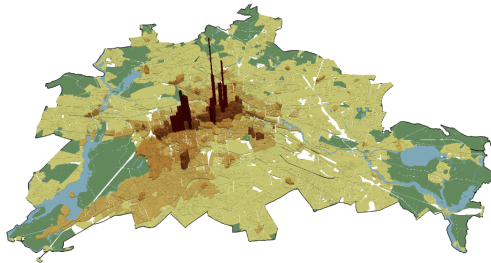
- ▶ La condición de Alonso-Muth:

$$\frac{\partial p(x)}{\partial x} = \frac{-\tau}{h(x)} \quad (6)$$

- ▶ El precio disminuye con la distancia desde el centro como función de los costos de transporte y consumo de vivienda.
- ▶ Si  $h(x) = \bar{h}$ , entonces el gradiente es constante
- ▶ Si la vivienda aumenta con la distancia desde el CBD, entonces el gradiente es convexo

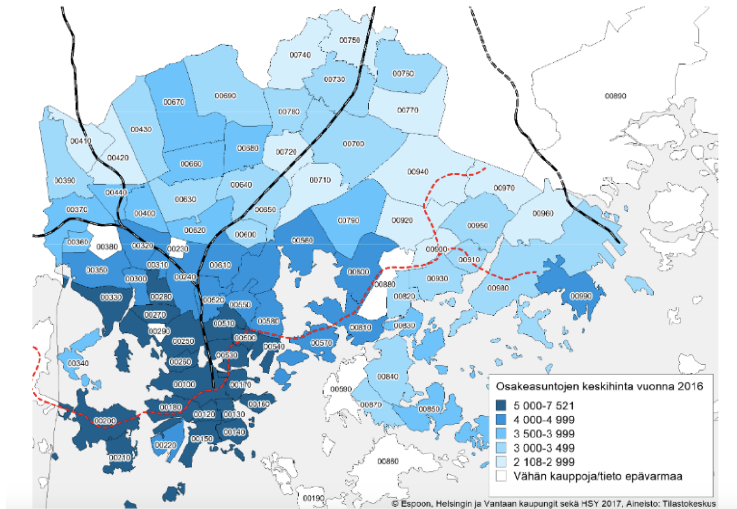
# Más gradientes en la vida real

Land prices in Berlin



Fuente: Ahlfeldt, G. M., Redding, S. J., Sturm, D. M., & Wolf, N. (2015). The economics of density: Evidence from the Berlin Wall. *Econometrica*, 83(6), 2127-2189.

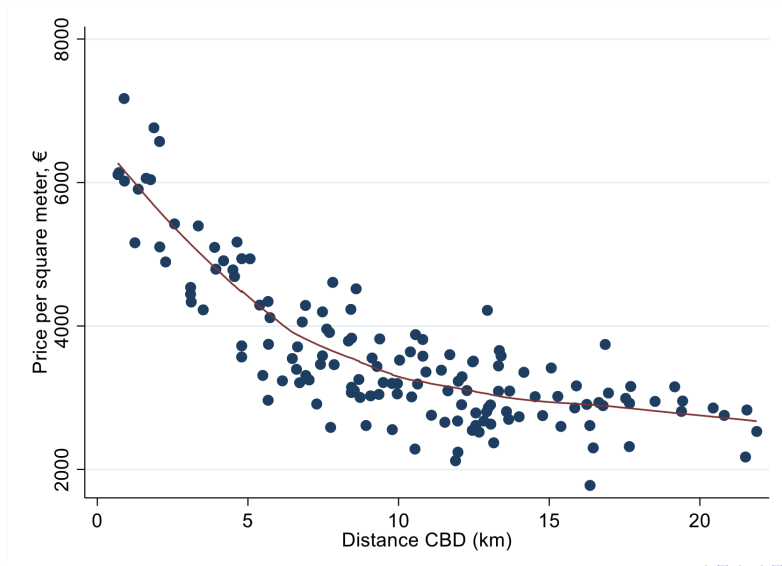
# Más gradientes en la vida real



Fuente: Saarimaa 2021



# Más gradientes en la vida real



Fuente: Saarimaa 2021

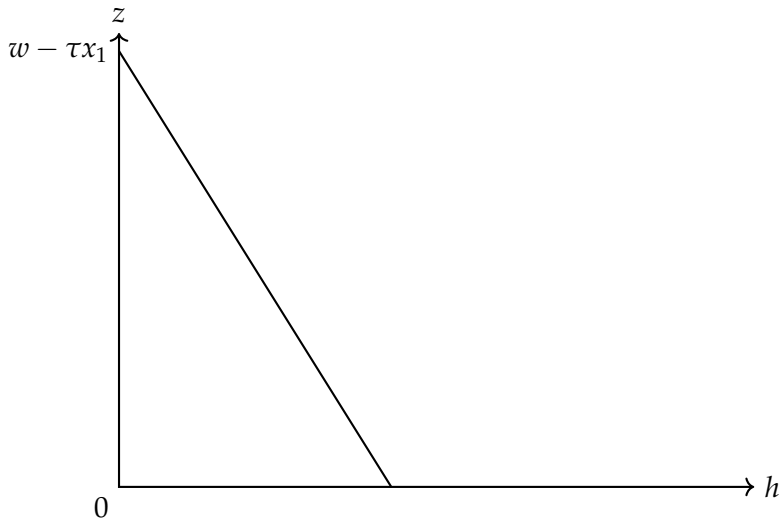
# Gradiente de Consumo de Vivienda

- ▶ En este modelo, el precio de la vivienda  $p(x)$  se ajusta de manera que todos los residentes tengan la misma utilidad.
- ▶ Podemos trabajar con la demanda de vivienda de Marshalliana  $h(p(x), y)$  o la demanda de Hicksiana  $h(p(x), \bar{u})$ .
- ▶ El gradiente de la demanda de vivienda de Hicksiana es:

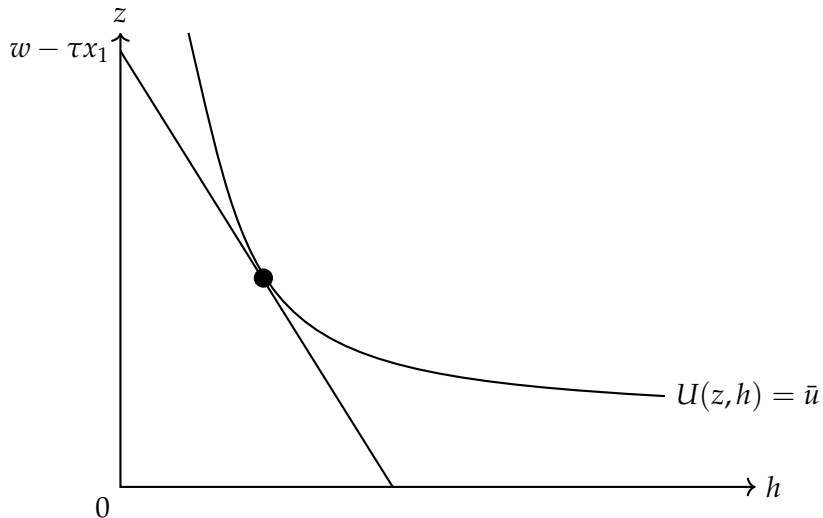
$$\frac{\partial h(p, u, x)}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} > 0$$

- ▶ El consumo de vivienda aumenta con la distancia; el precio de la vivienda es más barato, por lo que los consumidores se inclinan hacia la vivienda.

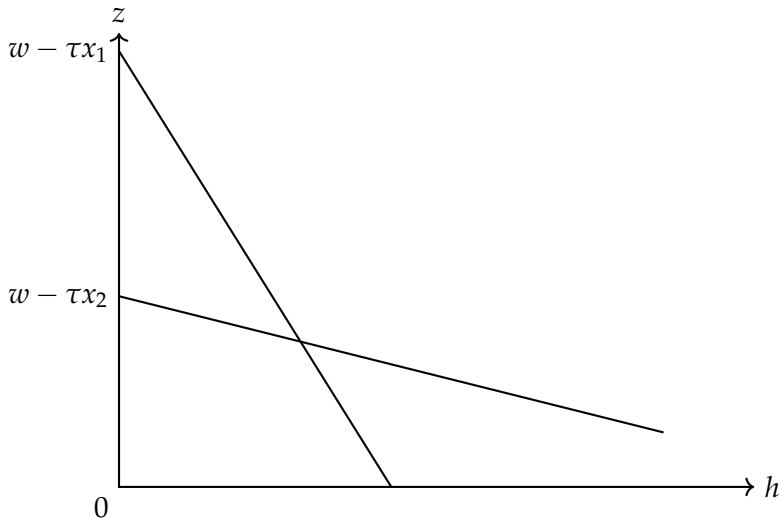
# Gradiente de Consumo de Vivienda



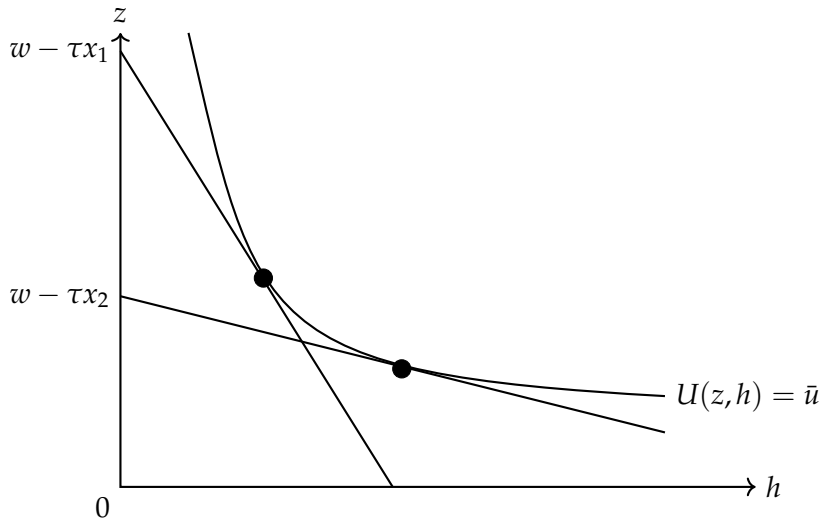
# Gradiente de Consumo de Vivienda



# Gradiente de Consumo de Vivienda

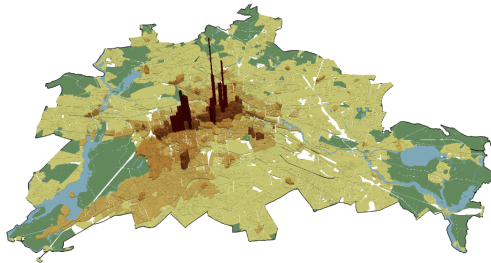


# Gradiente de Consumo de Vivienda



# Más gradientes en la vida real

Land prices in Berlin



Fuente: Ahlfeldt, G. M., Redding, S. J., Sturm, D. M., & Wolf, N. (2015). The economics of density: Evidence from the Berlin Wall. *Econometrica*, 83(6), 2127-2189.

# Producción de Vivienda

- ▶ La industria de la construcción de viviendas es perfectamente competitiva con una función de producción con rendimientos constantes a escala (CRS) y cóncava.
- ▶ Los insumos para la construcción son la tierra  $l$  y el capital  $k$ :  $H(k, l)$ .
- ▶ La parte importante de la concavidad es que  $H_{kk} < 0$ ; construir más alto es más caro.
- ▶ El precio del capital es  $i$ , el precio de la tierra en  $x$  es  $R(x)$ .
- ▶ Dados los CRS es mas fácil trabajar con la relación capital-tierra:  $S = k/l$ .



# Producción de Vivienda

- Podemos escribir

$$H(k, l) = H(k/l, l/l) = H(S, 1) \quad (7)$$

- Definimos  $H(S) \equiv H(S, 1)$  como vivienda por unidad de tierra.
- Los beneficios por unidad de tierra:

$$\Pi(x) = p(x) \cdot H(S) - i \cdot S - R(x)$$

# Optimización de la Empresa y Estructura del Mercado

- ▶ Con CRS y entrada libre, tenemos un mercado perfectamente competitivo con empresas de construcción obteniendo cero beneficio.
- ▶ Similar al problema de maximización de la utilidad, esto da dos condiciones:
  - 1 FOC para  $S$  óptimo
  - 2 ecuación de cero beneficio.

$$p(x) \frac{\partial H(S)}{\partial S} = i \quad (8)$$

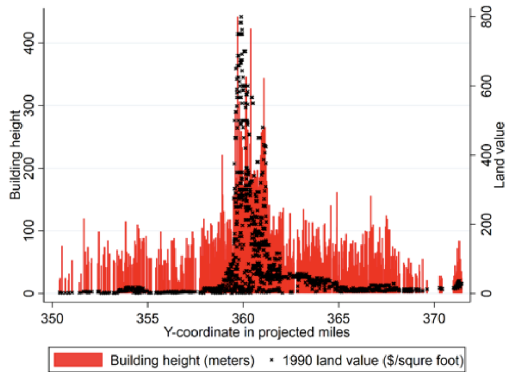
$$p(x) \cdot H(S) - i \cdot S(x) - R(x) = 0 \quad (9)$$

- ▶ La diferenciación total de estas condiciones nos permitirá derivar el gradiente de renta de la tierra y el gradiente de la relación capital-tierra.

$$\frac{\partial R}{\partial x} < 0, \text{ y } \frac{\partial S}{\partial x} < 0$$

# Más gradientes en la vida real

Chicago



Fuente: McM y Ahfeld

# Densidad de Población

- ▶ Supongamos que cada persona vive en una casa separada.
- ▶ Entonces, la población en  $x$  es la cantidad total de viviendas en  $x$  dividida por el consumo de vivienda por persona:

$$N(x) = H(k, l) / h(x) \quad (10)$$

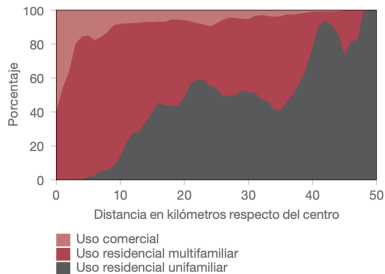
- ▶ La densidad poblacional (población/tierra) es entonces:

$$D(x) = H(k, l) / (l \cdot h(x)) = H(S) / h(x) \quad (11)$$

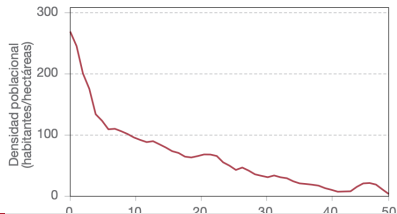
$$\frac{\partial D(x)}{\partial x} = \frac{\partial H(S)}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial x} \frac{1}{h(x)} - \frac{H(S)}{h(x)^2} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} < 0$$

## Más gradientes en la vida real

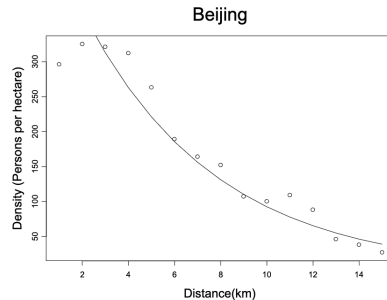
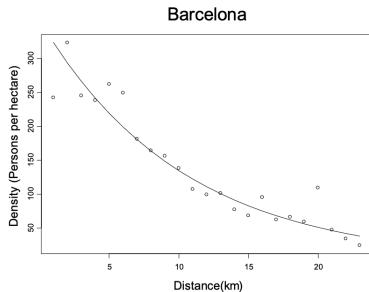
### Panel A: Distribución del uso del suelo (2010)



Panel C: Densidad poblacional (2010)

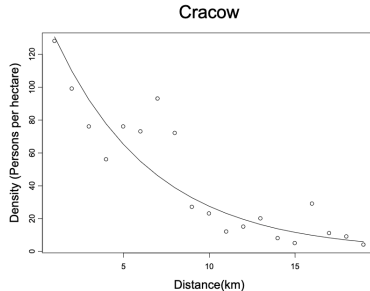
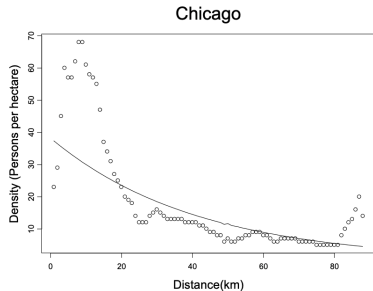


# Más gradientes en la vida real



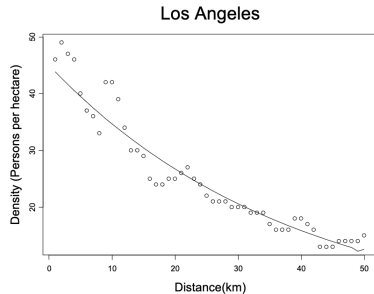
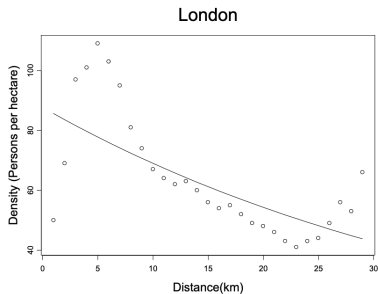
Fuente: Bertaud, A., & Malpezzi, S. (2003). The spatial distribution of population in 48 world cities: Implications for economies in transition. Center for urban land economics research, University of Wisconsin, 32(1), 54-55.

# Más gradientes en la vida real



Fuente: Bertaud, A., & Malpezzi, S. (2003). The spatial distribution of population in 48 world cities: Implications for economies in transition. Center for urban land economics research, University of Wisconsin, 32(1), 54-55.

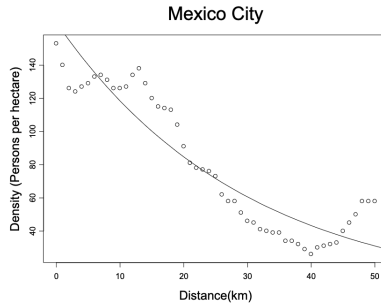
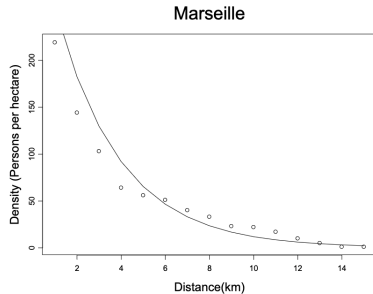
# Más gradientes en la vida real



Fuente: Bertaud, A., & Malpezzi, S. (2003). The spatial distribution of population in 48 world cities: Implications for economies in transition. Center for urban land economics research, University of Wisconsin, 32(1), 54-55.



# Más gradientes en la vida real



Fuente: Bertaud, A., & Malpezzi, S. (2003). The spatial distribution of population in 48 world cities: Implications for economies in transition. Center for urban land economics research, University of Wisconsin, 32(1), 54-55.

# Bid-rent approach (La Función de Oferta de Renta)

- La principal desventaja del enfoque Marshalliano es que llega a la solución de una manera indirecta.

## Bid-rent approach (La Función de Oferta de Renta)

- ▶ La principal desventaja del enfoque Marshalliano es que llega a la solución de una manera indirecta.
- ▶ Resuelve primero el programa del consumidor en una ubicación antes de recuperar el precio de la vivienda en esta ubicación a través de la condición de equilibrio residencial.
- ▶ Luego, conociendo el precio de la vivienda, vuelve a la elección del consumo antes de resolver la ubicación óptima.
- ▶ La principal ventaja del enfoque Marshalliano es dejar claro que el precio de la vivienda en cada ubicación es endógeno y surge dentro del modelo.

# Bid-rent approach (La Función de Oferta de Renta)

- ▶ La condición de Alonso-Muth se puede derivar de manera más directa utilizando el llamado enfoque de bid-rent (también conocido como el enfoque directo).
- ▶ Es forma de resolver el modelo es reformular el problema del consumidor en términos de bid-rent:

*El precio máximo  $p(x)$  que los consumidores están dispuestos a pagar por la vivienda en la ubicación  $x$  de manera que la utilidad sea  $\bar{u}$ .*

# Bid-rent approach (La Función de Oferta de Renta)

- ▶ La bid-rent se define como:

$$\Psi(x, u) \equiv \max_{h(x), z} \{p(x) \mid U(h, z) = \bar{u}, w - \tau \cdot x = p(x)h(x) + z\}$$

- ▶ Sustituyendo la restricción presupuestaria, obtenemos:

$$\Psi(x, u) = \max_{h(x), z} \left\{ \frac{w - \tau \cdot x - z(x)}{h(x)} \mid U(h, z) = \bar{u} \right\}$$