Distribuciones Muestrales y Teoremas Fundamentales

1. Conceptos básicos de distribución muestral

La distribución muestral es una distribución de probabilidad que describe cómo varían las estadísticas muestrales (como la media, proporción o desviación estándar) calculadas a partir de múltiples muestras del mismo tamaño extraídas de una población.

Diferencias clave:

- Distribución de la población: Describe cómo se distribuyen todos los elementos individuales en la población completa. Representa la variabilidad inherente de la característica estudiada en toda la población.
- Distribución de una muestra: Muestra cómo se distribuyen los elementos dentro de una única muestra específica extraída de la población. Puede variar considerablemente entre diferentes muestras.
- Distribución muestral: Describe cómo varía una estadística específica (como la media) entre múltiples muestras del mismo tamaño. Su forma tiende a ser normal (según el Teorema del Límite Central) incluso cuando la población original no lo es.

2. Ley de los grandes números

- Situación: Al lanzar una moneda equilibrada 10 veces, se obtienen 7 caras.
- Análisis: Este resultado no contradice la Ley de los Grandes Números. Esta ley establece que a medida que el número de ensayos (lanzamientos) aumenta, la proporción de caras se aproximará a la probabilidad teórica (0.5 para una moneda equilibrada).

Con solo 10 lanzamientos, la variabilidad muestral es alta. Una proporción de 0.7 (7/10) está dentro del rango esperado para muestras pequeñas. La ley se aplica a muestras grandes (cientos o miles de lanzamientos), no a muestras pequeñas donde la aleatoriedad puede producir desviaciones significativas del valor esperado.

3. Teorema del límite central

- Situación: Tiempo de espera en banco con distribución uniforme entre 5 y 15 minutos. Muestra de 36 clientes.
- Utilidad del Teorema del Límite Central: Este teorema es útil porque establece que, para muestras suficientemente grandes ($n \geq 30$), la distribución muestral de la media se aproximará a una distribución normal, independientemente de la forma de la distribución poblacional. Esto permite utilizar métodos estadísticos basados en la normalidad incluso cuando la población original no es normal.
- Cálculos:

- Para una distribución uniforme $U(a, b)$ donde $a = 5$, $b = 15$:
    - Media poblacional (μ) = $(a + b)/2 = (5 + 15)/2 = 10$ minutos
    - Varianza poblacional (σ^2) = $(b - a)^2/12 = (15 - 5)^2/12 = 100/12 \approx 8.333$

  - Desviación estándar poblacional (σ) = $\sqrt{8.333} \approx 2.8868$ minutos
- Para la distribución muestral de la media con $n = 36$:
  - Media de la distribución muestral ($\mu_{\bar{x}}$) = μ = 10 minutos
  - Error estándar ($\sigma_{\bar{x}}$) = $\sigma/\sqrt{n} = 2.8868/\sqrt{36} \approx 2.8868/6 \approx 0.4811$ minutos

4. Cálculo de probabilidades con la distribución muestral

- Situación: Duración de llamadas ~ $N(8, 2^2)$, muestra de $n = 25$ llamadas.
- Cálculo de $P(\bar{x} < 7.5)$:
  - Parámetros de la distribución muestral:
    - $\mu_{\bar{x}} = \mu = 8$ minutos
    - $\sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n} = 2/\sqrt{25} = 2/5 = 0.4$ minutos
  - Estandarización:
    - $Z = (\bar{x} - \mu_{\bar{x}})/\sigma_{\bar{x}} = (7.5 - 8)/0.4 = -0.5/0.4 = -1.25$
    - $P(\bar{x} < 7.5) = P(Z < -1.25)$
  - Consultando la tabla de distribución normal estándar:
    - $P(Z < -1.25) = 0.1056$
- Resultado: La probabilidad de que el tiempo promedio de duración de la muestra sea menor a 7.5 minutos es aproximadamente 0.1056 o 10.56%.