

# Piezoeléctrico

IGNACIO POGGI

ignaciop.3@gmail.com

CARLOS RÍOS CHÁVEZ

carlos\_rios\_ch@hotmail.com

Grupo 3 - Laboratorio 4, Cátedra Schmiegelow - Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires

26 de febrero de 2019

## Resumen

En este trabajo se estudió el comportamiento de un material piezoeléctrico de cuarzo sometido a una señal eléctrica. Mediante el modelado de este material por un circuito RLC y el análisis de los datos recolectados, se obtuvieron las frecuencias de resonancia  $\omega_r = ALGO$ ; antirresonancia  $\omega_a = ALGO2$  y el factor de mérito  $Q = ALGO3$  del circuito equivalente.

## 1. Introducción

El efecto piezoeléctrico describe la capacidad de dichos materiales minerales, como el cuarzo, de producir una carga eléctrica en respuesta a un esfuerzo mecánico aplicado; o de manera inversa, deformarse al estar expuestos a un campo eléctrico.

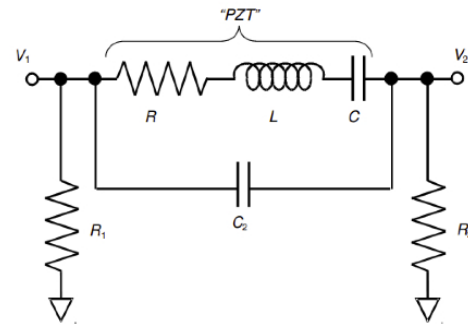
Como consecuencia de este comportamiento, los sólidos piezoeléctricos pueden resonar a ciertas frecuencias que dependen de la naturaleza del mismo y de su forma geométrica. Hay ciertas frecuencias para las cuales la transferencia de energía electromecánica es máxima (resonancia), y otras para las cuales ésta es mínima (antirresonancia). En este sentido, el cristal piezoeléctrico se comporta de manera análoga a un circuito RLC en serie, para el cual su dinámica se describe mediante la siguiente ecuación diferencial<sup>1</sup>:

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{dV}{dt} \quad (1)$$

donde  $R$ ,  $L$ ,  $C$  y  $V$  son la resistencia, inductancia, capacitancia y voltaje del circuito, respectivamente.

Dado que en el piezoeléctrico estudiado hay dos placas de metal adosadas a dos de sus lados, que funcionan como una capacidad adicional junto con el cristal; hay que tener en cuenta en el circuito eléctrico equivalente una capacidad  $C_2$  en paralelo con el piezoeléctrico, como

muestra la Figura 1.



**Figura 1:** Diagrama del circuito RLC equivalente para el piezoeléctrico de cuarzo. Se muestra la capacidad adicional  $C_2$  introducida por las placas de metal agregadas al cristal;  $R_1$  y  $R_2$  resistencias arbitrarias y los voltajes de entrada y salida  $V_1$  y  $V_2$ , respectivamente.

Gracias al modelado del material de cuarzo como un circuito RLC, podemos calcular algunas de sus propiedades para poder caracterizarlo, siendo de nuestro interés los parámetros  $R$ ,  $L$ ,  $C$  y  $C_2$  del mismo. Para eso, veamos algunas propiedades de los circuitos mencionados, por ejemplo su admitancia, dada por la siguiente ecuación<sup>2</sup>:

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{R}{R^2 + \Omega^2} + j(\omega C_2 - \frac{\Omega}{R^2 + \Omega^2}) \quad (2)$$

siendo  $Z$  la impedancia y  $\Omega = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ .

La transferencia de energía del circuito está dada por:

$$T = \frac{|V_2|}{|V_1|} = \frac{R_2}{R_2 + Z} \quad (3)$$

donde  $R_2$  es una resistencia arbitraria en el circuito,  $V_1$  y  $V_2$  los voltajes de entrada y salida respectivamente. Evaluando la transferencia en la frecuencia de resonancia  $\omega_r$  del sistema se obtiene la siguiente ecuación, la cual nos permitirá calcular la resistencia  $R$ :

$$T(\omega_r) = \frac{R_2}{R_2 + R} \quad (4)$$

El parámetro  $L$  se define a partir del cálculo del factor de calidad  $Q$  del cristal. Este factor está dado por la ecuación:

$$Q = \frac{\omega_r}{\Delta\omega} = \frac{\omega_r L}{R_2 + R} \quad (5)$$

donde  $\Delta\omega$  es el ancho de la campana de resonancia.

Por último, se pueden obtener los valores para la frecuencia de resonancia  $\omega_r$  y antirresonancia  $\omega_a$  experimentalmente mediante las siguientes ecuaciones, teniendo en cuenta que  $C_2$  es muy pequeño comparado con  $C$ :

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (6)$$

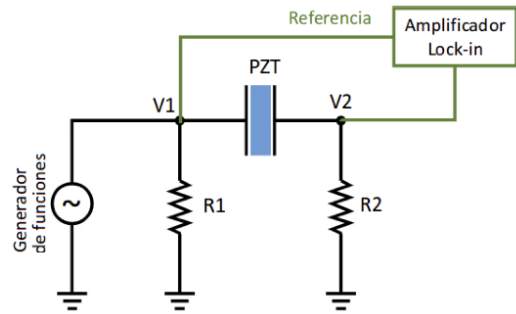
$$\omega_a = \sqrt{\frac{1}{L} \left( \frac{1}{C} + \frac{1}{C_2} \right)} \quad (7)$$

## 2. Dispositivo experimental

Los instrumentos de laboratorio utilizados fueron:

- PC con software MATLAB para la adquisición y análisis de los datos.
- Generador de funciones Tektronix AFG3021B.
- Osciloscopio Tektronix TDS1002B.
- Amplificador Lock-In Stanford Research Systems SR830DSP, con interfaz GPIB.
- Cables BNC.
- Cristal piezoeléctrico de cuarzo.

En esta experiencia, se trabajó con un cristal piezoeléctrico de base cuadrada, cortado a  $+5^\circ$  respecto de uno de sus ejes; contenido en una base cerrada de acrílico. En dos de las caras del cristal, se encontraban dispuestos electrodos de metal, cada uno con un alambre soldado, cada uno de los cuales estaban en serie con una resistencia de  $10\text{ K}\Omega$ . En la siguiente figura se puede ver un esquema del dispositivo utilizado:



**Figura 2:** Esquema del dispositivo experimental utilizado. En primera instancia, en lugar del amplificador se dispuso un osciloscopio.

En uno de los alambres mencionados, se utilizó el generador de funciones para aplicar una señal de entrada  $V_1$  de amplitud  $2\text{ Vpp}$  y frecuencia variable. Luego, sobre el otro alambre se registró la señal de salida  $V_2$ , en primera instancia con el osciloscopio y luego con el amplificador lock-in. Con éste último también se obtuvo la diferencia de fase entre la señal de entrada y la de salida. Cabe aclarar que, para poder establecer una señal de referencia requerida por el amplificador lock-in, se conectó una de las salidas del generador de funciones con la entrada de referencia del amplificador.

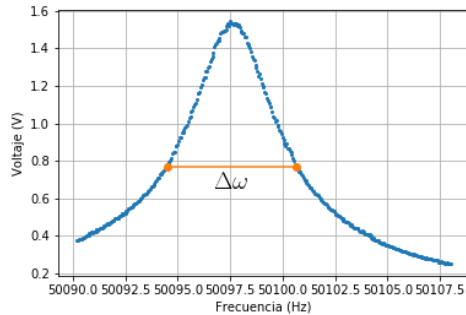
Finalmente, se conectaron el osciloscopio (mediante cable USB) y el amplificador (mediante interfaz GPIB) a una PC con software MATLAB, con el cual se ejecutó un script para poder recolectar y analizar los datos enviados por los equipos mencionados.

**Cuadro 1:** Posición de cada termocupla en la barra con respecto al extremo en contacto con el soldador (posición 0).

Termocupla	Posición ( $\pm 0,1cm$ )
1 K	4,1
2 K	8,6
3 J	13,4
4 J	17,1
5 J	22,0
6 J	29,2
7 J	36,4

### 3. Resultados y análisis

Para poder estimar la frecuencia de resonancia del cristal de cuarzo, en primer lugar se utilizó el generador de funciones para realizar manualmente un barrido de frecuencias y el osciloscopio para poder visualizar la amplitud de la onda y obtener la campana de resonancia de dicho cristal, como muestra la siguiente figura:



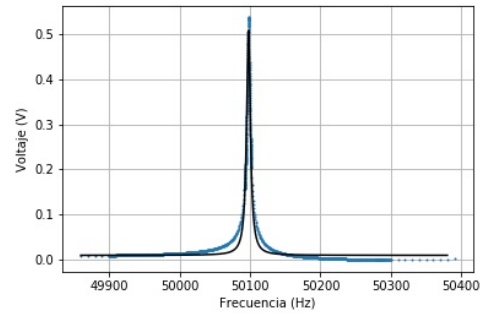
**Figura 3:** Campana de resonancia obtenida mediante un barrido de frecuencias manual.

Luego, se pudo calcular la frecuencia de resonancia y el ancho de la campana, dando como resultado  $\omega_r = (50,108 \pm 0,011)$  kHz y  $\Delta\omega = (6,15 \pm 0,10)$  Hz respectivamente. Con estos datos, se obtuvo el factor de mérito del circuito,  $Q = 8147$ .

Además, se intentó calcular la frecuencia de antirresonancia utilizando este método; pero al aumentar la escala en el gráfico anterior en la zona correspondiente a dicha frecuencia ( $50,025 \text{ kHz} < \omega_a < 50,03 \text{ kHz}$ ), notamos que por la baja resolución del osciloscopio no se

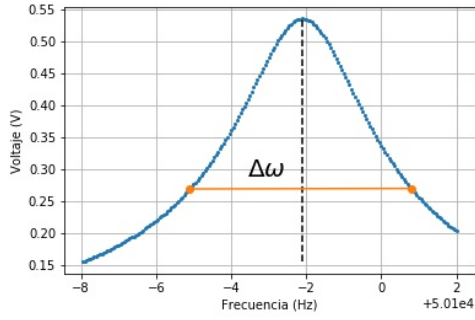
pudo obtener un valor confiable para  $\omega_a$ .

Posteriormente se analizaron los datos obtenidos por el lock-in. Se realizaron varios barridos de frecuencia con distintos niveles de resolución en la variación de la frecuencia, procurando que el barrido sea fino en los rangos que más nos interesan, es decir cerca a la resonancia y la anti resonancia, previamente estimadas. Se trabajó con todas las mediciones en una sola base de datos y para determinar la frecuencia de resonancia se utilizaron tres métodos, el primero consistió en ajustar la curva de voltaje a una curva lorentziana, ajuste del cual se obtuvo que  $\omega_r = 50097,85 \pm 0,01 \text{ Hz}$ , la bondad del ajuste fue  $R - Square = 0,992$ , la figura 4 muestra el ajuste.

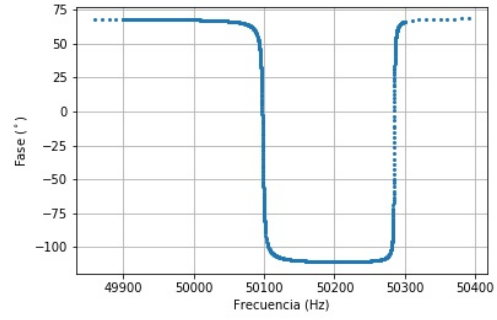


**Figura 4:** Ajuste a una función lorentziana del voltaje con respecto a la frecuencia.

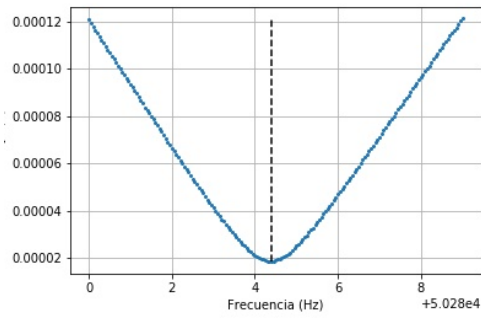
Los siguientes métodos también sirvieron para determinar la frecuencia de anti resonancia. El segundo método consistió en encontrar la frecuencia para la cual la transferencia de energía es máxima considerando que la transferencia es directamente proporcional al voltaje registrado, figura 5. Se obtuvo que  $\omega_r = 50097,9 \pm 0,3 \text{ Hz}$  y en el caso de la anti resonancia se determinó la frecuencia en la cual la transferencia de energía es mínima, obteniéndose que  $\omega_a = 50284,4 \pm 0,3$ , figura 6.



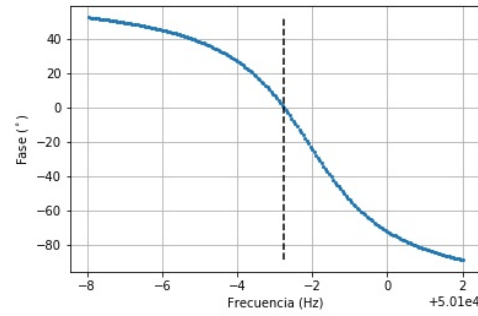
**Figura 5:** Detalle de la campana de resonancia donde la línea punteada indica el voltaje máximo y la línea horizontal indica los puntos para los cuales el voltaje máximo se reduce a la mitad.



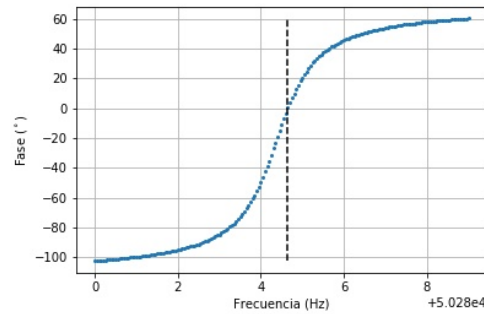
**Figura 7:** Diferencia de fase entre la señal de entrada al piezoeléctrico y la señal de salida con respecto a la frecuencia



**Figura 6:** Detalle del intervalo donde se produce la anti resonancia indicada por la línea punteada.



**Figura 8:** Detalle de la diferencia de fase en el intervalo donde se produce la resonancia indicada por la línea punteada.



**Figura 9:** Detalle de la diferencia de fase en el intervalo donde se produce la anti resonancia indicada por la línea punteada.

El último método que utilizamos consistió en analizar la fase en función de la frecuencia, considerando que cuando la fase llega a cero de forma descendente corresponde a la fase en la frecuencia de resonancia y que cuando la fase pasa por cero de forma ascendente es que corresponde a la frecuencia de anti resonancia, con este método se obtuvo que la frecuencia de resonancia es  $\omega_r = 50097,25 \pm 0,05 Hz$  y que  $\omega_a = 50284,65 \pm 0,05 Hz$ , en la figura 7 se ve la curva completa mientras que en las figuras 8 y 9 se ve en detalle los puntos donde la diferencia de fase pasa por cero.

Para obtener  $\Delta\omega$  se calcularon las frecuencias para las cuales la amplitud máxima se había reducido a la mitad, figura 5, eso nos da una idea del ancho de la campana  $\Delta\omega = 5,90 \pm 0,01 Hz$  y si comparamos el valor de

la frecuencia de resonancia con el ancho de la campana obtenemos el factor de merito el cual, cuanto más grande es, nos indica que más aguda es la campana y que por lo tanto el material es más útil como resonador pues resuena fuerte y solo en una frecuencia específica, en este caso se encontró que el factor de merito es  $Q = 8491 \pm 5$

Los parámetros del circuito que modela el comportamiento del piezoeléctrico fueron determinados mediante las ecuaciones 4, 5, 6 y 7, obteniendo se que la resistencia es  $R = 13,65 \pm 0,09 K\Omega$ , la inductividad  $L = 3161 \pm 5 H$ , la capacitancia es  $C = 0,126 \pm 0,004$  y que la capacitancia producida por la capa de oro que envuelve al piezo electrico es de  $C_2 = 16,9 \pm 0,5 pF$

## 4. Conclusiones

Se puede observar que los distintos métodos para determinar la frecuencia de resonancia varían en décimas de hertz por lo cual consideramos que la experiencia tuvo bastante precisión pues trabajamos con frecuencias del orden de los kilohertz.

Sobre la frecuencia de anti resonancia pudimos notar que es preciso un instrumento bastante sensible para poder determinarla pues el barrido que se realizó con el osciloscopio registraba bastante ruido por lo que no se pudo trabajar con esos datos, mientras que con los datos obtenidos con el amplificador lock-in se pudo obtener un perfil de la curva de voltaje mucho más limpio en comparación al del osciloscopio y más aun tomando en cuenta el registro de la diferencia de fase que nos permitió el amplificador lock-in.

El factor de merito que obtuvimos nos indica que la campana es bastante aguda, es decir que el ancho de la campana es pequeño en comparación a la altura. Por lo cual concluimos que la resonancia es una propiedad del piezoeléctrico.

## 5. Bibliografía

- [1] R. K. Nagle, E. B. Saff, A. D. Snider, *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*, 4<sup>ta</sup> edición, Pearson Educación México, 2005, pág. 285
- [2] <http://materias.df.uba.ar/lab04Ba2016c1/files/2014/03/Piezo.>