

# Piezoeléctrico

IGNACIO POGGI

ignaciop.3@gmail.com

CARLOS RÍOS CHÁVEZ

carlos\_rios\_ch@hotmail.com

Grupo 3 - Laboratorio 4, Cátedra Schmiegelow - Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires

25 de febrero de 2019

## Resumen

En este trabajo se estudió el comportamiento de un material piezoeléctrico de cuarzo sometido a una señal eléctrica. Mediante el modelado de este material por un circuito RLC y el análisis de los datos recolectados, se obtuvieron las frecuencias de resonancia  $\omega_r = ALGO$ ; antirresonancia  $\omega_a = ALGO2$  y el factor de mérito  $Q = ALGO3$  del circuito equivalente.

## 1. Introducción

El efecto piezoeléctrico describe la capacidad de dichos materiales minerales, como el cuarzo, de producir una carga eléctrica en respuesta a un esfuerzo mecánico aplicado; o de manera inversa, deformarse al estar expuestos a un campo eléctrico.

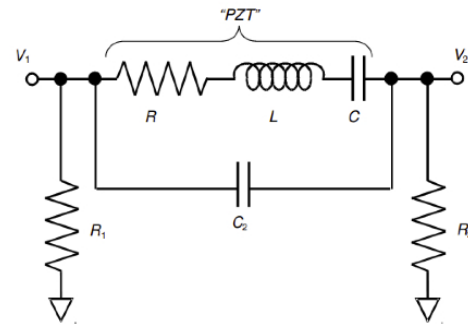
Como consecuencia de este comportamiento, los sólidos piezoeléctricos pueden resonar a ciertas frecuencias que dependen de la naturaleza del mismo y de su forma geométrica. Hay ciertas frecuencias para las cuales la transferencia de energía electromecánica es máxima (resonancia), y otras para las cuales ésta es mínima (antirresonancia). En este sentido, el cristal piezoeléctrico se comporta de manera análoga a un circuito RLC en serie, para el cual su dinámica se describe mediante la siguiente ecuación diferencial:

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{dV}{dt} \quad (1)$$

donde  $R$ ,  $L$ ,  $C$  y  $V$  son la resistencia, inductancia, capacitancia y voltaje del circuito, respectivamente.

Dado que en el piezoeléctrico estudiado hay dos placas de metal adosadas a dos de sus lados, que funcionan como una capacidad adicional junto con el cristal; hay que tener en cuenta en el circuito eléctrico equivalente una capacidad  $C_2$  en paralelo con el piezoeléctrico, como

muestra la Figura ??.



**Figura 1:** Diagrama del circuito RLC equivalente para el piezoeléctrico de cuarzo. Se muestra la capacidad adicional  $C_2$  introducida por las placas de metal agregadas al cristal;  $R_1$  y  $R_2$  resistencias arbitrarias y los voltajes de entrada y salida  $V_1$  y  $V_2$ , respectivamente.

Gracias al modelado del material de cuarzo como un circuito RLC, podemos calcular algunas de sus propiedades para poder caracterizarlo, siendo de nuestro interés los parámetros  $R$ ,  $L$ ,  $C$  y  $C_2$  del mismo. Para eso, veamos algunas propiedades de los circuitos mencionados, por ejemplo su admitancia, dada por la siguiente ecuación:

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{R}{R^2 + \Omega^2} + j(\omega C_2 - \frac{\Omega}{R^2 + \Omega^2}) \quad (2)$$

siendo  $Z$  la impedancia y  $\Omega = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ .

La transferencia de energía del circuito está dada por:

$$T = \frac{|V_2|}{|V_1|} = \frac{R_2}{R_2 + Z} \quad (3)$$

donde  $R_2$  es una resistencia arbitraria en el circuito,  $V_1$  y  $V_2$  los voltajes de entrada y salida respectivamente. Evaluando la transferencia en la frecuencia de resonancia  $\omega_r$  del sistema se obtiene la siguiente ecuación, la cual nos permitirá calcular la resistencia  $R$ :

$$T(\omega_r) = \frac{R_2}{R_2 + R} \quad (4)$$

El parámetro  $L$  se define a partir del cálculo del factor de calidad  $Q$  del cristal. Este factor está dado por la ecuación:

$$Q = \frac{\omega_r}{\Delta\omega} = \frac{\omega_r L}{R_2 + R} \quad (5)$$

donde  $\Delta\omega$  es el ancho de la campana de resonancia.

Por último, se pueden obtener los valores para la frecuencia de resonancia  $\omega_r$  y antirresonancia  $\omega_a$  experimentalmente mediante las siguientes ecuaciones, teniendo en cuenta que  $C_2$  es muy pequeño comparado con  $C$ :

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (6)$$

$$\omega_a = \sqrt{\frac{1}{L} \left( \frac{1}{C} + \frac{1}{C_2} \right)} \quad (7)$$

## 2. Dispositivo experimental

Los instrumentos de laboratorio utilizados fueron:

- PC con software MATLAB para la adquisición y análisis de los datos.
- Generador de funciones Tektronix AFG3021B.
- Osciloscopio Tektronix TDS1002B.
- Amplificador Lock-In Stanford Research Systems SR830DSP, con interfaz GPIB.
- Cables BNC.
- Cristal piezoeléctrico de cuarzo.

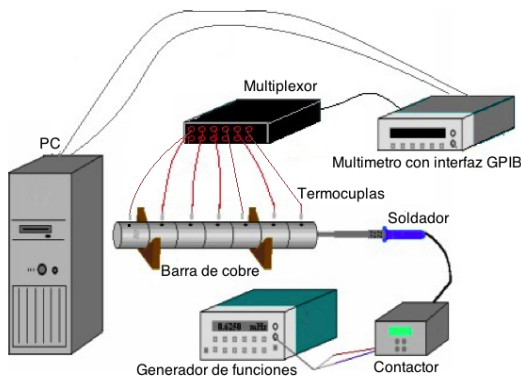
Se dispuso un soldador conectado a un contactor controlado por un generador de ondas, el cual se configuró para emitir una onda cuadrada de período  $\tau = 170$  seg. durante los regímenes transitorio y estacionario. Luego, la punta del soldador fue insertada en uno de los extremos de la barra aislada, y a los 10 minutos se comenzó a medir el régimen transitorio.

Las medidas de la temperatura se obtuvieron mediante 7 termocupas de tipo K y J, insertadas a lo largo de la barra en diferentes posiciones como muestra la siguiente tabla (todos los valores tomando como posición 0 al extremo fijado al soldador):

**Cuadro 1:** Posición de cada termocupa en la barra con respecto al extremo en contacto con el soldador (posición 0).

Termocupa	Posición ( $\pm 0,1cm$ )
1 K	4,1
2 K	8,6
3 J	13,4
4 J	17,1
5 J	22,0
6 J	29,2
7 J	36,4

Estas termocupas se conectaron a un multiplexor, el cual fue conectado a un multímetro de 8 canales, con el que se realizó la adquisición de los datos utilizando 7 de ellos. En la siguiente figura se puede ver un esquema del dispositivo utilizado:



**Figura 2:** Dispositivo experimental. Cabe destacar que la barra de cobre se encuentra aislada con una capa interna de espuma aislante y una externa de PVC.

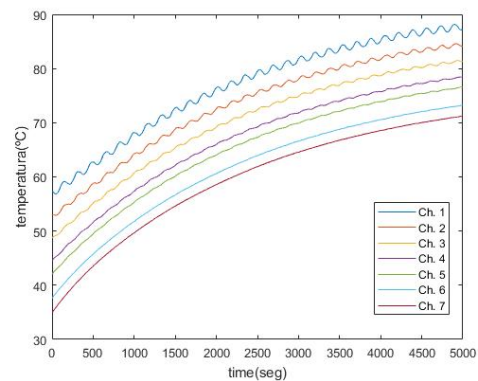
Mediante un programa realizado en MATLAB; el cual se utilizó para configurar al multímetro vía interfaz GPIB, se tomaron 1000 mediciones secuenciales en las termocupas cada 5 segundos, es decir; se obtuvieron 7 valores de temperatura (una por cada termocupa) cada 5 segundos; esto equivale a una medición. Este paso se repitió durante un tiempo total de 5000 segundos (aproximadamente 1:30 hs.), primero para el régimen transitorio y luego para el estacionario; dejando pasar para este último 3 horas desde el comienzo de la medición del transitorio.

Luego, se obtuvieron todos los datos guardados en el multímetro con el mismo programa en MATLAB, para su posterior análisis.

### 3. Resultados y análisis

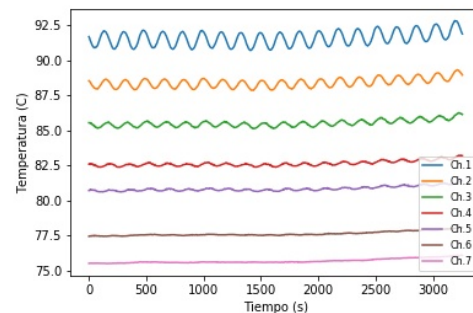
Para estimar la temperatura a la cual el sistema alcanza el régimen estacionario, se alimentó al soldador con una onda cuadrada de período  $\tau = 170$  seg. y amplitud de 6,432 Vpp. durante la primera medición realizada en un tiempo de 1:30 hs.; observando que la misma aumenta de manera uniforme durante éste régimen hasta oscilar alrededor de un valor fijo en cada termocupa para los últimos valores de tiempo en esta medición ( $t \approx 4800$  a 5000 seg.), teniendo en cuenta el error de precisión de las mismas ( $\pm 1,5$  °C). Por ejemplo, en las termocupas 1 y 4,  $T_{Ch1} \approx 90$  °C y  $T_{Ch4} \approx 79,2$  °C respectivamente, como puede verse en

la siguiente figura.



**Figura 3:** Valores de temperatura en cada termocupa durante el régimen transitorio

Luego, se deja evolucionar al sistema durante 3 horas más, para poder alcanzar el régimen estacionario, y se realiza la segunda medición, con los mismos parámetros de período y amplitud que para el transitorio.



**Figura 4:** Valores de temperatura en función del tiempo para cada termocupa durante el régimen estacionario

Podemos notar que la temperatura inicial de la termocupa 1 es de aproximadamente 91,5 °C, muy cercano al valor de la última medición de temperatura (a  $t = 5000$  seg) para el régimen transitorio. Teniendo en cuenta esto, más el rango de precisión mencionado en cada termocupa; nos indica que el tiempo de 3 horas utilizado para alcanzar el régimen estacionario una vez comenzado el experimento fue el correcto.

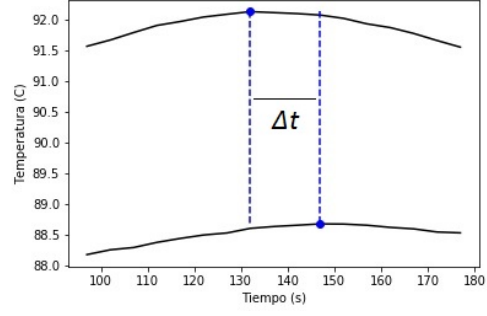
### 3.1. Cálculo de la velocidad $v$ y la constante de decaimiento $\epsilon$ de la onda térmica

La velocidad de propagación de la onda de calor está dada por:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (8)$$

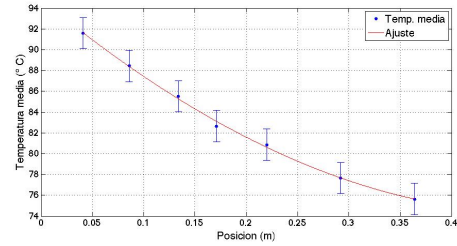
donde  $\Delta x$  es la distancia dada por la diferencia en las posiciones de las termocupas que figuran en la Tabla ?? .  $\Delta t$  es el tiempo que la onda de temperatura tarda en llegar de una termocupa a otra. Se trabajó con los valores obtenidos con los canales 1 y 2, sin tomar en cuenta los otros canales debido a que al calcular los máximos de temperatura, el algoritmo de detección de picos fallaba, mientras que la señal de los canales 1 y 2 fue lo suficientemente limpia para que detecte bien los máximos. Aún así, se utilizaron algunos algoritmos de optimización, como por ejemplo, se limpió el ruido de la señal y cuando el programa detectaba dos máximos en un lugar donde sólo debía haber uno, fueron promediados.

En la Figura ?? se puede ver un acercamiento a la diferencia temporal que hay entre el primer máximo de temperatura de los canales 1 y 2. Se realizó este procedimiento para todos los máximos y se obtuvo una lista de diferencias temporales, la cual se promedió, obteniendo:  $\Delta t = (16,6 \pm 3,8)$  seg., para el error de este valor se considero la desviación estándar de la de la curva gaussiana centrada en el valor medio pues los errores más notables se produjeron en el análisis de datos. La diferencia entre la posición de las termocupas 1 y 2 es:  $\Delta x = (0,045 \pm 0,002)$  m., pudiendo obtener un valor para la velocidad de la onda de  $v = (0,0027 \pm 0,0007) \frac{m}{seg}$ , el error de este valor se obtuvo a partir de la propagación de errores.



**Figura 5:** Detalle de la diferencia de fases entre los valores máximos de la temperatura en los canales 1 y 2.

Para obtener el valor del coeficiente de decaimiento  $\epsilon$  se calculó el valor medio de la temperatura de cada termocupa, y se realizó un ajuste exponencial de la variación de temperatura en función de la posición de cada una de ellas, donde se encontro que  $\epsilon = (6,1 \pm 0,3) \frac{1}{m}$  (Figura ??).



**Figura 6:** Ajuste por una curva exponencial de la temperatura media en función de la posición de cada termocupa.

Por ultimo, mediante las ecuaciones (??) y (??) se encontró que  $\kappa_\epsilon = (4,9 \pm 0,7) * 10^{-4} \frac{m^2}{seg}$  y  $\kappa_v = (1,2 \pm 0,7) * 10^{-4} \frac{m^2}{seg}$ , lo que permite realizar un promedio entre ambos valores y obtener un valor aproximado de la constante de difusividad térmica de  $\bar{\kappa} = (3,11 \pm 0,7) * 10^{-4} \frac{m^2}{seg}$ .

Al utilizar la ecuación (??), con los datos obtenidos para la velocidad  $v$  y la constante de decaimiento  $\epsilon$ , se obtuvo que  $\kappa = (2,4 \pm 0,7) * 10^{-4} \frac{m^2}{seg}$ , notando que existe una leve diferencia de  $0,7 \frac{m^2}{seg}$ , entre el valor obtenido con  $\bar{\kappa}$  con respecto al calculado mediante la ecuación mencionada.

## 4. Conclusiones

Para poder obtener las constantes de difusividad térmica y de decaimiento de una barra de Cobre se estudió la conducción de calor en la misma, calentando un soldador fijado a un extremo de la misma mediante un contactor controlado por un generador de ondas emitiendo una onda cuadrada de período  $\tau = 170$  seg. durante los regímenes transitorio y estacionario.

Las medidas de temperatura se obtuvieron mediante termocupas insertadas a lo largo de la barra en diferentes posiciones, con respecto a una posición 0, que se eligió en el extremo donde se colocó el soldador. Los datos recolectados mediante el multímetro conectado a dichas termocupas permitieron calcular la velocidad  $v$  de propagación de la onda y su constante de decaimiento  $\epsilon$ .

La velocidad de propagación de la onda de calor se calculó mediante la distancia  $\Delta x$  entre termocupas y  $\Delta t$  es el tiempo que la onda de temperatura tarda en llegar de una termocupa a otra; obteniendo un valor de  $v = (0,0027 \pm 0,0007) \frac{m}{seg}$ .

Para la obtención del valor del coeficiente de decaimiento  $\epsilon$  se calculó el valor medio de la temperatura de cada termocupa, y se realizó un ajuste exponencial de la variación de temperatura en función de la posición de cada una de ellas, dando  $\epsilon = (6,1 \pm 0,3) \frac{1}{m}$ .

A partir de lo mencionado en los dos párrafos anteriores, fue posible determinar los factores  $\kappa_\epsilon = (4,9 \pm 0,7) * 10^{-4} \frac{m^2}{seg}$  y  $\kappa_v = (1,2 \pm 0,7) * 10^{-4} \frac{m^2}{seg}$ , lo que permitió realizar un promedio entre ambos para obtener un valor aproximado de la constante de difusividad térmica de  $\bar{\kappa} = (3,11 \pm 0,7) * 10^{-4} \frac{m^2}{seg}$ .

Podemos comparar este valor de  $\bar{\kappa}$  con el calculado mediante la ecuación (??), siempre utilizando los datos recolectados para  $v$  y  $\epsilon$ , con los cuales se obtuvo que  $\kappa = (2,4 \pm 0,7) * 10^{-4} \frac{m^2}{seg}$ . Se puede ver que existe una diferencia de  $0,7 \frac{m^2}{seg}$  entre el valor calculado con  $\bar{\kappa}$  y  $\kappa$ , lo que permite que en ciertas condiciones puedan considerarse

iguales.

Con los resultados obtenidos experimentalmente para  $\kappa$ , se obtuvo una diferencia del 45 % con respecto al valor teórico tabulado para el Cobre,  $\kappa = 1,12 * 10^{-4} \frac{m^2}{seg}$ , que si bien se encuentra dentro del orden de magnitud propuesto por la bibliografía, creemos que se produjeron errores debido a la baja sensibilidad de las termocupas y al cálculo del  $\Delta t$ , produciendo que la detección de máximos de intensidad no sean tan exactos, afectando el cálculo final de los coeficientes, sobre todo de  $\kappa_\epsilon$ .

## 5. Bibliografía

- [1] A. Bodas, V. Gándia and E. López-Baeza, *An undergraduate experiment on the propagation of thermal waves*, American Journal of Physics, **66**, 528 (1998).
- [2] W. Czarnetzki, M. Wandelt, and W. Roetzel, *Thermal wave analysis for measurements of thermal diffusivity*, *Proceedings of the Joint Conference 1996: IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference and IMEKO Technical Committee 7*, Brussels, Belgium, 4-6 June 1996 (IEEE, New York, 1996), pág. 1195.