



Cuaderno de Laboratorio - Tesis de Licenciatura 2025: Estudio experimental de la transferencia de energía en turbulencia de ondas gravito-capilares.

Estudiante: Ignacio Pablo Hernando¹

Director: Pablo Cobelli²

Lugar de trabajo: Laboratorio de Turbulencia Geofísica
DF, FCEN, UBA & INFINA CONICET

¹ignacioph21@gmail.com, LU: 6/21

²cobelli@df.uba.ar

Índice general

| | |
|-----------------------|----|
| Antecedentes Teóricos | 2 |
| Semana del 31/03/2025 | 11 |
| Semana del 07/04/2025 | 17 |

1. Formalismo Hamiltoniano para ondas en medios continuos.

Las bases.

En el caso más simple posible podemos describir un medio continuo a partir de un par de variables canónicas $q(\vec{r}, t)$ y $p(\vec{r}, t)$ de forma tal que las ecuaciones de movimiento serán:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta p} \quad \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q} \quad (1)$$

Aquí tenemos la densidad Hamiltoniana \mathcal{H} , y los δ representan la *derivada funcional*, análoga a la derivada parcial en el límite continuo. Vamos a tener las propiedades análogas a la versión para variables finitas:

$$\frac{\delta q(\vec{r})}{\delta q(\vec{r}')} = \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \quad \frac{\delta p(\vec{r})}{\delta p(\vec{r}')} = \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \quad (2)$$

Además, aplica la regla de la cadena:

$$\frac{\delta f(\vec{r})}{\delta q(\vec{r}')} = \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial q(\vec{r})} \frac{\delta q(\vec{r})}{\delta q(\vec{r}')} \quad \frac{\delta f(\vec{r})}{\delta p(\vec{r}')} = \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial p(\vec{r})} \frac{\delta p(\vec{r})}{\delta p(\vec{r}')} \quad (3)$$

Y conmuta con derivadas parciales de las variables espaciales (e.g. ∂_{r_i}) y con integración en variables espaciales (e.g. $\int d^3r$).

Además será importante definir el **corchete de Poisson**. Para un conjunto de variables discretas (q_i, p_i) es (el orden de los dos términos es convención):

$$\{A, B\} = \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} - \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} \right) \quad (4)$$

De forma que en variables canónicas tenemos:

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0 \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \quad (5)$$

Y en el límite continuo esto resulta en:

$$\{A, B\} = \int d^3r \left(\frac{\delta A}{\delta p} \frac{\delta B}{\delta q} - \frac{\delta A}{\delta q} \frac{\delta B}{\delta p} \right) \quad (6)$$

Y la condición de canonicidad queda expresada como:

$$\{q(\vec{r}), q(\vec{r}')\} = \{p(\vec{r}), p(\vec{r}')\} = 0 \quad \{q(\vec{r}), p(\vec{r}')\} = \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \quad (7)$$

Esto es fundamental, ya que las transformaciones canónicas, que preservan la forma de las ecuaciones (1), serán aquellas que preservan estos corchetes de Poisson $(\{A(q', p'), B(q', p')\}_{q,p})$.

Teoremas de Conservación y simetrías.

La derivada temporal de una función (con una posible dependencia explícita en t) será:

$$\frac{df(q, p, t)}{dt} = \{H, f\} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (8)$$

En general no hay dependencias explícitas, con lo cual tenemos que si $\{H, f\} = 0$ entonces la cantidad f es constante de movimiento.

Pasar a variables complejas.

Ahora bien, se puede mostrar que la siguiente transformación es canónica (a menos de un factor multiplicativo):

$$a(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q(\vec{r}, t) + iP(\vec{r}, t)) \quad a^*(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q(\vec{r}, t) - iP(\vec{r}, t)) \quad (9)$$

Con $Q = \lambda q$ y $P = p/\lambda$ tales que Q y P tengan las mismas unidades. La ventaja de pasar a las variables complejas es que se reduce de las dos ecuaciones (1) a una sola (la segunda es la conjugada de la primera):

$$i \frac{\partial a}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta a^*} \quad (10)$$

Con los corchetes en las coordenadas originales³:

$$\{a(\vec{r}), a(\vec{r}')\}_{Q,P} = \{a^*(\vec{r}), a^*(\vec{r}')\}_{Q,P} = 0 \quad \{a(\vec{r}), a^*(\vec{r}')\}_{Q,P} = i\delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (11)$$

Estas variables complejas son análogas a los operadores de subida y bajada en cuántica.

Las cantidades conservadas

En un primer lugar tendremos la conservación de la energía total (siempre que trabajemos con el modelo más sencillo), pero en el caso que el Hamiltoniano tenga simetría $U(1)$ en las variables a , habrá otra ley de conservación asociada, $N = |a|^2$, que es análogo al número de partículas en el caso cuántico. Ya desarrollaremos esto más adelante.

Paso al espacio de Fourier.

Vamos a imaginar que estamos en una caja de largo L con condiciones de contorno periódicas, que eventualmente podemos hacer tender a infinito, y vamos a expresar a la variable $a(\vec{r})$ como una combinación de las variables $a_{\vec{k}} \equiv a(\vec{k})$ tal que:

$$a_{\vec{k}} = a(\vec{k}) = \frac{1}{V} \int d\vec{r} a(\vec{r}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad a(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} a_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (12)$$

Es posible mostrar usando los corchetes para la variable a en el espacio real que las nuevas variables en el espacio de momento $a_{\vec{k}}$ satisfacen los mismos corchetes de Poisson, a menos de un factor de volumen. Entonces las ecuaciones de movimiento mantienen su forma:

$$i \frac{\partial a_{\vec{k}}}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta a_{\vec{k}}^*} \quad (13)$$

2. Desarrollo perturbativo del Hamiltoniano.

Nos va a interesar escribir el Hamiltoniano como una serie de potencias de a y a^* . El término de orden 0, i.e. \mathcal{H}_0 , no es relevante, ya que es una constante que no aparece en la ecuación de movimiento al derivar, y el término de orden 1, \mathcal{H}_1 , podemos eliminarlo asumiendo que el medio está en equilibrio cuando las amplitudes de las ondas son 0, y el mínimo está en $a = a^* = 0$. De esta forma nos queda:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_3 + \mathcal{H}_4 + \dots \equiv \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_{int} \quad (14)$$

Donde \mathcal{H}_{int} representa las interacciones entre ondas.

³A veces, parece que en las nuevas variables $(\{\cdot, \cdot\}_{a,a^*})$ se escribe el corchete con un factor i adelante

El orden más bajo.

Se puede mostrar que existe una transformación canónica a unas nuevas variables $b_{\vec{k}}, b_{\vec{k}}^*$ tales que [1]:

$$\mathcal{H}_2 = \int \omega(\vec{k}) b_{\vec{k}} b_{\vec{k}}^* \quad (15)$$

De forma tal que a primer orden no nulo la ecuación de movimiento resulta trivial:

$$\frac{\partial b_{\vec{k}}}{\partial t} = -i\omega b_{\vec{k}} \quad \Rightarrow \quad b_{\vec{k}} = b(\vec{k}, 0) e^{-i\omega t} \quad (16)$$

En este punto la única diferencia entre distintos medios radica en la relación de dispersión $\omega(\vec{k})$.

El Hamiltoniano de interacción.

Los términos de orden superior se pueden interpretar como términos de interacción entre ondas, en analogía a lo que ocurre en mecánica cuántica. Vamos a usar la notación reducida: $b_{\vec{k}_1} \equiv b_1$.

Para las interacciones de tres ondas tenemos:

$$\mathcal{H}_3 = \frac{1}{2} \int (V_{123} b_1^* b_2 b_3 + \text{c.c.}) \delta(\vec{k}_1 - \vec{k}_2 - \vec{k}_3) d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 d\vec{k}_3 \quad (17)$$

$$+ \frac{1}{6} \int (U_{123} b_1^* b_2^* b_3^* + \text{c.c.}) \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3) d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 d\vec{k}_3 \quad (18)$$

Donde tenemos unos coeficientes V_{123} y U_{123} que nos hablan de la magnitud de la interacción. El primer término describe procesos de la forma $1 \rightarrow 2$ y $2 \rightarrow 1$, mientras que el segundo describe procesos del tipo $3 \rightarrow 0$ y $0 \rightarrow 3$, que son aniquilaciones de tres ondas hacia el vacío o creación espontánea de tres ondas por fluctuaciones.

Por otro lado, para las interacciones de cuatro ondas tenemos:

$$\mathcal{H}_4 = \frac{1}{4} \int W_{1234} b_1^* b_2^* b_3 b_4 \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_3 - \vec{k}_4) d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 d\vec{k}_3 d\vec{k}_4 \quad (19)$$

$$+ \int (G_{1234} b_1 b_2^* b_3^* b_4^* + \text{c.c.}) \delta(\vec{k}_1 - \vec{k}_2 - \vec{k}_3 - \vec{k}_4) d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 d\vec{k}_3 d\vec{k}_4 \quad (20)$$

$$+ \int (R_{1234}^* b_1 b_2 b_3 b_4 + \text{c.c.}) \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3 + \vec{k}_4) d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 d\vec{k}_3 d\vec{k}_4 \quad (21)$$

Donde ahora tenemos procesos del tipo $2 \rightarrow 2$ para el primer término, $1 \rightarrow 3$ y $3 \rightarrow 1$ para el segundo, $4 \rightarrow 0$ y $0 \rightarrow 4$ para el tercero.

Los coeficientes de interacción van a tener las simetrías asociadas a la interacción, o sea, se van a poder intercambiar los índices asociados a "partículas" de cada lado de la flecha, por ejemplo, $V_{123} = V_{132}$.

Notemos además que si hay presentes términos con una cantidad distinta de "partículas" de un lado que del otro entonces no habrá simetría $U(1)$ y no se conservará la cantidad de partículas asociadas a ese proceso.

Interacciones Resonantes de N ondas

En general vamos a poder tener interacciones de tanta cantidad de ondas como querramos, a medida que aumentemos el orden del Hamiltoniano de interacción. Éstas son integrales de colisiones como las de la Ecuación de Boltzmann.

Ahora bien, en general va a ser suficiente con llegar al primer término no nulo, tal que se satisfagan la conservación de lo que en cuántica serían el momento y la energía:

$$\vec{k}_1 \pm \vec{k}_2 \pm \dots \pm \vec{k}_N = 0 \quad \omega(\vec{k}_1) \pm \omega(\vec{k}_2) \pm \dots \pm \omega(\vec{k}_N) = 0 \quad (22)$$

Los signos corresponderán a si la "partícula" ingresa o sale.

Si no se satisface la segunda condición de resonancia entonces el término correspondiente del Hamiltoniano puede eliminarse mediante transformaciones canónicas apropiadas, como se verá más adelante [1].

Para el caso en que tenemos una relación de dispersión del tipo $\omega \sim k^\alpha$ la condición de resonancia de tres ondas no será posible en los casos en que $\alpha < 1$, con lo cual el primer término resonante será el de cuatro ondas, para el cual siempre hay solución en el caso de $\omega \sim k^\alpha$. La demostración se puede entender gráficamente, si dibujamos las superficies en 2D para $\omega(\vec{k}, \vec{k}_0)$ y $\omega(\vec{k}) + \omega(\vec{k}_0)$, donde \vec{k}_0 es un parámetro que puede variarse. Si las curvas se intersecan hay solución, sino solo existe la solución trivial en que ambas curvas son iguales, para el caso en que una de las ondas es 0. Esto está ilustrado en la Figura 1.

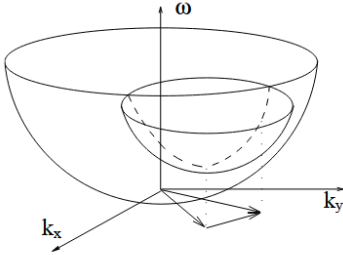


FIG. 1: Graphical solution for the three-wave resonant condition: solutions exist for $\alpha \geq 1$.

(a)

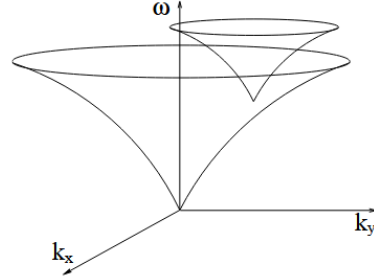


FIG. 2: Graphical solution for the three-wave resonant condition: solutions do not exist for $\alpha < 1$.

(b)

Figura 1: Soluciones gráficas para la condición resonante para dos casos distintos de la relación de dispersión $\omega \sim k^\alpha$.

Para las ondas de gravedad $\alpha = 1/2$ con lo cual las interacciones resonantes de 3 ondas no están permitidas (sino serían ondas con energía negativa).

3. Eliminación de los términos no resonantes.

Vamos a querer mostrar que efectivamente en el caso de que un término sea no resonante, o sea, que no cumple la condición (22), existirá una transformación canónica a nuevas variables $c_{\vec{k}}, c_{\vec{k}}^*$ en las cuales ese término no aparece en el Hamiltoniano de interacción.

A modo ilustrativo [1] plantea para una sola variable el Hamiltoniano hasta orden cuatro:

$$\mathcal{H} = \omega b b^* + \frac{V}{2}(b^2 b^* + b^{*2}) + \frac{U}{6}(b^3 + b^{*3}) + \frac{W}{4}(b^2 b^{*2}) + G(b^3 b^* + b b^{*3}) + R(b^4 + b^{*4}) \quad (23)$$

Y pide que la nueva variable sea de la forma (desarrollo perturbativo en b):

$$b = c + A_1 c^2 + A_2 c c^* + A_3 c^{*2} + B_1 c^3 + B_2 c^* c^2 + B_3 c c^{*2} + B_4 c^{*3} + \dots \quad (24)$$

Luego pide que $\{b, b^*\}_{c, c^*} = 1$ para que la transformación sea efectivamente canónica y resuelve para los coeficientes A_i y B_i pidiendo que todos los términos no lineales del Hamiltoniano excepto $c^2 c^{*2}$ sean 0. Entonces llega a que:

$$\mathcal{H} = \omega c c^* + \frac{1}{4} T c^2 c^{*2} \quad T = W - \frac{3V^2}{\omega} - \frac{U^2}{3\omega} \quad (25)$$

O sea, que siempre y cuando $\omega \neq 0$ se pueden eliminar los términos no resonantes del Hamiltoniano. Es posible hacer exactamente lo mismo para el caso en que no hay triadas resonantes, quedando:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{4} \int T_{1234} c_1^* c_2^* c_3 c_4 \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_3 - \vec{k}_4) d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 d\vec{k}_3 d\vec{k}_4 \quad (26)$$

Donde el coeficiente de interacción resulta:

$$T_{1234} = W_{1234} - \frac{U_{-1-212}U_{-3-434}}{\omega_3 + \omega_4 + \omega_{3+4}} + \frac{V_{1+212}^*V_{3+434}}{\omega_1 + \omega_2 - \omega_{1+2}} - \frac{V_{131-3}^*V_{424-2}}{\omega_{4-2} + \omega_2 - \omega_4} \quad (27)$$

$$- \frac{V_{242-4}^*V_{313-1}}{\omega_{3-1} + \omega_1 - \omega_3} - \frac{V_{232-3}^*V_{414-1}}{\omega_{4-1} + \omega_1 - \omega_4} - \frac{V_{141-4}^*V_{323-2}}{\omega_{3-2} + \omega_2 - \omega_3} \quad (28)$$

Notemos que si efectivamente la condición resonante para tres ondas no puede cumplirse (con una relación de dispersión de no decaimiento), entonces los denominadores de T_{1234} no divergen y efectivamente se puede eliminar \mathcal{H}_3 del Hamiltoniano de interacción \mathcal{H}_{int} .

En general la prohibición de interacciones del tipo $2 \rightarrow 1$ y $1 \rightarrow 2$ implican la prohibición de los términos $1 \rightarrow 3$ y $3 \rightarrow 1$. Igualmente se eliminan los términos $4 \rightarrow 0$ y $0 \rightarrow 4$ del Hamiltoniano, resultando en su versión más simplificada.

Notemos que al interactuar la mitad de las ondas de cada lado ($N/2 \rightarrow N/2$) se conserva la cantidad de partículas, asociado a la simetría $U(1)$ que mencionamos antes:

$$N = \int c_k^* c_k d\vec{k} \quad (29)$$

Que es lo que se conoce como la integral de *Wave action*.

Los distintos términos de T_{1234} se pueden interpretar gráficamente:

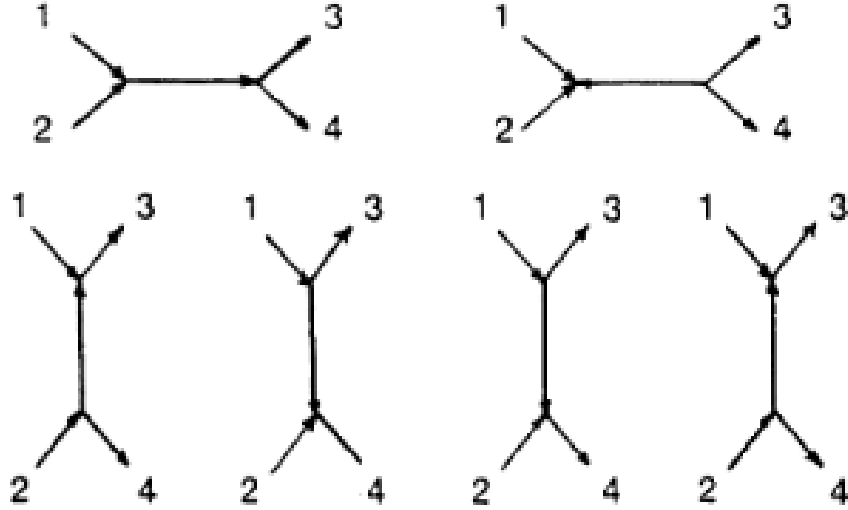


Figura 2: Distintos procesos de cuatro ondas como segundo orden perturbativo a proceso de tres ondas, donde la tercera es virtual y conecta ambos extremos.

Donde se pueden pensar como un segundo orden de perturbación a un proceso de tres ondas, donde aparece una fuerza virtual que no conserva energía y momento.

4. Paso a la estadística y la Ecuación Cinética.

La idea ahora va a ser pasar de la descripción dinámica del sistema a una estadística en función de las funciones de correlación de las amplitudes de ondas.

Resumen Ecuaciones de Movimiento

En las variables apropiadas los Hamiltonianos sin términos no resonantes nos quedan, para el caso de tres ondas:

$$\mathcal{H}_3 = \frac{1}{2} \int (V_{123} c_1^* c_2 c_3 + \text{c.c.}) \delta(\vec{k}_1 - \vec{k}_2 - \vec{k}_3) d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 d\vec{k}_3 \quad (30)$$

Con su ecuación de movimiento:

$$i \frac{\partial c_{\vec{k}}}{\partial t} - \omega_k c_{\vec{k}} = \int \left(\frac{1}{2} V_{k12} c_1 c_2 \delta(\vec{k} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2) + V_{1k2}^* c_1 c_2^* \delta(\vec{k}_1 - \vec{k} - \vec{k}_2) \right) d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 \quad (31)$$

Donde primero tenemos $k \rightarrow 1 + 2$ (que es una sola opción) y luego $k + 2 \rightarrow 1$ (que son dos opciones).

Y para el caso de cuatro ondas:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{4} \int T_{1234} c_1^* c_2^* c_3 c_4 \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_3 - \vec{k}_4) d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 d\vec{k}_3 d\vec{k}_4 \quad (32)$$

Con su ecuación de movimiento:

$$i \frac{\partial c_{\vec{k}}}{\partial t} - \omega_k c_{\vec{k}} = \frac{1}{2} \int T_{k123} c_1^* c_2 c_3 \delta(\vec{k} + \vec{k}_1 - \vec{k}_2 - \vec{k}_3) d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 d\vec{k}_3 \quad (33)$$

Que son procesos $2 \rightarrow 2$.

Paso a la estadística.

Las ecuaciones de movimiento anteriores son para la evolución temporal de las amplitudes y fases de $c_{\vec{k}} = |c(\vec{k}, t)| e^{i\phi(\vec{k}, t)}$. En el caso en que las no linealidades son débiles y hay una gran cantidad de modos esta evolución suele ser redundante, ya que incluye la dinámica rápida de $\phi \sim \omega t$ que deja a la evolución lenta de las amplitudes (que es constante en el caso puramente lineal, orden más bajo) virtualmente no afectada. Por esto vamos a querer pasar a una descripción estadística, donde solo trabajaremos con las funciones de correlación para $c_{\vec{k}}$, donde vamos a promediar en un ensamble.

Vamos a asumir una "caotización" de las fases, de forma tal que aunque al inicio estuvieran correlacionadas, luego de un tiempo ya no lo estarán. Podemos pensar que esto se debe a la dispersión del medio o a que inicialmente están en un equilibrio muy inestable del cual los saca cualquier perturbación del medio. De esta forma, bajo la aproximación de fases aleatorias tenemos las correlaciones:

$$\langle c_{\vec{k}} \rangle = \langle |c_{\vec{k}}| e^{i\phi_{\vec{k}}} \rangle = 0 \quad (34)$$

$$\langle c_{\vec{k}} c_{\vec{k}'} \rangle = \langle |c_{\vec{k}}| |c_{\vec{k}'}| e^{i(\phi_{\vec{k}} + \phi_{\vec{k}'})} \rangle = 0 \quad (35)$$

$$\langle c_{\vec{k}} c_{\vec{k}'}^* \rangle = \langle |c_{\vec{k}}| |c_{\vec{k}'}| e^{i(\phi_{\vec{k}} - \phi_{\vec{k}'})} \rangle = n(\vec{k}) \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad (36)$$

Acá definimos la acción de onda $n(\vec{k}) = c_{\vec{k}}^* c_{\vec{k}}$, que sería la densidad de "partículas" con número de onda \vec{k} en la integral (29).

Por último para los correladores de una cantidad impar siempre van a dar 0, y para los de orden 4 y 6 tenemos:

$$\langle c_1^* c_2^* c_3 c_4 \rangle = n_1 n_2 [\delta_{1-3} \delta_{2-4} + \delta_{1-4} \delta_{2-3}] \quad (37)$$

$$\langle c_1^* c_2^* c_3^* c_4 c_5 c_6 \rangle = n_1 n_2 n_3 [\delta_{1-4} \delta_{2-5} \delta_{3-6} + \delta_{1-4} \delta_{2-6} \delta_{3-5} + \delta_{1-5} \delta_{2-4} \delta_{3-6} \quad (38)$$

$$+ \delta_{1-5} \delta_{2-6} \delta_{3-4} + \delta_{1-6} \delta_{2-4} \delta_{3-5} + \delta_{1-6} \delta_{2-5} \delta_{3-6}] \quad (39)$$

Que básicamente las deltas dan que queden dos o tres n 's.

Ecuación cinética de tres ondas.

Ecuación cinética de cuatro ondas.

5. Correspondencia con fluidos con superficie libre.

6. Espectro de energía y PSD.

Nos interesará estudiar la transferencia de energía entre escalas experimentalmente, que estará caracterizada por la densidad espectral de energía E_k tal que la magnitud $E = \int E_k dk$ se conserva.

Para esto vamos a empezar dando las definiciones básicas de lo que estaremos usando.

Como mencioné anteriormente, la energía total va a venir dada por una distribución, que puede escribirse ya sea en el espacio de k o de ω , vinculados ambos a través de la relación de dispersión lineal $\omega(k)$. Entonces:

$$E = \int E(\vec{k}) d\vec{k} = \int k E(\vec{k}) dk d\theta \equiv \int E(k) dk = \int E(\omega) d\omega \quad (40)$$

O sea, estamos definiendo $E(k) = 2\pi E(\vec{k})$ y la relación entre las densidades en espacio de frecuencia y momento está dada por: $E(k) dk = E(\omega) d\omega$.

Esta energía será la de la superficie libre. En principio sabemos que se dará un balance entre la energía cinética y la potencial, como una especie de equipartición [2]. Se suele calcular la potencial (a partir de las mediciones para la superficie libre η) y se multiplica por 2 [3]. Vamos a entonces trabajar con las energías potenciales, cuya expresión depende de si tenemos ondas de gravedad o capilares. Tenemos que:

$$E_p^g = \frac{1}{2} \rho g \int \eta^2 dS \quad E_p^s = \gamma \int \sqrt{1 + (\nabla \eta)^2} - 1 dS \quad (41)$$

Acá la energía por capilaridad es básicamente la integral del elemento de superficie ds . Se puede aproximar a primer orden para una onda armónica en el caso lineal (con $\eta \ll 1$), entonces [3]

$$E_p^s = \frac{1}{2} \gamma \int k^2 \eta^2 dS \quad (42)$$

Usando que $(1 + \varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$. Ahora vamos a querer pasar al espacio de Fourier, transformando las energías:

$$E_p^g = \frac{\rho g}{2} \int |\eta_{\vec{k}}|^2 d\vec{k} \quad E_p^s = \frac{\gamma}{2} \int k^2 |\eta_{\vec{k}}|^2 d\vec{k} \quad (43)$$

Donde $\eta_{\vec{k}}$ es la transformada de Fourier de η :

$$\eta(\vec{k}) = \frac{1}{2\pi} \int \eta(\vec{r}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d\vec{r} \quad (44)$$

Podemos integrar en cilíndricas para definir $\eta_k = 2\pi k \eta_{\vec{k}}$. Las densidades espectrales de energía van a ser los integrandos.

Por último vamos a definir la Power Spectral Density (PSD) que va a ser lo más sencillo para trabajar experimentalmente:

$$S_\eta(\omega) = \frac{1}{T} |\eta_\omega|^2 \quad S_\eta(k) = \frac{1}{L^2} |\eta_k|^2 \quad (45)$$

Acá ahora $\eta(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \eta(t) e^{i\omega t} dt$ es la transformada de Fourier respecto al tiempo. Además para obtener ya sea $\eta(t)$ o $\eta(\vec{r})$ se puede promediar en el tiempo o espacio, con lo cual en realidad sería $S_\eta \propto \langle |\eta|^2 \rangle$ (y técnicamente el promedio sería en el ensamble, pero consideramos al sistema ergódico). [4]

Podemos relacionar las PSD en ambos espacios como $S(\omega) d\omega = S(k) dk$. De esta forma entonces podemos obtener la densidad de energía a partir de la PSD como:

$$E^g(k) = \frac{\rho g}{2} S_\eta(k) \quad E^s(k) = \frac{\gamma}{2} k^2 S_\eta(k) \quad (46)$$

Una cosa interesante es que si escribimos explícitamente $S_\eta(k) \propto k |\eta_{\vec{k}}|^2$ entonces nos queda en ambos casos:

$$E(k) \propto \omega^2 |\eta_{\vec{k}}|^2 \propto |\dot{\eta}_{\vec{k}}|^2 \quad (47)$$

Que sería la energía cinética efectivamente.

7. Espectro de Kolmogorov-Zakharov-Filonenko.

Experimentalmente es posible observar que el espectro de energía para la elevación de la superficie libre en un determinado rango de números de ondas (de equilibrio) resulta $E_\omega \sim A\omega^s$. En este rango la mayor contribución a la dinámica se debe a los efectos no lineales, ya que los viscosos son menores. Es posible calcular los exponentes de forma analítica a partir de las ecuaciones para la superficie libre [5]

La densidad de energía se puede escribir como:

$$E(\vec{k}) = \omega(\vec{k}) n(\vec{k}) \quad (48)$$

Donde n es la *wave action*, análoga a la cantidad de partículas (o ondas) con ese número de onda.

Ondas de gravedad [5]

Tenemos que $E(\omega) = \omega^4 n(\omega)$ y pueden calcular que para $n(\omega) = A\omega^s$ hay soluciones $s = -1$, que se corresponde con la distribución de Rayleigh-Jeans (equilibrio termodinámico para el caso lineal, con PDF Gaussiana [6]), y $s = -8$ que es la análoga al espectro de Kolmogorov para turbulencia hidrodinámica.

Las equivalencias son [4]:

$$E_k^g \sim P^{1/3} g^{1/2} k^{-5/2} \quad S_k^g \sim P^{1/3} g^{-1/2} k^{-5/2} \quad S_\omega^g \sim P^{1/3} g \omega^{-4} \quad (49)$$

Es posible llegar a estos resultados de forma dimensional, pero para que el exponente sea único hay que asumir a priori que el flujo en el espectro de energía va en el orden $P^{1/(N-1)}$ con N el número de ondas interactuantes más bajo, siendo $N = 4$ para ondas de gravedad.

Para hacer los cambios hay que usar la relación de dispersión:

$$\omega^2 = gk \quad (50)$$

Ondas de capilaridad [7]

Al igual que para las ondas de gravedad calculan $n(\omega)$, llegando esta vez a los resultados de $s = -1$ que es la de Rayleigh-Jeans y $s = -17/6$ que es la que nos interesa. Con esto:

$$E_k^s \sim P^{1/2} \left(\frac{\gamma}{\rho}\right)^{1/4} k^{-7/4} \quad S_k^s \sim P^{1/2} \left(\frac{\gamma}{\rho}\right)^{-3/4} k^{-15/4} \quad S_\omega^s \sim P^{1/2} \left(\frac{\gamma}{\rho}\right)^{1/6} \omega^{-17/6} \quad (51)$$

Acá la relación de dispersión es:

$$\omega^2 = \frac{\gamma}{\rho} k^3 \quad (52)$$

8. Doble cascada para N par

A partir de los resultados para los espectros KZF se puede ver que existe una cascada directa de energía, sin embargo, para el caso en que las interacciones se dan entre un número par de ondas, tenemos otro invariante además de la energía, que es la *wave action*, que tendrá una cascada inversa. [6]

Para el caso de ondas de gravedad, con interacciones de 4 ondas, tenemos el espectro:

$$E_k^g \sim g^{2/3} \zeta^{1/3} k^{-7/3} \quad (53)$$

Con ζ el flujo de *wave action* (ratio de disipación)

1. El sensor capacitivo de la altura del agua.

Empezaremos por un lado diseñando un sensor capacitivo que nos permita medir los desplazamientos de la superficie libre respecto del valor en equilibrio con una alta resolución temporal y el mínimo error posible. Para esto nos basamos en el modelo propuesto por [8].

Este sensor consiste en un cable de cobre recubierto por un esmalte y rodeado por una determinada cantidad de líquido. El esmalte actúa como medio dieléctrico entre dos conductores de forma tal que el sistema completo actúa a modo de capacitor.

Se puede pensar al cable como un conjunto de segmentos de longitud dl , cada uno de los cuales agrega al circuito una inductancia en serie $L'dl$ y una capacitancia en paralelo $C'dl$, incluyéndose si está sumergido ese segmento. Aquí:

$$C' = 2\pi\epsilon \ln^{-1} \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \quad L' = \frac{\mu}{2\pi} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \quad (54)$$

Son la capacitancia e inductancia por unidad de longitud de un capacitor cilíndrico perfecto.

La inductancia en función de la longitud l sumergida puede calcularse de forma recursiva por lo dicho anteriormente, de forma que $Z(l+dl) = j\omega L'dl + [Z(l)^{-1} + (j\omega C'dl)^{-1}]^{-1}$, con la condición de que $Z(0) = \infty$ ya que el circuito está desconectado.

Esto se puede resolver analíticamente, resultando en que:

$$Z(l) = j\sqrt{\frac{L'}{C'}} \tan \left(\omega\sqrt{L'C'}l - \pi/2 \right) \quad (55)$$

Si suponemos que l es lo suficientemente chica resulta que:

$$Z(l) \approx \frac{1}{j\omega C'l} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{L'C'^2\omega^2 l^3} \right) \quad (56)$$

Con lo cual el circuito se comporta principalmente de forma capacitiva. Además, como $r_2 = r_1 + e$ con e el espesor del esmalte, entonces $C' \propto r_1/e$.

2. Simulaciones del sensor y funcionamiento.

El circuito

Para poder medir la altura del agua l vamos a usar un circuito resonante RLC, con el cable de cobre conectado en paralelo a otro capacitor, sujeto a una corriente alterna de frecuencia ω . De esta forma tendremos la siguiente ecuación para el circuito:

$$V = \cos(\omega t) \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C(t)L} I \quad (57)$$

Con $C(t) = C_0 + \Delta C(t)$, tal que $\Delta C(t)/C_0 \ll 1$. Vale aclarar que C_0 es la suma de la capacitancia extra con la capacitancia del cable para el estado de reposo.

Es posible mostrar que siempre y cuando el cociente sea lo suficientemente pequeño, la fase de la corriente será:

$$\tan(\phi) = -\frac{1}{R} \left[\omega L - \frac{1}{\omega C_0} \right] - \frac{1}{R} \frac{\Delta C}{\omega C_0^2} + \mathcal{O} \left[\left(\frac{\Delta C}{C_0} \right)^2 \right] \quad (58)$$

Y si elegimos la frecuencia resonante del circuito $\omega = 1/\sqrt{LC_0}$ se puede traducir en que:

$$\phi = -Q_F \frac{\Delta C}{C_0} = -Q_F \frac{C'}{C_0} l(t) \quad Q_F = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C_0}} \quad (59)$$

Con lo cual la fase es proporcional a la altura de la superficie libre (respecto de la altura de equilibrio).

Extracción de la fase

Para obtener la fase del circuito se puede medir la diferencia de potencial sobre la resistencia (proporcional a la corriente por la Ley de Ohm) y pasarla por un lock-in. El lock-in nos devolverá la amplitud y fase en función del tiempo respecto de una señal de referencia, que en este caso será la fuente de alterna. Para las simulaciones del circuito se emuló su funcionamiento en *Python* de forma digital:

```
from scipy.signal import butter, filtfilt

def lock_in(signal, omega, fs, cutoff_freq=1):
    ts = np.arange(len(signal)) / fs
    ref_cos = np.cos(omega * ts)
    ref_sin = np.sin(omega * ts)

    in_phase = signal * ref_sin
    quadrature = signal * ref_cos

    b, a = butter_lowpass(cutoff_freq, fs)
    in_phase_filtered = filtfilt(b, a, in_phase)
    quadrature_filtered = filtfilt(b, a, quadrature)

    A_t = np.sqrt(in_phase_filtered**2 + quadrature_filtered**2)
    phi_t_extracted = np.arctan2(quadrature_filtered, in_phase_filtered)

    return A_t, phi_t_extracted

def butter_lowpass(cutoff, fs, order=4):
    nyquist = 0.5 * fs
    normal_cutoff = cutoff / nyquist
    b, a = butter(order, normal_cutoff, btype='low', analog=False)
    return b, a
```

A modo sumario, el funcionamiento radica en multiplicar (o mixear) la señal de interés (que debe estar montada sobre la moduladora) por la señal de referencia y la misma con una fase de $\pi/2$, luego se pasa por un filtro pasa bajos y se reconstruye la amplitud y la fase. En la práctica, el circuito pasa bajos actúa como integrador de forma que al multiplicar por la señal de interés aplicará la ortogonalidad de las funciones sinusoidales con distinta frecuencia, quedando solo la componente con la deseada (también llamada homodina, a diferencia de las no deseadas, que se llaman heterodinas). Al mismo tiempo, al llevarse la señal a frecuencias más altas en el espacio de Fourier (por convolucionar con la señal de referencia) disminuirá el ruido.

Un aspecto clave para el correcto funcionamiento será elegir de forma adecuada la frecuencia de corte del filtro pasabajos, de forma tal que integre por suficiente tiempo como para deshacerse del ruido pero no tanto que se pierda resolución en la señal. Es por esto que debe estar entre la frecuencia moduladora ω_r y la de la señal ω_s , que además debe ser lo suficientemente lenta para que entren varios ciclos de la moduladora en la misma:

$$\omega_{\text{sampleo}} > \omega_r > \omega_{\text{cut-off}} > \omega_s \quad (60)$$

La implementación en código se puso a prueba de la siguiente forma:

```
omega_ref = 100
omega_sig = 1
A = 1

def phi(t):
```

```

return A * np.sin(omega_sig * t)

ts = np.linspace(0, 10, 10000)
signal = np.sin(omega_ref * ts + phi(ts))

extracted_A, extracted_phi = lock_in(signal, omega_ref, 1/(ts[1]-ts[0]))

```

Y efectivamente funciona de la manera deseada.

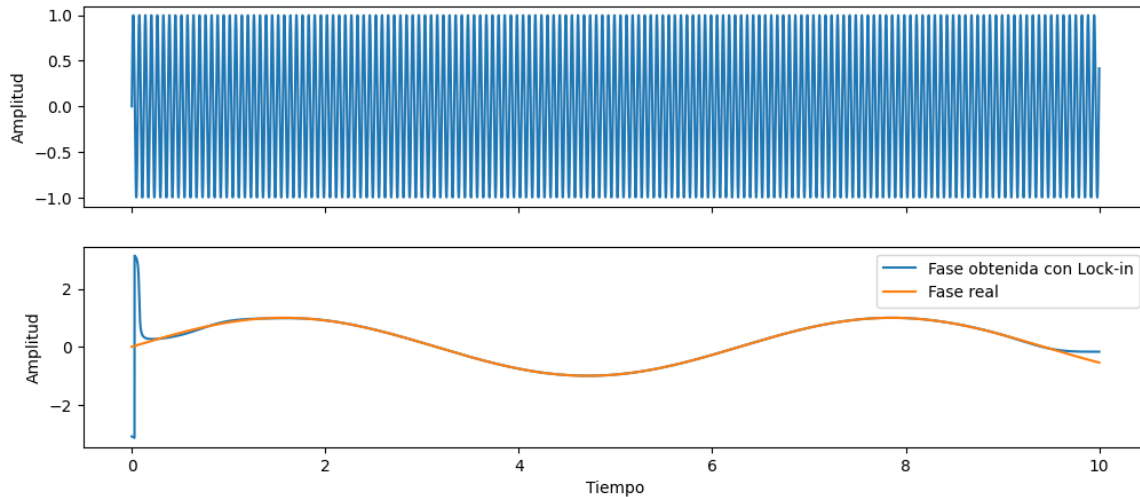


Figura 3: Comparación de fase extraída con lock-in y original para una modulación sinusoidal de la fase.

La simulación

Para estudiar el comportamiento del circuito se simuló mediante *Python*, resolviendo la ecuación diferencial con *Odeint* de *Scipy.integrate* para distintos parámetros y $l(t)$. El código final que toma la lista de parámetros y la función de alturas en función del tiempo es:

```

from scipy.integrate import odeint

def measured_l(ts, l, C0, C, R, L, V=5, cutoff_freq=1):
    omega = 1 / np.sqrt(C0 * L)
    Q = (1 / R) * np.sqrt(L / C0)

    def C_(t):
        return C0 + C * l(t)

    def dXdt(X, t):
        i, didt = X
        didt2 = V * np.cos(omega * t) - R / L * didt - 1 / (C_(t) * L) * i
        return [didt, didt2]

    y0 = [0, 0]
    sol = odeint(dXdt, y0, ts)
    current = sol[:, 0]

    _, phi_t_extracted = lock_in(current, omega, fs = 1 / (ts[1] - ts[0]),
                                  cutoff_freq=cutoff_freq)

    unwrapped = np.unwrap(phi_t_extracted)
    reconstructed_heights = -C0 * unwrapped / (Q * C)

    return reconstructed_heights

```

Devolviendo al final la lista de las alturas reconstruidas. A continuación algunas de las pruebas realizadas.

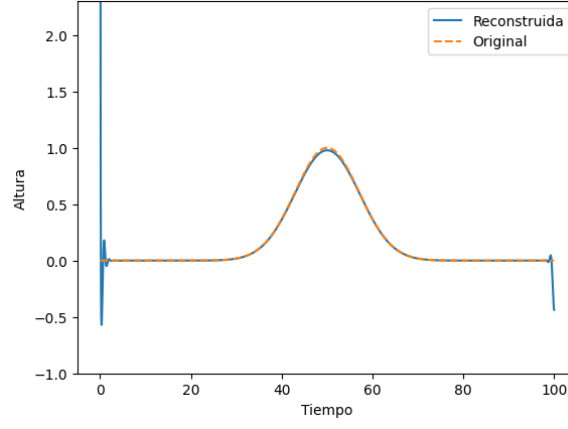


Figura 4: Reconstrucción de alturas para una $l(t)$ Gaussiana.

En primer lugar para una $l(t)$ Gaussiana se reconstruye muy fielmente la altura original con el método propuesto. Al inicio los artefactos son por las condiciones iniciales transitorias del sistema, hasta que alcanza un estacionario.

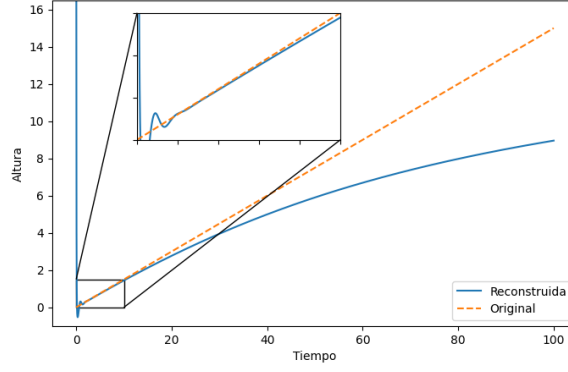


Figura 5: Barrido lineal de alturas.

Luego con una lineal para estudiar sus límites, podemos ver que para l 's bajos se comporta linealmente, pero luego satura. Esto será cuando $C_0 \sim C'l$. Con lo cual si hacemos más pequeño C' mejorará el rango de funcionamiento, aunque disminuirá la sensibilidad, ya que es proporcional al error en fase del lock-in (que está fijo) por C' .

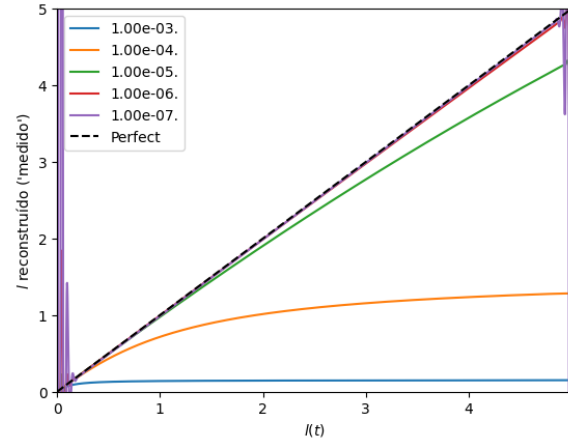


Figura 6: Comparación para el mismo barrido con distintos C' .

Valores reales

Siguiendo los valores usados por [8] se propone usar $R \sim 1 \text{ k}\Omega$, $L = 22 \text{ mH}$, $C_0 = 250 \text{ pF}$ y $C' \sim 10 \text{ pF/mm}$. Estos parámetros dan una frecuencia $\omega \sim 10^5 \text{ Hz}$ o $f \approx 60 \text{ kHz}$. Analizamos el comportamiento para una señal $l(t)$ de frecuencia $\omega = 1 \text{ kHz}$ y amplitud 1 mm .

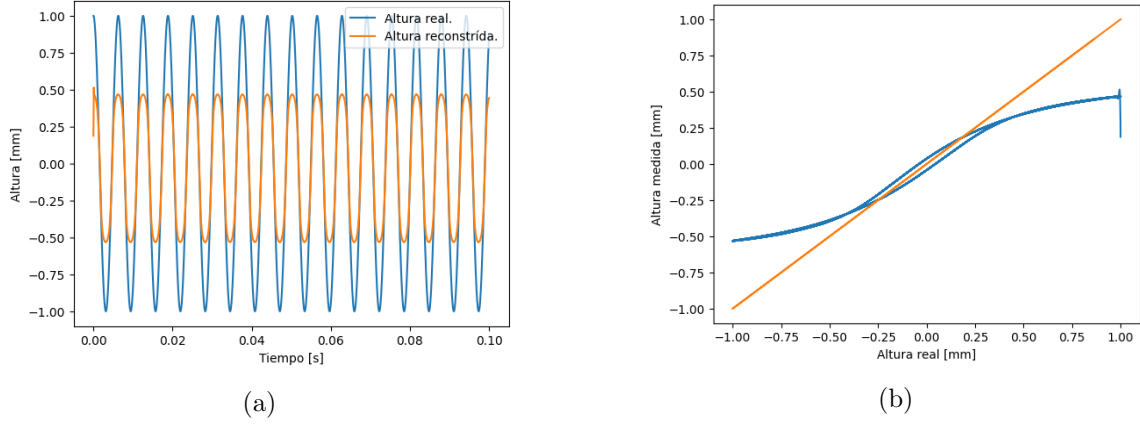


Figura 7: Barrido de alturas. A la izquierda la evolución temporal y a la derecha la altura reconstruída contra la original.

Podemos notar que satura cerca de 0.25 mm y que a esta frecuencia de señal hay histéresis. Si aumentamos C_0 , suponiendo C' fija, podemos conseguir aumentar el rango de validez hasta 10 mm y evitar la histéresis a 100 Hz , aunque querríamos frecuencias más altas. Esto se puede lograr también disminuyendo Q_F al disminuir L o aumentar R por ejemplo.

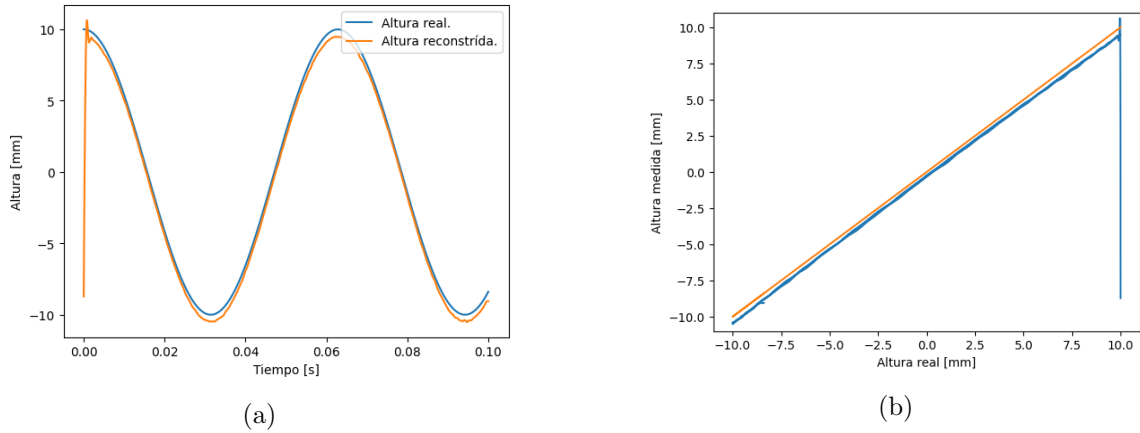


Figura 8: Barrido de alturas. A la izquierda la evolución temporal y a la derecha la altura reconstruída contra la original.

Esto último es para $C' = 3 \times 10^{-8} \text{ F/m}$ y $C_0 = 160 \times 10^{-10} \text{ F}$. Habrá que probar experimentalmente qué rango de valores funcionan mejor y si hay más juego antes de que sature.

3. Fabricación del sensor.

Por último se empezó con el diseño del sensor. Éste constará de una carcasa externa para integridad estructural impresa en 3D, diseñada con Blender como se muestra a continuación (primer prototipo).

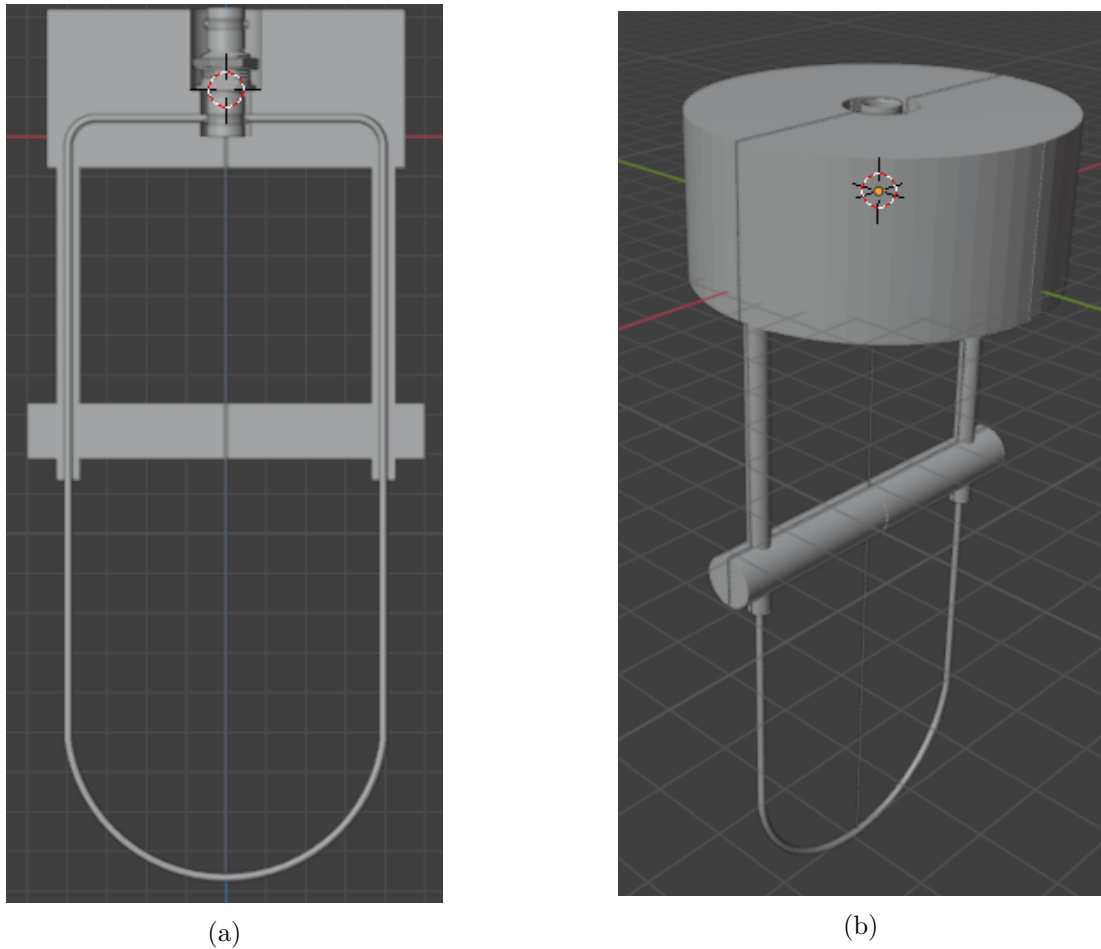


Figura 9: Dos vistas del prototipo inicial. Entero y corte.

Se suelda el cable de cobre a un conector BNC hembra dentro de la carcasa. Además se coloca soldado cable de acero a la carcasa exterior del BNC (a Tierra) que se conectan al alambre por abajo (aislado eléctricamente).

1. Diseño del sensor.

Reducimos el sensor para que no sea tan ancho y más compacto. La nueva versión es la siguiente:

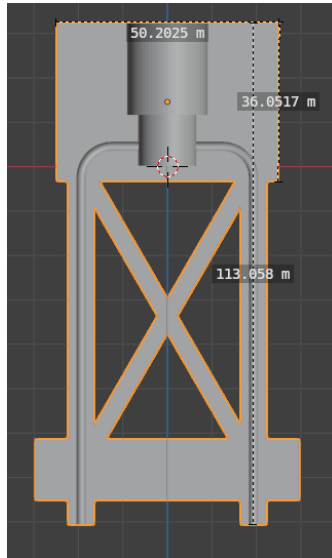


Figura 10: Nuevo modelo, las medidas que dicen metros son en realidad milímetros.

Además le agregamos una cruz para mejorar la integridad estructural, revisar modelo de Truss, tal vez se puede optimizar aún más.

Se mandaron a imprimir dos copias para empezar a probar su funcionamiento.

Bibliografía

- [1] V. E. Zakharov, Victor S. L'vov, and Gregory Falkovich. *Kolmogorov Spectra of Turbulence I*. Springer Series in Nonlinear Dynamics. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1992.
- [2] Pijush K. Kundu. *Fluid Mechanics*. Elsevier Science & Technology, San Diego, 5th ed edition, 2014.
- [3] Luc Deike. *Etudes expérimentales et numériques de la turbulence d'ondes de surface*. Doctoral Thesis, Université Paris Diderot - Paris 7, École Doctorale Matière Condensée et Interfaces, Laboratoire Matière et Systèmes Complexe, Paris, Francia, September 2013.
- [4] Eric Falcon and Nicolas Mordant. Experiments in Surface Gravity–Capillary Wave Turbulence. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 54(1):1–25, January 2022.
- [5] V. E. Zakharov and N. N. Filonenko. Energy Spectrum for Stochastic Oscillations of the Surface of a Liquid. *Soviet Physics Doklady*, 11(10):881, April 1967.
- [6] Sergey Nazarenko. *Wave Turbulence*, volume 825 of *Lecture Notes in Physics*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2011.
- [7] V. E. Zakharov and N. N. Filonenko. Weak turbulence of capillary waves. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 8(5):37–40, 1971.
- [8] Gordillo Zavaleta. *Non-Propagating Hydrodynamic Solitons in a Quasi-One Dimensional Free Surface Subject to Vertical Vibrations*. Doctoral Thesis, Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Departamento de Física, Santiago de Chile, Chile, 2012.