Lecture 4: Modelo Monocéntrico con economias de aglomeración

Urban Economics

Ignacio Sarmiento-Barbieri

Universidad de los Andes

August 27, 2025

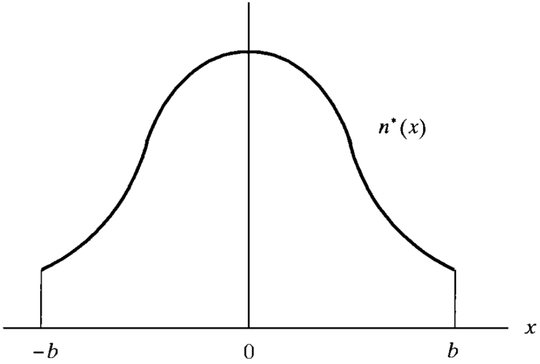
Estructuras espaciales con economías de aglomeración

- Si bien el modelo monocéntrico explica muchas cosas, no explica la existencia de ciudades.
- Para poderlas explicar necesitamos las economías de aglomeración.
- Estas también servirán para explicar ciudades policéntricas.

Estructuras espaciales con economías de aglomeración

- La característica más distintiva de una ciudad es su densidad de población mucho mayor que la de las áreas no urbanas circundantes.
- Como resultado, los agentes económicos que residen dentro de una ciudad están cerca unos de otros.
- Pero, ¿por qué los hogares y las empresas buscan proximidad espacial?

Estructuras espaciales con economías de aglomeración

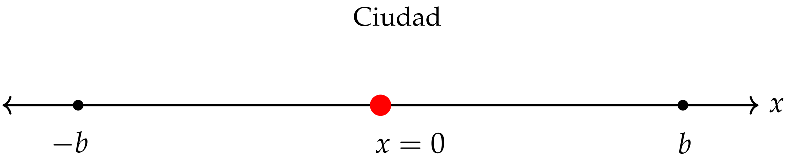


- Esta distribución se dispersa alrededor del centro porque la competencia por la tierra lleva a rentas de tierra más altas cerca del centro en una economía de mercado.

La ciudad como resultado de la interacción entre los consumidores

Set Up

- n individuos
- $\bar{R}$ costo alternativo de la tierra
- Landlords ausentes
- Land density = 1
- Ciudad abierta



La ciudad como resultado de la interacción entre los consumidores

$$U = u(z, l) + I_x,$$

La restricción presupuestaria para un consumidor en la localización x es:

$$z + lR(x) = w - T(x)$$

- z: consumo del bien compuesto.
- l: tamaño del lote de tierra.
- $R(x)$: renta de la tierra en x.
- w: ingreso del consumidor.
- $T(x)$: costo de viaje total desde x.

La ciudad como resultado de la interacción entre los consumidores

$$U = u(z, l) + I_x$$
$$z + lR(x) = Y - T(x)$$

Resolviendo para z:

$$z = z(l, U - I_x)$$

Sustituyendo y maximizando respecto a l obtenemos la función de bid rent:

$$\Psi(x, U) = \max_{l} \frac{Y - Z(l, U - I_x) - T(x)}{l}.$$

La ciudad como resultado de la interacción entre los consumidores

- **Función de utilidad:**
$$u(z,l) = z + \alpha \log l, \quad \alpha > 0$$
donde α mide la importancia del consumo de tierra.
- **Campo de interacción:**
$$I_x = I, \quad \text{constante en todas las localizaciones}$$
(cada consumidor interactúa con todos los demás en el área urbana).
- **Costo de viaje:**
$$T(x) \equiv \int_{-b}^{b} t\,|x-y|\,n(y)\,dy$$
donde:
  - $t > 0$: costo unitario de viaje.
  - $n(y)$: densidad de población en y.

La ciudad como resultado de la interacción entre los consumidores

Eliminando el valor absoluto en $T(x)$

Definición general:

$$T(x) \equiv \int_{-b}^{b} t\,|x-y|\,n(y)\,dy$$

Separando el valor absoluto:

$$\begin{aligned} T(x) &= \int_{-b}^{x} t(x-y)\,n(y)\,dy + \int_{x}^{b} t(y-x)\,n(y)\,dy \\ &= \text{Costo de viajes hacia el oeste} + \text{Costo de viajes hacia el este.} \end{aligned}$$

Partimos de:

$$\Psi(x, U) = \max_{l} \frac{Y - Z(l, U - I_x) - T(x)}{l}$$

En equilibrio:

$$U = \bar{u} \quad \text{y} \quad I_x = I$$

Sustituyendo y usando $u(z, s) = z + \alpha \log s$:

$$\Psi(x, \bar{u}) = \max_{l} \frac{w - \bar{u} + I + \alpha \log l - T(x)}{l}.$$

La ciudad como resultado de la interacción entre los consumidores

Condición de primer orden

$$\Psi(x,\bar{u}) = \max_{l} \frac{w - \bar{u} + I + \alpha \log l - T(x)}{l}$$

FOC:

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{\Psi(l)}{l}\right) = 0$$

$$w - \bar{u} + I - \alpha + \alpha \log l - T(x) = 0$$

Definimos la constante:

$$\xi \equiv w - \bar{u} + I - \alpha$$

$$\xi + \alpha \log l - T(x) = 0$$

La ciudad como resultado de la interacción entre los consumidores

Consumo óptimo de tierra y densidad de población

De la FOC:

$$\zeta + \alpha \log l - T(x) = 0$$

Despejamos l:

$$l^*(x) = \exp\left(\frac{T(x) - \xi}{\alpha}\right)$$

Relación con la densidad de población ($n(x) = 1/l(x)$):

$$n^*(x) = \exp\left(\frac{\xi - T(x)}{\alpha}\right)$$

La ciudad como resultado de la interacción entre los consumidores

El rol del costo de viaje agregado

Obtuvimos

$$l^*(x) = \exp\left(\frac{T(x) - \xi}{\alpha}\right), \quad n^*(x) = \exp\left(\frac{\xi - T(x)}{\alpha}\right).$$

Pero: $T(x)$ depende de $n(y)$ en toda la ciudad:

$$T(x) = \int_{-b}^{x} t(x-y)n(y)\,dy + \int_{x}^{b} t(y-x)n(y)\,dy.$$

Problema de equilibrio:

- Los consumidores eligen $l(x)$ dado $T(x)$.
- Pero $T(x)$ debe ser consistente con la densidad $n^*(x)$ que resulta.
- Necesitamos resolver este sistema de forma consistente.

La ciudad como resultado de la interacción entre los consumidores