Lecture 8: El CBD como resultado de la interacción de las firmas y La ciudad como una interdependecia entre Firmas y Consumidores

Urban Economics

Ignacio Sarmiento-Barbieri

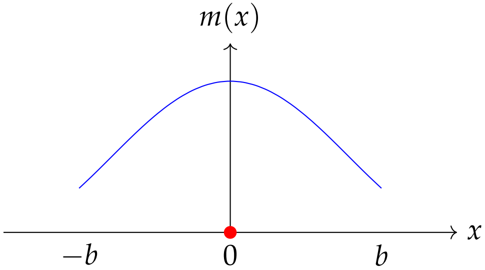
Universidad de los Andes

Agenda

El CBD como resultado de la interacción de las firmas

Recap

$$m(x) = k_1 cos(\sqrt{t}x) \tag{1}$$



El CBD como resultado de la interacción de las firmas

Recap

- Land Rent $\Rightarrow R^*(x) = \left[k_1 cos(\sqrt{t}x)\right]^2$
- Office Space Rent $\Rightarrow R^*(x) = 2k_1 cos(\sqrt{t}x)$
- Need to solve $\Rightarrow k_1$

El CBD como resultado de la interacción de las firmas

Recap

- Use the condition $\Rightarrow R^*(b) = \bar{R}$

$$\sqrt{\bar{R}} = k_1 cos(\sqrt{t}b) \tag{2}$$

$$k_1 = \frac{\sqrt{\bar{R}}}{cos(\sqrt{t}b)} \tag{3}$$

El CBD como resultado de la interacción de las firmas

There are M firms in the city

$$M = \int_{-b}^{b} m(x)dx \tag{4}$$

since the city is symetric

$$M = 2\int_{0}^{b} m(x)dx \tag{5}$$

$$M = 2k_1 \int_{0}^{b} cos(\sqrt{t}x)dx \tag{6}$$

El CBD como resultado de la interacción de las firmas

Need to solve the integral $\Rightarrow$ use variable change

$$u = \sqrt{t}x \tag{7}$$

$$du = \sqrt{t}\,dx \tag{8}$$

Note that $x = 0 \rightarrow u = 0$ and $x = b \rightarrow u = \sqrt{t}b$

$$\int_0^{\sqrt{t}b} cos(u)\frac{du}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^{\sqrt{t}b} cos(u)du \tag{9}$$

$$\frac{1}{\sqrt{t}}\left[sin(u)\right]_0^{\sqrt{t}b} = \frac{1}{\sqrt{t}}\left[sin(\sqrt{t}b) - sin(0)\right] = \frac{sin(\sqrt{t}b)}{\sqrt{t}} \tag{10}$$

El CBD como resultado de la interacción de las firmas

then

$$M = 2k_1 \int_0^b cos(\sqrt{t}x)dx \tag{11}$$

$$M = 2k_1 \frac{sin(\sqrt{t}b)}{\sqrt{t}} \tag{12}$$

El CBD como resultado de la interacción de las firmas

now replacing k_1

$$M = 2\frac{\sqrt{\bar{R}}}{\sqrt{t}}\frac{sin(\sqrt{t}b)}{cos(\sqrt{t}b)} \tag{13}$$

$$M = 2\sqrt{\frac{\bar{R}}{t}}tan(\sqrt{t}b) \tag{14}$$

$$\frac{M}{2}\sqrt{\frac{t}{\bar{R}}} = tan(\sqrt{t}b) \tag{15}$$

$$tan^{-1}\left(\frac{M}{2}\sqrt{\frac{t}{\bar{R}}}\right) = \sqrt{t}b \tag{16}$$

$$b^* = \frac{1}{\sqrt{t}}tan^{-1}\left(\frac{M}{2}\sqrt{\frac{t}{\bar{R}}}\right) \tag{17}$$

El CBD como resultado de la interacción de las firmas

Finally

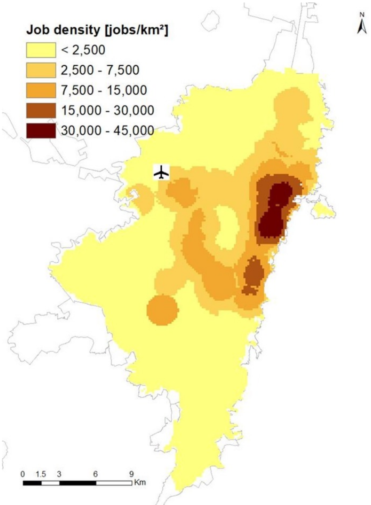
$$k_1 = \frac{\sqrt{\bar{R}}}{cos(\sqrt{t}b)} \tag{18}$$

$$k_1 = \frac{\sqrt{\bar{R}}}{cos\left(tan^{-1}\left(\frac{M}{2}\sqrt{\frac{t}{\bar{R}}}\right)\right)} \tag{19}$$

Agenda

La ciudad como una interdependecia entre Firmas y Consumidores

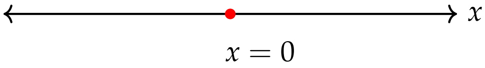
Un aspecto del modelo de ciudad monocéntrica que parece estar en desacuerdo con las ciudades modernas es precisamente su estructura monocéntrica.



La ciudad como una interdependecia entre Firmas y Consumidores

Assumptions

- We model the city as a line



La ciudad como una interdependecia entre Firmas y Consumidores

Assumptions: Hogares

- La utilidad $U(z, s)$, donde:
  - s representa el consumo de tierra.
  - z es el consumo de un bien compuesto.
- El consumo de tierra es constante e igual a S_h.
- Cada hogar provee una unidad de trabajo.
- El bien compuesto es importado a un precio fijo de 1.
- Un hogar elige dónde vivir (x) y trabajar (x_w), sujetos a la restricción:

$$z + R(x)S_h + t|x - x_w| = W(x_w) \tag{20}$$

- Donde t es el costo unitario de transporte.

La ciudad como una interdependecia entre Firmas y Consumidores

Assumptions: Hogares

- El problema se puede reescribir como maximizar el consumo del bien compuesto:

$$z(x, x_w) = W(x_w) - R(x)S_h - t|x - x_w|. \tag{21}$$

- En equilibrio espacial $U(z, s) = \bar{u}$

La ciudad como una interdependecia entre Firmas y Consumidores

Función de Desplazamiento

- Definimos La función $J(x)$ que asocia cada ubicación residencial x con un sitio de trabajo x_w potencial que maximiza el ingreso neto.

$$J(x) = x_w \tag{22}$$

- Para un individuo en x, el lugar de trabajo que maximiza su ingreso neto es:

$$W[J(x)] - t|x - J(x)| = \max_{y \in X}\{W(y) - t|x - y|\} \tag{23}$$

La ciudad como una interdependecia entre Firmas y Consumidores

Bid-Rent Function: Hogares

- La Bid-Rent Function $\Psi(x,u)$ de un hogar en x se define como:

$$\Psi(x,u) = \frac{W[J(x)] - t|x - J(x)| - z^*(\bar{u})}{S_h} \tag{24}$$

- Donde $z^*(\bar{u})$ es la solución de la ecuación $U(z,s) = \bar{u}$.

La ciudad como una interdependecia entre Firmas y Consumidores

Assumptions: Firms

- Las firmas producen el mismo bien a un precio p y utilizan la misma tecnología.
- Cada firma requiere una cantidad fija de tierra (S_f) y de trabajo (L_f) para su producción (función de Leontief)

La ciudad como una interdependecia entre Firmas y Consumidores

Assumptions: Firms

- El nivel de producción Q de una firma depende además de la información que obtiene de otras firmas en la ciudad.
- Las firmas son simétricas pero difieren en el tipo de información que poseen.
- Desean comunicarse activamente con otras firmas; la intensidad se mide por el nivel de actividad de contacto (por ejemplo, número de contactos cara a cara).

La ciudad como una interdependecia entre Firmas y Consumidores

Assumptions: Firms

- La función de beneficios se reescribe como:

$$\pi(x) = \int_X a(x,y)m(y)dy - R(x)S_f - W(x)L_f \tag{25}$$

- Donde $a(x,y)$ representa la produccion en la ubicación x
- $a(x,y)$ son las economias de aglomeración que surgen de las interacciones de una firma en x de una en y.

La ciudad como una interdependecia entre Firmas y Consumidores

Bid-Rent Function: Firms

- Definiendo $A(x) = \int_X a(x,y)m(y)dy$ la Bid-Rent Function de una firma en x es:

$$\Phi(x,\pi) = \frac{A(x) - W(x)L_f - \pi}{S_f} \tag{26}$$

- Representa el precio máximo que una firma está dispuesta a pagar por una unidad de tierra en x mientras obtiene ganancias igual a π.

Equilibrio de mercado

- La configuración de equilibrio de la ciudad se determina entonces a través de la interacción de las funciones de bid-rent de las empresas y los hogares.
- Tenemos un equilibrio espacial cuando
  - todas las empresas obtienen el mismo beneficio de equilibrio π^*,
  - todos los hogares el mismo nivel de utilidad dado por u^*,
  - las rentas y los salarios compensan los mercados de tierra y trabajo.

Equilibrio de mercado

- Las incógnitas son
  - la densidad de firmas $m(x)$,
  - la densidad de hogares $n(x)$,
  - la renta de la tierra $R(x)$,
  - la función de salario $W(x)$,
  - la función de desplazamiento $J(x)$,
  - el nivel de beneficio de equilibrio π^*,
  - el nivel de utilidad u^*.

Equilibrio de mercado

En este set up entonces

- N fijo
- Firmas contratan un número fijo de empleados.
- No hay desempleo
- Beneficios ordinarios $\pi^* = 0$ (condición extra)
- Costo alternativo de la tierra $\bar{R} = 0$

Equilibrio en los mercados de la tierra

En cada $x \in X$

- $R(x) = max\{\Psi(x, u^*), \Phi(x, 0), 0\}$
- $R(x) = \Psi(x, u^*)$ si $n(x) > 0$
- $R(x) = \Phi(x, 0)$ si $m(x) > 0$
- $n(x) + m(x) = 1$ para $R(x) > 0$

Equilibrio en los viajes al trabajo (commuting)

En cada $x \in X$

$$w[J(x)] - t|J(x) - x| = \max_{y \in X}\{W(y) - t|y - x|\} \tag{27}$$

Equilibrio en el mercado laboral

$$\int_I n(x)dx = \int_{J(I)} L_f m(x)dx \tag{28}$$

para cada intervalo $I \in X$

Equilibrio en Poblaciones

$$M = \int_x m(x)dx \tag{29}$$

$$N = \int_x n(x)dx \tag{30}$$

En equilibrio espacial los viajes cruzados no pueden suceder

- El *cross-commuting*

$$(J(x) - x)(J(x') - x') < 0 \tag{31}$$

$$(x - x')(J(x) - J(x')) < 0 \tag{32}$$

- no puede suceder en equilibrio

Caracterización del equilibrio

- Las propiedades del equilibrio urbano dependen de la forma de las economias de aglomearción $a(x, y)$.
- Dos casos especiales de $a(x, y)$ usados en la literatura:

$$a(x,y) = \beta - \tau|x - y| \tag{33}$$
$$a(x,y) = \beta \exp(-\tau|x - y|) \tag{34}$$

- Aquí, τ y β son constantes positivas, donde τ mide la intensidad del efecto de decaimiento por distancia.

Equilibrio espacial y distintas configuraciones de ciudades

- La producción de una empresa que decide ubicarse en x depende entonces de la ubicación de todas las demás empresas:

$$A(x) = \int_X [\beta - \tau|x - y|]m(y)dy \tag{35}$$

Equilibrio espacial y distintas configuraciones de ciudades

- La derivada de $A(x)$ respecto a x es:

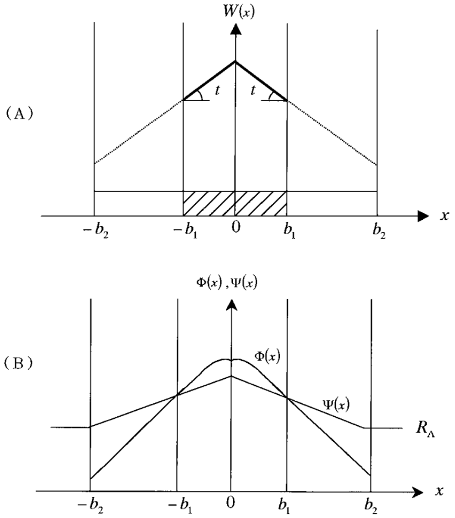
$$\frac{dA(x)}{dx} = -\tau \left(\int_{-\infty}^{x} m(y)dy - \int_{x}^{\infty} m(y)dy \right) \tag{36}$$

Equilibrio espacial y distintas configuraciones de ciudades

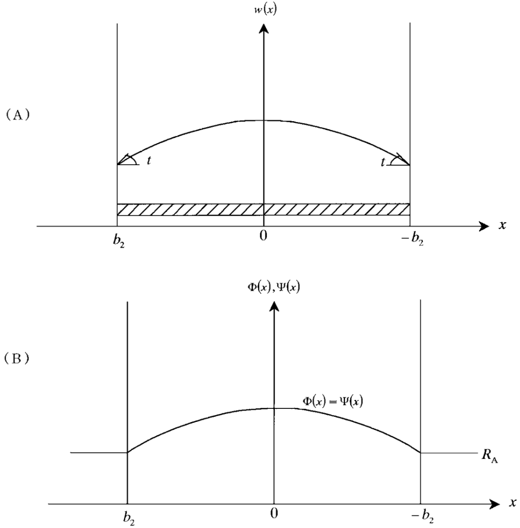
- La segunda derivada de $A(x)$:

$$\frac{d^2A(x)}{dx^2} = -2\tau m(x) \tag{37}$$

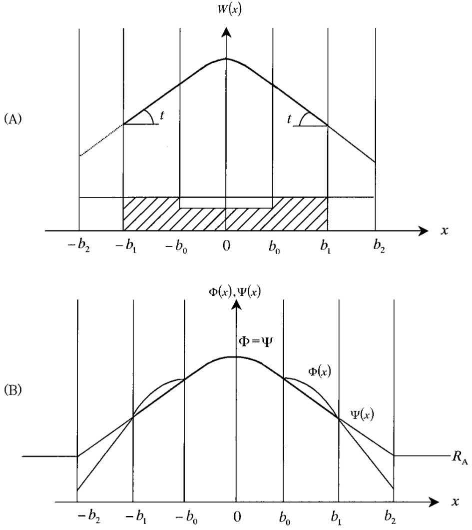
Configuración monocéntrica



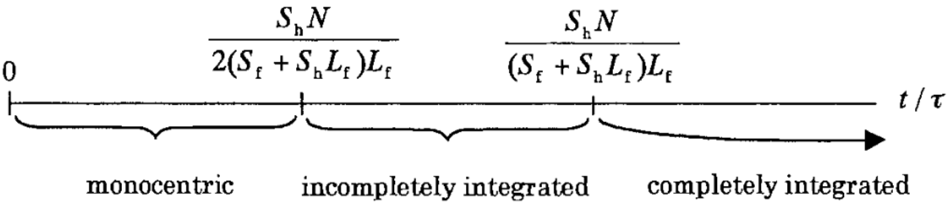
Configuración completamente integrada



Configuración incompletamente integrada



Solution


0
$\frac{S_h N}{2(S_f + S_h L_f) L_f}$
$\frac{S_h N}{(S_f + S_h L_f) L_f}$
t / τ
monocentric
incompletely integrated
completely integrated