Lecture 5

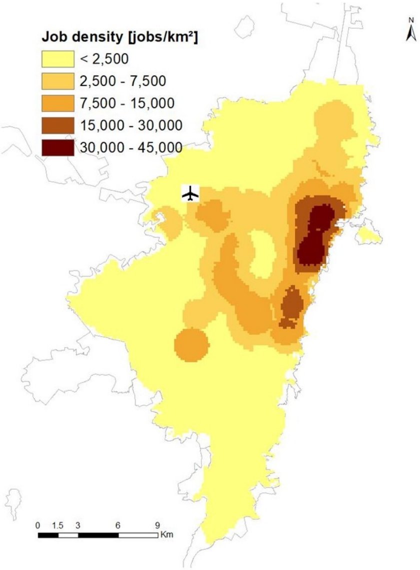
Urban Economics

Ignacio Sarmiento-Barbieri

Universidad de los Andes

September 3, 2025

Motivación



Job density [jobs/km²]
< 2,500
2,500 - 7,500
7,500 - 15,000
15,000 - 30,000
30,000 - 45,000
N
0 1.5 3 6 9
Km

Ciudades Policéntricas: Extensión del Modelo Monocéntrico

- **Dos limitaciones del modelo monocéntrico:**
  1. No explica por qué existen las ciudades (economías de aglomeración)
  2. Asume un CBD puntual (en realidad las empresas usan tierra)
- **Solución:**
  - Empresas y trabajadores compiten por tierra
  - Spillovers de productividad entre empresas
  - Localización endógena de centros de empleo

Configuración Espacial Básica

La ciudad en una línea:

- Ciudad = segmento de línea recta
- 1 unidad de tierra disponible en cada ubicación x

Variables de densidad:

- $m(x)$ = densidad de empresas en ubicación x
- $n(x)$ = densidad de residentes en ubicación x

Tres tipos posibles de uso del suelo:

1. **Uso mixto:** $m(x) > 0$ y $n(x) > 0$
2. **Solo comercial:** $m(x) > 0$ y $n(x) = 0$
3. **Solo residencial:** $m(x) = 0$ y $n(x) > 0$

Economías de Aglomeración: Spillovers de Comunicación

Función de Accesibilidad, Beneficios de la comunicación:

$$A(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (b - g|x - y|) m(y) dy$$

Parámetros:

- b = comunicación máxima (misma ubicación)
- g = tasa de decaimiento por distancia
- $|x - y|$ = distancia entre ubicaciones

Interpretación:

- Cada empresa produce 1 unidad de output por unidad de comunicación
- La productividad depende de la proximidad a otras empresas
- El decaimiento es lineal con la distancia

Propiedades de la Función de Comunicación

Primera derivada:

$$\frac{dA(x)}{dx} = g\left[\int_{-\infty}^{x} m(y)dy - \int_{x}^{\infty} m(y)dy\right]$$

- Diferencia entre empresas a la izquierda y derecha
- Máximo donde hay igual número de empresas a cada lado

Segunda derivada:

$$\frac{d^2A(x)}{dx^2} = -2g \cdot m(x)$$

- $A(x)$ es **cóncava** donde hay empresas ($m(x) > 0$)
- $A(x)$ es **lineal** donde no hay empresas ($m(x) = 0$)
- $x = 0$ en el punto de máxima comunicación

Tecnología de Producción y Parámetro l

Función de producción de la firma:

- Inputs: 1 unidad de trabajo + l unidades de tierra
- Output: $A(x)$ unidades (depende de comunicación)

Función de costos:

$$\text{Costo unitario} = \frac{w(x) + l \cdot P(x)}{A(x)}$$

Donde:

- $w(x)$ = salario en ubicación x
- $P(x)$ = precio de la tierra en x
- $l \cdot P(x)$ = costo total de tierra
- $A(x)$ = productividad (comunicación)

Interpretación de l:

- l = intensidad de uso de tierra por empresa
- Mayor l = empresas más intensivas en tierra
- Afecta el trade-off entre aglomeración y costos

Función Bid-Rent de las firmas

Condición de beneficio cero (libre entrada):

$$\text{Ingreso} = \text{Costo}$$

$$A(x) = w(x) + l \cdot P(x)$$

Función bid-rent comercial $\Phi(x)$ (Ecuación 45):

$$\Phi(x) = \frac{1}{l}[A(x) - w(x)]$$

Interpretación:

- Máximo precio que una empresa puede pagar por tierra
- Mantiene beneficio cero
- Precio por unidad de tierra (empresa usa l unidades)

Determinantes:

- $\uparrow A(x)$ (más spillovers) $\Rightarrow \uparrow \Phi(x)$
- $\uparrow w(x)$ (salarios más altos) $\Rightarrow \downarrow \Phi(x)$
- $\uparrow l$ (más tierra necesaria) $\Rightarrow \downarrow \Phi(x)$

Elección Óptima del Lugar de Trabajo

Problema del trabajador que vive en x :

$$T(x) \equiv \arg\max_{y} \{w(y) - t|x - y|\}$$

Trade-off:

- $w(y)$ = salario en ubicación de trabajo y
- $t|x - y|$ = costo de commuting
- t = costo por unidad de distancia

Implicaciones de equilibrio:

Si trabajadores conmutan entre ubicaciones con empresas:

$$|w(x) - w(y)| = t|x - y|$$

Por lo tanto:

$$\frac{dw}{dx} = \pm t$$

Caso especial: En áreas de uso mixto

- $T(x) = x$ (viven donde trabajan)
- No hay costos de commuting

Resumen: Elementos Clave del Modelo

1. **Spillovers espaciales:** $A(x)$ captura economías de aglomeración
2. **Competencia por tierra:** Empresas y residentes compiten
   - Empresas: necesitan l unidades de tierra
   - Residentes: necesitan 1 unidad de tierra
3. **Gradientes salariales:** Reflejan costos de commuting

$$\frac{dw}{dx} = \pm t \text{ (en áreas con commuting)}$$

4. **Localización endógena:**
   - Centros de empleo emergen del equilibrio
   - No se asumen a priori (como en modelo monocéntrico)

Función Bid-Rent de los consumidores

Problema del consumidor:
Maximizar utilidad sujeto a restricción presupuestaria
Simplificación: Todas las residencias usan 1 unidad de tierra
Función bid-rent $\Psi(x,u)$:

$$\Psi(x,u) = w(T(x)) - t|x - T(x)| - z(u)$$

Componentes:

- $w(T(x))$ = salario en ubicación óptima de trabajo
- $t|x - T(x)|$ = costo de commuting casa-trabajo
- $z(u)$ = consumo del numerario para alcanzar utilidad u

Interpretación:

- Máximo precio que un residente puede pagar por vivienda en x
- Mantiene nivel de utilidad u (determinado exógenamente)
- Trade-off entre accesibilidad laboral y costo de vivienda

Asignación de Tierra en Equilibrio

Precio de equilibrio:

$$R(x) = \max\{\Phi(x), \Psi(x,u)\}$$

La tierra va al mejor postor:

- Si $\Phi(x) > \Psi(x,u)$: Uso comercial

$$R(x) = \Phi(x), \quad m(x) > 0, \quad n(x) = 0$$

- Si $\Psi(x,u) > \Phi(x)$: Uso residencial

$$R(x) = \Psi(x,u), \quad m(x) = 0, \quad n(x) > 0$$

- Si $\Phi(x) = \Psi(x,u)$: Uso mixto posible

$$R(x) = \Phi(x) = \Psi(x,u), \quad m(x) > 0, \quad n(x) > 0$$

Restricción Física del Uso del Suelo

En cada ubicación x hay exactamente 1 unidad de tierra

Restricción:

$$lm(x) + n(x) = 1 \text{ si } R(x) > 0$$

$$m(x) = n(x) = 0 \text{ si } R(x) < 0$$

Tres casos posibles:

1. **Uso comercial puro:** $m(x) = \frac{1}{l}, n(x) = 0$
   - Cada empresa usa l unidades $\Rightarrow \frac{1}{l}$ empresas por unidad
2. **Uso residencial puro:** $m(x) = 0, n(x) = 1$
   - Cada residente usa 1 unidad $\Rightarrow$ 1 residente por unidad
3. **Uso mixto:** $lm(x) + n(x) = 1$ con $m(x), n(x) > 0$
   - Ejemplo: Si $l = 1/3$ y $m(x) = 1.5$
   - Tierra comercial = $\frac{1}{3} \times 1.5 = 0.5$
   - Tierra residencial = $n(x) = 0.5$

Condiciones de Clearing del Mercado Laboral

Clearing local:
Para cualquier intervalo X:

$$\int_X n(x)dx = \int_{T(X)} m(x)dx$$

- Izquierda: número de trabajadores viviendo en área X
- Derecha: número de empleos donde trabajan esos residentes
- Cada residente necesita exactamente 1 trabajo
- Cada empresa emplea exactamente 1 trabajador

Restricciones agregadas

$$\int_{-\infty}^{\infty} n(x)dx = N \quad \text{(población total)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} m(x)dx = N \quad \text{(empresas totales)}$$

En equilibrio: número de empresas = número de trabajadores = N

Sistema Completo de Condiciones de Equilibrio

$$A(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (b - g|x - y|)m(y)dy \tag{1}$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{l}[A(x) - w(x)] \tag{2}$$

$$T(x) \equiv \arg\max_{y}\{w(y) - t|x - y|\} \tag{3}$$

$$\Psi(x, u) = w(T(x)) - t|x - T(x)| - z(u) \tag{4}$$

$$R(x) = \max\{\Phi(x), \Psi(x, u)\} \tag{5}$$

$$R(x) = \Phi(x) \text{ si } m(x) > 0 \tag{6}$$

$$R(x) = \Psi(x, u) \text{ si } n(x) > 0 \tag{7}$$

$$lm(x) + n(x) = 1 \text{ si } R(x) > 0 \tag{8}$$

$$\int_X n(x)dx = \int_{T(X)} m(x)dx \quad \forall X \tag{9}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} n(x)dx = N = \int_{-\infty}^{\infty} m(x)dx \tag{10}$$

Mecanismos de Equilibrio: Cómo Funciona el Modelo

Decisiones de localización:

- **Empresas:** Balancean spillovers vs. costos salariales/tierra
- **Trabajadores:** Balancean salarios vs. costos de commuting/vivienda

Ajustes de precios:

- **Salarios $w(x)$:** Compensan por commuting
- **Rentas $R(x)$:** Asignan tierra escasa

Características del equilibrio:

- **Endógeno:** No se asume un CBD, emerge del modelo
- **Flexible:** Puede generar patrones monocéntricos o policéntricos
- **Parámetros clave:**
  - g (decaimiento spillovers) vs. t (costo commuting)
  - l (intensidad de uso de tierra comercial)
  - N (tamaño de la ciudad)

Ciudades policentricas

¿Son consistentes con el equilibrio?

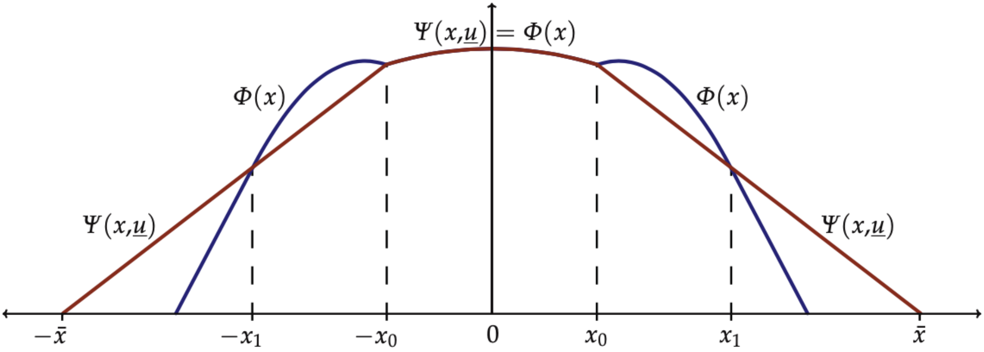
1. **Proponemos** una estructura espacial específica para el equilibrio
2. **Derivamos** las densidades que debe tener cada zona
3. **Verificamos** que esta estructura satisface todas las condiciones de equilibrio
4. **Determinamos** los valores de frontera $(x_0, x_1, \bar{x})$ que hacen consistente el equilibrio

¿Por qué esta estructura?

- Simetría alrededor de $x = 0$ (máximo de $A(x)$)
- Balance entre fuerzas de aglomeración y costos de commuting
- Consistencia con competencia por tierra

Estructura Propuesta del Equilibrio

Tres tipos de zonas (simétricas alrededor de $x = 0$):



Panel (d) Bid-rent gradients

Densidades de equilibrio

Densidad de empresas:

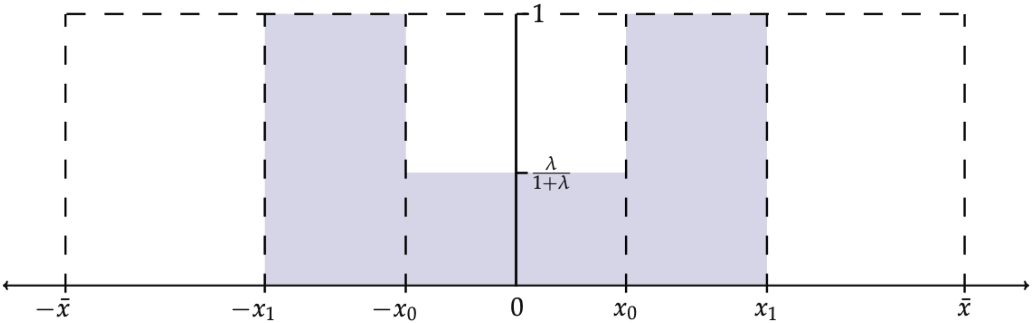
$$m(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+l} & \text{si } x \in [-x_0, x_0] \text{ (uso mixto)} \\ \frac{1}{l} & \text{si } x \in [-x_1, -x_0] \cup [x_0, x_1] \text{ (comercial puro)} \\ 0 & \text{si } x \in [-\bar{x}, -x_1] \cup [x_1, \bar{x}] \text{ (residencial puro)} \end{cases}$$

Densidad de consumidores:

$$n(x) = \begin{cases} \frac{l}{1+l} & \text{si } x \in [-x_0, x_0] \text{ (uso mixto)} \\ 0 & \text{si } x \in [-x_1, -x_0] \cup [x_0, x_1] \text{ (comercial puro)} \\ 1 & \text{si } x \in [-\bar{x}, -x_1] \cup [x_1, \bar{x}] \text{ (residencial puro)} \end{cases}$$

Verificación uso mixto: $lm(x) + n(x) = l \cdot \frac{1}{1+l} + \frac{l}{1+l} = \frac{l+l}{1+l} = \frac{1+l}{1+l} = 1$

Densidades de equilibrio



Panel (a) Share of land in commercial use

Lo que Falta por Determinar

Hemos derivado las densidades, pero aún no sabemos:

1. **¿Dónde termina cada zona?**
   - Valor de x_0 (frontera mixto/comercial)
   - Valor de x_1 (frontera comercial/residencial)
   - Valor de $\bar{x}$ (borde de la ciudad)
2. **¿Bajo qué condiciones existe esta estructura?**
   - ¿Cuándo hay uso mixto?
   - ¿Cuándo la ciudad es monocéntrica?
   - ¿Cuándo es completamente integrada?
3. **¿Cómo se determinan estos valores?**
   - Condiciones de frontera entre zonas
   - Restricciones agregadas de población
   - Condiciones de optimalidad de localización

Derivación de A(x): Objetivo

Recordemos la definición original:

$$A(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (b - g|x - y|)m(y)dy$$

Objetivo: Sustituir las densidades de equilibrio $m(y)$:

Derivación de A(x): Objetivo

Recordemos la definición original:

$$A(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (b - g|x-y|)m(y)dy$$

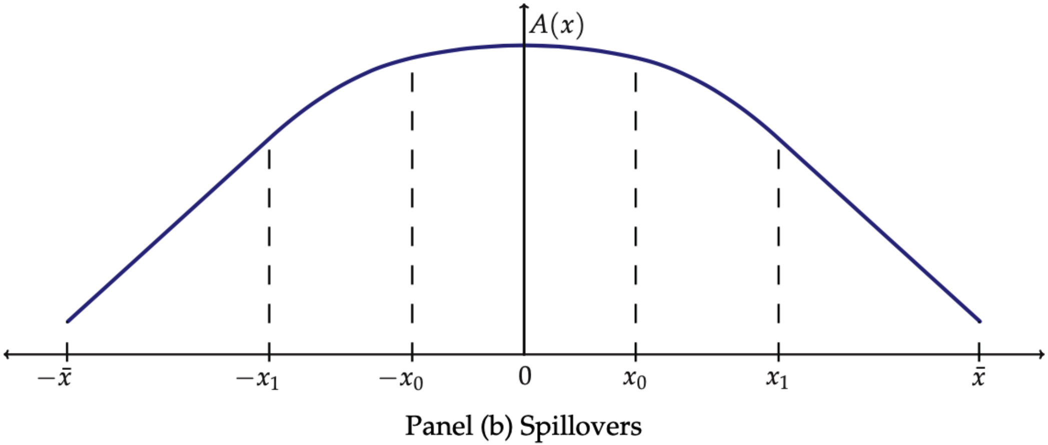
Objetivo: Sustituir las densidades de equilibrio $m(y)$:

$$A(x) = \begin{cases} bN - g\left[\frac{x_1^2}{l} - \frac{x_0^2}{l(1+l)} + \frac{x^2}{1+l}\right] & x \in [-x_0, x_0] \\ bN - g\left[\frac{x_1^2}{l} - \frac{2x_0|x|}{l(1+l)} + \frac{x^2}{l}\right] & x \in [-x_1, -x_0] \cup [x_0, x_1] \\ bN - g\left[\frac{2x_1}{l} - \frac{2x_0}{l(1+l)}\right]|x| & x \in [-\bar{x}, -x_1] \cup [x_1, \bar{x}] \end{cases}$$

Propiedades clave:

- **Cóncava** en zonas con empresas (mixta y comercial)
- **Lineal** en zonas residenciales
- **Continua** en todo el dominio
- **Máximo** en $x = 0$ (centro de la ciudad)

Forma de A(x)



Derivación de w(x): Salarios de Equilibrio

Objetivo: Determinar el gradiente salarial en cada zona de la ciudad

Dos casos fundamentales:

1. **Zona de uso mixto:** Los trabajadores viven donde trabajan
   - $T(x) = x$ (no hay commuting)
   - Salarios determinados por igualdad de bid-rents
2. **Zonas con commuting:** Trabajadores viajan al trabajo
   - Zonas comerciales puras
   - Zonas residenciales puras
   - Salarios compensan exactamente costos de commuting

Caso 1: Zona de Uso Mixto $[-x_0, x_0]$

Condición clave: Los trabajadores viven donde trabajan

$$T(x) = x \quad \Rightarrow \quad \text{No hay commuting}$$

Equilibrio requiere: $\Phi(x) = \Psi(x, u)$
Sustituyendo las definiciones:

$$\Phi(x) = \frac{1}{l}[A(x) - w(x)]$$
$$\Psi(x, u) = w(x) - 0 - z(u) = w(x) - z(u)$$

Igualando:

$$\frac{1}{l}[A(x) - w(x)] = w(x) - z(u)$$

Resolviendo para w(x) en Zona Mixta

paso a paso:

$$\frac{1}{l}[A(x) - w(x)] = w(x) - z(u)$$

Multiplicando por l:

$$A(x) - w(x) = l[w(x) - z(u)]$$

Expandiendo:

$$A(x) - w(x) = lw(x) - lz(u)$$

Reagrupando términos con $w(x)$:

$$A(x) + lz(u) = w(x) + lw(x) = w(x)(1 + l)$$

Resultado para zona mixta:

$$\boxed{w(x) = \frac{1}{1+l}A(x) + \frac{l}{1+l}z(u)} \quad \text{para } x \in [-x_0, x_0]$$

Interpretación Económica - Zona Mixta

$$w(x) = \frac{1}{1+l}A(x) + \frac{l}{1+l}z(u)$$

1. **Fracción de productividad:**
   - El salario solo captura $\frac{1}{1+l}$ de la productividad $A(x)$
   - A mayor l (más tierra por empresa), menor fracción al trabajador
2. **Componente fijo:**
   - $\frac{l}{1+l}z(u)$ garantiza el nivel de utilidad de reserva
3. **Gradiente salarial:**
   - Como $A(x)$ es cóncava con máximo en $x = 0$
   - $w(x)$ también es cóncava con máximo en el centro

Caso 2: Zonas con Commuting - Principio Fundamental

Condición de arbitraje espacial:
Si trabajadores conmutan entre ubicaciones x e y con empresas:

1. Trabajador en x prefiere trabajar en x:

$$w(x) - t|T^{-1}(x) - x| > w(y) - t|T^{-1}(x) - y|$$

2. Trabajador en y prefiere trabajar en y:

$$w(y) - t|T^{-1}(y) - y| > w(x) - t|T^{-1}(y) - x|$$

Implicación: Estas dos condiciones juntas implican

$$|w(x) - w(y)| = t|x - y|$$

Por tanto: $\frac{dw}{dx} = \pm t$

Gradiente Salarial en Zonas con Commuting

Para el lado derecho ($x > 0$):

- Al alejarse del centro, el salario debe compensar el mayor commuting
- Si un trabajador se mueve de x a $x + dx$:
  - Cambio en salario: dw
  - Cambio en costo de commuting: $t \cdot dx$
- En equilibrio: $dw = -t \cdot dx$
- Por tanto: $\boxed{\frac{dw}{dx} = -t}$ para $x > 0$

Para el lado izquierdo ($x < 0$):

- Por simetría: $\boxed{\frac{dw}{dx} = +t}$ para $x < 0$

Interpretación: El salario decrece linealmente al alejarse del centro

Determinando la Constante de Integración

Condición de frontera en $x = x_0$:
Desde la zona mixta:

$$w(x_0) = \frac{1}{1+l}A(x_0) + \frac{l}{1+l}z(u)$$

Este valor sirve como condición inicial para integrar en las zonas con commuting.
Para $x \in [x_0, \bar{x}]$:
Integrando $\frac{dw}{dx} = -t$ desde x_0 hasta x:

$$w(x) - w(x_0) = -t(x - x_0)$$

Por tanto:

$$w(x) = w(x_0) - t(x - x_0)$$

Como $x > 0$ en esta zona:

$$w(x) = w(x_0) - t(|x| - x_0)$$

Expresión Final de w(x)

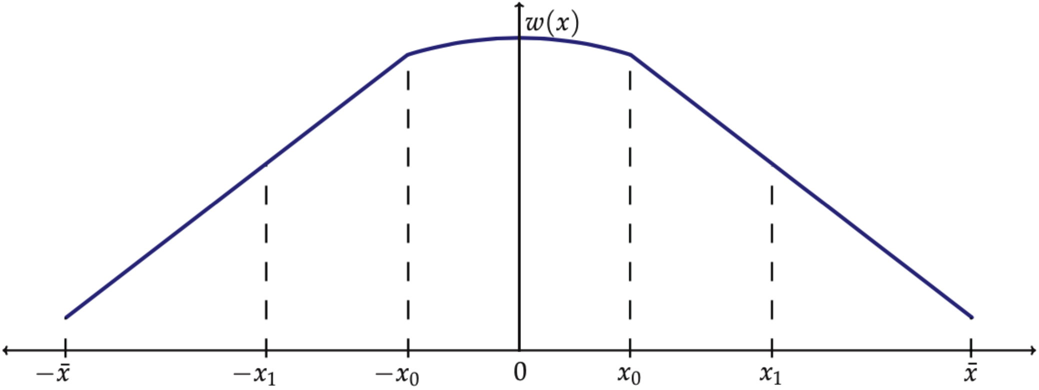
$$w(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+l}A(x) + \frac{l}{1+l}z(u) & x \in [-x_0, x_0] \\ \\ w(x_0) - t(|x| - x_0) & x \in [-\bar{x}, -x_0] \cup [x_0, \bar{x}] \end{cases}$$

Donde: $w(x_0) = \frac{1}{1+l}A(x_0) + \frac{l}{1+l}z(u)$

Características:

- **Cóncava** en zona mixta (sigue la forma de $A(x)$)
- **Lineal** en zonas con commuting (pendiente $= \pm t$)
- **Continua** en $x = \pm x_0$
- **Máximo** en $x = 0$ (centro de la ciudad)

Expresión Final de w(x)



Panel (c) Wages

Funciones Bid-Rent

Definiciones:

- $\Phi(x)$: Máximo precio que una empresa puede pagar por tierra en x manteniendo beneficio cero
- $\Psi(x,u)$: Máximo precio que un consumidor puede pagar por vivienda en x manteniendo utilidad u

Condiciones de equilibrio:

- Si $m(x) > 0$: $R(x) = \Phi(x)$ (empresas usan la tierra)
- Si $n(x) > 0$: $R(x) = \Psi(x,u)$ (consumidroes usan la tierra)
- En uso mixto: $\Phi(x) = \Psi(x,u)$ (ambos pagan lo mismo)

Objetivo: Derivar $\Phi(x)$ y $\Psi(x,u)$ usando los valores de equilibrio de $A(x)$ y $w(x)$

Expresiones Completas

$\Phi(x)$ - Bid-rent comercial :

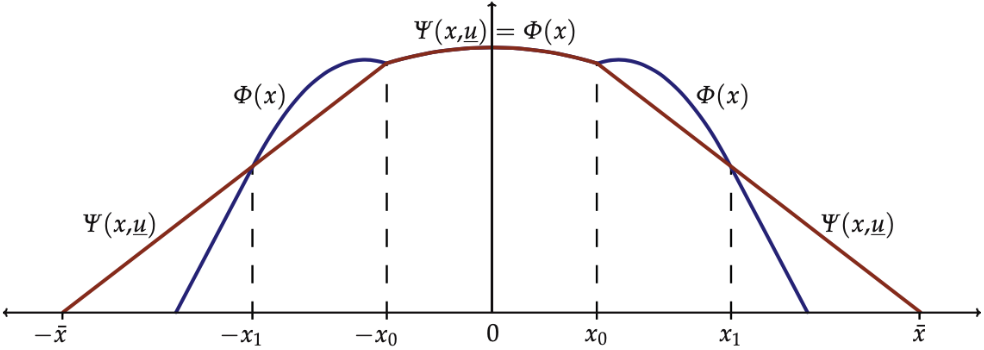
$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+l}[A(x) - z(u)] & x \in [-x_0, x_0] \\ \Phi(x_0) + \frac{1}{l}[A(x) - A(x_0)] + \frac{t}{l}(|x| - x_0) & x \in [x_0, \bar{x}] \end{cases}$$

$\Psi(x, u)$ - Bid-rent residencial :

$$\Psi(x, u) = \begin{cases} \frac{1}{1+l}[A(x) - z(u)] & x \in [-x_0, x_0] \\ \Psi(x_0, u) - t(|x| - x_0) & x \in [x_0, \bar{x}] \end{cases}$$

Donde: $\Phi(x_0) = \Psi(x_0, u) = \frac{1}{1+l}[A(x_0) - z(u)]$

Propiedades de las Funciones Bid-Rent



Panel (d) Bid-rent gradients

Condiciones de Transición entre Zonas

En $x = x_0$ (frontera mixto/comercial):

- $\Phi(x_0) = \Psi(x_0, u)$ siempre se cumple
- Ambas funciones son continuas
- Puede haber cambio en las pendientes

En $x = x_1$ (frontera comercial/residencial):

- Debe cumplirse: $\Phi(x_1) = \Psi(x_1, u)$
- Esta condición determina x_1 (Ecuación 68)
- Punto donde empresas ya no pueden competir con residentes

En $x = \bar{x}$ (borde de la ciudad):

- $\Psi(\bar{x}, u) = 0$ (precio de tierra agrícola)
- $\Phi(\bar{x}) < 0$ (empresas no pueden pagar)
- Esta condición determina $\bar{x}$ (Ecuación 67)

Determinación del Borde de la Ciudad: $\bar{x}$

Objetivo: Encontrar dónde termina la ciudad
Condición clave: La población total debe ser N

$$\int_{-\bar{x}}^{\bar{x}} n(x)dx = N$$

Método:

1. Sustituir las densidades de equilibrio $n(x)$
2. Integrar por zonas
3. Resolver para $\bar{x}$

Determinación del Borde de la Ciudad: $\bar{x}$

Observación clave: El total de tierra disponible es $2\bar{x}$

Uso total de tierra:

- Cada residente usa 1 unidad de tierra
- Cada empresa usa l unidades de tierra
- Hay N residentes y N empresas en total

Balance:

$$\text{Tierra total} = N \times 1 + N \times l = N(1 + l)$$

Por tanto:

$$2\bar{x} = N(1 + l)$$

$$\boxed{\bar{x} = \frac{(1 + l)N}{2}}$$

Resultado final:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{(1+l)N}{2}}$$

Significado económico:

- El tamaño de la ciudad está determinado por:
  - La población total N
  - La intensidad de uso de tierra comercial l
- NO depende de:
  - Costos de commuting t
  - Decaimiento de spillovers g

Próximo paso:

- Determinar x_0 y x_1
- Estos SÍ dependerán de t y g
- Determinan la estructura interna, no el tamaño total

Determinación de x_0 y x_1: Las Fronteras Internas

Problema: Encontrar dónde terminan las zonas

- x_0: frontera entre zona mixta y comercial
- x_1: frontera entre zona comercial y residencial

Método: Sistema de dos ecuaciones

1. **Condición de equilibrio en x_1:** $\Phi(x_1) = \Psi(x_1, u)$
2. **Restricción agregada:** Total de empresas = N

Sistema de Ecuaciones para x_0 y x_1

Tenemos 2 ecuaciones con 2 incógnitas:

$$\frac{g}{l}\left(x_1^2 - x_0^2 - \frac{2}{1+l}x_0(x_1 - x_0)\right) = (1+l)t(x_1 - x_0)$$

$$\frac{2x_0}{1+l} + \frac{2(x_1 - x_0)}{l} = N$$

Parámetros del modelo:

- Dados: N, l, t, g
- A determinar: x_0, x_1
- Ya determinado: $\bar{x} = \frac{(1+l)N}{2}$

Próximo paso: Resolver el sistema (tiene múltiples soluciones)

Resolviendo el Sistema: Tres Posibles Soluciones

El sistema de ecuaciones tiene tres tipos de soluciones:

1. **Ciudad completamente mixta:** $x_0 = x_1 = \bar{x}$
    - Toda la ciudad es de uso mixto
    - No hay separación espacial
2. **Ciudad con tres zonas:** $0 < x_0 < x_1 < \bar{x}$
    - Zona mixta central
    - Zonas comerciales puras
    - Zonas residenciales periféricas
3. **Ciudad monocéntrica:** $x_0 = 0 < x_1 < \bar{x}$
    - CBD puro en el centro
    - Zona residencial alrededor

¿Cuál ocurre? Depende del ratio $\frac{t(1+l)}{g}$

Solución de Ciudad Mixta

Estructura:

$$x_0 = x_1 = \bar{x} = \frac{(1+l)N}{2}$$

Densidades uniformes:

- Empresas: $m(x) = \frac{1}{1+l}$ en toda la ciudad
- Residentes: $n(x) = \frac{l}{1+l}$ en toda la ciudad

Condición de existencia:

$$N \leq \frac{t(1+l)}{g}$$

Características económicas:

- No hay commuting: todos viven donde trabajan
- No hay gradientes de precio ni salario
- Spillovers moderados pero uniformes
- Solución eficiente cuando los costos de transporte son altos

Ciudad con Tres Zonas

Estructura: La configuración más rica del modelo

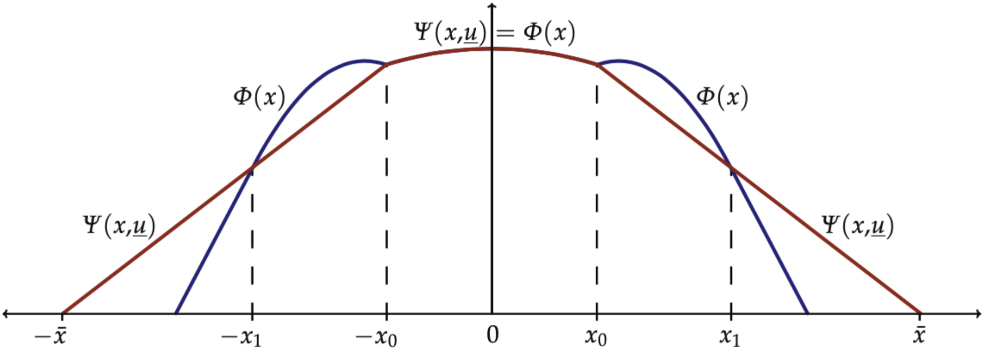
- Centro mixto: trabajadores viven donde trabajan
- Anillos comerciales: solo empresas, alta densidad
- Periferia residencial: trabajadores conmutan al centro

Valores de equilibrio:

- $x_0 = \frac{t(1+l)^2}{g} - \frac{(1+l)N}{2}$
- $x_1 = \frac{t(1+l)}{g} - \frac{N}{2l}$
- $\bar{x} = \frac{(1+l)N}{2}$

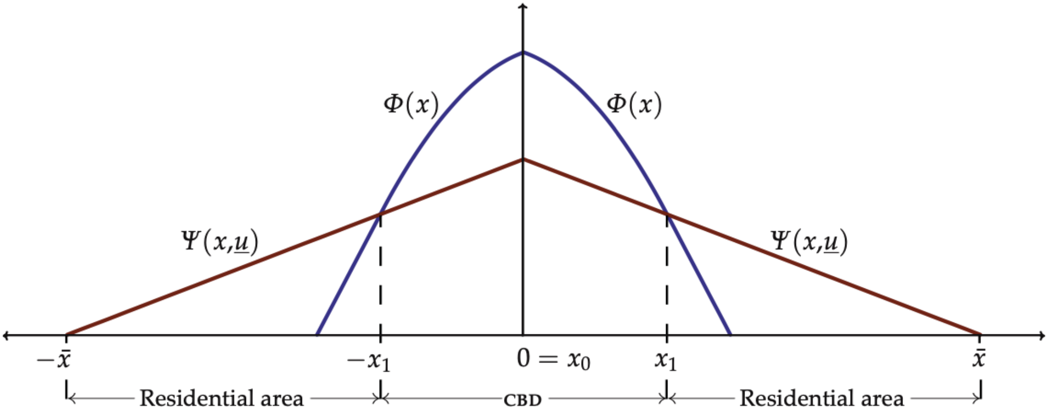
Existe cuando: $\frac{N}{2} < \frac{t(1+l)}{g} < N$

Solución de Ciudad Mixta



Panel (d) Bid-rent gradients

Solución de Ciudad Monocentrica



Agenda

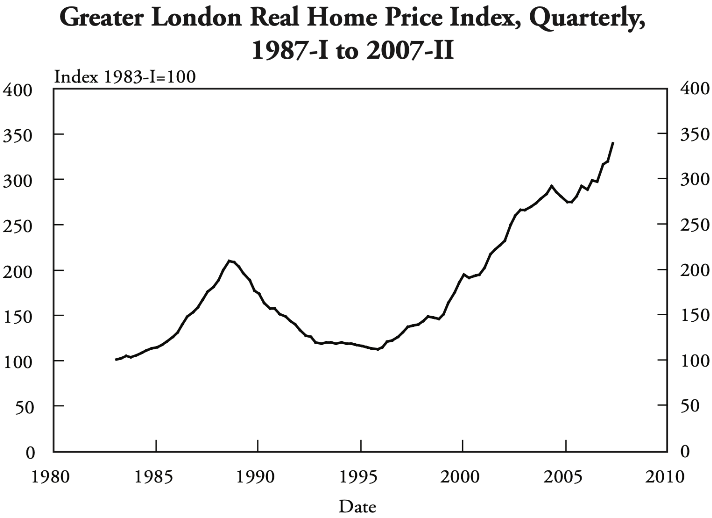
Modelos

- Where do you want to live?
  - Spatial equilibrium
  - Within cities: Alonso-Muth-Mills (Monocentric/Polycentric Model)
  - Hedonic pricing of amenities and local public goods (Rosen)
  - Across locations: Rosen-Roback

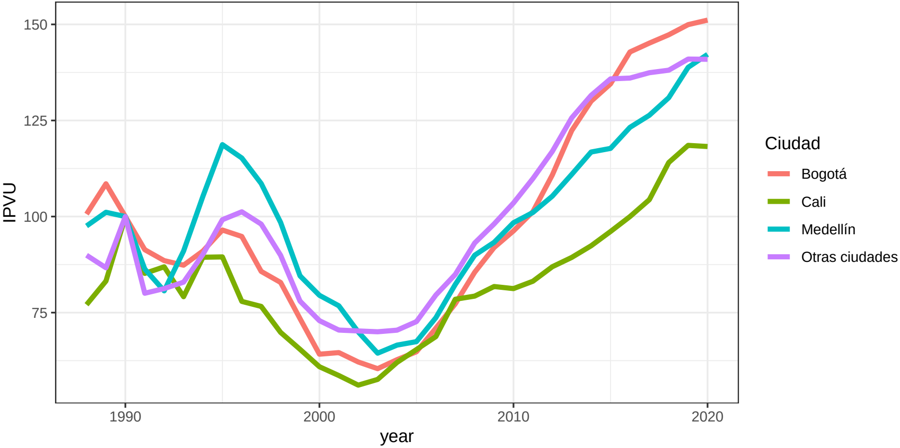
Mercados de Viviendas

- Residential real estate is a huge market
  - The course will not cover commercial real estate
- Housing is by far the main asset for most households
- Macroeconomic relevance

Mercados de Viviendas: Motivation

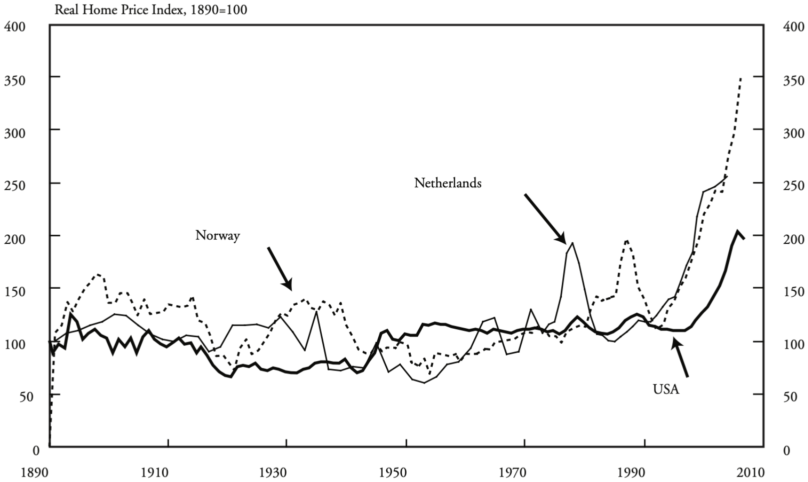


Mercados de Viviendas: Motivation

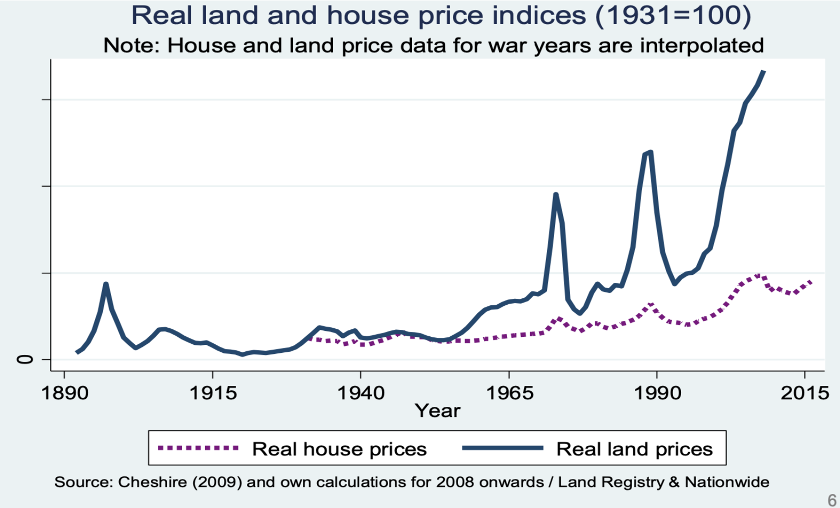


Mercados de Viviendas: Motivation

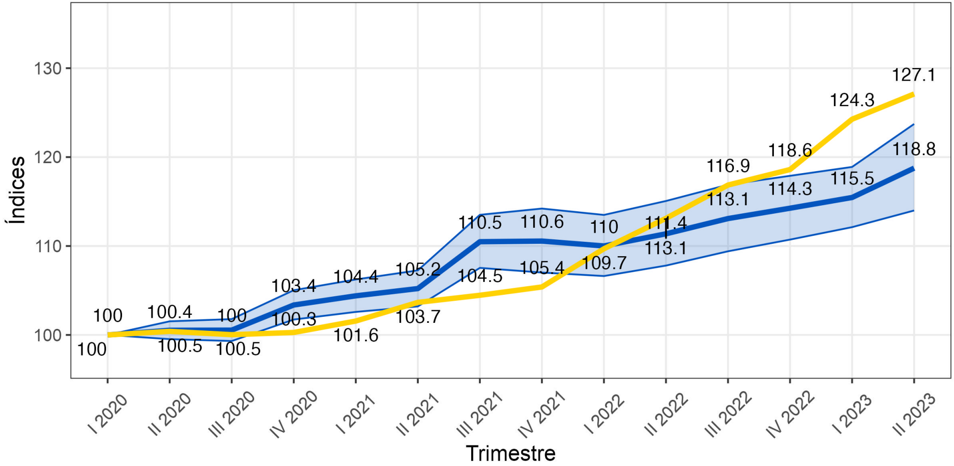
Home price indices deflated for consumer prices and rescaled to 1890=100, Netherlands, Norway, and USA.



Mercados de Viviendas: Motivation



Mercados de Viviendas: Motivation



Mercados de Viviendas: Motivation

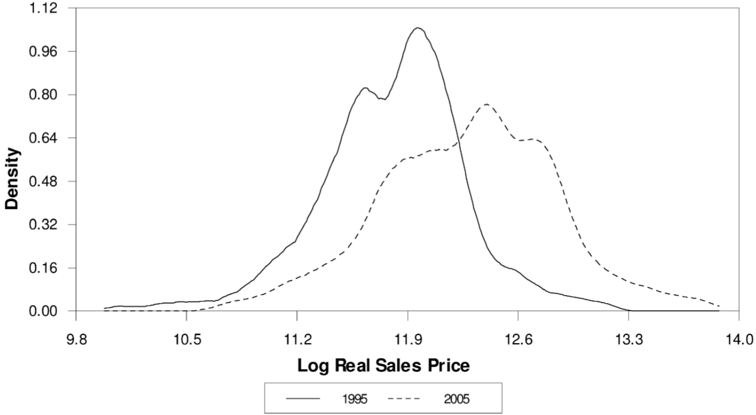
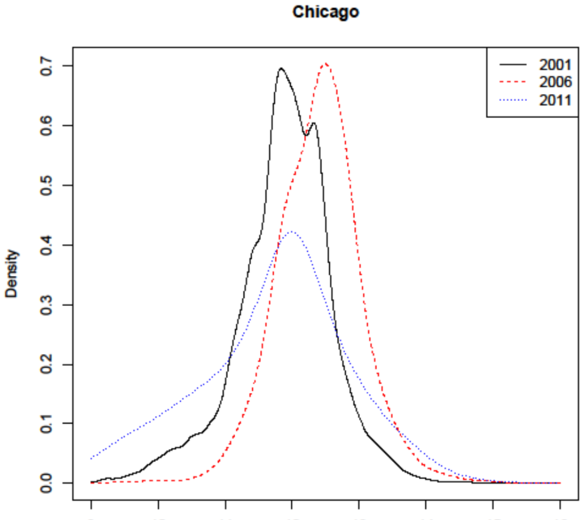


Fig. 1. Kernel density estimates for log of real sales price.

Mercados de Viviendas: Motivation

Figure 4: Estimated Sale Price Densities for Chicago



Rosen's Hedonic Model

- Goods are valued for their utility-bearing attributes
- Heterogeneous or differentiated goods are products whose characteristics vary in such a way that there are distinct product varieties even though the product is sold in one market (e.g. houses, cars, computers, etc).
- The variation in product variety gives rise to variations in product prices within each market.
- The hedonic method relies on market transactions for these differentiated goods to determine the implied value or implicit price of characteristics.

The Consumer's Problem

- House: $z = (z_1, \ldots, z_n)$
- Price: $p(z) = p(z_1, \ldots, z_n)$
- Consumer utility is $U(x, z)$ where x is non-housing consumption
- The consumer buys one house and has budget $y = x + p(z)$
  - y denotes exogenous income
  - x denotes consumption of non-housing goods

The Consumer's Problem

The Consumer's Problem

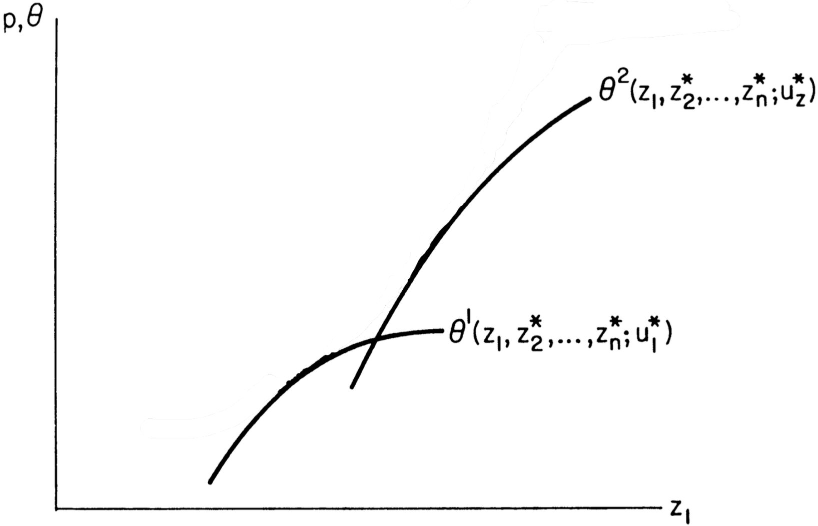


Fig. 1

The Consumer's Problem

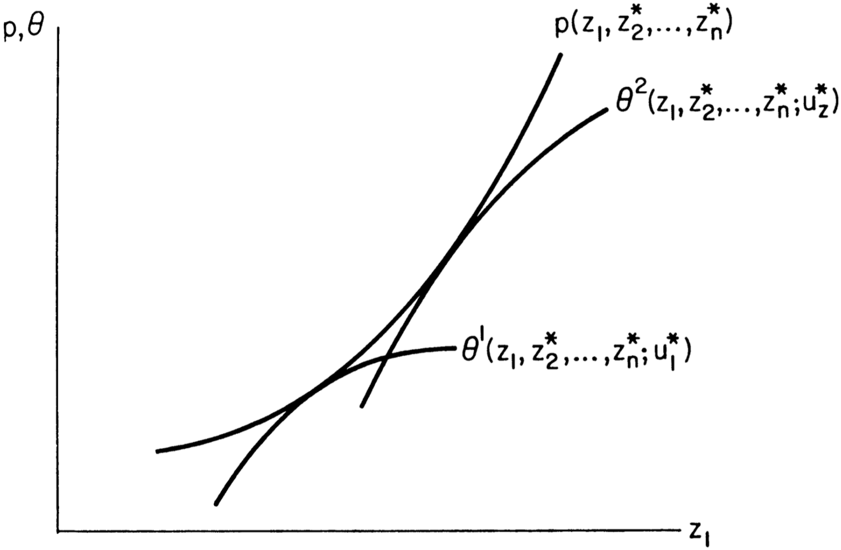


Fig. 1

The Producer's Problem

- Each firm produces a specific bundle of attributes $z = (z_1, \ldots, z_n)$
- Production costs are $C(M, z, \beta)$ where
  - $M(z)$ denotes number of units produced of designs offering specification z
  - Producers have different technologies parametrized by β
- The firm is a price taker $p(z)$ and maximizes profits

$$\pi = Mp(z) - C(M, z) \tag{11}$$

The Producer's Problem

The Producer's Problem

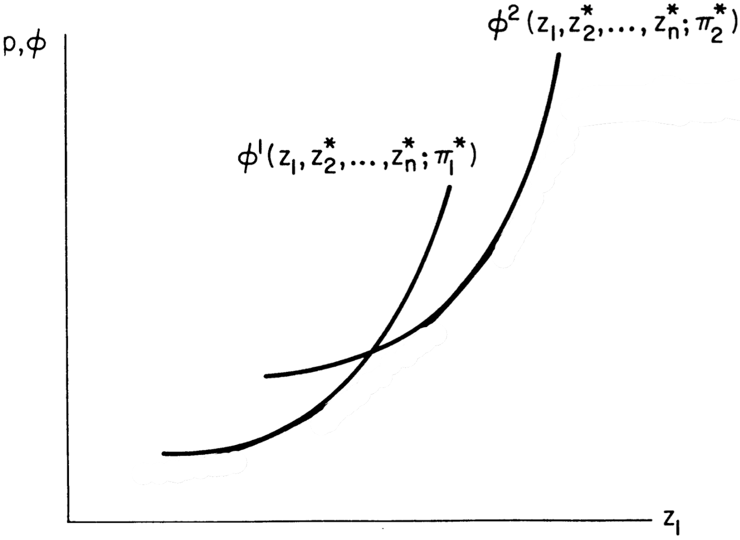
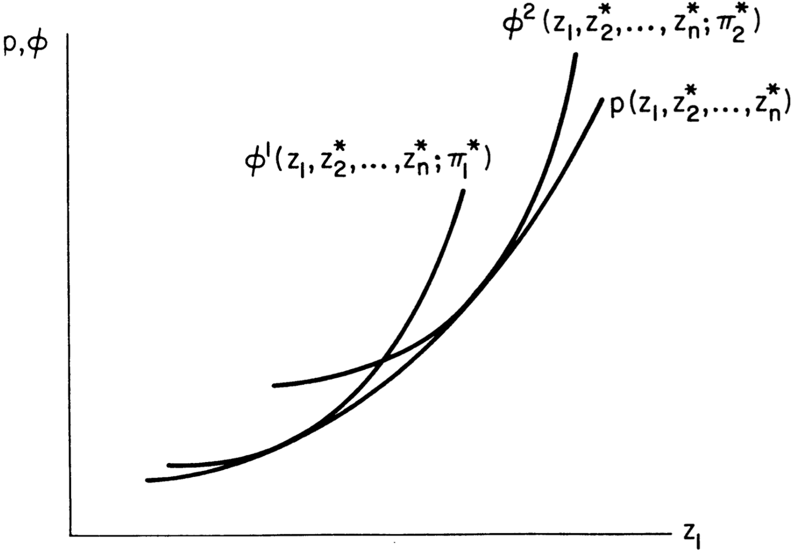


FIG. 2

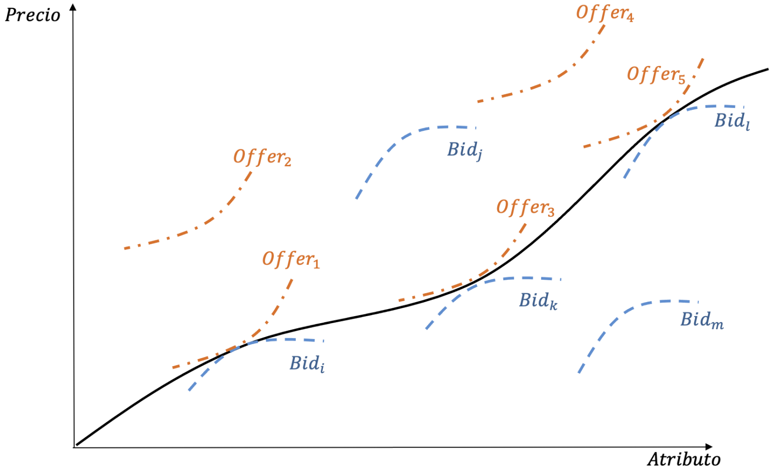
The Producer's Problem



Market Equilibrium

- The market hedonic function $p(z)$ is a joint envelope
  - Upper envelope of consumer's bid functions
  - Lower envelope of producer's offer functions
- Quantities demanded and supplied at each z depend on all of $p(z)$

Market Equilibrium



Empirics

- Rosen (1974) proposed a two-step empirical strategy
  1. Estimate hedonic prices $p(z)$ with the best fitting functional form
  2. Take partial derivatives of the estimate $\hat{p}(z)$ at the sample values and estimate the simultaneous demand and supply equations

$$\frac{\partial p}{\partial z_i} = F_i(z, x^d, y - p(z)) \tag{12}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z_i} = G_i(z, x^s, p(z)) \tag{13}$$

Empirics

- Rosen (1974) proposed a two-step empirical strategy
  1. Estimate hedonic prices $p(z)$ with the best fitting functional form
  2. Take partial derivatives of the estimate $\hat{p}(z)$ at the sample values and estimate the simultaneous demand and supply equations

$$\frac{\partial p}{\partial z_i} = F_i(z, x^d, y - p(z)) \tag{12}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z_i} = G_i(z, x^s, p(z)) \tag{13}$$

- Problems?

Empirics
Solutions

- Bartik (1987): exogenous shifts in the consumer's budget constraint
  - Exogenous income changes if you can find them (field experiments)
- Urban economists have mostly shied away from structural estimation
  - Stop at the first-step hedonic regression
  - Focus on omitted-variable bias

Empirics

Example: Currie et al (2015) AER

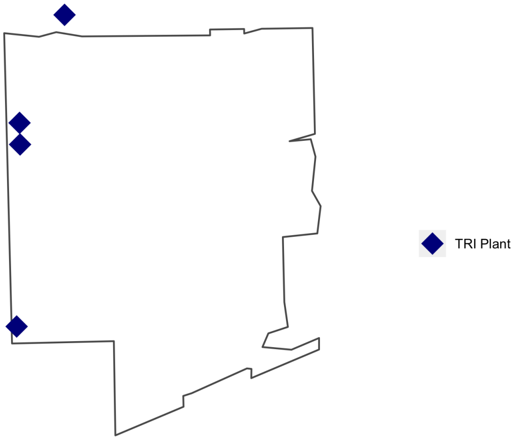
American Economic Review 2015, 105(2): 678–709
http://dx.doi.org/10.1257/aer.20121656

Environmental Health Risks and Housing Values: Evidence from 1,600 Toxic Plant Openings and Closings†

By Janet Currie, Lucas Davis, Michael Greenstone, and Reed Walker*

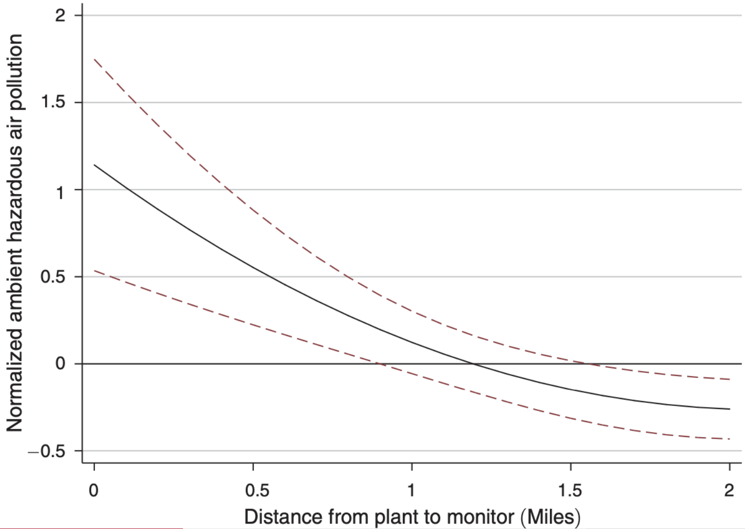
Empirics

Zip Code with TRI Toxic Plants within one mile



Empirics

Example: Currie et al (2015) AER



Empirics

Example: Currie et al (2015) AER

TABLE 2—THE EFFECT OF TOXIC PLANTS ON LOCAL HOUSING VALUES

	0–0.5 Miles		0.5–1 Miles		0–1 Miles		0–1 Miles (+/– 2 years)	
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
Panel C. First difference: Estimated effect of plant openings and closings								
1(Plant Opening) × Near	−0.096***	−0.107***	−0.007	−0.008	−0.020	−0.022	−0.030	−0.038
	(0.036)	(0.034)	(0.023)	(0.020)	(0.022)	(0.019)	(0.028)	(0.025)
1(Plant Closing) × Near	0.017	0.010	0.008	0.003	0.010*	0.005	0.005	0.001
	(0.011)	(0.009)	(0.005)	(0.004)	(0.006)	(0.005)	(0.007)	(0.005)
H_0: Opening = −Closing (*p*-value)	0.051	0.013	0.968	0.827	0.688	0.438	0.402	0.164
Observations	1,114,248	1,114,248	1,305,780	1,305,780	1,375,751	1,375,751	1,196,000	1,196,000
State × year fixed FE	X		X		X		X	
County × year FE		X		X		X		X