

Difusividad térmica

IGNACIO POGGI

ignaciop.3@gmail.com

CARLOS RÍOS CHÁVEZ

carlos_rios_ch@hotmail.com

Grupo 3 - Laboratorio 4, Cátedra Schmiegelow - Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires

17 de febrero de 2019

Resumen

En este trabajo se estudió la difusión del calor utilizando una barra de cobre sometida a una fuente periódica, modulada por una onda cuadrada en uno de sus extremos. Se calculó la velocidad y el coeficiente de decaimiento de la onda de calor en el estado estacionario, para poder obtener la constante de difusividad térmica del ${}_{29}\text{Cu}$, $\kappa = ALGO$.

1. Introducción

En un sólido isótropo y homogéneo, cuya difusividad térmica κ es independiente de la temperatura, la ecuación que determina el comportamiento térmico es: [?]:

$$\frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} \quad (1)$$

siendo $\theta(x, t)$ la temperatura en la posición x a tiempo t . A la ecuación (1) se la conoce como la ecuación de Fourier unidimensional. Para determinar las condiciones de contorno que corresponden a nuestro experimento, se dispuso en el origen de la barra una fuente de calor periódica, lo que permite expresar $\theta(x, t)$ en este extremo de la siguiente manera:

$$\theta(0, t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4\theta_0}{n\pi} \text{sen}\left(\frac{2n\pi t}{\tau}\right) \quad (2)$$

Además, como la barra se supone semi-infinita, la condición en el otro extremo será $\theta(\infty, t) = 0$; es decir, se considera que la temperatura al final de la barra decae completamente.

Siendo que nos interesa la distribución de temperatura en el régimen estacionario, se propone la siguiente serie de Fourier como solución a la ecuación (1):

$$\theta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x) \text{sen}(\omega_n t - k_n x) \quad (3)$$

donde A_n , ω_n y k_n son la amplitud, frecuencia y el número de onda del n -ésimo armónico. Reemplazando la ecuación (3) en (1), junto a las condiciones de contorno mencionadas en (2) y $\theta(\infty, t) = 0$, se obtiene la solución para el sistema estudiado:

$$\theta(x, t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \theta_n e^{\epsilon_n x} \text{sen}(\omega_n t - \epsilon_n x) \quad (4)$$

donde

$$\theta_n = \frac{4\theta_0}{n\pi}, \omega_n = \frac{2n\pi}{\tau}, \epsilon_n = \sqrt{\frac{\omega_n}{2\kappa}} \quad (5)$$

Se puede ver que, a medida que aumenta n , los armónicos se desvanecen rápidamente dado que ϵ_n aumenta con la frecuencia. Debido a esto, es posible aproximar a la distribución de temperatura en puntos lo suficientemente alejados del origen de la barra, utilizando solamente el primer armónico:

$$\theta(x, t) \approx A_0 e^{\epsilon x} \cos(\omega(t - \frac{x}{v})) \quad (6)$$

escogiendo el origen de tiempo tal que θ es máximo en $x = 0$. Considerando la ecuación (6) y el primer armónico de la solución completa (4), se pueden obtener las expresiones:

$$\kappa_\epsilon = \frac{pi}{\tau \epsilon^2} \quad (7)$$

$$\kappa_v = \frac{v^2 \tau}{4\pi} \quad (8)$$

que relacionan las propiedades térmicas del material, en este caso la difusividad térmica κ , con dos propiedades de la onda: la velocidad v y el coeficiente de decaimiento ϵ .

Finalmente, combinando las ecuaciones (7) y (8), se obtiene una expresión para el coeficiente de difusividad térmica en función de los parámetros v y ϵ , determinados experimentalmente:

$$\kappa = \frac{v}{2\epsilon} \quad (9)$$

2. Dispositivo experimental

Los instrumentos de laboratorio utilizados en ambos métodos fueron:

- Láser marca Melles Griot, modelo 06DAL003 de 670 nm.
- Espejos marca Melles Griot.
- Pesos y soporte para pesos.
- Barras de latón y de hierro de diferentes longitudes y pesos.
- Rendija de metal.
- Fotodiodo marca ThorLabs, modelo DET36A/M.
- Placa de adquisición de datos marca National Instruments, modelo NIUSB-6212.
- Computadora personal con software MATLAB para la recolección y análisis de datos.

2.1. Método estático

En el armado experimental (Figura 1) de este método se utilizaron dos cuchillas que nos sirvieron para armar la rendija por la cual se produciría la difracción. Se fijó una de las cuchillas al extremo libre de la varilla de latón (el diámetro de la varilla es de $d = 0,470 \pm 0,002\text{cm}$) y se fijó la otra cuchilla en un punto más alto que la primera. De esta manera, al colocar diferentes pesos al extremo libre de la varilla, ésta se deformó produciendo diferentes patrones de difracción. Las masas utilizadas fueron las siguientes: $m_1 = 22,57\text{g}$, $m_2 = 26,22\text{g}$, $m_3 = 20,66\text{g}$, $m_4 = 27,85\text{g}$, $m_5 = 28,48\text{g}$, $m_6 = 18,75\text{g}$, $m_7 = 12,66\text{g}$, $m_8 = 22,40\text{g}$, cabe considerar que en estos

valores está incluida la masa del soporte utilizado, y por otro lado que las mediciones se efectuaron con una balanza de alta precisión marca Ohaus Analytical Plus, modelo AP210, que tiene un error del orden de los miligramos y que por lo tanto no lo consideramos.

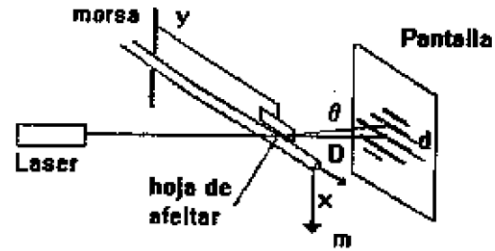


Figura 1: Disposición experimental del método estático.

Se utilizó un láser con una longitud de onda $\lambda = 670\text{nm}$ (color rojo). Para que el haz del láser impactara justo en la rendija se utilizó un arreglo de espejos. De esta manera, se tomó registro en un papel de los patrones de difracción generados a una distancia $D = 155,1 \pm 0,1\text{cm}$ de la rendija; en la Figura 2 se puede ver un ejemplo de uno de los patrones de difracción observados. Posteriormente, se midió con una regla las distancias entre los máximos registrados en el papel, se realizaron ocho mediciones con distintos pesos.

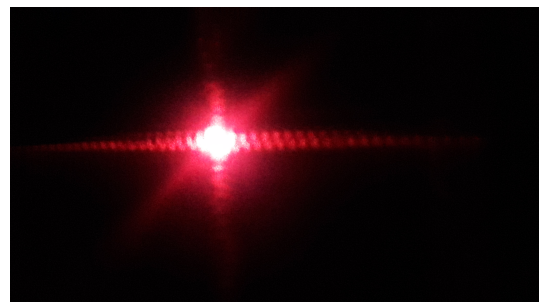


Figura 2: Ejemplo del fenómeno de difracción observado en el experimento.

2.2. Método dinámico

Para este método se utilizó prácticamente el mismo dispositivo experimental que en el estático, con la excepción de que se quitaron los pesos y se utilizaron dos barras de latón

(diferenciándose entre sí por su diámetro, longitud y peso) y otra de hierro. En la siguiente tabla se detallan los valores tomados para cada barra:

Cuadro 1: Diámetros d , longitudes L y pesos m de las tres barras utilizadas.

Material	$d \pm 0,002$	$L \pm 0,1$	$m \pm 0,1$
Latón	0,471 cm	31,02 cm	51,22 g
Hierro	0,369 cm	36,10 cm	36,57 g
Latón fino	0,243 cm	40,30 cm	22,02 g

Además, se agregó un fotodiodo de $^{28}_{14}\text{Si}$ marca ThorLabs modelo DET36A/M justo detrás del extremo libre de la barra para poder registrar las oscilaciones verticales de la misma. Éste último se conectó a una placa de adquisición de datos marca National Instruments NIUSB-6212, y mediante un programa hecho en MATLAB se registró, durante 60 segundos y a una frecuencia de 1000 Hz, la señal capturada por el fotodiodo. En la Figura (3) se muestra este arreglo experimental.

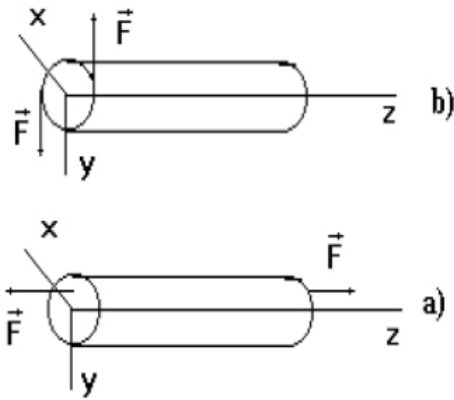


Figura 3: Dispositivo experimental utilizado en el método dinámico. Se pueden ver los siguientes elementos: A) Láser, B) Barra y soporte, C) Espejos para redireccionar el haz hacia el extremo libre de la barra, D) Fotodiodo.

Cabe destacar que, para poder estar seguros de que la frecuencia de 1000 Hz elegida para el sampleo de los datos era suficiente; se realizó un breve cálculo a mano para obtener las frecuencias de oscilación de los tres primeros modos mediante las ecuaciones (??) y (??),

tomando $\alpha = 0$; dando como resultado valores de $f_k < 500$ Hz, con lo cual se satisficieron las condiciones del teorema de Nyquist-Shannon [4]

La determinación del factor de amortiguamiento α se llevó a cabo mediante un ajuste sobre la señal original con una forma funcional senoidal amortiguada exponencialmente. Para calcular las frecuencias f_k , se realizó un análisis de Fourier sobre la señal obtenida por el fotodiodo y así poder obtener el valor del módulo de Young E mediante la ecuación (??) y la constante de amortiguamiento previamente calculada.

Por último, para la barra de latón fino se analizó como varia la frecuencia fundamental y el factor de amortiguamiento en función de la longitud de la barra (cambiando la posición del extremo fijo de la misma), partiendo de $L_1 = 40,3 \pm 0,1$ cm, en decrementos de 4 cm, hasta $L_6 = 20,3 \pm 0,1$ cm.

3. Resultados y análisis

3.1. Método estático

Para conocer la deformación de la varilla de latón mediante el fenómeno de difracción se utilizó la ecuación 10 que sale de las ecuaciones que describen los mínimos de la difracción de Fraunhofer, donde λ es la longitud de onda, D es la distancia de la rendija a la pantalla, n es el número de mínimo ($n = 1, 2, 3, \dots$), d_n es la distancia a la cual se encuentra dicho mínimo, y la variable y representa la apertura de la rendija, o en otros términos, representa la deformación de la varilla.

$$y = \lambda D \frac{n}{d_n} \quad (10)$$

Considerando que en la toma de datos los máximos de intensidad son mucho más definidos que los mínimos, se midieron las posiciones de los máximos. Sin embargo en la ecuación 10 se precisan las posiciones de los puntos donde la intensidad es mínima. Para obtener estos mínimos se calcularon los puntos medios entre dos máximos. Entonces, mediante la ecuación 10 se obtuvo una lista, por cada patrón de difracción, que contenía varios valores de y (el ancho de la rejilla). Se promediaron dichos valores y considerando que cada prome-

dio correspondía a un peso distinto se realizó una regresión lineal entre los valores de masa-deformación, en la cual se obtuvo una pendiente de $-0,00285 \pm 0,00014$ y una abscisa de $0,147 \pm 0,006$ (Figura 4). Comparando este resultado con nuestro modelo teórico expresado en la ecuación ?? , se obtuvo un módulo de Young de $E = (16,28 \pm 3,87) * 10^{10} Pa$.

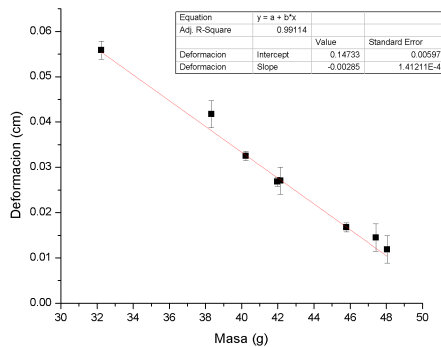


Figura 4: Regresión lineal entre la masa y la deformación en el método estático .

3.2. Método dinámico

Con los datos obtenidos de la señal enviada por el fotodiodo, se realizó un ajuste exponencial sobre la misma para poder obtener el factor de amortiguamiento α para las tres barras, tomando como longitud total de cada barra las detalladas en la Tabla 1.

En la siguiente figura, se puede observar que la señal decae en el tiempo como una sinoidal con una envolvente exponencial. También se puede ver que se marcaron los picos de cada máximo, para luego poder obtener el factor α mediante el ajuste mencionado al principio.

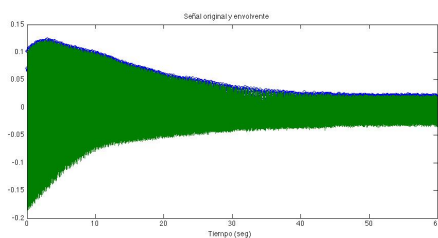


Figura 5: Señal obtenida para la barra de latón y su envolvente.

Luego, se obtuvieron las frecuencias de resonancia de cada barra mediante análisis de Fourier. Como se dijo en la Introducción, para la adquisición de los datos se fijó un tiempo de 60 segundos y una frecuencia de muestreo de 1000 Hz. Al calcular la transformada de Fourier de la señal y obtener las frecuencias, se notó que si bien aparecía la fundamental y los primeros dos armónicos, entre estos existían frecuencias que no correspondían a modos de resonancia de la barra si no a factores tales como el efecto rebote introducido por el movimiento oscilante de la misma.

Como ejemplo, en la siguiente figura se puede ver el espectro de frecuencias de la barra de latón en su longitud original $L_1 = 31,2 \pm 0,1$ cm. Pueden apreciarse la frecuencia fundamental $f_1 \approx 20,20$ Hz y las correspondientes al efecto de rebote ($f \approx 40,41$ Hz, etc).

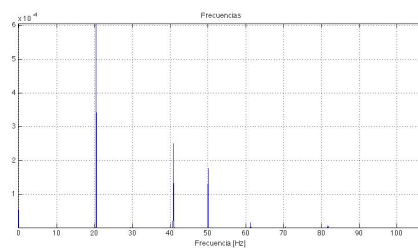


Figura 6: Parte del espectro de frecuencias para la barra de latón. Se pueden observar la frecuencia fundamental $f_1 \approx 20,2$ Hz y frecuencias del rebote.

Si bien para calcular el módulo de Young solo se utilizó la frecuencia del modo fundamental (y su correspondiente k), se pudo obtener las frecuencias del primer y segundo armónico. Esto resultó más difícil de observar en los espectros debido a que los picos correspondientes a estas frecuencias era muy pequeños con respecto al del fundamental. Siguiendo con el ejemplo de la barra de latón, se calcularon dichas frecuencias mediante la ecuación (??) junto con la constante de amortiguamiento α , obteniendo los siguientes valores: $f_1 \approx 20,20$ Hz, $f_2 \approx 122,50$ Hz y $f_3 \approx 354$ Hz.

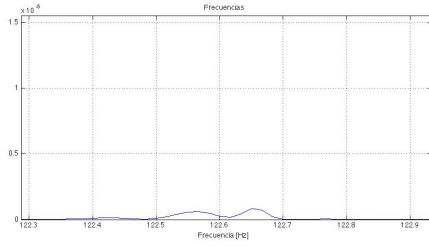


Figura 7: Parte del espectro de frecuencias para la barra de latón. Al aumentar el zoom en el espectro, se puede observar el primer armónico con frecuencia $f_2 \approx 122,50$ Hz, con una amplitud muy pequeña en relación a $f_1 \approx 20,20$ Hz

En la siguiente tabla se detallan los valores de la frecuencia fundamental f_1 para las tres barras, utilizando $k_1 = \frac{1,875}{L}$ y la constante de amortiguamiento α correspondiente a cada una con un nivel de confianza del 95 %:

Cuadro 2: Frecuencias fundamentales y constantes de amortiguamiento para cada barra.

Material	f_1 (Hz)	α (Hz)
Latón	20,20	$0,0335 \pm 0,0009$
Hierro	21,78	$0,1343 \pm 0,0009$
Latón fino	8,25	$0,0190 \pm 0,0009$

Además, se calculó la densidad lineal de cada barra a partir de su peso y longitud, así como también el momento de inercia I de acuerdo a la geometría cilíndrica de las mismas. Estos datos se encuentran en la siguiente tabla :

Cuadro 3: Valores de longitud L , densidad lineal ρ_l y momento de inercia I para las barras de latón, hierro y latón fino (de arriba hacia abajo, en ese orden).

L (cm)	ρ_l (g/cm)	I (cm ⁴)
$31,2 \pm 0,1$	$1,64 \pm 0,01$	$0,0024 \pm 0,0001$
$36,1 \pm 0,1$	$1,01 \pm 0,01$	$0,0009 \pm 0,0001$
$40,3 \pm 0,1$	$0,55 \pm 0,01$	$0,0002 \pm 0,0001$

Luego, mediante la ecuación (??) y los datos de las Tablas 2 y 3, se obtuvieron los valores de los módulos de Young de cada una de las tres barras estudiadas:

Cuadro 4: Módulo de Young E de cada una de las tres barras. Se puede observar que corresponden al orden de los valores teóricos dados por [5]

Material	E (Pa)
Latón	$(8,44 \pm 1,1) * 10^{10}$
Hierro	$(2,89 \pm 0,8) * 10^{11}$
Latón fino	$(1,58 \pm 0,2) * 10^{11}$

Para finalizar, se analizó como varía la frecuencia fundamental y el factor de amortiguamiento en función de la longitud de la barra de latón fino, con los parámetros mencionados al final de la sección 2.2

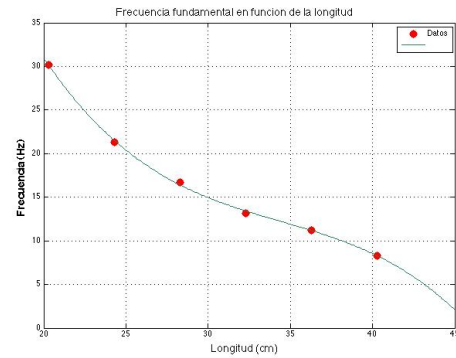


Figura 8: Frecuencias fundamentales de la barra de latón fino en función de su longitud.

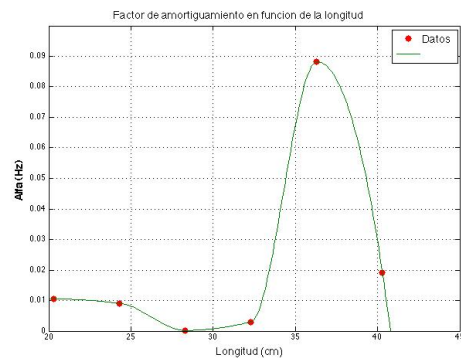


Figura 9: Factor de amortiguamiento de la barra de latón fino en función de su longitud.

Puede apreciarse en los gráficos que la frecuencia fundamental va aumentando al disminuir la longitud; dado que a menor longitud el material es mas rígido por lo tanto oscilará a mayor frecuencia, destacando desproporcionadamente a la fundamental

sobre los armónicos, siendo estos últimos prácticamente imperceptibles en este caso.

Por el contrario, si observamos el gráfico para el factor de amortiguamiento α en función de la longitud L ; se puede destacar que para $L < L_4 = 28,3$ cm, α decrece por lo tanto la barra oscilará durante más tiempo ocasionando que el espectro de frecuencias sea más parejo, con el costo de introducir una mayor cantidad de frecuencias no deseadas. A partir de $L > L_4 = 28,3$ cm, α vuelve a crecer hasta alcanzar un valor máximo en $L_2 = 36,3$ cm. De estos valores, se pueden inferir dos comportamientos: como un sistema sobreamortiguado para $L < L_4$; mientras que para $L > L_4$ el sistema se tiende a estar amortiguado de manera crítica.

Cabe aclarar que, para esta parte de la experiencia, se intentó tomar longitudes más cortas a $L_6 = 20,3$ cm, pero observamos que los datos recolectados eran muy similares a una barra en reposo, por lo tanto no generaban valores significativos de f y α .

4. Conclusiones

En el presente trabajo se calculó el módulo de elasticidad de Young de diferentes materiales mediante de la flexión de una barra de latón en voladizo. Para eso, se utilizaron dos métodos: uno estático y otro dinámico.

En el método estático se analizaron patrones de difracción obtenidos por la luz de un laser a través de una rendija en un extremo de una barra. Se obtuvo un valor del módulo de Young que es aproximadamente el doble de los valores tabulados en la literatura y de los que obtuvimos mediante el método dinámico, sin embargo son del mismo orden de magnitud.

Se considera que al ser un método indirecto, pasando tanto por un método óptico como por varias mediciones directas, los errores tienden a propagarse. Por otro lado, también concluimos que esta diferencia entre el valor obtenido y el tabulado puede ser producido por un mal ajuste del tornillo sujetador de la varilla, pues este sujetador consistía en dos tornillos en diferentes posiciones de los cuales uno no ajustaba completamente.

En el método dinámico, se obtuvieron las frecuencias de oscilación y la constante de amortiguamiento de tres barras: dos de latón (diferenciándose en su diámetro y longitud) y otra de hierro.

Con los datos obtenidos, se realizó un ajuste para poder obtener el factor de amortiguamiento α para las tres barras, tomando como longitud total de cada barra las expuestas en la Tabla 3.

Luego, se obtuvieron las frecuencias de resonancia realizando una transformada de Fourier a la señal original. Pudimos ver a frecuencia fundamental y los primeros armónicos, no obstante entre estos existían frecuencias que no correspondían a modos de resonancia de la barra si no a diversos factores como un efecto rebote introducido por el movimiento oscilante de la misma registrado por el fotodiodo.

En la práctica, para calcular el módulo de Young solo se utilizó la frecuencia del modo fundamental; como se menciona en el párrafo anterior, logramos obtener las frecuencias del primer y segundo armónico, las cuales resultaron difíciles de visualizar dado que los picos correspondientes a estas frecuencias eran muy pequeños con respecto al del fundamental. Cabe destacar que, con este método se logra una medición mucho más precisa que con el método estático; si bien ambas mediciones dan en el orden de 10^{10} , el valor de E calculado es muy similar a los encontrados en la bibliografía para el material considerado.

Por último, se estudió la variación de la frecuencia fundamental y el factor de amortiguamiento en función de la longitud para la barra de latón fino, con lo cual concluimos que la frecuencia fundamental aumenta al disminuir la longitud de manera exponencial; esto puede deberse a que, a menor longitud, el material adquiere más rigidez, por lo tanto oscila a frecuencias más altas, destacando a la fundamental sobre sus armónicos, siendo éstos últimos muy difíciles de ver en los espectros.

Por otro lado, al observar el factor de amortiguamiento α en función de la longitud se pudo

observar que decrecía para los valores mas bajos de longitud; luego se llegaba a un valor de α mínimo (en nuestro caso el correspondiente a $L_4 = 28,3$ cm) para volver a crecer y alcanzar un máximo en $L_2 = 36,3$ cm. Puede concluirse que este sistema se comporta como un sistema sobreamortiguado para $L < L_4$; mientras que para la región $L > L_4$ es comparable con un sistema con amortiguamiento crítico.

5. Referencias

- [1] M. Alonso, E. J. Finn, *Física - Vol. 1*, Editorial Addison-Wesley Iberoamericana (1986), pág. 363
- [2] W. Seto, *Theory and problems of mechanical vibrations*, Editorial McGraw Hill, 2da edición, Barcelona (1971), Cap. 9
- [3] S. C. Hunter, *Mechanics of continuous media*, John Wiley and Sons (1986)
- [4] S. Ghosh, *Signals and Systems*, Editorial Pearson Education, India (2006), Cap. 3
- [5] M. F. Ashby, D. R. H. Jones, *Materiales para Ingeniería 1 - Introducción a las propiedades, las aplicaciones y el diseño*, Editorial Reverté S.A., edición en español, Barcelona (2008), pág. 39