

# Percolación de nodos en redes cuadradas bidimensionales

H.I. Martinelli and I.M. Sticco\*

*Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires,  
Pabellón I, Ciudad Universitaria, 1428 Buenos Aires, Argentina.*

(Dated: 2 de mayo de 2017)

A partir de estudios computacionales hemos determinado el comportamiento crítico de una red de nodos bi-dimensional. Esta red percola siguiendo una transición de fase de 2° orden. Se obtuvo la probabilidad crítica para diversos tamaños de red. Además, se calcularon los exponentes críticos que caracterizan a este fenómeno. Se observaron efectos propios de redes finitas que afectan la exactitud de estos exponentes. Se exploró la renormalización de celda pequeña como método adicional de la estimación del punto crítico. Los valores obtenidos con este método fueron menos exactos que los conseguidos a partir de simulaciones numéricas.

**PACS numbers:** 45.70.Vn, 89.65.Lm

## I. INTRODUCCIÓN

Los primeros estudios en percolación se realizaron durante la segunda guerra mundial de la mano de Flory y Stockmayer, los cuales buscaban describir como dependía que pequeñas moléculas formen grandes macromoléculas si más uniones se producían entre las moléculas originales. Este estudio fue el puntapié para el desarrollo de una teoría abstracta pero a la vez simple de visualizar, con aplicaciones en varios campos de la ciencia debido a la cantidad de fenómenos universales que manifiesta, tal como es la teoría de percolación.

El problema de interés en este trabajo va a ser el estudio de fenómenos críticos en redes infinitas de nodos a partir de redes finitas, las cuales serán pobladas estocásticamente con cierta probabilidad  $p$ . A partir de esto, se definirán y calcularán ciertas magnitudes que van a ser relevantes a lo largo de este trabajo. Primeramente, se define a un *cluster* conjunto de nodos vecinos ocupados; el tamaño de dicho cluster viene dado por la cantidad de nodos que lo compone,  $s$ . A su vez, se puede definir la distribución de clusters de tamaño  $s$ ,  $n_s(p)$  que depende de la probabilidad de ocupación. Como toda distribución, se pueden calcular sus momentos, definiendo así otras magnitudes que serán presentadas en lo sucesivo junto con su comportamiento en la zona de la transición de fase de segundo orden que estos sistemas presentan, como será explicado a continuación.

## II. EL MODELO

### A. Transición de fase

Cuando se varía la probabilidad de ocupación de los nodos de la red, se observa que al superar un valor específico, que llamaremos  $p_c$ , el sistema presenta un cluster

que une los extremos de la red, llamado cluster percolante. Al analizar la magnitud fuerza percolante  $P$ , definida como el número de nodos pertenecientes al cluster percolante sobre el número total de nodos, se observa que dicha magnitud es nula para  $p < p_c$  y toma valor no nulo para  $p > p_c$ , lo cual es lógico, ya que previo a  $p_c$  no hay cluster percolante. A su vez, se define la distancia de correlación  $\xi$  como la distancia promedio entre un elemento de un cluster finito y otro sitio ocupado que pertenezca al mismo cluster. También se la puede definir como el tamaño de los clusters que dan la mayor contribución al segundo momento de la distribución de tamaños, por lo que viene dada por 1

$$\xi \propto |p - p_c|^{-\nu} \quad (1)$$

Se puede observar que la distancia de correlación diverge al acercarse al  $p_c$  y que se expresa como una ley de potencias libre de escalas. Todo lo expuesto es indicativo de que la teoría de percolación presenta una transición de fase de segundo orden, con parámetro de orden  $P$  y punto crítico  $p_c$ . A continuación, se explotará este hecho para obtener las leyes de potencia de distintas magnitudes en las inmediaciones del punto crítico y sus exponentes correspondientes.

### B. Leyes de potencia y exponentes críticos

Siguiendo con lo expuesto en la sección anterior, se pueden obtener leyes de potencia de distintas magnitudes relacionadas a la estructura de la red y sus exponentes críticos. La tabla I resume las principales leyes de potencia obtenidas en la literatura para redes percolantes infinitas y los valores teóricos de sus correspondientes exponentes críticos

---

\* ignaciosticco@gmail.com

Cuadro I. Valores teóricos hallados en la literatura.

Símbolo	Ley	Valor
$d$	—	$d = 2$
$D$	$M \sim L^D$	$D = 91/48$
$\nu$	$\xi \sim  p - p_c ^{-\nu}$	$\nu = 4/3$
$\tau$	$n(p_c) \sim s^{-\tau}$	$\tau = 1 + d/D$
$\sigma$	$z = s^\sigma(p - p_c)$	$\sigma = (\nu D)^{-1}$
$\alpha$	$m_0(p) \sim  p - p_c ^{2-\alpha}$	$\alpha = 2 - (\tau - 1)/\sigma$
$\beta$	$m_1(p) \sim (p - p_c)^\beta$	$\beta = \nu(d - D)$
$\gamma$	$m_2(p) \sim  p - p_c ^{-\gamma}$	$\gamma = (3 - \tau)/\sigma$

Estos valores se obtuvieron de Ref. [1]. Uno de los objetivos de este trabajo es realizar simulaciones para poder calcularlos.

### C. Efectos de red finita

El comportamiento de las redes de tamaño finito (redes cuadradas de lado  $L$ ) se aparta de aquel esperado para sistemas infinitos. Esto se debe a que el borde introduce una ruptura en la simetría de la red. Por lo tanto, todas las magnitudes presentadas hasta ahora, se deben reajustar para considerar los efectos de red finita. Ya que muchas provienen de los momentos de la distribución de clusters  $n_s$ , se presentará la forma de la misma para una red finita [1]

$$n_s(p) = q_0 s^{-\tau} f(z) \quad , \quad z = s^\sigma(p - p_c) \quad (2)$$

En la Ec. (2) se observa que la distribución se asemeja a la presentada para el valor  $p_c$  en la sección anterior, a menos de una constante  $q_0$  y una función  $f(z)$ . El argumento  $z$  está definido como  $z = |p - p_c|^\sigma$ , tal como se expuso en la sección anterior. Se espera por lo tanto que en el valor  $p_c$  la función  $f(z = 0)$  adopte el valor 1 para recuperar el comportamiento de  $n_s(p_c)$ . A su vez, se ha reportado que la función colapsa a una única curva con un máximo bien definido, el cual se relaciona con la máxima producción de clusters de tamaño  $s$  para cierta probabilidad máxima.

Otra consecuencia de sondear la red infinita con una red finita es la forma en la que se observa que escala la masa del cluster percolante con  $L$  en las inmediaciones del punto crítico. La ecuación 3 resume el comportamiento exhibido en la bibliografía [1]

$$M(L) = L^D m\left(\frac{L}{\xi}\right) \sim \begin{cases} L^D & \text{si } L < \xi \\ L^d & \text{si } L \gg \xi \end{cases} \quad (3)$$

Con  $d$  la dimensión de la red,  $D < d$  la dimensión fractal involucrada. Esto resulta interesante ya que se pueden observar dos comportamientos diferenciados en una misma red, ocupada con una única probabilidad: para  $L > \xi$

el comportamiento esperado, que la masa escale como la dimensión del sistema, y para  $L < \xi$  como si el sistema estuviera en el punto crítico  $p_c$  y con todo lo que ello implica (autosimilaridad, ley de potencias). Este hecho se explotará para la determinación de los exponentes críticos a lo largo del trabajo.

### D. Renormalización

Es posible explotar aún más el hecho de que cerca de la transición de fase el sistema se muestra libre de escalas. Si se *re-escala* el sistema, deben seguir siendo válidas las leyes de potencia anteriores. Entonces, mediante un proceso de *renormalización* observaremos que el sistema no debería cambiar de universalidad, o lo que es lo mismo, debería mantener todos sus exponentes críticos. Por lo tanto, si aplicamos el procedimiento renormalización en espacio real, reemplazaremos un grupo de sitios por un *supersitio*, cuidando de que la dimensión del grupo de sitios  $b$  sea mucho más chica que la distancia de correlación  $\xi$ , ya que en este rango es donde vale la autosimilaridad del sistema. A continuación, se deberá fijar un criterio por el cual el proceso de re-escalo sea realizado y determinar la probabilidad de ocupación del nuevo sistema en función del original,  $p^*$ .

En general, se sabe que  $\xi$  es la distancia límite que valida la similaridad, por lo tanto debe ser la misma en ambas redes. Si en la red original  $\xi = \text{const}(p - p_c)^{-\nu}$  entonces en la red renormalizada se tendrá  $\xi^* = \text{const}(p^* - p_c)^{-\nu}$  con la misma constante y el mismo  $\nu$  dado que la diferencia de probabilidades se mantiene pequeña. Por lo tanto, si determino  $\xi^*$  a partir de la de la red original,  $\xi^* = \xi/b$  y la ecuación fundamental de la renormalización de espacio real queda determinada como:

$$|p^* - p_c|^{-\nu} = |p - p_c|^{-\nu} \quad (4)$$

Tomando logaritmo se puede determinar el exponente  $\nu$ :

$$\frac{1}{\nu} = \frac{\log[(p^* - p_c)/(p - p_c)]}{\log b} = \frac{\log \lambda}{\log b} \quad (5)$$

Con  $\lambda = dp^*/dp$  para  $p = p_c$ . El problema de esta teoría radica que en  $d > 1$  existen muchos criterios para formar los nuevos supersitios de una misma red, por lo que no siempre se llegará a un resultado exacto. En este trabajo propondremos criterios para una red bidimensional de sitios, obtendremos  $p^*$  para cada caso y estudiaremos los puntos fijos de dicha transformación. A su vez, determinaremos los  $\nu$  en cada caso.

### III. SIMULACIONES NUMÉRICAS

Se estudiaron redes cuadradas de tamaño  $L = 4, 8, 16, 32, 64, 128, 528, 1024$  por medio del algoritmo de Hoshen-Kopelman [2]. Todas los códigos fueron escritos en lenguaje C. Se buscó determinar la probabilidad crítica mediante dos métodos diferentes (bisección y mediana). Se determinaron todos los exponentes críticos involucrados en la transición de fase que es llevada a cabo en el fenómeno de percolación.

Para el cálculo del  $p_c$  con el método de la bisección se registraron los valores de  $p$  para los cuales aparece el cluster percolante. Partiendo de  $p_0 = \frac{1}{2}$  se incrementó el valor de  $p$  en  $\frac{1}{4}$  si la red percolaba o se lo disminuyó en caso contrario. A cada iteración se sumaba o restaba  $\frac{1}{2^n}$  con  $n$  el número de iteración hasta llegar a 16 iteraciones. Se realizó un promedio sobre 27000 realizaciones para cada tamaño de red. Se registró el valor de  $p_c$  y su respectiva dispersión.

El método de la mediana se basó en estimar al  $p_c$  como al valor de  $p$  para el cual la red percola la mitad de las veces. Para esto se hizo un barrido de  $p$ . Se tomaron 10 mediciones equiespaciadas desde 0.55 a 0.64 para cada red. Para cada valor de probabilidad se registró el porcentaje de aparición de cluster percolante (promediando sobre 27000 realizaciones).

Cada exponente crítico se obtuvo con métodos diferentes. Para calcular el exponente  $\tau$  hicieron simulaciones con una red de  $L = 1024$ . Se registró el  $n_s$  (número medio de fragmentos de tamaño  $s$ ) con  $p = 0.5927$  (valor del punto crítico de red infinita tabulado).

En cuanto al exponente  $\beta$ , se realizó un barrido de probabilidad de ocupación ( $p$ ) desde 0.5 hasta 0.9. Se tomaron cien mediciones equiespaciadas sobre una red de tamaño  $L = 128$ . Para cada valor de probabilidad se efectuó un promedio de 27000 iteraciones. En la sección IV se detallará el procesamiento de los datos que fue necesario para conseguir la estimación de  $\beta$  y de todos los exponentes críticos.

La dimensión fractal ( $D$ ) se determinó a partir del estudio de la masa del cluster percolante (en el punto crítico) como función del tamaño de la red. Para esto se usaron los valores de  $p_c$  obtenidos mediante el método de la bisección y se calculó la masa del cluster percolante (promedio sobre 27000 realizaciones) para diferentes tamaños de red ( $L = 4, 16, 32, 64, 128, 528, 1024$ ).

La corroboración de la hipótesis de escala se realizó a través de la obtención del gráfico de  $f_z$ . Para ello se calcularon los valores de  $n_s$  para un rango de probabilidades de 0.32 a 0.72 equiespaciados por 1000 puntos en una red de tamaño  $L = 64$ . También se calculó  $n_{(p_c)}$  con el valor de  $p_c$  obtenido anteriormente por bisección.

Cada cálculo se iteró 27000 veces. El procesamiento de los datos se detallará en las secciones subsiguientes.

Calculando el valor de  $n_s$  para una red de  $L = 128$  se obtuvo el segundo momento de la distribución ( $m_2$ ). Para esto se realizaron 27000 iteraciones para cada probabilidad desde 0.52 hasta 0.62 con 200 pasos intermedios equiespaciados. Estos datos fueron necesarios para el calculo del exponente  $\gamma$ .

### IV. RESULTADOS

#### A. Determinación de $p_c(\infty)$ , $\nu$ , y $\tau$

En la II se muestran los resultados de la estimación de la probabilidad crítica ( $p_c$ ) para cada uno de los métodos (mediana y bisección). En ambos casos el valor de  $p_c$  aumenta con el tamaño de red y tiene una tendencia asintótica hacia el valor tabulado de red infinita ( $p_c = 0.5927$ ).

El error de la mediana está en la tercer cifra. Informamos aquellos resultados de probabilidad crítica correspondientes a una mediana en el intervalo  $[0.500, 0.509]$ . Los valores obtenidos con el método de la mediana presentan un menor grado de exactitud frente al método de la bisección. Esto puede deberse a que el paso del incremento de la probabilidad no fue lo suficientemente chico como para obtener un valor más cercano al tabulado.

Cuadro II.

Tamaño red	Bisección	Mediana
4	0.5618	0.5710
16	0.5879	0.5900
32	0.5942	0.5940
64	0.5925	0.5910
128	0.5926	0.5930

Posteriormente, se obtuvo el valor de  $\nu$  a partir de la linealización de la relación entre el  $p_{c(L)}$  y  $L$  en la vecindad del punto crítico de la red infinita, como se muestra en la ecuación 6

$$\log(p_{c(L)} - p_c) = -\frac{1}{\nu} \log(L) + \log A \quad (6)$$

Siendo  $p_c$  la probabilidad de transición de fase en la red infinita y  $A$  un factor preexponencial. En la Fig. 1 se observa los resultados obtenidos para los tamaños de  $L$  estudiados y el ajuste lineal realizado sobre estos datos. Hecho el ajuste, se obtiene del mismo la inversa de la pendiente, el exponente  $\nu$ , con un valor de 1.24 cuando el valor tabulado es aproximadamente 1.3. Se debe considerar que la dispersión de los datos respecto del ajuste

hace que el valor  $R^2$  se aleje de la unidad dando 0,85. Para mejorar ese valor, se cree que se deberían considerar mayor cantidad de tamaños  $L$ .

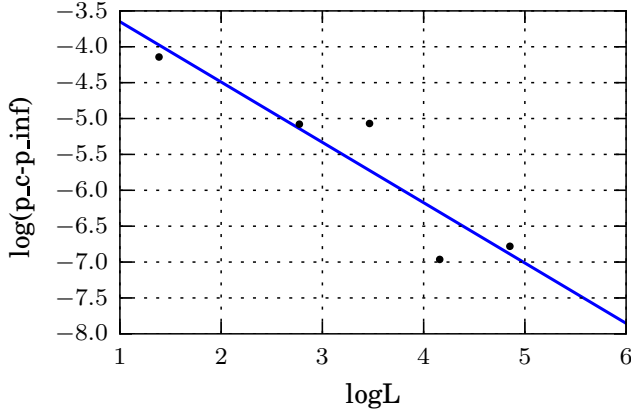


Figura 1. Ajuste lineal del logaritmo del tamaño de la red y el logaritmo de la diferencia de la probabilidad crítica en red finita (asociado al valor de  $L$ ) y la probabilidad crítica de una red infinita. El valor de  $p_c^\infty$  utilizado fue 0.5927. Para cada red  $L$  se realizaron 27000 iteraciones. El  $p_c$  se halló mediante el método de bisección. La pendiente del ajuste fue 0.8064 con una bondad de  $R^2 = 0,85$  Por lo tanto el valor de  $\nu = 1,24$

Luego, se procedió a determinar el exponente crítico  $\tau$  a partir de la ley de potencias subyacente en la densidad de cluster de tamaño  $s$ ,  $n_s$  en la vecindad del punto crítico, como se mostró en la tabla I r. En la Fig. 2 se observan los datos de  $n_s$  en función de  $s$  linealizados, obtenidos para una red cuadrada de  $L = 1024$ . A partir de un ajuste lineal se determinó el valor  $\tau = 2,05$ . La bondad del ajuste medida a partir de  $R^2$  resultó 0.991.

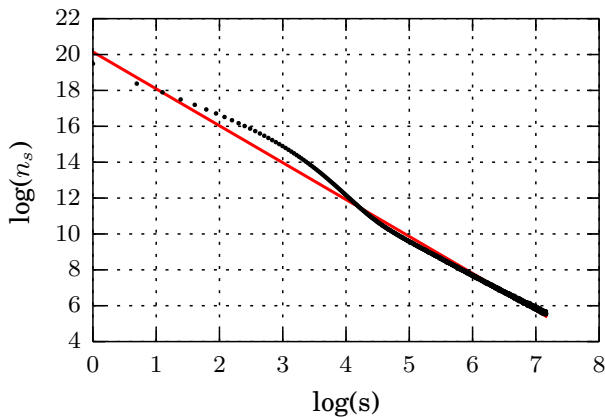


Figura 2. Logaritmo del numero medio de nodos de tamaño  $s$  ( $n_s$ ) en función del logaritmo del tamaño de nodo ( $s$ ). Estas mediciones son el resultado de 27000 iteraciones sobre una red de  $L = 1024$  con probabilidad  $p = 0,5927$  (valor tabulado de la probabilidad crítica). La pendiente devuelve el resultado del exponente  $\tau = 2,057$ . La bondad del ajuste fue de  $R^2 = 0,991$

## B. Determinación de la dimensión fractal $D$

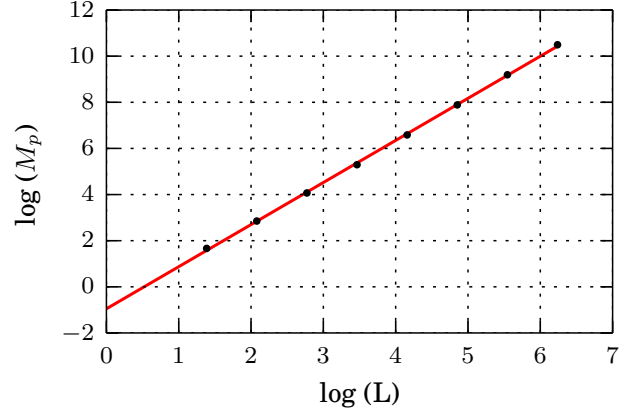


Figura 3. Logaritmo de la masa del cluster percolante en función del logaritmo del tamaño de la red ( $L = 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512$ ). Para cada medición se uso el  $p_c$  calculado con el método de bisección. Se realizó un promedio sobre 27000 realizaciones. La pendiente del ajuste devuelve el valor de la dimensión fractal  $D = 1,824$ . El  $R^2 = 0,999$

Según la Ec. 3 es posible hallar  $D$  en el caso en que el tamaño  $L$  de la red sea menor que la distancia de correlación  $\xi$ . Si se llena la red con la  $p_c$ ,  $\xi$  diverge y en consecuencia siempre se cumple la condición recién mencionada. En este marco, se llenaron redes de tamaños  $L = 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512$  con sus respectivas  $p_c$  calculadas por bisección. Se procedió a linealizar la expresión 3 y con los datos linealizados, se hizo un ajuste para la determinación de  $D$ .

En la Fig. 3 se observan condensados los datos linealizados de la masa del cluster percolante en función del tamaño de red  $L$ . A partir de los datos del ajuste se obtuvo que la dimensión fractal  $D$  toma un valor de 1.824 con un  $R^2 = 0,999$ .

## C. Obtención de $\beta$ a partir de la intensidad $P_\infty$

En la Fig. 4 se muestra la fuerza del cluster percolante en función de la probabilidad de ocupación de celda para diferentes tamaños de red. Puede verse que el comportamiento tiende a hacerse más pronunciado en  $p_c$  al aumentar el tamaño de red. Este resultado está en concordancia con la teoría ya que una red infinita tiene un “salto” de la derivada en el punto crítico. Aumentar el tamaño de la red es aproximarse más a  $L = \infty$  por lo tanto es correcto que la forma funcional tienda a hacerse más pronunciada conforme aumenta  $L$ .

Según la teoría, el exponente  $\beta$  determina la relación funcional entre fuerza del cluster percolante (parámetro de orden) y la diferencia de  $p$  y  $p_c$  (ver tabla I). Lineali-

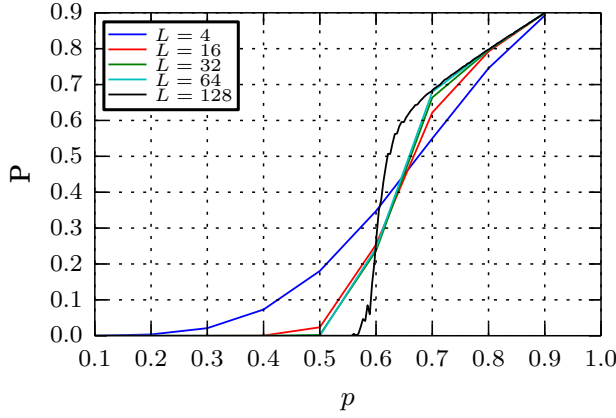


Figura 4. Fuerza del cluster percolante ( $P$ ) en función de la probabilidad de ocupación de celda ( $p$ ). Para distintos tamaños de red ( $L = 4, 16, 32, 64, 128$ ). Para las redes de tamaño inferior a  $L = 128$  se realizaron 27000 iteraciones para cada probabilidad. Se efectuó un barrido sobre 10 probabilidades desde 0.1 hasta 0.9 (equiespaciada). Para el caso de  $L = 128$  el barrido de probabilidades fue desde 0.5 hasta 0.9 con 100 pasos equiespaciados. Por cada valor de probabilidad se realizó un promedio sobre 27000 iteraciones.

zando estas dos cantidades se puede calcular el valor de  $\beta$ . El gráfico de la Fig. 5 muestra la linealización de  $p - p_c$  y  $P$  para una red de  $L = 128$ . Se realizó un ajuste lineal en los primeros datos (aquellos cuyo valor de  $p$  se asemeja a  $p_c$ ) la pendiente de dicho ajuste fue:  $\beta = 0.138$ . La diferencia relativa con el valor tabulado es de  $\sim 2\%$ . Siendo el valor tabulado  $\beta = 0.144$ .

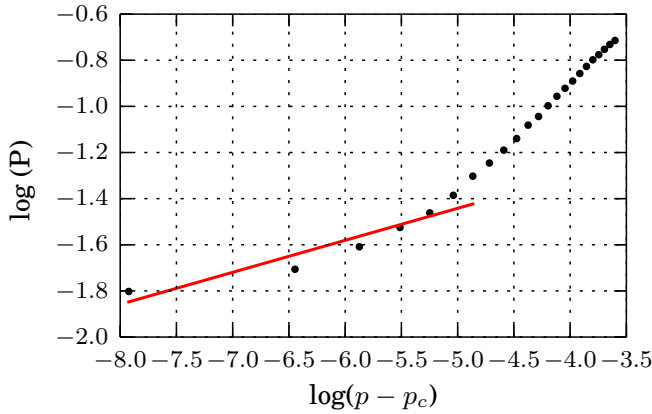


Figura 5. Logaritmo de la fuerza del cluster percolante en función del logaritmo de la diferencia de  $p$  y  $p_c$  para una red de  $L = 128$ . Para obtener estos datos se realizó un barrido de 100 pasos equiespaciados desde  $p=0.5$  hasta  $p=0.9$ . En cada paso se hizo un promedio sobre 27000 iteraciones. Se ajustó por cuadrados mínimos sobre las primeras 6 mediciones para obtener el valor del exponente  $\beta = 0.138$ . La bondad del ajuste queda determinada por  $R^2 = 0.898$

#### D. Espectro de fragmentos y verificación de la hipótesis de *scaling*

La hipótesis de *scaling* se presenta en la Ec. 2 en donde se observa que para distintos valores de  $s$  y  $p - p_c$ , el espectro de fragmentos debe colapsar en una única curva  $f(z) = n_s(p)/n_s(p_c)$ , donde  $z = s^\sigma(p - p_c)$ . Por lo tanto se procedió a obtener la densidad  $n_s$  de una red de tamaño  $L = 64$ , haciendo un barrido de 1000 probabilidades equiespaciadas entre 0,32 y 0,72. A su vez, se calculó aparte el caso de  $n_s(p_c)$ , utilizando la probabilidad crítica calculada en la sección IV A

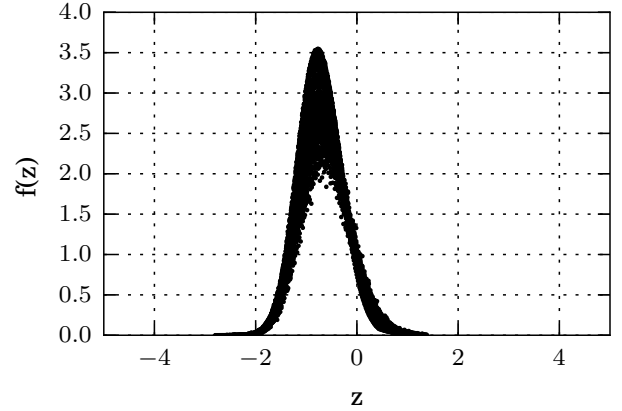


Figura 6. Función  $f(z)$  para una red de tamaño  $L = 64$ , los valores de  $p$  utilizados fueron  $0,32 < p < 0,72$  con 100 pasos equiespaciados y 27000 iteraciones para cada uno. Los tamaños de cluster:  $5 < s < 100$ . Se utilizó el  $p_c$  y el  $\tau$  calculado en la sección anterior correspondiente a la red de  $L = 64$ . Se usó el valor teórico del exponente  $\sigma = 36/91$ .

En la Fig. 6 se observa que el gráfico correspondiente a  $f(z)$  para una red de  $L = 64$ , con valores de probabilidad de llenado entre 0,32 y 0,72 y para tamaños de cluster entre 5 y 100. A su vez se utilizó el  $p_c$  y el  $\tau$  calculado en la sección anterior para la red de  $L = 64$ , mientras que el exponente  $\sigma$  fue utilizado con su valor teórico de  $36/91$ . Se observa que las curvas colapsan para en una única curva, con un máximo bien definido (para cada  $s$  y  $p$ ). A su vez, se observa que la predicción de que  $f(p = p_c, z = 0) = 1$ , corroborando el cálculo del  $p_c = 0,592$  de la sección IV A

En consecuencia, verificamos la hipótesis de *scaling* graficando  $f(z)$  y determinando el punto  $f_{\max} = f(z_{\max})$ . Este valor se corresponde con una probabilidad  $p_{\max}$  para un cada tamaño  $s$  fijo. La ley de potencia con exponente  $\sigma$  será entonces

$$\ln(p_{\max} - p_c) = -\sigma \ln(s) + \ln(z_{\max}) + C \quad (7)$$

En la Fig 7 se aprecian los datos linealizados de la diferencia de probabilidades para tamaños de clusters entre 1

y 15. Se observa una relación lineal en los datos por lo que se procedió a realizar un ajuste de cuadrados mínimos para determinar los coeficientes del mismo y relacionarlos con los de la ecuación 7. De este ajuste resultó un valor de  $\sigma_{exp} = 0,4059$  lo que muestra una gran concordancia con el valor teórico tabulado  $\sigma_{teo} = 36/91 \simeq 0,395$ .

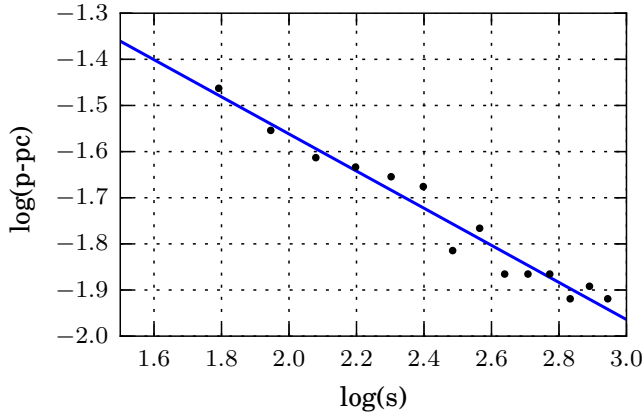


Figura 7. Logaritmo de la diferencia de  $p_{max}$  y  $p_c$  vs. logaritmo del tamaño tamaño de cluster ( $s$ ).  $p_{max}$  es la probabilidad que maximiza los clusters de tamaño  $s$ . Se tomaron fragmentos de tamaño  $1 < s < 15$ . Mediante el ajuste lineal se obtiene el valor del exponente  $\sigma_{exp} = 0,4059$ . La bondad del ajuste fue de  $R^2 = 0,992$

### E. Estimación del exponente $\gamma$

Para una red de tamaño  $L = 128$  se hicieron simulaciones para medir  $n_s(p)$  (ver sec. III). A partir de esta información fuimos capaces de calcular el segundo momento  $m_2(p) = \sum_{s=1}^{\infty} n_s s^2$ . En la Fig. 8 se muestra la relación funcional entre  $m_2$  y la probabilidad de ocupación. Puede verse que la curva alcanza un máximo cerca de  $p_c$ . Este máximo es un efecto propio de la red finita ya que, según la teoría, con una red infinita tendríamos una divergencia del segundo momento en  $p_c$ .

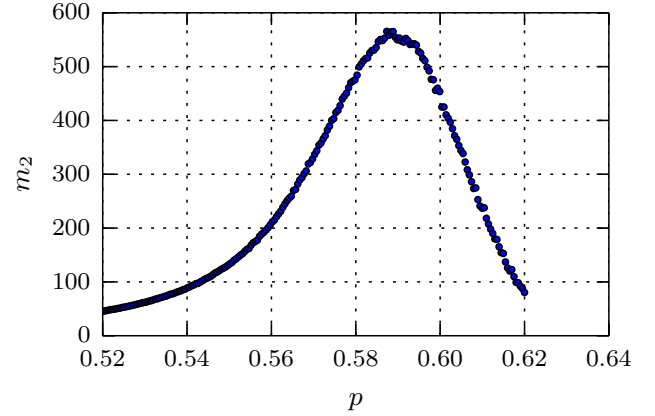


Figura 8. Segundo momento ( $m_2$ ) en función de la probabilidad de ocupación ( $p$ ). Para este cálculo se utilizó una red de tamaño  $L = 128$ . Se efectuó un barrido de probabilidades desde 0.52 hasta 0.62 con 200 pasos intermedios equiespaciados. Para cada valor de  $p$  se hizo un promedio sobre 27000 realizaciones. Para el cálculo de  $m_2$  se excluyó la contribución de todos los clusters percolantes en la red.

Con los datos aportados en la Fig. 8, se realizaron varios ajustes lineales por cuadrados mínimos para diferentes conjuntos de puntos ubicados a la izquierda y derecha de  $p_c$ . A la pendiente del ajuste de los puntos de la derecha ( $p > p_c$ ) los llamamos  $\gamma_+$ . Por otro lado, a la pendiente que surge del ajuste de los puntos de la izquierda ( $p < p_c$ ) los llamamos  $\gamma_-$ . Cabe destacar que antes de hacer el ajuste debe aplicarse logaritmo (ver Tabla I)

Este conjunto de resultados se exhibe en la Fig. 9. En el eje de abscisas se encuentra la distancia de  $p$  y  $p_c$ . El lugar de intersección de ambas curvas es el valor del exponente crítico estimado con este método. El mismo resultó:  $\gamma = 1,06$ . Existe una diferencia de  $\sim 50\%$  entre el valor hallado y el tabulado. Atribuimos esta diferencia al hecho de haber usado un red que no es lo suficientemente grande como para que la divergencia en  $m_2$  sea apreciable de modo que genere valores de gamma más grandes.

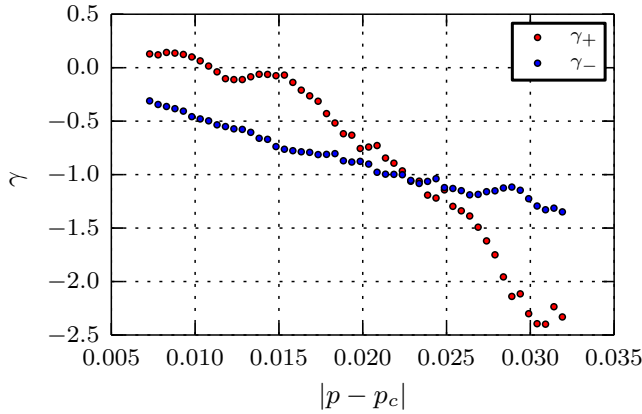


Figura 9. Valores de  $\gamma_+$  (puntos rojos) y  $\gamma_-$  (puntos azules). Cada medición es el resultado de realizar un ajuste lineal sobre un set de puntos apartados del  $p_c$  en una distancia media  $|p - p_c|$  (eje de abscisas). Este set de puntos se determina a partir de aplicar logaritmo natural del segundo momento ( $m_2$ )

## V. VERIFICACIÓN DE RESULTADOS POR RENORMALIZACIÓN

Podemos verificar, al menos de manera aproximada, los resultados de las secciones realizando un proceso de renormalización de *celda pequeña*. Consideramos un porción de red de lado  $b = 2$  y la llamamos un *super-nodo*, los cuales estarán ocupados o no bajo ciertas condiciones de los cuatro nodos que lo componen. Si la porción de red posee los cuatro nodos ocupados se re-escala con un supernodo ocupado; de igual manera si presenta tres nodos ocupados, en cualquiera de sus cuatro posibilidades. A su vez, de caso contrario, si todos los nodos se encuentran vacíos o sólo uno ocupado corresponderá a un supernodo vacío. Falta sólo considerar el caso en el que dos nodos se encuentren ocupados y sus seis degeneraciones. Por lo tanto, la probabilidad de ocupación de un supernodo va a estar relacionada a través de la de los nodos y los criterios elegidos para decidir si están llenos o no. Por lo recientemente expuesto, la probabilidad de ocupación de un supernodo se resume en la ecuación 8

$$p^* = p^4 + 4p^3(1 - p) + g_{(2)}p^2(1 - p)^2 \quad (8)$$

Siendo el primer término el correspondiente a los 4 nodos ocupados, el segundo a 3 nodos ocupados y el tercero a la de dos nodos ocupados. El coeficiente  $g_{(2)}$  es la degeneración correspondiente al criterio utilizado para llenar el supernodo en el caso de dos nodos llenos. A continuación se presentarán tres criterios para la asignación de esta probabilidad y los puntos fijos de la transformación de la ecuación resultante.

Se puede observar que el punto fijo de la transformación que más se acerca al correspondiente  $p_c$  corresponde

Cuadro III.

Criterio	Degeneración	Punto fijo
Diagonal llena	2	0.618
Esquina superior llena	3	0.500
Contiguos llenos	4	0.381

al criterio de degeneración 2 en la asignación de supernodos llenos. Sin embargo ninguna transformación de las aquí expuestas da en el valor correspondiente a la red cuadrada de sitios. Con estos valores se procedió al cálculo del exponente crítico  $\nu$ , a partir de la ecuación 5

Cuadro IV.

Degeneración	$\nu$
2	0.62
3	0.58
4	0.51

La discrepancia de los resultados experimentales con respecto a los teóricos es esperada ya que la renormalización de celda pequeña funciona en muy pocos casos, como el de la red triangular.

## VI. CONCLUSIONES

Se realizaron simulaciones de redes cuadradas finitas de sitios para varios tamaños  $L$  y para diferentes probabilidades de ocupación de los sitios con el objetivo de estudiar la transición de fase de segundo orden del sistema. Se identificaron los clusters a través del algoritmo de Hoshen-Kopelman. Posteriormente, se determinó por dos métodos (bisección y mediana) la probabilidad de crítica  $p_c$  de dichas redes. A partir de estos resultados, se determinó el primer exponente crítico  $\nu$  relacionando las  $p_c(L)$  con el tamaño de la red y  $p_c(\infty)$ . Luego se obtuvo el valor medio de  $n_s$  en el punto crítico y se postuló la ley de potencias correspondiente para determinar el segundo exponente,  $\tau$ .

Se identificaron los clusters percolantes para varios tamaños de red, calculando su masa y expresándola en función de  $L$ . Con esto se pudo determinar la dimensión fractal  $D$ . Posteriormente, se calculó la fuerza del cluster percolante  $P$  en función de  $p$ . Esta magnitud corresponde al primer momento de la distribución  $n_s$  y en la vecindad del punto crítico,  $p$  y  $P$  se relacionan a través de una ley de potencias con exponente crítico  $\beta$ . El mismo se determinó a partir de estos datos.

Se tomó una red de  $L = 64$  para la cual se calculó la distribución de fragmentos  $n_s(p)$ . Con estos datos, junto con valores teóricos de exponentes previamente calculados, se determinó la forma de la función  $f(z)$

y se corroboraron sus propiedades con las exhibidas en la teoría. Una vez determinada  $f(z)$ , se identificó su máximo y se calculó la probabilidad máxima de formación de clusters de cada tamaño  $s$ . Dada la relación  $z_{max} = s^\sigma(p_{max} - p_c)$  se pudo calcular el exponente  $\sigma$ . Con el fin de obtener el exponente  $\gamma$ , se calculó el segundo momento de la distribución de clusters  $m_2(p)$ . Luego se tomaron intervalos pequeños de  $p$  a ambos lados de la  $p_c$  para la cual se cumple la ley de potencias con exponente crítico  $\gamma$  y la función  $m_2$  diverge. Se obtuvieron dos exponentes,  $\gamma_+$  perteneciente a los ajustes realizados a la derecha de la divergencia, y  $\gamma_-$  perteneciente a los ajustes realizados a la izquierda. El valor de  $\gamma$  quedó determinado como el punto de coincidencia de ambos exponentes.

Finalmente, se verificó la teoría de renormalización de celda pequeña para una red cuadrada, con parámetro de re-escalo  $b=2$  y diferentes criterios de formación de supernodos. Se calculó para cada uno los puntos fijos de la transformación de probabilidades y el exponente crítico  $\nu$ . Se obtuvieron discrepancias con los valores teóricos, pero eran esperadas ya que la renormalización de celda pequeña no resulta conveniente salvo en contadas geometrías.

La Tabla VI resume los resultados obtenidos.

Símbolo	Valor experimental	Valor teórico
$D$	1,82	$D = 91/48 \sim 1,895$
$\nu$	1,24	$\nu = 4/3 \sim 1,333$
$\tau$	2,05	$\tau = 1 + d/D \sim 2,055$
$\sigma$	0,405	$\sigma = 36/91 \sim 0,395$
$\beta$	0,138	$\beta = \nu(d - D) \sim 0,144$
$\gamma$	1,06	$\gamma = (3 - \tau)/\sigma \sim 2,388$

Puede verse que todos los valores calculados difieren de los valores tabulados en menos del 10 % excepto para el caso de  $\gamma$ . Suponemos que el tamaño de red utilizado para el cálculo de  $\gamma$  ( $L = 128$ ) manifestó fuertemente el hecho de que el segundo momento de la distribución no diverge.

El exponente que mejor ajustó a los datos teóricos fue  $\tau$ ; adjudicamos este grado de exactitud al hecho de utilizar una red suficientemente grande ( $L = 1024$ ) que permitió aportar el volumen de datos necesarios para ajustar apropiadamente dicho coeficiente.

## ACKNOWLEDGMENTS

Agradecemos a Sonya y Artemis por su inmensa capacidad de cálculo.

- 
- [1] Stauffer, D., & Aharony, A. (1994). Introduction to percolation theory. CRC press.  
[2] Hoshen, J., & Kopelman, R. (1976). Percolation and clus-

ter distribution. I. Cluster multiple labeling technique and critical concentration algorithm. Physical Review B, 14(8), 3438.