

# Difusividad térmica

IGNACIO POGGI

ignaciop.3@gmail.com

CARLOS RÍOS CHÁVEZ

carlos\_rios\_ch@hotmail.com

Grupo 3 - Laboratorio 4, Cátedra Schmiegelow - Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires

18 de marzo de 2019

## Resumen

En este trabajo se estudió la difusión del calor utilizando una barra de cobre sometida a una fuente periódica, modulada por una onda cuadrada en uno de sus extremos. Se calculó la velocidad y el coeficiente de decaimiento de la onda de calor en el estado estacionario, obteniendo experimentalmente la constante de difusividad térmica del  $_{29}\text{Cu}$ ,  $\kappa = (2,4 \pm 0,7) * 10^{-4} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}}$ .

## 1. Introducción

En un sólido isótropo y homogéneo, cuya difusividad térmica  $\kappa$  es independiente de la temperatura, la ecuación que determina el comportamiento térmico es<sup>1</sup>:

$$\frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} \quad (1)$$

siendo  $\theta(x, t)$  la temperatura en la posición  $x$  a tiempo  $t$ . A la ecuación (1) se la conoce como la ecuación de Fourier unidimensional. Para determinar las condiciones de contorno que corresponden a nuestro experimento, se dispuso en el origen de la barra una fuente de calor periódica, lo que permite expresar  $\theta(x, t)$  en este extremo de la siguiente manera:

$$\theta(0, t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4\theta_0}{n\pi} \text{sen}\left(\frac{2n\pi t}{\tau}\right) \quad (2)$$

Además, como la barra se supone semi-infinita, la condición en el otro extremo será  $\theta(\infty, t) = 0$ ; es decir, se considera que la temperatura al final de la barra decae completamente.

Siendo que nos interesa la distribución de temperatura en el régimen estacionario, se propone la siguiente serie de Fourier como solución a la ecuación (1):

$$\theta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x) \text{sen}(\omega_n t - k_n x) \quad (3)$$

donde  $A_n$ ,  $\omega_n$  y  $k_n$  son la amplitud, frecuencia y el número de onda del  $n$ -ésimo armónico. Reemplazando la ecuación (3) en (1), junto a las condiciones de contorno mencionadas en (2) y  $\theta(\infty, t) = 0$ , se obtiene la solución para el sistema estudiado:

$$\theta(x, t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \theta_n e^{\epsilon_n x} \text{sen}(\omega_n t - \epsilon_n x) \quad (4)$$

donde

$$\theta_n = \frac{4\theta_0}{n\pi}, \omega_n = \frac{2n\pi t}{\tau}, \epsilon_n = \sqrt{\frac{\omega_n}{2\kappa}} \quad (5)$$

Se puede ver que, a medida que aumenta  $n$ , los armónicos se desvanecen rápidamente dado que  $\epsilon_n$  aumenta con la frecuencia. Debido a esto, es posible aproximar a la distribución de temperatura en puntos lo suficientemente alejados del origen de la barra, utilizando solamente el primer armónico:

$$\theta(x, t) \approx A_0 e^{\epsilon x} \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right) \quad (6)$$

escogiendo el origen de tiempo tal que  $\theta$  es máximo en  $x = 0$ . Considerando la ecuación (6) y el primer armónico de la solución completa (4), se pueden obtener las expresiones:

$$\kappa_{\epsilon} = \frac{\pi}{\tau \epsilon^2} \quad (7)$$

$$\kappa_v = \frac{v^2 \tau}{4\pi} \quad (8)$$

que relacionan las propiedades térmicas del material, en este caso la difusividad térmica  $\kappa$ , con dos propiedades de la onda: la velocidad  $v$  y el coeficiente de decaimiento  $\epsilon$ .

Finalmente, combinando las ecuaciones (7) y (8), se obtiene una expresión para el coeficiente de difusividad térmica del cobre en función de los parámetros  $v$  y  $\epsilon$ , determinados experimentalmente:

$$\kappa = \frac{v}{2\epsilon} \quad (9)$$

la cual permite comparar el valor de  $\kappa$  experimental con el tabulado<sup>2</sup> de  $\kappa = 1,12 * 10^{-4} \frac{m^2}{seg}$

## 2. Dispositivo experimental

Los instrumentos de laboratorio utilizados fueron:

- PC con software MATLAB para la adquisición y análisis de los datos.
- Multímetro Agilent 34970A.
- Multiplexor de 8 canales.
- Barra de cobre de  $1,5 \pm 0,1$  cm de diámetro y  $50,0 \pm 0,1$  cm de largo.
- Siete termocuplas (2 de tipo K y 5 de tipo J).
- Soldador.
- Contactor.
- Generador de funciones Tektronix AFG3021B.

Se dispuso un soldador conectado a un contactor controlado por un generador de ondas, el cual se configuró para emitir una onda cuadrada de período  $\tau = 170$  seg. durante los regímenes transitorio y estacionario. Luego, la punta del soldador fue insertada en uno de los extremos de la barra aislada, y a los 10 minutos se comenzó a medir el régimen transitorio.

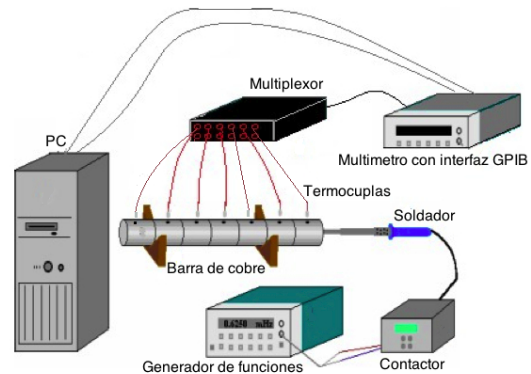
Las medidas de la temperatura se obtuvieron mediante 7 termocuplas de tipo K y J,

insertadas a lo largo de la barra en diferentes posiciones como muestra la siguiente tabla (todos los valores tomando como posición 0 al extremo fijado al soldador):

**Cuadro 1:** Posición de cada termocupla en la barra con respecto al extremo en contacto con el soldador (posición 0).

| Termocupla | Posición ( $\pm 0,1cm$ ) |
|------------|--------------------------|
| 1 K        | 4,1                      |
| 2 K        | 8,6                      |
| 3 J        | 13,4                     |
| 4 J        | 17,1                     |
| 5 J        | 22,0                     |
| 6 J        | 29,2                     |
| 7 J        | 36,4                     |

Estas termocuplas se conectaron a un multiplexor, el cual fue conectado a un multímetro de 8 canales, con el que se realizó la adquisición de los datos utilizando 7 de ellos. En la siguiente figura se puede ver un esquema del dispositivo utilizado:



**Figura 1:** Dispositivo experimental. Cabe destacar que la barra de cobre se encuentra aislada con una capa interna de espuma aislante y una externa de PVC.

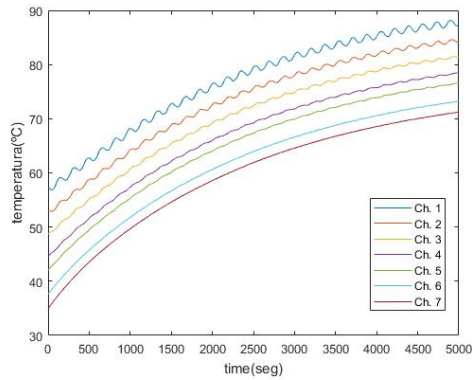
Mediante un programa realizado en MATLAB; el cual se utilizó para configurar al multímetro vía interfaz GPIB, se tomaron 1000 mediciones secuenciales en las termocuplas cada 5 segundos, es decir; se obtuvieron 7 valores de temperatura (una por cada termocupla) cada 5 segundos; esto equivale a una medición. Este paso se repitió durante un tiempo total de 5000 segundos (aproximadamente 1:30 hs.), primero para el régimen transitorio y

luego para el estacionario; dejando pasar para este último 3 horas desde el comienzo de la medición del transitorio.

Luego, se obtuvieron todos los datos guardados en el multímetro con el mismo programa en MATLAB, para su posterior análisis.

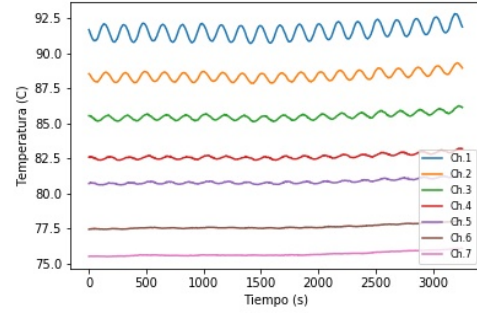
### 3. Resultados y análisis

Para estimar la temperatura a la cual el sistema alcanza el régimen estacionario, se alimentó al soldador con una onda cuadrada de período  $\tau = 170$  seg. y amplitud de 6,432 Vpp. durante la primera medición realizada en un tiempo de 1:30 hs.; observando que la misma aumenta de manera uniforme durante éste régimen hasta oscilar alrededor de un valor fijo en cada termocupla para los últimos valores de tiempo en esta medición ( $t \approx 4800$  a  $5000$  seg.), teniendo en cuenta el error de precisión de las mismas ( $\pm 1,5$  °C). Por ejemplo, en las termocuplas 1 y 4,  $T_{Ch1} \approx 90$  °C y  $T_{Ch4} \approx 79,2$  °C respectivamente, como puede verse en la siguiente figura.



**Figura 2:** Valores de temperatura en cada termocupla durante el régimen transitorio

Luego, se deja evolucionar al sistema durante 3 horas más, para poder alcanzar el régimen estacionario, y se realiza la segunda medición, con los mismos parámetros de período y amplitud que para el transitorio.



**Figura 3:** Valores de temperatura en función del tiempo para cada termocupla durante el régimen estacionario

Podemos notar que la temperatura inicial de la termocupla 1 es de aproximadamente 91,5 °C, muy cercano al valor de la última medición de temperatura (a  $t = 5000$  seg) para el régimen transitorio. Teniendo en cuenta esto, más el rango de precisión mencionado en cada termocupla; nos indica que el tiempo de 3 horas utilizado para alcanzar el régimen estacionario una vez comenzado el experimento fue el correcto.

#### 3.1. Cálculo de la velocidad $v$ y la constante de decaimiento $\epsilon$ de la onda térmica

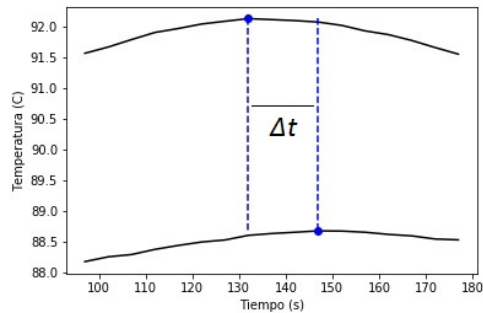
La velocidad de propagación de la onda de calor está dada por:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (10)$$

donde  $\Delta x$  es la distancia dada por la diferencia en las posiciones de las termocuplas que figuran en la Tabla 1.  $\Delta t$  es el tiempo que la onda de temperatura tarda en llegar de una termocupla a otra. Se trabajó con los valores obtenidos con los canales 1 y 2, sin tomar en cuenta los otros canales debido a que al calcular los máximos de temperatura, el algoritmo de detección de picos fallaba, mientras que la señal de los canales 1 y 2 fue lo suficientemente limpia para que detecte bien los máximos. Aún así, se utilizaron algunos algoritmos de optimización, como por ejemplo, se limpió el ruido de la señal y cuando el programa detectaba dos máximos en un lugar donde sólo debía haber uno, fueron

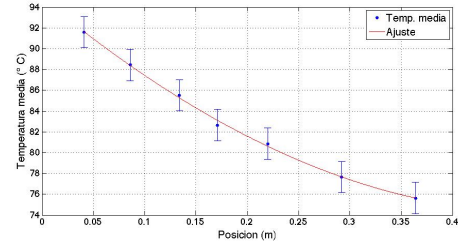
promediados.

En la Figura 4 se puede ver un acercamiento a la diferencia temporal que hay entre el primer máximo de temperatura de los canales 1 y 2. Se realizó este procedimiento para todos los máximos y se obtuvo una lista de diferencias temporales, la cual se promedió, obteniendo:  $\Delta t = (16,6 \pm 3,8)$  seg., para el error de este valor se considero la desviación estándar de la de la curva gaussiana centrada en el valor medio pues los errores más notables se produjeron en el análisis de datos. La diferencia entre la posición de las termocupas 1 y 2 es:  $\Delta x = (0,045 \pm 0,002)$  m., pudiendo obtener un valor para la velocidad de la onda de  $v = (0,0027 \pm 0,0007) \frac{m}{seg}$ , el error de este valor se obtuvo a partir de la propagación de errores.



**Figura 4:** Detalle de la diferencia de fases entre los valores máximos de la temperatura en los canales 1 y 2.

Para obtener el valor del coeficiente de decaimiento  $\epsilon$  se calculó el valor medio de la temperatura de cada termocupla, y se realizó un ajuste exponencial de la variación de temperatura en función de la posición de cada una de ellas, donde se encontró que  $\epsilon = (6,1 \pm 0,3) \frac{1}{m}$  (Figura 5).



**Figura 5:** Ajuste por una curva exponencial de la temperatura media en función de la posición de cada termocupla.

Por ultimo, mediante las ecuaciones (7) y (8) se encontró que  $\kappa_\epsilon = (4,9 \pm 0,7) * 10^{-4} \frac{m^2}{seg}$  y  $\kappa_v = (1,2 \pm 0,7) * 10^{-4} \frac{m^2}{seg}$ , lo que permite realizar un promedio entre ambos valores y obtener un valor aproximado de la constante de difusividad térmica de  $\bar{\kappa} = (3,11 \pm 0,7) * 10^{-4} \frac{m^2}{seg}$ .

Al utilizar la ecuación (9), con los datos obtenidos para la velocidad  $v$  y la constante de decaimiento  $\epsilon$ , se obtuvo que  $\kappa = (2,4 \pm 0,7) * 10^{-4} \frac{m^2}{seg}$ , notando que existe una leve diferencia de  $0,7 \frac{m^2}{seg}$ , entre el valor obtenido con  $\bar{\kappa}$  con respecto al calculado mediante la ecuación mencionada.

## 4. Conclusiones

Para poder obtener las constantes de difusividad térmica y de decaimiento de una barra de Cobre se estudió la conducción de calor en la misma, calentando un soldador fijado a un extremo de la misma mediante un contactor controlado por un generador de ondas emitiendo una onda cuadrada de período  $\tau = 170$  seg. durante los regímenes transitorio y estacionario.

Las medidas de temperatura se obtuvieron mediante termocuplas insertadas a lo largo de la barra en diferentes posiciones, con respecto a una posición 0, que se eligió en el extremo donde se colocó el soldador. Los datos recolectados mediante el multímetro conectado a dichas termocuplas permitieron calcular la velocidad  $v$  de propagación de la onda y su constante de decaimiento  $\epsilon$ .

La velocidad de propagación de la onda

de calor se calculo mediante la distancia  $\Delta x$  entre termocuplas y  $\Delta t$  es el tiempo que la onda de temperatura tarda en llegar de una termocupla a otra; obteniendo un valor de  $v = (0,0027 \pm 0,0007) \frac{m}{seg}$ .

Para la obtención del valor del coeficiente de decaimiento  $\epsilon$  se calculó el valor medio de la temperatura de cada termocupla, y se realizo un ajuste exponencial de la variación de temperatura en función de la posición de cada una de ellas, dando  $\epsilon = (6,1 \pm 0,3) \frac{1}{m}$ .

A partir de lo mencionado en los dos párrafos anteriores, fue posible determinar los factores  $\kappa_\epsilon = (4,9 \pm 0,7) * 10^{-4} \frac{m^2}{seg}$  y  $\kappa_v = (1,2 \pm 0,7) * 10^{-4} \frac{m^2}{seg}$ , lo que permitió realizar un promedio entre ambos para obtener un valor aproximado de la constante de difusividad térmica de  $\bar{\kappa} = (3,11 \pm 0,7) * 10^{-4} \frac{m^2}{seg}$ .

Podemos comparar este valor de  $\bar{\kappa}$  con el calculado mediante la ecuación (9), siempre utilizando los datos recolectados para  $v$  y  $\epsilon$ , con los cuales se obtuvo que  $\kappa = (2,4 \pm 0,7) * 10^{-4} \frac{m^2}{seg}$ . Se puede ver que existe una diferencia de  $0,7 \frac{m^2}{seg}$  entre el valor calculado con  $\bar{\kappa}$  y  $\kappa$ , lo que permite que en ciertas condiciones puedan considerarse iguales.

Con los resultados obtenidos experimentalmente para  $\kappa$ , se obtuvo una diferencia del 45 % con respecto al valor tabulado para el Cobre,  $\kappa = 1,12 * 10^{-4} \frac{m^2}{seg}$ , que si bien se encuentra dentro del orden de magnitud propuesto por la bibliografía, creemos que se produjeron errores debido a la baja sensibilidad de las termocuplas y al cálculo del  $\Delta t$ , produciendo que la detección de máximos de intensidad no sean tan exactos, afectando el cálculo final de los coeficientes, sobre todo de  $\kappa_\epsilon$ .

## 5. Bibliografía

- [1] A. Bodas, V. Gándia and E. López-Baeza, *An undergraduate experiment on the propagation of thermal waves*, American Journal of Physics, **66**, 528 (1998).
- [2] W. Czarnetzki, M. Wandelt, and W. Roetzel, *Thermal wave analysis for measurements of thermal diffusivity*, *Proceedings of the Joint Conference 1996: IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference and IMEKO Technical Committee 7*, Brussels, Belgium, 4-6 June 1996 (IEEE, New York, 1996), pág. 1195.