

Medición del módulo de elasticidad de Young

IGNACIO POGGI

ignaciop.3@gmail.com

CARLOS RÍOS CHÁVEZ

carlos_rios_ch@hotmail.com

Grupo 3 - Laboratorio 4, Cátedra Schmiegelow - Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires

11 de febrero de 2019

Resumen

En este trabajo se midió el módulo de elasticidad de Young de diferentes materiales a partir de la flexión de una barra en voladizo, utilizando dos métodos: estático y dinámico. En el primero se analizaron patrones de difracción obtenidos por la luz de un laser a través de una rendija en un extremo de una barra, y en el segundo se obtuvieron las frecuencias de oscilación y la constante de amortiguamiento de barras de distintos materiales mediante un fotodiodo.

1. Introducción

Al estirar o comprimir un resorte, la fuerza restitutiva es directamente proporcional a la deformación en uno de sus ejes (por ejemplo, el eje x) y de signo contrario a ésta [1]:

$$F = -kx \quad (1)$$

donde k es una constante de proporcionalidad denominada constante elástica del resorte. A la ecuación (1) se la conoce como **ley de Hooke**, y sólo es aplicable a deformaciones pequeñas, donde la relación esfuerzo - deformación del material se comporta linealmente; hasta alcanzar cierto límite elástico.

Si el esfuerzo es una tensión o una compresión, dicha relación entre fuerza aplicada y deformación del material se denomina módulo de Young y se mantiene constante independientemente del esfuerzo siempre y cuando no se exceda el límite elástico. Tanto el módulo de Young como el límite elástico, son naturalmente distintos para los diversos materiales.

En este trabajo, se midió el módulo de Young mediante dos métodos: estático y dinámico; teniendo en cuenta solamente los esfuerzos transversales en el eje y (eje vertical).

1.1. Método estático

Si se toma una superficie cualquiera en el interior de la barra, las partículas que están a cada uno de los lados ejercerán fuerzas sobre las partículas que se encuentran del lado opuesto, y estas fuerzas cumplen con el principio de acción y reacción. De acuerdo a la dirección de esas fuerzas interiores, para cada sección transversal se manifestarán momentos flectores (esfuerzos transversales que sufre la barra) y momentos torsores (esfuerzos de corte), como muestra la Figura (1):

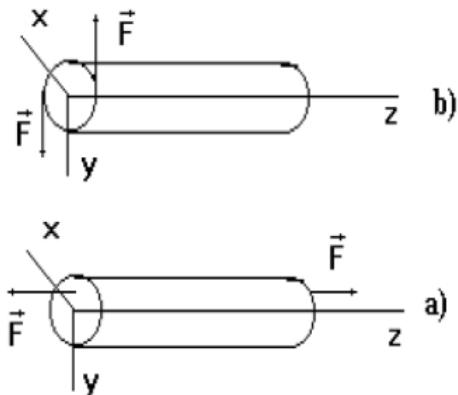


Figura 1: a) Esfuerzos transversales en una barra (momento flector). b) Esfuerzos de corte (momento torsor).

En particular, si se toma un segmento de la barra curvada y se considera una flexión pu-

ra, el material de la parte interna de la barra estará comprimido mientras que en la parte externa se encontrará estirado; existiendo así una capa central que no sufre deformaciones llamada superficie neutra. Las fuerzas que actúan por encima de la superficie neutra tienen sentido opuesto al de las fuerzas que actúan por debajo de dicha superficie; estos pares de fuerzas tienen un momento no nulo respecto de la superficie neutra. Aplicando esto último junto con la ley de Hooke y algunas consideraciones geométricas a una sección transversal de la barra, se obtiene la expresión de la ecuación de la viga [2]:

$$M = \frac{E}{R} I \quad (2)$$

donde E es el módulo de Young de la barra, R su radio de curvatura e $I = \int_A h^2 dA$ el momento de inercia de la barra (siendo A el área de la sección transversal elegida y h el desplazamiento vertical).

Mediante la ecuación (2) se puede determinar el apartamiento vertical de la barra de su posición de equilibrio $y(x)$, debido a los pesos suspendidos de uno de sus extremos en un punto fijo x :

$$y(x) = -\frac{32mg}{\pi d^4 E} (Lx^2 - \frac{1}{3}x^3) \quad (3)$$

siendo L y d el largo y diámetro de la barra respectivamente; y m la masa de los pesos utilizados.

1.2. Método dinámico

La ecuación que gobierna la evolución espacio-temporal del desplazamiento de una viga está dada por [3]:

$$\frac{\partial^4 s}{\partial x^4} + b \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\rho_l}{IE} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0 \quad (4)$$

donde el término proporcional a $\frac{\partial s}{\partial t}$ determina los efectos del amortiguamiento. Esta ecuación puede resolverse por el método de variables separables, obteniendo soluciones del tipo $s(x, t) = Y(t)X(x)$.

La solución para $Y(t)$ resulta ser una senoidal amortiguada, con amortiguamiento α y frecuencia ω_k , donde:

$$\omega_k = 2\pi f_k = \sqrt{\frac{IE}{\rho_l} k^4 - \alpha^2} \quad (5)$$

siendo $\alpha = \frac{IE}{2\rho_l} b$ la constante de amortiguamiento de la barra, $I = \frac{\pi d^4}{64}$ su momento de inercia y ρ_l la densidad lineal de masa por unidad de longitud.

La solución para la parte espacial es $X(x) = Acos(kx) + Bsen(kx) + Ccosh(kx) + Dsenh(kx)$; la cual junto a las condiciones de contorno (barra en voladizo) $X(0) = X'(0)$ y $X''(L) = X'''(L) = 0$ dan la siguiente ecuación para los posibles valores de k :

$$\cos(kL)\cosh(kL) + 1 = 0 \quad (6)$$

De la ecuación (6) pueden obtenerse los valores de k : $k_1 = \frac{1.875}{L}$ para el modo fundamental, $k_2 = \frac{4.694}{L}$ para el segundo modo, $k_3 = \frac{7.855}{L}$ para el tercero.

Por cuestiones prácticas al momento del cálculo, nos quedaremos sólo con k_1 .

2. Dispositivo experimental

Los instrumentos de laboratorio utilizados en ambos métodos fueron:

- Láser marca Melles Griot, modelo 06DAL003 de 670 nm.
- Espejos marca Melles Griot.
- Pesos y soporte para pesos.
- Barras de latón y de hierro de diferentes longitudes y pesos.
- Rendija de metal.
- Fotodiodo marca ThorLabs, modelo DET36A/M.
- Placa de adquisición de datos marca National Instruments, modelo NIUSB-6212.
- Computadora personal con software MATLAB para la recolección y análisis de datos.

2.1. Método estático

En el armado experimental (Figura 2) de este método se utilizaron dos cuchillas que nos sirvieron para armar la rendija por la cual se produciría la difracción. Se fijó una

de las cuchillas al extremo libre de la varilla de latón (el diámetro de la varilla es de $d = 0,470 \pm 0,002\text{cm}$) y se fijó la otra cuchilla en un punto más alto que la primera. De ésta manera, al colocar diferentes pesos al extremo libre de la varilla, ésta se deformó produciendo diferentes patrones de difracción. Las masas utilizadas fueron las siguientes: $m_1 = 22,57\text{g}$, $m_2 = 26,22\text{g}$, $m_3 = 20,66\text{g}$, $m_4 = 27,85\text{g}$, $m_5 = 28,48\text{g}$, $m_6 = 18,75\text{g}$, $m_7 = 12,66\text{g}$, $m_8 = 22,40\text{g}$, cabe considerar que en estos valores está incluida la masa del soporte utilizado, y por otro lado que las mediciones se efectuaron con una balanza de alta precisión marca Ohaus Analytical Plus , modelo AP210, que tiene un error del orden de los miligramos y que por lo tanto no lo consideramos.

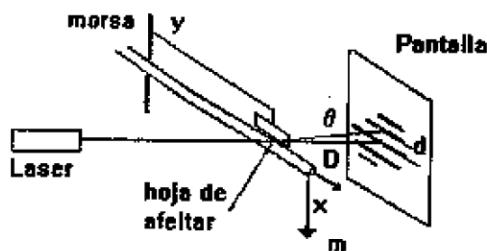


Figura 2: Disposición experimental del método estático.

Se utilizó un láser con una longitud de onda $\lambda = 670\text{nm}$ (color rojo). Para que el haz del láser impactara justo en la rendija se utilizó un arreglo de espejos. De esta manera, se tomó registro en un papel de los patrones de difracción generados a una distancia $D = 155,1 \pm 0,1\text{cm}$ de la rendija; en la Figura 3 se puede ver un ejemplo de uno de los patrones de difracción observados. Posteriormente, se midió con una regla las distancias entre los máximos registrados en el papel, se realizaron ocho mediciones con distintos pesos.

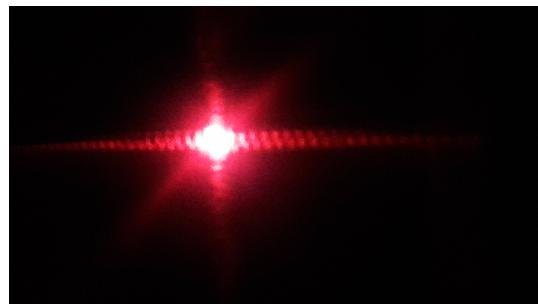


Figura 3: Ejemplo del fenómeno de difracción observado en el experimento.

2.2. Método dinámico

Para este método se utilizó prácticamente el mismo dispositivo experimental que en el estático, con la excepción de que se quitaron los pesos y se utilizaron dos barras de latón (diferenciándose entre sí por su diámetro, longitud y peso) y otra de hierro. En la siguiente tabla se detallan los valores tomados para cada barra:

Cuadro 1: Diámetros d , longitudes L y pesos m de las tres barras utilizadas.

Material	$d \pm 0,002$	$L \pm 0,1$	$m \pm 0,1$
Latón	0,471 cm	31,02 cm	51,22 g
Hierro	0,369 cm	36,10 cm	36,57 g
Latón fino	0,243 cm	40,30 cm	22,02 g

Además, se agregó un fotodiodo de ^{28}Si marca ThorLabs modelo DET36A/M justo detrás del extremo libre de la barra para poder registrar las oscilaciones verticales de la misma. Éste último se conectó a una placa de adquisición de datos marca National Instruments NIUSB-6212, y mediante un programa hecho en MATLAB se registró, durante 60 segundos y a una frecuencia de 1000 Hz, la señal capturada por el fotodiodo. En la Figura (4) se muestra este arreglo experimental.

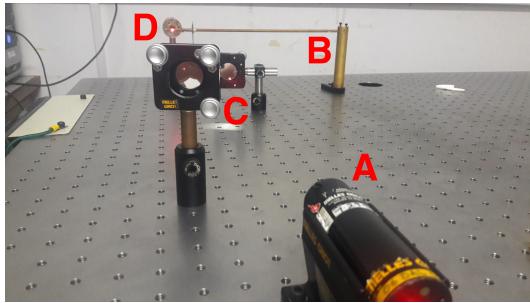


Figura 4: Dispositivo experimental utilizado en el método dinámico. Se pueden ver los siguientes elementos: A) Láser, B) Barra y soporte, C) Espejos para redireccionar el haz hacia el extremo libre de la barra, D) Fotodiodo.

Cabe destacar que, para poder estar seguros de que la frecuencia de 1000 Hz elegida para el sampleo de los datos era suficiente; se realizó un breve cálculo a mano para obtener las frecuencias de oscilación de los tres primeros modos mediante las ecuaciones (5) y (6), tomando $\alpha = 0$; dando como resultado valores de $f_k < 500$ Hz, con lo cual se satisficieron las condiciones del teorema de Nyquist-Shannon [4]

La determinación del factor de amortiguamiento α se llevó a cabo mediante un ajuste sobre la señal original con una forma funcional senoidal amortiguada exponencialmente. Para calcular las frecuencias f_k , se realizó un análisis de Fourier sobre la señal obtenida por el fotodiodo y así poder obtener el valor del módulo de Young E mediante la ecuación (5) y la constante de amortiguamiento previamente calculada.

Por último, para la barra de latón fino se analizó como varía la frecuencia fundamental y el factor de amortiguamiento en función de la longitud de la barra (cambiando la posición del extremo fijo de la misma), partiendo de $L_1 = 40,3 \pm 0,1$ cm, en decrementos de 4 cm, hasta $L_6 = 20,3 \pm 0,1$ cm.

3. Resultados y análisis

3.1. Método estático

Para conocer la deformación de la varilla de latón mediante el fenómeno de difracción se utilizó la ecuación 7 que sale de las ecuaciones

que describen los mínimos de la difracción de Fraunhofer, donde λ es la longitud de onda, D es la distancia de la rendija a la pantalla, n es el número de mínimo ($n = 1, 2, 3, \dots$), d_n es la distancia a la cual se encuentra dicho mínimo, y la variable y representa la apertura de la rendija, o en otros términos, representa la deformación de la varilla.

$$y = \lambda D \frac{n}{d_n} \quad (7)$$

Considerando que en la toma de datos los máximos de intensidad son mucho más definidos que los mínimos, se midieron las posiciones de los máximos. Sin embargo en la ecuación 7 se precisan las posiciones de los puntos donde la intensidad es mínima. Para obtener estos mínimos se calcularon los puntos medios entre dos máximos. Entonces, mediante la ecuación 7 se obtuvo una lista, por cada patrón de difracción, que contenía varios valores de y (el ancho de la rejilla). Se promediaron dichos valores y considerando que cada promedio correspondía a un peso distinto se realizó una regresión lineal entre los valores de masa-deformación, en la cual se obtuvo una pendiente de $-0,00285 \pm 0,00014$ y una abscisa de $0,147 \pm 0,006$ (Figura 5). Comparando este resultado con nuestro modelo teórico expresado en la ecuación 3 , se obtuvo un módulo de Young de $E = (16,28 \pm 3,87) * 10^{10} Pa$.

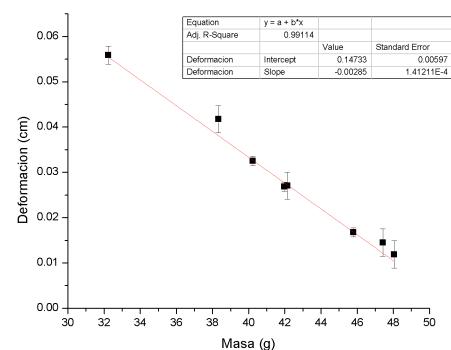


Figura 5: Regresión lineal entre la masa y la deformación en el método estático .

3.2. Método dinámico

Con los datos obtenidos de la señal enviada por el fotodiodo, se realizó un ajuste

exponencial sobre la misma para poder obtener el factor de amortiguamiento α para las tres barras, tomando como longitud total de cada barra las detalladas en la Tabla 1.

En la siguiente figura, se puede observar que la señal decae en el tiempo como una sinusoidal con una envolvente exponencial. También se puede ver que se marcaron los picos de cada máximo, para luego poder obtener el factor α mediante el ajuste mencionado al principio.

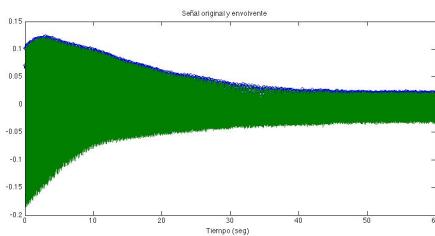


Figura 6: Señal obtenida para la barra de latón y su envolvente.

Luego, se obtuvieron las frecuencias de resonancia de cada barra mediante análisis de Fourier. Como se dijo en la Introducción, para la adquisición de los datos se fijo un tiempo de 60 segundos y una frecuencia de sampleo de 1000 Hz. Al calcular la transformada de Fourier de la señal y obtener las frecuencias, se nota que si bien aparecía la fundamental y los primeros dos armónicos, entre estos existían frecuencias que no correspondían a modos de resonancia de la barra si no a factores tales como el efecto rebote introducido por el movimiento oscilante de la misma.

Como ejemplo, en la siguiente figura se puede ver el espectro de frecuencias de la barra de latón en su longitud original $L_1 = 31,2 \pm 0,1$ cm. Pueden apreciarse la frecuencia fundamental $f_1 \approx 20,20$ Hz y las correspondientes al efecto de rebote ($f \approx 40,41$ Hz, etc).

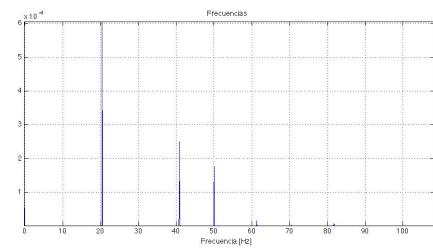


Figura 7: Parte del espectro de frecuencias para la barra de latón. Se pueden observar la frecuencia fundamental $f_1 \approx 20,2$ Hz y frecuencias del rebote.

Si bien para calcular el módulo de Young solo se utilizó la frecuencia del modo fundamental (y su correspondiente k), se pudo obtener las frecuencias del primer y segundo armónico. Esto resultó más difícil de observar en los espectros debido a que los picos correspondientes a estas frecuencias eran muy pequeños con respecto al del fundamental. Siguiendo con el ejemplo de la barra de latón, se calcularon dichas frecuencias mediante la ecuación (5) junto con la constante de amortiguamiento α , obteniendo los siguientes valores: $f_1 \approx 20,20$ Hz, $f_2 \approx 122,50$ Hz y $f_3 \approx 354$ Hz.

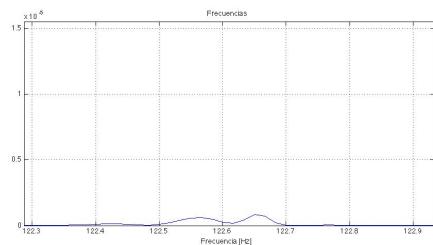


Figura 8: Parte del espectro de frecuencias para la barra de latón. Al aumentar el zoom en el espectro, se puede observar el primer armónico con frecuencia $f_2 \approx 122,50$ Hz, con una amplitud muy pequeña en relación a $f_1 \approx 20,20$ Hz.

En la siguiente tabla se detallan los valores de la frecuencia fundamental f_1 para las tres barras, utilizando $k_1 = \frac{1,875}{L}$ y la constante de amortiguamiento α correspondiente a cada una con un nivel de confianza del 95 %:

Cuadro 2: Frecuencias fundamentales y constantes de amortiguamiento para cada barra.

Material	f_1 (Hz)	α (Hz)
Latón	20,20	$0,0335 \pm 0,0009$
Hierro	21,78	$0,1343 \pm 0,0009$
Latón fino	8,25	$0,0190 \pm 0,0009$

Además, se calculó la densidad lineal de cada barra a partir de su peso y longitud, así como también el momento de inercia I de acuerdo a la geometría cilíndrica de las mismas. Estos datos se encuentran en la siguiente tabla :

Cuadro 3: Valores de longitud L , densidad lineal ρ_l y momento de inercia I para las barras de latón, hierro y latón fino (de arriba hacia abajo, en ese orden).

L (cm)	ρ_l (g/cm)	I (cm^4)
$31,2 \pm 0,1$	$1,64 \pm 0,01$	$0,0024 \pm 0,0001$
$36,1 \pm 0,1$	$1,01 \pm 0,01$	$0,0009 \pm 0,0001$
$40,3 \pm 0,1$	$0,55 \pm 0,01$	$0,0002 \pm 0,0001$

Luego, mediante la ecuación (5) y los datos de las Tablas 2 y 3, se obtuvieron los valores de los módulos de Young de cada una de las tres barras estudiadas:

Cuadro 4: Módulo de Young E de cada una de las tres barras. Se puede observar que corresponden al orden de los valores teóricos dados por [5]

Material	E (Pa)
Latón	$(8,44 \pm 1,1) * 10^{10}$
Hierro	$(2,89 \pm 0,8) * 10^{11}$
Latón fino	$(1,58 \pm 0,2) * 10^{11}$

Para finalizar, se analizó como varía la frecuencia fundamental y el factor de amortiguamiento en función de la longitud de la barra de latón fino, con los parámetros mencionados al final de la sección 2.2

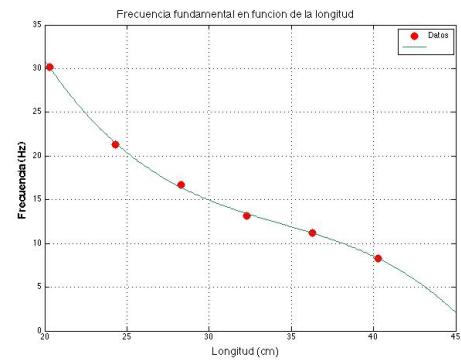


Figura 9: Frecuencias fundamentales de la barra de latón fino en función de su longitud.

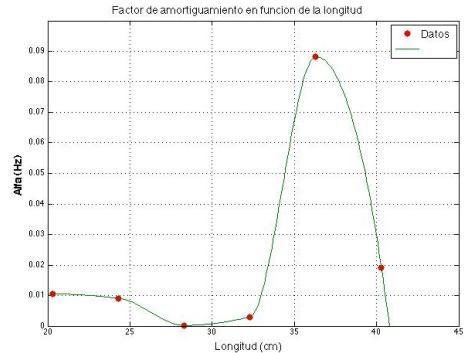


Figura 10: Factor de amortiguamiento de la barra de latón fino en función de su longitud.

Puede apreciarse en los gráficos que la frecuencia fundamental va aumentando al disminuir la longitud; dado que a menor longitud el material es más rígido por lo tanto oscilará a mayor frecuencia, destacando desproporcionadamente a la fundamental sobre los armónicos, siendo estos prácticamente imperceptibles en este caso.

Por el contrario, si observamos el gráfico para el factor de amortiguamiento α en función de la longitud L ; se puede destacar que para $L < L_4 = 28,3$ cm, α decrece por lo tanto la barra oscilará durante más tiempo ocasionando que el espectro de frecuencias sea más parejo, con el costo de introducir una mayor cantidad de frecuencias no deseadas. A partir de $L > L_4 = 28,3$ cm, α vuelve a crecer hasta alcanzar un valor máximo en $L_2 = 36,3$ cm. De estos valores, se pueden inferir dos comportamientos:

como un sistema sobreamortiguado para $L < L_4$; mientras que para $L > L_4$ el sistema se tiende a estar amortiguado de manera crítica.

Cabe aclarar que, para esta parte de la experiencia, se intentó tomar longitudes más cortas a $L_6 = 20,3$ cm, pero observamos que los datos recolectados eran muy similares a una barra en reposo, por lo tanto no generaban valores significativos de f y α .

4. Conclusiones

En el presente trabajo se calculó el módulo de elasticidad de Young de diferentes materiales mediante de la flexión de una barra de latón en voladizo. Para eso, se utilizaron dos métodos: uno estático y otro dinámico.

En el método estático se analizaron patrones de difracción obtenidos por la luz de un laser a través de una rendija en un extremo de una barra. Se obtuvo un valor del módulo de Young que es aproximadamente el doble de los valores tabulados en la literatura y de los que obtuvimos mediante el método dinámico, sin embargo son del mismo orden de magnitud.

Se considera que al ser un método indirecto, pasando tanto por un método óptico como por varias mediciones directas, los errores tienden a propagarse. Por otro lado, también concluimos que esta diferencia entre el valor obtenido y el tabulado puede ser producido por un mal ajuste del tornillo sujetador de la varilla, pues este sujetador consistía en dos tornillos en diferentes posiciones de los cuales uno no ajustaba completamente.

En el método dinámico, se obtuvieron las frecuencias de oscilación y la constante de amortiguamiento de tres barras: dos de latón (diferenciándose en su diámetro y longitud) y otra de hierro.

Con los datos obtenidos, se realizó un ajuste para poder obtener el factor de amortiguamiento α para las tres barras, tomando como longitud total de cada barra las expuestas en la Tabla 3.

Luego, se obtuvieron las frecuencias de resonancia realizando una transformada de Fourier a la señal original. Pudimos ver a frecuencia

fundamental y los primeros armónicos, no obstante entre estos existían frecuencias que no correspondían a modos de resonancia de la barra si no a diversos factores como un efecto rebote introducido por el movimiento oscilante de la misma registrado por el fotodiodo.

En la práctica, para calcular el módulo de Young solo se utilizó la frecuencia del modo fundamental; como se mencionó en el párrafo anterior, logramos obtener las frecuencias del primer y segundo armónico, las cuales resultaron difíciles de visualizar dado que los picos correspondientes a estas frecuencias eran muy pequeños con respecto al del fundamental. Cabe destacar que, con este método se logró una medición mucho más precisa que con el método estático; si bien ambas mediciones dan en el orden de 10^{10} , el valor de E calculado es muy similar a los encontrados en la bibliografía para el material considerado.

Por último, se estudió la variación de la frecuencia fundamental y el factor de amortiguamiento en función de la longitud para la barra de latón fino, con lo cual concluimos que la frecuencia fundamental aumenta al disminuir la longitud de manera exponencial; esto puede deberse a que, a menor longitud, el material adquiere más rigidez, por lo tanto oscila a frecuencias más altas, destacando a la fundamental sobre sus armónicos, siendo estos últimos muy difíciles de ver en los espectros.

Por otro lado, al observar el factor de amortiguamiento α en función de la longitud se pudo observar que decrecía para los valores más bajos de longitud; luego se llegaba a un valor de α mínimo (en nuestro caso el correspondiente a $L_4 = 28,3$ cm) para volver a crecer y alcanzar un máximo en $L_2 = 36,3$ cm. Puede concluirse que este sistema se comporta como un sistema sobreamortiguado para $L < L_4$; mientras que para la región $L > L_4$ es comparable con un sistema con amortiguamiento crítico.

5. Referencias

- [1] M. Alonso, E. J. Finn, *Física - Vol. 1*, Editorial Addison-Wesley Iberoamericana (1986), pág. 363
- [2] W. Seto, *Theory and problems of mechanical vibrations*, Editorial McGraw Hill, 2da edición, Barcelona (1971), Cap. 9
- [3] S. C. Hunter, *Mechanics of continuous media*, John Wiley and Sons (1986)
- [4] S. Ghosh, *Signals and Systems*, Editorial Pearson Education, India (2006), Cap. 3
- [5] M. F. Ashby, D. R. H. Jones, *Materiales para Ingeniería 1 - Introducción a las propiedades, las aplicaciones y el diseño*, Editorial Reverté S.A., edición en español, Barcelona (2008), pág. 39