Lecture 5: Modelo Monocéntrico con Vivienda

Urban Economics

Ignacio Sarmiento-Barbieri

Universidad de los Andes

August 22, 2023

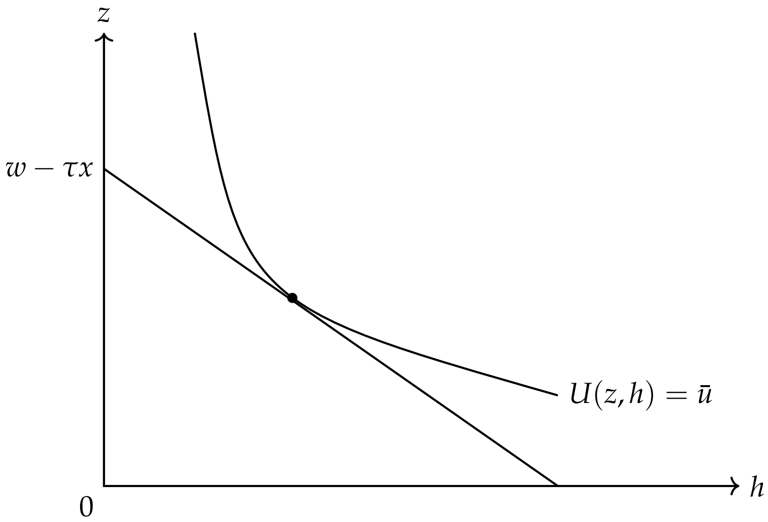
- El objetivo del modelo es explicar la distribución espacial de la población en una ciudad.
- El mecanismo principal es la relación entre los costos de transporte, el precio de la vivienda y el consumo de vivienda.
- Estamos interesados en derivar un conjunto de gradientes observados.
- **Resultados:**
  1. Los precios de la vivienda disminuyen con la distancia al CBD.
  2. El consumo de vivienda aumenta con la distancia al CBD.
  3. La densidad y la relación capital-tierra disminuyen con la distancia al CBD.

Problema de Maximización de los Residentes

- Los consumidores tienen utilidad $U(z, h)$ sobre el bien numerario z y la vivienda h.
- El costo de transporte es τ
- Dada la restricción presupuestaria: $z + p(x) \cdot h(x) + \tau \cdot x = w$.
- En equilibrio espacial $U(z, h) = \bar{u}$
- Problema de maximización:

$$\max_{h} U(w - \tau \cdot x - p(x)h(x), h(x)) = \bar{u} \tag{1}$$

Problema de Maximización de los Residentes



Derivando el gradiente de precios

- Diferenciando toda la expresión:

$$\frac{\partial U}{\partial h(x)}\frac{\partial h(x)}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z}p(x)\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z}\left(\tau + h(x)\frac{\partial p(x)}{\partial x}\right) = 0 \tag{2}$$

- Resultado:

$$\frac{\partial p(x)}{\partial x} = \frac{-\tau}{h(x)} \tag{3}$$

Gradiente de Precio: Condición Alonso-Muth

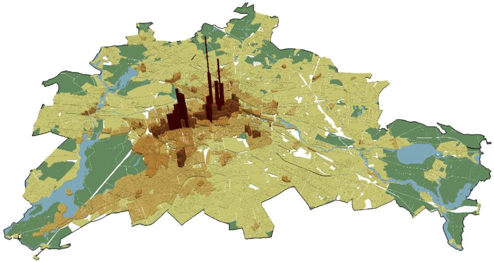
- La condición de Alonso-Muth:

$$\frac{\partial p(x)}{\partial x} = \frac{-\tau}{h(x)} \tag{4}$$

- El precio disminuye con la distancia desde el centro como función de los costos de transporte y consumo de vivienda.
- Si $h(x) = \bar{h}$, entonces el gradiente es constante
- Si la vivienda aumenta con la distancia desde el CBD, entonces el gradiente es convexo

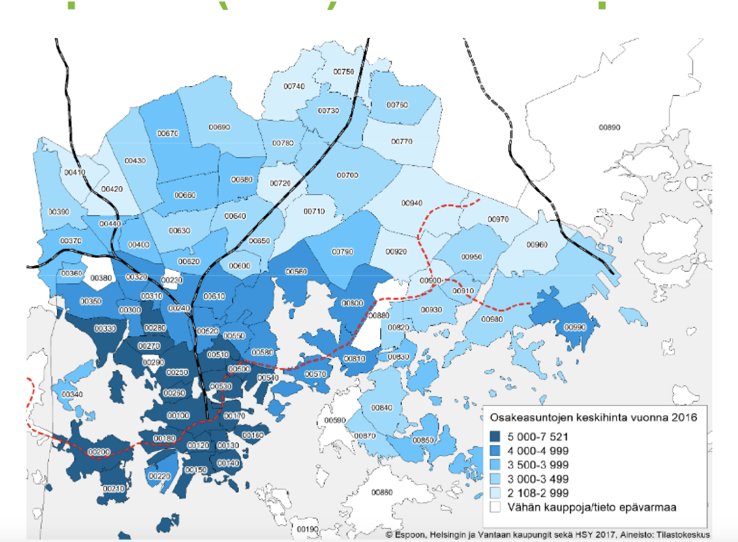
Más gradientes en la vida real

Land prices in Berlin



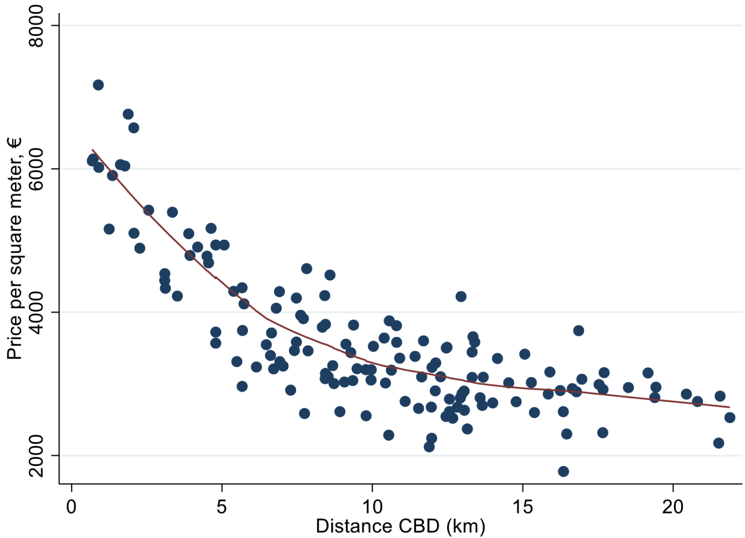
Fuente: Ahlfeldt, G. M., Redding, S. J., Sturm, D. M., & Wolf, N. (2015). The economics of density: Evidence from the Berlin Wall. Econometrica, 83(6), 2127-2189.

Más gradientes en la vida real



Fuente: Saarimaa 2021

Más gradientes en la vida real



Fuente: Saarimaa 2021

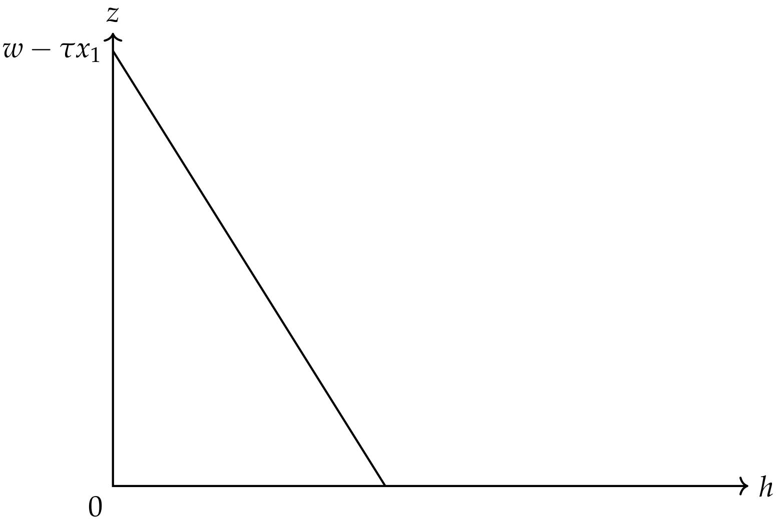
Gradiente de Consumo de Vivienda

- En este modelo, el precio de la vivienda $p(x)$ se ajusta de manera que todos los residentes tengan la misma utilidad.
- Podemos trabajar con la demanda de vivienda de Marshalliana $h(p(x), y)$ o la demanda de Hicksiana $h(p(x), \bar{u})$.
- El gradiente de la demanda de vivienda de Hicksiana es:

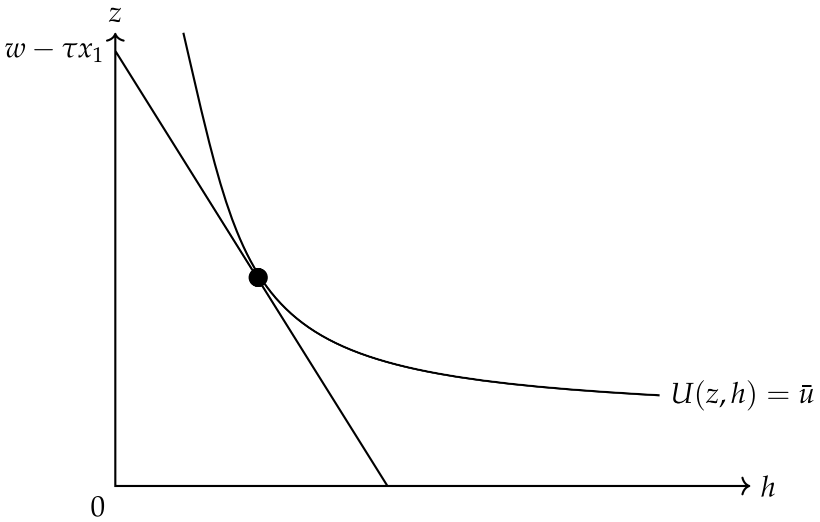
$$\frac{\partial h(p,u,x)}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} > 0$$

- El consumo de vivienda aumenta con la distancia; el precio de la vivienda es más barato, por lo que los consumidores se inclinan hacia la vivienda.

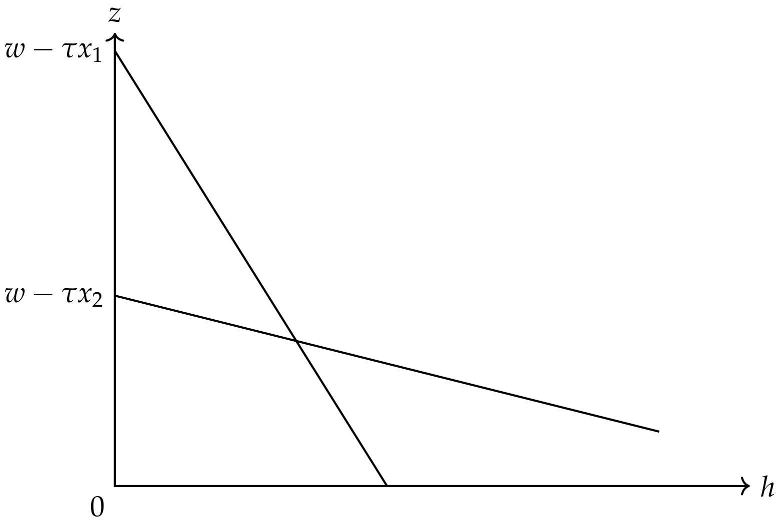
Gradiente de Consumo de Vivienda



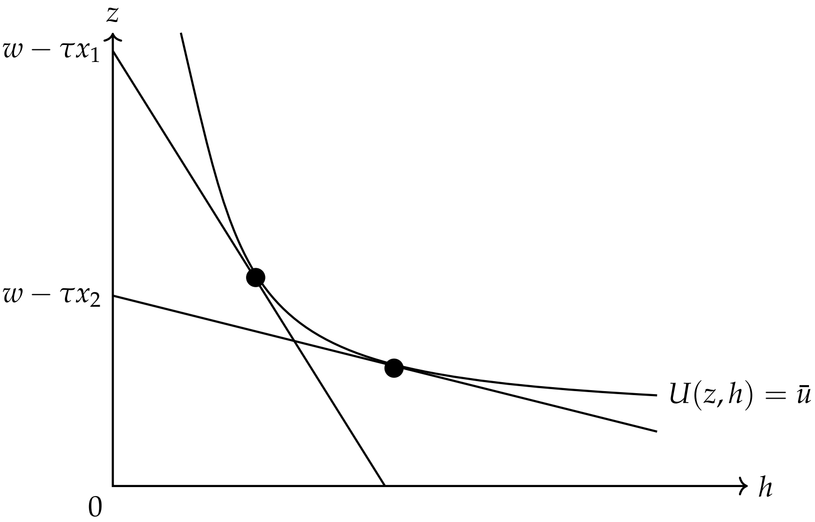
Gradiente de Consumo de Vivienda



Gradiente de Consumo de Vivienda

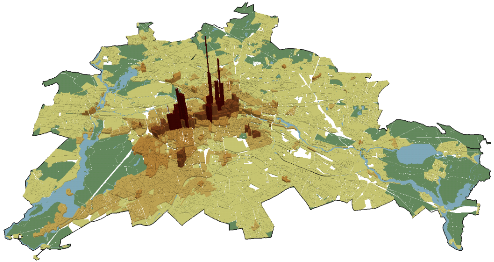


Gradiente de Consumo de Vivienda



Más gradientes en la vida real

Land prices in Berlin



Fuente: Ahlfeldt, G. M., Redding, S. J., Sturm, D. M., & Wolf, N. (2015). The economics of density: Evidence from the Berlin Wall. Econometrica, 83(6), 2127-2189.

Producción de Vivienda

- La industria de la construcción de viviendas es perfectamente competitiva con una función de producción con rendimientos constantes a escala (CRS) y cóncava.
- Los insumos para la construcción son la tierra l y el capital k: $H(K, L)$.
- La parte importante de la concavidad es que $H_{kk} < 0$; construir más alto es más caro.
- El precio del capital es i, el precio de la tierra en x es $R(x)$.
- Dados los CRS es mas fácil trabajar con la relación capital-tierra: $S = k/l$.

Producción de Vivienda

- Podemos escribir

$$H(k, l) = H(k/l, l/l) = H(S, 1) \tag{5}$$

- Definimos $H(S) \equiv H(S, 1)$ como vivienda por unidad de tierra.
- Los beneficios por unidad de tierra:

$$\Pi(x) = p(x) \cdot H(S) - i \cdot S - R(x)$$

Optimización de la Empresa y Estructura del Mercado

- Con CRS y entrada libre, tenemos un mercado perfectamente competitivo con empresas de construcción obteniendo cero beneficio.
- Similar al problema de maximización de la utilidad, esto da dos condiciones:
  1. FOC para S óptimo
  2. ecuación de cero beneficio.

$$p(x)\frac{\partial H(S)}{\partial S} = i \tag{6}$$

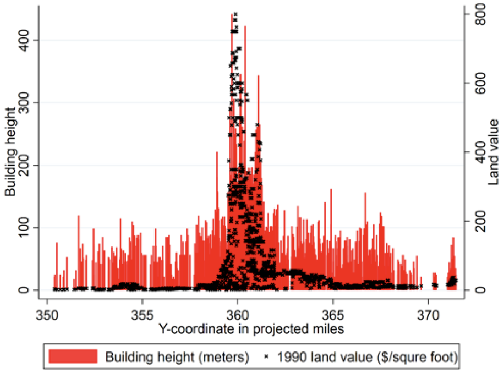
$$p(x) \cdot H(S) - i \cdot S(x) - R(x) = 0 \tag{7}$$

- La diferenciación total de estas condiciones nos permitirá derivar el gradiente de renta de la tierra y el gradiente de la relación capital-tierra.

$$\frac{\partial R}{\partial x} < 0, \text{ y } \frac{\partial S}{\partial x} < 0$$

Más gradientes en la vida real

Chicago



Fuente: McM y Ahfeld

Densidad de Población

- Supongamos que cada persona vive en una casa separada.
- Entonces, la población en x es la cantidad total de viviendas en x dividida por el consumo de vivienda por persona:

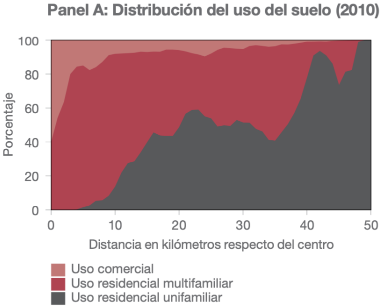
$$N(x) = H(x)/h(x) \tag{8}$$

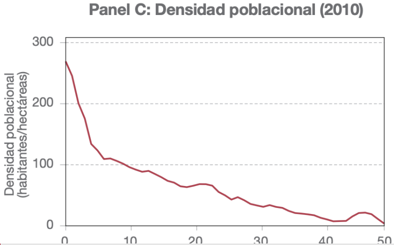
- La densidad poblacional (población/tierra) es entonces:

$$D(x) = H(x)/(l \cdot h(x)) = H(S)/h(x) \tag{9}$$

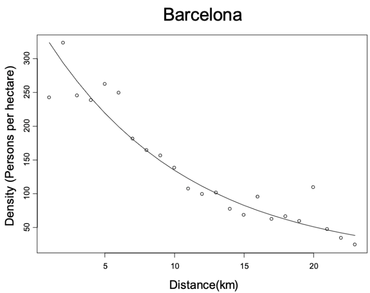
$$\frac{\partial D(x)}{\partial x} = \frac{\partial h(S)}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial x}\frac{1}{h(x)} - \frac{h(S)}{h(x)^2} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} < 0$$

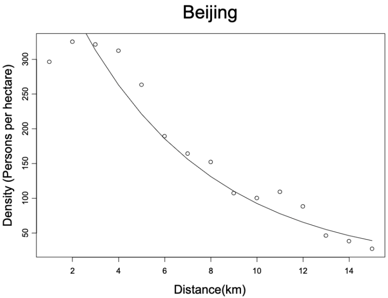
Más gradientes en la vida real





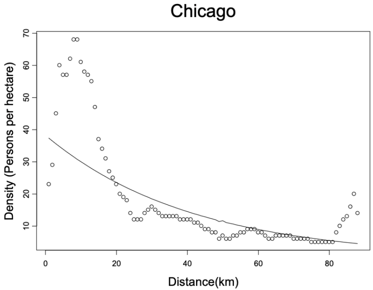
Más gradientes en la vida real

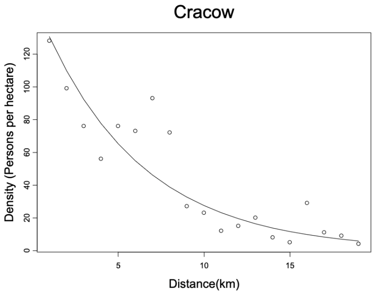




Fuente: Bertaud, A., & Malpezzi, S. (2003). The spatial distribution of population in 48 world cities: Implications for economies in transition. Center for urban land economics research, University of Wisconsin, 32(1), 54-55.

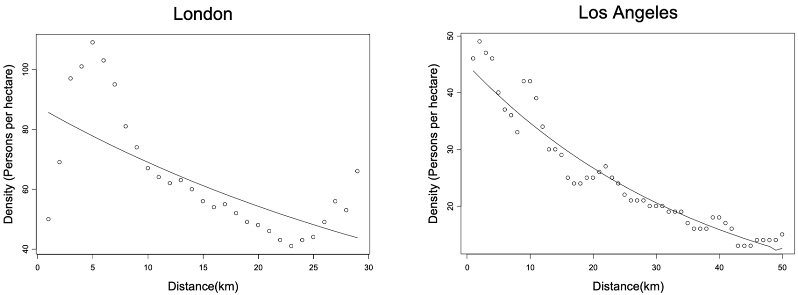
Más gradientes en la vida real





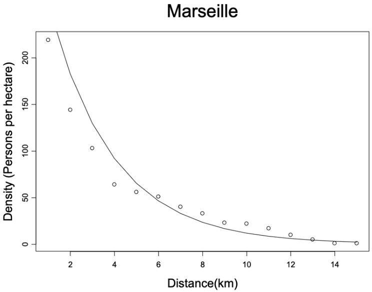
Fuente: Bertaud, A., & Malpezzi, S. (2003). The spatial distribution of population in 48 world cities: Implications for economies in transition. Center for urban land economics research, University of Wisconsin, 32(1), 54-55.

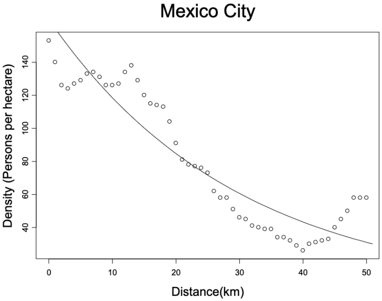
Más gradientes en la vida real



Fuente: Bertaud, A., & Malpezzi, S. (2003). The spatial distribution of population in 48 world cities: Implications for economies in transition. Center for urban land economics research, University of Wisconsin, 32(1), 54-55.

Más gradientes en la vida real





Fuente: Bertaud, A., & Malpezzi, S. (2003). The spatial distribution of population in 48 world cities: Implications for economies in transition. Center for urban land economics research, University of Wisconsin, 32(1), 54-55.

Bid-rent approach (La Función de Oferta de Renta)

- La principal desventaja del enfoque Marshalliano es que llega a la solución de una manera indirecta.

Bid-rent approach (La Función de Oferta de Renta)

- La principal desventaja del enfoque Marshalliano es que llega a la solución de una manera indirecta.
- Resuelve primero el programa del consumidor en una ubicación antes de recuperar el precio de la vivienda en esta ubicación a través de la condición de equilibrio residencial.
- Luego, conociendo el precio de la vivienda, vuelve a la elección del consumo antes de resolver la ubicación óptima.
- La principal ventaja del enfoque Marshalliano es dejar claro que el precio de la vivienda en cada ubicación es endógeno y surge dentro del modelo.

Bid-rent approach (La Función de Oferta de Renta)

- La condición de Alonso-Muth se puede derivar de manera más directa utilizando el llamado enfoque de bid-rent (también conocido como el enfoque directo).
- Es forma de resolver el modelo es reformular el problema del consumidor en términos de bid-rent:

El precio máximo $p(x)$ que los consumidores están dispuestos a pagar por la vivienda en la ubicación x de manera que la utilidad sea $\bar{u}$.

Bid-rent approach (La Función de Oferta de Renta)

- La bid-rent se define como:

$$\Psi(x,u) \equiv \max_{h(x),z} p(x) \mid U(h,z) = \bar{u},\ w - \tau \cdot x = p(x)h(x) + z$$

- Sustituyendo la restricción presupuestaria, obtenemos:

$$\Psi(x,u) = \max_{h(x),z} \frac{w - \tau \cdot x - z(x)}{h(x)} \mid U(h,z) = \bar{u}$$