



# **Estudio experimental de la transferencia de energía en turbulencia de ondas gravito-capilares**

Ignacio Pablo Hernando

Tesis de Licenciatura en Ciencias Físicas

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

¿¿¿¿¿¿¿¿¿¿¿¿ ¿¿¿¿¿¿¿¿¿¿¿¿?



TEMA: Estudio experimental de la transferencia de energía en  
turbulencia de ondas gravito-capilares

ALUMNO: Ignacio Pablo Hernando

L.U. N°: 6/21

LUGAR DE TRABAJO: Laboratorio de Turbulencia Geofísica  
Instituto de Fisica Interdisciplinaria y Aplicada  
INFINA UBA-CONICET  
Departamento de Física, FCEN, UBA

DIRECTOR DEL TRABAJO: Dr. Pablo Cobelli

FECHA DE INICIACION: Marzo de 2025

FECHA DE FINALIZACION: ??????????????

FECHA DE EXAMEN: ??????????????

INFORME FINAL APROBADO POR:

---

Autor

---

Jurado

---

Director

---

Jurado

---

Codirector

---

Jurado

---

Profesor de Tesis de Licenciatura





## **Resumen**



## **Agradecimientos**



---

# ÍNDICE GENERAL

---

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Sensor capacitivo</b>	<b>3</b>
2.1. Principio de funcionamiento .....	3
2.1.1. La sonda .....	3
2.1.2. Medición de la capacitancia .....	5
2.1.3. Medición de la fase .....	6
2.2. Resolución numérica del circuito .....	8
2.3. Prueba de un circuito equivalente .....	9
2.4. Prototipado .....	9
2.5. Placa de adquisición y Lock-in digital .....	12
2.6. Prueba final y calibración .....	12
2.6.1. Montaje .....	12
2.6.2. Altura vs Altura .....	12
2.6.3. Diferencias .....	12
<b>3. Estudio experimental de Turbulencia de Ondas</b>	<b>15</b>
3.1. Montaje para Turbulencia de Ondas .....	15
<b>4. Resultados</b>	<b>17</b>
4.1. Series Temporales .....	17
4.2. Wave Steepness .....	18
4.3. Cascadas de energía .....	18
4.4. Interacción a 3 y 4 ondas .....	18
4.5. Intermitencia .....	18
<b>5. Conclusiones</b>	<b>25</b>

<b>A. Puesta a prueba de la DAQ + Lock-in Digital</b>	<b>27</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>29</b>

# CAPÍTULO 1

---

## INTRODUCCIÓN

---



# CAPÍTULO 2

## SENSOR CAPACITIVO

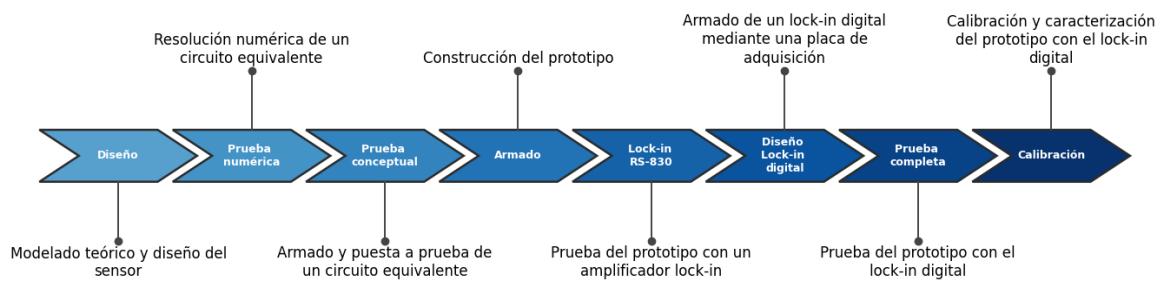


Figura 2.1: Diagrama esquemático de los pasos para la construcción y caracterización del sensor capacitivo para la altura de la superficie libre.

### 2.1. Principio de funcionamiento

#### 2.1.1. La sonda

Al sumergir un alambre de cobre esmaltado en un fluido conductor, como se esquematiza en la Figura 2.2, el recubrimiento aislante actuará a modo de medio dieléctrico entre los conductores. En el caso de dos conductores cilíndricos coaxiales, de radios  $r_1 < r_2$ , cuyo intersticio se encuentra lleno de un medio con permitividad  $\epsilon$  y permeabilidad  $\mu$ , se tienen una capacitancia ( $C'$ ) e inductancia ( $L'$ ) por unidad de longitud, dadas por

$$C' = 2\pi\epsilon \ln^{-1}\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \quad (2.1a)$$

$$L' = \frac{\mu}{2\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \quad (2.1b)$$

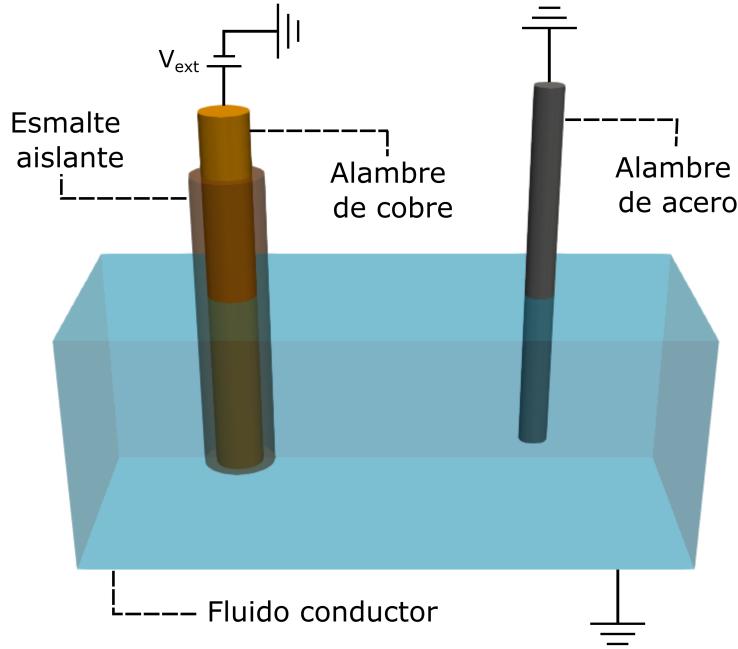


Figura 2.2: Esquema de un alambre esmaltado sumergido en un fluido conductor, puesto a Tierra mediante otro alambre sin aislar. El alambre de cobre se encuentra a conectado a un potencial externo  $V_{ext}$ . El recubrimiento aislante actuará como medio dieléctrico, comportándose el sistema efectivamente como un capacitor, cuya capacitancia depende de la altura sumergida.

La porción sumergida del alambre puede modelarse como una sucesión de segmentos de longitud  $dl$ , cada uno de los cuales agrega al circuito una capacitancia  $dC = C'dl$  en paralelo y una inductancia  $dL = L'dl$  en serie. De esta forma, es posible escribir la impedancia  $Z(l + dl)$  recursivamente, a partir de la impedancia  $Z(l)$  y la del segmento infinitesimal siguiente:

$$Z(l + dl) = j\omega L' dl + \left( \frac{1}{Z(l)} + \frac{1}{j\omega C' dl} \right)^{-1} \quad (2.2)$$

Con  $j$  la unidad imaginaria. Tomando  $dl \rightarrow 0$  y reteniendo términos hasta primer orden, resulta en una ecuación diferencial para  $Z(l)$

$$\frac{dZ}{dl} = j\omega L' - j\omega C' Z^2 \quad (2.3)$$

Ésta puede resolverse sumando la condición de contorno  $Z(0) = \infty$ , que refleja la ausencia de un camino capacitivo hacia el fluido si el alambre no está sumergido, pudiendo así considerar al circuito como abierto. El resultado es el siguiente

$$Z(l) = j \sqrt{\frac{L'}{C'}} \tan \left( \omega \sqrt{L'C'} l - \pi/2 \right) \quad (2.4)$$

En el caso particular en que  $l$  es lo suficientemente pequeño ( $\omega \mu e l \ll 1$ ) resulta suficiente con tomar la expansión de esta solución a primer orden

$$Z(l) \approx \frac{1}{j\omega C' l} + \mathcal{O} \left( \frac{1}{L'C'^2 \omega^2 l^3} \right) \quad (2.5)$$

En este régimen el sistema se comportará básicamente como un capacitor de capacitancia  $C'l$ ,

de modo que, midiendo la capacitancia de este circuito, será posible inferir la altura sumergida del alambre y, por tanto, la altura de la superficie libre.

Ahora bien, más que la longitud total sumergida del alambre, o sonda, la cantidad de interés será el apartamiento  $\Delta l$  respecto de una posición de equilibrio  $l_0$  (para la superficie libre en reposo), tal que  $l = l_0 + \Delta l$ . Teniendo esta consideración en cuenta, la capacitancia de la sonda será  $C_s = C_0 + \Delta C$ , y el objetivo de la medición será esta  $\Delta C$ , directamente relacionada a los desplazamientos de la superficie libre.

Un último punto importante es que, si bien el desarrollo hasta aquí se llevó a cabo suponiendo casos donde el fluido alrededor del alambre se mantuviera estático, será posible levantar ésta hipótesis, y considerar que  $\Delta l = \Delta l(t)$ , siempre que las variaciones sean lo suficientemente lentas respecto al tiempo de respuesta típico del sistema:

$$\tau_s = \alpha \frac{\epsilon}{\sigma} \left( \frac{r_1}{r_2 - r_1} \right) \quad (2.6)$$

Donde  $\alpha$  es una constante que depende de la geometría de los conductores, y  $\sigma$  es la conductividad del fluido.

Se asumirá que esta condición se cumple en general. El único caso en que fue posible observar una limitación en el funcionamiento del sensor vinculada a ésto fue al aumentar varios órdenes de magnitud la conductividad del fluido (agregando sal al agua destilada, en el orden de  $10^4$  ppm) aunque para agua el agua de red el funcionamiento fue, hasta donde se pudo observar, equivalente al del agua destilada, a diferencia de lo reportado en [1].

### 2.1.2. Medición de la capacitancia

En la Sección anterior se mostró cómo la medición de la capacitancia de un alambre esmaltado sumergido permite determinar los desplazamientos de la superficie libre respecto de una posición en equilibrio.

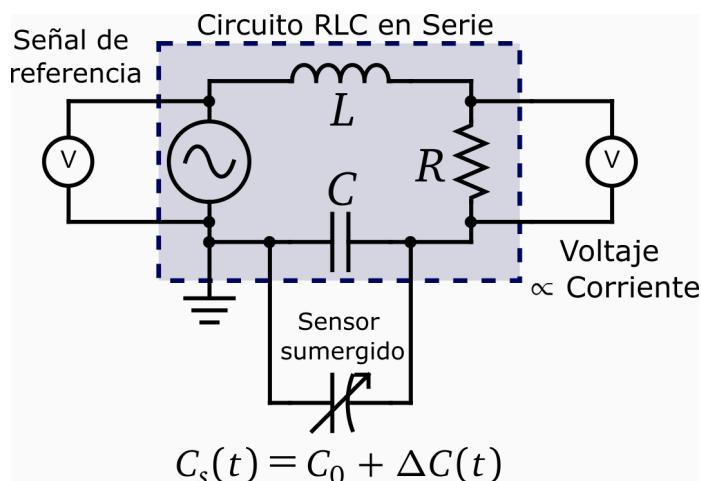


Figura 2.3: Esquema del circuito utilizado para medir la diferencia de capacitancia  $\Delta C$ , y en consecuencia  $\Delta l$ , del sensor sumergido. Se conecta en paralelo la sonda al capacitor de un circuito RLC serie, de forma tal que el agua queda conectada a Tierra y el alambre de cobre a la otra punta de  $C$ . Se alimenta al circuito mediante una fuente de tensión alterna a la frecuencia de resonancia, y se mide el voltaje sobre la fuente y la resistencia.

Esta medición puede llevarse a cabo conectando la sonda al circuito de la Figura 2.3, que se corresponde a su conexión en paralelo al capacitor de un circuito RLC serie (de parámetros base  $R$ ,  $L$  y  $C$ ), teniendo como efecto la modificación de la capacitancia efectiva del mismo. De esta forma se tendrá un circuito RLC serie equivalente, cuya capacitancia será ahora  $C_{EQ}(t) = C + C_s(t)$ .

Al conectar éste circuito a una fuente de corriente alterna de frecuencia angular  $\omega$  y amplitud  $V$  la ecuación para la corriente  $I(t)$  vendrá dada por

$$V \cos(\omega t) = \frac{d^2 I(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C_{EQ}(t)L} I(t) \quad (2.7)$$

Donde  $C_{EQ}(t) = C + C_0 + \Delta C(t) \equiv C_q + \Delta C(t)$ , definiendo  $C_q$  como la capacitancia efectiva cuando la superficie libre se encuentra en reposo. Si las variaciones en la capacitancia son lo suficientemente lentas respecto a la frecuencia se puede asumir una solución de la forma  $I(t) = I_0(t) \cos(\omega t + \phi(t))$ , en analogía a lo que ocurriría en el caso estático para  $C_{EQ} = \text{cte}$ . Cuando las variaciones de la capacitancia sean lo suficientemente pequeñas ( $\Delta C/C_q \ll 1$ ) será suficiente con un desarrollo a primer orden para describir la fase  $\phi(t)$ :

$$\tan(\phi) = -\frac{1}{R} \left[ \omega L - \frac{1}{\omega C_q} \right] - \frac{1}{R} \frac{\Delta C}{\omega C_q^2} + \mathcal{O}\left[\left(\frac{\Delta C}{C_q}\right)^2\right] \quad (2.8)$$

Es posible eliminar además el primer término de este desarrollo si se elige trabajar con la frecuencia de resonancia  $\omega_r = 1/\sqrt{LC_q}$ . De esta forma quedaría simplemente

$$\tan(\phi) = -Q_F \frac{\Delta C}{C_q} \quad (2.9)$$

Donde  $Q_F = \frac{1}{R} \sqrt{L/C_q}$  es el factor de calidad del RLC. Finalmente, si el término de la derecha también es mucho menor a uno se puede aproximar  $\tan(\phi) \approx \phi$  y queda una relación lineal entre  $\phi$  y la variación de capacitancia, y por tanto, con las variaciones en la altura sumergida del sensor.

$$\phi(t) = -Q_F \frac{\Delta C(t)}{C_q} = -Q_F \frac{C'}{C_q} \Delta l(t) \quad (2.10)$$

Y al ajustar los parámetros del RLC (y  $Q_F$  en consecuencia) es posible ajustar la sensitividad del sensor, ya que si por ejemplo se quiere medir un rango muy amplio de  $\Delta l$ , bastaría con hacer que  $Q_F$  sea más pequeño.

### 2.1.3. Medición de la fase

Hasta aquí se demostró conceptualmente cómo es posible encontrar una relación lineal entre la fase ( $\phi$ ) de la corriente de la sonda y las variaciones en su altura sumergida ( $\Delta l$ ) al conectarla en paralelo al capacitor de un RLC serie. El paso final para completar la descripción del sensor será, entonces, incorporar un método para la medición de dicha fase.

Con este fin se empleará la técnica de *demodulación homodina*, que utiliza una señal de referencia para obtener la amplitud y fase relativa de la señal de interés (en este caso la caída de tensión sobre la resistencia  $R$ ).

A continuación se describe brevemente la técnica, y en la Figura 2.4 las señales involucradas en

el proceso para un caso particular a modo ilustrativo. El primer paso consistirá en modular la señal de interés, a la cual se llamará  $A(t)$ , con alguna frecuencia, obteniendo entonces una nueva señal

$$S(t) = A(t) \cos(\omega_r t) \quad (2.11)$$

Es importante que la frecuencia de modulación sea mucho más rápida que las frecuencias características de  $A(t)$ , para que pueda captar todas sus variaciones correctamente. En este caso, la tensión sobre la resistencia ya tendrá la misma forma de  $S(t)$ , con lo cual no es necesario realizar este primer paso explícitamente.

Luego, se debe *mixear* la señal modulada con la de referencia,  $R(t) = \cos(\omega_r t)$ , que en este caso será la tensión alterna que alimenta al circuito<sup>1</sup>, obteniendo entonces

$$M(t) = S(t)R(t) = A(t)/2 (1 + \cos(2\omega_r t)) \quad (2.12)$$

Si hubiese ruido eléctrico  $N(t)$  sumando, la señal sería  $M(t) = S(t)R(t) + N(t)R(t)$ . El efecto de este mixeo será centrar el ruido en  $\omega_r$ , recordando que un producto en tiempo se traduce como una convolución en frecuencia. Además, quedan dos copias de la señal de interés, una centrada en 0 y otra en  $2\omega_r$ .

Finalmente, se debe aplicar un filtro pasabajas, de frecuencia de corte  $\omega_c$ , o tiempo de integración  $\tau_c = 2\pi/\omega_c$ . Siempre que  $\omega_c < \omega_r$  el efecto de este filtro será no dejar pasar, ni la copia de la señal en  $2\omega_r$ , ni al ruido, y obtener así la amplitud  $A(t)/2$ .

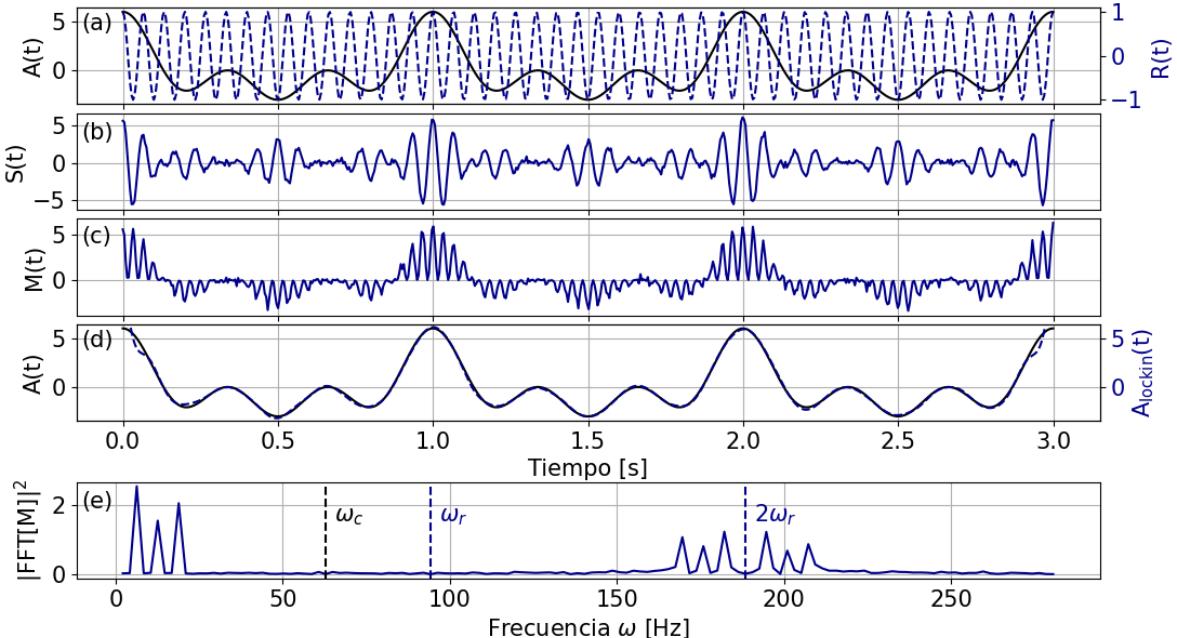


Figura 2.4: Distintas señales asociadas a la técnica de demodulación homodina. En primer lugar (a) la señal a medir  $A(t)$  y la señal de referencia  $R(t)$ . Con éstas se construyen (b) la señal modulada  $S(t)$  y (c) la señal mixeada  $M(t)$ , a partir de la cual se obtiene (d) la reconstrucción de la señal de interés. Abajo de todo (e) se muestra el contenido en frecuencia de  $M(t)$ , pudiéndose apreciar a frecuencias bajas el contenido de  $A(t)$  y otras dos copias del mismo alrededor de  $2\omega_r$ , que serán eliminadas mediante el filtro pasabajas, de frecuencia  $\omega_c$ , junto al ruido que pudiese haber.

<sup>1</sup>La referencia podría tener en principio una frecuencia distinta a la de modulación, pero por simplicidad, y porque en este sistema será así, se considerarán iguales.

Si inicialmente la señal hubiese tenido una fase respecto a la señal de referencia, o sea,  $S(t) = A(t)\cos(\omega_r t + \phi_r)$ , como ocurrirá en este caso, habría que repetir el mismo procedimiento con una señal de referencia que tenga  $90^\circ$  de desfasaje respecto a  $R(t)$ , a la cual se la conoce como *cuadratura*. Al final se obtendrá para la referencia una señal  $X(t) = A(t)/2 \cos(\phi_r)$ , que se conoce como componente homodina, y para la cuadratura, una señal  $Y(t) = A(t)/2 \sin(\phi_r)$ , que es la componente heterodina. Con éstas resulta fácil obtener la amplitud y fase como:

$$A^2 = 4(X^2 + Y^2) \quad (2.13a)$$

$$\phi_r = \arctan(Y/X) \quad (2.13b)$$

Por lo general, se utiliza un amplificador lock-in para llevar a cabo esta técnica de manera síncrona, pero se discutirá más sobre su implementación más adelante.

## 2.2. Resolución numérica del circuito

Antes de iniciar con la construcción del sensor en el laboratorio, se empezó caracterizando numéricamente el comportamiento del circuito descripto en las secciones anteriores, esto es, la resolución de la ecuación (2.7). El objetivo de este paso preliminar fue, por una parte verificar que la solución hallada bajo las distintas aproximaciones funcionaba correctamente, pero además, poder probar distintas combinaciones de parámetros y determinar qué efectos tendrían éstas sobre el funcionamiento del sensor. A continuación se mencionan brevemente algunas de las conclusiones más relevantes que se pudieron observar.

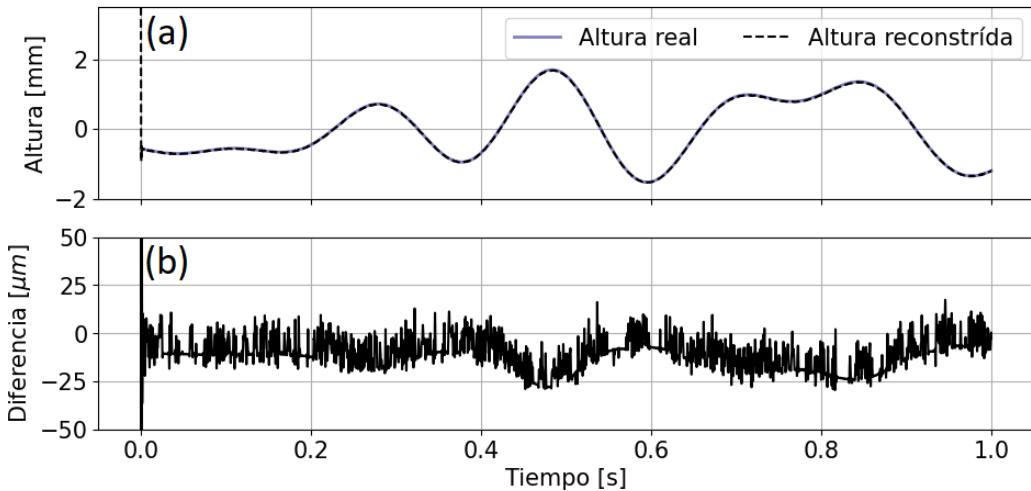


Figura 2.5: (a) Comparación de la altura sumergida,  $\Delta l$ , con la reconstruida, obtenida mediante la resolución numérica de la ecuación (2.7) y la técnica de demodulación homodina para el cálculo de la fase. (b) Diferencia entre ambas señales de dos órdenes de magnitud menor.

Se pudo verificar que la fase se relaciona linealmente con  $\Delta l$  hasta cierto punto. Por ejemplo, para una señal aleatoria (amplitud constante entre 0-6 Hz y fase aleatoria) como las que podrían ser de interés medir en la superficie libre, con los valores de la Tabla 2.1 que eventualmente se terminaron usando, la reconstrucción de la altura es la de la Figura 2.5.

Donde los errores son del orden del 1 % aproximadamente. Si los desplazamientos  $\Delta l$  se vuelven lo suficientemente grandes, como para que  $\Delta C \sim C_q$ , se produce una saturación en la fase medida.

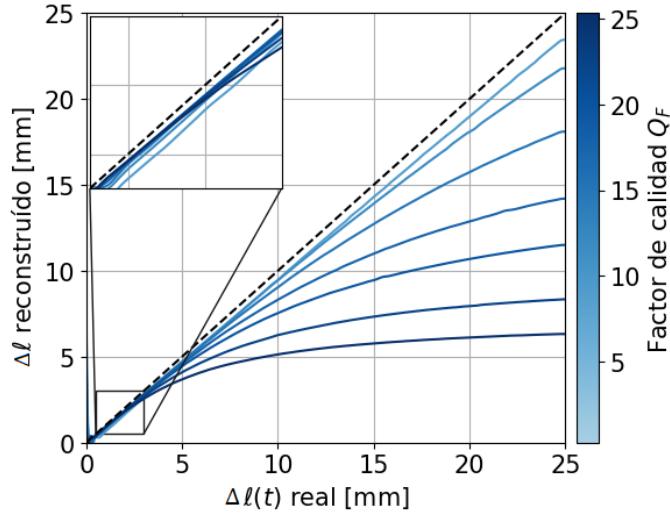


Figura 2.6: Comparación de las curvas de respuesta del sensor obtenidas numéricamente para distintos factores de calidad  $Q_F$  (líneas sólidas). A menor factor de calidad se extiende el rango de alturas en el que funciona linealmente, manteniéndose cerca de la respuesta ideal (línea punteada). Factores de calidad mayores permiten medir diferencias de altura más pequeñas y saturan antes. En todos los casos para  $\Delta l$  lo suficientemente pequeño el comportamiento es lineal (recuadro ampliado).

Se puede contrarrestar este efecto como ya se explicó modificando los parámetros del circuito, siendo la opción más sencilla disminuir el factor de calidad  $Q_F$ , como se muestra en la Figura 2.6, o bien disminuyendo la capacitancia por unidad de longitud  $C'$  del alambre, lo cual implica cambiarlo por otro.

Otro efecto interesante que se pudo observar es que, si se intentan medir variaciones en  $\Delta l$  demasiado rápidos respecto se produce histéresis en el sistema. En la Figura 2.7 se comparan dos ejemplos para la medición de una señal sinusoidal, una a frecuencia baja en comparación a la de resonancia (2.7a) donde la respuesta es lineal y otra a una frecuencia más alta (2.7b), donde se puede ver un comportamiento histerético en el sistema.

Aunque ninguno de estos efectos adversos se llegaron a observar en la práctica.

### 2.3. Prueba de un circuito equivalente

Siguiendo con el enfoque constructivo el siguiente paso fue realizar una prueba conceptual del circuito. Para esto se armó un circuito RLC serie, a cuya capacitancia se le fue conectando en paralelo capacitancias de distintos valores, y midiendo en cada caso la diferencia de fase respecto de la señal de referencia.

### 2.4. Prototipado

Los valores nominales de los elementos utilizados para el sensor son los de la Tabla 2.1. Estos valores se eligieron luego de varias pruebas preliminares, ya que fueron los que mejores resultados

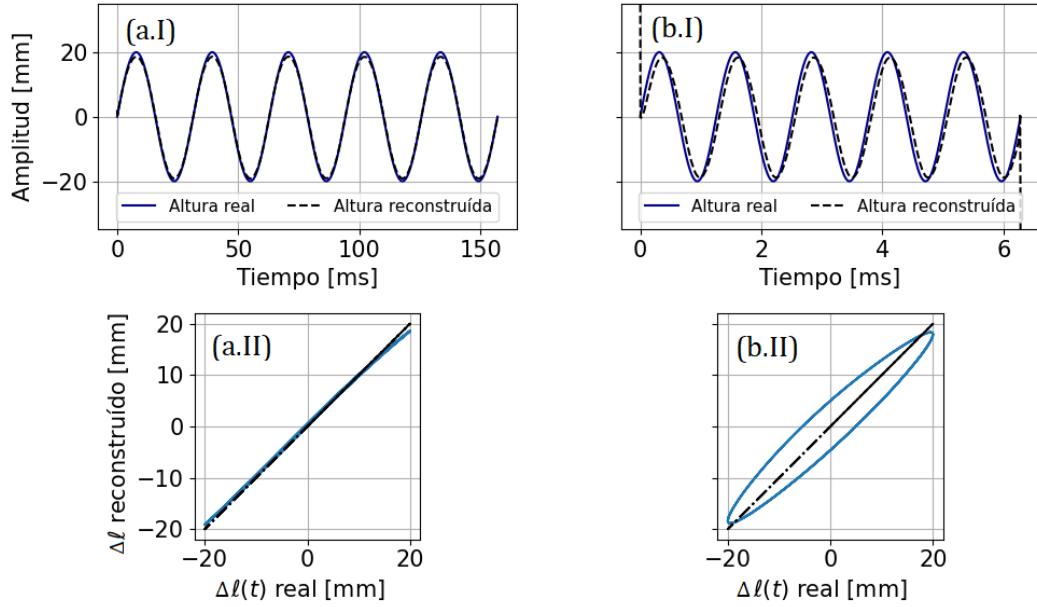


Figura 2.7: Arriba, la comparación de los desplazamientos  $\Delta l$  reales y los obtenidos numéricamente, para señales senoidales de  $f = 0.2$  KHz (a.I) y  $f = 2$  kHz (b.I), con un circuito de frecuencia de resonancia de  $f_s = 67$  kHz. Debajo, las curvas de respuesta (—), en ambos casos comparadas a la ideal (---), pudiendo observar una respuesta lineal para frecuencias relativamente bajas (a.II) en comparación a frecuencias más altas (b.II) donde el circuito no llega a responder lo suficientemente rápido y se produce histéresis.

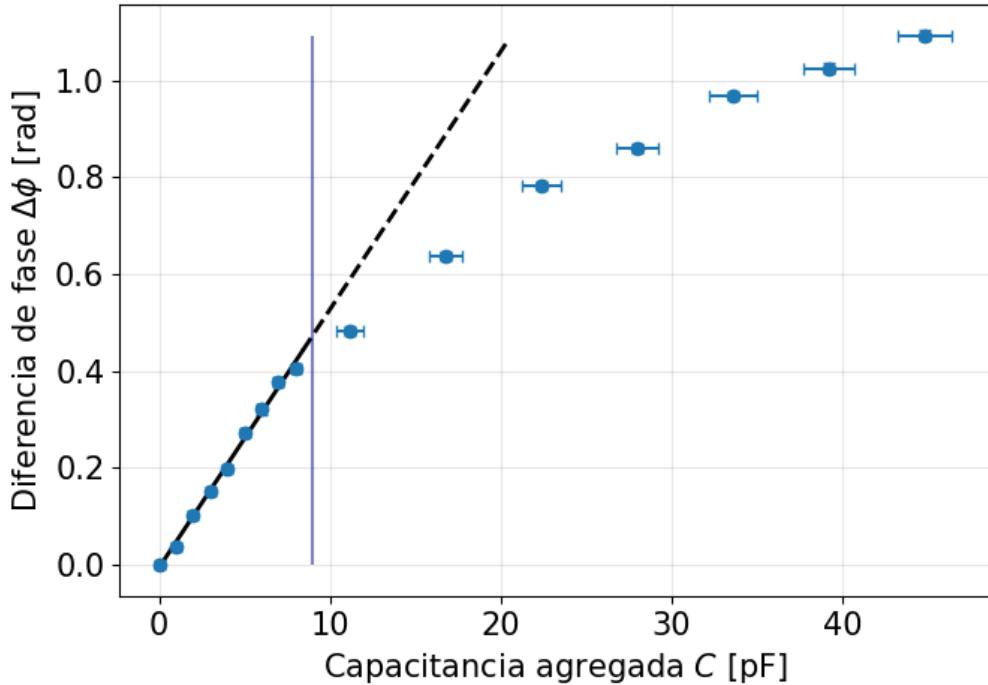


Figura 2.8: Diferencia de fase  $\Delta\phi$  obtenida al agregar en paralelo a un RLC distintas capacitancias (●)

permitieron obtener para los desplazamientos típicos de la superficie libre con los que se trabajó (de un orden máximo de 1 cm).

Es importante resaltar que, como muestra la Figura 2.3, el elemento a Tierra en el RLC debe ser el capacitor, ya que el agua estará a este potencial en cualquier caso, y de conectar, por ejemplo, la

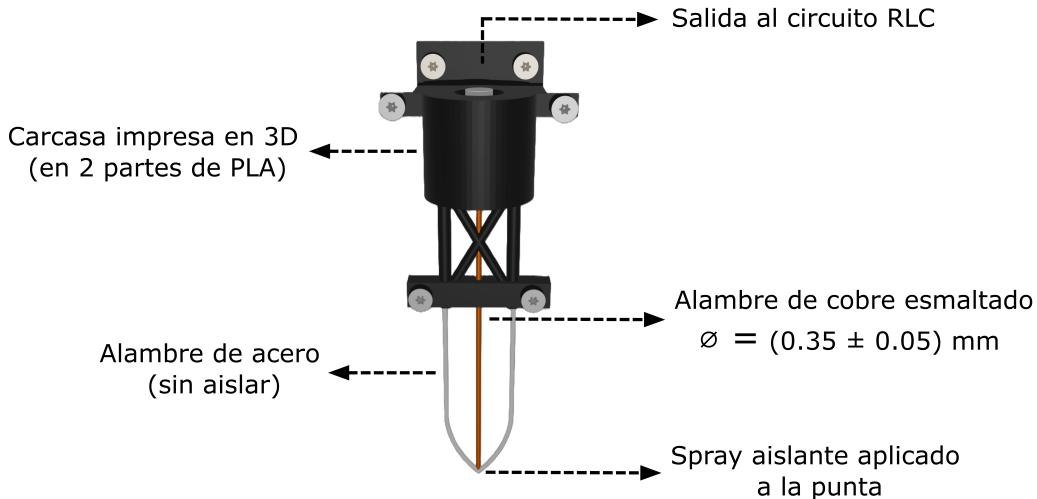


Figura 2.9

Elemento	Valor
R	(360 ± 40) Ω
L	(10 ± 1) mH
C	(560 ± 60) pF

Tabla 2.1: .

resistencia a Tierra, se generaría un cortocircuito. Se observó que, al tener este elemento a Tierra en el RLC (independientemente de si la sonda estaba conectada), se produce una disminución en la frecuencia de resonancia del mismo, que se atribuye al acoplamiento de capacitancias parásitas  $C_p$ , que tienen como efecto sumar a la  $C$  utilizada ( $C_p \sim 200$  pF), con lo cual se debe asumir que es levemente mayor al valor reportado en la Tabla 2.1.

De esta manera, para el sensor en el aire la capacitancia total  $C_{EQ}$  resultó ser aproximadamente 400 pF mayor a la  $C$  base del RLC, con lo cual  $C_{EQ} \sim 1000$  pF. Con el sensor sumergido aproximadamente 1 cm en agua destilada la variación en la capacitancia es del orden de  $\Delta C \sim 10$  pF, de forma que se verifica la hipótesis que hicimos anteriormente para llegar a una relación lineal entre la fase y los desplazamientos de altura, resultando el cociente  $\Delta C/C \sim 0.01 \ll 1$ .

Las frecuencias de resonancia típicas con las que se trabajó fueron del orden de 52 kHz, para los elementos previamente mencionados, ajustándolas más finamente en cada caso, antes de la medición, aunque cuando por distintos motivos no fue posible realizar este ajuste el efecto fue simplemente la suma de un  $\phi_0$  a las señales, que puede eliminarse al restar el valor medio, ya que finalmente la cantidad de interés será la variación de altura.

La capacitancia por unidad de longitud para el cable de cobre elegido se estimó en el orden de 1 pF/mm.

## 2.5. Placa de adquisición y Lock-in digital

### 2.6. Prueba final y calibración

#### 2.6.1. Montaje



Figura 2.10

#### 2.6.2. Altura vs Altura

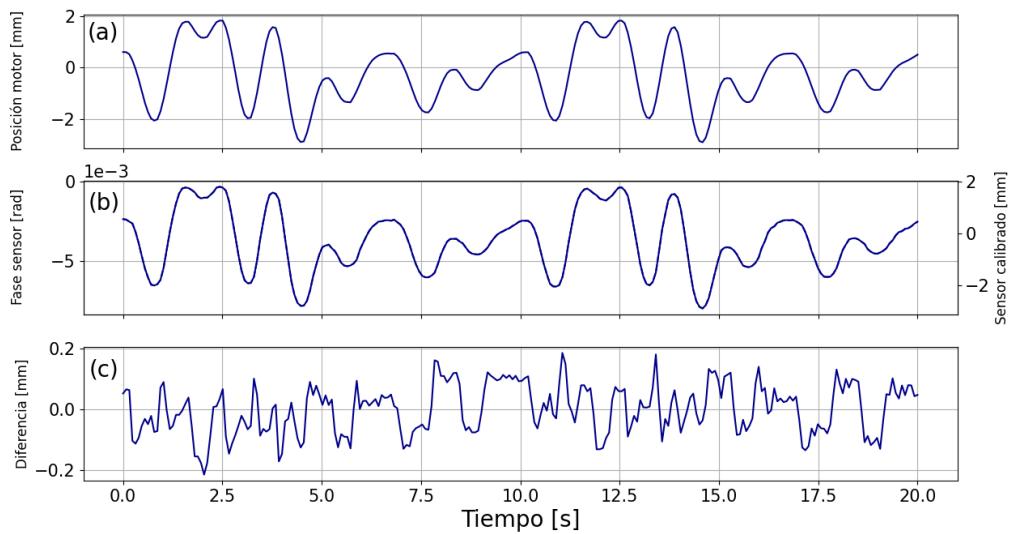


Figura 2.11

#### 2.6.3. Diferencias

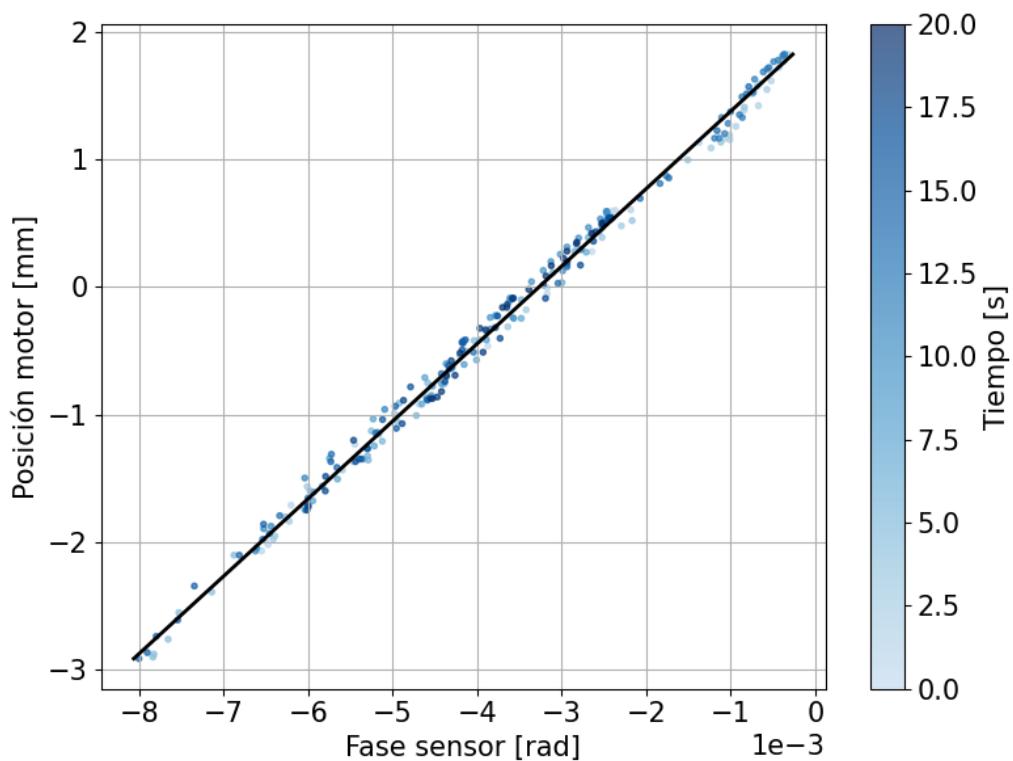


Figura 2.12

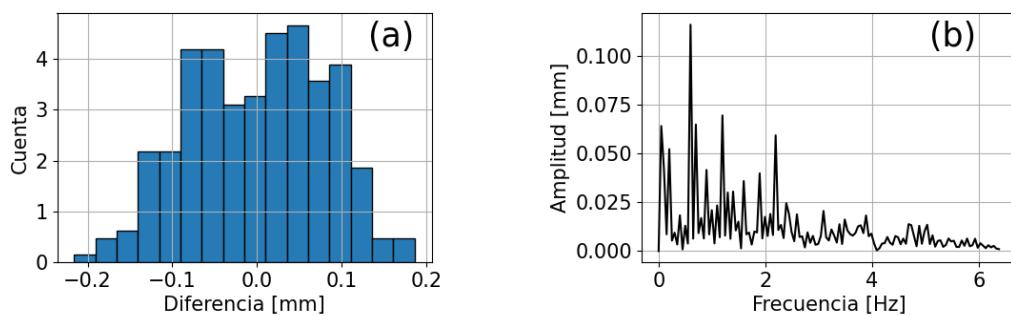


Figura 2.13



# CAPÍTULO 3

---

## ESTUDIO EXPERIMENTAL DE TURBULENCIA DE ONDAS

---

### 3.1. Montaje para Turbulencia de Ondas

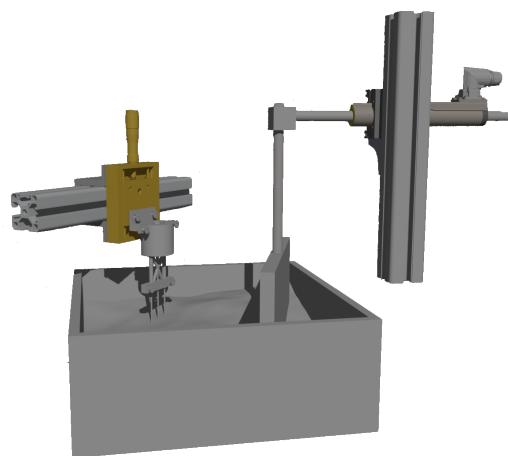


Figura 3.1



# CAPÍTULO 4

## RESULTADOS

### 4.1. Series Temporales

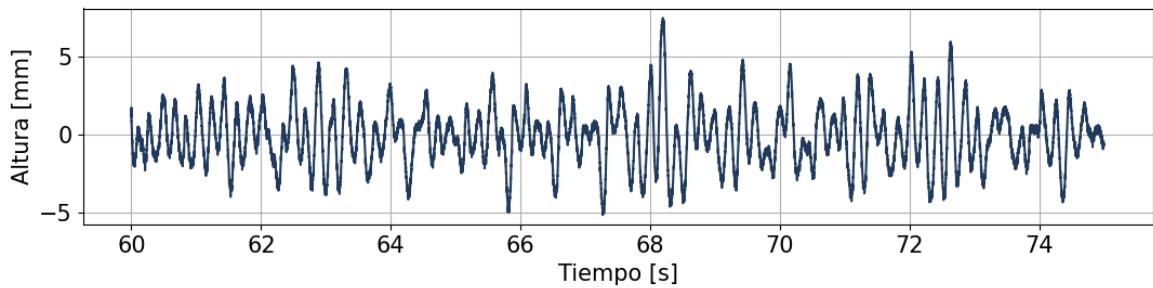


Figura 4.1

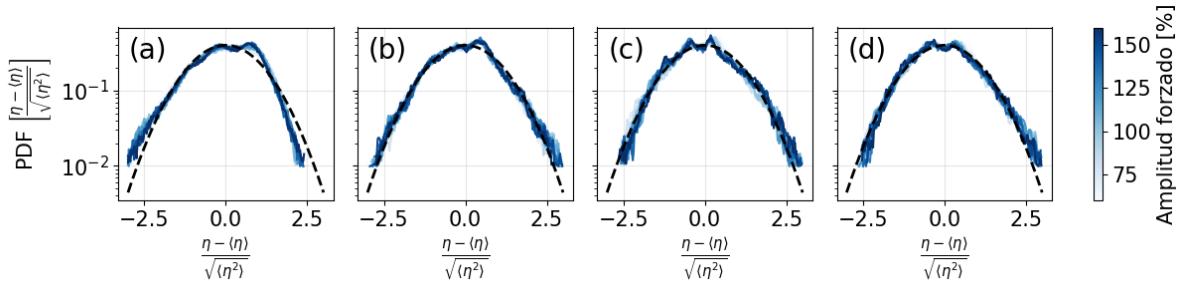


Figura 4.2

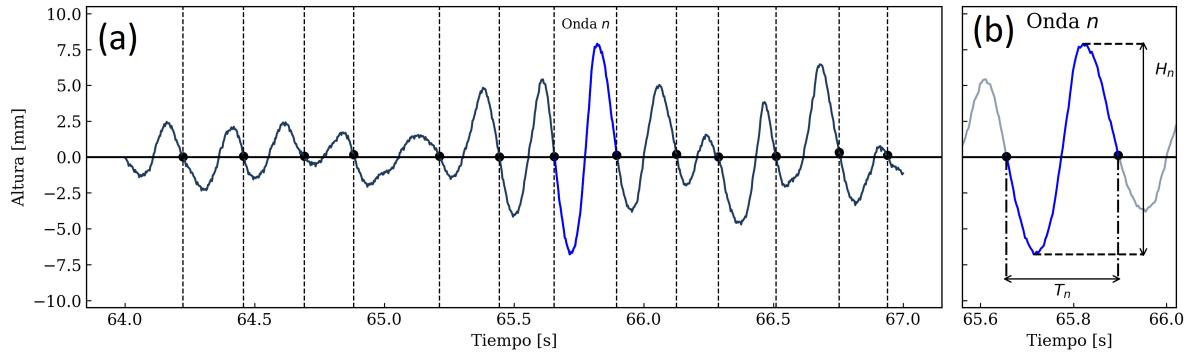


Figura 4.3

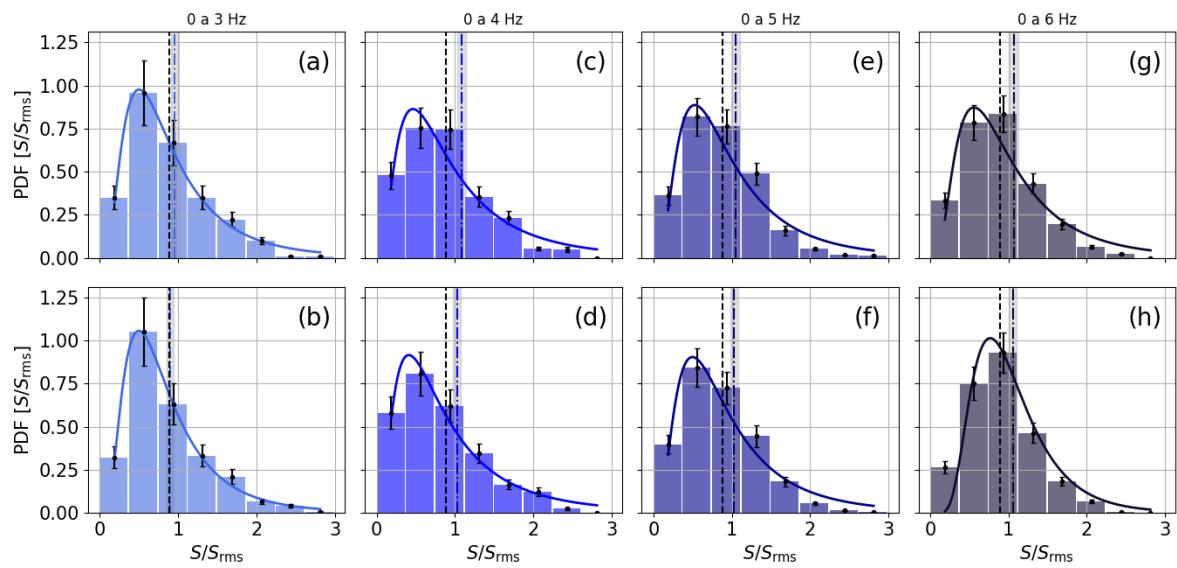


Figura 4.4

## 4.2. Wave Steepness

### 4.3. Cascadas de energía

### 4.4. Interacción a 3 y 4 ondas

### 4.5. Intermitencia



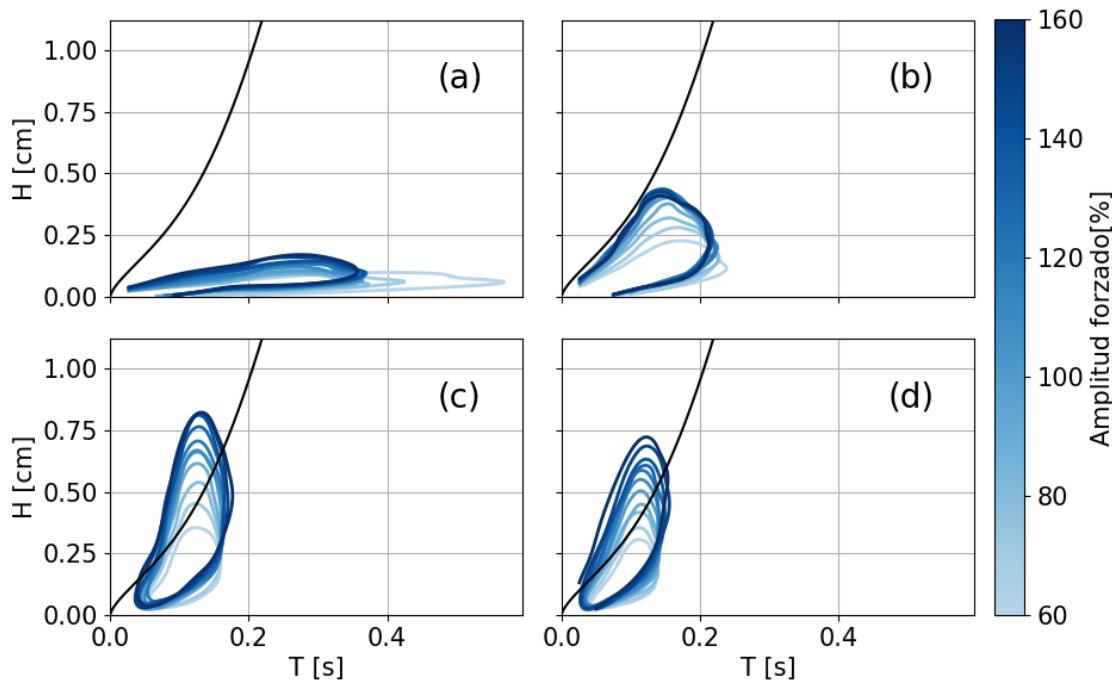


Figura 4.5

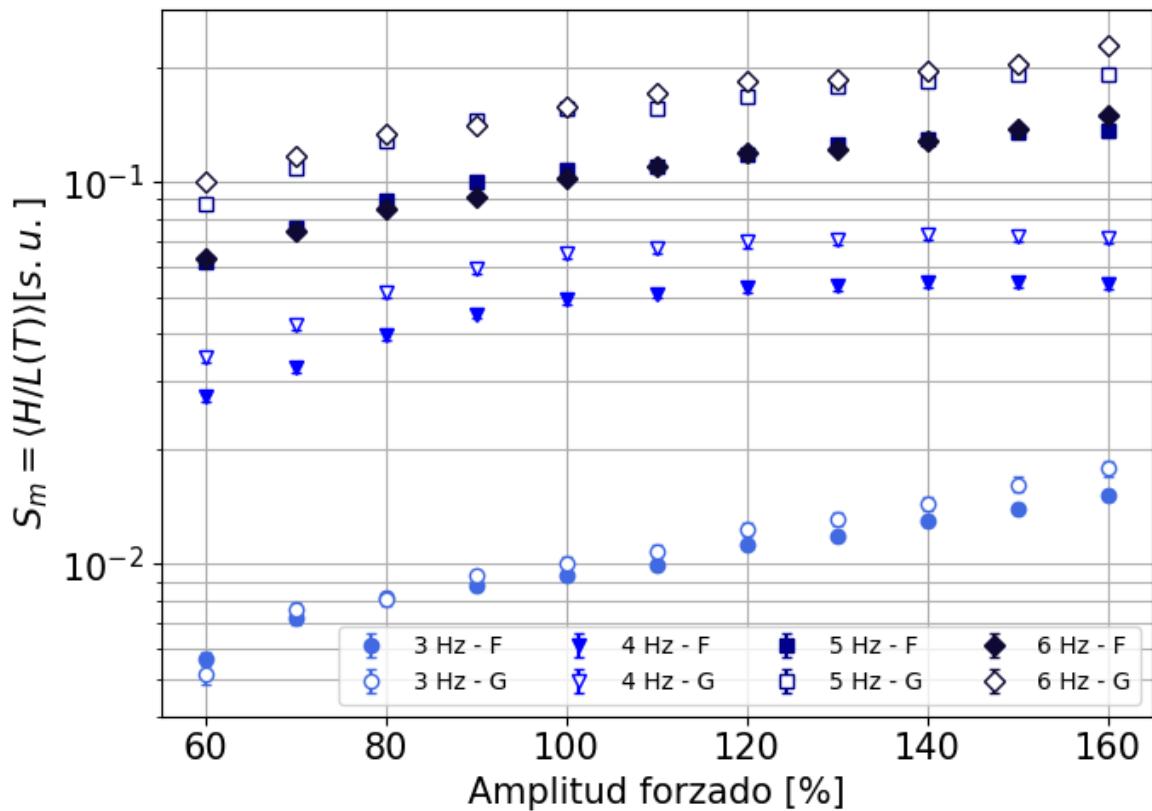
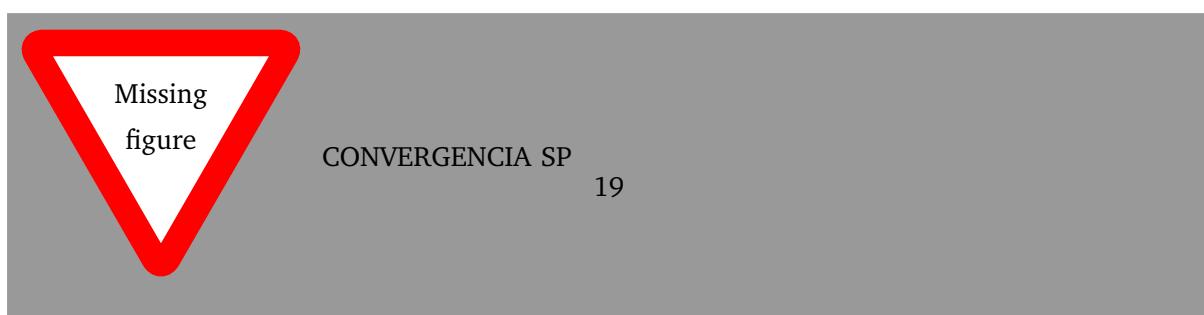


Figura 4.6



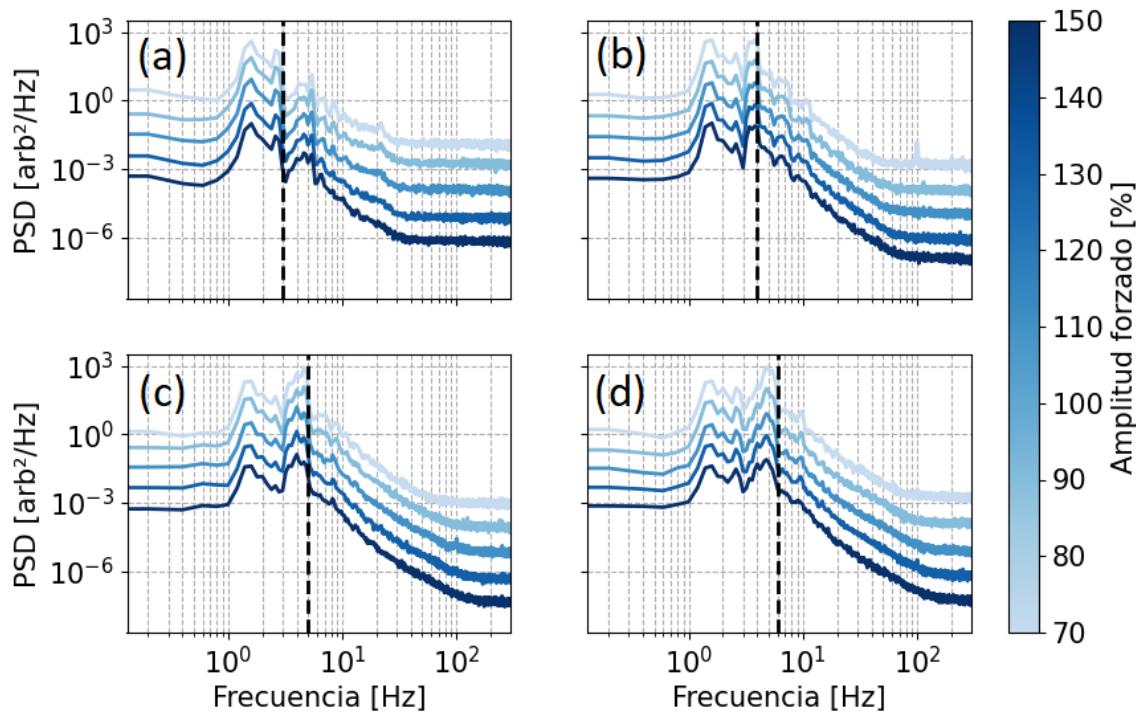


Figura 4.7

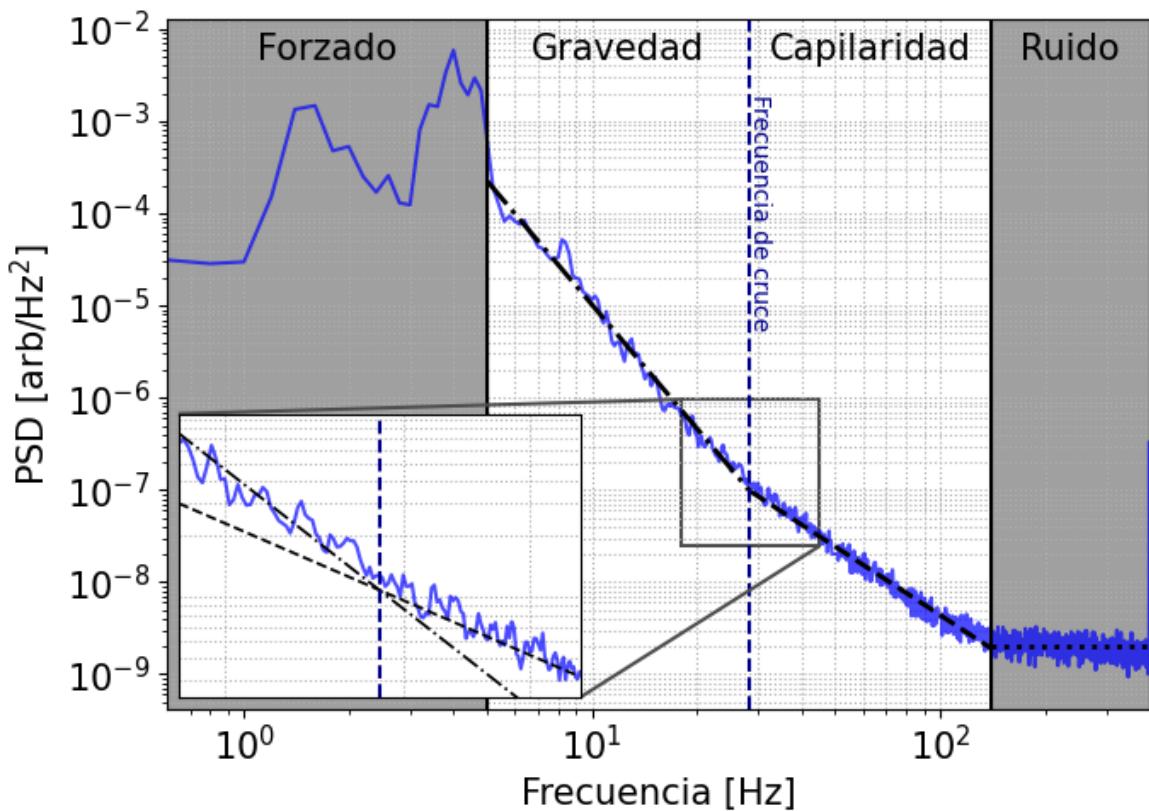


Figura 4.8

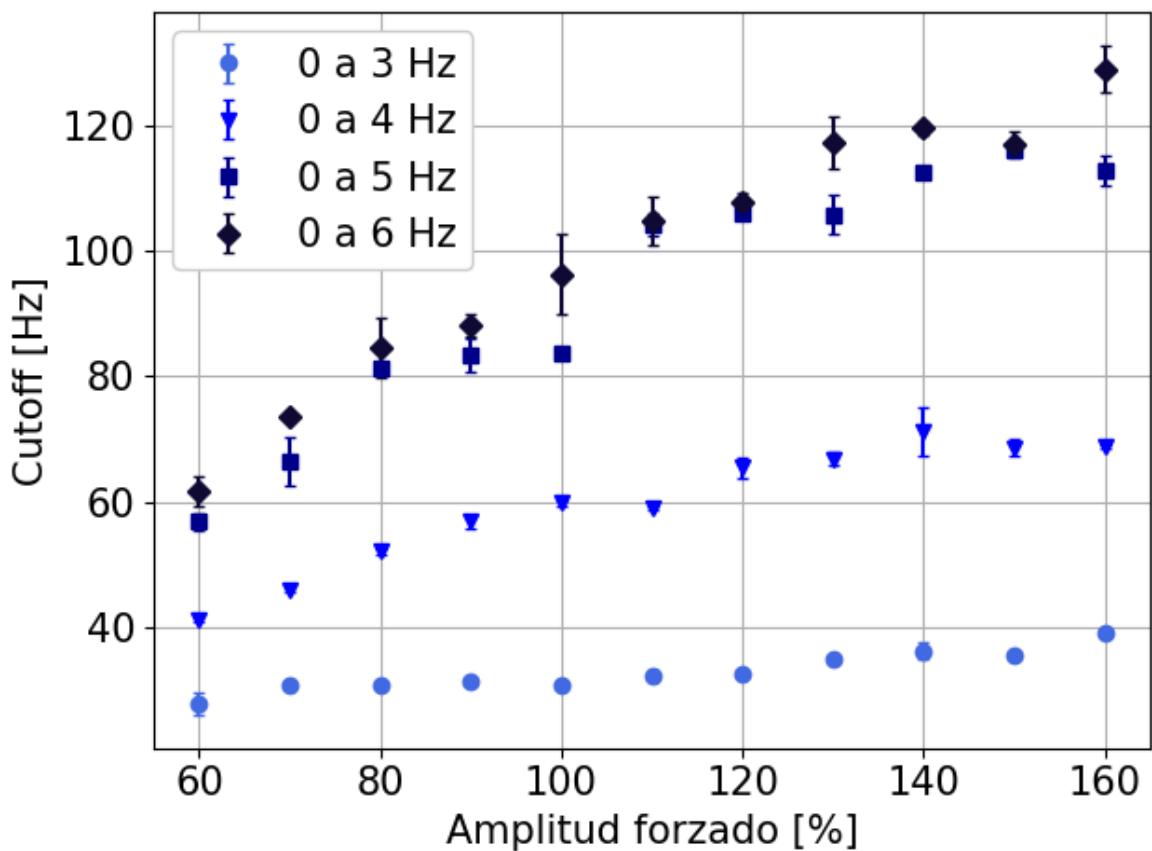


Figura 4.9

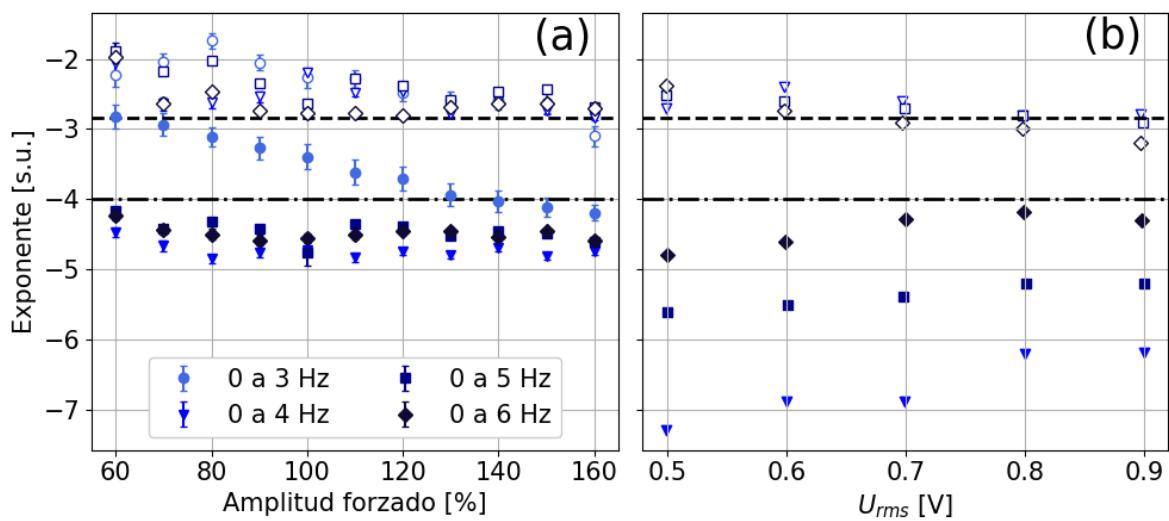


Figura 4.10

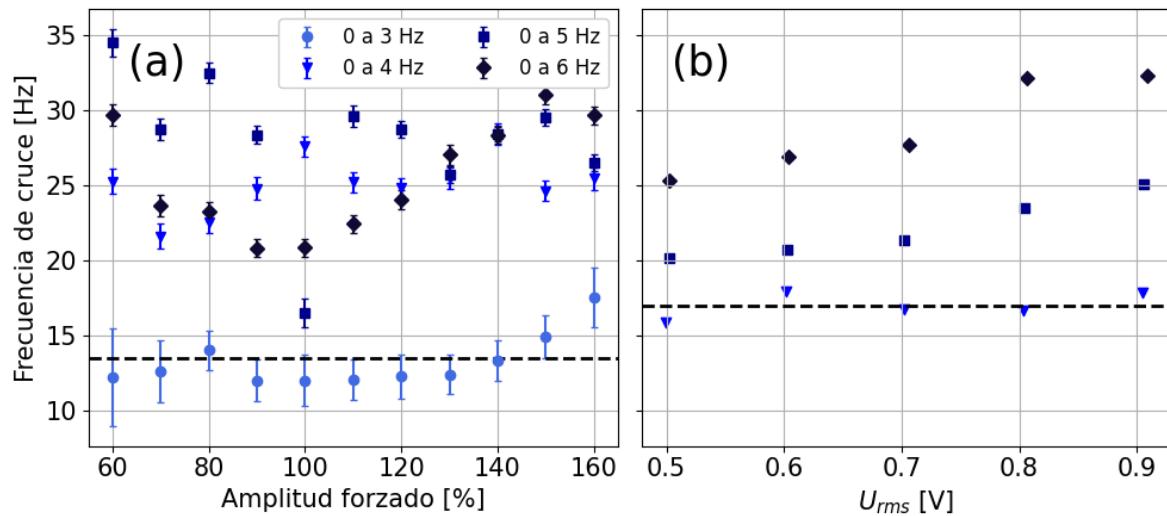


Figura 4.11

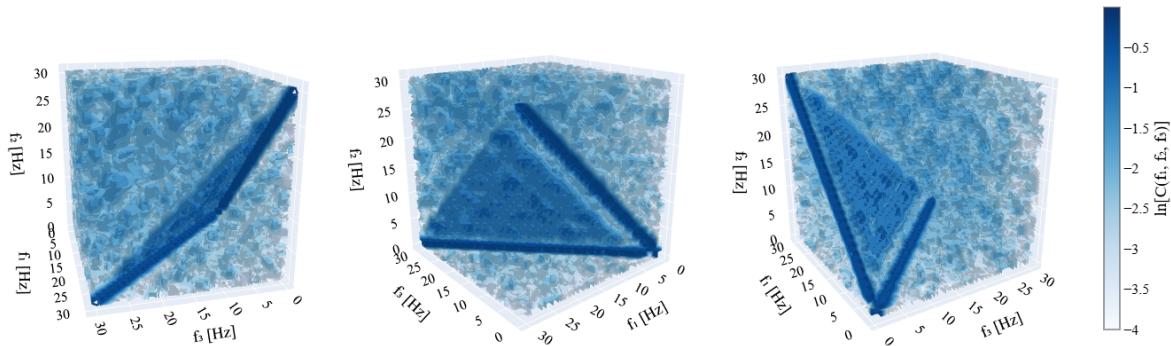


Figura 4.12

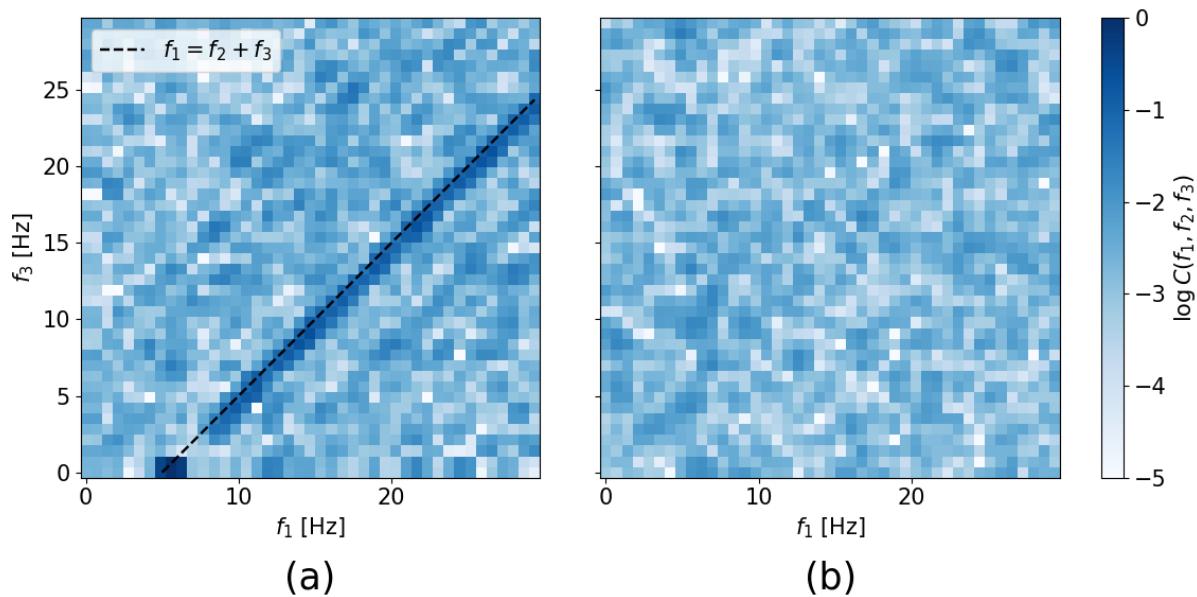


Figura 4.13

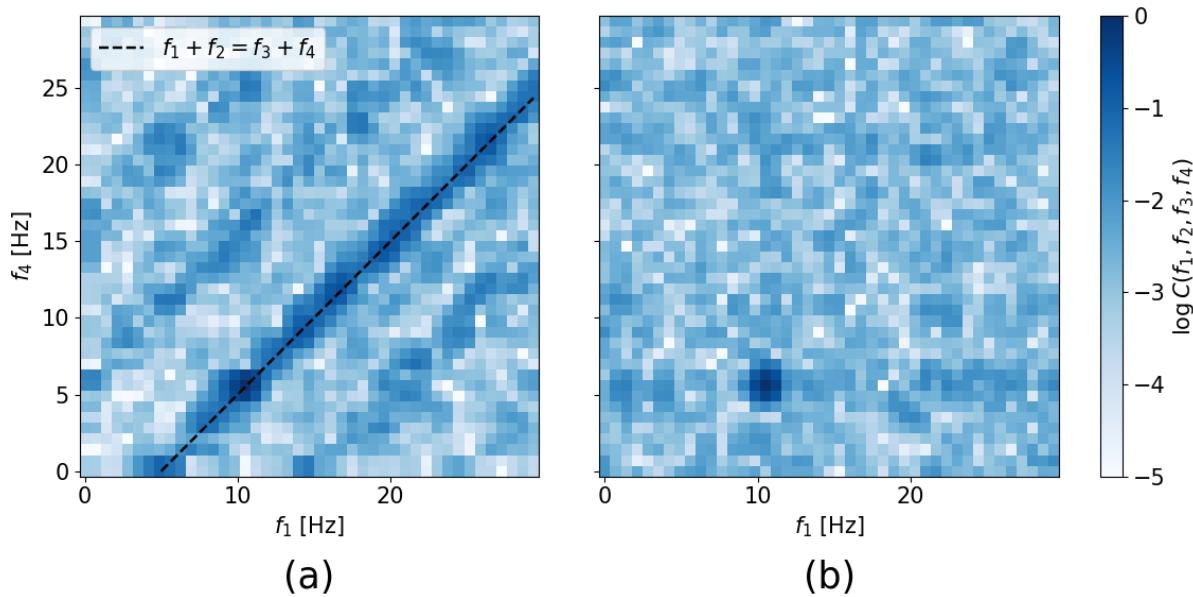


Figura 4.14

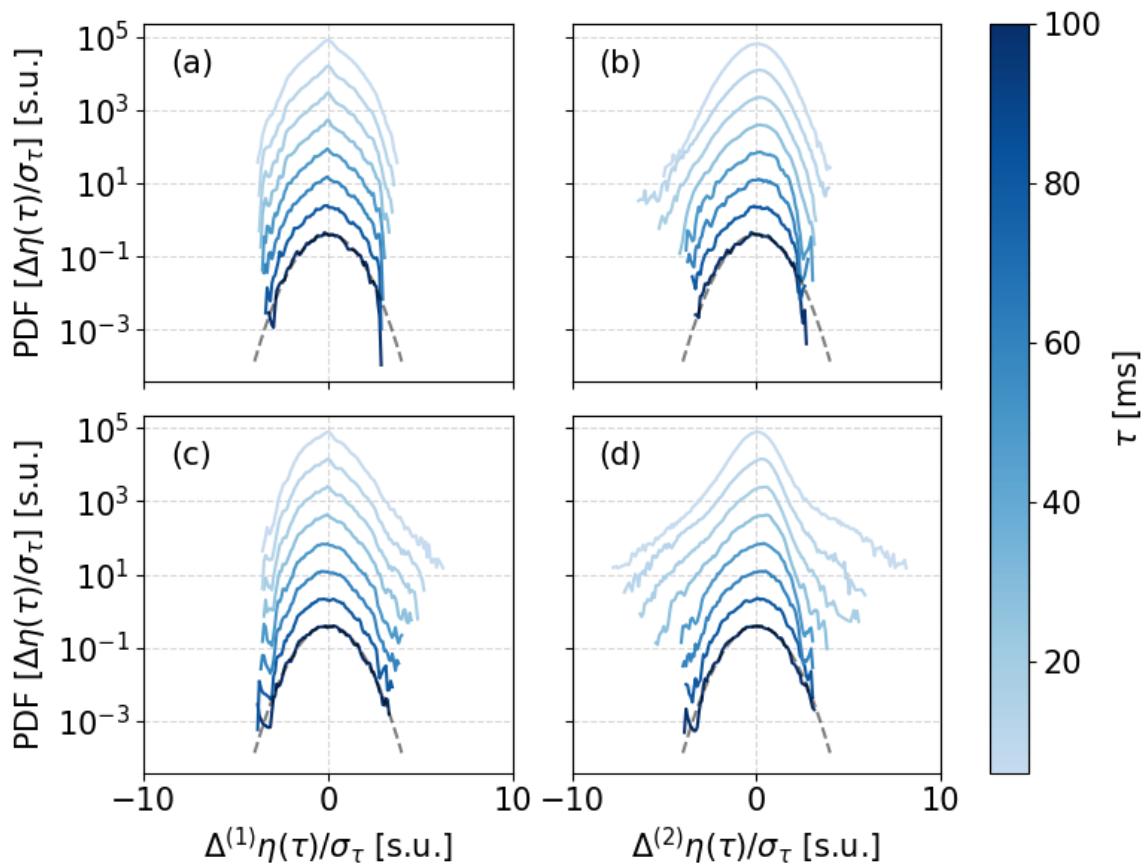


Figura 4.15

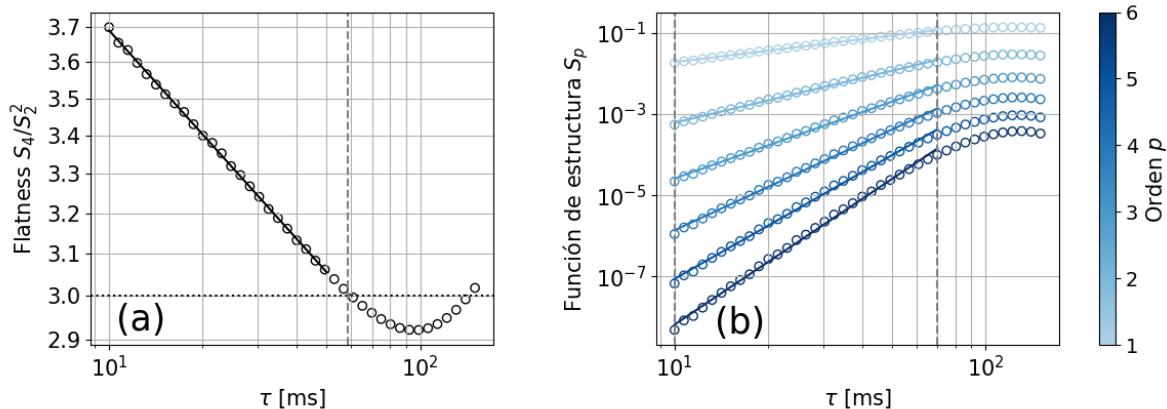


Figura 4.16

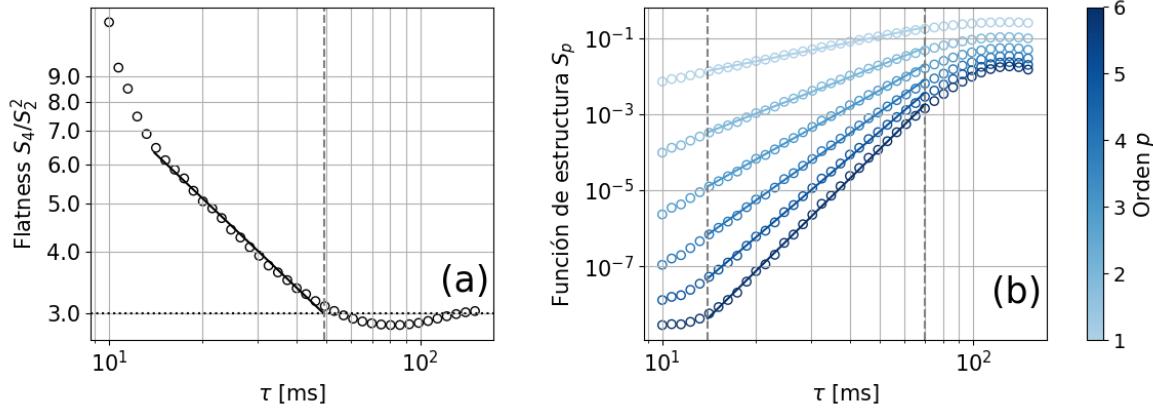


Figura 4.17

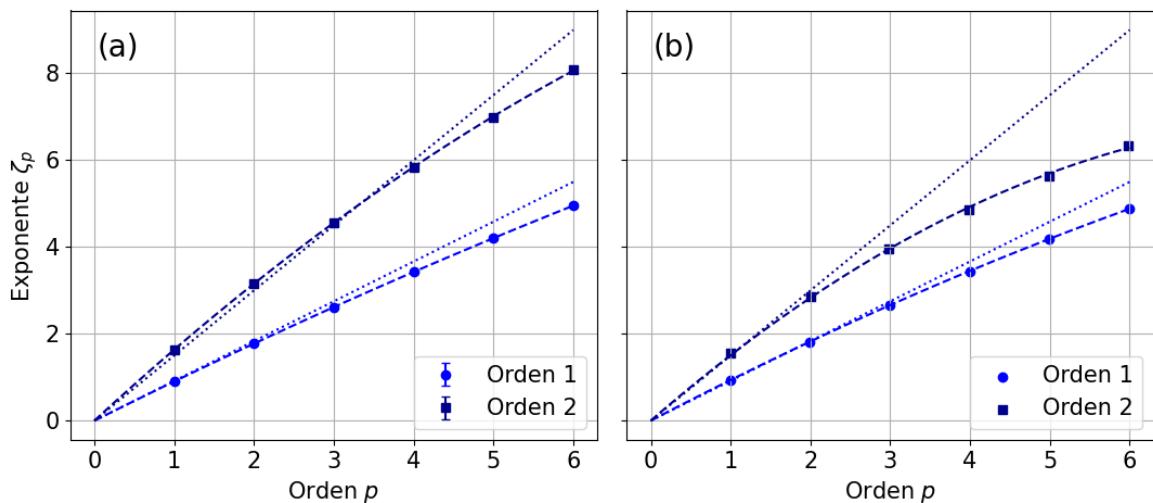


Figura 4.18

# CAPÍTULO 5

---

## CONCLUSIONES

---

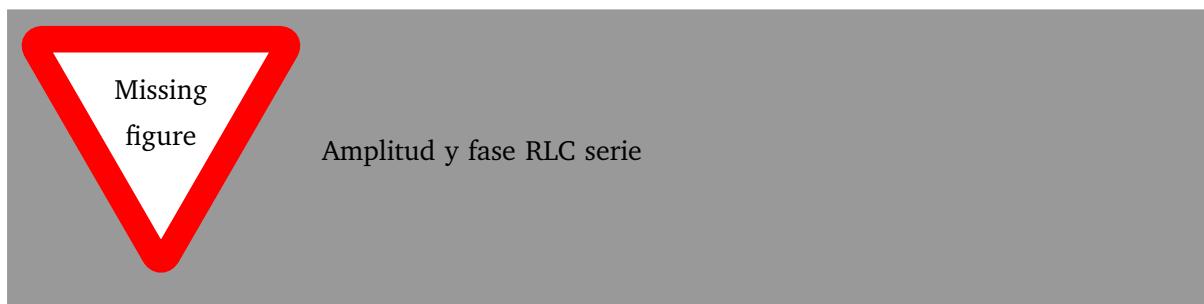


## APÉNDICE A

---

### PUESTA A PRUEBA DE LA DAQ + LOCK-IN DIGITAL

---





---

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [1] Gordillo Zavaleta. *Non-Propagating Hydrodynamic Solitons in a Quasi-One Dimensional Free Surface Subject to Vertical Vibrations*. Doctoral Thesis, Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Departamento de Física, Santiago de Chile, Chile, 2012.



Tesis disponible bajo Licencia Creative Commons, Atribución – No Comercial – Compartir Igual  
(by-nc-sa) 2.5 Argentina

Buenos Aires, 2026