



# Invariancia conforme en turbulencia de ondas gravito-capilares

Manuel Noseda

Tesis de Licenciatura en Ciencias Físicas

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

Marzo de 2023



TEMA: Invariancia conforme en turbulencia de ondas gravito-capilares

ALUMNO: Manuel Noseda

L.U. N°: 488/17

LUGAR DE TRABAJO: Laboratorio de Turbulencia Geofísica  
Instituto de Fisica Interdisciplinaria y Aplicada  
INFINA UBA-CONICET  
Departamento de Física, FCEN, UBA

DIRECTOR DEL TRABAJO: Dr. Pablo Cobelli

FECHA DE INICIACION: Marzo de 2022

FECHA DE FINALIZACION: Marzo de 2023

FECHA DE EXAMEN: Marzo de 2023

INFORME FINAL APROBADO POR:

---

Autor

---

Director

---

Codirector

---

Profesor de Tesis de Licenciatura

---

Jurado

---

Jurado

---

Jurado





## Resumen

En esta Tesis se presenta un estudio experimental de la turbulencia de ondas gravitocapilares, tendiente a determinar si este sistema débilmente no lineal presenta invariancia conforme. Para evaluar dicha hipótesis, se trabajo con las isolíneas de altura nula (i.e., igual a la altura en reposo) de la superficie libre del fluido en el régimen de turbulencia desarrollada. De esta forma, asociamos dichas líneas con evoluciones estocásticas de Schramm-Loewner ( $SLE_\kappa$ ); una familia de curvas que presentan dicha invariancia dependiente de un único parámetro, la difusividad  $\kappa$ . Esta simetría subyacente tiene una importancia fundamental dado que implica la imposición de una condición más fuerte sobre los parámetros libres de los modelos teóricos que simplemente la invariancia de escala. Además esta teoría permite clasificar a los fenómenos estudiados en clases de universalidad, lo que es útil al intentar poner en pie de igualdad sistemas dinámicos que *a priori* podrían resultar disímiles.

A fin de determinar experimentalmente la altura de la superficie del fluido se implementó en el laboratorio la técnica de Fotografía de Luz Difusa (Diffusing Light Photography o DLP) con el objetivo de mejorar la resolución en la detección de las isolíneas, cuestión de vital importancia dado que las SLEs son, idealmente, curvas fractales. Además se desarrollaron todos los códigos de procesado y análisis de datos, así como aquellos necesarios para testear las predicciones de la teoría.

Se concluyó que se pudo encontrar compatibilidad entre las  $SLE_\kappa$  y las isolíneas del campo de altura del régimen turbulento, con una difusividad en un rango de  $\kappa = 2.50 - 3.20$ , ubicando al régimen de turbulencia de ondas en una familia de fenómenos cuyas isolíneas muestran una complejidad mayor a la de *spin-glasses* e isolíneas de altura en hojas de grafeno y menores a las de la turbulencia rotante o bidimensional.



## **Agradecimientos**

En primer lugar quiero agradecer a mi director, Pablo Cobelli. Todo lo que aprendí durante este año fue gracias a su conocimiento y su infinita capacidad para transmitirlo. Honestamente creo haber aprendido más en esta Tesis que durante todo el resto de la carrera. Gracias por toda la paciencia y la humanidad. También quiero agradecer a todo el FLiP por haberme dado un lugar y haberme hecho sentir cómodo.

Gracias Guada y Miru, sin quiénes no hubiese llegado a estar ni en los escalones de Física 1. Me siento muy feliz de haber podido compartir con ustedes todo lo que fueron estos seis años, y en particular gracias por su apoyo durante la odisea que fue este último. Sin ustedes realmente no habría Tesis que presentar.

A mis amigos de la vida, gracias por acompañarme durante esta etapa. Principalmente a Joaco, cuya amistad excede los agradecimientos que puedo poner en palabras. Gracias a todos los que se hicieron presentes durante este año, sean vecinos, amigos de amigos, familia. Gracias Ale por recibirme en tu casa durante todos estos años. Todos me dieron una mano enorme.

Gracias a Carlos Rossi por escucharme y por la orientación durante todo este tiempo.

Gracias Lorem por estos ocho años juntos. Nos conocimos cuando ni siquiera tenía idea de qué carrera iba a seguir y fuiste fundamental para ser quien soy hoy. Gracias por todo el apoyo en los momentos complicados y por tu infinita seguridad cuando capaz yo no encontraba ninguna.

Gracias a mi familia por acompañarme en mi elección de carrera y el esfuerzo económico que hicieron durante todos estos años para que yo pueda estar acá. Infinitas gracias a mi viejo y a mi hermana. Y a mi abuela Nilda, que no puede faltar acá!

Gracias, ma.



---

# ÍNDICE GENERAL

---

<b>1. Motivación</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes de CI en turbulencia . . . . .	6
1.2. Organización . . . . .	7
<b>2. Marco teórico</b>	<b>9</b>
2.1. Teoría de turbulencia . . . . .	9
2.1.1. Turbulencia isótropa y homogénea . . . . .	10
2.1.1.1. Ecuaciones de Navier-Stokes . . . . .	10
2.1.1.2. Teoría de Kolmogorov de 1941 . . . . .	10
2.1.2. Turbulencia de ondas . . . . .	14
2.1.2.1. Espectro de energía de Kolmogorov-Zakharov . . . . .	15
2.2. Teoría de SLE . . . . .	19
2.2.1. Ecuación de Loewner . . . . .	19
2.2.2. Evoluciones estocásticas de Loewner . . . . .	21
2.2.3. Propiedades de las SLE <sub><math>\kappa</math></sub> . . . . .	22
2.2.3.1. Dimensión fractal . . . . .	24
2.2.3.2. Desviación estándar del forzado . . . . .	26
2.2.3.3. Probabilidad de pasaje a izquierda . . . . .	26
2.2.3.4. Ángulo de giro (winding angle) . . . . .	27
<b>3. Desarrollo experimental</b>	<b>31</b>
3.1. Teoría de DLP . . . . .	32
3.2. Implementación de la técnica en el laboratorio . . . . .	34
3.2.1. Medición de la longitud de transporte . . . . .	34
3.2.2. Calibración . . . . .	36
3.3. Montaje . . . . .	38

<b>4. Resultados</b>	<b>41</b>
4.1. Obtención del campo de alturas . . . . .	41
4.2. Espectro de energía . . . . .	43
4.3. Isolíneas . . . . .	44
4.4. Predicciones de la teoría de SLE . . . . .	46
4.4.1. Test directo de SLE . . . . .	46
4.4.2. Winding angle . . . . .	47
4.4.3. Probabilidad de pasaje a izquierda . . . . .	50
4.4.4. Dimensión fractal y relación de Duplantier-Schramm . . . . .	52
4.5. Resumen de los resultados . . . . .	54
<b>5. Conclusiones</b>	<b>57</b>
<b>A. Algoritmo de <i>zipper</i></b>	<b>59</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>61</b>

# CAPÍTULO 1

---

## MOTIVACIÓN

---

La turbulencia es un fenómeno físico que ha atraído el interés de científicos e ingenieros durante siglos. Está caracterizado por el movimiento caótico e impredecible que ocurre en los fluidos, así como por cambios rápidos e irregulares en la velocidad, la presión y otras propiedades de estos sistemas. Quien acuñó el término “turbulencia” para referirse a este fenómeno fue Leonardo Da Vinci, quien quizás también realizó la primera ilustración del mismo alrededor del año 1508, en donde plasma en papel la caída de una corriente de agua desde una compuerta a un estanque. En este dibujo capta la esencia caótica de la turbulencia (ver Fig. 1.1).

Este fenómeno está presente en una gran variedad de sistemas en la naturaleza. Por ejemplo, la turbulencia que ocurre en la atmósfera es un factor indispensable en el entendimiento de ráfagas de viento, remolinos y la formación de nubes, además de tener importantes implicaciones prácticas sobre el rendimiento de las aeronaves, el diseño de los edificios y la precisión de las observaciones astronómicas [1] [2] [3] [4]. La turbulencia presente en los océanos está vinculada también a una variedad de fenómenos como las corrientes oceánicas, las olas y los vórtices, y tiene implicaciones importantes para la distribución del calor, los nutrientes y los contaminantes en el océano [5]. Por lo tanto, comprender la turbulencia oceánica es fundamental para predecir y controlar los impactos de las actividades humanas en el medio ambiente marino, directamente asociadas al cambio climático y la contaminación de los océanos. Otro ejemplo tiene que ver con la turbulencia magnetohidrodinámica asociada al movimiento caótico de partículas cargadas y campos magnéticos, y cuyo entendimiento puede tener un impacto significativo en la meteorología espacial y el rendimiento de las naves espaciales y los satélites [6] [7]. No menos importante resulta su aplicación en la comprensión de la fenomenología que ocurre en el núcleo terrestre, responsable por la generación del campo magnético terrestre, la cual además es fundamental para el estudio del dínamo terrestre y su



Figura 1.1: Ilustración de Leonardo Da Vinci de la caída de una corriente de agua desde una compuerta a un estanque (circa 1508).

evolución temporal a largo plazo [8].

La turbulencia es un fenómeno cuyo entendimiento se profundizó enormemente desde mediados del siglo pasado con los trabajos de Kolmogorov de 1941 [9]. En ellos obtuvo un primer marco teórico analítico para describir este fenómeno. En particular profundizó la idea de la cascada de energía de Richardson, en donde la energía se transfiere desde escalas más grandes a escalas menores hasta disiparse en forma de calor [10], con el objetivo de explicar la riquezapectral característica de este fenómeno. Kolmogorov trabajó fundamentalmente sobre lo que se denomina turbulencia isótropa y homogénea, en donde justamente se asume la isotropía y la homogeneidad del flujo en un sentido estadístico, y desde entonces una gran cantidad de autores han contribuido tanto en lo experimental, lo teórico y lo numérico y se ha adaptado este marco teórico a otras formas de turbulencia (rotante, magnetohidrodinámica, etc.).

La turbulencia isótropa y homogénea (también llamada comúnmente turbulencia de vórtices o *eddy turbulence*) es la que más interés atrajo por parte de la comunidad científica. En este régimen los actores principales son, como lo dice su nombre, vórtices. Por otro lado, se puede encontrar en la naturaleza otro régimen en donde las estructuras dominantes son ondas: la turbulencia de ondas o *wave turbulence*. De acuerdo con Galtier [11] se puede situar el comienzo del estudio de este fenómeno a partir de 1980 con los trabajos de oceanógrafos como Phillips [12]. Desde 1950 y hasta ese momento las ondas oceánicas eran tratadas esencialmente como lineales, con sus efectos no lineales restringidos a determinados fenómenos (como la distorsión periódica descripta por Stokes en 1847). Esto limitaba las posibilidades a la hora de una teoría analítica debido a la naturaleza no lineal involucrada en los fenómenos de transferencia de energía característicos de la turbulencia. Durante la década de 1960 se

dieron avances fundamentales por parte de Phillips (1960), Longuet-Higgins (1962) y Hasselmann (1962) sobre las interacciones resonantes que explican el mecanismo fundamental mediante el cual ocurre la redistribución de energía (inicialmente presente en ciertos modos); así también Benney (1962) desarrolló el método de múltiples escalas, una herramienta matemática para el análisis de paquetes de ondas dispersivos con dos escalas temporales involucradas. Paralelamente, utilizando el método conocido como aproximación de fase aleatoria se obtuvieron las primeras ecuaciones cinéticas en turbulencia de ondas en plasmas por Kadtke y Petviashvili (1963), luego adaptadas a una forma moderna por Zakharov (1965, 1967) y Filonenko (1966, 1967).

Se puede hallar el régimen de turbulencia de ondas en una gran variedad de sistemas. Sin ser una lista exhaustiva de ejemplos, se encuentran las ondas superficiales de gravedad-capilaridad (protagonistas de este trabajo) [13]; ondas de Alfvén, relevantes en turbulencia solar y del medio interestelar [14]; ondas de Rossby, relevantes para el estudio de la evolución del clima [15]; ondas en condensados de Bose-Einstein, cuyo estudio es relevante, entre otras cuestiones, dado que dan información sobre cómo se generan y propagan las ondas en entornos astrofísicos como el medio interestelar [16]. Esto ilustra brevemente la variedad de sistemas en donde es de suma importancia el entendimiento de este régimen.

Inicialmente el estudio experimental de la turbulencia de ondas se limitaba a el análisis temporal de un único punto utilizando sondas capacitivas de alambre [13]. Aunque estas técnicas siguen siendo muy utilizadas debido a su alta resolución temporal, facilidad de implementación y falta de limitaciones sobre cuán escarpada es la superficie, son técnicas invasivas y resuelven un único punto. Otras técnicas (ya no utilizadas) son las que hacen uso de imágenes de sombras o *shadowgraph images* [17] [18]; estas permitían resolución espacial de más de un punto ya que se utilizaban cámaras, sin embargo venían acompañadas de problemas de precisión asociados a las cáusticas. Lo que permitió un gran avance en el entendimiento de este fenómeno fue el desarrollo de nuevas técnicas ópticas de medición no invasivas. Estas permitieron obtener datos espaciotemporales en el laboratorio sin estos problemas asociados. Entre ellas se encuentra la Profilometría de Fourier (*Fourier Transform Profilometry* o FTP), la cual consiste en proyectar una grilla sobre el fluido y medir su deformación [19]. Wright introduce a su vez la Fotografía de Luz Difusa o DLP (*Diffusing Light Photography*), en donde se mide la altura del fluido en función de la intensidad saliente a través de un medio difusor [20]. Estas técnicas (así como el *Schlieren* sintético [21] o la Velocimetría de Imágenes de Partículas con múltiples cámaras [22] [23]) han generado nuevo conocimiento sobre fenómenos no comprendidos por la teoría, como la generación de estructuras coherentes [24].

El otro concepto clave de esta Tesis es el de invariancia conforme. Como su nombre lo dice, esta simetría está asociada a la invariancia que presentan ciertos sistemas a transformaciones conformes. Estas son transformaciones que conservan los ángulos pero pueden rescalar el espacio de manera local. Quizá la transformación conforme más familiar sea la proyección de Mercator para la elaboración de mapas. La misma consiste en la proyección de la superficie terrestre a una superficie cilíndrica. Esta ganó gran popularidad en el Siglo XVI debido a su gran utilidad para la navegación ya que proyecta los meridianos y paralelos de forma perpendicular (es decir, conserva los ángulos de las curvas trazadas en el globo), facilitando el trazado de

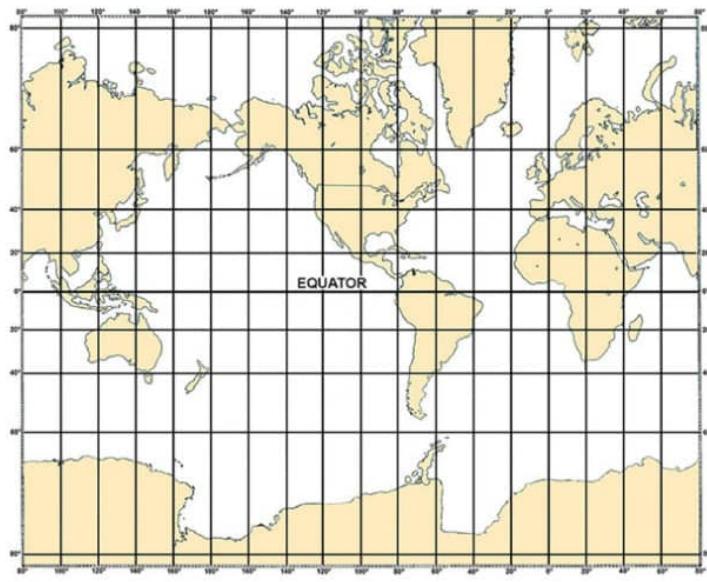
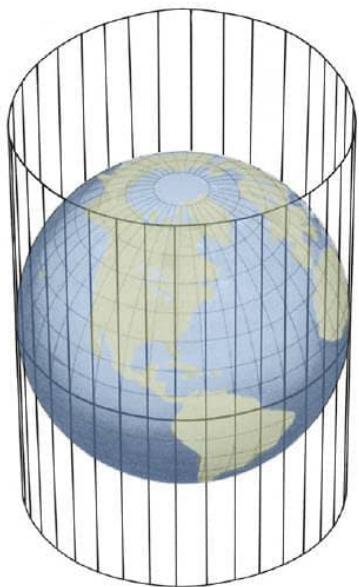
los rumbos mediante el uso de herramientas accesibles como reglas y transportadores, entre otras. No obstante es sabido que esta distorsiona los tamaños de las regiones, fenómeno que se acentúa en las regiones más alejadas del Ecuador. La construcción de esta proyección se muestra en la Fig. 1.2a, mientras que la Fig. 1.2b ilustra el fenómeno de la distorsión tomando como referencia los tamaños reales de los países y su comparación al utilizar la proyección de Mercator.

Dentro de las transformaciones conformes se encuentran las transformaciones uniformes de escala, las cuales aplicadas a un espacio modifican las distancias del mismo por un único factor. Debido a que las conformes tienen la capacidad de modificar las longitudes localmente, una transformación conforme no necesariamente implica una transformación de escala. En la Fig. 1.3 se ilustra esta diferencia.

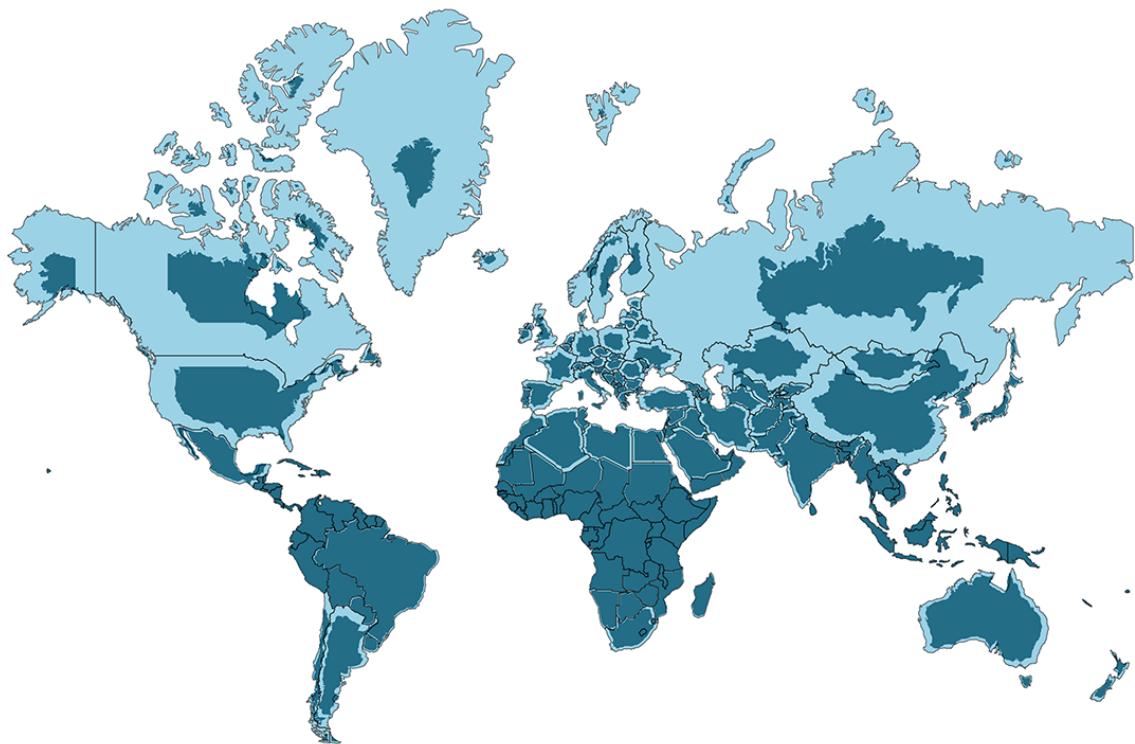
Históricamente se consideró que la simetría conforme era esencialmente, a todo motivo práctico, simetría de escala. Aunque matemáticamente no sean idénticas, se argumentó que la utilidad de esta propiedad en un sistema se limitaba a la de la invariancia de escala, cuya aplicación más notable está asociada a la del grupo de renormalización (en donde se aplican sucesivas transformaciones de escala para extraer información del sistema). Esta herramienta es fundamental en el entendimiento de los sistemas complejos, mediante la cual se puede, por ejemplo, acceder a relaciones entre los exponentes críticos de un sistema. Sin embargo, en ciertos casos la hipótesis de invariancia de escala, a pesar de dar una serie de relaciones entre los mismos, no es suficiente para determinarlos únicamente [25]. Aquí yace una de las aplicaciones importantes de la invariancia conforme en los sistemas complejos, ya que las restricciones impuestas por una teoría invariante conforme determinan únicamente el valor de los exponentes críticos. Se pueden encontrar otras aplicaciones en física de partículas [?] [?], cosmología [?] y ciertas aplicaciones en biología [?], por nombras algunas.

Paralelamente se produjo un cambio paradigmático en el estudio de sistemas con un gran número de grados de libertad. Sobre la teoría de 1921 de Loewner, Schramm encuentra una familia de evoluciones estocásticas (llamadas “Stochastic Loewner Evolutions”, “Schramm Loewner Evolutions”, a las cuales se suele hacer referencia con sus siglas, SLE). Las mismas consisten en una familia de curvas dependientes de un único parámetro que presentan invariancia conforme [26]. Estas evoluciones fueron halladas en una gran variedad de sistemas [27] [28] [29] [30], y por ello habilitan una herramienta fundamental de comunicación entre distintas áreas de la física.

El objetivo de esta Tesis consistió en **encontrar experimentalmente invariancia conforme en un régimen de turbulencia de ondas** utilizando las herramientas de la teoría de SLE. Para ello se implementó en el laboratorio la técnica de medición de la superficie de un fluido “*Diffusing Light Photography*” (DLP) para obtener información de la superficie del fluido de manera local (debido a la naturaleza fractal de esta familia de curvas). También se desarrollaron todos los códigos de procesado y análisis correspondientes.



(a)



(b)

Figura 1.2: (a) Esquema que ilustra la construcción de la proyección de Mercator. (b) Comparación de los tamaños de los países reales y su tamaño al ser proyectados con Mercator.

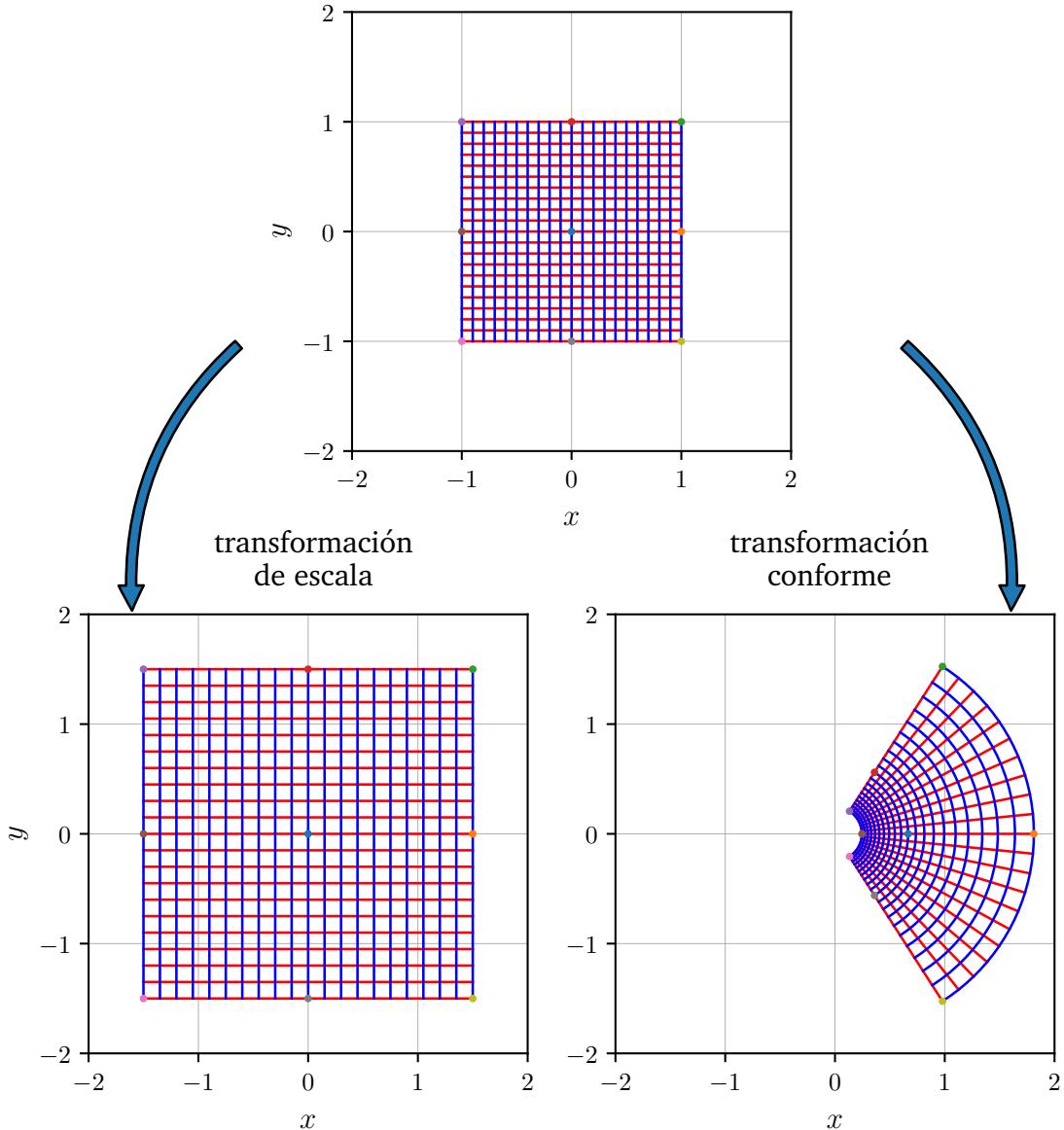


Figura 1.3: Comparativa esquemática entre una transformación de escala (a izquierda) y una conforme (a derecha). Además de las grillas que permiten visualizar los efectos de las transformaciones individuales, se han dispuesto marcadores sobre el contorno original (en la forma de puntos de colores), que permiten observar cómo se *mapean* dichos puntos ante cada tipo de transformación.

## 1.1. Antecedentes de CI en turbulencia

La idea detrás de esta Sección es presentar brevemente el trabajo realizado por otros autores en investigaciones similares y la relevancia que sus trabajos han adquirido, los que además han proliferado en los últimos quince años. Utilizando la teoría de las SLE se han obtenido importantes resultados en una gran variedad de sistemas. El resultado más relevante para esta Tesis (y quizás también dentro de la temática) consiste en el trabajo publicado por D. Bernard, G. Boffeta, A. Celani y G. Falkovich (BBCF) en 2006, en donde los autores reportan haber encontrado invariancia conforme en simulaciones numéricas de turbulencia bidimensional [27]. Estos autores sentaron un precedente, generando una serie de herramientas numéricas para

buscar invariancia conforme en sistemas físicos.

Los autores de este trabajo continuaron aplicando la metodología desarrollada a distintos sistemas. Bernard en 2007 junto a otros autores encuentra una posible compatibilidad entre *CI* y *spin glasses* [38]. Boffeta en 2020 publica junto a Puggioni haber encontrado esta propiedad en turbulencia bidimensional compresible [39]. Finalmente, vale mencionar el trabajo realizado por Stefanus *et. al.*, en donde a pesar de no haber encontrado compatibilidad con estas curvas en un sistema de turbulencia bidimensional compresible, su detallada documentación fue una herramienta de gran valor durante esta Tesis [40].

E. Bogomolny *et. al.* en 2007 publican un trabajo en donde encuentran esta propiedad en un sistema de funciones de onda aleatorias [41]. La similitud de las hipótesis de la teoría de turbulencia de ondas y las del sistema de Bogomolny construyen una fuerte sospecha de que el primero podría llegar a presentar invariancia conforme.

Paralelamente existe una gran cantidad de trabajos sobre este tema en otras áreas de la Física: los trabajos de Saberi en 2008 y 2009 encuentran CI en la superficie del  $\text{WO}_3$  [42], en cristales de Kardar-Parisi-Zhang [42] y en fronteras de avalancha en modelos de pilas de arena [43]. Stevenson la encuentra en los clústers de Ising cerca de la temperatura crítica [44]. Dar-yaei la encuentra en simulaciones de cuencas hidrográficas [29]. Varios resultados muestran esta propiedad en una gran cantidad de sistemas en percolación [28] [45] [46]. Esto da lugar a la pregunta: qué similaridades se puede encontrar en sistemas que a priori parecieran no estar relacionados (debido a que además la teoría de Schramm y Loewner permite clasificar a los sistemas en clases de universalidad de un único parámetro).

## 1.2. Organización

Esta Tesis está organizada de la siguiente manera: en el Capítulo 2 se proporciona el marco teórico de la Tesis, organizado en dos partes. La primera de ellas trata de los regímenes de turbulencia isótropa y homogénea y de turbulencia de ondas. La segunda parte presenta brevemente los resultados más destacados de la teoría de  $\text{SLE}_\kappa$ , así como las predicciones que de ella se desprenden y que serán utilizadas para evaluar la presencia de dicha propiedad en nuestro sistema. La teoría e implementación de la técnica de medición *Diffusing Light Photography* (o DLP), así como el procedimiento experimental utilizado para constatar que se cumplen las aproximaciones de esta teoría ocupan el Capítulo 3. Asimismo, se detalla también allí el montaje experimental utilizado para tomar las mediciones que forman el núcleo de esta Tesis. En el Capítulo 4 se presentan y discuten los resultados obtenidos, mientras que el Capítulo 5 detallan las conclusiones del presente trabajo.



# CAPÍTULO 2

---

## MARCO TEÓRICO

---

En este Capítulo se presenta el marco teórico que fundamenta esta investigación. Este está compuesto por dos Secciones: en la primera se detallan los conceptos fundamentales de la teoría de la turbulencia isótropa y homogénea y la de turbulencia de ondas; en la segunda se detallan los conceptos fundamentales de la teoría de Evoluciones Estocásticas de Loewner (SLE).

### 2.1. Teoría de turbulencia

La turbulencia se define como el movimiento caótico, impredecible e irregular de un fluido (como el aire o el agua) caracterizado por fluctuaciones en la velocidad, la presión y la densidad. En un flujo turbulento, el fluido se mueve en un patrón irregular de vórtices, remolinos y otras perturbaciones que pueden causar mezcla, difusión y disipación de energía.

En esta Sección se detallan los elementos centrales de la teoría de la turbulencia. En la Sección 2.1 se explica lo asociado a la teoría de turbulencia isótropa y homogénea. En la Sección 2.2 se utilizan argumentos dimensionales para obtener la predicción teórica para el espectro de energía para turbulencia de ondas.

### 2.1.1. Turbulencia isótropa y homogénea

#### 2.1.1.1. Ecuaciones de Navier-Stokes

Las ecuaciones de Navier-Stokes son las que rigen la dinámica de cualquier flujo

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (\text{para flujos incompresibles}) \quad (2.2)$$

donde  $\mathbf{u}$  es el campo de velocidades,  $\rho$  es la densidad (para flujos incompresibles se considera constante),  $p$  es el campo de presiones,  $\nu$  es la viscosidad cinemática y  $\mathbf{f}$  las fuerzas externas.

Al adimensionalizar estas ecuaciones, utilizando la condición de incompresibilidad y asumiendo que las fuerzas externas son nulas, se pueden reescribir como

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{\nu}{L U} \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.4)$$

donde  $L$  es una longitud característica del sistema (con la que se adimensionalizan las derivadas espaciales) y  $U$  es una velocidad característica (con la que se adimensionalizan las velocidades). La escala temporal característica se obtiene como  $T = L/U$ . Esta ecuación depende de un único parámetro adimensional,  $Re = \frac{UL}{\nu} \sim \frac{|\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}|}{|\nu \nabla^2 \mathbf{u}|}$ , llamado *número de Reynolds*.

Se pueden distinguir dos regímenes cualitativamente distintos: para  $Re \ll 1 \rightarrow \nu \gg UL$  domina la viscosidad en el flujo, por lo que a este régimen se lo denomina *laminar* debido a que es un flujo ordenado (que en los casos estratificados se asemeja a una serie de láminas de fluido encimadas). Este régimen es caracterizado por una variación espaciotemporal de  $\mathbf{u}$  suave. Para  $Re \gg 1$  domina la interacción no lineal entre las estructuras del flujo, y se denomina régimen *turbulento*. A medida que se transiciona a este régimen las simetrías espaciales y temporales del flujo, originalmente presentes en las ecuaciones de Navier-Stokes, se rompen [10]. En la Fig. 2.1 se muestra un esquema de la evolución del flujo a medida que se aumenta el número de Reynolds. Una vez que la turbulencia se encuentra completamente desarrollada se recuperan algunas simetrías (en un sentido estadístico), y podemos llamar turbulencia isótropa y homogénea dado que el estado caótico del fluido no varía su aspecto frente a traslaciones o rotaciones. Esto se desarrollará más detalladamente a lo largo de esta Sección.

#### 2.1.1.2. Teoría de Kolmogorov de 1941

Kolmogorov en 1941 publicó una serie de artículos fundacionales sobre la teoría de la turbulencia isótropa y homogénea. Los dos principales leyes obtenidas, verificadas experimentalmente numerosas veces, son la ley de los 2/3 y la ley de disipación finita de energía [9].

1. **Ley de los 2/3:** en un flujo turbulento con un  $Re \gg 1$ , el incremento de velocidad cuadrático medio entre dos puntos separados por una distancia  $l$  en esa dirección se

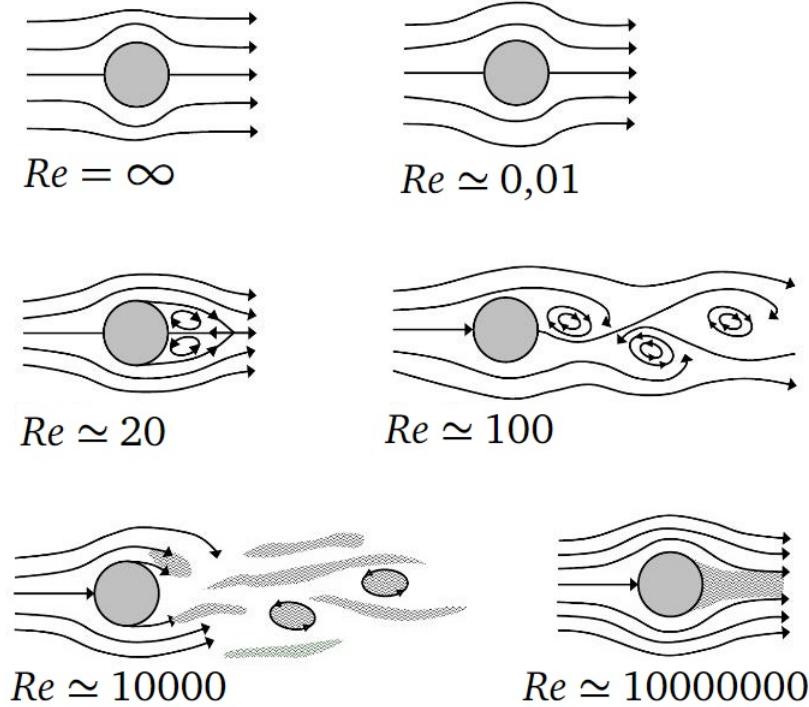


Figura 2.1: Esquema de la evolución del flujo a medida que se aumenta  $Re$ . En el primer caso el  $Re = \infty$  representa el caso de un flujo inviscido o ideal ( $\nu = 0$ ), que dado a que los elementos de fluido no interactúan entre sí de manera viscosa jamás se puede desarrollar un régimen turbulento.

comporta aproximadamente como una ley de potencias con exponente  $2/3$  de la distancia mencionada,  $\langle [\delta u_{\parallel}(l)]^2 \rangle = \langle [(\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{l}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})) \cdot \frac{\mathbf{l}}{l}]^2 \rangle \sim l^{2/3}$ . En el caso en donde se pueda asumir isotropía, esta cantidad dejará de depender de la dirección de  $\mathbf{l}$  y será únicamente función del módulo del incremento,  $l$ , por lo que  $\langle [\delta u(l)]^2 \rangle \sim l^{2/3}$ .

2. **Ley de disipación finita de energía:** si en un experimento se reduce la viscosidad  $\nu$  al mínimo sin variar el resto de los parámetros, el comportamiento de la disipación de energía por unidad de masa  $dE/dt = \varepsilon$  es compatible con un límite finito y positivo.

No obstante, la teoría de Kolmogorov requiere de ciertas hipótesis sobre el flujo,

1. **Hipótesis de universalidad:** en el límite de  $Re \rightarrow \infty$  todas las simetrías posibles de la ecuación de Navier-Stokes, usualmente rotas por los mecanismos de generación de la turbulencia, son recuperadas en sentido estadístico en escalas pequeñas y lejos de las fronteras. Es decir, se asume homogeneidad de los incrementos de velocidad,  $\delta \mathbf{v}(\mathbf{r}, \mathbf{l}) = \mathbf{v}(\mathbf{r} + \mathbf{l}) - \mathbf{v}(\mathbf{r}) \stackrel{\text{hip}}{=} \delta \mathbf{v}(\mathbf{r} + \rho, \mathbf{l})$ . La recuperación de la isotropía hace referencia a que las propiedades estadísticas de los incrementos de velocidad son invariantes ante rotaciones simultáneas de  $\delta \mathbf{v}$  y  $\mathbf{l}$ . Para recuperar la paridad, se deben espejar tanto  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{l}$  simultáneamente.
2. **Hipótesis de invariancia de escala:** bajo las mismas suposiciones que en la hipótesis anterior, el flujo turbulento es autosimilar en las escalas pequeñas, lo que implica que existe un único exponente  $h$  tal que  $\delta \mathbf{v}(\mathbf{r}, \lambda \mathbf{l}) \stackrel{\text{hip}}{=} \lambda^h \delta \mathbf{v}(\mathbf{r}, \mathbf{l})$  con  $\lambda > 0$ .

**3. Tasa finita de disipación de energía:** bajo las mismas suposiciones que en la hipótesis anterior, el flujo turbulento presenta una tasa de disipación media por unidad de masa  $\varepsilon$  finita.

Antes de continuar, es necesario definir las funciones de estructura: estas describen cómo varían las fluctuaciones de velocidad con la distancia de separación o el intervalo de tiempo entre dos puntos en un flujo turbulento. Las funciones de estructura se definen como los momentos de las diferencias de velocidad, es decir, las diferencias en la velocidad de dos puntos separados por una distancia o intervalo de tiempo. La función de estructura de orden  $n$  se define como

$$S_n(l) = \langle [u(x+l) - u(x)]^n \rangle_x \quad (2.5)$$

en donde  $u$  es el campo de velocidad,  $x$  la posición y  $l$  un desplazamiento en alguna dirección. De la misma manera una función de estructura longitudinal se define de la misma manera pero con la proyección de la velocidad a lo largo de la dirección del desplazamiento,

$$S_n(l) = \left\langle \left[ (u(x+l) - u(x)) \cdot \frac{1}{l} l \right]^n \right\rangle_x \quad (2.6)$$

Utilizando estas definiciones y con las hipótesis previamente mencionadas, Kolmogorov obtiene una relación exacta para la función de estructura longitudinal de tercer orden llamada *ley de los 4/5*.

**Ley de los 4/5:** en el límite de  $Re \rightarrow \infty$  la función de estructura longitudinal de tercer orden para turbulencia isótropa y homogénea evaluada en incrementos  $l$  (pequeños comparados con la escala integral del sistema), mantiene una relación en términos de la disipación de energía media por unidad de masa  $\varepsilon$  que sigue la forma  $S_3 = \langle [(u(x+l) - u(x)) \cdot l]^3 \rangle = -\frac{4}{5} \varepsilon l$ .

Esta idea está asociada a que, en un sistema turbulento, las escalas más grandes entregan energía a escalas más chicas, las cuales asimismo entregan a otras menores. Este proceso se lo llama *cascada directa de energía*, introducido por Richardson en 1921 [11], en donde el sistema transfiere la energía inyectada por el forzado en a una determinada escala llamada *escala integral*,  $L_0$ , a otras más pequeñas. Este proceso se repite sucesivamente hasta llegar a la *escala de disipación*,  $\eta$ , y todas a una tasa constante  $\varepsilon$ . En la Fig. 2.2 se muestra un esquema cualitativo de la transferencia de energía en un régimen turbulento.

Para que el sistema llegue a un estado estacionario, la energía inyectada en la escala integral debe ser la misma que la disipada en la escala de disipación. Es por esto que uno de los objetos de estudio más relevantes en el estudio de la turbulencia es el espectro de energía

$$E^{(3D)}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \langle u(x) \cdot u(x+r) \rangle e^{-ik \cdot r} \frac{dr}{(2\pi)^3} \quad (2.7)$$

donde  $u(x)$  es el campo de velocidades en el punto  $x$ , y en donde el supraíndice 3D hace referencia a que el mismo representa la densidad de energía en el espacio de Fourier tridimensional. El espectro es la transformada de Fourier de la función de autocorrelación de los incrementos de velocidad y describe cuánta energía se encuentra en cada escala.

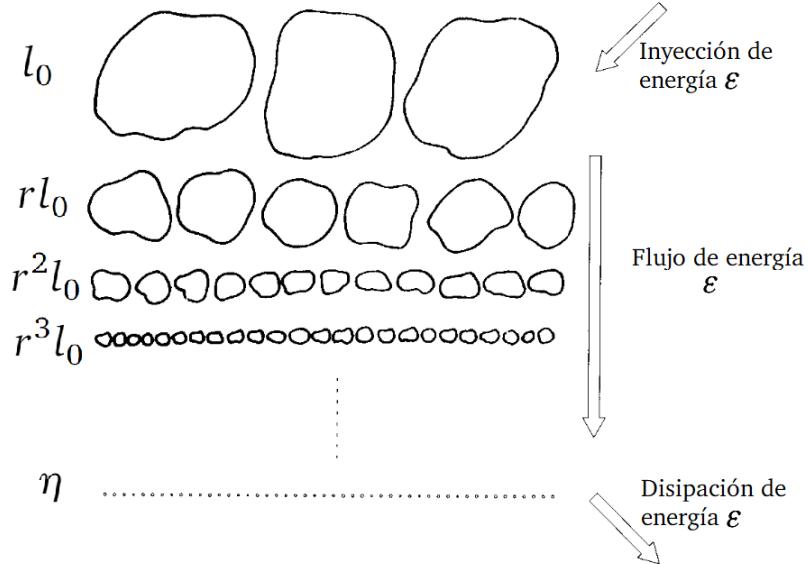


Figura 2.2: Ilustración de la cascada de Richardson tomada de Frisch [10].

Se dice que la turbulencia es *homogénea* cuando el espectro de energía es independiente de la posición,  $x$ , e *isótropa* cuando es independiente de la dirección del vector de onda,  $\mathbf{k}$ , dependiendo únicamente de su módulo,  $k$ . Entonces, para espectros isótropos, la misma información está contenida en un espectro unidimensional obtenido de integrar las tres dimensiones en una esfera unitaria en el espacio Fourier

$$E^{(1D)}(k) = 4\pi k^2 E^{(3D)}(\mathbf{k}) \quad (2.8)$$

$$\frac{1}{2} \langle u^2 \rangle = \int_0^\infty E^{1D}(k) dk \quad (2.9)$$

Una de los temas principales en la teoría de Kolmogorov tiene que ver con la *hipótesis de universalidad del rango inercial*. La idea es que, si se está lo suficientemente alejado de la escala de inyección y de disipación ( $k_0 \ll k \ll k_\eta$ ), las propiedades del sistema dependen únicamente de la tasa de transferencia de energía y no en la forma particular del mecanismo del forzado o del de la disipación. Esto está asociado a que las escalas transfieren energía a otras de órdenes similares. Es por esto que las únicas magnitudes que son relevantes en esta región son el número de onda  $k$  y la tasa de transferencia de energía  $\varepsilon$ , despreciando la viscosidad. De esta manera se puede utilizar el siguiente argumento de análisis dimensional,

$$[\varepsilon] = \left[ \frac{u^2}{t} \right] = \frac{l^2}{t^3}$$

$$[E^{1D}] = \left[ \frac{u^2}{k} \right] = \frac{l^3}{t^2}$$

La única manera de combinar  $\varepsilon$  y  $k$  para obtener las unidades correctas en  $E^{1D}$  es

$$E^{1D} \sim \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (2.10)$$

A esta relación se le atribuye el nombre de *ley de los 2/3*. Esta ley ha sido verificada experimentalmente numerosas veces y representa uno de los resultados teóricos más importantes dentro del área [?] [?] [?]. En la Fig. 2.3 se muestra un espectro típico de Kolmogorov. Lo

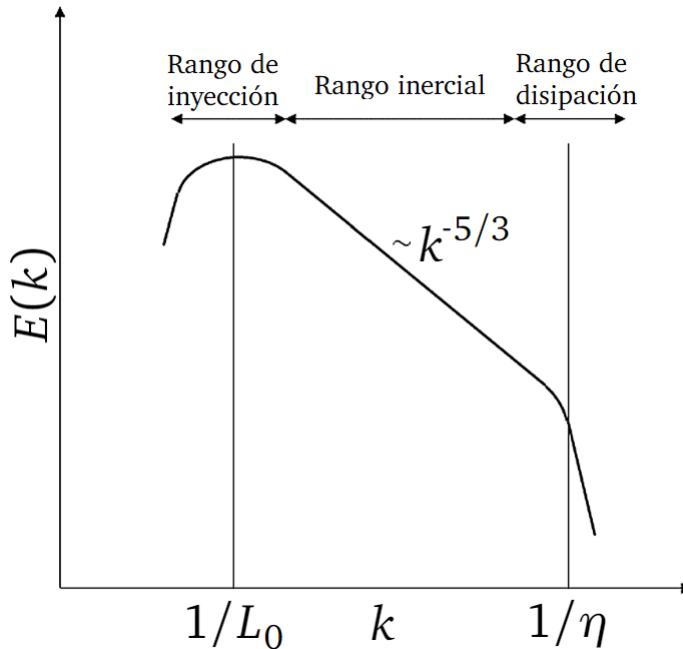


Figura 2.3: Espectro de Kolmogorov tomado de Frisch [10].

notable de esta ley es que el sistema, sin importar la particularidad del mecanismo de inyección, transfiere energía desde las escalas del forzado (escala integral) a otras más pequeñas a una tasa constante. Es decir, el sistema excita un rango de escalas sin necesidad de que el forzado ocurra en el mismo. El exponente al que se eleva el número de onda, que para turbulencia isótropa y homogénea es  $-5/3$ , depende del tipo de turbulencia y es lo que caracteriza al espectro (luego se verá que este no coincide con el espectro predicho para turbulencia de ondas).

### 2.1.2. Turbulencia de ondas

La turbulencia de ondas se refiere a la dinámica compleja que ocurre cuando una gran cantidad de ondas interactúan en un fluido, donde las ondas individuales son aleatorias y caóticas pero colectivamente exhiben patrones estadísticos de transferencia de energía. En la turbulencia de ondas las amplitudes y frecuencias de las ondas varían en el espacio y el tiempo debido a interacciones no lineales, lo que genera que la energía se pueda transferir entre diferentes escalas de movimiento (así como lo explicado para turbulencia isótropa y homogénea). Este tipo de turbulencia es común en muchos sistemas físicos, como el océano, la atmósfera y el plasma, y puede tener efectos importantes en el transporte de energía, momento y partículas.

La diferencia principal entre la turbulencia isótropa y homogénea (HIT) y la turbulencia de ondas (WT) es que los actores principales en la primera son los vórtices, mientras que en WT son ondas viajeras. La teoría de turbulencia de ondas permite encontrar, en el caso débil,

el espectro de energía de manera analítica (no sólo con argumentos dimensionales), así como la estabilidad de la solución.

La versión simplificada de la teoría asume que las ondas del sistema en cuestión dependen de una sola cantidad física (en las ondas de gravedad, la constante gravitatoria,  $g$ ; en las de capilaridad, la tensión superficial,  $\sigma$ ). Esto es razonable para la una gran cantidad de sistemas de ondas, en particular para las ondas de gravedad y las de capilaridad.

Durante la década de 1960 se descubre que el mecanismo fundamental de transferencia de energía en este régimen eran las interacciones resonantes. Las mismas implica que el sistema de ondas cumpla con las siguientes condiciones,

$$\omega(\mathbf{k}_1) \pm \dots \pm \omega(\mathbf{k}_N) = 0 \quad (2.11)$$

$$\mathbf{k}_1 \pm \dots \pm \mathbf{k}_N = 0 \quad (2.12)$$

donde  $N$  es el mínimo número de ondas para el cual se satisfacen estas condiciones para números de onda no triviales, y los signos están asociados al cumplimiento de esta condición. Por ejemplo, en un caso de interacción entre 3 ondas, para satisfacer las ecuaciones (2.11) y (2.12) se requiere que  $\omega(\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) = \omega(\mathbf{k}_2) + \omega(\mathbf{k}_3)$ .

En ciertos casos existen reglas simples para determinar si un conjunto de condiciones resonantes se van a cumplir o no. Por ejemplo, en el caso bidimensional en donde la relación de dispersión está dada por  $\omega \sim k^\alpha$ , las condiciones sólo se pueden cumplir si  $\alpha \geq 1$ . En la Fig. 2.4 se muestra una prueba gráfica de la existencia o inexistencia de soluciones para las ecuaciones (2.11) y (2.12) simultáneamente para este caso, en donde se observa que, en el caso en donde  $\alpha \geq 1$  existe una intersección entre los  $\omega$  permitidos acorde a la relación de dispersión para varios modos, mientras que en la segunda figura, para  $\alpha < 1$ , se puede ver claramente que no existirán intersecciones.

### 2.1.2.1. Espectro de energía de Kolmogorov-Zakharov

Para obtener el espectro de energía de un sistema de ondas de dimensión  $d$  se utilizará un argumento dimensional, en donde la dimensión hace referencia a los grados de libertad que tiene la dinámica. La deducción analítica del espectro puede ser encontrada en [11] [31].

Es importante encontrar la dimensión del espectro de energía del sistema. Esto puede no ser tan directo, ya que, por ejemplo, en el caso de ondas superficiales, por más de que el sistema físico sea tridimensional, el movimiento ondulatorio ocurre cerca de la interfaz entre el agua y el aire y es natural describirlo con una distribución de energía bidimensional. Esto se puede generalizar de la siguiente manera: debido a que se trabajará con flujos incompresibles,  $\rho = \frac{m}{V} = \text{cte}$ , y por ello se puede medir la masa en unidades de volumen. Entonces, para encontrar la dimensión de la energía del sistema, se detallan las unidades de la energía utilizando esta convención

$$[E] = \left[ \frac{1}{2} m v^2 \right] = \frac{[l]^5}{[t]^2} \quad (2.13)$$

Luego las unidades de la densidad de energía (en volumen, área o longitud,  $l^d$ )

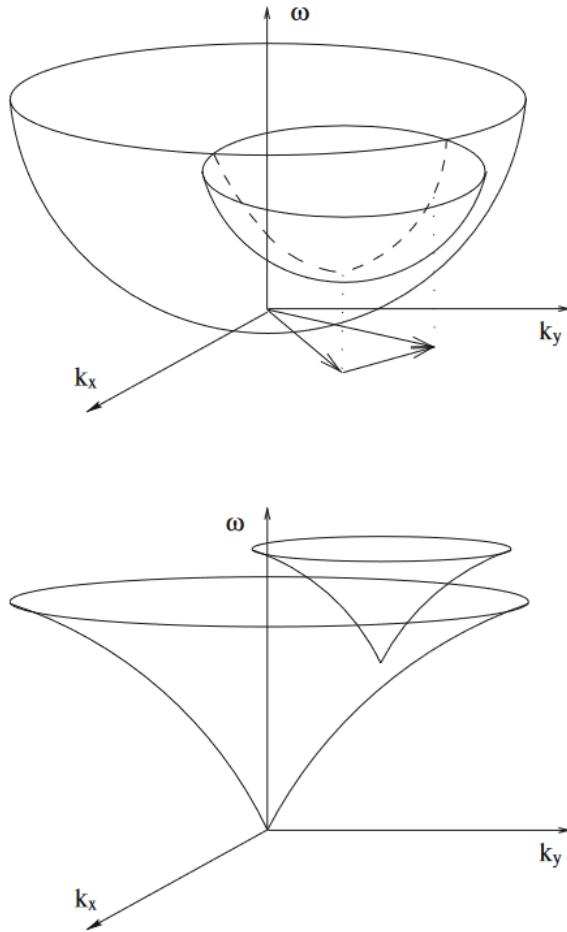


Figura 2.4: Demostración gráfica de la existencia de soluciones para las condiciones resonantes para  $\alpha \geq 1$  y su inexistencia para  $\alpha < 1$ . Imagen tomada de Nazarenko [31].

$$\left[ \frac{E}{l^d} \right] = \left[ \int E_k^{(1D)} dk \right] = \left[ E_k^{(1D)} \right] [l]^{-1} \quad (2.14)$$

Utilizando ambas ecuaciones (2.13) y (2.14) se llega a que

$$\left[ E_k^{(1D)} \right] = \frac{[l]^{6-d}}{[t]^2} \quad (2.15)$$

Sumando la información que aporta la ecuación de balance energético,  $\dot{E}_k^{(1D)} + \partial_k \varepsilon = 0$ ,

$$[\varepsilon] = \frac{[l]^{5-d}}{[t]^2} \quad (2.16)$$

Como se mencionó antes, en este argumento se considera únicamente el caso de ondas caracterizadas por un único parámetro. Por ejemplo, en el caso de ondas de gravedad el parámetro será la constante gravitatoria,  $g$ . Se buscará entonces una relación de dispersión para cada tipo de ondas que siga una ley de potencias,  $\omega = \lambda k^\alpha$ , con  $\lambda$  y  $\alpha$  determinados por la constante dimensional relevante del sistema. Las unidades de  $\lambda$  entonces estarán dadas por

$$[\lambda] = [\omega][k]^{-\alpha} = [t]^{-1}[l]^\alpha \quad (2.17)$$

de forma que la constante dimensional se puede determinar de forma única en términos de  $\lambda$ . Utilizando la ecuación (2.15) junto a (2.17) se obtiene el espectro de energía

$$E_k^{(1D)} \sim \lambda^x \varepsilon^{1/(N-1)} k^y \quad (2.18)$$

$$x = 2 - \frac{3}{N-1} \quad (2.19)$$

$$y = d - 6 + 2\alpha + \frac{5-d-3\alpha}{N-1} \quad (2.20)$$

Este desarrollo es general y por ende se puede aplicar a cualquier sistema de ondas. Al especificar el sistema, ya sean ondas de gravedad, capilaridad u otras, se especifica la cantidad mínima de ondas tales que se cumplen las condiciones resonantes (2.11) y 2.12,  $N$ , y la dimensión de la dinámica ondulatoria,  $d$ .

Si este es un sistema de **ondas de capilaridad**, debido a que la relación de dispersión es  $\omega = \sigma^{1/2} k^{3/2}$ , la cantidad mínima de ondas necesarias para cumplir las condiciones resonantes es  $N = 3$ , y la dimensión de la dinámica ondulatoria es  $d = 2$ , mientras que la constante dimensional característica de estas ondas es la tensión superficial,  $\sigma$ . De aquí se saca que  $\alpha = 3/2$ , y el espectro que se obtiene es

$$E_k^c \sim \sqrt{\varepsilon} \sigma^{1/4} k^{-7/4} \quad (2.21)$$

En el caso de trabajar con un sistema de **ondas de gravedad**, la cantidad mínima de ondas es  $N = 4$ , y la dimensión de la dinámica es  $d = 2$ . La constante dimensional característica es la constante gravitatoria  $g$ , y la relación de dispersión es  $\omega = \sqrt{gk}$ . De esta manera,  $\lambda = \sqrt{g}$  y  $\alpha = 1/2$ , de forma que el espectro queda

$$E_k^g \sim \varepsilon^{1/3} g^{1/2} k^{-5/2} \quad (2.22)$$

Experimentalmente es usual considerar la densidad espectral de potencia en vez del espectro ya que las magnitudes que considera son las medidas directamente en el laboratorio. Esta cantidad, que puede muestrearse espacial o temporalmente, está definida de la siguiente manera

$$S_k = \frac{2\pi k}{L^2} \left\langle \left| \int_0^L \eta(x, y) e^{i(k_x x + k_y y)} dx dy \right|^2 \right\rangle \quad (2.23)$$

$$S_\omega = \frac{1}{T} \left\langle \left| \int_0^L \eta(t) e^{i\omega t} dt \right|^2 \right\rangle / T \quad (2.24)$$

donde  $\eta(x, y, t)$  es la deformación de la superficie,  $L$  es la región de observación y  $T$  la ventana temporal de medición. La relación entre la densidad espectral y el espectro de energía para ondas de capilaridad es  $E_k^c = \frac{\sigma}{2} k^2 S_k^c$ , y para ondas de gravedad,  $E_k^g = \frac{1}{2} g S_k^g$ . Utilizando el espectro de ondas de capilaridad de la ecuación (2.21), la densidad espectral de las ondas

capilares tiene la forma

$$S_k^c \sim \varepsilon^{1/2} \sigma^{-3/4} k^{-15/4} \quad (2.25)$$

$$S_\omega^c \sim \varepsilon^{1/2} \sigma^{-1/6} \omega^{-17/6} \quad (2.26)$$

mientras que, utilizando el espectro de ondas de gravedad de la ecuación (2.22), la densidad espectral de las ondas de gravedad es

$$S_k^g \sim \varepsilon^{1/3} g^{-1/2} k^{-5/2} \quad (2.27)$$

$$S_\omega^g \sim \varepsilon^{1/2} g \omega^{-4} \quad (2.28)$$

Debido a que la relación de dispersión de ondas gravito-capilares no es una ley de potencias pura,

$$\omega = \sqrt{gk + \frac{\sigma}{\rho} k^3} \quad (2.29)$$

este análisis no se puede aplicar directamente. No obstante, es esperable que en los casos límites (cuando dominan las ondas de gravedad,  $gk \gg \frac{\sigma}{\rho} k^3$ , o viceversa, cuando dominan las ondas de capilaridad,  $gk \ll \frac{\sigma}{\rho} k^3$ ) los espectros se comporten de la manera predicha por el espectro KZ. Es importante mencionar que el análisis dimensional no es concluyente para la región de transición entre ambos regímenes, en donde  $k_c \simeq \sqrt{\rho g / \sigma}$ , correspondiente a una frecuencia aproximada de  $\omega_c \simeq 14\text{hz}$  [13].

## 2.2. Teoría de SLE

A partir de 1990 se produce un avance de gran importancia en el área de los fenómenos críticos. Schramm, basándose en la teoría de Loewner de 1920, descubrió una familia de curvas fractales que presentan invariancia conforme llamadas Evoluciones Estocásticas de Loewner o SLE [?]. En este Capítulo se explicarán los conceptos básicos para entender esta teoría. Se parte del trabajo de Loewner y su ecuación homónima en la Sección 3.1 y se continúa por el de Schramm y el descubrimiento de las evoluciones estocásticas en la Sección 3.2. En ella se detallan las predicciones de esta teoría. Finalmente en la Sección 3.3 se comenta brevemente sobre la historia de la búsqueda de invariancia conforme en distintos sistemas físicos y en particular en turbulencia.

### 2.2.1. Ecuación de Loewner

En 1923 Loewner descubre una ecuación diferencial que describe una clase particular de transformaciones conformes. El teorema de representación conforme de Riemann [?] asegura que existe una transformación conforme que mapea una región simple conexa (sin agujeros) en el plano complejo en otra del mismo tipo. Este teorema además asegura que la frontera de la región inicial se mapea en la frontera de la región transformada, y debido a que las transformaciones conformes son biyectivas, esto asegura que existe una transformación inversa que mapea la región transformada en la original.

Un proceso de Loewner está definido de la siguiente manera: dado un dominio simple conexo inicial,  $D' \in \mathbb{C}$ , defino una nueva región idéntica,  $D$ , pero que incluya una curva  $\gamma$  (o sea, “agrietamos” el dominio original  $D'$ ). El punto inicial de la grieta  $\gamma$  se denominará  $r_1$ , y se asegurará que este punto esté en la frontera del dominio,  $\partial D$ . Al punto final se denominará  $r_2$  y se asegurará que esté en el interior de  $D$ . Mientras la curva no se interseque a sí misma, la nueva región agrietada  $D$  cumple con las hipótesis del teorema de Riemann ya que continúa siendo simple conexo. Por ello se sabe que existe una transformación conforme  $g$  que mapea la región agrietada,  $D$ , a la región sin la grieta,  $D \setminus \gamma$ ; en notación matemática  $\exists g : D \rightarrow D \setminus \gamma$ . En la Fig. 2.5 se puede ver un esquema de este proceso. Comúnmente se denomina a la grieta  $\gamma$  como *traza*. Si el punto final de la traza está en el interior de  $D$  se la llama *radial*, mientras que si se encuentra en la frontera  $\partial D$  a la traza se la denomina *cordal*. Notar que, una vez aplicado el mapa uniformizante, la región inicial  $D'$  y la región “des-agrietada”  $D \setminus \gamma$  son idénticas.

El paso siguiente del proceso consiste en parametrizar a la traza  $\gamma$ . Para ello se utiliza un parámetro real  $t$ , usualmente denominado en la bibliografía como tiempo de Loewner (que vale aclarar que nada tiene que ver con el tiempo físico), de manera que a  $t = 0$  la parametrización describa el punto inicial,  $\gamma(t = 0) = \gamma_0 = r_1$ , y a tiempo infinito describa el punto final,  $\gamma(t \rightarrow \infty) = \gamma_\infty = r_2$ . De esta manera,  $\gamma_{[0,t]}$  describe la evolución de la punta de la traza para cada tiempo, siendo  $\gamma_t$  la punta de la traza a tiempo  $t$ . Entonces, para cada tiempo  $t$  existe un mapa diferente que mapea la región agrietada en la región sin agrietar,  $g_t : D \rightarrow D \setminus \gamma_{[0,t]}$ .

El concepto de un proceso de Loewner entonces es el de un proceso de evolución de esta grieta a diferentes tiempos, así como también el de la determinación del mapa que uniformiza

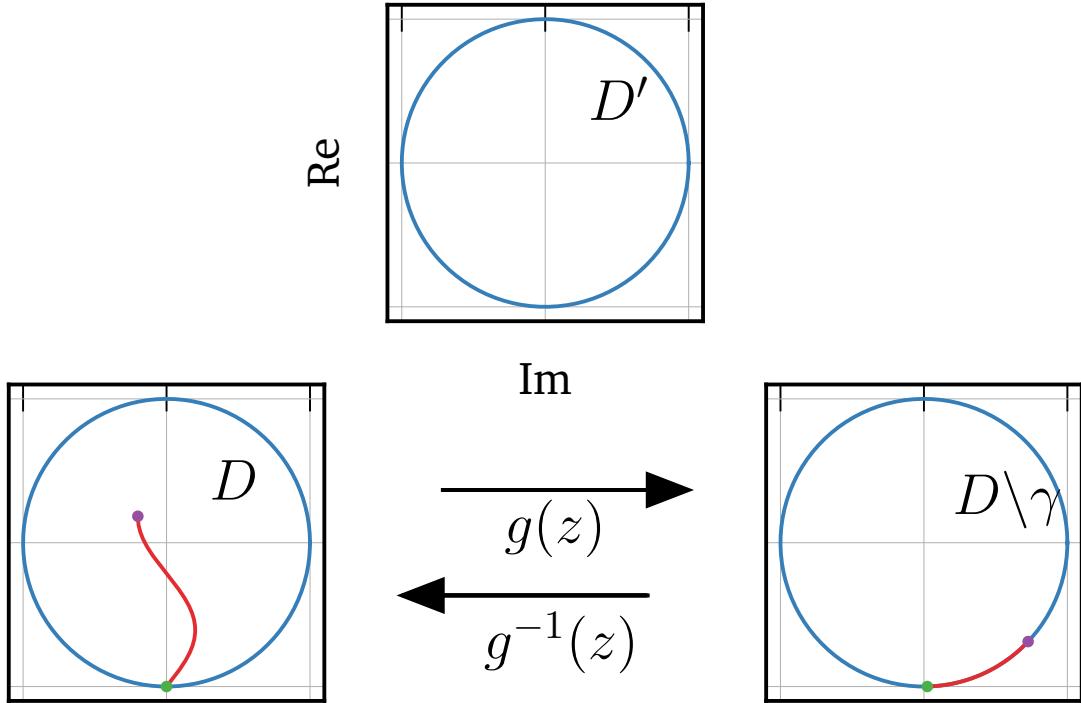


Figura 2.5: Esquema de un proceso de Loewner.

la región. Lo que descubre Loewner es que existe una relación única entre la región  $D$ , la traza o grieta  $\gamma$  y el mapa uniformizante  $g_t$  (realizando ciertas concesiones que se discutirán luego). La idea entonces es construir una ecuación para obtener  $g_t$  para cualquier valor de  $t$ . Se sabe que la traza pertenece a la frontera del dominio agrietado  $D$  (debido a que su punto inicial se colocó sobre la misma), por lo que la transformación  $g_t$  mapeará a cada punto de la traza en algún punto de la frontera de la región uniformizada,  $\partial D \setminus \gamma_{[0,t]} = \partial D'$ , al cual se lo denominará  $\xi_t = g_t(\gamma_t)$ . Buscando la evolución de este punto para cada tiempo se obtiene una función  $\xi_t : t \in \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \partial D'$ , a la que se denominará función forzante, del inglés “*driving function*”. Además, Loewner nos indica que la conexión entre  $g_t$ ,  $\xi_t$  y  $\gamma_t$  está dada por una ecuación diferencial [?].

A modo de ejemplo, se explicará la teoría sobre la ecuación para las trazas cordales (ya que para trazas radiales el procedimiento es análogo). Para éstas es canónico utilizar que el dominio simplemente conexo inicial sea el semiplano superior complejo, o sea  $D' = \mathbb{H} = \{z / \operatorname{Im}\{z\} \geq 0\}$ , eligiendo  $\gamma_0 = 0$  y  $\gamma_\infty = \infty$ . Esta elección se hace con el propósito de que  $\partial D' = \mathbb{R}$ , de manera que el forzado  $\xi_t$  es una función real. Además, debido a que los mapas que mapean la región agrietada en la uniforme son infinitos,  $g_t : \mathbb{H} \setminus \gamma_{[0,t]} \rightarrow \mathbb{H}$ , se utiliza la *normalización hidrodinámica* para imponer unicidad del mismo. Esto es, que la transformación lejos del origen se comporte como

$$\lim_{z \rightarrow \infty} g_t(z) \approx z + \frac{a(t)}{z} + O(z^{-2})$$

de manera que los puntos en infinito se mapeen en sí mismos. El coeficiente  $a(t)$  se denomina *capacidad* y tiene libertad de elección mientras cumpla con ser monótono, positivo y conti-

nuo. La elección de la forma funcional no es trivial y se realizará dependiendo del problema a resolver [26]. La más usual corresponde a tomar la capacidad como una función lineal,  $a(t) = 2t$ . Habiendo aceptado estas suposiciones, la ecuación diferencial de Loewner se escribe

$$\partial_t g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - \xi_t} \quad (2.30)$$

$$g_0(z) = z \quad (2.31)$$

en donde el forzado y la traza se pueden obtener tomando el límite

$$\gamma_t = \lim_{z \rightarrow \infty} g_t^{-1}(\xi_t + z)$$

La deducción de esta ecuación diferencial se puede encontrar en el apunte de Lawler sobre este tema [32].

### 2.2.2. Evoluciones estocásticas de Loewner

En 1991, Schramm utiliza la teoría de las evoluciones de Loewner aplicadas a las interfaces formadas en sistemas críticos, como los perímetros de *clusters* en percolación. Esto lo hizo mostrando que todas las propiedades de los modelos con invariancia conforme están consideradas en una familia particular de procesos de Loewner [26] [33].

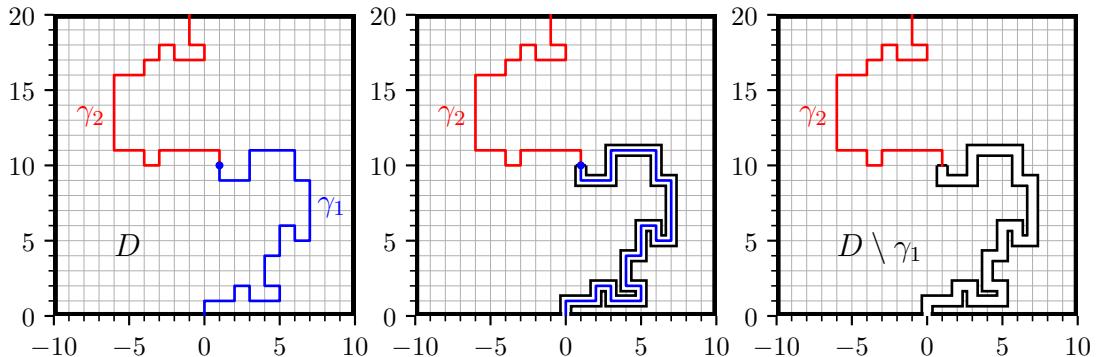


Figura 2.6: Ilustración de la propiedad de Markov, la cual implica que ambos procesos deben ser estadísticamente equivalentes.

La definición de invariancia conforme en teoría matemática de medidas es la siguiente: sea  $f$  una transformación conforme entre dos dominios  $D$  y  $D'$  tal que  $f(D) = D'$ , entonces la medida  $\mu_D(z, w)$  sobre el conjunto de trazas que conectan dos puntos sobre la frontera de  $D$ ,  $z, w \in \partial D$ , deben comportarse como

$$f \circ \mu_D(z, w) = \mu_{f(D)}(f(z), f(w)) \quad (2.32)$$

Esto significa que, si se quiere generar una curva en un dominio con una determinada forma, es estadísticamente equivalente hacerlo aplicando un modelo de grilla con la geometría deseada o aplicando un modelo de grilla cuadrado y haciendo una transformación conforme sobre este

que lo mapee a la geometría deseada. Que el sistema presente invariancia conforme implica que, en el límite continuo, estos dos procesos son equivalentes.

Además de invariancia conforme, Schramm identificó que los modelos de grilla en el límite continuo deben presentar la *propiedad de Markov*, que implica que la medida condicional de una familia de curvas  $\gamma_2$  cuya parte inicial  $\gamma_1$  es idéntica en un dominio  $D$ , es la misma que la de  $\gamma_2$  en el mismo dominio pero con  $\gamma_1$  removido,  $D \setminus \gamma_1$ . Matemáticamente,

$$\mu_D(\gamma_2 | \gamma_1) = \mu_{D \setminus \gamma_1}(\gamma_2) \quad (2.33)$$

Esto quiere decir que si se genera un conjunto de curvas en  $D$  tales que comparten un mismo principio  $\gamma_1$ , las continuaciones de estas,  $\gamma_2$ , deben presentar las mismas propiedades estadísticas que si se generaran únicamente las continuaciones  $\gamma_2$  en un dominio con  $\gamma_1$  removido,  $D \setminus \gamma_1$ . Esto se ilustra en la Fig. 2.6.

Lo que Schramm descubre es que los únicos sistemas que presentan estas dos propiedades, invariancia conforme y la propiedad de Markov, deben tener una *driving function* proporcional a un movimiento browniano acompañados de una constante de difusividad,

$$\xi_t = \sqrt{\kappa} B_t \quad (2.34)$$

Este proceso cumple que: **a)** a tiempo inicial es nulo,  $B_0 = 0$ , **b)** los incrementos  $B_t - B_s$  con  $t > s$  son siempre independientes entre sí, **c)** los incrementos  $B_t - B_s$  con  $t > s$  siguen una distribución normal con media nula y varianza  $\sigma^2 = t - s$  y **d)**  $B_t$  es casi siempre continuo.

La importancia de este resultado recae en dos cuestiones centrales. En primer lugar, se puede reducir un conjunto de trazas de un sistema crítico a una familia de curvas que dependen de un único parámetro. Es decir, se pueden reducir a una clase de universalidad clasificados por el valor de la difusividad,  $\kappa$ . En segundo lugar, la teoría desarrollada a partir de este descubrimiento es esencialmente una guía para encontrar compatibilidad entre invariancia conforme y el sistema estudiado, siempre que pueda asociar isolíneas de algún campo del sistema en cuestión a esta familia de evoluciones. Lo que se debe hacer es extraer las trazas, asociarlas a las *driving functions* correspondientes mediante algún algoritmo y verificar la compatibilidad con las predicciones teóricas. Una gran cantidad de trabajos han proliferado utilizando esta estructura [27] [29] [42]. Tanto las predicciones como las investigaciones realizadas en este tema se desarrollarán a continuación.

### 2.2.3. Propiedades de las $SLE_\kappa$

En principio, una de las propiedades de las  $SLE_\kappa$  es el crecimiento de la tortuosidad de la curva acorde al valor de la difusividad  $\kappa$ . Esta constante de difusividad que acompaña al movimiento browniano está asociada al aumento de las variaciones en el movimiento, por lo que a mayor  $\kappa$ , mayor es la tortuosidad de la curva. En la Fig. 2.7 se muestran evoluciones para distintos valores de  $\kappa$ . Matemáticamente se puede mostrar que  $\kappa = 0$  corresponde a una linea recta, aumentando su tortuosidad pero sin tocarse a sí misma hasta  $\kappa = 4$  [?]. Para  $4 < \kappa \leq 8$  la curva se toca a sí misma. Para  $\kappa \geq 8$  además llena el espacio (para algún  $t$  dado, todos los puntos en el semiplano superior pertenecerán a la curva).

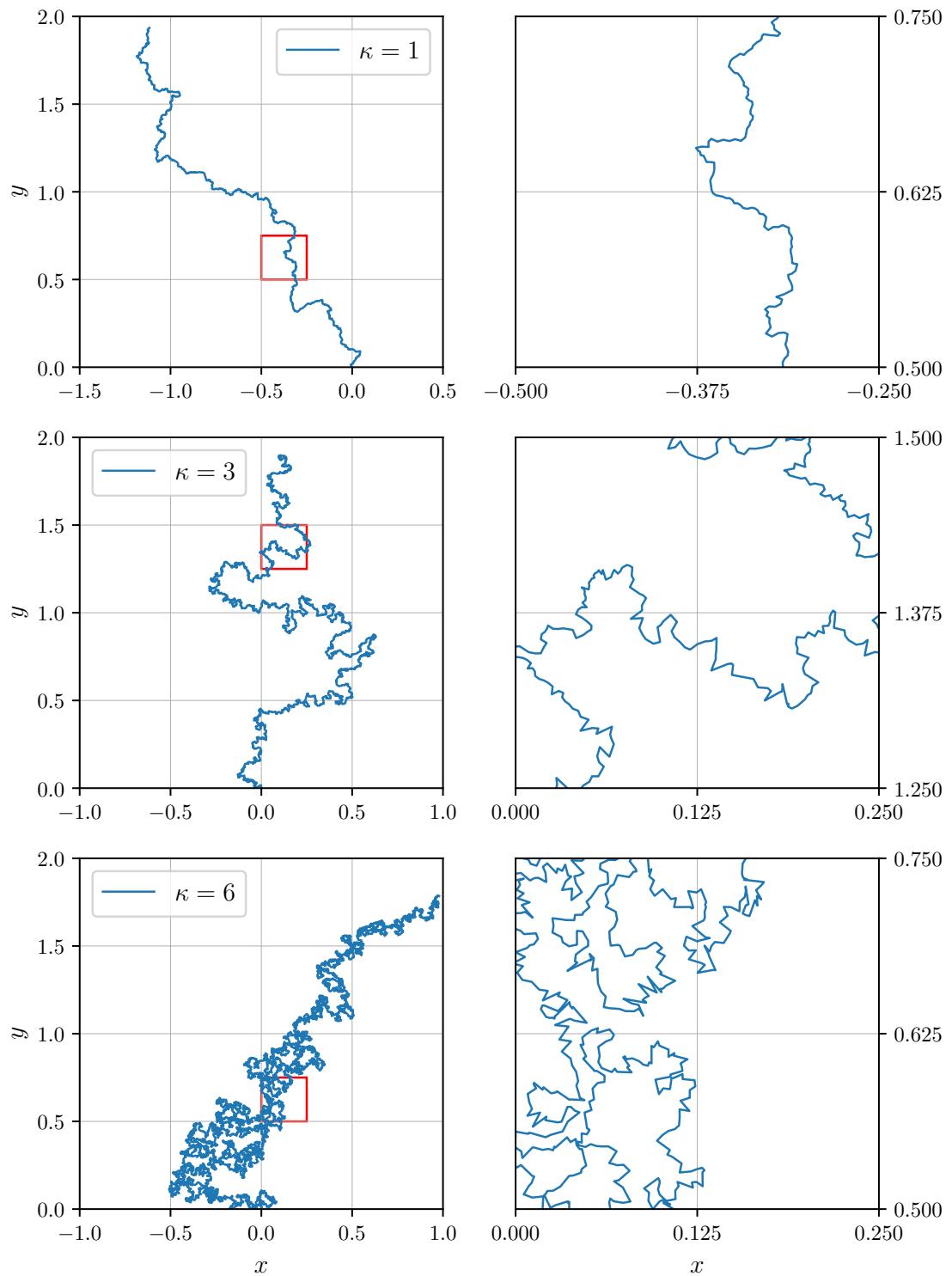


Figura 2.7: Ilustración del aumento de la tortuosidad de las  $SLE_\kappa$  con el incremento en  $\kappa$ .

Existen cuatro propiedades fundamentales de las  $SLE_\kappa$  que se desarrollarán en las siguientes Secciones. Estas consisten en las predicciones teóricas contra las que usualmente se contrastan las curvas candidatas.

### 2.2.3.1. Dimensión fractal

Un fractal es una forma geométrica que contiene una estructura detallada en escalas arbitrariamente pequeñas, generalmente con una dimensión que excede estrictamente la dimensión topológica. Los fractales están caracterizados por su autosimilaridad, implicando que estos exhiben patrones idénticos a escalas cada vez más pequeñas. Estos se suelen construir aplicando un conjunto de operaciones infinitas veces (puede ser sustraer una parte, torcerlo, etc.) a un conjunto inicial. Ejemplos de fractales son el triángulo de Sierpinski (ver Fig. ), la esponja de Menger, el conjunto de Mandelbroit, entre otros. A diferencia de los objetos euclidianos tradicionales, los fractales se caracterizan por sus patrones irregulares y fragmentados que se repiten en todas las escalas infinitamente. Se pueden encontrar en la naturaleza ejemplos de sistemas que presentan una estructura autosimilar en varias escalas, como por ejemplo el coliflor romano (Fig. ).

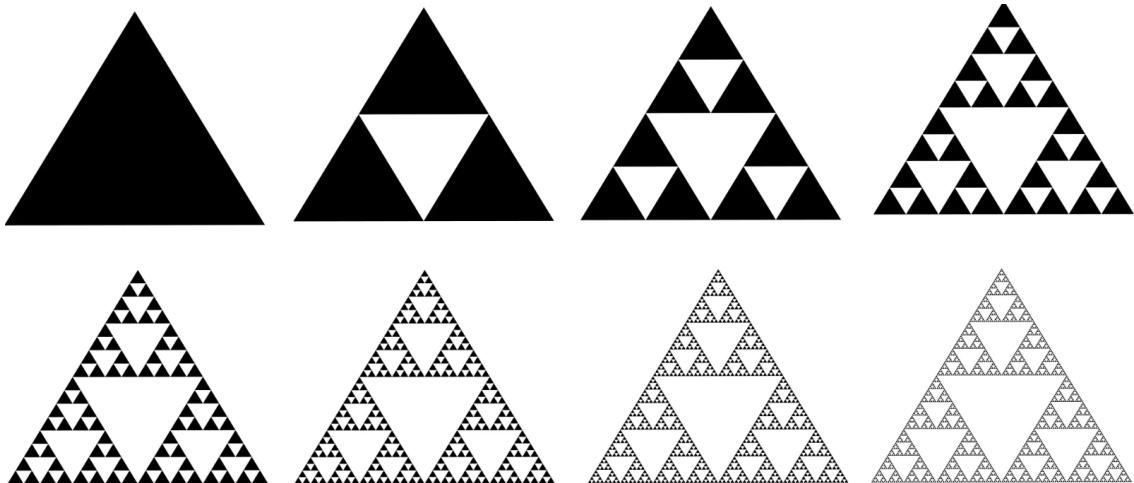


Figura 2.8: Ilustración del triángulo de Sierpinski y su construcción matemática.

La dimensión fractal es un concepto matemático que mide la complejidad de un objeto o estructura que tiene un patrón fractal en diferentes escalas, cuya dimensión no puede describirse mediante un valor entero. Esta es una medida del “grado de rugosidad” o “detalle” de un objeto fractal, y refleja las propiedades de escala del objeto a través de diferentes niveles de aumento. Existen distintas definiciones de la dimensión fractal. Existe la definición de *box-counting*, la de Minkowski-Bougliand, la de Haussdorff-Besicovitch, entre otras. Tomando la de Minkowski-Bougliand, lo que esta describe es la relación entre la cantidad de círculos necesarios para cubrir el perímetro del fractal y el radio de estos. Esta relación está dada por

$$N_b \sim \varepsilon^{-d_f} \quad (2.35)$$

donde  $N_b$  es la cantidad de circunferencias,  $\varepsilon$  es el radio y  $d_f$  la dimensión fractal. Beffara



Figura 2.9: Coliflor romano. Imagen tomada de Wikipedia.

[34] demostró que la relación entre la dimensión fractal de una  $SLE_\kappa$  y el valor de  $\kappa$  es

$$d_f = \min\left(1 + \frac{\kappa}{8}, 2\right) \quad (2.36)$$

donde se puede ver que, para  $k \geq 8$ , la dimensión de la curva es 2 (ya que llena el espacio).

Por otro lado, Duplantier y otros autores [35] [36] [37] obtuvieron otra relación entre el radio de giro y el área de una  $SLE_\kappa$ . El radio de giro está definido como la distancia promedio de cada punto de una curva o cuerpo a su centro de masa. Esto es,

$$R_g = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=0}^N (r_i - r_{cm})^2} \quad (2.37)$$

$$\mathbf{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=0}^N m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=0}^N m_i} \quad (2.38)$$

donde  $N$  es la cantidad de puntos que tiene la curva,  $r_i$  es la posición de cada punto y  $r_{cm}$  es la posición del centro de masa, que en el caso en donde no haya masas asociadas a los puntos se puede tomar como constante y esta queda  $\mathbf{r}_{cm} = \sum_{i=0}^N \mathbf{r}_i$ . El límite al caso continuo implica simplemente cambiar la suma por una integral.

La relación entre el área y el radio de giro es

$$A = R_g^D \quad (2.39)$$

y la relación que Duplantier y Schramm obtienen entre el exponente  $D$  y la difusividad  $\kappa$  es

$$D = 2 - \frac{(8 - \kappa)(3\kappa - 8)}{32\kappa} \quad (2.40)$$

### 2.2.3.2. Desviación estándar del forzado

La forma más estándar de estudiar un conjunto de trazas y su pertenencia a una familia de  $SLE_\kappa$  es obtener la desviación estándar de sus *driving functions* a un determinado tiempo. La predicción es

$$\langle \xi_t^2 \rangle = \kappa t \quad (2.41)$$

que proviene de que la *driving function* de una  $SLE_\kappa$  es un browniano. Esto es a lo que comúnmente en la bibliografía se denomina test directo.

Esta predicción teórica es sobre trazas continuas e infinitas. Debido a que se trabajarán con datos discretizados y finitos se utilizará el algoritmo de *zipper* para obtener las *driving functions* [52]. Este algoritmo se encuentra explicado en el Apéndice A junto con el código utilizado.

### 2.2.3.3. Probabilidad de pasaje a izquierda

Otra propiedad de esta familia de curvas está asociada con la probabilidad de que la traza escape un círculo de radio  $|z|$  arbitrario dejando a la izquierda al punto  $z = |z|e^{i\theta}$ . Esta depende únicamente del ángulo  $\theta$  y está dada por la función

$$P(\kappa, \phi) = \frac{1}{2} + \frac{\Gamma(4/\kappa)}{\sqrt{\pi} \Gamma((8-\kappa)/2\kappa)} \cot(\phi) {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{4}{\kappa}, \frac{3}{2}, -\cot^2 \phi\right) \quad (2.42)$$

donde  ${}_2F_1$  es la función hipergeométrica gaussiana. En la Fig. se muestra un esquema de la propiedad.

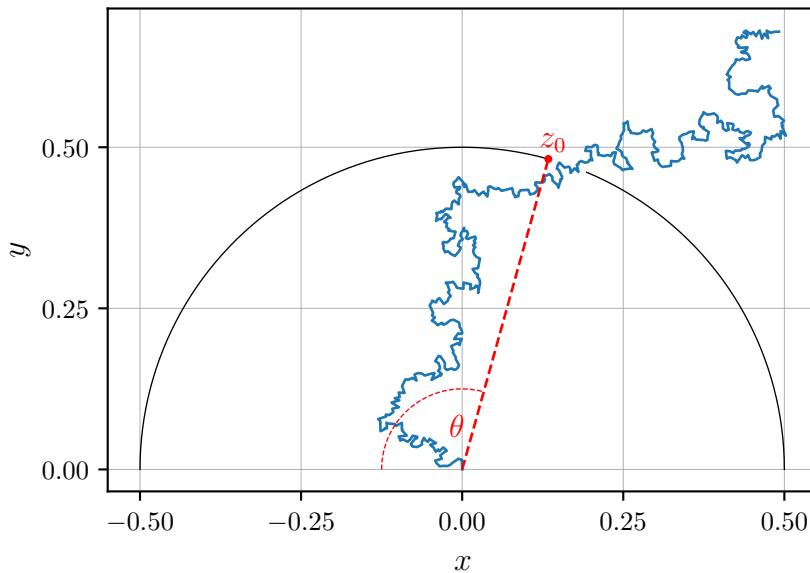


Figura 2.10: Ilustración de una traza cruzando una circunferencia de radio  $r = 0.5$ .

La probabilidad de pasaje a izquierda entonces indica cuánto arco de circunferencia dejó a la izquierda de la traza, una vez que esta la cruza. En la Fig. se muestra una comparación de la forma funcional para distintos valores de la difusividad  $\kappa$ .

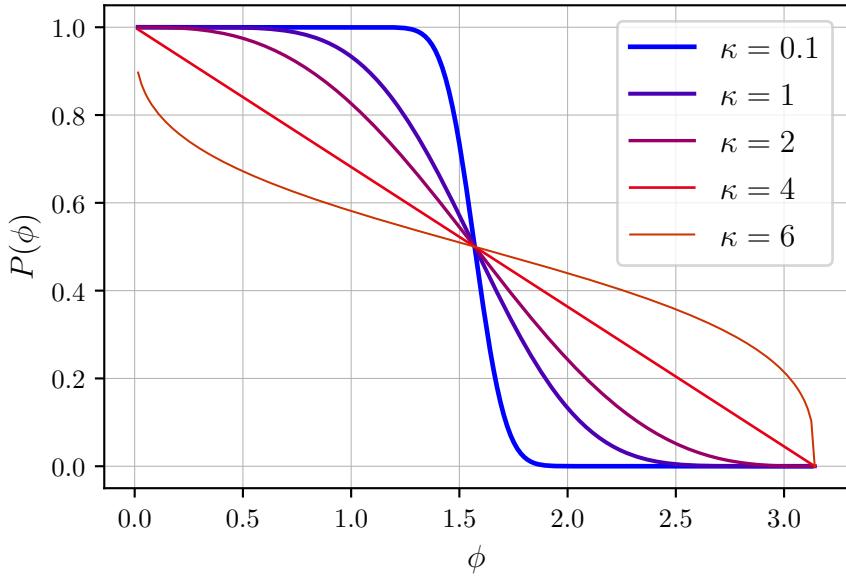


Figura 2.11: Forma funcional teórica de la probabilidad de pasaje a izquierda para distintos valores de la difusividad  $\kappa$ .

Se puede notar que a medida que la difusividad crece, la probabilidad de escapar dejando a la izquierda ángulos más grandes aumenta. Intuitivamente esto es razonable ya que las trazas para valores grandes de  $\kappa$  aumentan su tortuosidad, aumentando su probabilidad de cruzar la circunferencia en cualquier punto, mientras que para constantes de difusividad cercanas a 0 las trazas se asemejan a rectas verticales, pudiendo únicamente cruzar la circunferencia en el punto más alto o lo que es lo mismo en  $\theta = \pi/2$ .

#### 2.2.3.4. Ángulo de giro (winding angle)

Existe una predicción para la relación entre el ángulo acumulado de giro de una  $SLE_\kappa$  y la longitud de la curva hasta ese punto [?]. Se muestra en la Fig. un esquema del ángulo en cuestión. En el caso discreto, podemos definir al ángulo de giro como la suma de los ángulos formados entre tres puntos adyacentes. El ángulo de giro se define entonces como

$$\theta_j = \sum_{i=0}^j \alpha_i \quad (2.43)$$

donde  $\alpha_i$  es el ángulo entre dos puntos consecutivos.

La predicción teórica sobre esta cantidad es que la varianza del ángulo de giro escala como el logaritmo de la longitud sobre la curva hasta ese punto,

$$\langle \theta_j^2 \rangle - \langle \theta_j \rangle^2 = \text{cte} + \frac{\kappa}{4} \ln(L_j) \quad (2.44)$$

donde  $\theta_j$  es el ángulo de giro hasta el punto  $j$  de una traza discreta y  $L_j$  es la longitud medida sobre la traza hasta el punto  $j$ . Esta propiedad indica que, si veo la varianza de un conjunto de curvas, la dispersión crece con la longitud y proporcional a la constante de difusividad. Esto se puede intuir ya que inicialmente todas las curvas tienen su punto inicial en el origen,

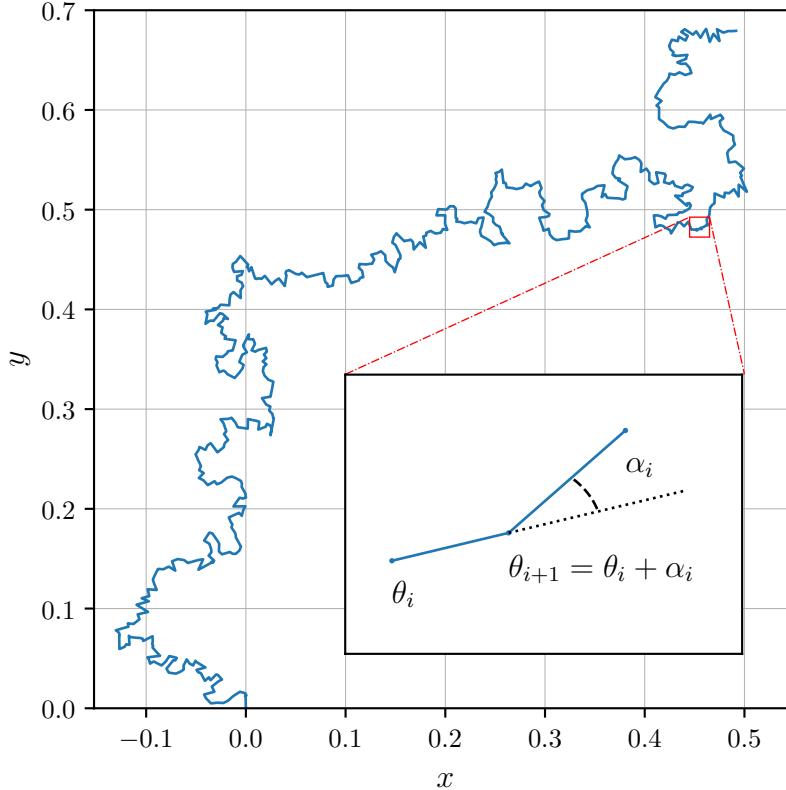


Figura 2.12: Ilustración del *winding angle*  $\theta_i$  para una curva SLE sintética. El inset muestra como calcular el winding angle local a partir de una desviación angular dada por  $\alpha$  en la curva. La convención (no mostrada en la figura) establece, además, que el winding angle inicial es nulo (i.e.,  $\theta_1 = 0$ ).

y realizan excusiones cuya tortuosidad estará dada por el valor de  $\kappa$ . Dado que para  $\kappa = 0$  se obtiene una recta vertical, la varianza es nula; a medida que se aumenta este valor, la varianza de las curvas a una determinada longitud de curva  $L$  aumentará ya que el conjunto de curvas se separará; para el límite de  $\kappa$  grande las excusiones de las curvas son más pronunciadas generando que la desviación respecto de la media para una determinada longitud  $L$  sea mucho mayor.

Como comentario, es importante notar una discusión que surge en la bibliografía sobre cómo se calcula el *winding angle*. Boffeta en su trabajo sobre cuan tortuosa es la costa de Gran Bretaña lo calcula como el ángulo entre la línea que une dos puntos separados por un longitud  $L$  a lo largo de la curva y la tangente local en la punto de referencia [?]. Esto se ilustra en la Fig. 2.13.

En este trabajo se utiliza la primera definición ya que las leyes de escala del mismo con la distancia cambian levemente (aunque deberían converger entre sí ya que cuantifican la misma cantidad).

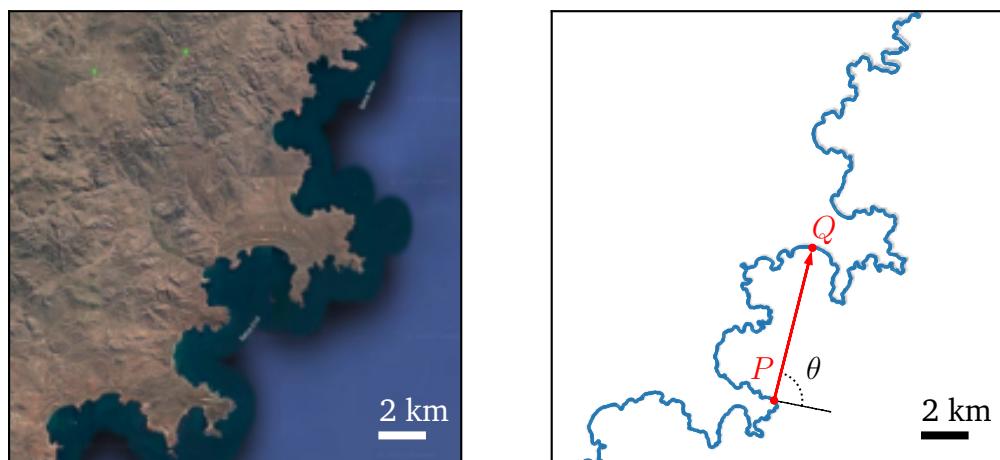


Figura 2.13: Ilustración de la definición alternativa del *winding angle*. El panel de la izquierda muestra una porción de la costa de la provincia de Chubut (Argentina), ubicada entre la Bahía Vera (al norte) y la Bahía Cruz (al sur). El panel de la derecha muestra la curva que determina el perfil de dicha costa, y el *winding angle* local  $\theta$  entre puntos  $P$  y  $Q$  distantes, conforme a la definición alternativa formulada en [?].



# CAPÍTULO 3

---

## DESARROLLO EXPERIMENTAL

---

De acuerdo con la investigación de Bogomolny [41], las isolíneas de amplitud en un sistema de ondas aleatorios son compatibles con una descripción  $SLE_6$ . Dado las similitudes de este sistema con las del régimen de turbulencia de ondas, resulta una pregunta razonable de hacerse: **¿la turbulencia de ondas presenta invariancia conforme?**

Para comenzar a atacarla se requirió de contar con tres componentes fundamentales. En primer lugar, un montaje experimental apropiado en donde se pueda reproducir el régimen de interés. En segundo lugar, una teoría que permita hallar esta propiedad en distintos sistemas de manera confiable. Es aquí en donde entra la teoría de SLE. Por lo expuesto en el Capítulo anterior, se sabe que esta familia de curvas presenta invariancia conforme, y por ello se apuntó a buscar estas evoluciones estocásticas en *algún* campo del sistema experimental. Finalmente, se requirió de una técnica de medición que permita la resolución de las mismas. Debido a que las  $SLE_\kappa$  son curvas fractales, la técnica utilizada debía permitir la definición de la mayor cantidad de escalas posibles a modo de reducir la incertezza (dado que es fácil confundir a las  $SLE_\kappa$  con trazas muy similares a las  $SLE_\kappa$  [47]). Por ello se optó por implementar la técnica denominada Fotografía de Luz Difusa (DLP), inicialmente desarrollada por Wright en su Tesis doctoral [?], cuya ventaja es la resolución píxel a píxel de la superficie del fluido.

Esta Sección está ordenada de la siguiente manera: en primer lugar, en la Sección 4.1 se explicará la teoría de la técnica experimental desarrollada por Wright en el marco de su Tesis doctoral. En la Sección 4.2 se explicarán los procedimientos necesarios para la implementación de la misma en el laboratorio. Finalmente en la Sección 4.3 se detallará el montaje utilizado para generar un régimen de turbulencia de ondas.

### 3.1. Teoría de DLP

La técnica de Fotografía de Luz Difusa (DLP) está diseñada con el objetivo de poder obtener información de la superficie de un fluido en movimiento. Esta fue desarrollada por Wright en su Tesis doctoral [?], luego utilizada por el en investigaciones en turbulencia de ondas capilares [20] [?]. Posteriormente fue utilizada por otros grupos para estudiar turbulencia de ondas de gravedad [48] y en ondas de Faraday [49]. Esta técnica consiste en poblar el fluido a estudiar con agentes dispersores (que pueden ser partículas, agentes lipídicos, leche) para luego iluminar la región de interés con alguna fuente de iluminación uniforme y, mediante la ley de Lambert-Beer que describe la relación entre la intensidad incidente y la saliente a través de un medio difusor, establecer la relación entre la distancia recorrida en el medio (o sea, la altura del fluido,  $h(x, y)$ ) y la intensidad medida con una cámara. Para implementar esta técnica es necesario encontrarse en una región de parámetros que cumpla con las aproximaciones de la técnica [?], por lo que es necesario abordar ciertos conceptos de la física de la dispersión de la luz.

La dispersión de la luz (o *scattering*) es un proceso físico que ocurre cuando la luz se encuentra con partículas o estructuras que tienen un tamaño comparable a la longitud de onda de la luz (dispersores o *scatterers*); estas partículas desvían a la luz de su trayectoria inicial, y cuyo resultado son distintos patrones cuya intensidad y forma dependen del tamaño, la forma y las propiedades ópticas de las partículas, así como de la longitud de onda, la polarización y el ángulo de incidencia. La dispersión es la responsable de una gran cantidad de fenómenos físicos, por ejemplo que el cielo se vea azul (*scattering* de Rayleigh) o por qué el agua brilla al ser iluminada (*scattering* de Mie) [?]. Existen ecuaciones que describen analíticamente este proceso para geometrías de partículas conocidas (como esferas, elipses), sin embargo los procesos de interés para esta Tesis son resultados de la estadística de una gran cantidad colisiones. En particular, será relevante caracterizar cantidades representativas de estos procesos de *scattering* en un medio dispersivo (o sea, frente a la presencia de una gran cantidad de dispersores).

Una longitud característica en este tipo de procesos es el *camino libre medio* que corresponde a la distancia promedio que viaja un fotón entre colisiones. El mismo está dado por

$$\lambda = \frac{1}{n\sigma} \quad (3.1)$$

donde  $n$  es la densidad numérica (en #/cm<sup>3</sup>) y  $\sigma$  es la sección eficaz de los agentes dispersores (que para esferas de radio  $R$  es  $\sigma = \pi R^2$ ) [?].

El fotón al colisionar (recorriendo, en promedio,  $\lambda$ ) se desvía un ángulo pequeño. Luego de una sucesión de choques se puede considerar que el fotón se desvió un ángulo significativo. La longitud utilizada para describir este fenómeno se denomina *longitud de transporte*. Esta se define como

$$\lambda' = N\lambda \quad (3.2)$$

donde  $N$  es un número de orden 10. La longitud de transporte define la distancia promedio a partir de la cual la dirección del fotón sufrió una gran cantidad de colisiones y se encuentra

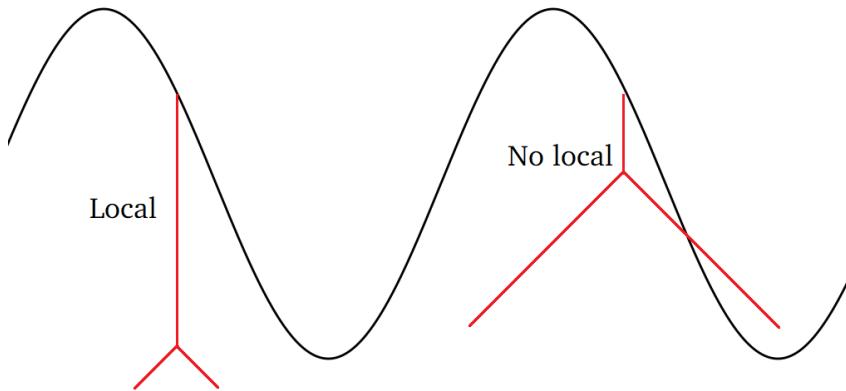


Figura 3.1: Esquema de la limitación experimental de la técnica DLP en relación a la longitud de transporte. Cuando la deformación de la superficie libre es comparable con la longitud de transporte, la técnica permite realizar una determinación *local* de la altura (caso izquierdo en la figura). Sin embargo, cuando la diferencia entre el máximo y el mínimo de la altura del fluido superen una longitud de transporte se genera el efecto de la no-localidad (derecha), que impide relacionar únicamente la intensidad local observada en la superficie libre con la altura local.

descorrelacionada respecto de la dirección incidente.

Para que la técnica opere correctamente se debe asegurar que la luz que llega a la superficie esté *lo suficientemente* difusa. Para asegurarlo, lo ideal es que durante las mediciones se mantenga la altura base del fluido difusor a más de una longitud de transporte. Por otro lado, al perturbar la superficie y generar ondas se debe constatar que la diferencia de altura entre un máximo y un mínimo no exceda la longitud de transporte, ya que esto genera efectos de no-localidad e impide la correcta resolución de la superficie. Esto es debido a que, si el máximo y el mínimo de altura están a más de  $\lambda'$ , la luz que llega a una región de la superficie puede contener información sobre otras partes de la misma. En la Fig. 3.1 se muestra un esquema de este efecto tomado de la Tesis doctoral de Wright [?].

Cuando la luz se encuentra en un medio en donde existen una gran cantidad de dispersores, una ley experimental macroscópica fundamental es la ley de Lambert-Beer que cuantifica la atenuación de la intensidad de la luz incidente al atravesar un medio. La misma predice que la intensidad saliente se vincula con la entrante de forma exponencial,

$$I_s = I_0 e^{-(h-h_0)/L} \quad (3.3)$$

donde  $I_s$  es la intensidad saliente,  $I_0$  es la intensidad entrante,  $h$  es la longitud recorrida en el medio,  $h_0$  la longitud inicial desde donde incide la luz y  $L$  un factor de mérito vinculado al medio (directamente asociado a la atenuación en el medio en cuestión). De esta manera, en un campo de alturas en dos dimensiones, la altura de fluido está vinculada a la intensidad acorde a la siguiente relación

$$h(x, y) - h_0 = L \ln(I_0/I(x, y)) \quad (3.4)$$

Para implementar esta técnica en el laboratorio fue necesario **a**) elegir el agente dispersor, **b**) encontrar el valor de la longitud de transporte y **c**) determinar experimentalmente el valor del factor de mérito,  $L$ , y así calibrar la relación entre altura de la superficie del fluido y la

intensidad.

## 3.2. Implementación de la técnica en el laboratorio

En esta Sección se explica cómo se implementó la técnica DLP al laboratorio. El montaje de esta consiste en alinear una fuente de luz uniforme al recipiente con el fluido difusor, donde se adquiere la información de la intensidad saliente mediante una cámara. Además se detalla qué recaudos se tomaron con el objetivo de asegurar que se trabajó dentro de las aproximaciones realizadas de la teoría de la técnica.

### 3.2.1. Medición de la longitud de transporte

La técnica requiere de dos aproximaciones. La primera es que la luz incidente llegue a la superficie *lo suficientemente* difusa. Más rigurosamente, esta condición implica que la mínima altura de la superficie del fluido se encuentre, por lo menos, a más de una longitud de transporte,  $\lambda$ . La segunda condición es que la distancia máxima entre el máximo y el mínimo de altura no exceda una longitud de transporte (debido a que, si esto no ocurre, se deslocalizaría la información de cada punto). Por ello fue necesario en principio decidir el agente difusor a utilizar y luego medir el valor de  $\lambda$  para este.

La técnica requiere que el fluido estudiado sea difusor para que la intensidad se atenúe a medida que atraviesa el medio. Wright originalmente utilizó partículas esféricas de  $20\ \mu\text{m}$  de diámetro y estudió la respuesta de la dispersión en dos concentraciones distintas (0.2% y 0.4% de concentración de dispersores en agua). Otros autores optaron por difusores más económicos, como soluciones lipídicas [48] o leche [49]. Debido a los reportes exitosos de la implementación de la técnica utilizando otros agentes, sumado al costo económico y operacional involucrado al trabajar con partículas de estas características, se optó por implementar la técnica utilizando leche. Asimismo, debido a la disponibilidad de la información sobre las características del producto, se decidió utilizar la leche marca “La Serenísima”.

Para ello se reprodujo el montaje propuesto por Wright en su Tesis doctoral [?]. El mismo se puede ver en la Fig. 3.2, el cual consiste en una cuba ( $30 \times 30 \times 10\ \text{cm}^3$ ) con el fluido difusor a una altura base  $h_0$ , a la que se ilumina por debajo con un láser. El haz del láser, al viajar a través de un medio difusor, se dispersa, generando que la forma puntual del mismo se abra en un patrón aproximadamente gaussiano sobre la superficie saliente. Este patrón es posteriormente medido con una cámara. El procedimiento consistió en tomar fotos del mismo a medida que se disminuía la altura del fluido.

Una vez tomadas las fotos, se estima el ancho promedio de los patrones para cada altura de fluido. Esto se logró buscando el centro de los patrones y calculando el radio a partir del cual se concentraba el 75% de intensidad dentro de la circunferencia definida,  $R_{75}$ . Se obtuvieron resultados más consistentes con esta metodología, a diferencia de, por ejemplo, ajustar una distribución gaussiana bidimensional al patrón y obtener su desviación estándar (debido a que, a medida que la altura de fluido disminuía, el patrón se asimilaba más a una función escalón que a una gaussiana). Se muestra en la Fig. 3.3 un gráfico del ancho del patrón,  $R_{75}$ ,



Figura 3.2: Montaje para la determinación de la longitud de transporte. Un haz láser de He-Ne (abajo a la derecha) incide sobre un espejo a  $45^\circ$  que lo redirecciona hacia la base de la cuba de acrílico que contiene el líquido de trabajo. Una cámara (arriba en el esquema) captura una vista superior del *spot lumínico* que la difusión de la luz genera.

en función de la altura de la capa de fluido  $d$  para una mezcla de agua destilada por doble ósmosis (94%) y leche (6%) de tenor graso 3%.

Se puede ver como la relación entre ambas se puede modelar como lineal en un cierto rango. A partir de una longitud  $\lambda \approx 2$  cm la linealidad se rompe rápidamente. No se pudo obtener datos para alturas menores debido a que el haz del láser penetraba casi sin atenuarse y hubiese dañado la cámara. Esta longitud que divide estos dos regímenes es la que se denominará longitud de transporte, un estimador de que, para longitudes menores a esta, existe todavía correlación entre la información entrante y la saliente. Dicho de otra manera, la luz no se dispersa *lo suficiente* como para considerarla luz difusa. A pesar de que existe un grado de imprecisión asociado a la elección de  $\lambda$ , se estimó a la longitud de transporte como el primero de los puntos que se desvía más de dos desviaciones estándar del ajuste lineal de los últimos puntos.

Se midió la longitud de transporte dos mezclas posibles con distintas concentraciones de leche. La primera estaba compuesta por agua destilada al 90% y leche al 10%, mientras que la segunda por agua destilada al 94% y leche al 6%. De la primera mezcla se obtuvo una longitud de transporte  $\lambda_1 = 0.8 \pm 0.1$  cm, mientras que de la segunda una de  $\lambda = 2.0 \pm 0.1$  cm. Debido a que el tipo de estructuras que se quieren resolver tienen una amplitud más

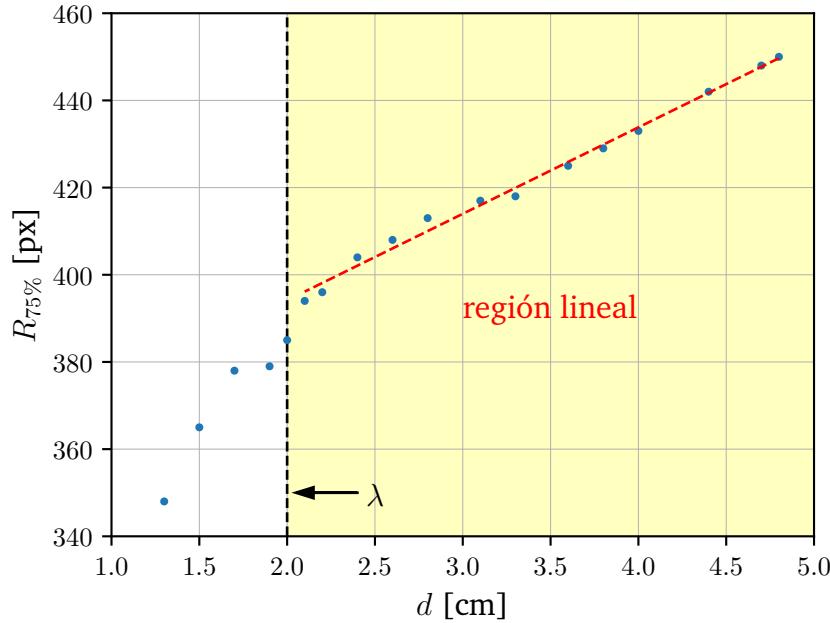


Figura 3.3: Radio correspondiente al 75 % de la intensidad del spot circular observado sobre la superficie libre, en función de la profundidad de la capa de fluido empleada. Se observa una región de correlación lineal entre ambas variables, señalada en amarillo. La linea vertical sitúa entonces la ubicación de la longitud de transporte,  $\lambda \simeq 2.0$  cm, determinada experimentalmente.

cercana a  $\lambda_2$ , se optó por la segunda mezcla.

Se realizaron pruebas con leche de tenor graso 0% pero las longitudes de transporte obtenidas eran significativamente menores para estas concentraciones, por lo que se decidió trabajar directamente con leche de tenor graso 3%.

### 3.2.2. Calibración

Una vez determinado el fluido difusor a utilizar (94 % agua y 6 % leche) y caracterizada su longitud de transporte ( $\lambda = 2.0 \pm 0.1$ ) cm se procedió a calibrar la técnica. Este procedimiento consistió en determinar el valor de la constante experimental  $L$  de la ley de Lambert-Beer, de forma de poder establecer la relación entre intensidad y altura utilizando la ecuación (3.3). Para ello se realizó una pequeña modificación al montaje anterior en donde, a diferencia de utilizar un láser, se utilizó un panel de LED de  $40 \times 40$  cm<sup>2</sup>. Como se explicó en la Sección anterior, la relación entre la altura del fluido y la intensidad medida está dada por la ecuación (3.4),  $h(x, y) = h_0 - L \ln[I(x, y)/I_0]$ . De esta manera, al medir la intensidad promedio para distintas alturas de la capa de fluido, se puede obtener una relación lineal entre la altura y el logaritmo de la intensidad, que luego mediante un ajuste por cuadrados mínimos se obtiene el valor de la pendiente,  $L$ .

Se realizó un barrido de altura del fluido, en donde para cada una se tomó una imagen de  $1024 \times 1024$ . De estas se recortó la sección central de  $200$  px<sup>2</sup> debido a que la iluminación del panel LED no era perfectamente uniforme, sino que tomaba un valor aproximadamente constante en la región central y decae hacia los bordes. Esto se puede observar en la Fig. 3.4., en donde se muestra un perfil de la iluminación para una altura de fluido de  $h = 4.8$ .

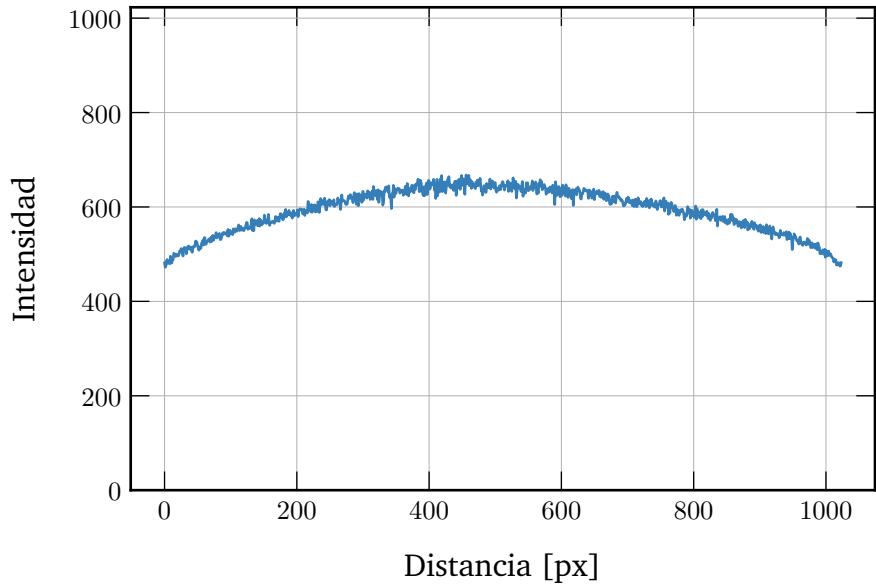


Figura 3.4: Perfil de intensidad típico observado sobre una línea de la cámara (en u.a.), en función de la posición sobre el CCD (en px). Se observa la inhomogeneidad de la iluminación producida por el tamaño finito del panel LED. Estos efectos se compensan, en nuestra técnica, restando el fondo de iluminación.

Por este motivo se eligió esta región representativa de la imagen para luego tomar el promedio de intensidad. De esta manera para cada altura se tenía un valor de intensidad promedio. Esto se muestra en la Fig. 3.5, en donde se muestra la intensidad promedio de la región central de la imagen en función de la altura de la capa de fluido, junto al ajuste por cuadrados mínimos. El valor ajustado para la constante corresponde a  $L = (7.738 \pm 0.003)$  cm cuyo error fue el coeficiente asociado a la pendiente de la matriz de correlación.

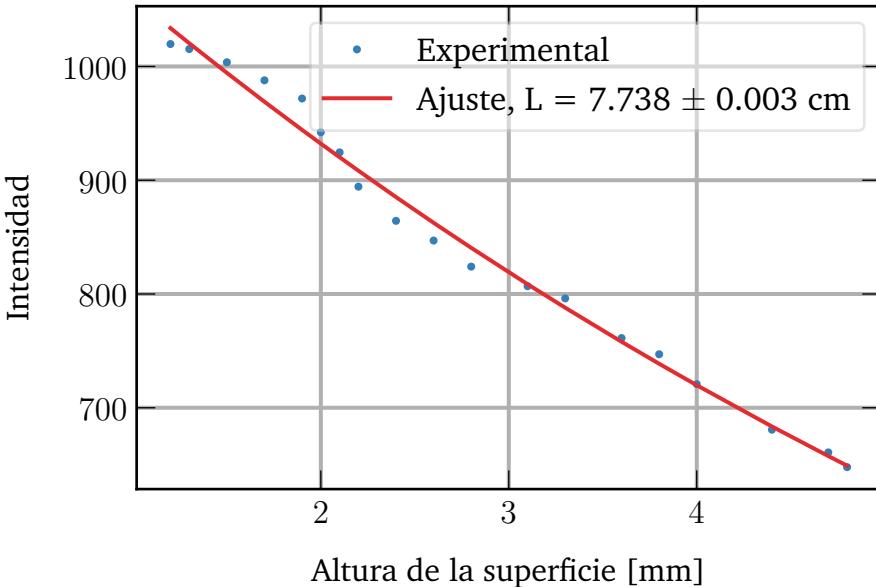


Figura 3.5: Intensidad en función de la altura del fluido junto con el ajuste por cuadrados mínimos del parámetro  $L$ .

### 3.3. Montaje

Las mediciones se realizaron en una cuba de acrílico de 1 cm de ancho (polimetacrilato de metilo o PMMA) de  $198 \times 77 \times 15 \text{ cm}^3$ . Esta se llenó con la mezcla de 4% de leche "La Serenísima" de tenor graso 3% y 94% de agua destilada mediante un sistema de ósmosis inversa de doble paso para filtrar cualquier tipo de impureza. La altura del fluido base se mantuvo siempre en los 4.8cm (para estar por encima de las 2 longitudes de transporte y asegurar que la luz incidente sea difusa). Debajo se colocó el panel de LED de  $40 \times 40 \text{ cm}^2$ , cuyo tamaño se eligió de manera de maximizar la región de observación. Para generar un régimen de turbulencia de ondas es necesario inyectar energía al fluido de forma continua, de forma tal que el mismo alcance un régimen caótico. Para ello el forzado se generó utilizando dos paletas de  $15 \times 10$  sumergidas aproximadamente hasta la mitad, controladas independientemente con servomotores lineales LinMot servocontrolados con una fuerza máxima de 47 N y una precisión de 0.01 mm. La duración máxima de una señal con la que se alimenta a estos motores es de 30 s para luego volver a repetirse, por lo que el tiempo máximo de una medición es 30 s. Para generar el régimen caótico se alimentó a los motores con ruido blanco en el rango de 0–4 hz (es decir, en el régimen de turbulencia de ondas de gravedad), con fases y amplitudes aleatorias (como es usual en experimentos de turbulencia de ondas gravito-capilares [50]). La amplitud máxima utilizada fue de 30 mm, por lo que en adelante se utilizarán porcentajes de esta para referirse a la amplitud máxima utilizada en una determinada medición. De esta manera se pretendió excitar predominantemente ondas gravitatorias en donde luego, debido a la cascada de energía, se exciten frecuencias más altas correspondientes a ondas capilares. Además se colocaron en la cuba distintos obstáculos para aumentar la no-linealidad de las interacciones y romper la simetría rectangular. Las imágenes se tomaron utilizando la misma cámara ultrarrápida SA3 Photron. El montaje se muestra en la Fig. 3.6.



Figura 3.6: Montaje experimental completo empleado en las experiencias de turbulencia de ondas gravito-capilares. De abajo hacia arriba, el esquema muestra el panel LED empleado para iluminar el fluido a través de la cuba de acrílico (región central del esquema). En ella, el fluido de trabajo es agitado por medio de dos motores lineales servocontrolados independientes (ubicados en las esquinas superior izquierda y derecha del recipiente). La presencia de tres obstáculos (en la forma de cilindros) introduce reflexiones en el campo de ondas que nutre espectralmente el forzado impuesto. Una cámara ultrarrápida (arriba) captura la intensidad de luz transmitida y permite reconstruir la altura local de la superficie libre.



# CAPÍTULO 4

---

## RESULTADOS

---

En esta Sección se exponen los resultados obtenidos para distintas series de mediciones tomadas con el montaje experimental previamente detallado. En la Sección 5.1 se detallarán los ajustes experimentales utilizados y se explicará cómo se extrajeron los campos de altura. En la Sección 5.2 se mostrará la densidad espectral de potencia obtenida y su compatibilidad con la predicción de Kolmogorov-Zakharov. En la Sección 5.3 se detallará el método utilizado para extraer las isolíneas del campo de altura. Finalmente en la Sección 5.4 se discutirá la compatibilidad entre los resultados experimentales y las predicciones de la teoría de SLE.

### 4.1. Obtención del campo de alturas

El horizonte a donde se apuntó era comparar las isolíneas del campo de alturas del montaje en régimen de turbulencia de ondas con alguna familia de  $SLE_\kappa$ . Para ello fue necesario establecer los parámetros para la extracción de estos campos.

Los campos de altura se obtuvieron utilizando la calibración explicada en el Capítulo anterior (3.4). Las imágenes capturadas por la cámara tenían un tamaño de  $1024 \times 1024$  con una escala de grises con un rango 10 bits, con una intensidad que variaba entre 0 y 1023. Para obtener los campos de altura se debían reemplazar los valores de  $h_0$  (la altura de base, que siempre se mantuvo en  $h_0 = 4.8$  cm),  $L$  (que mediante el ajuste de calibración se determinó como  $L = 7.738$  cm) y por último  $I_0$ , el campo de intensidad correspondiente a la altura base. Para obtener esta última cantidad se midió la intensidad del montaje sin generar oleaje, de manera que la superficie se mantenga llana; luego se tomaron 1000 imágenes, las cuales se promediaron para obtener un campo de intensidad de fondo promedio,  $I_0(x, y)$ , de modo tal de reducir el ruido asociado a fluctuaciones temporales en la iluminación. Finalmente, se aplicó la ecuación (3.4) a cada valor de intensidad medido durante una experiencia para con-

vertir la intensidad en la altura correspondiente, generando una matriz para cada tiempo que se almacenó como un archivo *mat*.

Debido a que la técnica permite una reconstrucción píxel a píxel de la superficie, se observó que existía una rugosidad asociada a la amplificación del ruido en la superficie reconstruida. Por lo tanto se aplicó un filtro gaussiano con desviación estándar de 1 píxel con el objetivo de suavizar las fluctuaciones locales de la imagen. Como la tortuosidad de las curvas es un parámetro relevante debido a la naturaleza fractal de las  $SLE_{\kappa}$ , es importante reducir al mínimo el ruido asociado a esta propiedad. En la Fig. 4.1 se muestra un ejemplo de la reconstrucción de la superficie al forzar los modos normales del sistema (sin obstáculos en el montaje, simplemente se agitó la mesa donde se encontraba, generando que los modos excitados sean los correspondientes a una caja rectangular).

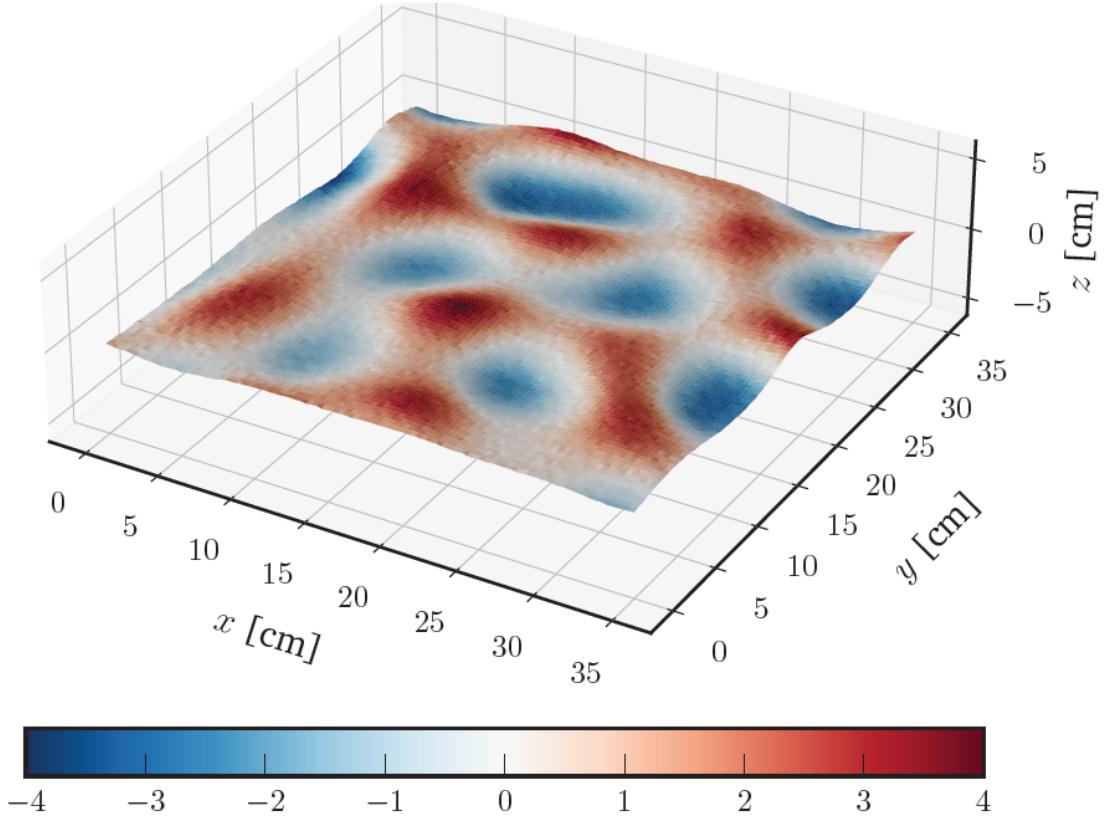


Figura 4.1: Ejemplo de un campo de alturas reconstruido de un patrón ordenado.

Un parámetro con el que se experimentó fue el obturador de la cámara o *shutter*. Este parámetro controla el tiempo de exposición del CCD. Se comenzó tomando un valor de 1/25000 s, obteniendo una escala de grises efectiva de 100 valores (diferencia de valores de grises entre el máximo y el mínimo de altura). Este se pudo aumentar hasta 1/4000 s, obteniendo una escala de grises efectiva de 300 valores y sin saturación en ningún punto. De esta manera se redujo la incertezza asociada a la altura medida. Se muestra en la Fig. 4.2 un ejemplo de la reconstrucción del campo de alturas con la técnica DLP.

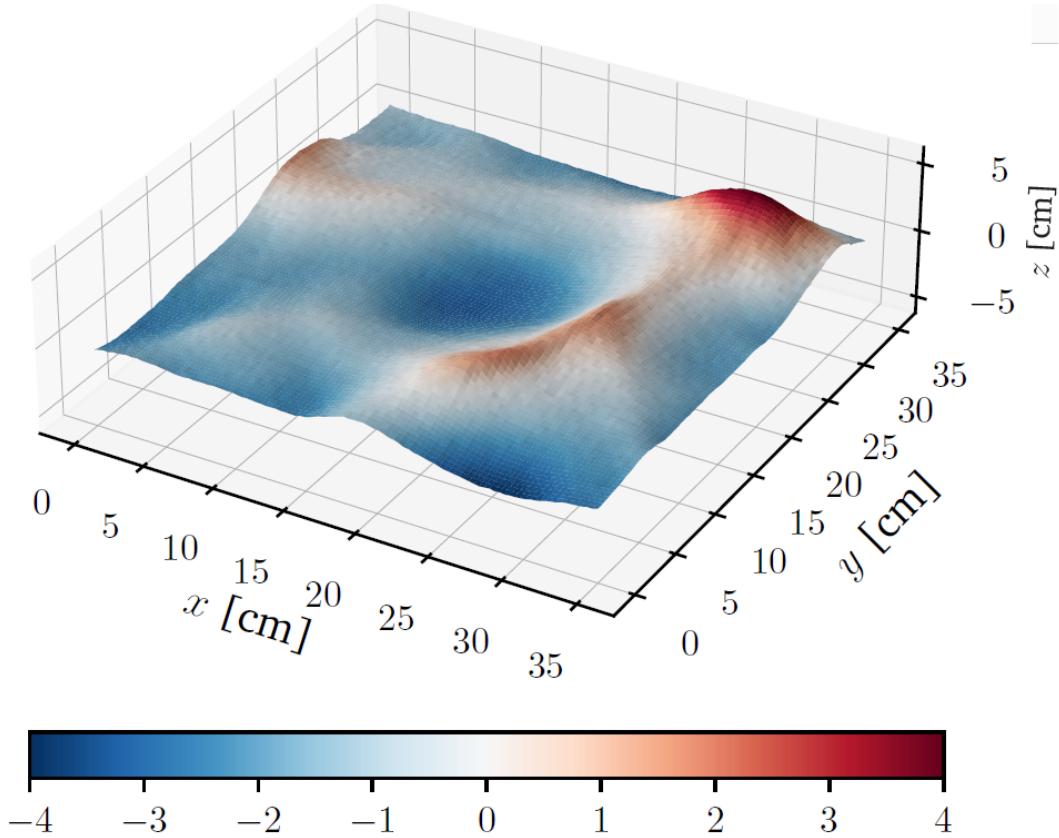


Figura 4.2: Ejemplo de un campo de alturas típico reconstruido a partir de la técnica DLP. Las crestas (valles) de olas se marcan en intensidades crecientes de rojo (azul), mientras que las regiones de altura local neutra, i.e., igual a la altura de reposo de la capa de fluido, se identifican en blanco.

## 4.2. Espectro de energía

En principio, se debió determinar si el régimen estudiado correspondía a turbulencia de ondas. Para ello se estudió la densidad espectral de potencia temporal experimental (2.24), la cual se comparó con los resultados teóricos para ondas de gravedad (2.28). Para ello, utilizando el montaje descripto en el Capítulo anterior, se utilizó una frecuencia de muestreo de 1000 hz. El método utilizado para obtener la densidad espectral consistió en tomar una serie de posiciones equiespaciadas en la imagen y guardar el valor de la altura para todo tiempo. A cada vector con la intensidad en función del tiempo para cada posición se le computó numéricamente la densidad espectral de potencia utilizando el método de Welch, para finalmente realizar el promedio entre todos los vectores extraídos. En la Fig. 4.3 se muestra la densidad espectral de potencia en función de la frecuencia.

Se puede observar que el espectro experimental es compatible con una ley de potencias de  $\omega^{-4}$ , correspondiente a la predicción teórica del espectro de Kolmogorov-Zakharov. De esta manera se puede confirmar que el régimen estudiado es efectivamente turbulencia de ondas.

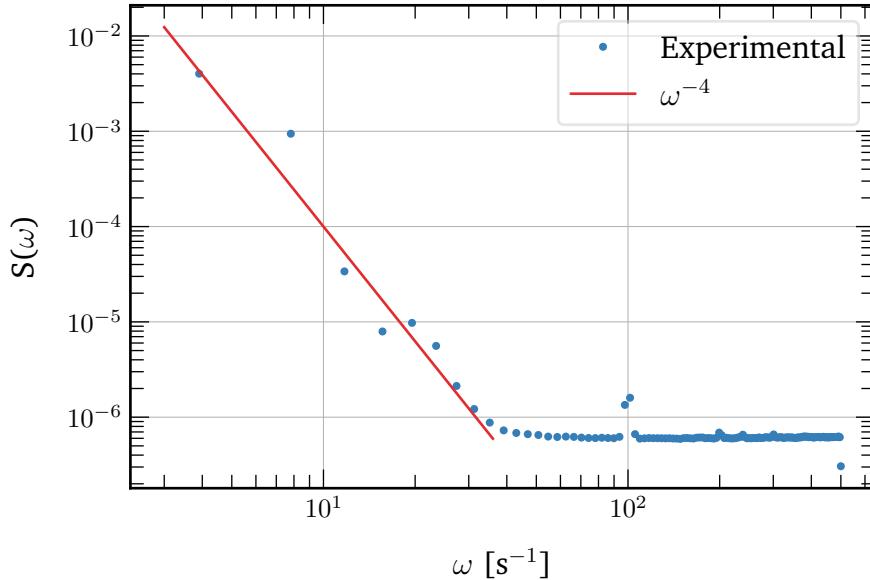


Figura 4.3: Densidad espectral de potencia en función de la frecuencia.

### 4.3. Isolíneas

El análisis propuesto para analizar la compatibilidad entre las isolíneas del campo de altura y las  $SLE_\kappa$  es estadístico, dado que se deben estudiar cantidades como la desviación estándar de las *driving functions*, así como del *winding angle* para distintas longitudes, la probabilidad del ángulo de pasaje a izquierda y finalmente evaluar la dimensión fractal de los *clusters*. Es por ello que necesariamente se requiere un ensamble estadístico de isolíneas representativas del régimen. Se optó por obtener las isolíneas del campo de alturas utilizando la función *contours* de *matplotlib*, debido a que esta devuelve los isocontornos de una determinada altura orientados (es decir, manteniendo la parte positiva hacia la izquierda del contorno), cuestión relevante para el análisis posterior [27]. En la Fig. 4.4 se muestran algunos ejemplos de las isolíneas de altura  $h = 0$ .

Para generar un ensamble de curvas representativo, se decidió medir los campos de altura con una frecuencia de muestreo de 60 hz. Esto se debe a que las isolíneas estudiadas no deben estar correlacionadas para medir sus propiedades estadísticas correctamente. Si se utiliza una frecuencia de muestreo muy alta, las isolíneas correspondientes a dos imágenes contiguas estarán altamente correlacionadas y no serán representativos del fenómeno que se pretende estudiar. Para no cometer este error, además se extrajeron las isolíneas de una de cada diez imágenes, correspondientes a una frecuencia de muestreo de 6 hz. Debido a que la duración máxima de la señal del forzado permitida por los motores era de 30 s, y utilizando esta frecuencia de muestreo, cada conjunto de datos consistió en una serie de 1700 imágenes para las mediciones de las isolíneas (aproximadamente 28.3 s). Se tomó como criterio usar las trazas de más de 1000 puntos, dado que la teoría trata sobre curvas continuas. Otros autores optan por distintas longitudes de curva [27] [51].

Por último, se exploraron distintas intensidades del forzado, variando entre 50 %, 100 % y 110 %, así como la disposición de los obstáculos. Esto se realizó para verificar que estos

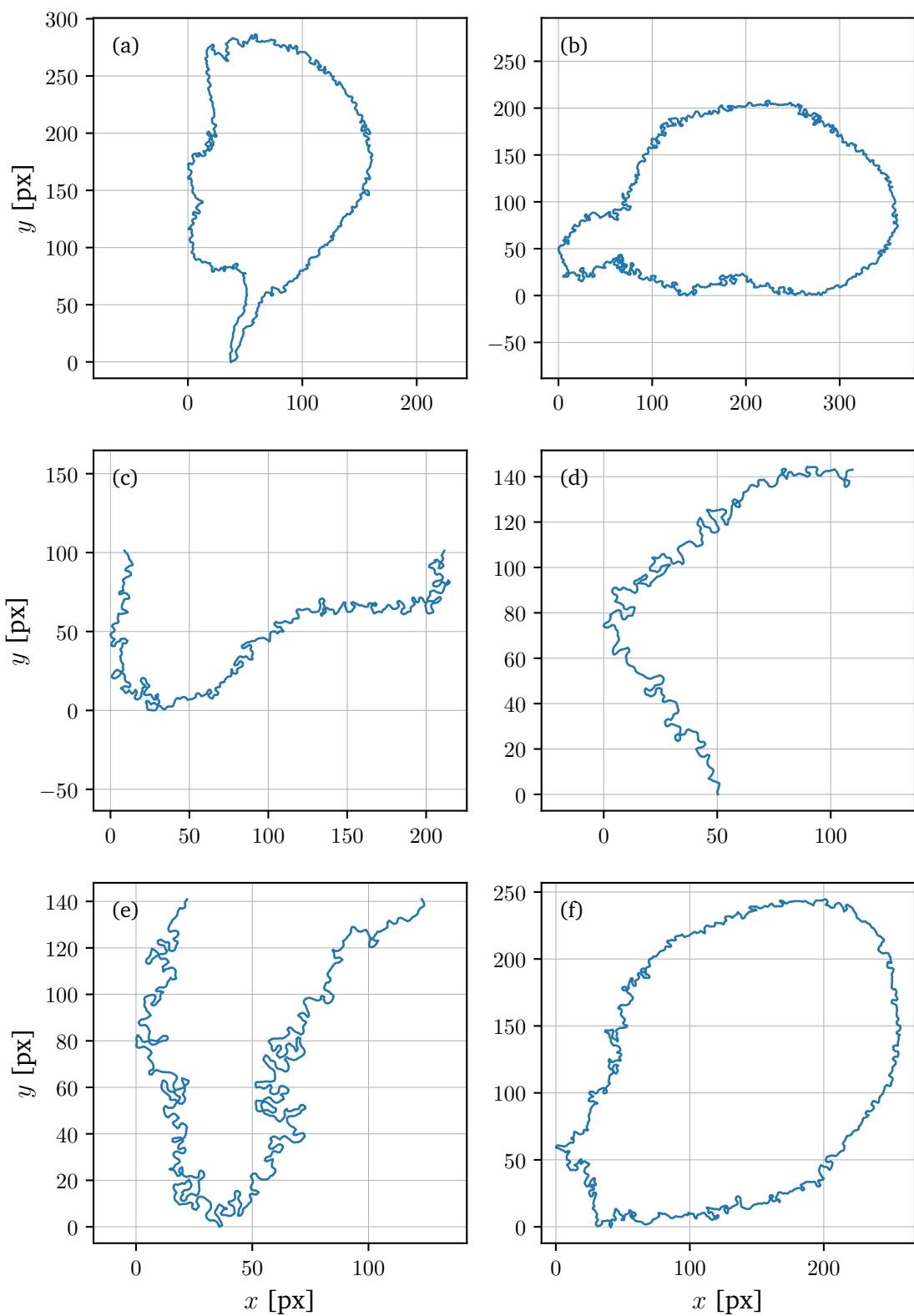


Figura 4.4: Ejemplos de trazas experimentales.

parámetros no modificaban los resultados obtenidos.

## 4.4. Predicciones de la teoría de SLE

Para comprobar que estas isolíneas son compatibles con  $SLE_\kappa$  se comparó las predicciones teóricas de las propiedades de estas curvas descriptas en el Capítulo 3 con los resultados experimentales. Los códigos de análisis utilizados fueron desarrollados en el marco de esta Tesis. Estos estarán disponibles en un *Github* una vez que el trabajo se encuentre publicado. Para comprobar su correcto funcionamiento estos códigos fueron puestos a prueba por trazas generadas mediante dos simulaciones distintas [52] [53], obteniendo resultados que lo verifican.

### 4.4.1. Test directo de SLE

Como se explicó previamente, esta predicción está asociada a que las *driving functions* de las  $SLE_\kappa$  son movimientos brownianos. Para verificar esto se requirió obtener las *driving functions* del ensamble de trazas de forma numérica. Matemáticamente estas se obtenían utilizando la ecuación diferencial de Loewner, sin embargo este procedimiento se puede aplicar para trazas continuas. Kennedy en 2004 diseñó un algoritmo para circundar este problema, en donde se obtiene la *driving function* de forma numérica; este algoritmo se llama algoritmo de *zipper* [54], en donde se aproxima a la curva por una serie de segmentos. Este es el algoritmo utilizado en el marco de esta Tesis para encontrarlas (se puede ver con más detalle en el Apéndice 1).

Para cuantificar la compatibilidad con la de un movimiento browniano lo que se hizo es verificar que: **1)** el promedio de ensamble de las *driving functions* sea nulo,  $\langle \xi_t \rangle = 0$ , y **2)** la varianza escala linealmente con el tiempo de Loewner,  $\langle \xi_t^2 \rangle = \kappa t$ . En la Fig. 4.5 se muestra el ensamble de las *driving functions* correspondiente a las trazas experimentales. La linea negra representa la media de este ensamble para cada tiempo de Loewner, y se puede ver que, dado que la *driving function* debería ser un movimiento browniano en el caso en que estas trazas sean compatibles con  $SLE_\kappa$ , es muy cercano a  $\langle \xi_t \rangle = 0$ .

Por último falta determinar si existe una relación lineal entre la varianza de este ensamble y el tiempo de Loewner. Existe un inconveniente dado que los tiempos de Loewner de las distintas *driving functions* dentro del ensamble no coinciden entre sí. Esto se debe a cómo opera el algoritmo, en donde la grilla de tiempos para cada punto de la traza se obtiene independientemente del resto de las trazas. Por ello se decidió realizar una interpolación lineal, para luego evaluar los valores de las *driving functions* en un vector de tiempos equiespaciados. Para cada tiempo de interpolación se tomó la varianza del ensamble y se construyó un gráfico de la varianza en función del tiempo de Loewner. Se muestra este resultado para una medición en la Fig. 4.6a, en donde además se realizó un ajuste lineal por cuadrados mínimos. En la Fig. 4.6b se muestra este mismo gráfico compensado por el tiempo de Loewner.

Para verificar la linealidad de la varianza se realizó un ajuste de las magnitudes en escala logarítmica en ambos ejes y obtener correctamente el exponente que describe esta evolución,  $\langle \xi_t^2 \rangle = b t^\alpha \rightarrow \ln(\langle \xi_t^2 \rangle) = \ln(b) + \alpha \ln(t)$ . Mediante este procedimiento se obtuvieron valores

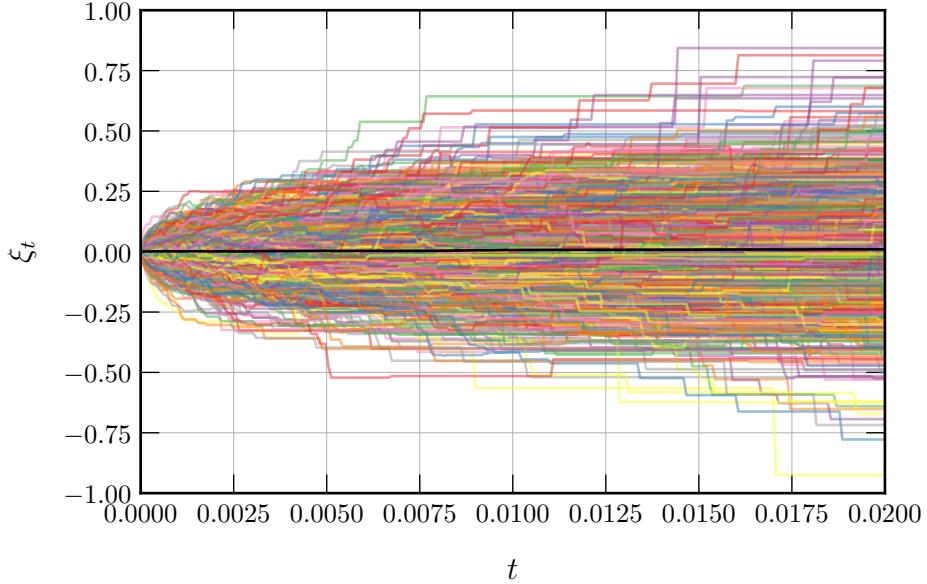


Figura 4.5: *Driving functions* obtenidas de las trazas extraídas de una medición particular. En negro se puede ver el promedio de todas para cada tiempo,  $\langle \xi_t \rangle$ .

para el exponente  $\alpha$  que variaban entre 0.91 en el peor de los casos hasta 1.01, en el mejor. Se consideró que este exponente era lo suficientemente cercano a  $\alpha = 1$  como para tratar la relación entre estas cantidades como lineal. Asumiendo entonces a  $\alpha = 1$ , se realizó otro ajuste para determinar el valor de la difusividad  $\kappa$ . Asumiendo a  $\alpha = 1$ , la pendiente del ajuste entre la varianza y el tiempo de Loewner corresponde a la raíz de la difusividad dado a la predicción de su *driving function*,  $\langle \xi_t^2 \rangle = \kappa t$ . Se varió el intervalo temporal de interpolación para comprobar que este parámetro no cambiaba significativamente el valor de  $\kappa$ . El valor de  $\kappa$  obtenido acorde a este *test* varía entre  $\kappa = (2.979 - 3.172) \pm 0.004$ , dependiendo de la medición. El error fue el coeficiente asociado a la pendiente de la matriz de correlación del ajuste por cuadrados mínimos.

#### 4.4.2. Winding angle

Debido al proceso estocástico que sigue una  $SLE_\kappa$ , la varianza del ángulo de giro acumulado o *winding angle* debería crecer de forma logarítmica con la distancia sobre la curva,  $\langle \theta_j^2 \rangle = \text{cte} + \frac{\kappa}{4} \ln(L_j)$  (ecuación 2.44). Para obtener esta cantidad se midió el ángulo acumulado (detallado en la Fig. 2.6) como el ángulo entre los dos segmentos involucrados en cada punto  $i$  de la traza. Luego, se calculó para cada punto  $i$  la distancia recorrida sobre la curva para cada traza que únicamente consistió en sumar el largo de la curva hasta ese punto. Luego se interpoló la distancia  $L$  sobre la curva para poder comparar los ángulos a una misma distancia, de la misma manera que en el *test* anterior. Finalmente se tomó la varianza para cada valor de la distancia sobre la curva. Se muestra en la Fig. 4.7a la varianza del ángulo de giro en función de la longitud recorrida sobre la curva para un ensamble de trazas y en la Fig. 4.7b el mismo gráfico en escala logarítmica en el eje  $y$ .

El valor ajustado para este *test* es de  $\kappa = (3.25 - 3.71) \pm 0.02$ . Es importante notar que,

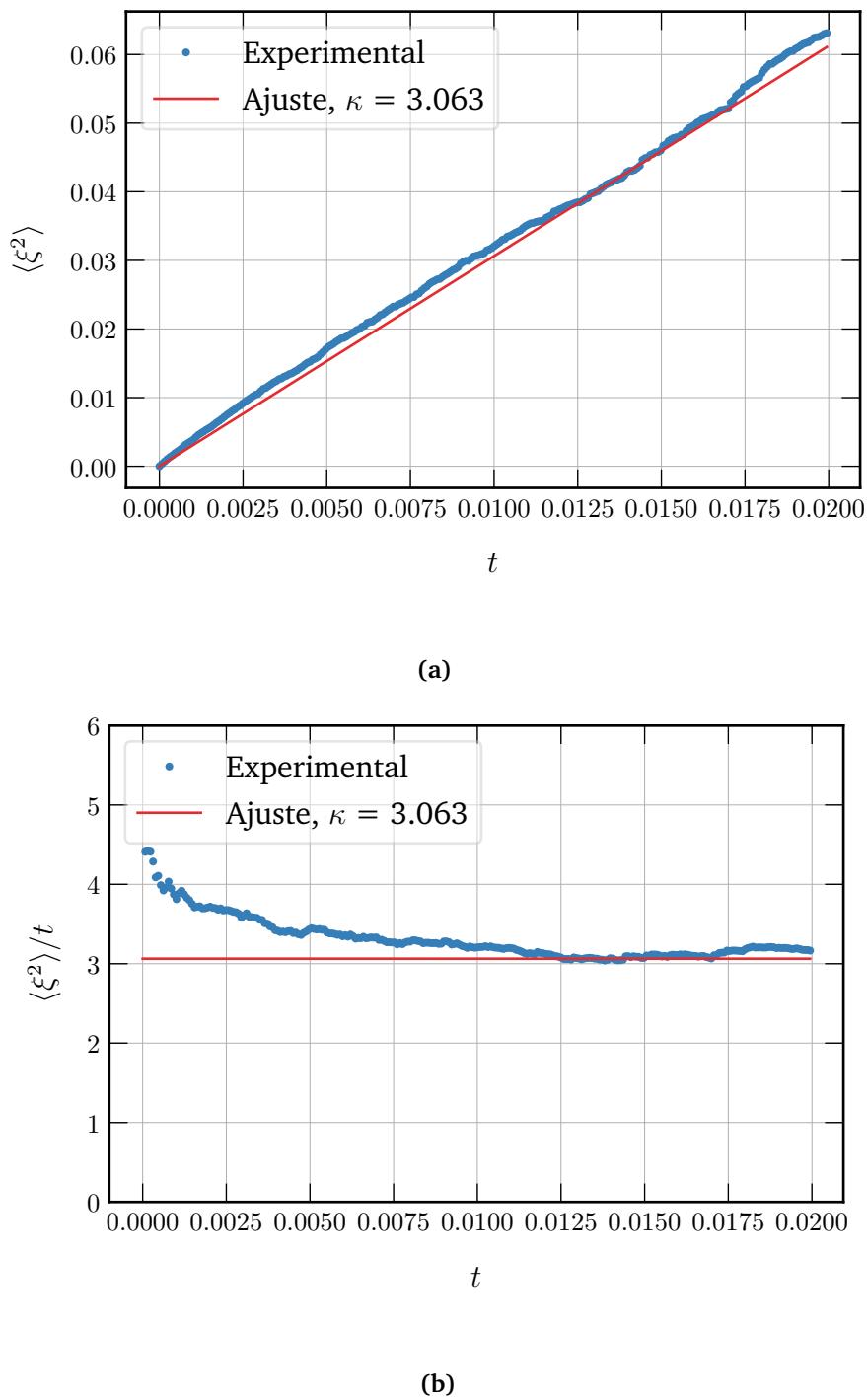


Figura 4.6: Varianza de las *driving functions* en función del tiempo de Loewner. En (b) se muestra el mismo valor que en (a) compensado por el tiempo.

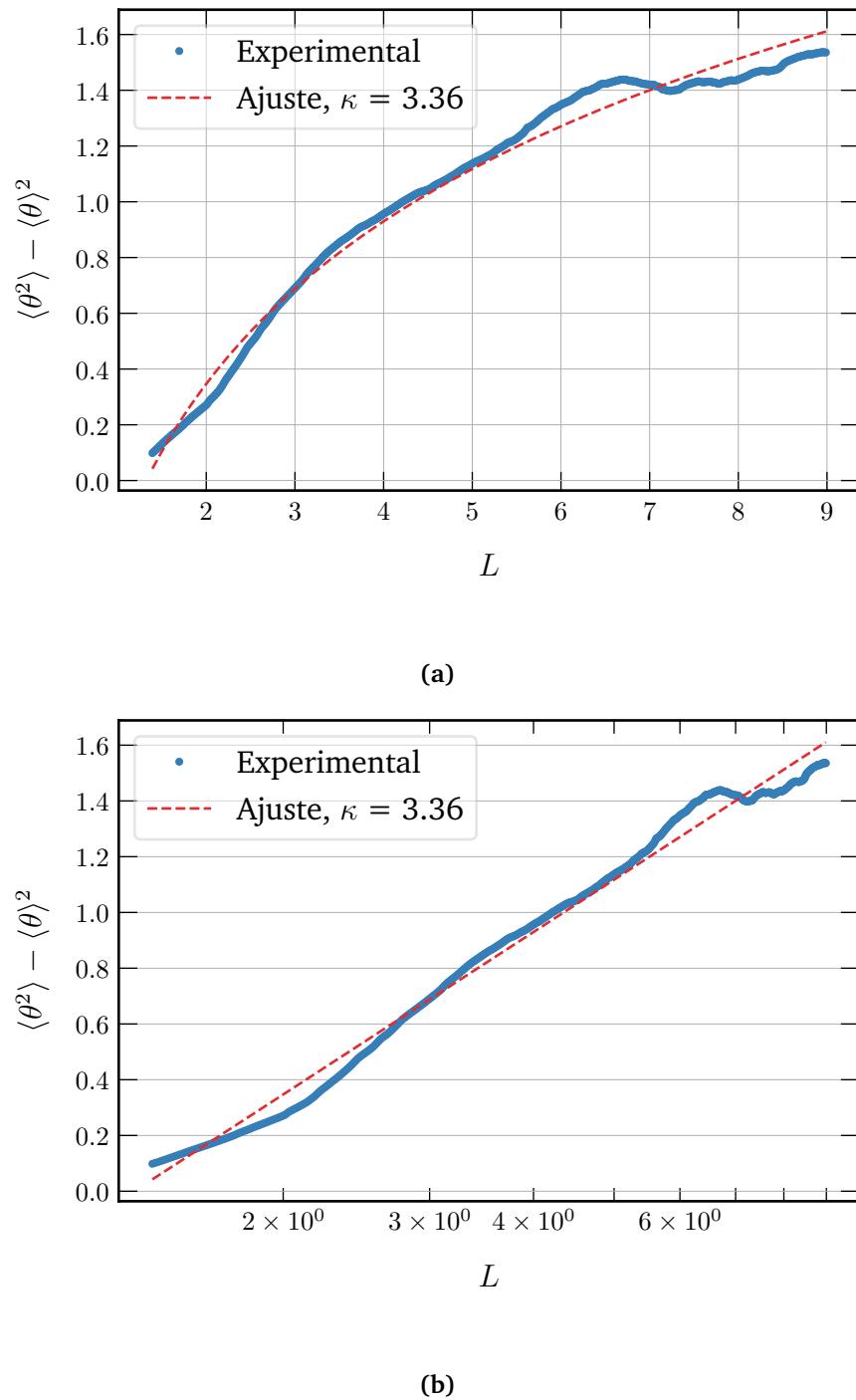


Figura 4.7: Varianza del *winding angle* en función de la distancia  $L$  recorrida sobre la curva en escala (a) lineal y (b) logarítmica.

aunque no se solapen con los resultados anteriores, esta cantidad es poco precisa dado que, al acumular el ángulo entre segmentos sobre la curva, los errores se acumulan a medida que la distancia  $L$  es mayor. Esto indica que el ajuste es más fiel a longitudes cortas (y esto se tuvo en cuenta al realizar el ajuste, tomando una longitud final,  $L_{\text{final}}$ , y luego ajustando).

Por otro lado, esta cantidad es muy sensible al filtro gaussiano aplicado para suavizar el campo de alturas. Esto es esperable debido a que, a mayor tortuosidad de la curva, mayor será la varianza en el ángulo acumulado. Para dar una idea, al no aplicar ningún filtro se obtuvieron valores de la difusividad del orden de  $\kappa \simeq 42$ , lo cual no tiene sentido dentro de la teoría de  $SLE_\kappa$  ya que el máximo valor es 8, y así también al aplicar un filtro gaussiano con una varianza mayor o igual a 3 píxeles se obtienen valores de difusividad  $\kappa < 1$ . Esto sugiere que esta cantidad está sujeta a una gran variabilidad y no debe ser tenida en cuenta como definitoria sino indicativa del comportamiento estocástico de las trazas.

#### 4.4.3. Probabilidad de pasaje a izquierda

Esta predicción está asociada a que las  $SLE_\kappa$ , cuya evolución escapa al infinito, existe una forma funcional analítica de la probabilidad asociada al ángulo con el que las mismas cruzan un semicírculo de radio arbitrario. La fórmula de la probabilidad está dada por la ecuación (??),

$$P(\kappa, \phi) = \frac{1}{2} + \frac{\Gamma(4/\kappa)}{\sqrt{\pi} \Gamma((8-\kappa)/2\kappa)} \cot(\phi) {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{4}{\kappa}; \frac{3}{2}, -\cot^2 \phi\right)$$

Debido a que las trazas obtenidas experimentalmente son finitas, el procedimiento más usual para poder medir esta propiedad es aplicar una transformación conforme que lleve al punto final de la traza (que en el caso de trazas cordales, este está sobre el eje real) al infinito, dado que además estas transformaciones no cambian las propiedades de interés. Esto se hace mediante una transformación de Moebius (por ejemplo en [27]) o una de Schwartz-Christoffel [29]. En este trabajo se optó por la de Moebius debido a su simplicidad en la implementación. En la Fig. 4.8a se muestra un gráfico de esta probabilidad en función del ángulo para el ensamble de trazas, junto con la predicción teórica para un  $\kappa = 3.00$  para un radio  $R = 0.048$ . En la Fig. 4.8b se muestran los residuos.

Para determinar el valor de la difusividad se implementó un código de minimización de la distancia entre la predicción teórica y la curva experimental. El mismo consistía en calcular la probabilidad de pasaje a izquierda de un conjunto de trazas y buscar el valor de  $\kappa$  que minimizaba la integral del módulo de la diferencia entre ambas. Es decir, el valor de  $\kappa$  que reduce la integral del módulo de los residuos. En la Fig. 4.9 se muestra como ejemplo de este algoritmo un gráfico de la integral del módulo de los residuos en función del  $\kappa$  para un radio  $R = 1.00$ , obteniendo un valor  $\kappa_{\text{mín}}$  en el mínimo de la función,  $\kappa_{\text{mín}} = 3.00$ .

Existe además un grado de arbitrariedad asociado a la elección del radio para trazas numéricas. Para curvas fractales, continuas e infinitas la predicción se debería cumplir para todo valor de  $R$ . Sin embargo para curvas finitas es una aproximación que, al menos, se debería cumplir bien para radios pequeños. Esto es debido a que, al aplicar una transformación de Moebius que mapea el punto final de la traza al infinito, la traza se rescala; la misma genera que aumente la distancia entre los puntos más cercanos al punto final de la curva y la reduzca

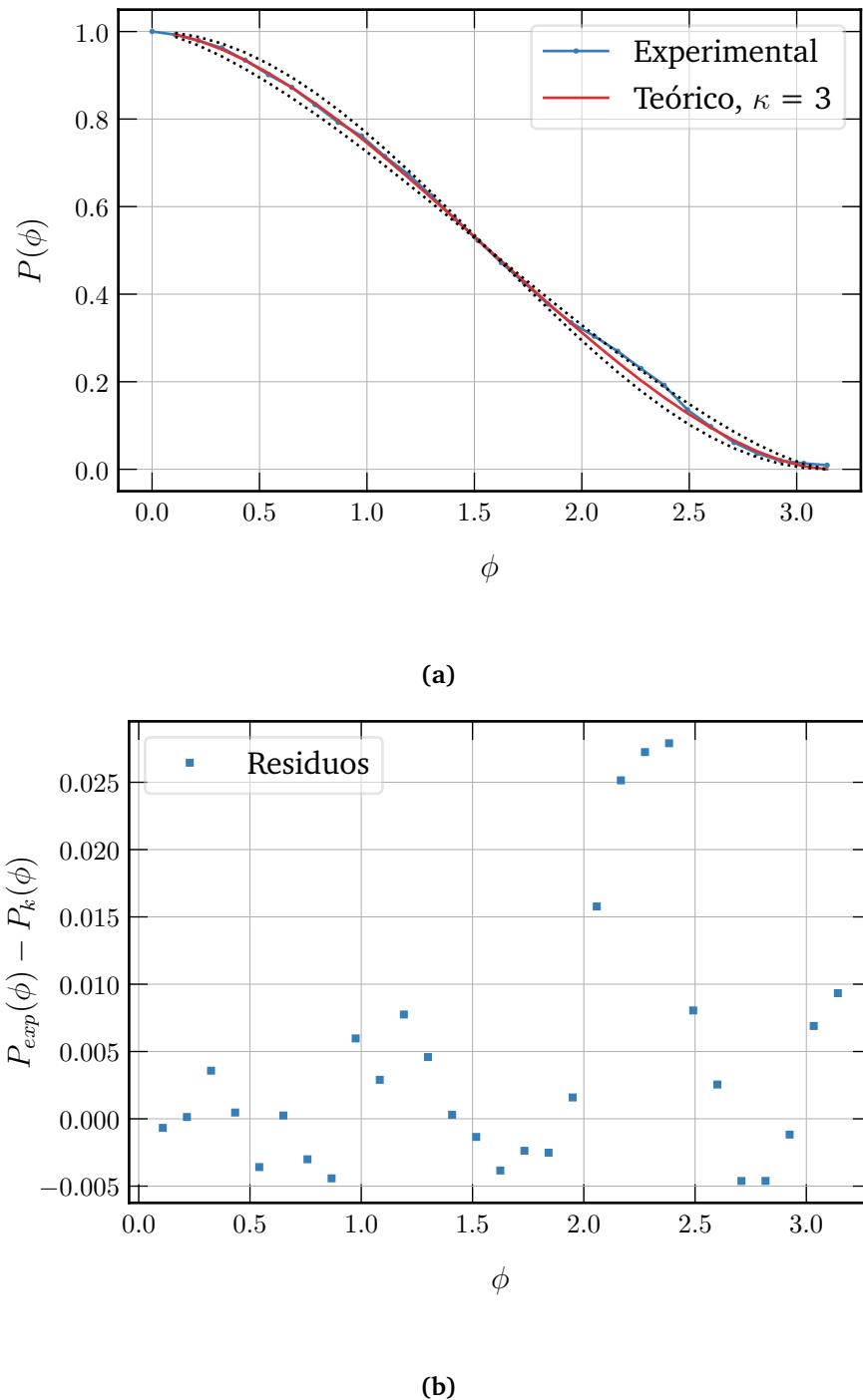


Figura 4.8: Probabilidad de pasaje a izquierda para  $R = 1.00$ . En (a) se compara la predicción teórica de la probabilidad para un valor de  $\kappa = 3.00$  contra los datos experimentales y en (b) se muestran los residuos.

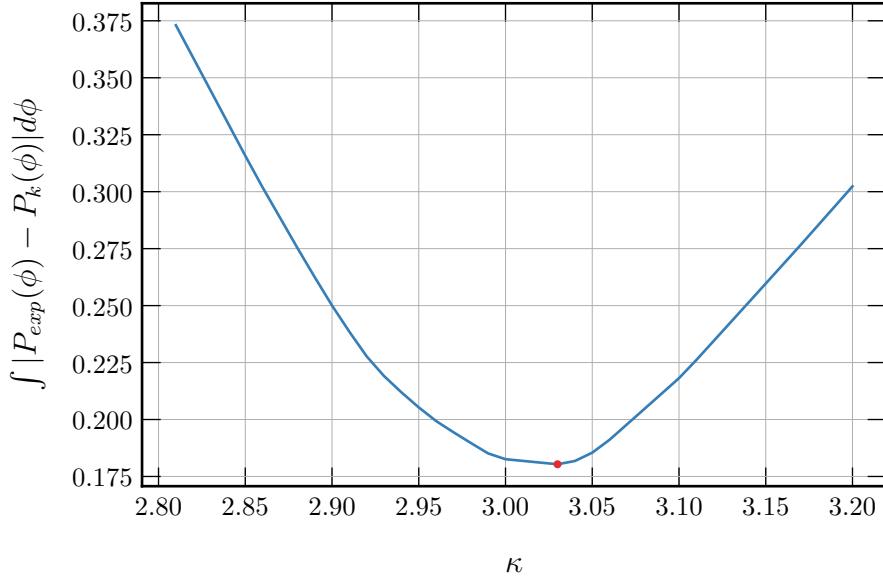


Figura 4.9: Minimización paramétrica de la difusividad para este *test*. El punto rojo indica el  $k_{min}$ .

para los puntos más alejados. Es por ello que el grado de resolución de la traza en puntos finales sea muy pobre. Además el semicírculo debe incluir una suficiente cantidad de puntos para poder aproximar a la traza como continua y reducir el error de determinación del cruce.

Para cuantificar el efecto de esta arbitrariedad se buscó el valor mínimo de la difusividad acorde a la minimización paramétrica,  $\kappa_{\min}$ , para una serie de radios equiespaciados en escala logarítmica. En la Fig. 4.10 se muestra el valor de  $\kappa_{\min}$  en función del radio. Las líneas verticales rojas indican la distancia promedio respecto del origen a la que se encuentran los primeros 100 puntos de la curva. Es decir, el punto número 100 de una traza de este ensamble se encontrará a una distancia promedio ilustrada por la línea roja. Es razonable pensar entonces que los radios a tener en cuenta se encuentra por lo menos después de la linea roja (ya que las curvas en promedio tienen 2235 puntos).

Se puede observar que existe un rango de valores de  $\kappa$  entre la recta violeta y la naranja que dependen del radio elegido. Este rango es aproximadamente  $\kappa = 2.35 - 2.78$ , con un valor medio de  $\kappa = 2.64 \pm 0.21$ , en donde el error de cada ensamble está asociado a la desviación estándar de los residuos y propagados en función de las mediciones realizadas.

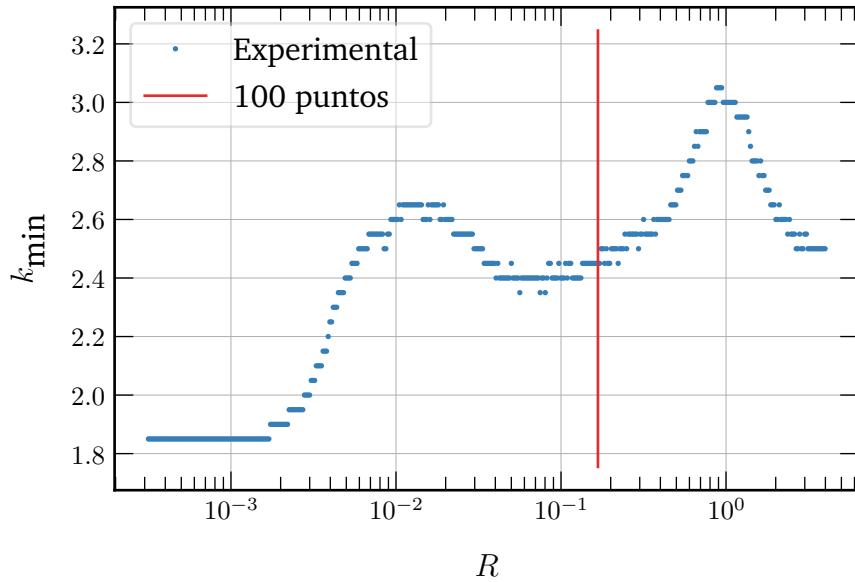
#### 4.4.4. Dimensión fractal y relación de Duplantier-Schramm

Finalmente, la última predicción establece una relación entre el radio de giro y el área de las trazas cerradas, dada por las ecuaciones (2.39) y (2.40)

$$A = R_g^D$$

$$D = 2 - \frac{(8 - \kappa)(3\kappa - 8)}{32\kappa}$$

Para obtenerla se extrajeron las trazas cerradas (estas conformaban alrededor de un 10% del ensamble de trazas) y se les calculó el radio de giro y el área. Se obtuvo el valor del exponente

Figura 4.10: Valor mínimo de  $\kappa$  para cada radio.

$D$  ajustando mediante cuadrados mínimos las cantidades en escala logarítmica. Finalmente se obtuvo el valor de  $\kappa$  utilizando un método de punto fijo aplicado a la ecuación del exponente  $D$  (2.40). En la Fig. 4.11 se muestra el radio de giro en función del área de las trazas cerradas.

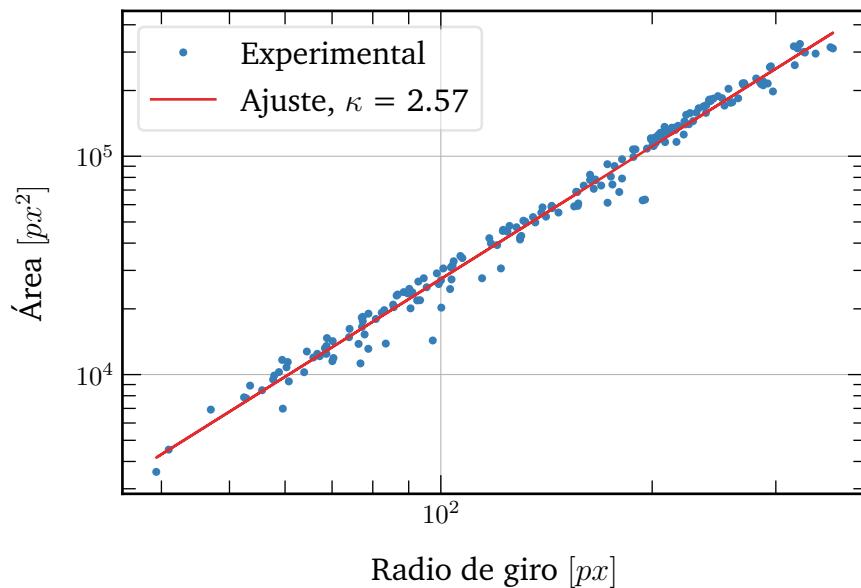


Figura 4.11: Radio de giro en función del área.

El valor obtenido para la difusividad fue de  $\kappa = (2.52 - 2.77) \pm 0.15$ , en donde el error de cada ensamble está asociado a la desviación estándar de los residuos y propagados en función de las mediciones realizadas. A pesar de la disminución en el número de trazas para realizar este *test*, se puede ver claramente la relación lineal de las cantidades en escala logarítmica. Esto indica que el tamaño de la muestra es suficiente para una estimación del valor de  $\kappa$ .

	<b>Medición 1</b>	<b>Medición 2</b>	<b>Medición 3</b>	<b>Medición 4</b>
Forzado (%)	100	110	50	100
Trazas	1630	2183	1448	2030
<b>Test directo</b>	$3.172 \pm 0.004$	$2.979 \pm 0.004$	$3.012 \pm 0.002$	$3.063 \pm 0.008$
$t_{\text{final}}$	0.025	0.023	0.040	0.020
$\alpha$	0.98	0.93	1.00	0.92
<b>Winding angle</b>	$3.57 \pm 0.01$	$3.25 \pm 0.02$	$3.71 \pm 0.01$	$3.36 \pm 0.02$
$L_{\text{final}} [\text{px}]$	8.0	8.0	11.4	9.0
<b>LPP</b>	$2.66 \pm 0.29$	$2.69 \pm 0.19$	$2.35 \pm 0.16$	$2.72 \pm 0.24$
<b>Dimensión fractal</b>	$2.77 \pm 0.13$	$2.60 \pm 0.13$	$2.86 \pm 0.12$	$2.57 \pm 0.08$
Trazas cerradas	142	155	82	194

Tabla 4.1: Valor de la difusividad obtenido para los cada *test* y para cada medición junto con los parámetros utilizados.

## 4.5. Resumen de los resultados

Debido a la variedad de resultados de los distintos tests, se muestran los valores obtenidos para la difusividad en la Tabla 4.1 de acuerdo a cada uno. También se especifican otras cantidades relevantes como la intensidad del forzado utilizado y la cantidad de trazas consideradas.

Estos resultados muestran una compatibilidad entre las isolíneas experimentales con evoluciones estocásticas de Schramm-Loewner. En particular, se puede observar que la constante de difusividad se encuentra en un rango entre  $\kappa = 2.50 - 3.20$  (omitiendo los resultados del *winding angle* y de la probabilidad de pasaje a izquierda, que no se tienen en cuenta debido a los problemas mencionados en la Sección anterior). Esto indica que las isolíneas pertenecientes a un régimen de turbulencia de ondas gravito-capilares presentan una tortuosidad similar a las de un *self-avoiding random walk* (SAW) [55], para el cual se asocian la familia SLE<sub>8/3</sub>. Además, el rango de valores encontrado es significativamente menor que el encontrado en la investigación de Bogomolny en su estudio de sistemas de ondas aleatorias [41]. La Tabla 4.2 esquematiza el rango de difusividad encontrado para este sistema y su comparación con el valor para otros sistemas. El estudio realizado en esta Tesis permite ubicar al fenómeno en una clase de universalidad que es mayor a los valores obtenidos para *spin glasses* y menores a turbulencia rotante.

1.04	Camino más corto en percolación [46]
1.73	<i>Loop-erased random walks</i> en percolación [28]
2	Modelos tipo <i>sandpile</i> [?]
2.24	Hojas de grafeno [30]
2.32	<i>Spin-glasses</i> [38]
2.50	<b>Turbulencia de ondas (mínimo)</b>
2.67	Cristales KPZ [42], costa de Bretaña [?] y SAW [55]
3	Superficie del $\text{WO}_3$ [?]
3.20	<b>Turbulencia de ondas (máximo)</b>
3.6	Turbulencia rotante [51]
5.9	Turbulencia bidimensional [27]
6	Funciones de onda aleatorias [41], fronteras de Ising cerca del punto crítico [44] y turbulencia bidimensional débilmente compresible [39]

Tabla 4.2: Valores de la difusividad para distintos sistemas físicos.



# CAPÍTULO 5

---

## CONCLUSIONES

---

El objetivo de este trabajo fue detectar invariancia conforme en un experimento de turbulencia de ondas gravito-capilares. Para hallar esta propiedad se utilizó el marco teórico de SLE en donde, dado que esta familia de curvas presentan esta simetría, se buscó compatibilizar a las isolíneas de altura de la superficie libre con estas evoluciones. Para ello se implementó la técnica de medición *DLP* para medir la altura de la superficie libre del fluido. Ésta técnica se eligió dado que permite la detección píxel a píxel del campo de alturas del fluido estudiado, cuestión de vital importancia dado que las  $SLE_\kappa$  son curvas fractales y por ello la reducción del error en su detección está necesariamente asociado a la resolución de la mayor cantidad de escalas posibles.

Una vez comprobado que el montaje experimental reproducía correctamente un régimen de turbulencia de ondas (utilizando la densidad espectral de energía y corroborando que la ley de potencias que seguía iba como  $\omega^{-4}$ ) y que la técnica experimental funcionaba correctamente, se continuó por extraer las trazas experimentales correspondientes a isolíneas de altura  $h = 0$ . Para estudiar la compatibilidad entre estas trazas experimentales y su pertenencia a alguna familia de  $SLE_\kappa$  se compararon los resultados de cuatro predicciones teóricas: la varianza de las *driving functions* de las trazas, la relación funcional del *winding angle* o ángulo de giro con la distancia, la probabilidad de pasaje a izquierda de cada traza al cruzar un semicírculo de radio arbitrario y la dimensión fractal de las trazas cerradas. Para ello se desarrollaron todos los códigos de análisis necesarios (los cuales estarán disponibles en un *Github* una vez que el trabajo se encuentre publicado), que para comprobar su correcto funcionamiento fueron puestos a prueba con dos simulaciones distintas de  $SLE_\kappa$  numéricas [54] [53].

Aunque no se pudo determinar únicamente un valor para cada test, el rango de valores obtenido para cada uno (ver Tabla 4.1) indica fuertemente una cota en la familia de las curvas.

Comparando todos los tests, se pudo hallar un rango de valores posibles que va desde  $\kappa = 2.50$  hasta  $\kappa = 3.20$ . Esto ubica al régimen de turbulencia de ondas en una familia de fenómenos cuyas isolíneas encuentran una complejidad mayor a la de *spin-glasses* [38] y de isolíneas de altura en hojas de grafeno [30] y menores a turbulencia rotante [51] o bidimensional [27]. Es claro que las isolíneas de altura presentan una estructura que es compatible con una descripción acorde a la teoría de SLE.

# APÉNDICE A

---

## ALGORITMO DE ZIPPER

---

Este algoritmo indica cómo obtener una traza en función de una *driving function* y viceversa, la *driving function* de la traza.

**Driving function → traza:** En este caso se tiene una serie de puntos  $z_0, \dots, z_N$  con  $z_0 = 0$  pertenecientes a la curva  $\gamma$ . La idea es encontrar una serie de mapas  $h_i$  tal que  $h_k \circ h_{k-1} \circ \dots \circ h_1(z_k) = 0$ . De esta manera,  $h_k \circ h_{k-1} \circ \dots \circ h_1$  mapea  $\mathbb{H} \setminus \hat{\gamma}$  en  $\mathbb{H}$ , con  $\hat{\gamma}$  la curva que aproxima a  $\gamma$  al pasar por los puntos  $z_0, \dots, z_N$ . Definiendo a

$$w_{k+1} = h_k \circ h_{k-1} \circ \dots \circ h_1(z_{k+1})$$

sé que  $w_{k+1}$  estará cerca del origen. Se define a  $h_{k+1}$  una transformación conforme que mapea  $\mathbb{H} \setminus \hat{\gamma}_{k+1}$  en  $\mathbb{H}$ , donde  $\hat{\gamma}_{k+1}$  es una curva simple y corta desde el origen a  $w_{k+1}$ , y que mapee  $W_{k+1}$  al origen. Es conveniente que sea algo definido, en donde se suelen elegir segmentos o segmentos inclinados. Definiendo

$$h_i(z) = z - \delta_i + \frac{2\Delta_i}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

donde  $\Delta_i$  es la capacidad de  $h_i$ , y  $\delta_i$  el valor final de la *driving function* para  $h_i$ . De esta manera

$$\begin{aligned} h_k \circ h_{k-1} \circ \dots \circ h_1(z) &= z - \xi_t + \frac{2t}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \\ t &= \sum_{i=1}^k \Delta_i \\ \xi_t &= \sum_{i=1}^k \delta_i \end{aligned}$$

de manera que la *driving function* de la traza se obtiene al concatenar las *driving functions* de

los mapas  $h_i$ . A continuación se muestra el código utilizado:

```
def drifunc3(pts):
    '''Calcula la driving function dada una traza.
    INPUTS:
    pts: vector complejo con la traza.

    OUTPUTS:
    t: tiempo de Loewner correspondiente a la driving function.
    xi: valor de la driving function.'''
    z = pts
    nel = len(z)
    jj = 1
    dt = []
    xi = []
    while jj <= nel:
        dt = np.append(dt, 0.25*np.imag(z[0])**2)
        xi = np.append(xi, np.real(z[0]))

        z = 1j*np.sqrt( - (z-xi[jj-1])**2 - 4*dt[jj-1] ) + xi[jj-1]
        z = z[1:]
        jj += 1
    t = np.cumsum(dt)
    return t, xi
```

---

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [1] A. M. Obukhov and A. M. Yaglom. On the microstructure of atmospheric turbulence – A review of recent work in the U.S.S.R. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 85(364):81–90, April 1959.
- [2] L. Mahrt. Stably Stratified Atmospheric Boundary Layers. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 46(1):23–45, January 2014.
- [3] J C Wyngaard. Atmospheric Turbulence.
- [4] Andreas Quirrenbach. The Effects of Atmospheric Turbulence on Astronomical Observations.
- [5] Hidekatsu Yamazaki and Thomas R. Osborn. Review of Oceanic Turbulence: Implications for Biodynamics. In B. J. Rothschild, editor, *Toward a Theory on Biological-Physical Interactions in the World Ocean*, pages 215–234. Springer Netherlands, Dordrecht, 1988.
- [6] Axel Brandenburg and Åke Nordlund. Astrophysical turbulence modeling. *Reports on Progress in Physics*, 74(4):046901, April 2011.
- [7] V. M. Canuto and J. Christensen-Dalsgaard. TURBULENCE IN ASTROPHYSICS: Stars. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 30(1):167–198, January 1998.
- [8] P. A. Davidson. *Turbulence in Rotating, Stratified and Electrically Conducting Fluids*. Cambridge University Press, 1 edition, September 2013.
- [9] A. N. Kolmogorov. The Local Structure of Turbulence in Incompressible Viscous Fluid for Very Large Reynolds Numbers. *Proceedings: Mathematical and Physical Sciences*, 434(1890,):9–13, 1991.
- [10] U. Frisch and A. N. Kolmogorov. *Turbulence: the legacy of A.N. Kolmogorov*. Cambridge University Press, Cambridge, [Eng.] ; New York, 1995.

- [11] Sébastien Galtier. *Physics of Wave Turbulence*. Cambridge University Press, 1 edition, December 2022.
- [12] Mascheck. Phillips, O. M., The Dynamics of the Upper Ocean. 2. Edition, Cambridge-London-New York-Melbourne. Cambridge University Press. 1977. 336 S., £ 16.00 A. *ZAMM - Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 59(7):331–332, 1979.
- [13] Eric Falcon and Nicolas Mordant. Experiments in Surface Gravity-Capillary Wave Turbulence. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 54(1):1–25, January 2022. arXiv:2107.04015 [nlin, physics:physics].
- [14] A. A. Schekochihin, S. C. Cowley, W. Dorland, G. W. Hammett, G. G. Howes, E. Quataert, and T. Tatsuno. ASTROPHYSICAL GYROKINETICS: KINETIC AND FLUID TURBULENT CASCADES IN MAGNETIZED WEAKLY COLLISIONAL PLASMAS. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 182(1):310–377, May 2009.
- [15] Changming Dong and Kenny T.C. Lim Kam Sian. Rossby Waves. In *Encyclopedia of Ocean Sciences*, pages 650–655. Elsevier, 2019.
- [16] C. F. Barenghi, Russell J. Donnelly, and W. F. Vinen, editors. *Quantized vortex dynamics and superfluid turbulence*. Number 571 in Lecture notes in physics. Springer, Berlin ; New York, 2001.
- [17] S. Douady. Experimental study of the Faraday instability. *Journal of Fluid Mechanics*, 221:383–409, December 1990.
- [18] B. J. Gluckman, P. Marcq, J. Bridger, and J. P. Gollub. Time averaging of chaotic spatio-temporal wave patterns. *Physical Review Letters*, 71(13):2034–2037, September 1993.
- [19] Pablo Javier Cobelli, Agnès Maurel, Vincent Pagneux, and Philippe Petitjeans. Global measurement of water waves by Fourier transform profilometry. *Experiments in Fluids*, 46(6):1037–1047, June 2009.
- [20] William B. Wright, Raffi Budakian, and Seth J. Putterman. Diffusing Light Photography of Fully Developed Isotropic Ripple Turbulence. *Physical Review Letters*, 76(24):4528–4531, June 1996.
- [21] Frédéric Moisy, Marc Rabaud, and Kévin Salsac. A synthetic Schlieren method for the measurement of the topography of a liquid interface. *Experiments in Fluids*, 46(6):1021–1036, June 2009.
- [22] A K Prasad. Stereoscopic particle image velocimetry.
- [23] Nicolás F. Del Grosso, Lucía M. Cappelletti, Nicolás E. Sujovolsky, Pablo D. Mininni, and Pablo J. Cobelli. Statistics of single and multiple floaters in experiments of surface wave turbulence. *Physical Review Fluids*, 4(7):074805, July 2019.
- [24] A. K. M. Fazle Hussain. Coherent structures and turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 173:303–356, December 1986.

- [25] Yu Nakayama. Scale invariance vs conformal invariance, February 2014. arXiv:1302.0884 [cond-mat, physics:hep-th].
- [26] John Cardy. SLE for theoretical physicists. *Annals of Physics*, 318(1):81–118, July 2005. arXiv:cond-mat/0503313.
- [27] D. Bernard, G. Boffetta, A. Celani, and G. Falkovich. Conformal invariance in two-dimensional turbulence. *Nature Physics*, 2(2):124–128, February 2006.
- [28] E. Daryaei. Loop-erased random walk on a percolation cluster is compatible with Schramm-Loewner evolution. *Physical Review E*, 90(2):022129, August 2014.
- [29] E. Daryaei, N. A. M. Araújo, K. J. Schrenk, S. Rouhani, and H. J. Herrmann. Watersheds are Schramm-Loewner Evolution Curves. *Physical Review Letters*, 109(21):218701, November 2012.
- [30] I. Giordanelli, N. Posé, M. Mendoza, and H. J. Herrmann. Conformal Invariance of Graphene Sheets. *Scientific Reports*, 6(1):22949, March 2016.
- [31] Sergey Nazarenko. *Wave Turbulence*, volume 825 of *Lecture Notes in Physics*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2011.
- [32] Gregory F Lawler. An introduction to the Stochastic Loewner Evolution.
- [33] Heitor Fernandes Credidio. Schramm-Loewner Evolutions of Strongly Anisotropic Systems. 2016.
- [34] Vincent Beffara. The dimension of the SLE curves. *The Annals of Probability*, 36(4), July 2008.
- [35] Bertrand Duplantier. Exact fractal area of two-dimensional vesicles. *Physical Review Letters*, 64(4):493–493, January 1990.
- [36] John Cardy. Mean area of self-avoiding loops. *Physical Review Letters*, 72(11):1580–1583, March 1994.
- [37] Jané Kondev and Christopher L. Henley. Geometrical Exponents of Contour Loops on Random Gaussian Surfaces. *Physical Review Letters*, 74(23):4580–4583, June 1995.
- [38] Denis Bernard, Pierre Le Doussal, and A. Alan Middleton. Possible description of domain walls in two-dimensional spin glasses by stochastic Loewner evolutions. *Physical Review B*, 76(2):020403, July 2007.
- [39] Leonardo Puggioni, Alexei G. Krutsuk, Stefano Musacchio, and Guido Boffetta. Conformal invariance of weakly compressible two-dimensional turbulence. *Physical Review E*, 102(2):023107, August 2020. arXiv:2006.07182 [cond-mat, physics:nlin, physics:physics].
- [40] Stefanus, J. Larkin, and W. I. Goldburg. Search for conformal invariance in compressible two-dimensional turbulence. *Physics of Fluids*, 23(10):105101, October 2011.

- [41] E Bogomolny, R Dubertrand, and C Schmit. SLE description of the nodal lines of random wavefunctions. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 40(3):381–395, January 2007.
- [42] A. A. Saberi, M. A. Rajabpour, and S. Rouhani. Conformal Curves on the WO 3 Surface. *Physical Review Letters*, 100(4):044504, January 2008.
- [43] A. A. Saberi and S. Rouhani. Scaling of clusters and winding-angle statistics of isoheight lines in two-dimensional Kardar-Parisi-Zhang surfaces. *Physical Review E*, 79(3):036102, March 2009.
- [44] Jacob D. Stevenson and Martin Weigel. Domain walls and Schramm-Loewner evolution in the random-field Ising model. *EPL (Europhysics Letters)*, 95(4):40001, August 2011. arXiv:1010.5973 [cond-mat, physics:math-ph].
- [45] N. Pose, K. J. Schrenk, N. A. M. Araujo, and H. J. Herrmann. Schramm-Loewner Evolution and isoheight lines of correlated landscapes, August 2015. arXiv:1508.07942 [cond-mat].
- [46] N. Posé, K. J. Schrenk, N. A. M. Araújo, and H. J. Herrmann. Shortest path and Schramm-Loewner Evolution. *Scientific Reports*, 4(1):5495, June 2014.
- [47] Donald E. Marshall and Steffen Rohde. Convergence of a Variant of the Zipper Algorithm for Conformal Mapping. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 45(6):2577–2609, January 2007.
- [48] Michael Berhanu and Eric Falcon. Space-time-resolved capillary wave turbulence. *Physical Review E*, 87(3):033003, March 2013.
- [49] N. Francois, H. Xia, H. Punzmann, S. Ramsden, and M. Shats. Three-Dimensional Fluid Motion in Faraday Waves: Creation of Vorticity and Generation of Two-Dimensional Turbulence. *Physical Review X*, 4(2):021021, May 2014.
- [50] P. Cobelli, A. Przadka, P. Petitjeans, G. Lagubeau, V. Pagneux, and A. Maurel. Different Regimes for Water Wave Turbulence. *Physical Review Letters*, 107(21):214503, November 2011.
- [51] S. Thalabard, D. Rosenberg, A. Pouquet, and P. D. Mininni. Conformal Invariance in Three-Dimensional Rotating Turbulence. *Physical Review Letters*, 106(20):204503, May 2011.
- [52] Tom Kennedy. Numerical computations for the Schramm-Loewner Evolution. *Journal of Statistical Physics*, 137(5-6):839–856, December 2009. arXiv:0909.2438 [math-ph].
- [53] James Foster, Terry Lyons, and Vlad Margarint. An asymptotic radius of convergence for the Loewner equation and simulation of \$SLE\_k\$ traces via splitting. *Journal of Statistical Physics*, 189(2):18, November 2022. arXiv:1912.06424 [math].

- [54] Tom Kennedy. Conformal Invariance and Stochastic Loewner Evolution Predictions for the 2D Self-Avoiding Walk - Monte Carlo Tests. *Journal of Statistical Physics*, 114(1/2):51–78, January 2004. arXiv:math/0207231.
- [55] Gregory F. Lawler, Oded Schramm, and Wendelin Werner. On the scaling limit of planar self-avoiding walk, April 2002. arXiv:math/0204277.



Tesis disponible bajo Licencia Creative Commons, Atribución – No Comercial – Compartir Igual (by-nc-sa) 2.5 Argentina

Buenos Aires, 2023