



Estudio experimental de la transferencia de energía en turbulencia de ondas gravito-capilares

Ignacio Pablo Hernando

Tesis de Licenciatura en Ciencias Físicas

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

¿¿¿¿¿¿¿¿¿¿¿¿ ¿¿¿¿¿¿¿¿¿¿¿¿?

TEMA: Estudio experimental de la transferencia de energía en
turbulencia de ondas gravito-capilares

ALUMNO: Ignacio Pablo Hernando

L.U. N°: 6/21

LUGAR DE TRABAJO: Laboratorio de Turbulencia Geofísica
Instituto de Fisica Interdisciplinaria y Aplicada
INFINA UBA-CONICET
Departamento de Física, FCEN, UBA

DIRECTOR DEL TRABAJO: Dr. Pablo Cobelli

FECHA DE INICIACION: Marzo de 2025

FECHA DE FINALIZACION: ??????????????

FECHA DE EXAMEN: ??????????????

INFORME FINAL APROBADO POR:

Autor

Jurado

Director

Jurado

Codirector

Jurado

Profesor de Tesis de Licenciatura

Resumen

Agradecimientos

ÍNDICE GENERAL

1. Introducción	1
2. Marco Teórico para Turbulencia de Ondas	3
3. Sensor capacitivo	5
3.1. Principio de funcionamiento	6
3.1.1. La sonda	6
3.1.2. Medición de la capacitancia	8
3.1.3. Medición de la fase	9
3.2. Resolución numérica del circuito	10
3.3. Prueba de un circuito equivalente	12
3.4. Diseño y prototipado del sensor	13
3.5. Placa de adquisición y Lock-in digital	15
3.6. Prueba final y calibración	18
3.6.1. Montaje	18
3.6.2. Altura vs Altura	19
3.6.3. Diferencias	20
3.7. Especificaciones finales	21
4. Estudio experimental de Turbulencia de Ondas	23
4.1. Montaje para Turbulencia de Ondas	24
4.1.1. Montaje	24
4.1.2. Inyección de energía	24
4.1.3. Juegos de Datos	25
4.2. Series Temporales	26
4.3. Wave Steepness	26
4.4. Cascadas de energía	28

4.5. Interacción a 3 y 4 ondas	28
4.6. Intermitencia	28
5. Conclusiones	35
A. Puesta a prueba de la DAQ + Lock-in Digital	37
Bibliografía	39

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO PARA TURBULENCIA DE ONDAS

CAPÍTULO 3

SENSOR CAPACITIVO

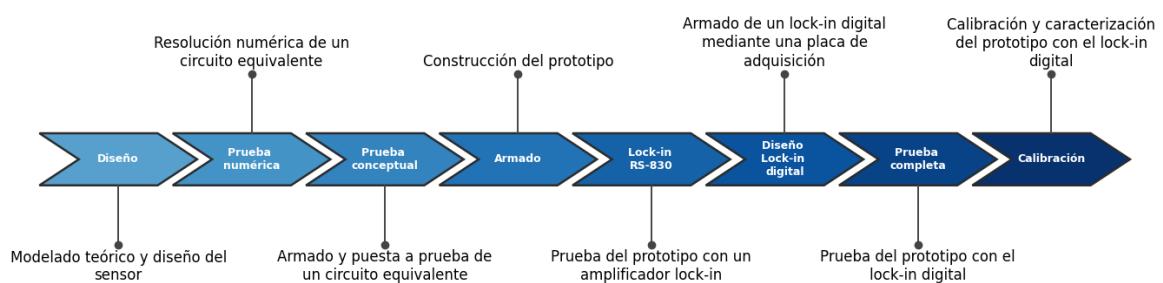


Figura 3.1: Diagrama esquemático de los pasos para la construcción y caracterización del sensor capacitivo para la altura de la superficie libre.

3.1. Principio de funcionamiento

En esta primera Sección se desarrollarán los fundamentos teóricos en los que se basa el funcionamiento del sensor capacitivo construido durante la Tesis, haciendo hincapié en las distintas hipótesis que deben cumplirse para que su respuesta sea lineal. En primer lugar se modela la sonda, componente que irá sumergida y estará en contacto con el fluido, siguiendo por el circuito al cual se conecta, y terminando con la técnica de demodulación homodina, que una vez implementada permitirá realizar la medición propiamente dicha.

3.1.1. La sonda

Al sumergir un alambre de cobre esmaltado en un fluido conductor, como se esquematiza en la Figura 3.2, el recubrimiento aislante actuará a modo de medio dieléctrico entre ambos. En el caso de dos conductores cilíndricos coaxiales, de radios $r_1 < r_2$, cuyo intersticio se encuentra lleno de un medio con permitividad ϵ y permeabilidad μ , se tienen una capacitancia (C') e inductancia (L') por unidad de longitud, dadas por

$$C' = 2\pi\epsilon \ln^{-1}\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \quad (3.1a)$$

$$L' = \frac{\mu}{2\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \quad (3.1b)$$

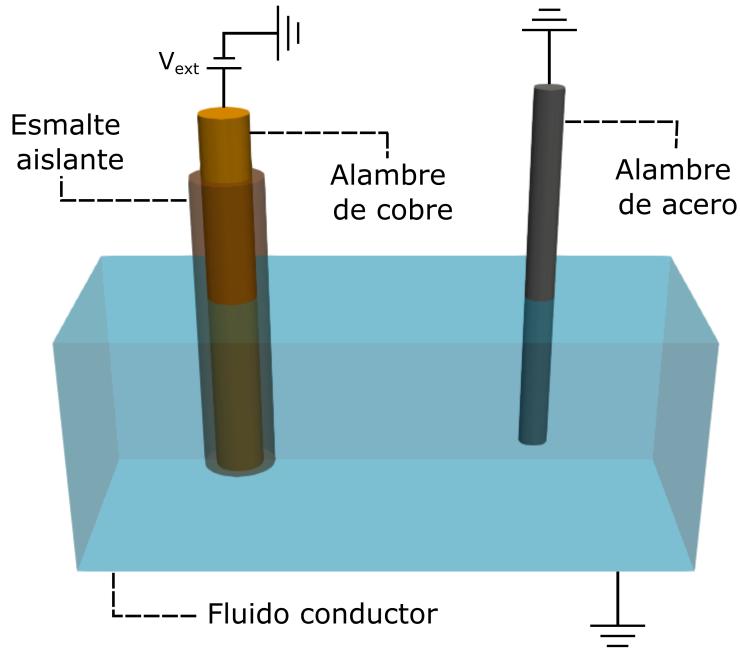


Figura 3.2: Esquema de un alambre esmaltado sumergido en un fluido conductor, puesto a Tierra mediante otro alambre sin aislar. El alambre de cobre se encuentra a conectado a un potencial externo V_{ext} . El recubrimiento aislante actuará como medio dieléctrico, comportándose el sistema efectivamente como un capacitor, cuya capacitancia depende de la altura sumergida.

La porción sumergida del alambre puede modelarse como una sucesión de segmentos de longitud dl , cada uno de los cuales agrega al circuito una capacitancia $dC = C'dl$ en paralelo y una

inductancia $dL = L'dl$ en serie. De esta forma, es posible escribir la impedancia $Z(l + dl)$ recursivamente, a partir de la impedancia $Z(l)$ y la del segmento infinitesimal siguiente:

$$Z(l + dl) = j\omega L'dl + \left(\frac{1}{Z(l)} + \frac{1}{j\omega C'dl} \right)^{-1} \quad (3.2)$$

Con j la unidad imaginaria. Tomando $dl \rightarrow 0$ y reteniendo términos hasta primer orden, resulta en una ecuación diferencial para $Z(l)$

$$\frac{dZ}{dl} = j\omega L' - j\omega C'Z^2 \quad (3.3)$$

Ésta puede resolverse agregando la condición de contorno $Z(0) = \infty$, que refleja la ausencia de un camino capacitivo hacia el fluido si el alambre no está sumergido, pudiendo así considerar al circuito como abierto. El resultado es el siguiente

$$Z(l) = j\sqrt{\frac{L'}{C'}} \tan\left(\omega\sqrt{L'C'}l - \pi/2\right) \quad (3.4)$$

En el caso particular en que l es lo suficientemente pequeño ($\omega\sqrt{\mu\epsilon}l \ll 1$) resulta suficiente con tomar la expansión de esta solución a primer orden

$$Z(l) \approx \frac{1}{j\omega C'l} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L'C'^2\omega^2l^3}\right) \quad (3.5)$$

En este régimen el sistema se comportará básicamente como un capacitor de capacitancia $C'l$, de modo que, midiendo la capacitancia de este circuito, será posible inferir la altura sumergida del alambre y, por tanto, la altura de la superficie libre.

Ahora bien, más que la longitud total sumergida del alambre, o sonda, la cantidad de interés será el apartamiento Δl respecto de una posición de equilibrio l_0 (para la superficie libre en reposo), tal que $l = l_0 + \Delta l$. Teniendo esta consideración en cuenta, la capacitancia de la sonda será $C_s = C_0 + \Delta C$, y el objetivo de la medición será esta ΔC , directamente relacionada a los desplazamientos de la superficie libre.

Un último punto importante es que, si bien el desarrollo hasta aquí se llevó a cabo suponiendo casos donde el fluido alrededor del alambre se mantuviera estático, será posible levantar ésta hipótesis, y considerar que $\Delta l = \Delta l(t)$, siempre que las variaciones sean lo suficientemente lentas respecto al tiempo de respuesta típico del sistema:

$$\tau_s = \alpha \frac{\epsilon}{\sigma} \left(\frac{r_1}{r_2 - r_1} \right) \quad (3.6)$$

Donde α es una constante que depende de la geometría de los conductores, y σ es la conductividad del fluido.

Se asumirá que esta condición se cumple en general. El único caso en que fue posible observar una limitación en el funcionamiento del sensor vinculada a ésto fue al aumentar varios órdenes de magnitud la conductividad del fluido (agregando sal al agua destilada, en el orden de 10^4 ppm) aunque para agua el agua de red el funcionamiento fue, hasta donde se pudo observar, equivalente al del agua destilada, a diferencia de lo reportado en [1].

3.1.2. Medición de la capacitancia

En la Sección anterior se mostró cómo la medición de la capacitancia de un alambre esmaltado sumergido permite determinar los desplazamientos de la superficie libre respecto de una posición en equilibrio.

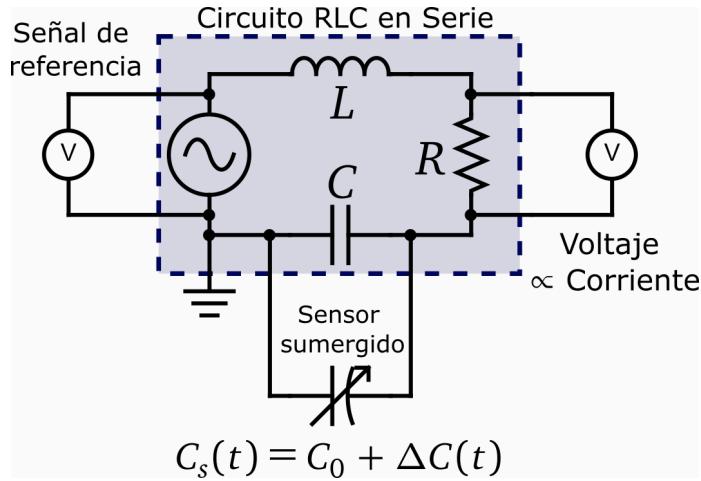


Figura 3.3: Esquema del circuito utilizado para medir la diferencia de capacitancia ΔC , y en consecuencia Δl , del sensor sumergido. Se conecta en paralelo la sonda al capacitor de un circuito RLC serie, de forma tal que el agua queda conectada a Tierra y el alambre de cobre a la otra punta de C . Se alimenta al circuito mediante una fuente de tensión alterna a la frecuencia de resonancia, y se mide el voltaje sobre la fuente y la resistencia.

Esta medición puede llevarse a cabo conectando la sonda al circuito de la Figura 3.3, que se corresponde a su conexión en paralelo al capacitor de un circuito RLC serie (de parámetros base R , L y C), teniendo como efecto la modificación de la capacitancia efectiva del mismo. De esta forma se tendrá un circuito RLC serie equivalente, cuya capacitancia será ahora $C_{EQ}(t) = C + C_s(t)$.

Al conectar éste circuito a una fuente de tensión alterna de frecuencia angular ω y amplitud V la ecuación para la corriente $I(t)$ vendrá dada por

$$V \cos(\omega t) = \frac{d^2 I(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C_{EQ}(t)L} I(t) \quad (3.7)$$

Donde $C_{EQ}(t) = C + C_0 + \Delta C(t) \equiv C_q + \Delta C(t)$, definiendo C_q como la capacitancia efectiva cuando la superficie libre se encuentra en reposo. Si las variaciones en la capacitancia son lo suficientemente lentas respecto a la frecuencia se puede asumir una solución de la forma $I(t) = I_0(t) \cos(\omega t + \phi(t))$, en analogía a lo que ocurriría en el caso estático para $C_{EQ} = \text{cte}$. Cuando las variaciones de la capacitancia sean lo suficientemente pequeñas ($\Delta C/C_q \ll 1$) será suficiente con un desarrollo a primer orden para describir la fase $\phi(t)$:

$$\tan(\phi) = -\frac{1}{R} \left[\omega L - \frac{1}{\omega C_q} \right] - \frac{1}{R} \frac{\Delta C}{\omega C_q^2} + \mathcal{O} \left[\left(\frac{\Delta C}{C_q} \right)^2 \right] \quad (3.8)$$

Es posible eliminar además el primer término de este desarrollo si se elige trabajar con la frecuencia de resonancia, $\omega_r = 1/\sqrt{LC_q}$. De esta forma quedaría simplemente

$$\tan(\phi) = -Q_F \frac{\Delta C}{C_q} \quad (3.9)$$

Donde $Q_F = \frac{1}{R} \sqrt{L/C_q}$ es el factor de calidad del RLC. Finalmente, si el término de la derecha también es mucho menor a uno, se puede aproximar $\tan(\phi) \approx \phi$ y queda una relación lineal entre ϕ y la variación de capacitancia, y por tanto, con las variaciones en la altura sumergida del sensor.

$$\phi(t) = -Q_F \frac{\Delta C(t)}{C_q} = -Q_F \frac{C'}{C_q} \Delta l(t) \quad (3.10)$$

Al ajustar los parámetros del RLC (y Q_F en consecuencia) es posible ajustar la sensitividad del sensor, ya que si, por ejemplo, se quiere medir un rango muy amplio de Δl , bastaría con hacer que Q_F sea más pequeño.

3.1.3. Medición de la fase

Hasta aquí se demostró conceptualmente cómo es posible encontrar una relación lineal entre la fase (ϕ) de la corriente de la sonda y las variaciones en su altura sumergida (Δl) al conectarla en paralelo al capacitor de un RLC serie. El paso final para completar la descripción del sensor será, entonces, incorporar un método para la medición de dicha fase.

Con este fin se empleará la técnica de *demodulación homodina*, que utiliza una señal de referencia para obtener la amplitud y fase relativa de la señal de interés (en este caso la caída de tensión sobre la resistencia R).

A continuación se describe brevemente la técnica, mostrando en la Figura 3.4 las señales involucradas en el proceso para un caso particular a modo ilustrativo. El primer paso consistirá en modular la señal de interés, a la cual se llamará $A(t)$, con alguna frecuencia, obteniendo entonces una nueva señal

$$S(t) = A(t) \cos(\omega_r t) \quad (3.11)$$

Es importante que la frecuencia de modulación sea mucho más rápida que las frecuencias características de $A(t)$, para que pueda captar todas sus variaciones correctamente. En este caso, la tensión sobre la resistencia ya tendrá la misma forma de $S(t)$, con lo cual no es necesario realizar este primer paso explícitamente.

Luego, se debe *mixear* la señal modulada con la de referencia, $R(t) = \cos(\omega_r t)$, que en este caso será la tensión alterna que alimenta al circuito¹, obteniendo entonces

$$M(t) = S(t)R(t) = A(t)/2 (1 + \cos(2\omega_r t)) \quad (3.12)$$

Si hubiese ruido eléctrico $N(t)$ sumando, la señal sería $M(t) = S(t)R(t) + N(t)R(t)$. El efecto de este mixeo será centrar el ruido en ω_r , recordando que un producto en tiempo se traduce como una convolución en frecuencia. Además, quedan dos copias de la señal de interés, una centrada en 0 y otra en $2\omega_r$, como se puede ver en la Figura 3.4e.

¹La referencia podría tener en principio una frecuencia distinta a la de modulación, pero por simplicidad, y porque en este sistema será así, se considerarán iguales.

Finalmente, se debe aplicar un filtro pasabajas, de frecuencia de corte ω_c , o tiempo de integración $\tau_c = 2\pi/\omega_c$. Siempre que $\omega_c < \omega_r$ el efecto de este filtro será no dejar pasar, ni la copia de la señal en $2\omega_r$, ni al ruido, y obtener así la amplitud $A(t)/2$.

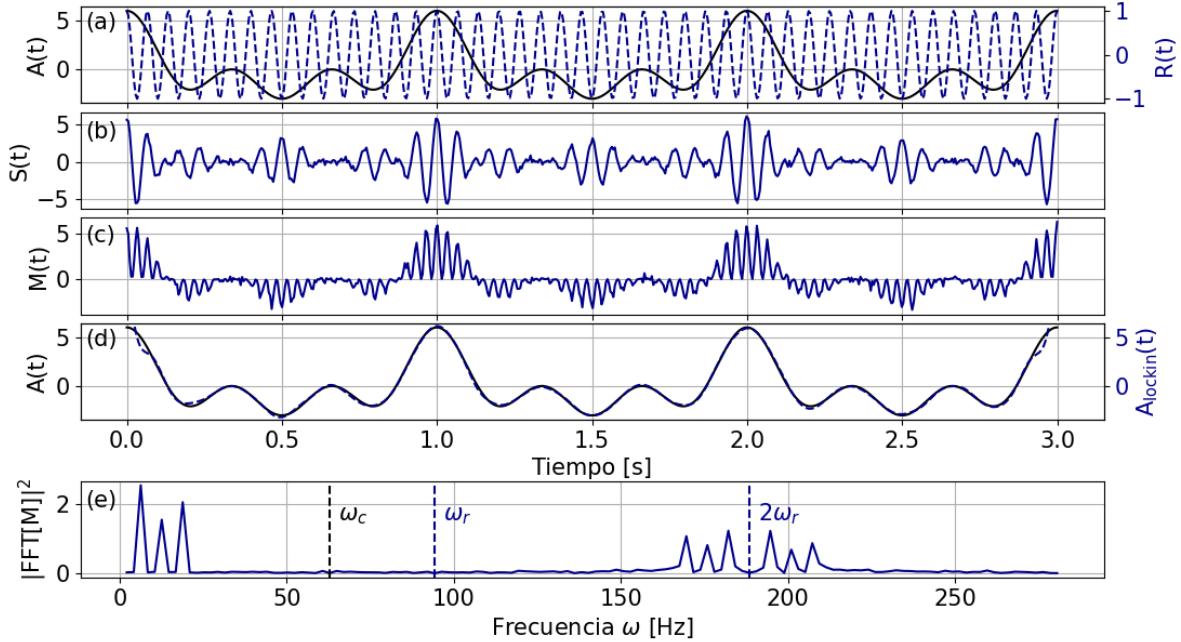


Figura 3.4: Distintas señales asociadas a la técnica de demodulación homodina. En primer lugar (a) la señal a medir $A(t)$ y la señal de referencia $R(t)$. Con éstas se construyen (b) la señal modulada $S(t)$ y (c) la señal mixeada $M(t)$, a partir de la cual se obtiene (d) la reconstrucción de la señal de interés. Abajo de todo (e) se muestra el contenido en frecuencia de $M(t)$, pudiéndose apreciar a frecuencias bajas el contenido de $A(t)$ y otras dos copias del mismo alrededor de $2\omega_r$, que serán eliminadas mediante el filtro pasabajas, de frecuencia ω_c , junto al ruido que pudiese haber.

Si inicialmente la señal hubiese tenido una fase respecto a la señal de referencia, o sea, $S(t) = A(t) \cos(\omega_r t + \phi_r)$, como ocurrirá en este caso, habría que repetir el mismo procedimiento con una señal de referencia que tenga 90° de desfasaje respecto a $R(t)$, a la cual se la conoce como *cuadratura*. Al final se obtendrá para la referencia una señal $X(t) = A(t)/2 \cos(\phi_r)$, que se conoce como componente homodina, y para la cuadratura, una señal $Y(t) = A(t)/2 \sin(\phi_r)$, que es la componente heterodina. Con éstas resulta fácil obtener la amplitud y fase como:

$$A^2 = 4(X^2 + Y^2) \quad (3.13a)$$

$$\phi_r = \arctan(Y/X) \quad (3.13b)$$

Por lo general, se utiliza un amplificador lock-in para llevar a cabo esta técnica de manera síncrona, pero se discutirá más sobre su implementación más adelante.

3.2. Resolución numérica del circuito

Antes de iniciar con la construcción del sensor en el laboratorio, se empezó caracterizando numéricamente el comportamiento del circuito descrito en las Secciones anteriores, esto es, la resolución de la ecuación (3.7). El objetivo de este paso preliminar fue, por una parte verificar que la solución

hallada bajo las distintas aproximaciones funcionase correctamente, pero además, poder probar distintas combinaciones de parámetros y determinar qué efectos tendrían éstas sobre el funcionamiento del sensor. A continuación se mencionan brevemente algunas de las conclusiones más relevantes que se pudieron observar.

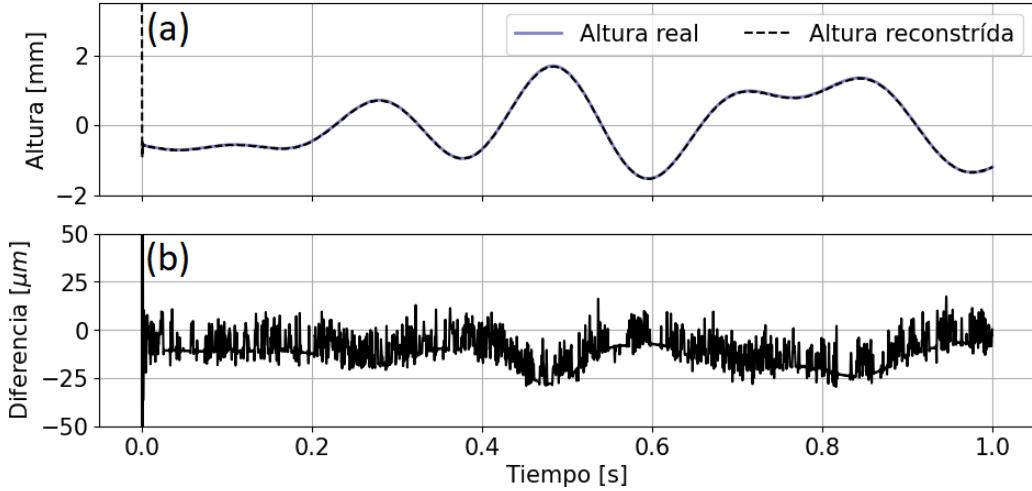


Figura 3.5: (a) Comparación de la altura sumergida, Δl , con la reconstruida, obtenida mediante la resolución numérica de la ecuación (3.7) y la técnica de demodulación homodina para el cálculo de la fase. (b) Diferencia entre ambas señales, de dos órdenes de magnitud menor.

Se pudo verificar que la fase se relaciona linealmente con Δl hasta cierto punto. Por ejemplo, para una señal aleatoria (amplitud constante entre 0-6 Hz y fase aleatoria) como las que podrían ser de interés medir en la superficie libre, con los valores de la Tabla 3.1 que se terminaron eligiendo para la construcción del sensor, la reconstrucción de la altura es la de la Figura 3.5, donde los errores son del orden del 1% aproximadamente.

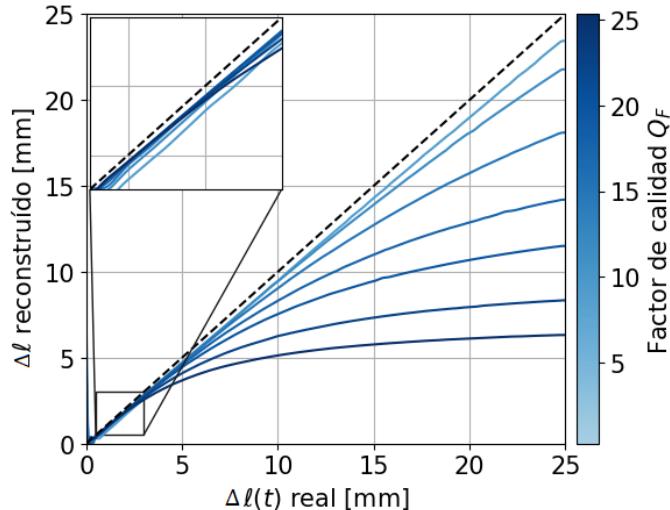


Figura 3.6: Comparación de las curvas de respuesta del sensor obtenidas numéricamente para distintos factores de calidad Q_F (líneas sólidas). A menor factor de calidad se extiende el rango de alturas en el que funciona linealmente, manteniéndose cerca de la respuesta ideal (línea punteada). Factores de calidad mayores permiten medir diferencias de altura más pequeñas y saturan antes. En todos los casos para Δl lo suficientemente pequeño el comportamiento es lineal (recuadro ampliado).

Si los desplazamientos Δl se vuelven lo suficientemente grandes, como para que $\Delta C \sim C_q$, se produce una saturación en la fase medida. Se puede contrarrestar este efecto como ya se explicó modificando los parámetros del circuito, siendo la opción más sencilla disminuir el factor de calidad Q_F , como se muestra en la Figura 3.6, o bien disminuyendo la capacitancia por unidad de longitud C' del alambre, lo cual implicaría cambiarlo por otro.

Otro efecto interesante que se pudo observar es que, si se intentan medir variaciones en Δl demasiado rápidas respecto a la frecuencia de resonancia del circuito, se produce histéresis en el sistema. En la Figura 3.7 se comparan dos ejemplos para la medición de una señal sinusoidal, una a frecuencia baja en comparación a la de resonancia (3.7a) donde la respuesta es lineal y otra a una frecuencia más alta (3.7b), donde se puede ver un comportamiento histerético en el sistema.

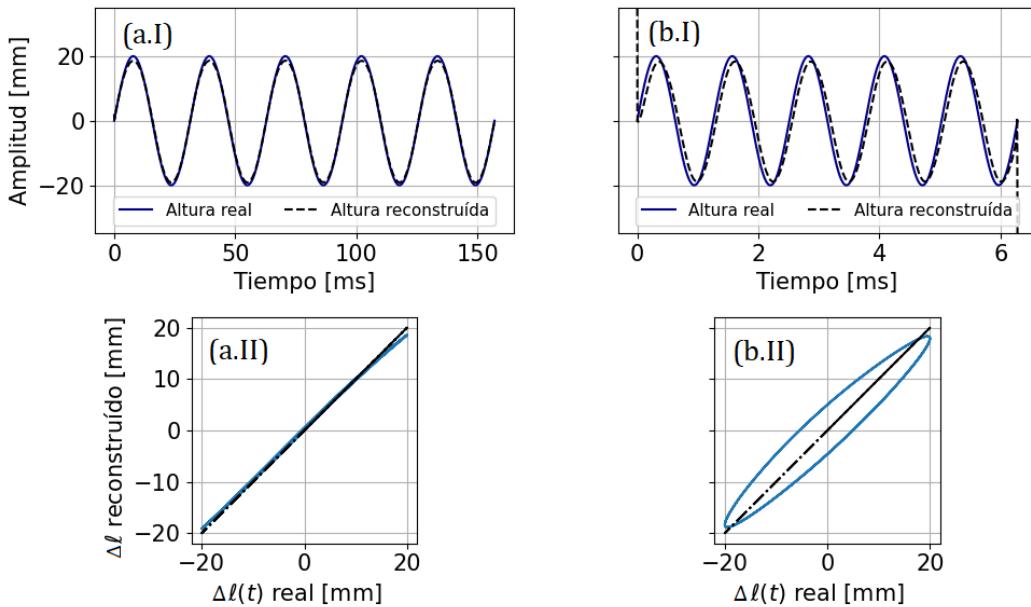


Figura 3.7: Arriba, la comparación de los desplazamientos Δl reales y los obtenidos numéricamente, para señales senoidales de $f = 0.2$ KHz (a.I) y $f = 2$ kHz (b.I), con un circuito de frecuencia de resonancia de $f_s = 67$ kHz. Debajo, las curvas de respuesta (—), en ambos casos comparadas a la ideal (---), pudiendo observar una respuesta lineal para frecuencias relativamente bajas (a.II) en comparación a frecuencias más altas (b.II) donde el circuito no llega a responder lo suficientemente rápido y se produce histéresis.

Aunque ninguno de estos efectos adversos se llegaron a observar en la práctica.

3.3. Prueba de un circuito equivalente

Siguiendo con el enfoque constructivo, el siguiente paso fue realizar una prueba conceptual del circuito. Para esto se armó un circuito RLC serie, a cuya capacitancia se le fue conectando en paralelo capacitancias menores de distintos valores, y midiendo en cada caso la diferencia de fase respecto de la señal de referencia.

La medición de la diferencia de fase se llevó a cabo mediante un osciloscopio en este caso ya que todavía no se había puesto en práctica la técnica de demodulación homodina.

Para esta prueba se utilizaron los siguientes elementos, $R = (1800 \pm 200) \Omega$, $L = (10 \pm 1)$ mH y $C = (100 \pm 10)$ pF, que dan un factor de calidad $Q_F = (5.6 \pm 0.7)$. Éstos son similares a los que eventualmente se terminarían eligiendo para el sensor.

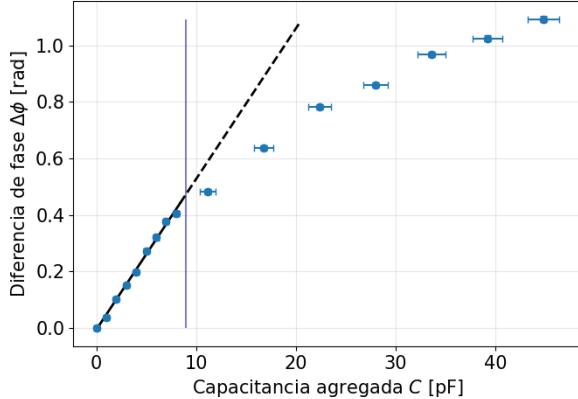


Figura 3.8: Diferencia de fase $\Delta\phi$ obtenida al agregar en paralelo a la capacitancia de un RLC serie distintas capacitancias (●). La línea vertical (—) separa los rangos donde el sistema se comporta o no linealmente. Para diferencias de fase pequeñas se muestra además el ajuste lineal (—) de los datos, con parámetros $a = (5.3 \pm 0.3) \times 10^{-2}$ rad/pF y $b = (-5 \pm 6) \times 10^{-3}$ rad. La extensión de dicho ajuste al otro rango (---) muestra cómo se separan los datos significativamente.

En la Figura 3.8 se pueden apreciar los resultados. Igual que lo que se había observado numéricamente, la respuesta del sistema es lineal para $Q_F \Delta C / C \ll 1$, y empieza a desviarse cuando la capacitancia agregada a la del RLC serie se vuelve demasiado grande.

En el rango en que se observó un comportamiento lineal se ajustaron linealmente los datos, obteniendo una pendiente $a = (5.3 \pm 0.3) \times 10^{-2}$ rad/pF y una ordenada $b = (-5 \pm 6) \times 10^{-3}$ rad. Como es de esperarse, la ordenada es compatible con cero, y la pendiente puede compararse con la que se esperaría por la ecuación (3.10), esto es,

$$a_{\text{teo}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C^3}} \quad (3.14)$$

Para los elementos elegidos resulta en $a_{\text{teo}} = (5.6 \pm 0.7) \times 10^{-2}$ rad/pF, que coincide con el obtenido del ajuste lineal. Además los estimadores resultaron $R^2 = 0.99550$ y $\chi^2 = 1.25$, concluyendo que en este rango son bien descriptos los datos por una función lineal.

De esta forma, se verifica el comportamiento predicho para el circuito en el caso estático.

3.4. Diseño y prototipado del sensor

Ya habiendo terminado con la fase más exploratoria y las pruebas preliminares descriptas en las Secciones anteriores, se pasó al diseño y prototipado del sensor, al cual corresponde esta Sección, que implica el armado de la sonda y del circuito para la medición de la fase. La puesta en marcha de la técnica de demodulación homodina para llevar a cabo esta medición será descripta en la Sección siguiente debido a la complejidad que terminó requiriendo.

La sonda

Un modelo de la versión final de la sonda se muestra en la Figura 3.9. Ésta es relativamente sencilla, siendo su componente principal el alambre de cobre esmaltado, que en este caso fue de

(0.35 ± 0.05) mm de diámetro.

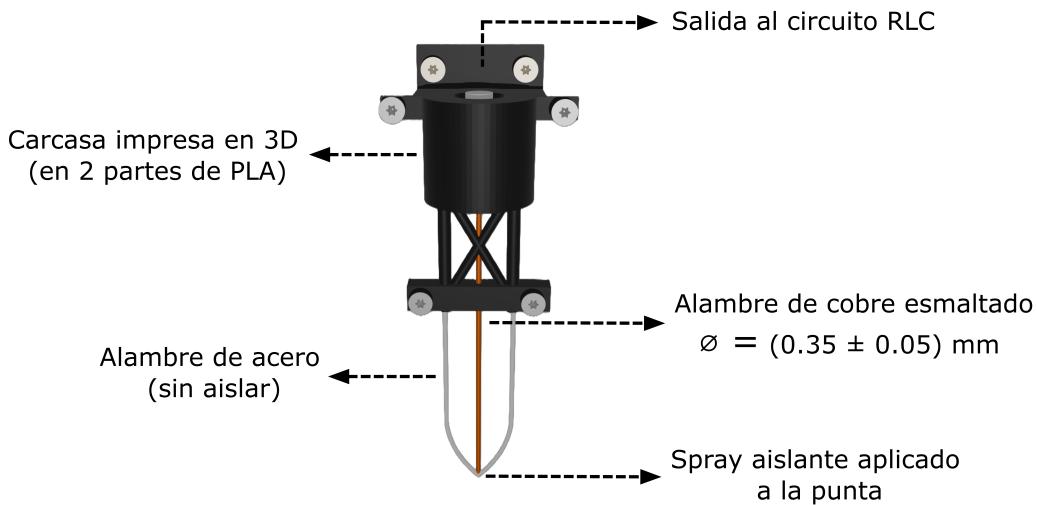


Figura 3.9

Las partes restantes son básicamente para el soporte estructural del alambre, y para facilitar su conexión al circuito RLC.

El alambre de acero en forma de U, además de dar un lugar para el anclaje del alambre de cobre, tiene la funcionalidad de poner al fluido circundante a la misma Tierra que el circuito.

La carcasa (en negro) fue diseñada como dos partes que se conectan entre sí mediante cuatro tornillos M4. Estas dos mitades se imprimieron mediante impresoras 3D en plástico PLA. Se eligió hacerla en dos mitades ya que en el centro se encuentran las canaletas por donde se enhebran ambos alambres, que de otra forma hubiesen sido difíciles de lograr con la impresora utilizada, y de esta forma además es más fácil su inserción previo a atornillarlas.

La parte superior de la carcasa se encuentra abierta, exponiendo así ambos alambres y permitiendo su conexión mediante cables de terminaciones tipo cocodrilo a la placa con el circuito RLC serie. Ésta sección permite además conectar la sonda, ya sea a un tornillo micrométrico que permita ajustar finamente la altura sumergida, o directamente a perfilería de aluminio si tal precisión no fuese necesaria.

Por último, la cruz en el medio (*trusses* en inglés) dan mayor integridad estructural a la parte inferior de la carcasa, cuyo fin es dar un segundo punto de anclaje al alambre de cobre y asegurarse así que se mantenga recto. Cualquier deformación en la forma de éste podría traducirse en una curva de calibración no lineal que complicaría las mediciones. Algo similar ocurriría si el alambre entra de forma no perpendicular en el fluido, pero esto último solo tiene como consecuencia una constante multiplicativa en la constante de proporcionalidad entre la fase y Δl (relacionada a la proyección sobre la línea perpendicular), con lo cual la respuesta se mantendría lineal.

Un punto importante a tener en cuenta es que, al cortar el alambre de cobre para montar la sonda, la parte que quedará sumergida tiene en la punta al alambre expuesto sin esmaltar, y la corriente tomaría este camino hacia la Tierra en lugar del capacitivo a través del recubrimiento aislante. Para evitar esto se aplicó un spray aislante (Ailamatic DELTA), que además al secarse afianzó la adherencia al alambre de acero.

El circuito RLC serie

Los valores nominales de los elementos utilizados para el sensor son los de la Tabla 3.1. Estos valores se eligieron luego de varias pruebas preliminares, ya que fueron los que mejores resultados permitieron obtener para los desplazamientos típicos de la superficie libre con los que se trabajó ($\lesssim 1$ cm).

Elemento	Valor
R	$(360 \pm 40)\Omega$
L	$(10 \pm 1)\text{mH}$
C	$(560 \pm 60)\text{pF}$

Tabla 3.1: .

Es importante resaltar que, como muestra la Figura 3.3, el elemento a Tierra en el RLC debe ser el capacitor, ya que el agua estará a este potencial en cualquier caso, y de conectar, por ejemplo, la resistencia a Tierra, se generaría un cortocircuito. Se observó que, al tener este elemento a Tierra en el RLC (independientemente de si la sonda estaba conectada), se produce una disminución en la frecuencia de resonancia del mismo, que se atribuye al acoplamiento de capacitancias parásitas C_p , que tienen como efecto sumar a la C utilizada ($C_p \sim 200\text{ pF}$), con lo cual se debe asumir que es levemente mayor al valor reportado en la Tabla 3.1.

De esta manera, para el sensor en el aire la capacitancia total C_{EQ} resultó ser aproximadamente 400 pF mayor a la C base del RLC, con lo cual $C_{EQ} \sim 1000\text{ pF}$. Con el sensor sumergido aproximadamente 1 cm en agua destilada la variación en la capacitancia es del orden de $\Delta C \sim 10\text{ pF}$, de forma que se verifica la hipótesis que hicimos anteriormente para llegar a una relación lineal entre la fase y los desplazamientos de altura, resultando el cociente $\Delta C/C \sim 0.01 \ll 1$.

La capacitancia por unidad de longitud para el cable de cobre elegido se estimó a partir de estos valores en el orden de 1 pF/mm.

Las frecuencias de resonancia típicas con las que se trabajó fueron del orden de $f_s \sim 52\text{ kHz}$, para los elementos previamente mencionados, ajustándolas más finamente en cada caso, antes de la medición, aunque cuando por distintos motivos no fue posible realizar este ajuste el efecto fue simplemente la suma de un ϕ_0 a las señales, que puede eliminarse al restar el valor medio, ya que finalmente la cantidad de interés será la variación de altura.

3.5. Placa de adquisición y Lock-in digital

Las primeras pruebas de funcionamiento del sensor se llevaron a cabo utilizando un amplificador lock-in SR-830, lo cual permitió verificar que el comportamiento era el esperado. Sin embargo, se abandonó el uso de este lock-in antes de seguir con la caracterización, ya que éste presentaba dos factores que complicarían su aplicación en el largo plazo. En primer lugar son equipos grandes de difícil movilidad, pero lo principal es que cuentan con un solo canal de medición, con lo cual no es escalable para múltiples sensores, que sería la idea poder usar en el laboratorio eventualmente.

Se exploró la idea de utilizar distintas placas de desarrollo programables que aplicasen el algoritmo de demodulación homodina de forma digital y sincrónica, por ejemplo Arduino UNO, pero su limitación principal fue la "lenta" tasa de adquisición, respecto a las frecuencias de oscilación de las tensiones a medir.

Finalmente se optó por utilizar una placa de adquisición para medir simultáneamente las tensiones a una alta tasa y posteriormente analizar las señales digitalmente (ya sea de forma síncrona o asíncrona luego de la medición).

La placa de adquisición

La placa utilizada fue la disponible de mayor tasa en el conversor analógico digital, que fue la PersonalDAQ 3001 de IOTech [2]. Ésta placa permite adquirir con una tasa de hasta 1 MHz distribuida en 8 canales en formato diferencial (o 16 canales puntuales) cada uno con una resolución de 16 bits para un rango de voltaje ajustable entre ± 10 V y ± 100 mV.

Para las mediciones de esta Tesis se utilizó siempre un único sensor, con lo cual fueron necesarios solo dos canales en modo diferencial, uno para la referencia y otro para la tensión sobre la resistencia, de modo que cada canal tuvo una frecuencia de muestreo máxima de 500 kHz.

Si bien puede parecer mucho una adquisición a esta tasa para finalmente medir oscilaciones en la superficie libre de hasta unos 200 Hz hay que recordar que éstas estarán moduladas por la frecuencia de resonancia del RLC serie, que como se mencionó en la Sección anterior es del orden de 50 kHz, con lo cual la frecuencia mínima de muestreo (por el Teorema de Nyquist para evitar aliasing) está en 100 kHz. Los 500 kHz permiten estar por encima de este mínimo por una cantidad considerable, pero pruebas con tres sensores en simultáneo, que requiere un total de cuatro canales en modo diferencial, a 250 kHz cada uno dieron resultados comparables a los de una tasa mayor.

Software de control de la placa

La principal complejidad que vino asociada a la utilización de esta placa fue su comunicación con la computadora para llevar a cabo las mediciones, ya que la compañía no proporciona software oficial compatible con sistemas operativos modernos (la última versión disponible es para Windows XP).

Fue necesario entonces desarrollar rutinas propias para la adquisición síncrona y asíncrona, entre otras, a partir de las funciones de bajo nivel expuestas por la biblioteca dinámica, que se comunica con el controlador del dispositivo.

Con este fin se utilizó Python 3, y se basó el desarrollo en el wrapper de la biblioteca dinámica PyIOTech [3], que también fue necesario readaptar ya que se encuentra escrita en Python 2.

No se entrara en detalle sobre el código en sí, pero el resultado final fue una interfaz gráfica de usuario mínima para llevar a cabo las mediciones en los canales deseados, que se encuentra disponible en [4]. Se implementaron dos métodos de adquisición, en primer lugar uno para una cantidad de puntos predeterminados, ideal para mediciones cortas, y uno pensado para mediciones largas que cuenta con guardado en disco en simultáneo a la medición por bloques, más eficiente que el primero al utilizar un buffer circular pequeño y no necesitar guardar todos los puntos en memoria antes de escribirlos en disco. Éste segundo método fue el más utilizado ya que permite tomar datos

continuamente y detenerlo cuando se considere suficiente.

El algoritmo de Lock-in Digital

Con el software desarrollado para la placa es posible entonces medir simultáneamente la señal de referencia y el voltaje sobre la resistencia del RLC serie. El análisis de estas señales se lleva a cabo posterior a su adquisición mediante los pasos explicados para la técnica de demodulación homodina, llegando efectivamente a lo que sería un lock-in digital asíncrono. Se desarrolló también una versión que funciona en tiempo real para el segundo método de adquisición explicado, pero que permite visualizar señales únicamente hasta unas pocas decenas de Hz.

Tampoco se entrará en detalle sobre la implementación de este algoritmo, pero se mencionarán brevemente algunos de los puntos principales que difieren al método convencional. Esto se debe principalmente a que, por eficiencia en la adquisición, solo se midió la referencia, y la cuadratura se generó digitalmente a partir de ésta. Para esto se implementó la Transformada de Hilbert, que tendrá el efecto de aplicar un desfasaje de 90° a la señal de referencia.

Otro punto importante es que, al trabajar con señales de frecuencias tan altas no será despreciable el delay temporal que hay entre la medición de un canal y el siguiente de la placa, que en este caso se corresponde a $\Delta t = 1 \mu\text{s}$. Este efecto es como si la referencia tuviese una fase adicional $\phi_0 = \omega_s \Delta t$, sobre la cual estarán montadas las variaciones que se quieren medir. Hay varias opciones para corregir esto, una es simplemente restar esto al final, pero no tiene en cuenta la posibilidad de pequeñas variaciones locales en la frecuencia o fase de la señal de referencia que se pueden traspasar a la fase final obtenida. Para tener esto en cuenta lo que se terminó optando por hacer es aplicar un *fractional delay filter* (FDF) teniendo en cuenta que la señal es limitada en frecuencia. Esto permite reevaluar a la señal de referencia en los mismos tiempos que la señal del segundo canal, siendo fiel a la señal real, a diferencia de lo que se puede obtener mediante una interpolación lineal. Este efecto es solo relevante cuando $\omega_s \sim 1/\Delta t$, de otra forma ϕ_0 será despreciable.

El último punto a mencionar tiene que ver con el filtro pasabajos utilizado. Se eligió una filtro de tipo exponencial, en base a lo explicado en [5], ya que permite extender el funcionamiento del Lock-in a tiempo real. Este filtro transcurre en dos etapas, y toma como valores iniciales las señales $X_0[t_n] \equiv X_0[n]$ e $Y_0[t_n] \equiv Y_0[n]$. Entonces, el valor del punto n para las señales filtradas (X_1 e Y_1) depende del valor de las señales en $n-1$ y n :

$$X_1[n] = X_1[n-1] + \alpha(X_0[n] - X_1[n-1]) \quad (3.15a)$$

$$Y_1[n] = Y_1[n-1] + \alpha(Y_0[n] - Y_1[n-1]) \quad (3.15b)$$

Usando el parámetro $\alpha = \cos(\gamma) - 1 + \sqrt{\cos^2(\gamma) - 4 \cos(\gamma) + 3}$, que se relaciona con la frecuencia de corte, o el tiempo de integración τ_c de la forma: $\gamma = 2\pi f_c/f_s$, con f_s la frecuencia de sampleo. La segunda etapa es análoga a la primera:

$$X_2[n] = X_2[n-1] + \alpha(X_1[n] - X_2[n-1]) \quad (3.16a)$$

$$Y_2[n] = Y_2[n-1] + \alpha(Y_1[n] - Y_2[n-1]) \quad (3.16b)$$

Pudiendo elegir trivialmente $X_0[-1] = Y_0[-1] = 0$ al inicio de la señal.

El código para este lock-in digital se encuentra disponible en [6]. La versión final permitió obtener resultados comparables a los de un Lock-in como el SR-830 (pudiendo llegar incluso a superar la frecuencia máxima de funcionamiento de éste según el caso), con todas las ventajas de portabilidad y escalado que vienen asociadas a la placa. Un ejemplo clásico que muestra el correcto funcionamiento de éste es la medida de la amplitud y fase de un RLC serie en función de la frecuencia, como el que se presenta en el Apéndice A.

3.6. Prueba final y calibración

Teniendo ya construído el sensor, y puesta en marcha la técnica para la medición de la fase, se llevó a cabo la caracterización final y calibración del mismo, siendo este el paso final antes de utilizarlo en experiencias de turbulencia de ondas.

El procedimiento para la calibración consistió en realizar movimientos controlados y conocidos de la superficie libre midiendo simultáneamente con el sensor (que se encontraba en una posición estática). De esta forma es posible comparar la altura medida con la real y estudiar si la respuesta es lineal y cuáles serían los parámetros de calibración del sensor.

3.6.1. Montaje

El montaje para la calibración del sensor, como se muestra en la Figura 3.10, consistió en un recipiente pequeño lleno de aproximadamente 5 cm de agua destilada, montado mediante un brazo de unos 15 cm de largo, impreso en 3D, a un motor lineal LinMot colocado verticalmente.

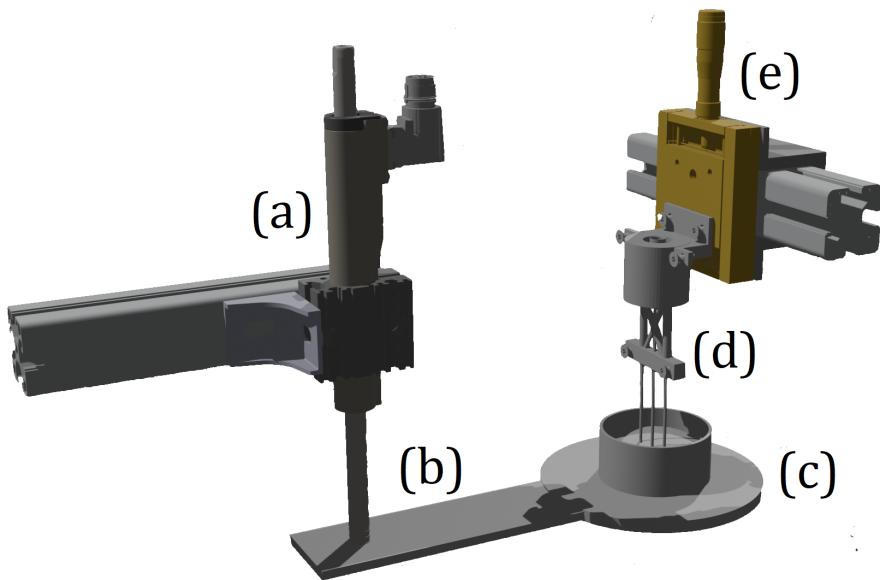


Figura 3.10: Modelado 3D del montaje utilizado para la calibración del sensor a escala real. Este se compone de un motor lineal colocado verticalmente (a) unido mediante un brazo (b) a un recipiente con agua destilada (c). El sensor (d) se encuentra fijo, sujeto a un perfil de aluminio mediante un tornillo micrométrico (e).

Se alimentó al motor con una señal aleatoria periódica de 10 segundos de longitud (formada por ruido limitado en frecuencia entre 0-6 Hz y fase aleatoria), de forma tal que el movimiento fuese lo suficientemente lento como para poder considerar que la posición del motor es solidaria a la de la

superficie libre, y evitar que se produzcan vibraciones en la misma.

La sonda del sensor se montó sobre un perfil de aluminio, mediante un tornillo micrométrico intermedio que permitió ajustar la posición tal que la punta no llegase a tocar el fondo del recipiente con agua.

Se midió simultáneamente la fase del sensor, mediante la placa de adquisición y el lock-in digital, y la posición real del motor, mediante el software del controlador (vale aclarar que es la instantánea a la que llega, no los setpoints pedidos).

Un par de observaciones importantes son que, si bien se intentó evitar al máximo las vibraciones en el setup hubo algunas que podrían generar que el error aparente en las mediciones sean mayores a los reales, y además que, si la sonda solo se encuentra sumergida unos pocos mm parece no funcionar correctamente, con lo cual de aquí en más siempre se buscó que estuviese sumergida al menos un par de cm.

3.6.2. Altura vs Altura

En la Figura 3.11 se muestran las series temporales obtenidas durante la medición. En 3.11a se encuentra la posición real del motor, y debajo en 3.11b la fase medida por el sensor. De la similitud entre ambas señales se puede intuir una relación que efectivamente sería lineal.

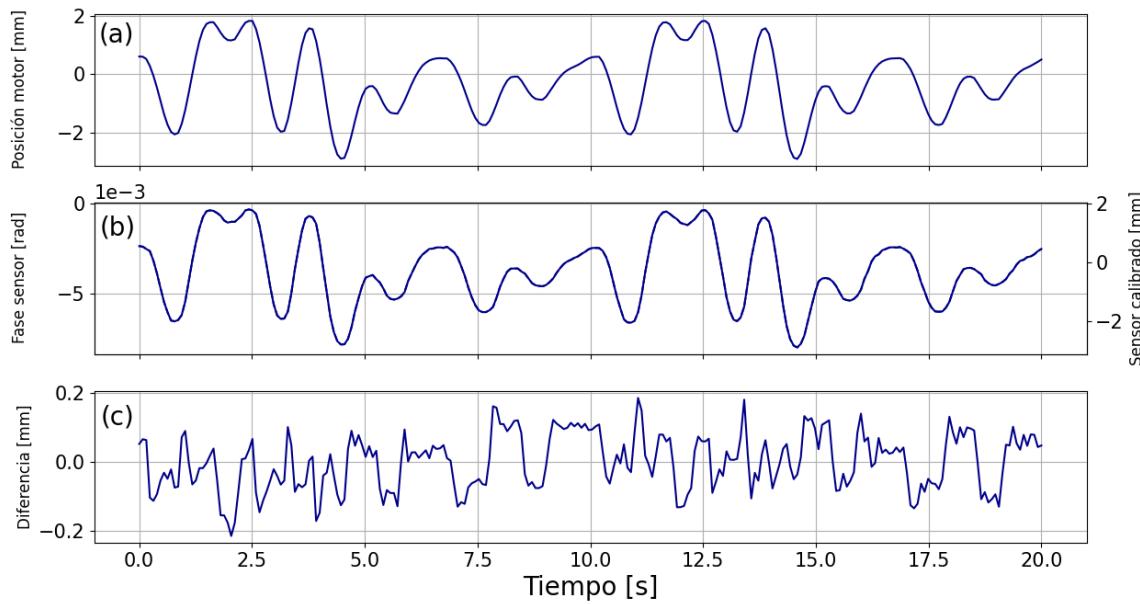


Figura 3.11: (a) Posición real del motor en función del tiempo (solidaria a la posición de la superficie libre). (b) Fase medida por el sensor simultáneamente (el eje derecho muestra los valores para la señal calibrada por la función lineal obtenida de la Figura 3.12). (c) Diferencias de la altura real y la fase calibrada.

Para poder verificar esto se puede graficar una señal contra la otra, como en la Figura 3.12, y de observarse una tendencia lineal, como en este caso, realizar un ajuste lineal de los datos.

Los parámetros del ajuste lineal fueron los siguientes: pendiente de $a = (604 \pm 3)$ mm/rad, ordenada de $b = (1.970.01)$ mm y el estimador $R^2 = 0.99518$.

Se considera un muy buen ajuste, y que los datos siguen efectivamente una tendencia lineal durante todo el tiempo de la medición. Se puede apreciar de la pendiente que en principio se podrían medir desplazamientos de hasta unos 6.0 cm antes de romper la hipótesis de fase pequeña. Por otro

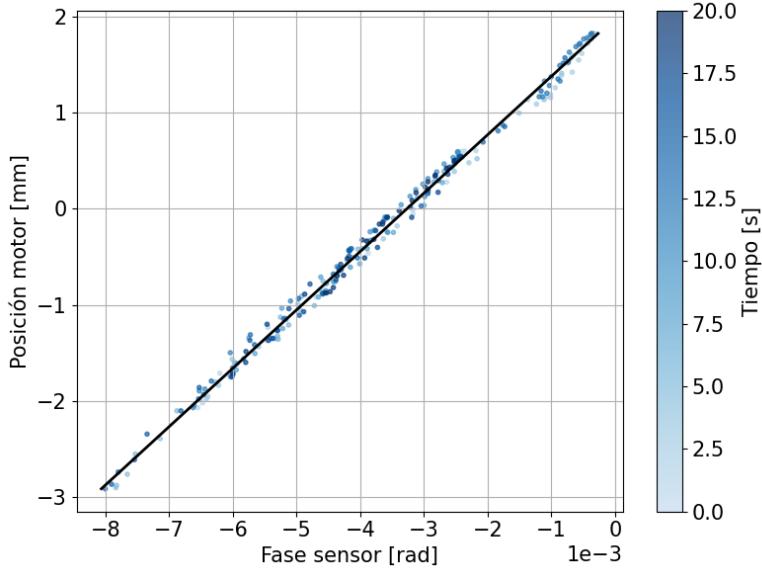


Figura 3.12: Posición real del motor (solidaria a la altura real de la superficie libre) contra la fase medida por el sensor simultáneamente (●). Se muestra además el ajuste lineal (—) de parámetros $a = (604 \pm 3)$ mm/rad y $b = (1.970.01)$ mm.

lado, la ordenada es distinta de cero, lo cual probablemente se deba a que la frecuencia del circuito estaba levemente desviada de la de resonancia. Además, puede verse muy poca dispersión en los puntos, con lo cual el ruido en la medición apuntaría a ser bajo. Tampoco pareciera haber histéresis en los datos.

3.6.3. Diferencias

Por último, se pueden usar los parámetros del ajuste lineal como parámetros de calibración del sensor, con lo cuales pasar de fase a altura (c.f. eje derecho de la Figura 3.11). Una vez calibrada la señal se pueden calcular las diferencias con la altura real, que sería el último panel de la Figura, 3.11c.

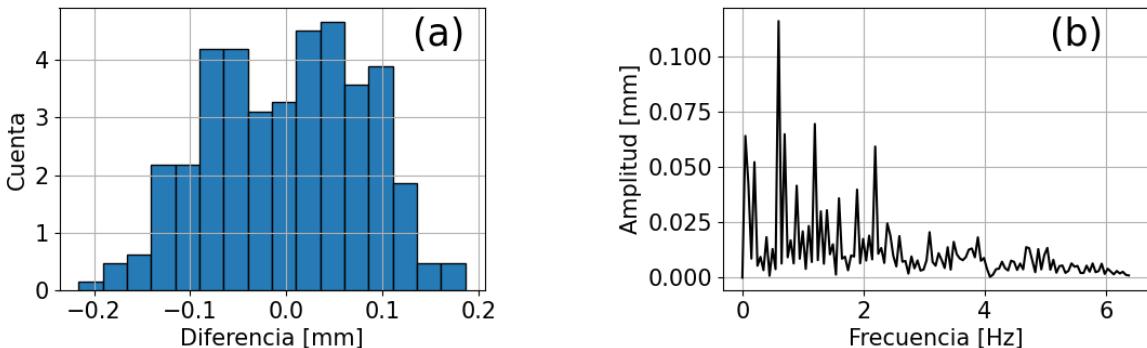


Figura 3.13: (a) Histograma de las diferencias (Figura 3.11c). (b) Espectro de las mismas diferencias que para (a).

A partir de estas diferencias, de dispersión 0.08 mm, se puede estimar un cota parar el error del sensor de aproximadamente 0.1 mm.

Además, viendo el histograma de estas diferencias, Figura 3.13a se puede notar que están centradas en 0 y decaen rápidamente. Del espectro de las mismas, Figura 3.13b se ven oscilaciones a baja frecuencia pero que en principio no deberían ser relevantes en el cálculo de los espectros en turbulencia de ondas.

Ruido

En la Figura 3.14 se puede apreciar la densidad espectral de potencias del ruido del sensor, estando éste sumergido en un fluido estático.

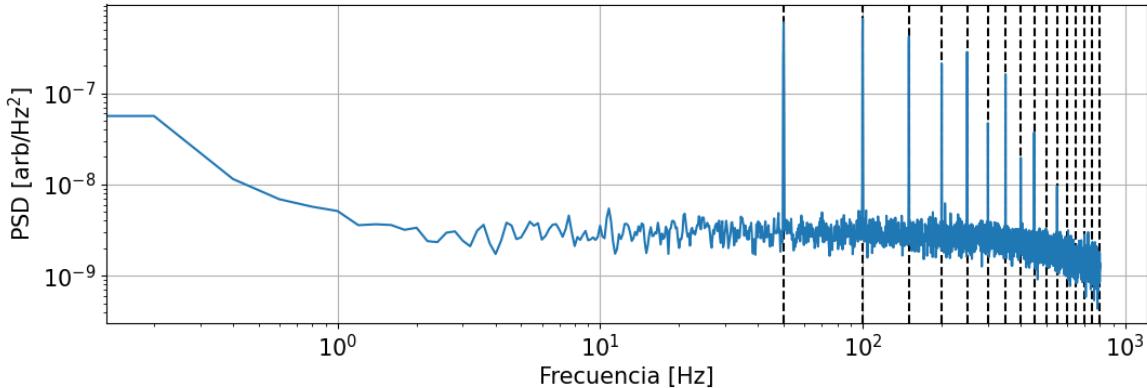


Figura 3.14: Densidad espectral de potencias para el ruido del sensor (—). Se marcan los múltiplos enteros de 50 Hz (---), que coincide con los picos.

Se puede ver que es prácticamente uniforme, y lo único importante a resaltar de aquí es que hay picos importantes en los múltiplos enteros de 50 Hz, que se atribuyen a ruido eléctrico de la corriente de línea (ya que aparecen incluso con la sonda desconectada del circuito). Por este motivo se eliminarán estos picos (que abarcan menos de 1 Hz) en el postprocesado de las señales mediadas de aquí en adelante.

3.7. Especificaciones finales

El sensor construído es sencillo y de muy bajo costo, ya que se compone principalmente por un alambre de cobre esmaltado y otros componentes de fácil acceso. La única componente costosa para su utilización es la placa de adquisición (aunque ya de por sí es una alternativa mucho más económica que el amplificador Lock-in), pero para la cual según sea lo que se desea medir podrían buscarse alternativas en placas de desarrollo (por ejemplo FPGA o Teensy).

De la Sección anterior se vio que el sensor puede llegar a resolver de base amplitudes de hasta aproximadamente 0.1 mm, aunque probablemente realizando una calibración más cuidadosa el error real sea menos.

La frecuencia máxima a la que podrán medirse variaciones de Δl estará relacionada a la frecuencia de resonancia del circuito RLC, ya que será la moduladora, pudiendo llegar hasta algunas decenas de kHz con los componentes utilizados. Sin embargo, hay que tener en cuenta el hecho de que el alambre tiene un determinado diámetro, con lo cual no tendrá sentido caracterizar ondas con longitud de onda menor a $d = (0.35 \pm 0.05)$ mm. Utilizando la relación de dispersión para ondas

gravito-capilares para el agua, esta longitud de onda está asociada a una frecuencia $f = (3.3 \pm 0.7)$ kHz. Ésta será la frecuencia máxima a la cual tendría sentido medir con el sensor, que está por encima del 1 kHz hasta el cual desea utilizarse.

Y con la placa de adquisición utilizada es posible usar, hasta donde se probó tres sensores simultáneamente, aunque sería escalable a más en la propia placa, y aún más utilizando múltiples placas sincronizadas.

CAPÍTULO 4

ESTUDIO EXPERIMENTAL DE TURBULENCIA DE ONDAS

Las experiencias realizadas para esta Tesis se corresponden al estudio estadístico de las propiedades de

4.1. Montaje para Turbulencia de Ondas

4.1.1. Montaje

El armado experimental consistió, como se muestra en la Figura 4.1, en una cuba de acrílico de $20 \times 20 \text{ cm}^2$ llena hasta una altura de $h_0 = (4.45 \pm 0.05) \text{ cm}$ de agua destilada. En ésta se sumergió aproximadamente un centímetro una paleta de acrílico, unida a un motor lineal LinMot colocado horizontalmente, al cual fueron suministradas distintas señales según el caso.

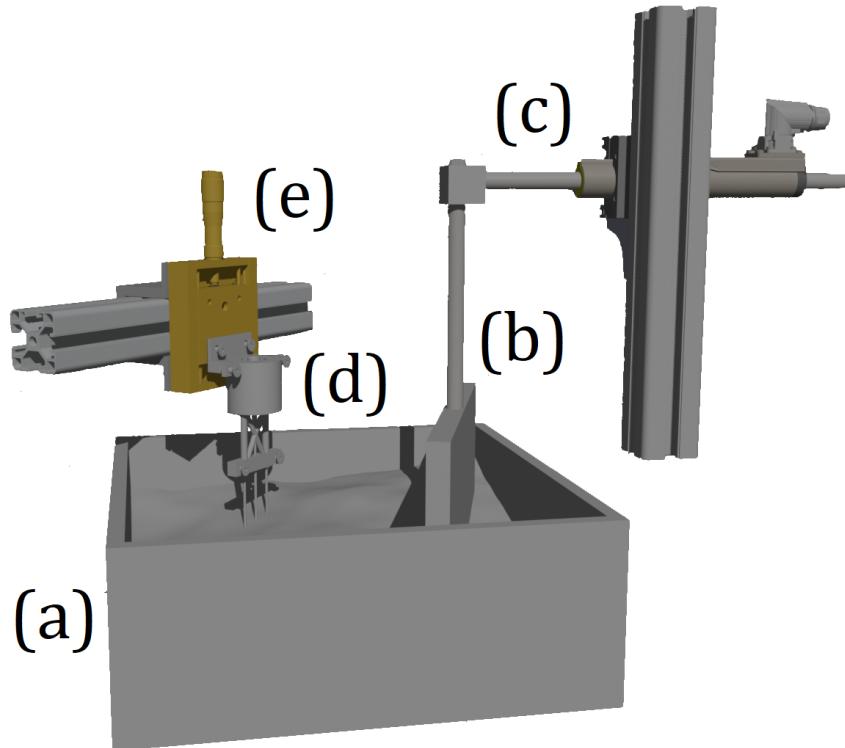


Figura 4.1: Modelo 3D a escala del montaje para el estudio experimental de turbulencia de ondas gravitocapilares. Se compone por una cuba cuadrada llena de agua destilada (a), en la cual se encuentra sumergida una paleta de acrílico (b) forzada por un motor lineal colocado horizontalmente (c). En el extremo opuesto está colocado el sensor capacitivo (d) sujeto mediante un tornillo micrométrico (e) para un ajuste fino de su altura sumergida.

En el extremo opuesto a la paleta se colocó el sensor capacitivo, sumergido aproximadamente un centímetro, lo cual se reguló mediante un tornillo micrométrico.

La altura sumergida del sensor y de la paleta se mantuvieron constantes durante las experiencias, y lo único que se varió fue el forzado del motor en cada caso.

Con la intención de romper lo más posible los modos fundamentales del recinto, y poder considerar un fluido isótropo, se colocó la paleta con una inclinación, de forma tal que las reflexiones no fuesen perpendiculares a los bordes.

4.1.2. Inyección de energía

Para la inyección de energía en el sistema se forzó a la paleta con una señal de ruido limitado en frecuencia, como la que se muestra en la Figura 4.2a.

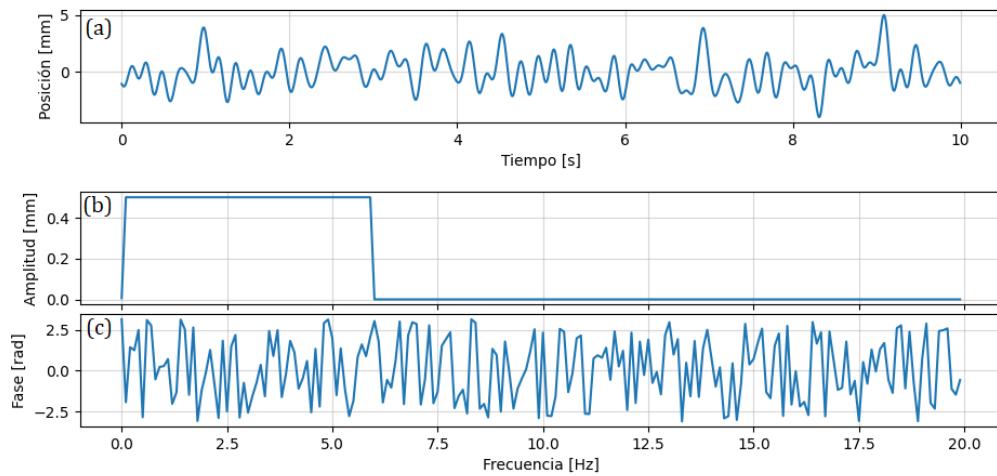


Figura 4.2: (a) Curva típica para el forzado del fluido. En los paneles inferiores se muestra su contenido en frecuencia, con su amplitud (b) limitada al rango de 0-6 Hz en este caso , y su fase (c) aleatoria.

Esta señal fue creada pidiendo una amplitud constante en un rango específico de frecuencias, por ejemplo, para el caso de la Figura 4.2 el rango de amplitud no nula es entre 0 y 6 Hz. Además, la fase de la señal es aleatoria, distribuida uniformemente en el intervalo $(-\pi, +\pi]$.

La amplitud del forzado, como el rango de frecuencias con amplitud no nula, estarán intrínsecamente relacionados con la potencia media inyectada en el sistema; a mayor amplitud, o mayor rango, más será. También será relevante la profundidad que se encuentra sumergida la paleta, ya que la fuerza que ésta realizará (y por tanto la potencia inyectada) será proporcional al área efectiva sumergida.

4.1.3. Juegos de Datos

Para la experiencias de esta Tesis la inyección de energía se realizó a escalas grandes (frecuencias bajas), siempre en el rango gravitatorio, con el objetivo de poder observar el poblamiento completo de escalas en la cascada directa de energía, desde el rango gravitatorio hasta el capilar.

Los juegos de datos consisten en cuatro rangos de frecuencias distintas, todas desde 0 Hz, y terminando 3, 4, 5 o 6 Hz. Para cada uno de estos rangos se usaron 11 amplitudes distintas, las cuales estarán escritas en términos de porcentaje (del 60 al 160 %) respecto de una curva base. Las curvas bases de los cuatro rangos fueron generadas con la misma amplitud en Fourier, de forma tal que los escalados posteriores sean comparables entre distintos juegos de datos.

Las mediciones se tomaron un minuto después de haber iniciado el forzado, con el objetivo de asegurarse estar dentro del régimen estacionario de turbulencia de ondas. A no ser que se especifique lo contrario, para cada medición se tomaron datos durante un minuto y medio, solo para la mayor amplitud en el rango de mayor frecuencia (que sería el de mayor energía inyectada) se midió durante cinco minutos, para poder realizar algunos análisis que requieren más puntos en la estadística (como se mencionará cuando vaya a utilizarse).

4.2. Series Temporales

Una serie temporal típica de las medidas para este tipo de forzados limitados en frecuencia se muestra en la Figura 4.4.

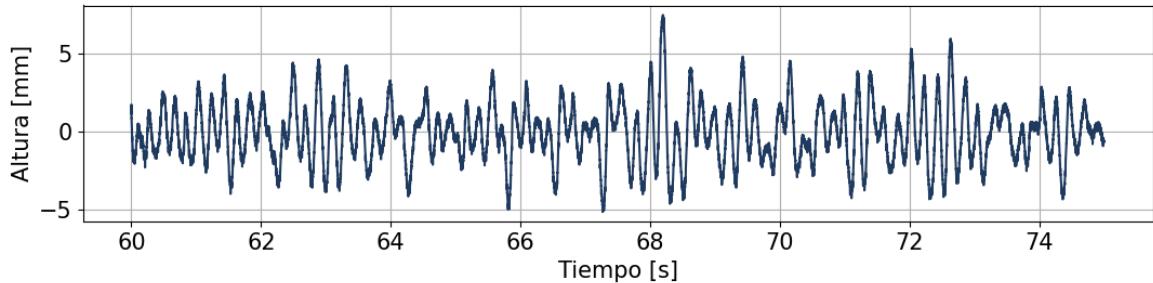


Figura 4.3: Serie temporal para el forzado en la banda 0-6 Hz y amplitud de 100 %.

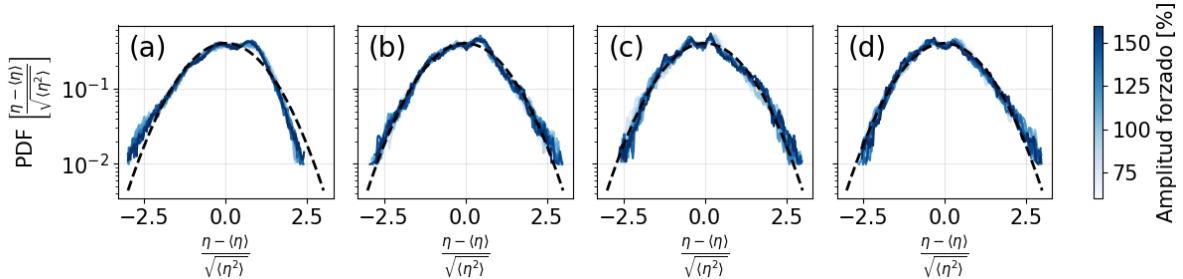


Figura 4.4: PDFs para la altura normalizada (—) de las distintas mediciones (a) 0-3 Hz (b) 0-4 Hz (c) 0-5 Hz y (d) 0-6 Hz. Se muestra, además, la distribución gaussiana de media cero y desviación unidad (----) a modo comparativoa.

4.3. Wave Steepness

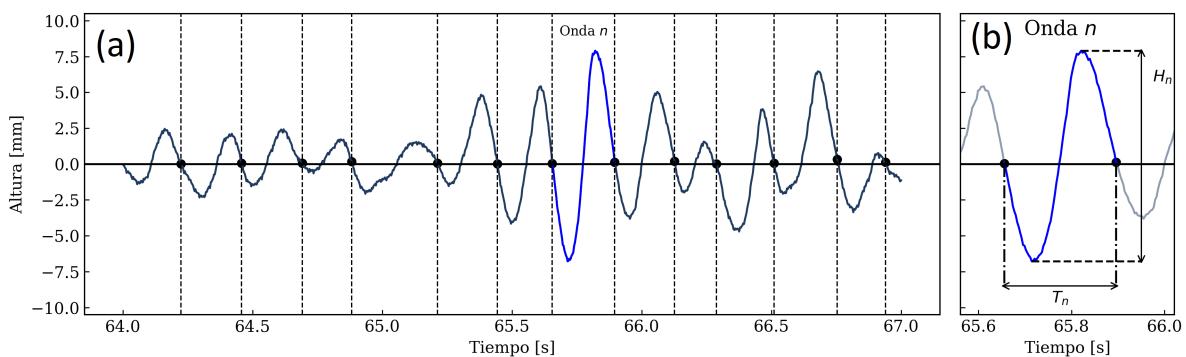


Figura 4.5: (a) Definición de ondas individuales para una medición típica, a partir de dos cruces de cero consecutivos en el mismo sentido. (b) Definición de la altura H_n y periodo T_n para la n -ésima onda individual de la señal.

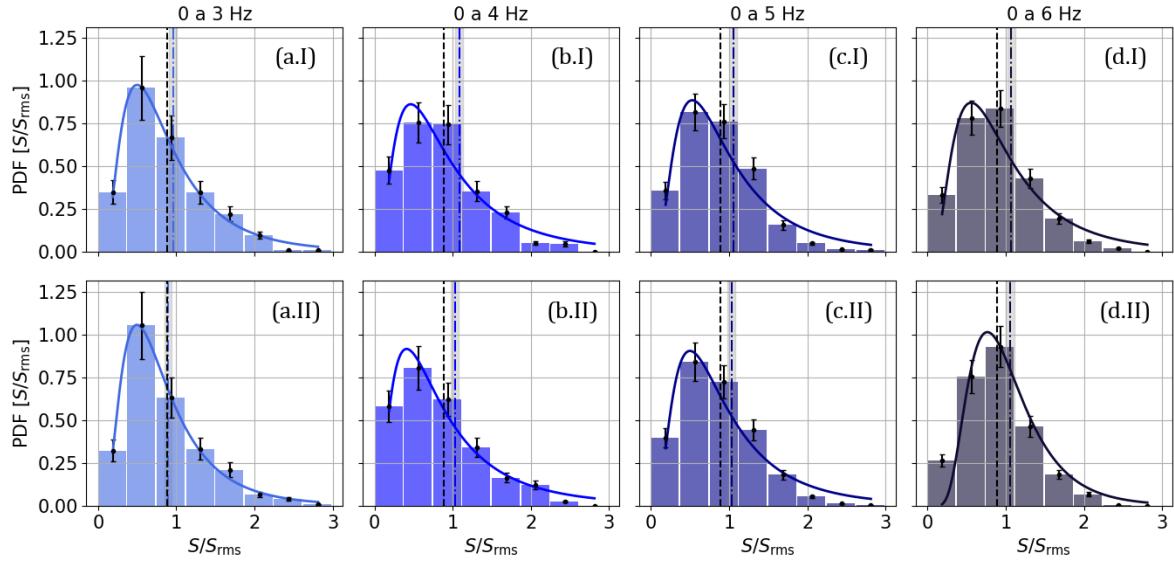


Figura 4.6: PDFs para la pendiente de las ondas normalizada (S/S_{rms}) de varias mediciones. Cada columna se corresponde a un rango de frecuencias, siendo (a) 0-3 Hz (b) 0-4 Hz (c) 0-5 Hz y (d) 0-6 Hz. La fila superior (n.I) se corresponde a la amplitud de 80 % y la inferior (n.II) a 120 %. Para cada una se muestra el ajuste por el modelo log-normal (—), el valor medio obtenido (—·—) con su incertezza y el valor teórico esperado de $\sqrt{\pi}/2$ (---).

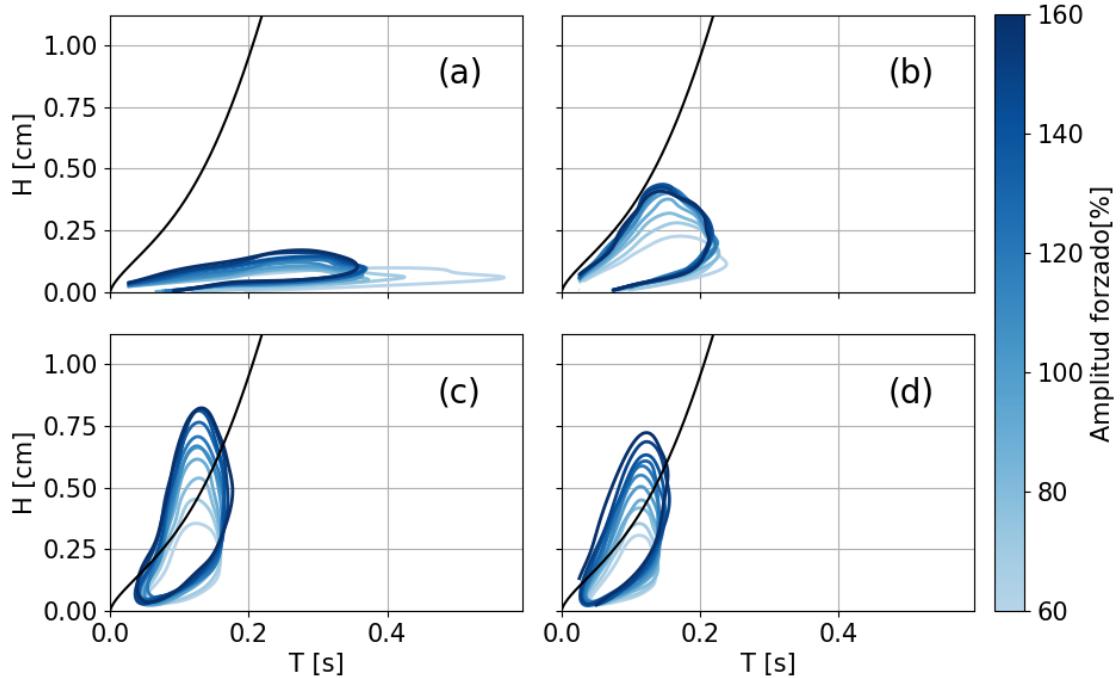


Figura 4.7

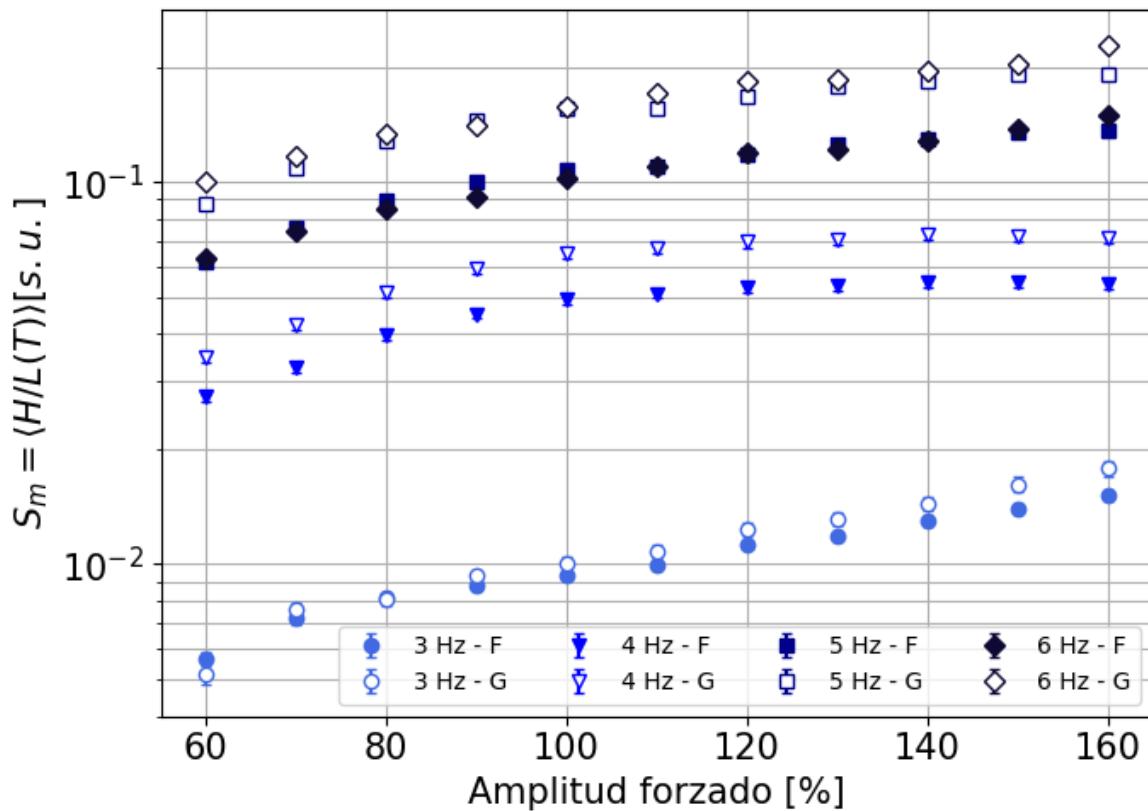
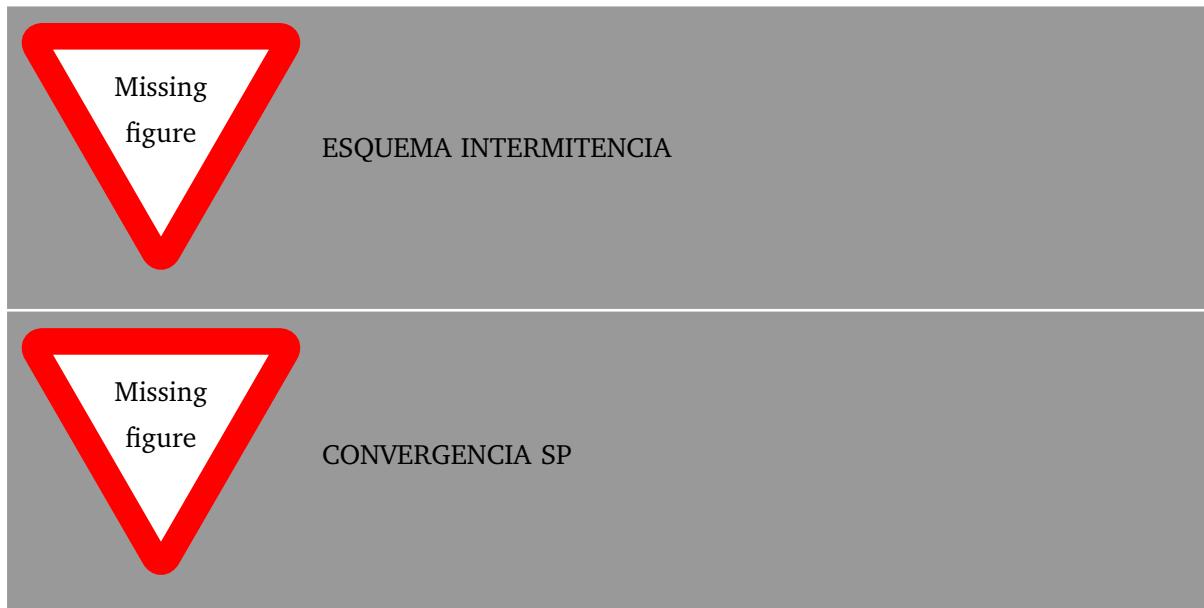


Figura 4.8

4.4. Cascadas de energía

4.5. Interacción a 3 y 4 ondas

4.6. Intermitencia



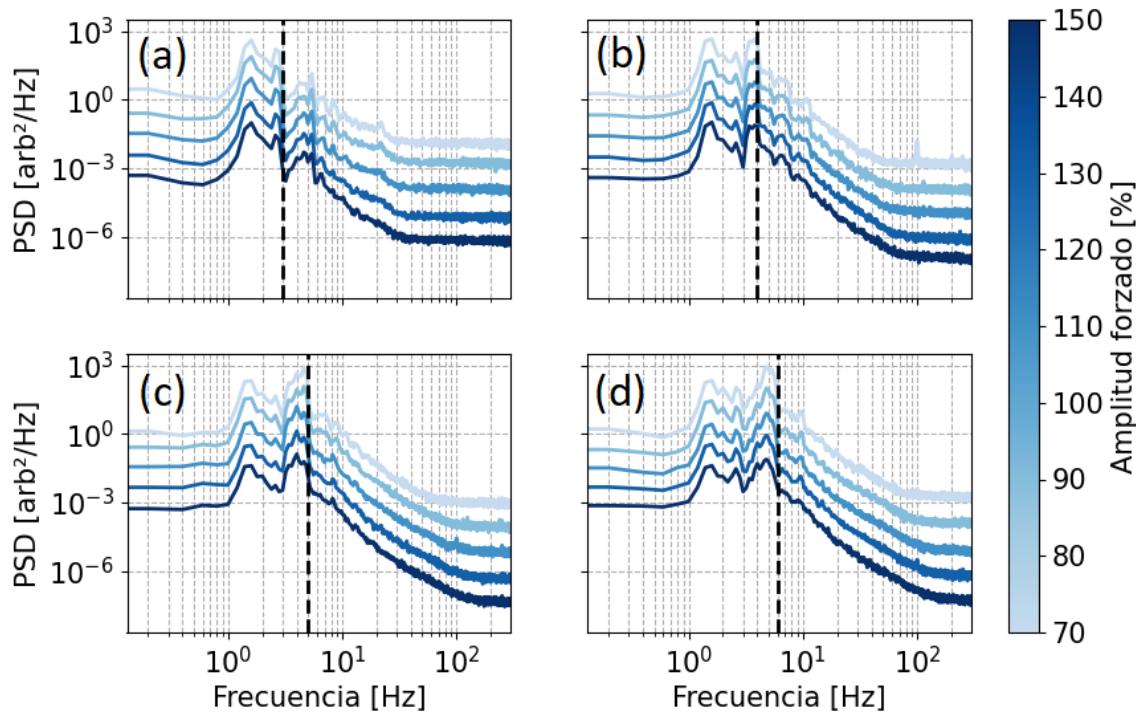


Figura 4.9: PSDs (—) para los distintos juegos de datos (a) 0-3 Hz (b) 0-4 Hz (c) 0-5 Hz (d) 0-6 Hz. Se muestra la frecuencia final del forzado (---) en cada caso. Las curvas se desplazaron verticalmente por claridad.

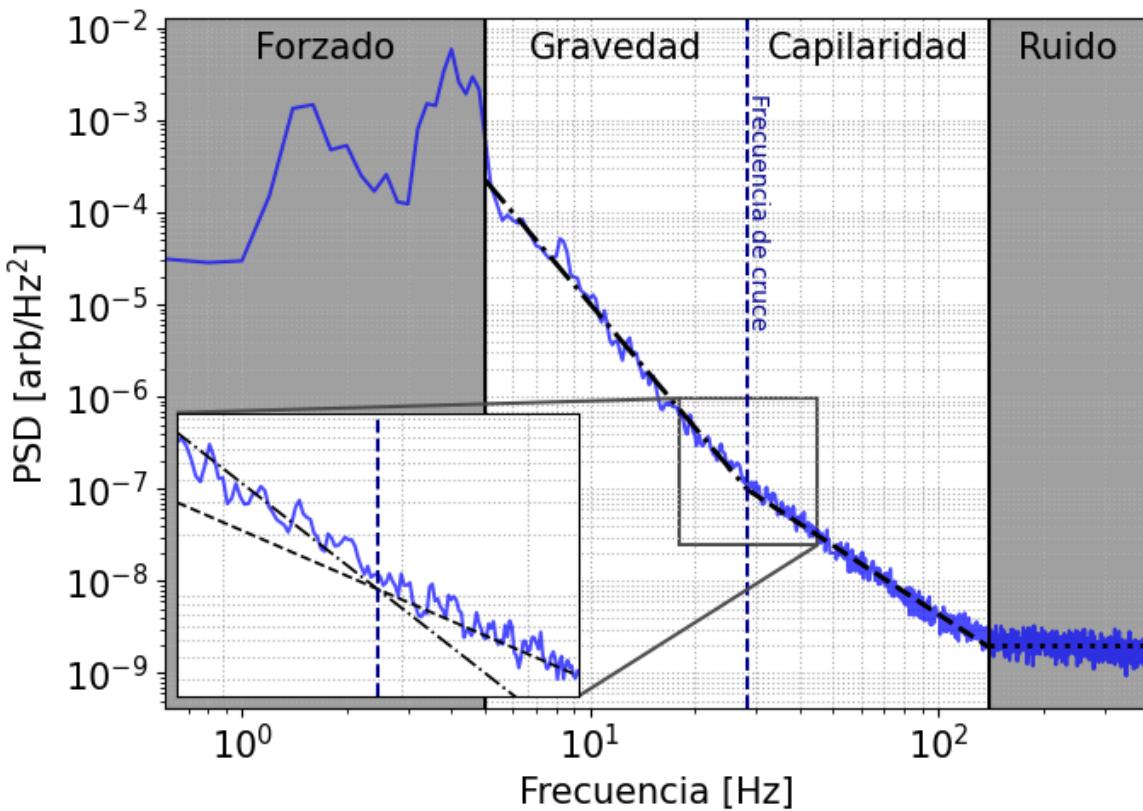


Figura 4.10

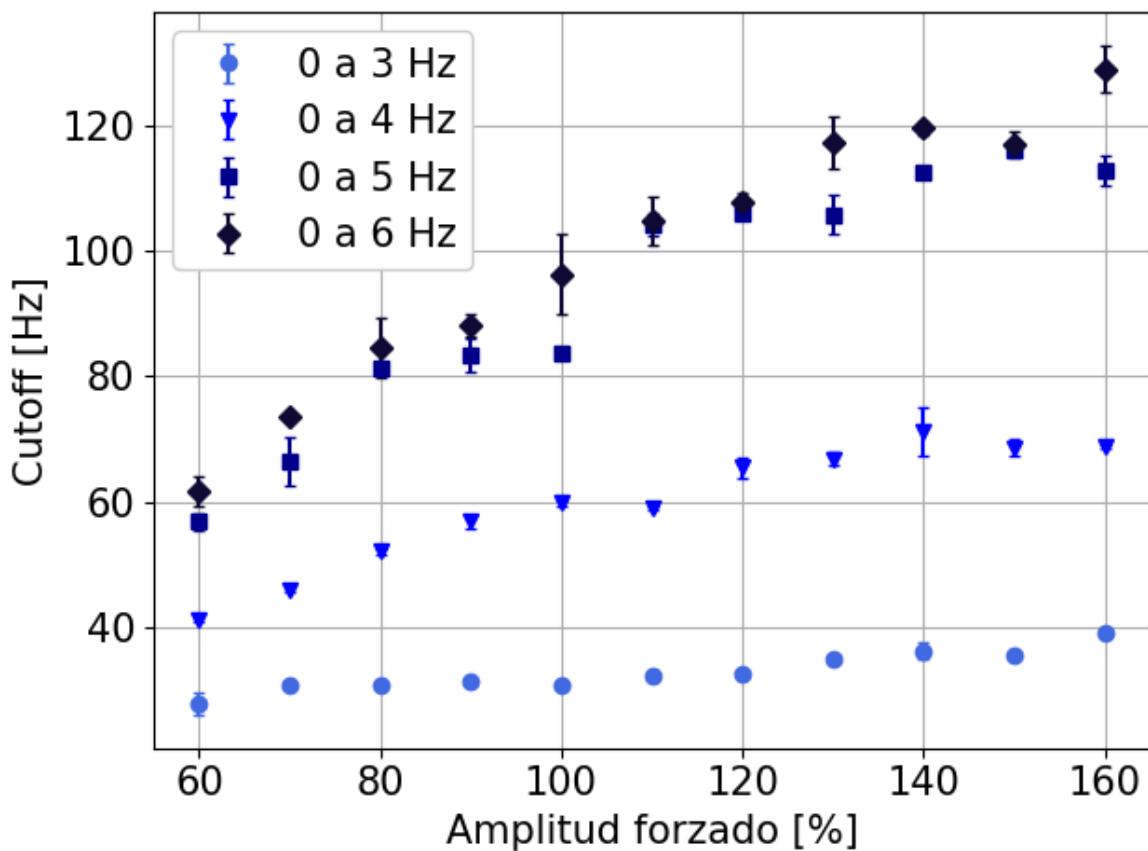


Figura 4.11

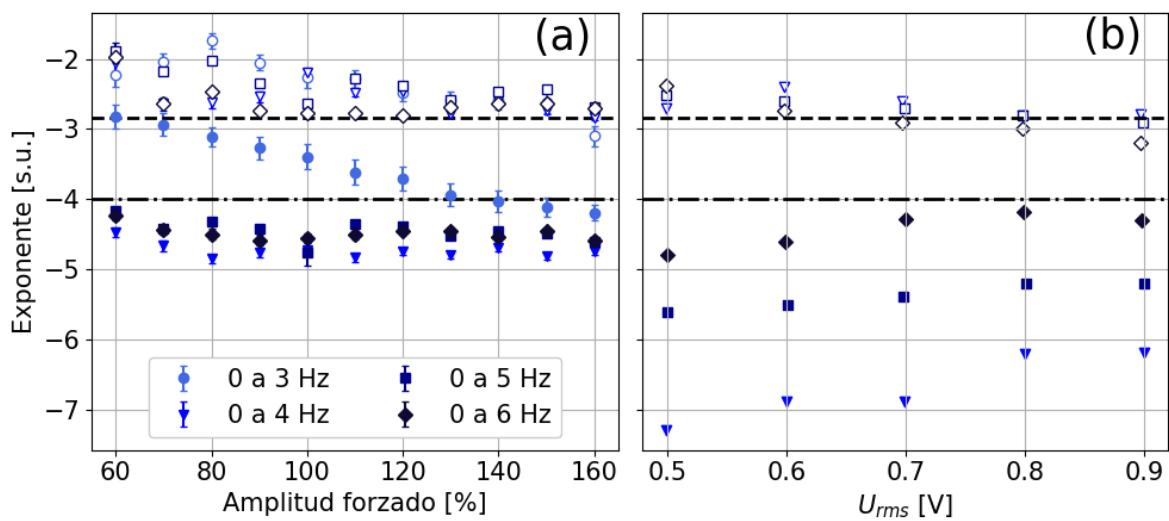


Figura 4.12

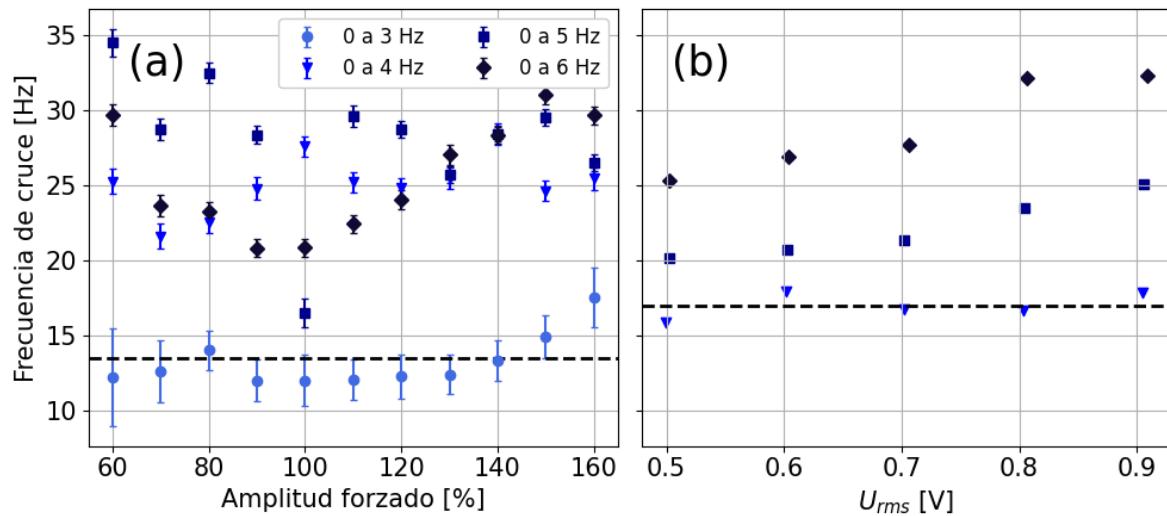


Figura 4.13

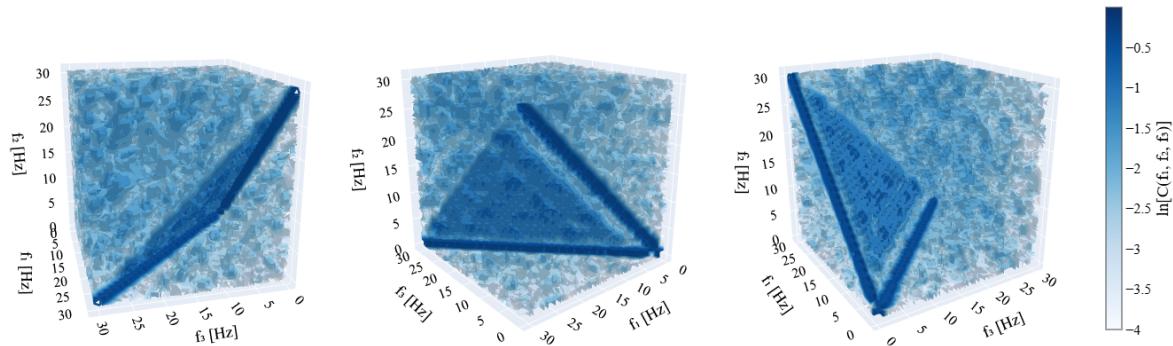


Figura 4.14

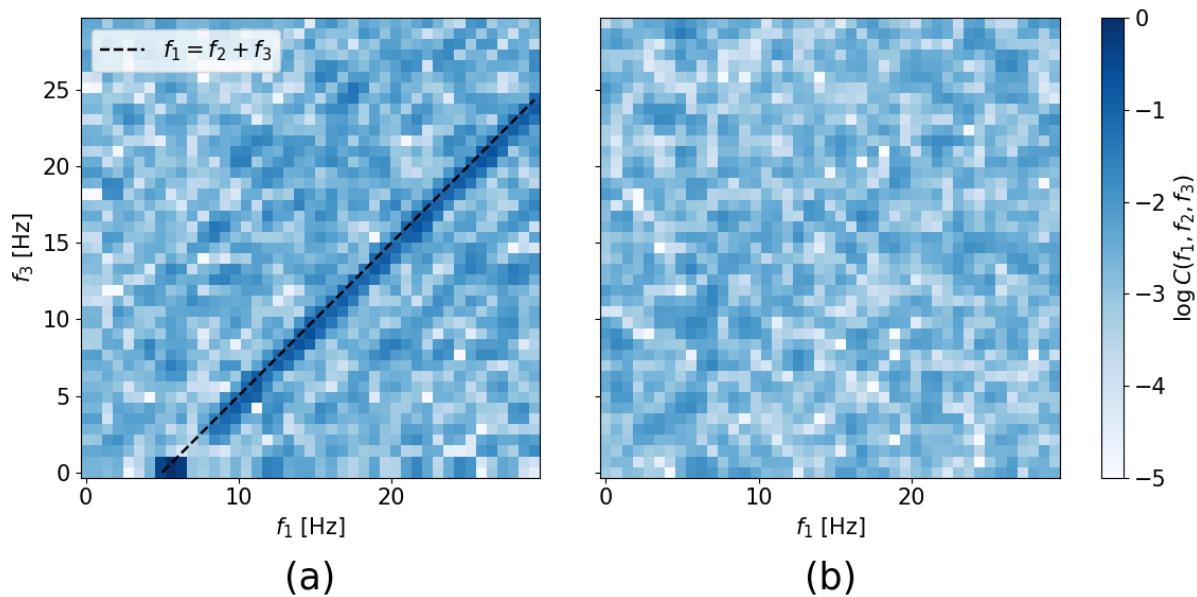


Figura 4.15

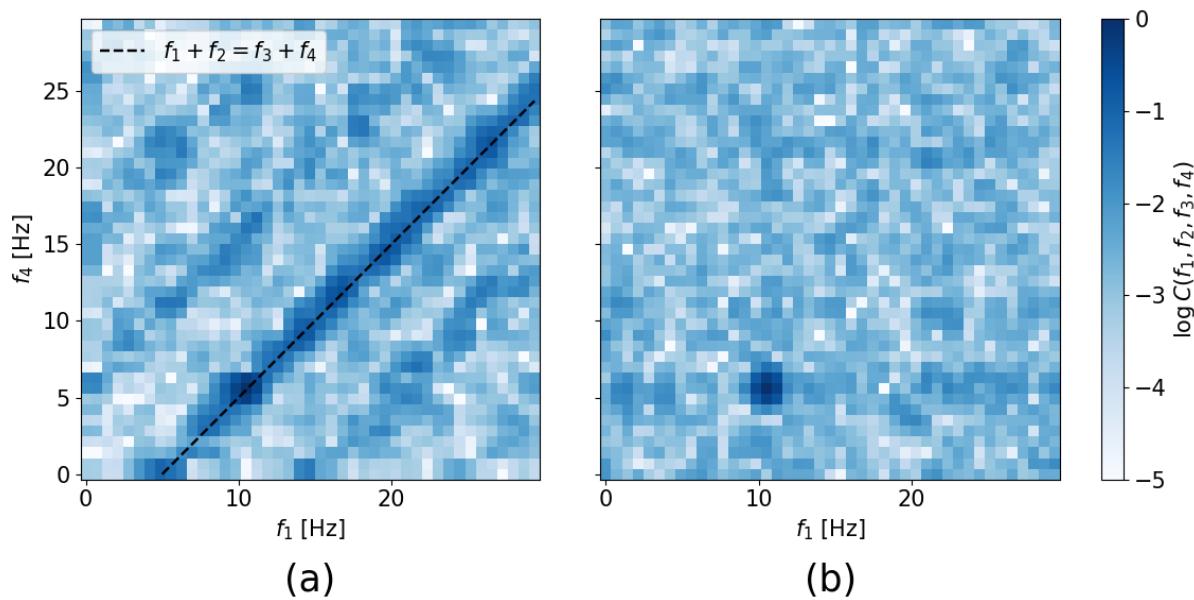


Figura 4.16

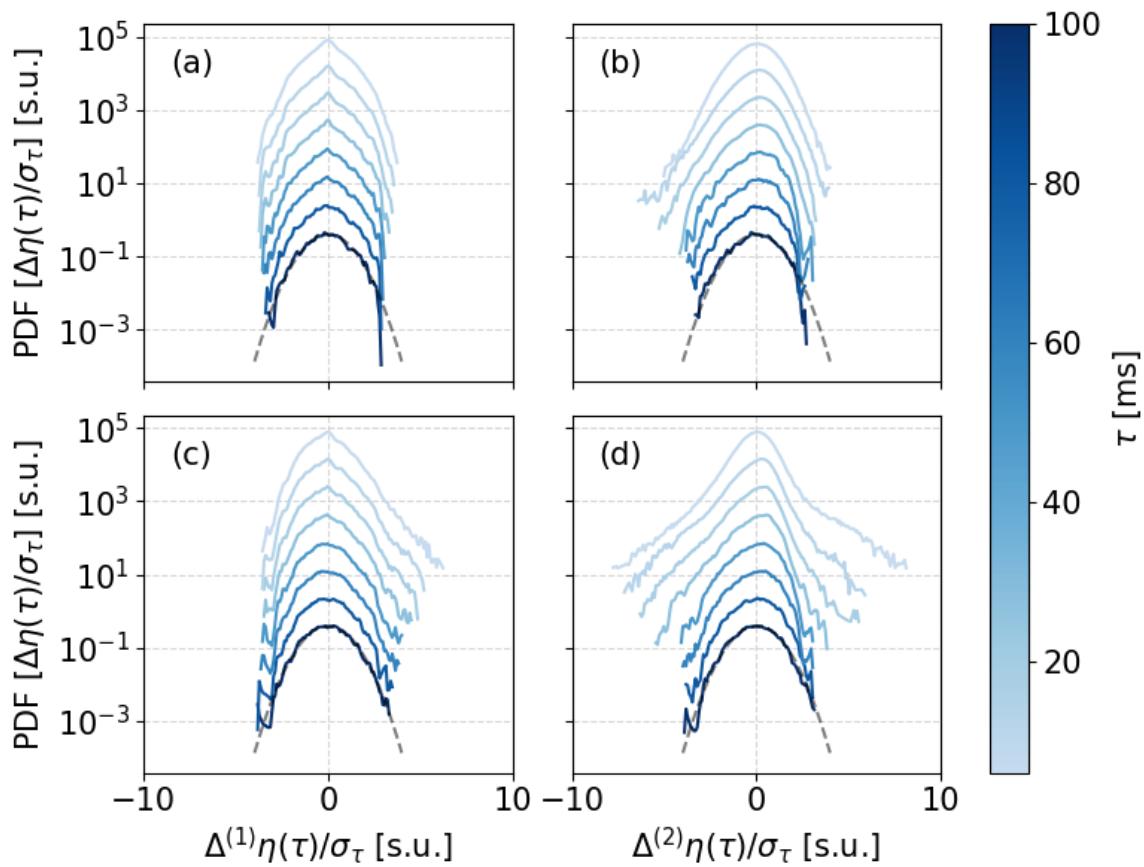


Figura 4.17

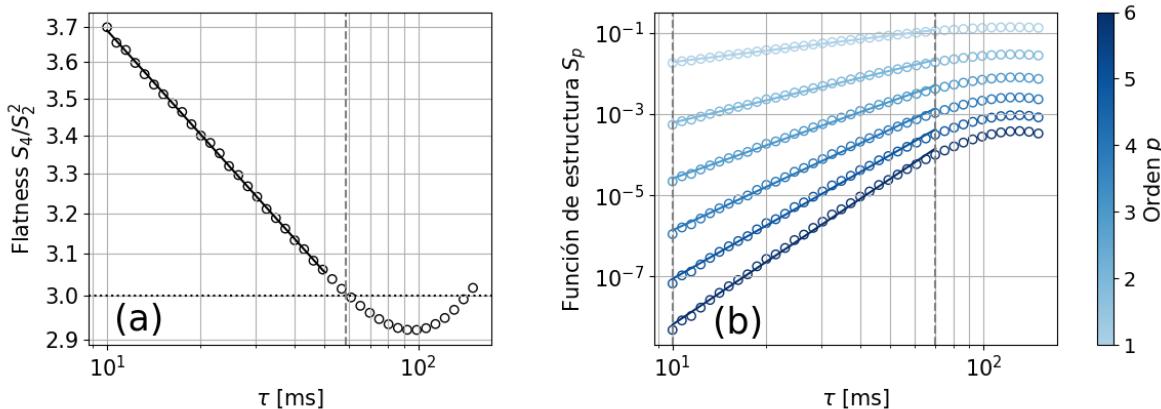


Figura 4.18

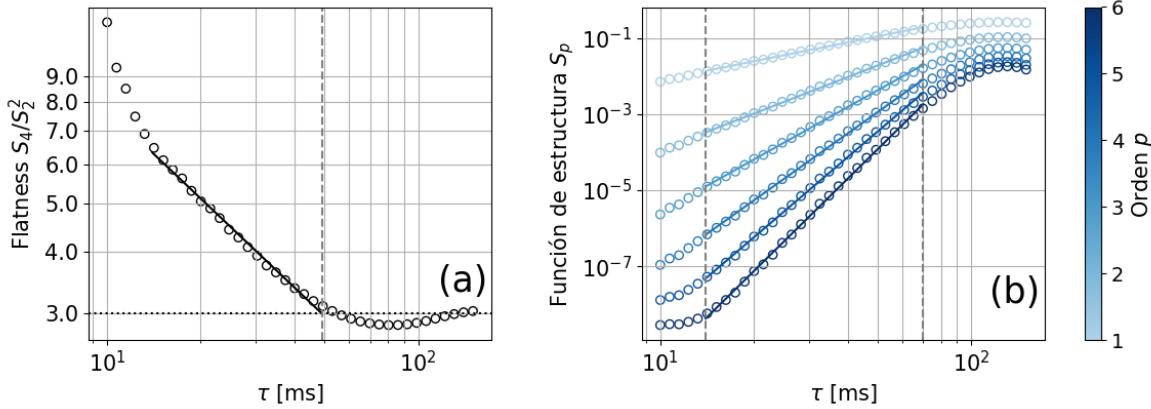


Figura 4.19

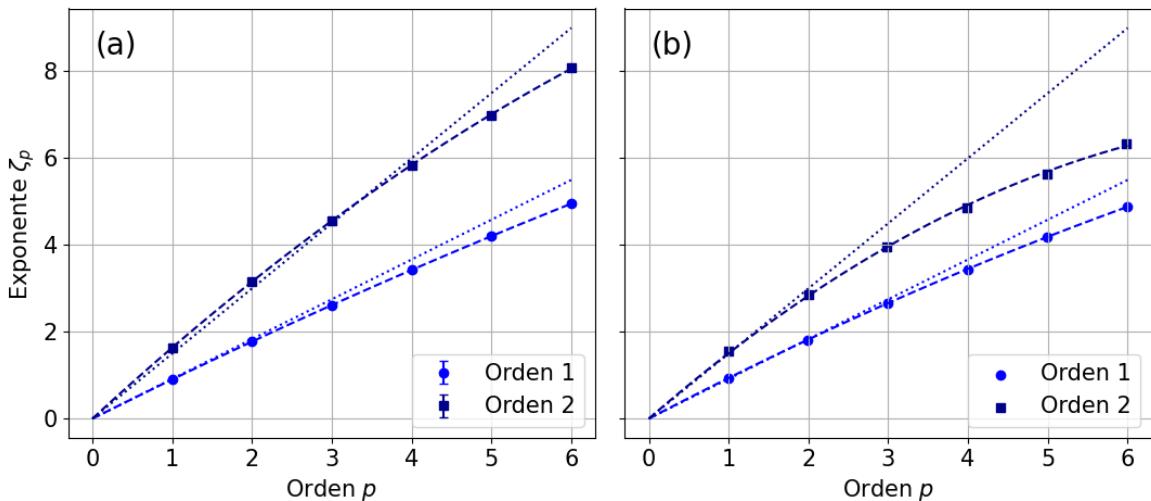


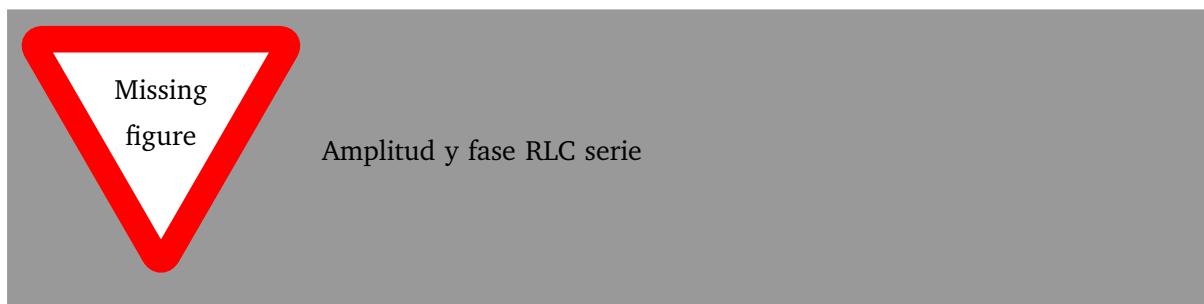
Figura 4.20

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

APÉNDICE A

PUESTA A PRUEBA DE LA DAQ + LOCK-IN DIGITAL



BIBLIOGRAFÍA

- [1] Gordillo Zavaleta. *Non-Propagating Hydrodynamic Solitons in a Quasi-One Dimensional Free Surface Subject to Vertical Vibrations*. Doctoral Thesis, Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Departamento de Física, Santiago de Chile, Chile, 2012.
- [2] Measurement Computing, Norton, MA, USA. *Personal Daq/3000 Series User's Manual*, 2009.
- [3] fake-name. Pyitech: Python interface for iotech data acquisition boards, 2015. Accessed: 2026-01-25.
- [4] Ignacio Hernando. Comunicación con la placa personal daq 3001 de iotech mediante python. <https://github.com/laboratorio-turbulencia-geofisica/Comunicacion-con-instrumentos/tree/main/Personal%20DAQ%203001%20IOTech%20con%20Python>, 2025. Repositorio GitHub. Software desarrollado por el autor.
- [5] Andrew J. Harvie and John C. De Mello. OLIA: An open-source digital lock-in amplifier. *Frontiers in Sensors*, 4:1102176, March 2023.
- [6] Ignacio Hernando. Implementación de un lock-in digital en python. <https://github.com/ignacioph21/Code-Wave-Turbulence/tree/main/Lock-in%20Digital>, 2025. Repositorio GitHub. Software desarrollado por el autor.

Tesis disponible bajo Licencia Creative Commons, Atribución – No Comercial – Compartir Igual
(by-nc-sa) 2.5 Argentina

Buenos Aires, 2026