



Primeras mediciones, leyes de escala

Segundo Santos Torrado¹, Ignacio Schuemer², Santiago Tomas Torres³

Departamento de Ingeniería, Universidad de San Andrés, Victoria, Buenos Aires, Argentina.

E-mails: ¹ssantostorrado@udesa.edu.ar, ²ischuemer@udesa.edu.ar, ³storres@udesa.edu.ar

Abstract:

En este informe, se aborda la búsqueda de leyes de escala a través de propuestas experimentales en diferentes contextos. Se exploran las dependencias entre magnitudes físicas mediante mediciones detalladas y análisis de datos en dos situaciones distintas. En la primera propuesta, se estudian las características físicas de hojas de plantas y su relación con la masa de las hojas. En la segunda propuesta, se investiga la formación de bollos con hojas de impresora y también su relación con la masa. Se emplea la regresión lineal como herramienta clave para modelar las relaciones entre variables y se considera la influencia de incertezas y errores de medición en la interpretación de los datos. La representación de los datos se exhibe. A través de esta investigación, se busca comprender y describir las regularidades implícitas en la naturaleza y en otros sistemas, contribuyendo así al conocimiento de las leyes de escala presentes en estos ámbitos.

Keywords: Medición experimental, leyes de escala, regresión lineal.

1 Introducción

En el campo de la física, la búsqueda de leyes de escala es una herramienta fundamental para comprender y describir fenómenos naturales en diferentes contextos. Una ley de escala establece cómo ciertas magnitudes físicas cambian en relación con otras cuando cambia el tamaño o las condiciones de un sistema.

En el presente trabajo nos enfocaremos en el análisis de leyes de escala en tres contextos distintos. El objetivo principal de cada propuesta experimental es medir diversas magnitudes, considerando tanto incertezas experimentales como estadísticas, y examinar cómo estas magnitudes están interconectadas en función de cambios en las condiciones de medición. Para lograr esto, se llevarán a cabo mediciones detalladas y se presentarán gráficos que analicen las relaciones observadas.

En la primera parte de esta práctica de laboratorio, se abordará el estudio de las características físicas de hojas de plantas en la naturaleza. El propósito es analizar cómo ciertas propiedades de estas hojas dependen del tamaño de las mismas. Para ello, se recolectará una muestra diversa de hojas frescas, que provienen de diferentes especies y tamaños y se medirán variables como el largo, el ancho, el área y la masa de cada hoja.

Por otro lado, en la segunda sección, se abordará la exploración de hojas de impresora desde un enfoque experimental. El objetivo es investigar cómo ciertas propiedades de las hojas de papel, como el tamaño y el gramaje, se relacionan con características físicas observables, específicamente el diámetro de los bollos o pelotas que se pueden formar con ellas. A través de esta propuesta, se buscará identificar posibles patrones y leyes de escala que rigen esta relación.

Por último, se escribirán las conclusiones pertinentes basadas en los datos y análisis de las propuestas experimentales. A través de estos La representación de los datos se exhibe, podremos extraer conclusiones generales sobre las interacciones entre las magnitudes físicas involucradas.

Antes de adentrarnos en el desarrollo experimental, es importante comprender el concepto de regresión lineal utilizado en el presente ensayo, como así también es esencial tener una comprensión clara de las incertezas y errores de medición. A continuación se explicarán brevemente estas nociones:

1.1 Regresión lineal

La regresión lineal es un método utilizado para modelar la relación entre dos variables (una independiente y la otra dependiente) mediante una recta en un espacio bidimensional. Es decir, busca establecer una relación lineal que mejor se ajuste a los datos observados, permitiendo predecir o estimar el valor de la variable dependiente en función de la variable independiente.

Este método es de gran relevancia para este trabajo, ya que se busca analizar cómo ciertas magnitudes de las hojas o pelotas varían en función del tamaño de las mismas. En la propuesta 1, la regresión lineal se utilizará para analizar y entender cómo el largo, ancho y el área de las hojas dependen de su masa. Similarmente ocurre en la propuesta 2, en la cual se utiliza la regresión lineal para estudiar cómo el tamaño del bollo se relaciona con la masa de las hojas de impresora.

1.2 Incertezas y errores de medición

Las mediciones experimentales nunca son perfectas y siempre están sujetas a cierto grado de incertidumbre. Las incertezas y errores pueden surgir de diversas fuentes, como instrumentos de medición imperfectos, condiciones ambientales variables y limitaciones en la técnica de medición. Reconocer y cuantificar estas incertezas es crucial para una interpretación precisa de los datos. La representación de los datos se exhibe y para tomar decisiones informadas sobre la validez y significado de los datos recopilados. En la siguiente sección se detallará con mayor exactitud cómo se contempló este punto en los casos particulares del trabajo.

Con esta base establecida, nos adentraremos en el desarrollo experimental de las propuestas 1 y 2, explorando las metodologías, mediciones y análisis realizados en cada caso.

2 Desarrollo experimental

En este apartado se detallarán los procedimientos llevados a cabo para la extracción de las muestras y se expondrán las métricas consideradas para estudiar las características físicas del dataset obtenido.

2.1 En la naturaleza

Para el primer dataset se extrajeron un total de 25 hojas frescas, 5 de cada una de las 5 especies distintas de hojas (véase [5]). Posteriormente se midió el largo y ancho de cada una, y a partir de ello se calculó el área de cada hoja y se pesaron para obtener su masa. Una vez obtenidos todos los datos necesarios, se realizaron distintos gráficos de las variables medidas (largo, ancho y área) en función de la masa de cada hoja. En esta parte es donde se utilizará el método de regresión lineal para estudiar esta relación o correspondencia de las distintas magnitudes. A partir de los gráficos realizados, se analizarán los La representación de los datos se exhibe obtenidos y se expresarán las conclusiones pertinentes.

Previo a exponer las regresiones ajustadas a los datos alcanzados, se analizará el error introducido en su medición, tanto por factores sistemáticos como por factores estadísticos. Para estas mediciones se indujo un error que será detallado a continuación.

En primer lugar, para la obtención de los datos de largo y ancho de cada hoja, se trató con una incerteza sistemática relacionada al instrumento de medición. En particular, se utilizó una regla milimétrica, por lo que a cada medición de longitud l_s y de ancho w_s se le consideró una incerteza de $\pm 0.5mm$. De este modo, cada muestra de largo l y de ancho w quedan dadas de acuerdo a las siguientes expresiones:

$$l = l_s \pm 0.5mm, \quad w = w_s \pm 0.5mm. \quad (1)$$

En segundo lugar, respecto al pesaje de las hojas, se consideraron $n = 3$ muestras m_1, m_2, m_3 para cada hoja. Luego, se tomó la media de estas mediciones:

$$\bar{m} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 m_i = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{3}. \quad (2)$$

Por un lado, en el caso de la masa se tomaron en cuenta la incerteza sistemática introducida por la balanza digital utilizada ($\pm 0.1g$) y, por otro lado, la incerteza estadística inducida por el empleo de un promedio para la medición de la masa. Al tomar tres mediciones por cada muestra, definimos el error sistemático como:

$$\sigma_S = \sigma_{s1}^2 + \sigma_{s2}^2 + \sigma_{s3}^2, \quad (3)$$

$$\sigma_S = 0.1^2 + 0.1^2 + 0.1^2 = 3 \times 10^{-2}g.$$

De este modo, la masa m obtenida para cada hoja está dada por:

$$m = \bar{m} \pm \sqrt{\left(\sigma_S^2 + \frac{\sigma_E^2}{n}\right)}g, \quad (4)$$

siendo \bar{m} la media de los pesos, $n = 3$ muestras y σ_E es el desvío estándar de las 3 mediciones tomadas que representa el error estadístico, definido según:

$$\sigma_E = \sqrt{\frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 (m_i - \bar{m})^2}, \quad (5)$$

donde \bar{m} es la media de las muestras obtenidas para la masa de cada hoja.

Finalmente, para el cálculo del área de cada hoja, se utilizó como estimación el área de la elipse de largo l_h y ancho w_h para cada hoja h . De este modo, para esta medición se consideraron incertezas de diversas naturalezas. Por un lado, la aproximación por el área elíptica implica una concesión en cuanto a la precisión de las muestras y, por el otro, la utilización de las medidas l_h y w_h obtenidas de forma incierta (véase [2.1]) implica una propagación de estos errores.

De esta manera, se consideró como medida del área de cada hoja h

a la función $\tilde{A}_h(l_h, w_h) \approx A_h$ que representa el área de una elipse de largo l_h y ancho w_h , y es de la forma:

$$\tilde{A}_h(l_h, w_h) = \frac{l_h}{2} \cdot \frac{w_h}{2} \cdot \pi = \frac{l_h w_h \pi}{4}. \quad (6)$$

Luego, a partir de la propagación de los errores de las incertezas de las muestras de largo y ancho de hoja, la desviación de cada medición de \tilde{A}_h sigue la fórmula (véase [1]):

$$\sigma_{\tilde{A}_h} = \sqrt{\left(\frac{\partial \tilde{A}_h}{\partial l_h}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{A}_h}{\partial w_h}\right)^2} = \frac{\pi}{4} \cdot \sqrt{l_h^2 + w_h^2}, \quad (7)$$

donde $\sigma_l = 0.5mm$ y $\sigma_w = 0.5mm$ están dadas por las incertezas sistemáticas de las mediciones de largo y ancho.

Finalmente, a partir de la propagación del error analizada, se tiene que las muestras A_h del área de cada hoja son de la forma:

$$A_h = \tilde{A}_h(l_h, w_h) \pm \sigma_{\tilde{A}_h}. \quad (8)$$

2.2 En la librería

La metodología propuesta en esta parte del trabajo consiste en la selección de un gramaje específico y trabajar con hojas cuadradas de lado L y masa M . A partir de estas hojas, se crearán bollos compactos cuyo diámetro D se medirá. El proceso se repetirá para diferentes tamaños L con el fin de examinar cómo varía el diámetro en relación con la masa para distintas configuraciones de hojas. Las mediciones de las muestras fueron llevadas a cabo con los mismos instrumentos empleados para medir las hojas de árboles de la sección anterior, por lo tanto, definimos los errores de medición al igual que en el primer apartado (véase [2.1]). Los distintos bollos presentan las siguientes medidas:

- $B_1 = (85 \text{ mm} \times 85 \text{ mm}) \pm 0.5 \text{ mm}$
- $B_2 = (121 \text{ mm} \times 121 \text{ mm}) \pm 0.5 \text{ mm}$
- $B_3 = (160 \text{ mm} \times 160 \text{ mm}) \pm 0.5 \text{ mm}$
- $B_4 = (210 \text{ mm} \times 210 \text{ mm}) \pm 0.5 \text{ mm}$
- $B_5 = (295 \text{ mm} \times 295 \text{ mm}) \pm 0.5 \text{ mm}$

A continuación se describirán y mostrarán los La representación de los datos se exhibe que se obtuvieron luego de las respectivas mediciones en ambos casos del experimento.

3 La representación de los datos se exhibe

A continuación, se dará a conocer el comportamiento de los datos obtenidos por medio de las mediciones realizadas, tal como se detalló en el inciso anterior. En un principio resulta de interés analizar si existe una relación directa entre las dimensiones de las muestras con respecto a su masa. Se exponen los gráficos obtenidos de la longitud, el ancho y el área con respecto a la masa, con sus respectivos errores.

Observación 1. Se aprecia que (véase [1], [1(a)], [1(b)]) los datos escalan linealmente (de manera aproximada). Si bien se probaron modelos de regresión potencial, se consideraron redundantes. La adaptación de los datos a estos esquemas nos aporta información similar para estas muestras.

A diferencia de las hojas de los árboles, las bolas de papel si responden a un modelo de regresión potencial. Se obtuvieron los siguientes La representación de los datos exhibe la incerteza de sus mediciones. Se observa una relación lineal entre la masa y el área de acuerdo a la funci.

Los datos se ajustan al esquema propuesto (véase [2(a)]). Aplicando el logaritmo en ambas variables podemos afirmar que se adaptan a una escala de potencia, quedando alineados luego de aplicar una regresión lineal.

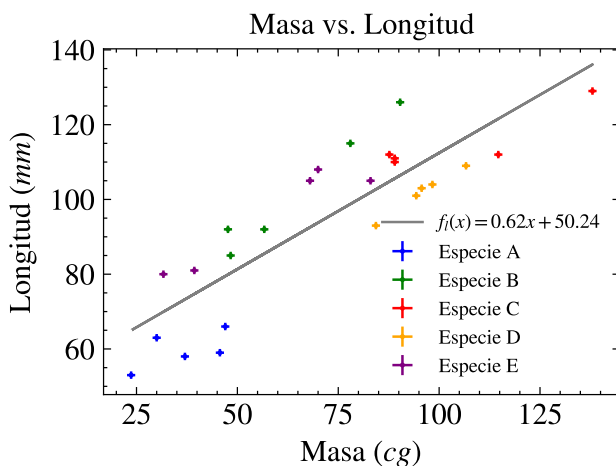
Los La representación de los datos exhibe la incerteza de sus mediciones. Se observa una relación lineal entre la masa y el área de acuerdo a la funci obtenidos a partir de la regresión potencial para las bolas de papel revelan patrones distintos en comparación con las hojas de los árboles. Al analizar los gráficos presentados en la Figura [2(a)], se observa que las bolas de papel muestran un comportamiento exponencial, lo que se refleja en la curva de ajuste a la regresión potencial.

La relación entre las variables X e Y en el caso de las bolas de papel puede ser descrita con la ecuación $Y = a \cdot X^b$, donde X representa la variable independiente (por ejemplo, la masa) y Y es la variable dependiente (por ejemplo, el diámetro). Los coeficientes a y b de la ecuación proporcionan información sobre la magnitud y la naturaleza del cambio entre las variables.

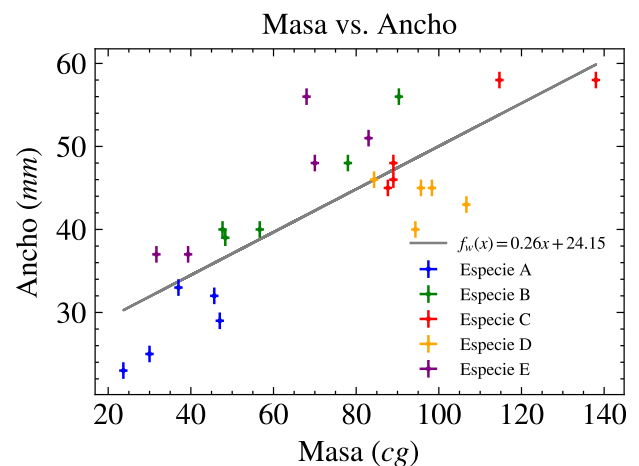
El hecho de que los datos se ajusten a una escala de potencia y se alineen después de aplicar la regresión lineal sugiere que existe una relación exponencial entre la masa y el diámetro de las bolas de papel. Este hallazgo podría tener implicaciones importantes en

la comprensión de cómo las bolas de papel responden a las fuerzas aplicadas, su densidad y otros factores relacionados.

Estos La representación de los datos exhibe la incerteza de sus mediciones. Se observa una relación lineal entre la masa y el área de acuerdo a la funci resaltan la importancia de elegir el modelo de regresión adecuado según el contexto y la naturaleza de los datos. Además, demuestran la utilidad de las técnicas de transformación, como la aplicación del logaritmo (véase [2(b)]), para linealizar relaciones no lineales y permitir una mejor interpretación de los La representación de los datos exhibe la incerteza de sus mediciones. Se observa una relación lineal entre la masa y el área de acuerdo a la funci.

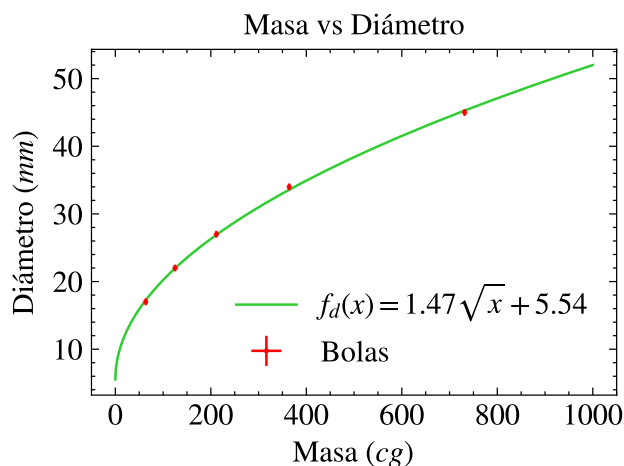


((a)) Figura de la longitud l_h en milímetros (mm) de cada hoja h muestreada (véase [2.1]) en función de la masa m_h (véase [4]) en centigramos (cg). La representación de los datos exhibe la incerteza de sus mediciones. Se observa una relación lineal entre la masa y la longitud de acuerdo a la función $f_l(x) = 0.62x + 50.24$.

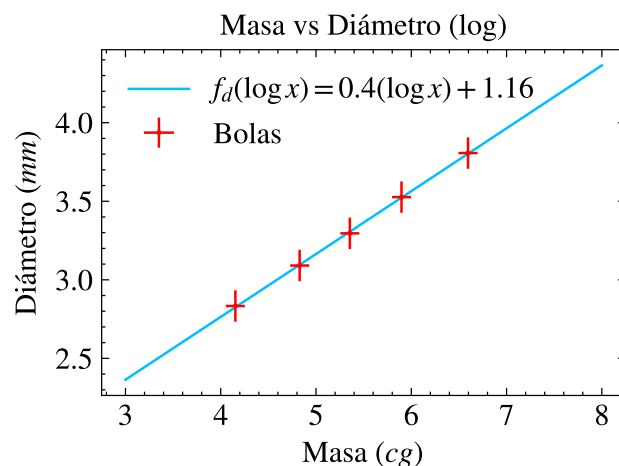


((b)) Figura del ancho w_h en milímetros (mm) de cada hoja h muestreada (véase [2.1]) en función de la masa m_h (véase [4]) en centigramos (cg). La representación de los datos exhibe la incerteza de sus mediciones. Se observa una relación lineal entre la masa y el ancho de acuerdo a la función $f_w(x) = 0.26x + 24.15$.

Fig. 1: Regresión lineal de los datos clasificados según especies. Gráficos de la longitud y el ancho de las hojas con respecto a la masa de cada una de ellas.



((a)) Ajuste de los datos por medio de una función de potencia $\frac{1}{2}$. La masa m_b de cada bollo se mide en centigramos (cg) y el diámetro de los bollos en milímetros (mm), y están representados con sus respectivas incertezas (véase [4]). Se observa una certera estimación de la gráfica de $f_d(x)$ hacia las muestras.



((b)) Ajuste lineal del logaritmo de los datos. La masa m_b de cada bollo se mide en centigramos (cg) y el diámetro de los bollos en milímetros (mm), y están representados con sus respectivas incertezas (véase [4]). Se observa una certera estimación de la gráfica de $f_d(\log x)$ hacia las muestras.

Fig. 2: Representaciones del diámetro de las bolas de papel respecto de su masa como regresión cuadrática sobre las muestras originales y lineal a partir del logaritmo de los datos.

4 Conclusión

A modo de síntesis, este informe exploró la interrelación entre distintas variables físicas de hojas de árboles y papel con la masa de las mismas. En otras palabras, mediante la realización de dos propuestas experimentales, se analizaron patrones y regularidades en estas relaciones, utilizando la regresión como una herramienta fundamental para modelar y comprender los datos obtenidos. Al considerar las incertezas y errores implícitos en las mediciones, se puede garantizar una interpretación más precisa de los La representación de los datos exhibe la incerteza de sus mediciones. Se observa una relación lineal entre la masa y el área de acuerdo a la funci.

En la propuesta 1, se examinó cómo el tamaño de las hojas de diferentes plantas se relaciona con sus características físicas, como el largo, el ancho y el área. Los análisis revelaron que estas magnitudes exhiben relaciones proporcionales con la masa de las hojas, lo que sugiere leyes de escala consistentes en el ámbito de la naturaleza.

Por otra parte, en la propuesta 2, se investigó la relación entre el tamaño de bollos o pelotas formados con hojas de papel de impresora y su masa. Los datos recopilados demostraron que el diámetro de los bollos está relacionado con la masa del papel. La aproximación realizada mostró una relación de potencia $\frac{1}{2}$ entre estas variables proporcionando información adicional sobre la compresión del papel y la formación de bollos y una diferencia con respecto a las hojas de la naturaleza.

En conclusión, este trabajo proporcionó un enfoque de que la regresión puede utilizarse para investigar y modelar relaciones entre magnitudes físicas en contextos naturales. En cambio en otros ambientes, ciertas funciones pueden aproximar de forma más adecuada a estas relaciones existentes entre las características del objeto en cuestión.

5 Apéndice

5.1 Regresión lineal por especie

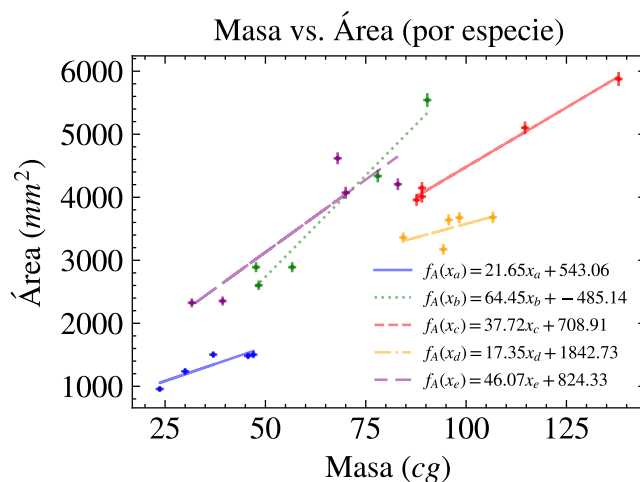
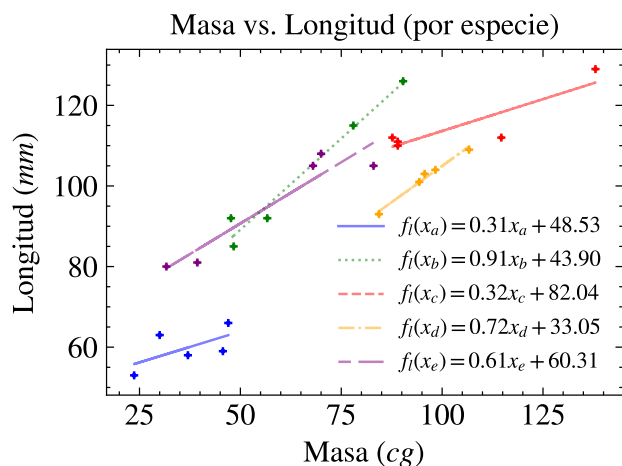


Fig. 4: Figura del área A_h en milímetros cuadrados (mm^2) de cada hoja h muestreada (véase [8]) en función de la masa m_h (véase [4]) en centigramos (cg). La representación de los datos exhibe la incerteza de sus mediciones. Se observa una relación lineal entre la masa y el área de acuerdo a la función $f_A(x) = 38.51x + 562.28$.



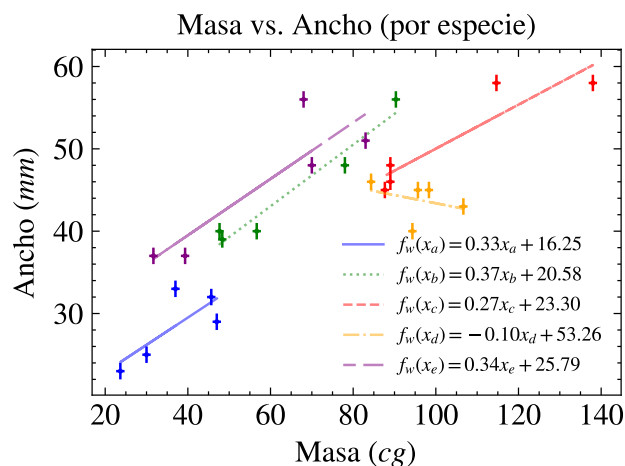
((a)) Figura de la longitud l_h en milímetros (mm) de cada hoja (separada por especie) h_e muestreada (véase [2.1]) en función de la masa m_h (véase [4]) en centigramos (cg). La representación de los datos exhibe la incerteza de sus mediciones. Se aplicaron regresiones lineales para cada especie.

Fig. 3: Regresión lineal de los datos clasificados según especies. Gráficos de la longitud y el ancho de las hojas con respecto a la masa de cada una de ellas.

5.2 Especie A: *Cotoneaster coriaceous*



Fig. 5: Hojas verdes de la especie *Cotoneaster coriaceous* (especie "A"). Los ejemplares evaluados en esta práctica experimental tienen en promedio largo $60 \pm 0.5mm$, ancho $28 \pm 0.5mm$ y área de $1337mm^2$ (aproximada por el área de la elipse de largo l y ancho w para cada hoja medida).



((b)) Figura del ancho w_h en milímetros (mm) de cada hoja (separada según especie) h_e muestreada (véase [2.1]) en función de la masa m_h (véase [4]) en centigramos (cg). La representación de los datos exhibe la incerteza de sus mediciones. Se aplicaron regresiones lineales para cada especie.

5.3 Especie B: *Ficus benjamina*



Fig. 6: Hojas verdes de la especie *Ficus benjamina* (especie "B"). Los ejemplares evaluados en esta práctica experimental tienen en promedio largo $102 \pm 0.5mm$, ancho $45 \pm 0.5mm$ y área de $3652mm^2$ (aproximada por el área de la elipse de largo l y ancho w para cada hoja medida).

5.4 Especie C: *Ligustrum lucidum*

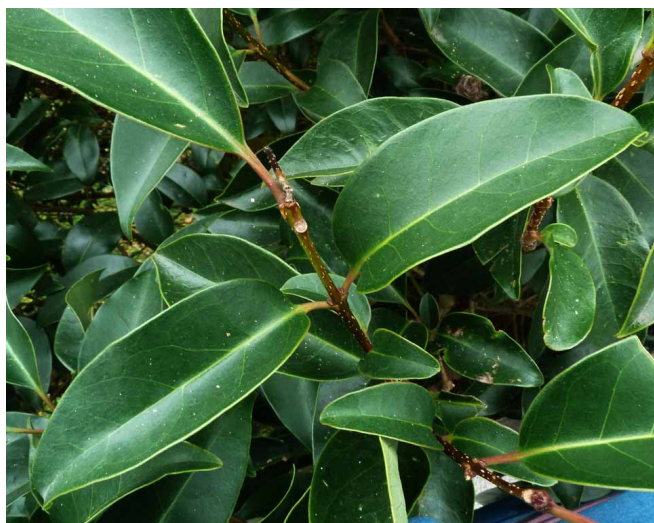


Fig. 7: Hojas verdes de la especie *Ligustrum lucidum* (especie "C"). Los ejemplares evaluados en esta práctica experimental tienen en promedio largo $115 \pm 0.5\text{mm}$, ancho $51 \pm 0.5\text{mm}$ y área de 4619mm^2 (aproximada por el área de la elipse de largo l y ancho w para cada hoja medida).

5.5 Especie D: *Pittosporum tobira*



Fig. 8: Hojas verdes de la especie *Pittosporum tobira* (especie "D"). Los ejemplares evaluados en esta práctica experimental tienen en promedio largo $102 \pm 0.5\text{mm}$, ancho $44 \pm 0.5\text{mm}$ y área de 3506mm^2 (aproximada por el área de la elipse de largo l y ancho w para cada hoja medida).

5.6 Especie E: *Cinnamomum camphora*



Fig. 9: Hojas verdes de la especie *Cinnamomum camphora* (especie "E"). Los ejemplares evaluados en esta práctica experimental tienen en promedio largo $96 \pm 0.5\text{mm}$, ancho $46 \pm 0.5\text{mm}$ y área de 3515mm^2 (aproximada por el área de la elipse de largo l y ancho w para cada hoja medida).

6 Referencias

- 1 P. Bevington and D.K. Robinson. *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences*. McGraw-Hill Education, 2003.