

Difusividad térmica de una barra de cobre.

Grupo 2: Federico Moss y Romina D'Alessandro

Laboratorio 4

-Universidad de Buenos Aires-

Febrero 2019

1. Resumen

Se estudió la conductividad térmica de una barra de cobre aislada. Para ello, se sometió a uno de sus extremos a ciertas condiciones de borde: en primera instancia a una fuente constante y luego a una fuente modulada por una onda cuadrada. Se observó que las aproximaciones propuestas (homogeneidad, uniformidad, unidireccionalidad) eran válidas. Se calculó la constante de difusividad térmica del cobre, obteniéndose un valor de $\kappa = (8,52 \pm 5,81) \times 10^{-4} \frac{m^2}{seg}$. El gran error surge de la imposibilidad de determinar con precisión la velocidad de la onda.

2. Introducción

En este trabajo se estudia la conducción de calor a través de una barra de cobre de sección circular frente a diferentes condiciones de contorno en uno de sus extremos.

Los casos a considerar son:

- El calentamiento de un extremo de la barra con una fuente modulada por una onda cuadrada.
- El calentamiento de un extremo con una fuente constante (dejándose enfriar esta a temperatura ambiente).

El objetivo es calcular la velocidad de onda v y el coeficiente de decaimiento ϵ para así determinar el coeficiente de difusividad térmica del material. Se supone que la barra es unidireccional, isótropa y homogénea, por lo que el calor se propaga uniformemente.

Como se estudia un sólido, entonces no se produce transferencia de calor por convección y la transmisión por radiación es despreciable. La ecuación que rige el comportamiento térmico es:

$$\frac{\partial^2 \theta_{(x,t)}}{\partial x^2} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \theta_{(x,t)}}{\partial t} \quad (1)$$

en donde la función $\theta_{(x,t)}$ representa la temperatura y κ es la difusividad térmica.

Otra aproximación para el modelo consta en que la barra se supone semiinfinita. Esta aproximación implica que la onda térmica decae completamente al alcanzar el extremo opuesto ($\theta_{(\infty,t)} = 0$), de forma tal que no hay onda reflejada. En el origen, para el caso de calentamiento mediante una señal periódica, se propone que:

$$\theta_{(0,t)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\theta_0}{n\pi} \sin\left(\frac{2n\pi t}{\tau}\right) \quad (2)$$

Donde τ es el período de oscilación de la señal y el origen temporal ha sido elegido tal que $\theta_{(0,t)}$ es impar. Considerando al sistema en un estado estacionario, y sabiendo que la onda decae exponencialmente en la distancia, se propone una solución mediante series de Fourier de la forma:

$$\theta_{(x,t)} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x) \sin(\omega_n t - k_n x) \quad (3)$$

Donde ω_n es la frecuencia, k_n es el número de onda asociado al n-ésimo armónico y la amplitud de la onda (A_n) cumple que:

$$A_n(x) = \frac{4\theta_0}{n\pi} e^{-\epsilon_n x}$$

en donde ϵ_n es el coeficiente de decaimiento del n-ésimo armónico.

Es posible aproximar la distribución de temperatura únicamente por el primer armónico en los puntos suficientemente alejados del origen del cuerpo, por lo que:

$$\theta(X, t) \sim A_0 e^{-\epsilon x} \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right] \quad (4)$$

en donde se eligió el origen temporal tal que θ es máximo en $x=0$.

Considerando esta última ecuación, se obtienen las expresiones

$$\kappa_\epsilon = \frac{\pi}{\tau \epsilon^2} \quad (5)$$

$$\kappa_v = \frac{\tau v^2}{4\pi} \quad (6)$$

Que relacionan las propiedades térmicas del material con las dos propiedades de la onda: la velocidad v , y el coeficiente de decaimiento ϵ , que se determinan experimentalmente.

Finalmente, la difusividad térmica del material se calcula mediante la expresión:

$$\kappa = \frac{\nu}{2\epsilon} \quad (7)$$

Cabe destacar que, para el cobre, κ evoluciona con la temperatura alcanzando un equilibrio para temperaturas mayores a 300K. Ver fig. 1.

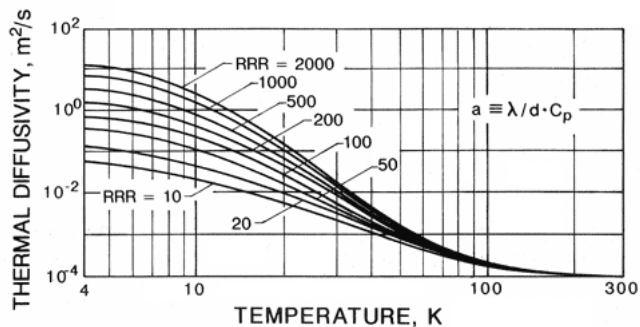


Figura 1: Difusividad térmica del cobre en función de la temperatura.

3. Desarrollo experimental

La experiencia consiste en calentar una barra cilíndrica de cobre de $(1,5 \pm 0,1) \text{ cm}$ de diámetro y $(50,0 \pm 0,1) \text{ cm}$ de largo con un soldador colocado en uno de sus extremos.

El soldador es alimentado por un contactor, primero en forma constante y luego en forma periódica para lo cual se dispone de un interruptor controlado por un generador de ondas el cual emite una onda cuadrada de período variable.

Siete termocuplas de tipo K y J (que funcionan como termómetros) se encuentran dispersas a lo largo de la barra. Estas termocuplas se enumeran del 1 al 7 de orden creciente con la distancia, de forma que la termocupla 1 indica aquella más cercana a la fuente y la termocupla 7 indica aquella que está más lejos. Estas están insertadas en orificios en la superficie de la barra y se encuentran conectadas a un multiplexor. Este último está conectado a un multímetro Agilent 34970A, el cual posee 8 canales.

Se realizaron tandas de mediciones, en donde con cada termocupla se medía la temperatura de forma secuencial; es decir, se comenzaba tomando datos de la termocupla 1, luego de la 2 y así sucesivamente hasta la 7. Cada tanda de medición se repetía cada 5 seg y, por cuestiones experimentales, se esperaba $0,2 \text{ seg}$ para la medición entre cada termocupla.

La adquisición de datos desde la computadora se realiza empleando una interfaz GPIB y un código diseñado en Matlab®. La figura 2 muestra un esquema del armado experimental:

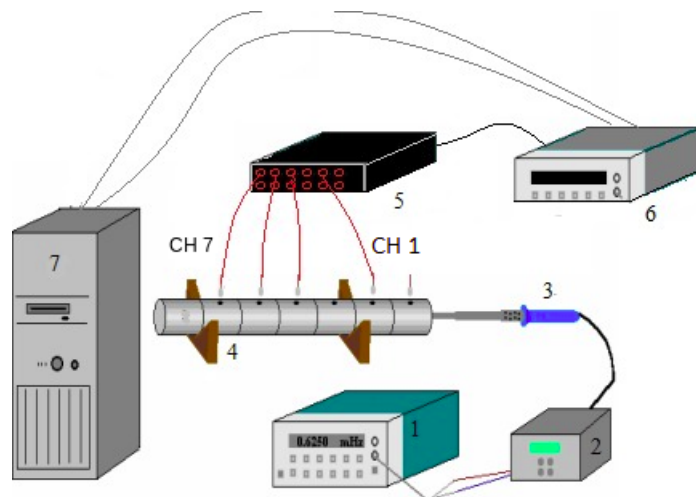


Figura 2: Esquema del experimento: 1) Generador de funciones 2) Conector 3) Soldador 4) Cilindro de cobre aislado 5) Multiplexor 6) Multímetro 7) PC.

Es importante destacar que, si bien el punto de fusión del cobre se encuentra a los $1084,62^\circ\text{C}$ [1], el soldador no supera los 120°C en toda la experiencia, lo que garantiza que la soldadura se mantenga estable.

4. Análisis y resultados

En primera instancia, mediante una fuente no periódica, se realizaron mediciones de temperatura en función del tiempo para cada termocupla. Ver fig. 3.

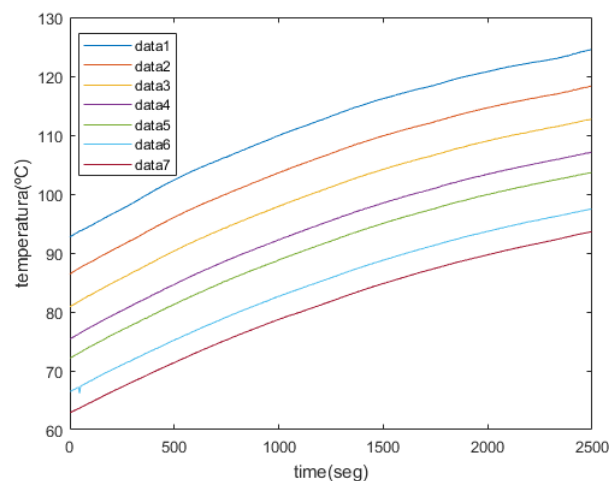


Figura 3: Evolución de la temperatura en la barra en función del tiempo, según cada termómetro (llamado 'data').

Se observa como la temperatura en cada termómetro aumenta de forma *uniforme*, por lo que para alcanzar el equilibrio térmico es necesario dejar al sistema calentarse por un período mayor al de la medición.

Debido a cuestiones temporales, el equilibrio térmico nunca se alcanzó y se prosiguió a la excitación del soldador con una señal periódica.

En esta segunda instancia, considerando un tiempo de medición de aproximadamente 2500seg , excitando con una onda cuadrada de $2,5\text{ Vpp}$ de amplitud y de período $\tau = 200\text{seg}$, se observó la evolución temporal de la temperatura en cada termocupla. Ver fig. 4.

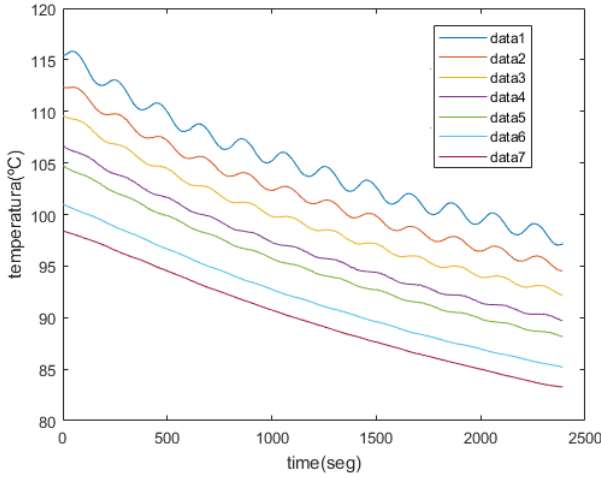


Figura 4: Evolución de la temperatura en la barra en función del tiempo mediante la excitación con una señal periódica.

Se observa como, debido al decaimiento en amplitud de la onda en la distancia, en la termocupla 7 (o 'data 7'), no se miden cambios apreciables de frecuencia. Por el contrario, en la termocupla 1 (o 'data 1'), la temperatura oscila a la frecuencia de la señal emitida por el generador de funciones.

Se prosigue al cálculo de la constante de difusividad térmica del cobre. Para ello, se calculan la velocidad de la onda y la constante de decaimiento.

4.1. Cálculo de la velocidad de la onda

La velocidad de la onda se mide analizando los corrimientos de los máximos locales de amplitud en los datos de temperatura en función del tiempo. Considerando los datos de las primeras dos termocuplas, se hizo un análisis de picos (ver fig.5) y se estimó el valor del defasaje temporal (Δt) entre las señales.

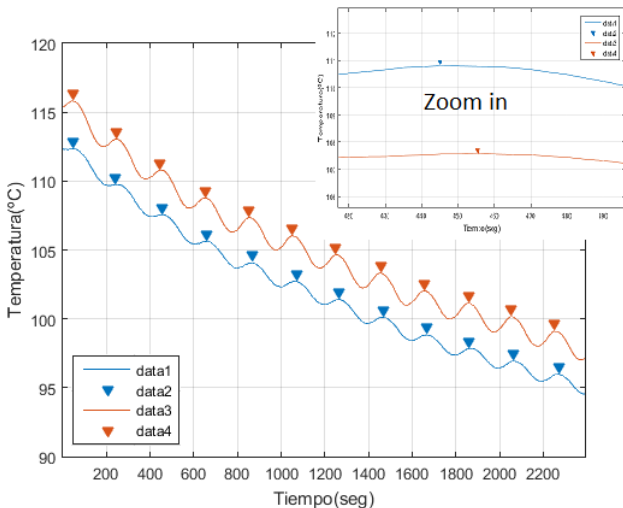


Figura 5: Ubicación de los máximos locales de temperatura en las primeras dos termocuplas.

Sabiendo que la distancia (Δx) entre estas termocuplas es de $(5,0 \pm 0,5)\text{cm}$, mediante la ecuación

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

se estimó un valor de v de $(4,7 \pm 3,1) \times 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{seg}}$.

El hecho de que el error en la velocidad corresponda al 65 % del valor de v influye mucho en el cálculo de la difusividad térmica.

El principal problema está en la ubicación de los máximos locales. Como se aprecia en la fig.5, es difícil encontrar estos máximos porque, al aumentar la resolución, las crestas de la señal se vuelven 'planas'; entonces, el error máximo se encuentra en el parámetro Δt .

Con este valor de velocidad hallado, mediante la ecuación 6, se encontró un valor de $\kappa_v = (3,55 \pm 4,70) \times 10^{-4} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}}$

4.2. Cálculo de la constante de decaimiento

Debido a la gran cantidad de tandas de mediciones tomadas y, sabiendo que la conducción de calor en la barra se puede asumir uniforme, se tomaron 5 tandas de mediciones al azar y se realizó un gráfico de distancia en función de temperatura. Ver fig. 6.

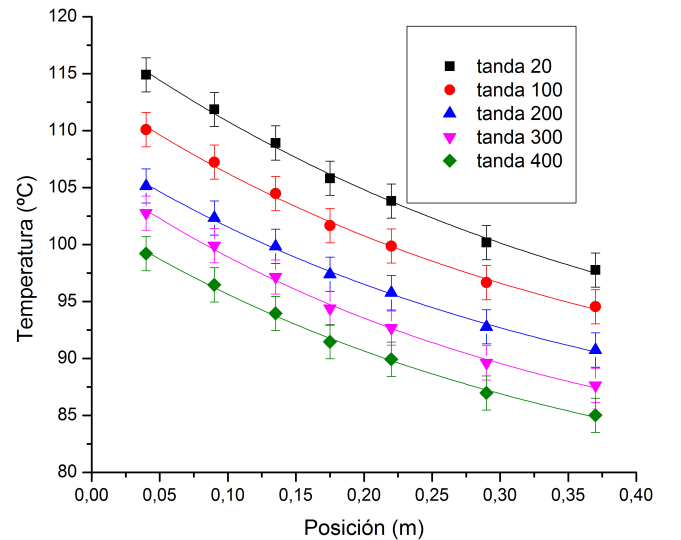


Figura 6: Gráfico de distancia en función de la temperatura, para 5 tandas de mediciones. Se hizo un ajuste exponencial en cada caso.

Considerando errores de precisión en las termocuplas ($\sim 1,5^\circ\text{C}$) y, mediante un ajuste exponencial ($R^2 = 0,99$ en todos los ajustes), se obtuvo un coeficiente de decaimiento $\epsilon = (2,77 \pm 0,51) \frac{1}{\text{m}}$.

Luego, mediante la ecuación 5 se obtuvo que $\kappa_\epsilon = (0,20 \pm 0,07) \times 10^{-2} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}}$

Finalmente, con los datos de v y ϵ , se calculó la constante de difusividad térmica del cobre mediante la ecuación 7. Así, se obtuvo que:

$$\kappa = (8,52 \pm 5,81) \times 10^{-4} \frac{m^2}{seg}$$

5. Conclusión

A partir de la excitación de una barra de cobre con una fuente térmica continua se observó (mediante el uso de termocuplas dispersas a lo largo de la barra) cómo el comportamiento de la conducción de calor en la barra estaba bien predicho por la teoría (uniformidad, homogeneidad, unidireccionalidad).

Luego, mediante la emisión de pulsos térmicos, se afirmó que lo predicho por la teoría era nuevamente cierto, puesto que se observó cómo la señal emitida por la fuente térmica decaía exponencialmente en amplitud con la distancia.

Finalmente, para el cálculo de la constante de difusividad térmica se propuso calcular la constante de decaimiento en amplitud de la onda y la velocidad de dicha onda.

Mediante el ajuste del gráfico de temperatura en función de la distancia (fig. 6), se obtuvo un coeficiente de decaimiento $\epsilon = (2,77 \pm 0,51) \frac{1}{m}$ y un valor de $\kappa_\epsilon = (0,20 \pm 0,07) \times 10^{-2} \frac{m^2}{seg}$.

Por otro lado, mediante un análisis de máximos locales, se encontró el defasaje de la onda al considerar las temperaturas

medidas por las primeras dos termocuplas (separadas una distancia $\Delta x = 5cm$). Así, se obtuvo que $v = (4,7 \pm 3,1) \times 10^{-3} \frac{m}{seg}$, y se obtuvo un valor $\kappa_v = (3,55 \pm 4,70) \times 10^{-4} \frac{m^2}{seg}$. En donde los errores son tan significativos porque, debido a que la cresta de la señal térmica era 'plana', la ubicación de los máximos locales contenía mucho error y, por consiguiente, el valor del defasaje temporal Δt contenía mucho error. Esto afecta directamente al cálculo de la difusividad térmica del material.

Considerando los datos experimentales hallados y, mediante la ec.7, se obtuvo un valor de $\kappa = (8,52 \pm 5,82) \times 10^{-4} \frac{m^2}{seg}$; la cual es del mismo orden que aquella κ tabulada para el cobre en el mismo rango de temperaturas trabajado ($1,11 \times 10^{-4} \frac{m^2}{seg}$).

Referencias

- [1] <https://www.webelements.com/copper/physics.html>
- [2] Barreiro Nadia Laborde Cecilia, '¿Qué es la difusividad térmica y cómo medirla en un cilindro de cobre?'. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales Universidad de Buenos Aires, julio de 2009.
- [3] Jim Wilson, 'Thermal diffusivity', 2007. <https://www.electronics-cooling.com/2007/08/thermal-diffusivity/>
- [4] 'Tabla de Precisión de Termopares por Tipo y Temperatura'. National Instruments, 2008. <http://digital.ni.com/public.nsf/allkb/79632A4CAD11B68086257>