



## **Cuaderno de Laboratorio - Tesis de Licenciatura 2025: Estudio experimental de la transferencia de energía en turbulencia de ondas gravito-capilares.**

Estudiante: Ignacio Pablo Hernando<sup>1</sup>

Director: Pablo Cobelli<sup>2</sup>

Lugar de trabajo: Laboratorio de Turbulencia Geofísica  
DF, FCEN, UBA & INFIA CONICET

---

<sup>1</sup>ignacioph21@gmail.com, LU: 6/21

<sup>2</sup>cobelli@df.uba.ar

## Índice general

---

|                       |    |
|-----------------------|----|
| Antecedentes Teóricos | 2  |
| Semana del 31/03/2025 | 5  |
| Semana del 07/04/2025 | 11 |

### 1. Espectro de energía y PSD.

Nos interesará estudiar la transferencia de energía entre escalas experimentalmente, que estará caracterizada por la densidad espectral de energía  $E_k$  tal que la magnitud  $E = \int E_k dk$  se conserva.

Para esto vamos a empezar dando las definiciones básicas de lo que estaremos usando.

Como mencioné anteriormente, la energía total va a venir dada por una distribución, que puede escribirse ya sea en el espacio de  $k$  o de  $\omega$ , vinculados ambos a través de la relación de dispersión lineal  $\omega(k)$ . Entonces:

$$E = \int E(\vec{k}) d\vec{k} = \int k E(\vec{k}) dk d\theta \equiv \int E(k) dk = \int E(\omega) d\omega \quad (1)$$

O sea, estamos definiendo  $E(k) = 2\pi E(\vec{k})$  y la relación entre las densidades en espacio de frecuencia y momento está dada por:  $E(k) dk = E(\omega) d\omega$ .

Esta energía será la de la superficie libre. En principio sabemos que se dará un balance entre la energía cinética y la potencial, como una especie de equipartición [1]. Se suele calcular la potencial (a partir de las mediciones para la superficie libre  $\eta$ ) y se multiplica por 2 [2]. Vamos a entonces trabajar con las energías potenciales, cuya expresión depende de si tenemos ondas de gravedad o capilares. Tenemos que:

$$E_p^g = \frac{1}{2} \rho g \int \eta^2 dS \quad E_p^s = \gamma \int \sqrt{1 + (\nabla \eta)^2} - 1 dS \quad (2)$$

Acá la energía por capilaridad es básicamente la integral del elemento de superficie  $ds$ . Se puede aproximar a primer orden para una onda armónica en el caso lineal (con  $\eta \ll 1$ ), entonces [2]

$$E_p^s = \frac{1}{2} \gamma \int k^2 \eta^2 dS \quad (3)$$

Usando que  $(1 + \varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$ . Ahora vamos a querer pasar al espacio de Fourier, transformando las energías:

$$E_p^g = \frac{\rho g}{2} \int |\eta_{\vec{k}}|^2 d\vec{k} \quad E_p^s = \frac{\gamma}{2} \int k^2 |\eta_{\vec{k}}|^2 d\vec{k} \quad (4)$$

Donde  $\eta_{\vec{k}}$  es la transformada de Fourier de  $\eta$ :

$$\eta(\vec{k}) = \frac{1}{2\pi} \int \eta(\vec{r}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d\vec{r} \quad (5)$$

Podemos integrar en cilíndricas para definir  $\eta_k = 2\pi k \eta_{\vec{k}}$ . Las densidades espectrales de energía van a ser los integrandos.

Por último vamos a definir la Power Spectral Density (PSD) que va a ser lo más sencillo para trabajar experimentalmente:

$$S_\eta(\omega) = \frac{1}{T} |\eta_\omega|^2 \quad S_\eta(k) = \frac{1}{L^2} |\eta_k|^2 \quad (6)$$

Acá ahora  $\eta(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \eta(t) e^{i\omega t} dt$  es la transformada de Fourier respecto al tiempo. Además para obtener ya sea  $\eta(t)$  o  $\eta(\vec{r})$  se puede promediar en el tiempo o espacio, con lo cual en realidad sería  $S_\eta \propto \langle |\eta|^2 \rangle$  (y técnicamente el promedio sería en el ensamble, pero consideramos al sistema ergódico). [3]

Podemos relacionar las PSD en ambos espacios como  $S(\omega) d\omega = S(k) dk$ . De esta forma entonces podemos obtener la densidad de energía a partir de la PSD como:

$$E^g(k) = \frac{\rho g}{2} S_\eta(k) \quad E^s(k) = \frac{\gamma}{2} k^2 S_\eta(k) \quad (7)$$

Una cosa interesante es que si escribimos explícitamente  $S_\eta(k) \propto k|\eta_{\vec{k}}|^2$  entonces nos queda en ambos casos:

$$E(k) \propto \omega^2 |\eta_{\vec{k}}|^2 \propto |\dot{\eta}_{\vec{k}}|^2 \quad (8)$$

Que sería la energía cinética efectivamente.

## 2. Interacciones Resonantes de $N$ ondas

## 3. Espectro de Kolmogorov-Zakharov-Filonenko.

Experimentalmente es posible observar que el espectro de energía para la elevación de la superficie libre en un determinado rango de números de ondas (de equilibrio) resulta  $E_\omega \sim A\omega^s$ . En este rango la mayor contribución a la dinámica se debe a los efectos no lineales, ya que los viscosos son menores. Es posible calcular los exponentes de forma analítica a partir de las ecuaciones para la superficie libre [4]

La densidad de energía se puede escribir como:

$$E(\vec{k}) = \omega(\vec{k})n(\vec{k}) \quad (9)$$

Donde  $n$  es la *wave action*, análoga a la cantidad de partículas (o ondas) con ese número de onda.

### Ondas de gravedad [4]

Tenemos que  $E(\omega) = \omega^4 n(\omega)$  y pueden calcular que para  $n(\omega) = A\omega^s$  hay soluciones  $s = -1$ , que se corresponde con la distribución de Rayleigh-Jeans (equilibrio termodinámico para el caso lineal, con PDF Gaussiana [5]), y  $s = -8$  que es la análoga al espectro de Kolmogorov para turbulencia hidrodinámica.

Las equivalencias son [3]:

$$E_k^g \sim P^{1/3} g^{1/2} k^{-5/2} \quad S_k^g \sim P^{1/3} g^{-1/2} k^{-5/2} \quad S_\omega^g \sim P^{1/3} g \omega^{-4} \quad (10)$$

Es posible llegar a estos resultados de forma dimensional, pero para que el exponente sea único hay que asumir a priori que el flujo en el espectro de energía va en el orden  $P^{1/(N-1)}$  con  $N$  el número de ondas interactuantes más bajo, siendo  $N = 4$  para ondas de gravedad.

Para hacer los cambios hay que usar la relación de dispersión:

$$\omega^2 = gk \quad (11)$$

### Ondas de capilaridad [6]

Al igual que para las ondas de gravedad calculan  $n(\omega)$ , llegando esta vez a los resultados de  $s = -1$  que es la de Rayleigh-Jeans y  $s = -17/6$  que es la que nos interesa. Con esto:

$$E_k^s \sim P^{1/2} \left(\frac{\gamma}{\rho}\right)^{1/4} k^{-7/4} \quad S_k^s \sim P^{1/2} \left(\frac{\gamma}{\rho}\right)^{-3/4} k^{-15/4} \quad S_\omega^s \sim P^{1/2} \left(\frac{\gamma}{\rho}\right)^{1/6} \omega^{-17/6} \quad (12)$$

Acá la relación de dispersión es:

$$\omega^2 = \frac{\gamma}{\rho} k^3 \quad (13)$$

### 3.1. Doble cascada para $N$ par

A partir de los resultados para los espectros KZF se puede ver que existe una cascada directa de energía, sin embargo, para el caso en que las interacciones se dan entre un número par de ondas, tenemos otro invariante además de la energía, que es la *wave action*, que tendrá una cascada inversa. [5]

Para el caso de ondas de gravedad, con interacciones de 4 ondas, tenemos el espectro:

$$E_k^g \sim g^{2/3} \zeta^{1/3} k^{-7/3} \quad (14)$$

Con  $\zeta$  el flujo de *wave action* (ratio de disipación)

## 1. El sensor capacitivo de la altura del agua.

Empezaremos por un lado diseñando un sensor capacitivo que nos permita medir los desplazamientos de la superficie libre respecto del valor en equilibrio con una alta resolución temporal y el mínimo error posible. Para esto nos basamos en el modelo propuesto por [7].

Este sensor consiste en un cable de cobre recubierto por un esmalte y rodeado por una determinada cantidad de líquido. El esmalte actúa como medio dieléctrico entre dos conductores de forma tal que el sistema completo actúa a modo de capacitor.

Se puede pensar al cable como un conjunto de segmentos de longitud  $dl$ , cada uno de los cuales agrega al circuito una inductancia en serie  $L'dl$  y una capacitancia en paralelo  $C'dl$ , incluyéndose si está sumergido ese segmento. Aquí:

$$C' = 2\pi\epsilon \ln^{-1} \left( \frac{r_2}{r_1} \right) \quad L' = \frac{\mu}{2\pi} \ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right) \quad (15)$$

Son la capacitancia e inductancia por unidad de longitud de un capacitor cilíndrico perfecto.

La inductancia en función de la longitud  $l$  sumergida puede calcularse de forma recursiva por lo dicho anteriormente, de forma que  $Z(l+dl) = j\omega L'dl + [Z(l)^{-1} + (j\omega C'dl)^{-1}]^{-1}$ , con la condición de que  $Z(0) = \infty$  ya que el circuito está desconectado.

Esto se puede resolver analíticamente, resultando en que:

$$Z(l) = j\sqrt{\frac{L'}{C'}} \tan \left( \omega\sqrt{L'C'}l - \pi/2 \right) \quad (16)$$

Si suponemos que  $l$  es lo suficientemente chica resulta que:

$$Z(l) \approx \frac{1}{j\omega C'l} + \mathcal{O} \left( \frac{1}{L'C'^2\omega^2 l^3} \right) \quad (17)$$

Con lo cual el circuito se comporta principalmente de forma capacitiva. Además, como  $r_2 = r_1 + e$  con  $e$  el espesor del esmalte, entonces  $C' \propto r_1/e$ .

## 2. Simulaciones del sensor y funcionamiento.

### El circuito

Para poder medir la altura del agua  $l$  vamos a usar un circuito resonante RLC, con el cable de cobre conectado en paralelo a otro capacitor, sujeto a una corriente alterna de frecuencia  $\omega$ . De esta forma tendremos la siguiente ecuación para el circuito:

$$V = \cos(\omega t) \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C(t)L} I \quad (18)$$

Con  $C(t) = C_0 + \Delta C(t)$ , tal que  $\Delta C(t)/C_0 \ll 1$ . Vale aclarar que  $C_0$  es la suma de la capacitancia extra con la capacitancia del cable para el estado de reposo.

Es posible mostrar que siempre y cuando el cociente sea lo suficientemente pequeño, la fase de la corriente será:

$$\tan(\phi) = -\frac{1}{R} \left[ \omega L - \frac{1}{\omega C_0} \right] - \frac{1}{R} \frac{\Delta C}{\omega C_0^2} + \mathcal{O} \left[ \left( \frac{\Delta C}{C_0} \right)^2 \right] \quad (19)$$

Y si elegimos la frecuencia resonante del circuito  $\omega = 1/\sqrt{LC_0}$  se puede traducir en que:

$$\phi = -Q_F \frac{\Delta C}{C_0} = -Q_F \frac{C'}{C_0} l(t) \quad Q_F = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C_0}} \quad (20)$$

Con lo cual la fase es proporcional a la altura de la superficie libre (respecto de la altura de equilibrio).

## Extracción de la fase

Para obtener la fase del circuito se puede medir la diferencia de potencial sobre la resistencia (proporcional a la corriente por la Ley de Ohm) y pasarla por un lock-in. El lock-in nos devolverá la amplitud y fase en función del tiempo respecto de una señal de referencia, que en este caso será la fuente de alterna. Para las simulaciones del circuito se emuló su funcionamiento en *Python* de forma digital:

```
from scipy.signal import butter, filtfilt

def lock_in(signal, omega, fs, cutoff_freq=1):
    ts = ts = np.arange(len(signal)) / fs
    ref_cos = np.cos(omega * ts)
    ref_sin = np.sin(omega * ts)

    in_phase = signal * ref_sin
    quadrature = signal * ref_cos

    b, a = butter_lowpass(cutoff_freq, fs)
    in_phase_filtered = filtfilt(b, a, in_phase)
    quadrature_filtered = filtfilt(b, a, quadrature)

    A_t = np.sqrt(in_phase_filtered**2 + quadrature_filtered**2)
    phi_t_extracted = np.arctan2(quadrature_filtered, in_phase_filtered)

    return A_t, phi_t_extracted

def butter_lowpass(cutoff, fs, order=4):
    nyquist = 0.5 * fs
    normal_cutoff = cutoff / nyquist
    b, a = butter(order, normal_cutoff, btype='low', analog=False)
    return b, a
```

A modo sumario, el funcionamiento radica en multiplicar (o mixear) la señal de interés (que debe estar montada sobre la moduladora) por la señal de referencia y la misma con una fase de  $\pi/2$ , luego se pasa por un filtro pasa bajos y se reconstruye la amplitud y la fase. En la práctica, el circuito pasa bajos actúa como integrador de forma que al multiplicar por la señal de interés aplicará la ortogonalidad de las funciones sinusoidales con distinta frecuencia, quedando solo la componente con la deseada (también llamada homodina, a diferencia de las no deseadas, que se llaman heterodinas). Al mismo tiempo, al llevarse la señal a frecuencias más altas en el espacio de Fourier (por convolucionar con la señal de referencia) disminuirá el ruido.

Un aspecto clave para el correcto funcionamiento será elegir de forma adecuada la frecuencia de corte del filtro pasabajos, de forma tal que integre por suficiente tiempo como para deshacerse del ruido pero no tanto que se pierda resolución en la señal. Es por esto que debe estar entre la frecuencia moduladora  $\omega_r$  y la de la señal  $\omega_s$ , que además debe ser lo suficientemente lenta para que entren varios ciclos de la moduladora en la misma:

$$\omega_{\text{sampleo}} > \omega_r > \omega_{\text{cut-off}} > \omega_s \quad (21)$$

La implementación en código se puso a prueba de la siguiente forma:

```
omega_ref = 100
omega_sig = 1
A = 1

def phi(t):
```

```

return A * np.sin(omega_sig * t)

ts = np.linspace(0, 10, 10000)
signal = np.sin(omega_ref * ts + phi(ts))

extracted_A, extracted_phi = lock_in(signal, omega_ref, 1/(ts[1]-ts[0]))

```

Y efectivamente funciona de la manera deseada.

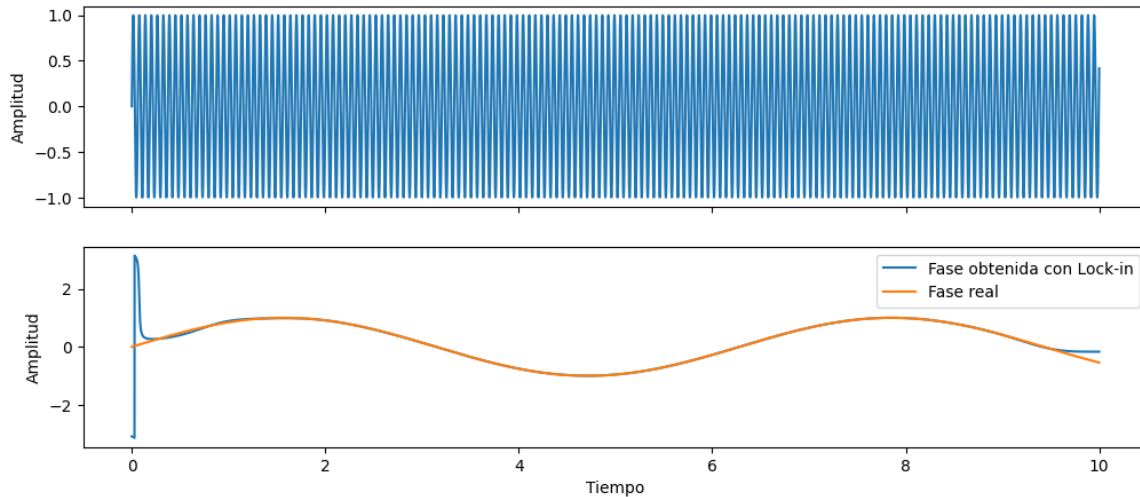


Figura 1: Comparación de fase extraída con lock-in y original para una modulación sinusoidal de la fase.

## La simulación

Para estudiar el comportamiento del circuito se simuló mediante *Python*, resolviendo la ecuación diferencial con *Odeint* de *Scipy.integrate* para distintos parámetros y  $l(t)$ . El código final que toma la lista de parámetros y la función de alturas en función del tiempo es:

```

from scipy.integrate import odeint

def measured_l(ts, l, C0, C, R, L, V=5, cutoff_freq=1):
    omega = 1 / np.sqrt(C0 * L)
    Q = (1 / R) * np.sqrt(L / C0)

    def C_(t):
        return C0 + C * l(t)

    def dXdt(X, t):
        i, didt = X
        didt2 = V * np.cos(omega * t) - R / L * didt - 1 / (C_(t) * L) * i
        return [didt, didt2]

    y0 = [0, 0]
    sol = odeint(dXdt, y0, ts)
    current = sol[:, 0]

    _, phi_t_extracted = lock_in(current, omega, fs = 1 / (ts[1] - ts[0]),
                                  cutoff_freq=cutoff_freq)

    unwrapped = np.unwrap(phi_t_extracted)
    reconstructed_heights = -C0 * unwrapped / (Q * C)

    return reconstructed_heights

```

Devolviendo al final la lista de las alturas reconstruidas. A continuación algunas de las pruebas realizadas.



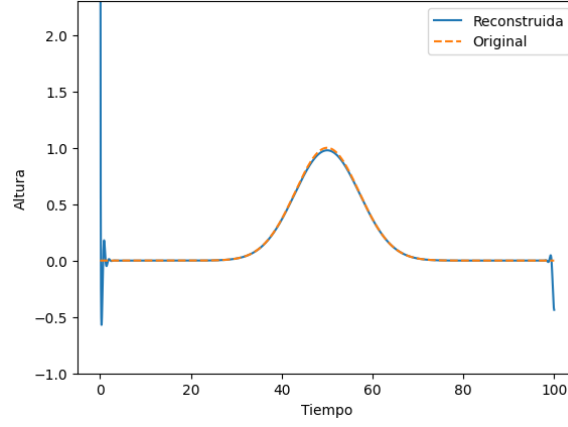


Figura 2: Reconstrucción de alturas para una  $l(t)$  Gaussiana.

En primer lugar para una  $l(t)$  Gaussiana se reconstruye muy fielmente la altura original con el método propuesto. Al inicio los artefactos son por las condiciones iniciales transitorias del sistema, hasta que alcanza un estacionario.

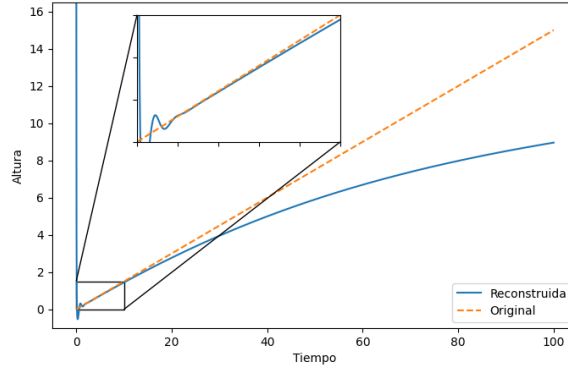


Figura 3: Barrido lineal de alturas.

Luego con una lineal para estudiar sus límites, podemos ver que para  $l$ 's bajos se comporta linealmente, pero luego satura. Esto será cuando  $C_0 \sim C'l$ . Con lo cual si hacemos más pequeño  $C'$  mejorará el rango de funcionamiento, aunque disminuirá la sensibilidad, ya que es proporcional al error en fase del lock-in (que está fijo) por  $C'$ .

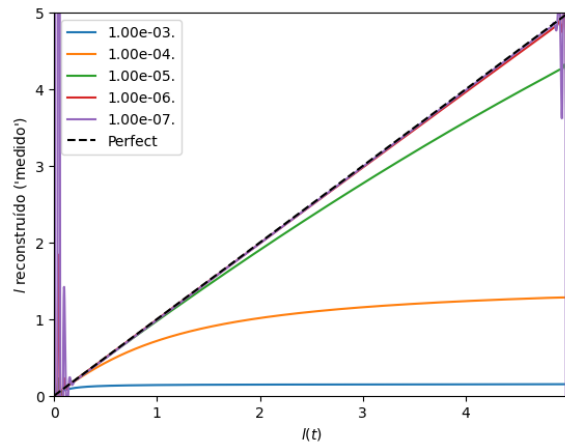


Figura 4: Comparación para el mismo barrido con distintos  $C'$ .

## Valores reales

Siguiendo los valores usados por [7] se propone usar  $R \sim 1 \text{ k}\Omega$ ,  $L = 22 \text{ mH}$ ,  $C_0 = 250 \text{ pF}$  y  $C' \sim 10 \text{ pF/mm}$ . Estos parámetros dan una frecuencia  $\omega \sim 10^5 \text{ Hz}$  o  $f \approx 60 \text{ kHz}$ . Analizamos el comportamiento para una señal  $l(t)$  de frecuencia  $\omega = 1 \text{ kHz}$  y amplitud  $1 \text{ mm}$ .

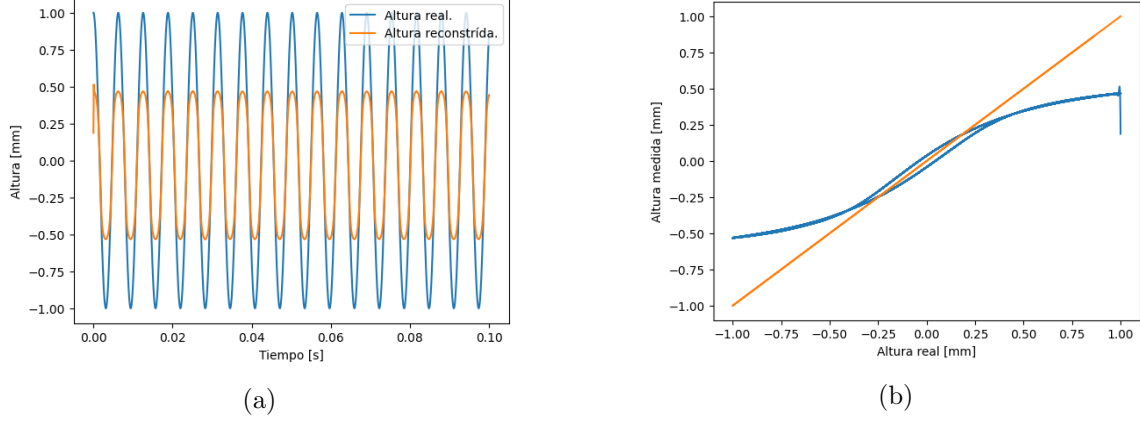


Figura 5: Barrido de alturas. A la izquierda la evolución temporal y a la derecha la altura reconstruída contra la original.

Podemos notar que satura cerca de  $0.25 \text{ mm}$  y que a esta frecuencia de señal hay histéresis. Si aumentamos  $C_0$ , suponiendo  $C'$  fija, podemos conseguir aumentar el rango de validez hasta  $10 \text{ mm}$  y evitar la histéresis a  $100 \text{ Hz}$ , aunque querríamos frecuencias más altas. Esto se puede lograr también disminuyendo  $Q_F$  al disminuir  $L$  o aumentar  $R$  por ejemplo.

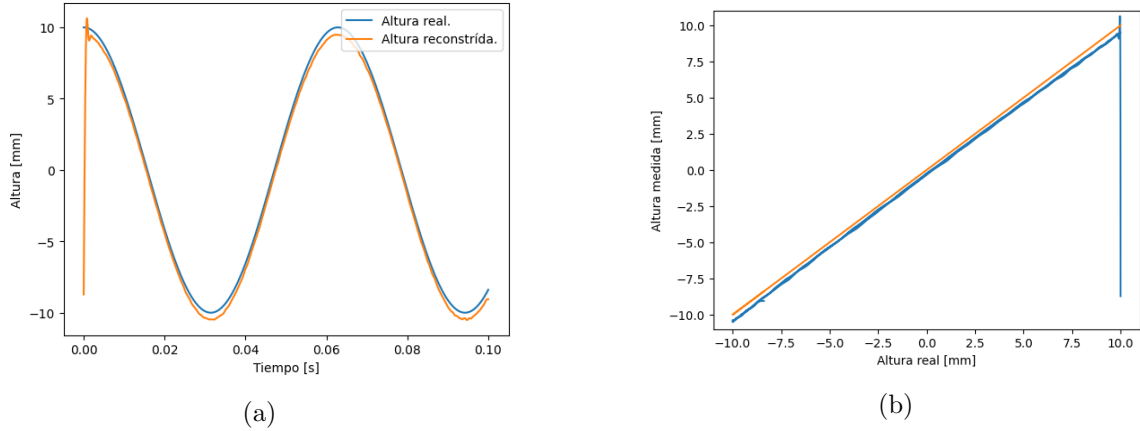
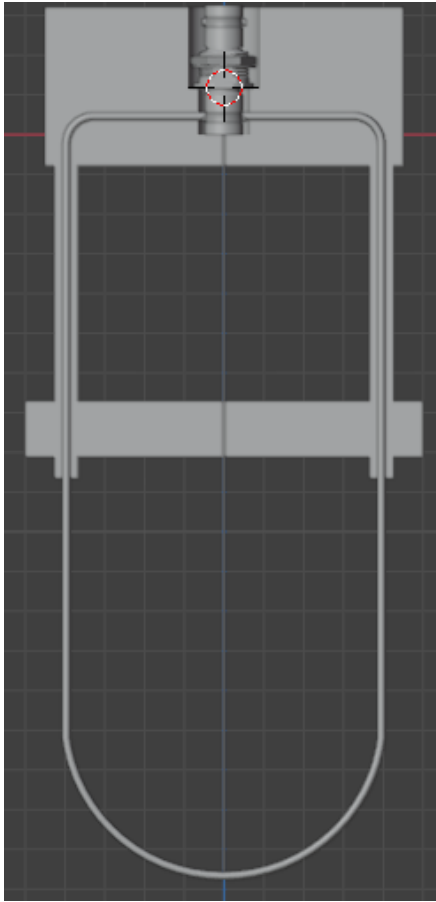


Figura 6: Barrido de alturas. A la izquierda la evolución temporal y a la derecha la altura reconstruída contra la original.

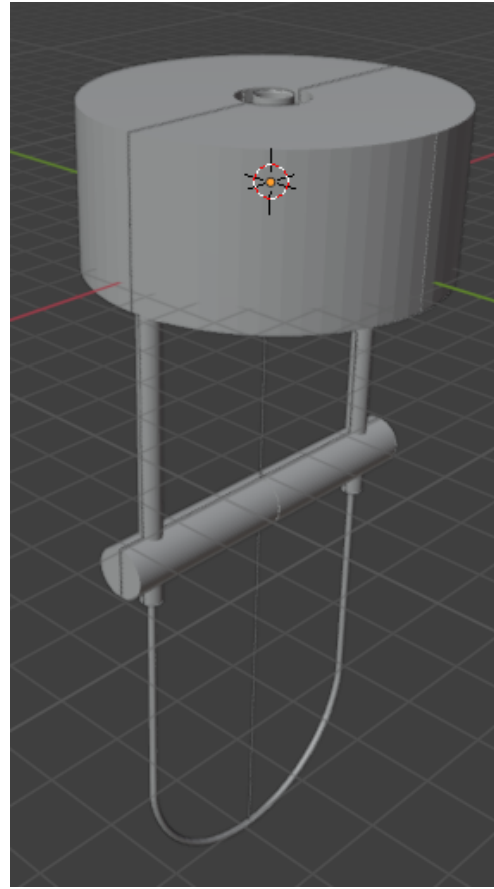
Esto último es para  $C' = 3 \times 10^{-8} \text{ F/m}$  y  $C_0 = 160 \times 10^{-10} \text{ F}$ . Habrá que probar experimentalmente qué rango de valores funcionan mejor y si hay más juego antes de que sature.

### 3. Fabricación del sensor.

Por último se empezó con el diseño del sensor. Éste constará de una carcasa externa para integridad estructural impresa en 3D, diseñada con Blender como se muestra a continuación (primer prototipo).



(a)



(b)

Figura 7: Dos vistas del prototipo inicial. Entero y corte.

Se suelda el cable de cobre a un conector BNC hembra dentro de la carcasa. Además se coloca soldado cable de acero a la carcasa exterior del BNC (a Tierra) que se conectan al alambre por abajo (aislado eléctricamente).

## 1. Diseño del sensor.

Reducimos el sensor para que no sea tan ancho y más compacto. La nueva versión es la siguiente:

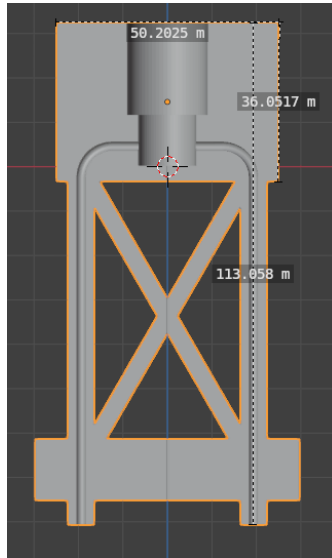


Figura 8: Nuevo modelo, las medidas que dicen metros son en realidad milímetros.

Además le agregamos una cruz para mejorar la integridad estructural, revisar modelo de Truss, tal vez se puede optimizar aún más.

Se mandaron a imprimir dos copias para empezar a probar su funcionamiento.

## Bibliografía

---

- [1] Pijush K. Kundu. *Fluid Mechanics*. Elsevier Science & Technology, San Diego, 5th ed edition, 2014.
- [2] Luc Deike. *Etudes expérimentales et numériques de la turbulence d'ondes de surface*. Doctoral Thesis, Université Paris Diderot - Paris 7, École Doctorale Matière Condensée et Interfaces, Laboratoire Matière et Systèmes Complexe, Paris, Francia, September 2013.
- [3] Eric Falcon and Nicolas Mordant. Experiments in Surface Gravity–Capillary Wave Turbulence. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 54(1):1–25, January 2022.
- [4] V. E. Zakharov and N. N. Filonenko. Energy Spectrum for Stochastic Oscillations of the Surface of a Liquid. *Soviet Physics Doklady*, 11(10):881, April 1967.
- [5] Sergey Nazarenko. *Wave Turbulence*, volume 825 of *Lecture Notes in Physics*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2011.
- [6] V. E. Zakharov and N. N. Filonenko. Weak turbulence of capillary waves. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 8(5):37–40, 1971.
- [7] Gordillo Zavaleta. *Non-Propagating Hydrodynamic Solitons in a Quasi-One Dimensional Free Surface Subject to Vertical Vibrations*. Doctoral Thesis, Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Departamento de Física, Santiago de Chile, Chile, 2012.