Курс "Практикум по математической статистике"

3 курс ФПМИ МФТИ, осень 2020

Домашнее задание 1. Свойства оценок

Дедлайн --- 5 октября 9:00

Это первое обязательное домашнее задание нашего курса. Мы предлагаем выполнять задания прямо в этом ноутбуке. Пожалуйста, не стирайте условия задач.

Информация о выполнении и курсе в целом есть в [этой папке (https://docs.google.com/document/d/1kd85QRAS8fbxRxpMzP2IsbQ_YcVsU-Aczqd6ErXgIDg/edit#)](https://docs.google.com/document/d/1kd85QRAS8fbxRxpMzP2IsbQ_YcVsU-Aczqd6ErXgIDg/edit#).

В этом и последующих заданиях вам потребуется выполнять генерацию случайных величин из некоторого распределения. Для этого вам понадобится библиотека scipy.stats. Мы настоятельно рекомендуем для генерации выборок использовать именно эту библиотеку.

Каждая задача оценивается в 10 баллов.

In [1]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.stats as sps
import seaborn as sns

sns.set(style='darkgrid')
%matplotlib inline
```

Зафиксируем `seed` для воспроизводимости.

In [2]:
```
np.random.seed(42)
```

Задача 1

Сгенерируйте выборку $X_1, \ldots, X_N$ из равномерного распределения на отрезке $[0, \theta]$ для $N = 10^4$.

In [3]:
```
N = 1e4  # use this

theta = 1
u_sample = sps.uniform.rvs(0, theta, size=int(N))
u_sample
```

Out[3]:
```
array([0.37454012, 0.95071431, 0.73199394, ..., 0.94670792, 0.39748799,
       0.2171404 ])
```

Для всех $n \leqslant N$ посчитайте оценки параметра θ из теоретической задачи: $2\overline{X},\ \overline{X} + X_{(n)}/2,\ (n+1)X_{(1)},\ X_{(1)} + X_{(n)},\ \frac{n+1}{n}X_{(n)}$. Используйте векторные операции.

Подсказка: Могут быть полезными функции `np.arange` , `np.cumsum` , `np.maximum.accumulate` и `np.minimum.accumulate`

In [4]:
```
class Estimate:

    def __init__(self, data, formula):
        self.data = data
        self.formula = formula


class Estimator:

    def __init__(self, estimator_function, formula):
        self._estimator_function = estimator_function
        self._formula = formula

    def __call__(self, sample):
        return Estimate(self._estimator_function(sample), self._formula)
```

In [5]:
```
def double_mean_estimator_func(sample):
    return 2 * (np.cumsum(sample) / np.arange(1, len(sample) + 1))
```

In [6]:
```
def mean_plus_half_max_estimator_func(sample):
    return (np.cumsum(sample) / np.arange(1, len(sample) + 1)) + (np.maximum.accumulate(sample) / 2)
```

In [7]:
```
def n_plus_1_min_estimator_func(sample):
    return (np.arange(1, len(sample) + 1) + 1) * np.minimum.accumulate(sample)
```

In [8]:
```
def min_plus_max_estimator_func(sample):
    return np.minimum.accumulate(sample) + np.maximum.accumulate(sample)
```

In [9]:
```
def n_plus_1_to_n_max_estimator_func(sample):
    return ((np.arange(1, len(sample) + 1) + 1) / np.arange(1, len(sample) + 1)) * np.maximum.accumulate(sample)
```

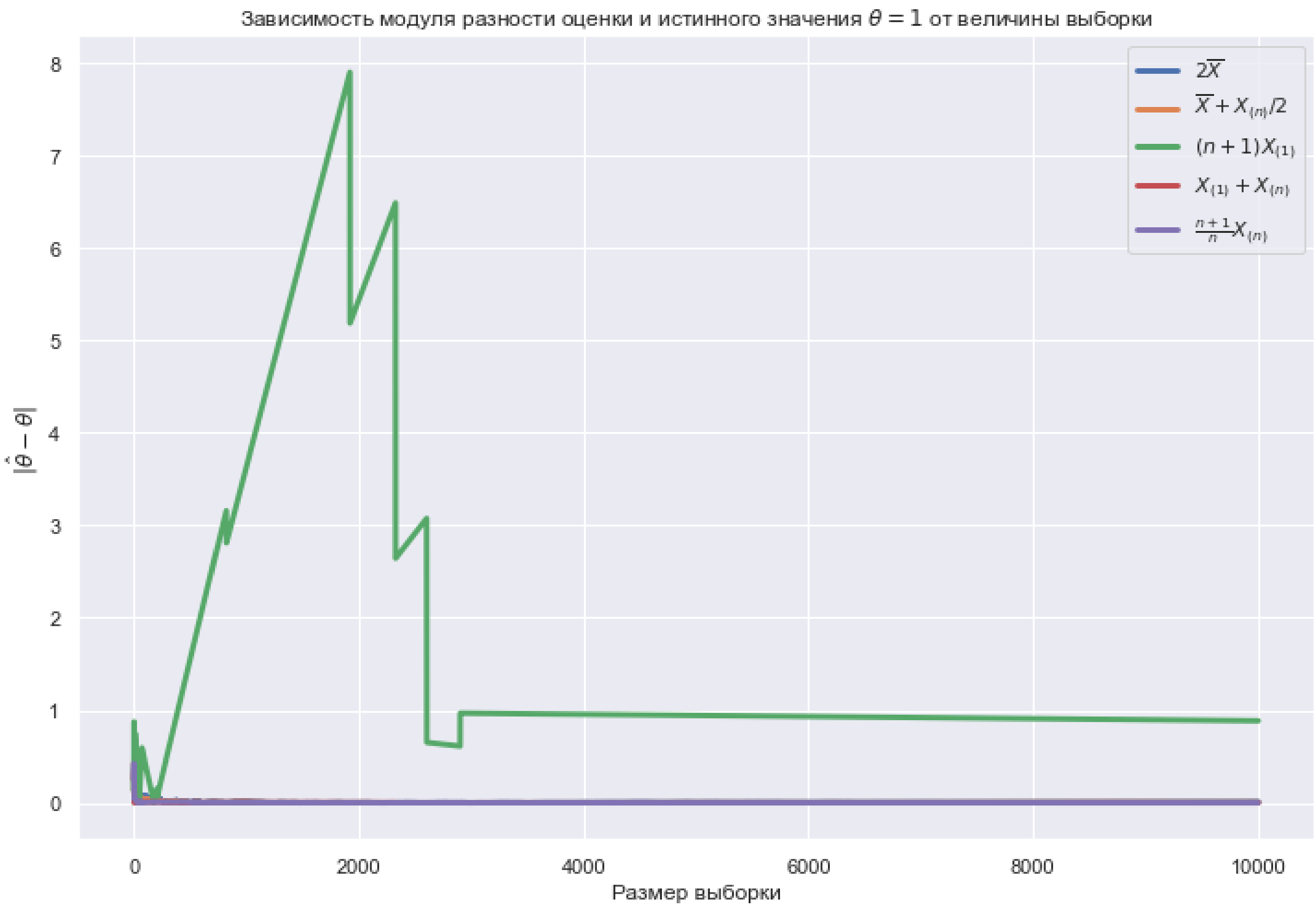
In [10]:
```
estimators = {
    'double_mean': Estimator(double_mean_estimator_func, r'$2\overline{X}$'),
    'mean_plus_half_max': Estimator(mean_plus_half_max_estimator_func, r'$\overline{X} + X_{(n)}/2$'),
    'n_plus_1_min': Estimator(n_plus_1_min_estimator_func, r'$(n+1)X_{(1)}$'),
    'min_plus_max': Estimator(min_plus_max_estimator_func, r'$X_{(1)}+X_{(n)}$'),
    'n_plus_1_to_n_max': Estimator(n_plus_1_to_n_max_estimator_func, r'$\frac{n+1}{n} X_{(n)}$')
}

estimates = {name: estimator(u_sample) for (name, estimator) in estimators.items()}

for name, estimate in estimates.items():
    print(estimate.data)
```

```
[0.74908024 1.32525443 1.37149891 ... 0.98839387 0.98837452 0.98831912]
[0.56181018 1.13798437 1.16110661 ... 0.99405577 0.9940461  0.99401839]
[0.74908024 1.12362036 1.49816048 ... 0.11633592 0.11634755 0.11635919]
[0.74908024 1.32525443 1.32525443 ... 0.99972931 0.99972931 0.99972931]
[0.74908024 1.42607146 1.26761908 ... 0.99981767 0.99981766 0.99981765]
```

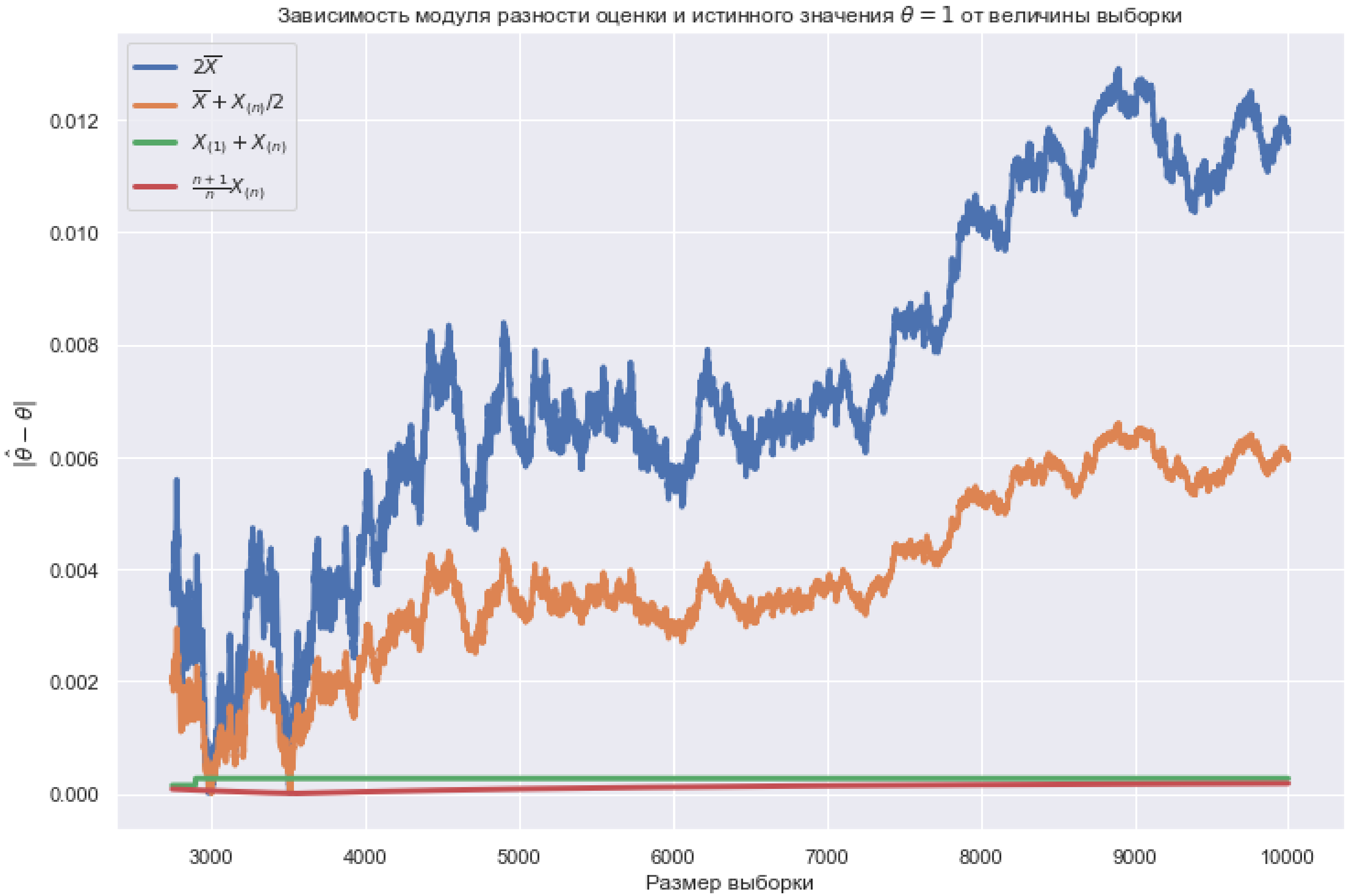
Постройте на одном графике разными цветами для всех оценок функции модуля разности оценки и истинного значения θ в зависимости от n. Если некоторые оценки (при фиксированном значении n) сильно отличаются от истинного значения параметра θ, то исключите их и постройте еще один график со всеми кривыми (для измененного значения θ). Для избавления от больших значений разности в начале ограничьте масштаб графика. Для наглядности точки можно соединить линиями.

Не забудьте подписать оси, а также добавить легенду к графику.

In [11]:
```
def plot_estimates(theta, start: int, estimates):
    plt.figure(figsize=(12, 8))
    plt.title(
        r'Зависимость модуля разности оценки и истинного значения $\theta={}$ от величины выборки'.format(theta)
    )
    plt.xlabel('Размер выборки')
    plt.ylabel(r'$|\hat\theta - \theta|$')
    for estimate in estimates.values():
        plt.plot(
            np.arange(start, N) + 1,
            np.absolute(estimate.data[start:] - np.repeat(theta, N - start)),
            lw=3,
            label=estimate.formula
        )
    plt.legend()

plot_estimates(theta, 0, estimates)
```


Зависимость модуля разности оценки и истинного значения $\theta = 1$ от величины выборки
$2\overline{X}$
$\overline{X} + X_{(n)}/2$
$(n+1)X_{(1)}$
$X_{(1)} + X_{(n)}$
$\frac{n+1}{n}X_{(n)}$
$|\hat{\theta} - \theta|$
0
1
2
3
4
5
6
7
8
0
2000
4000
6000
8000
10000
Размер выборки

In [12]:
```
estimates.pop('n_plus_1_min', None)
plot_estimates(theta, 2750, estimates)
```



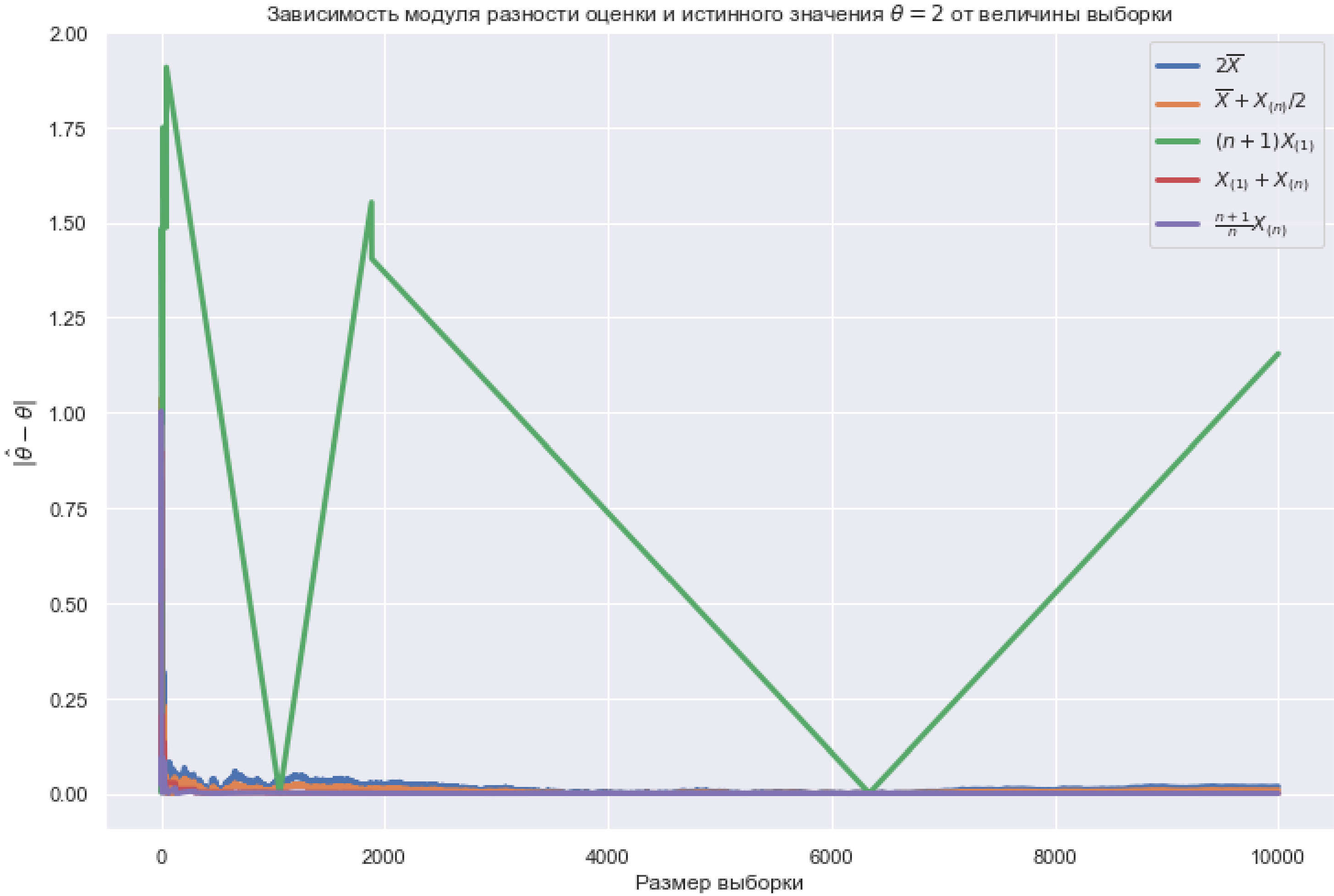
Какая оценка получилась лучше (в смысле упомянутого модуля разности при $n = N$)?

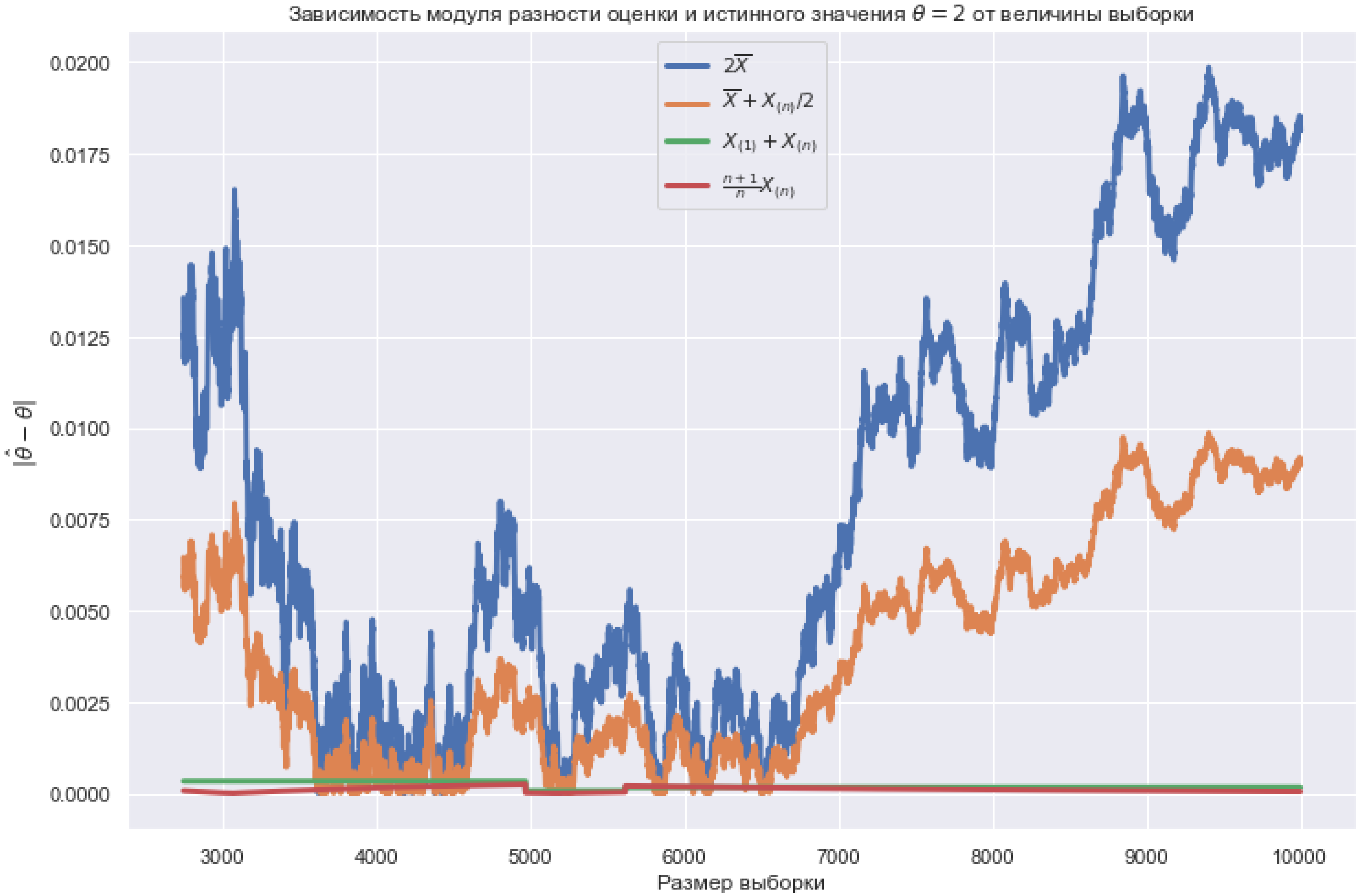
Ответ: Лучшей оценкой оказалась $\frac{n+1}{n}X_{(n)}$ (на графике красным), потому что на больших выборках она ближе всех к истинному значению θ (наименьший модуль разности).

Проведите эксперимент для разных значений θ (количество графиков равно количеству значений θ)

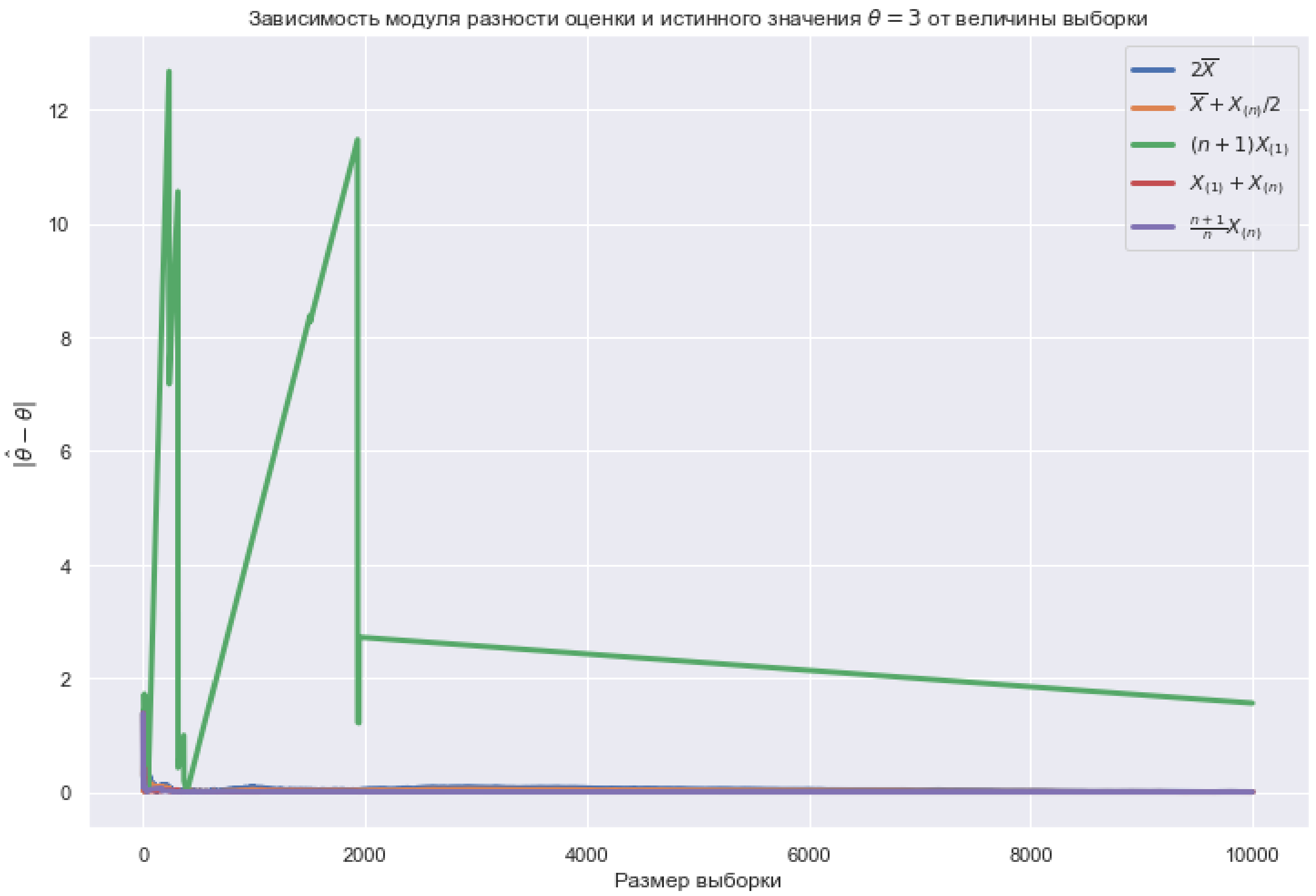
In [13]:
```
def conduct_experiment(theta):
    u_sample = sps.uniform.rvs(0, theta, size=int(N))
    estimates = {name: estimator(u_sample) for (name, estimator) in estimators.items()}
    plot_estimates(theta, 0, estimates)
    estimates.pop('n_plus_1_min', None)
    plot_estimates(theta, 2750, estimates)
```

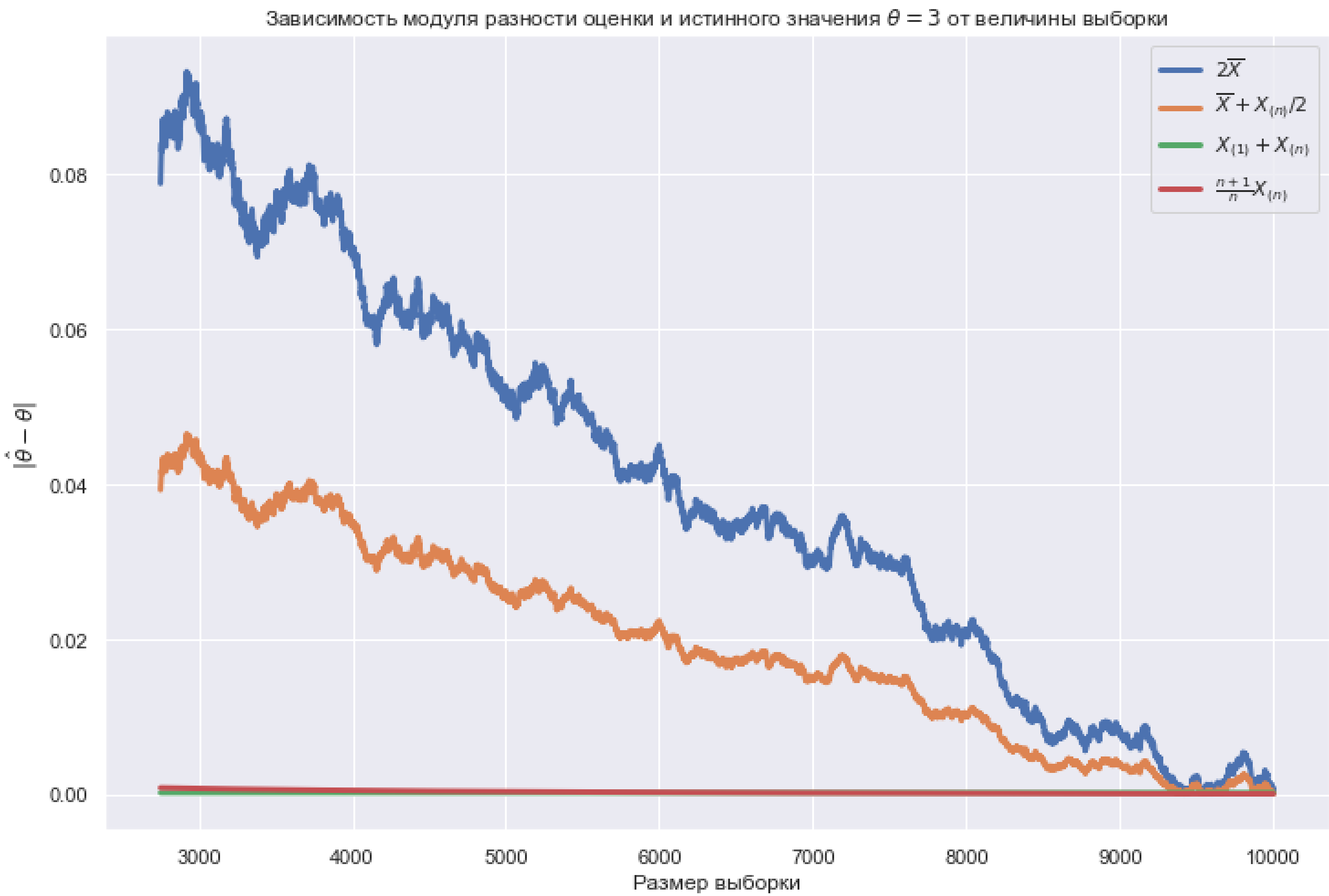
In [14]:
```
for theta in range(2, 6):
    conduct_experiment(theta)
```


Зависимость модуля разности оценки и истинного значения $\theta = 2$ от величины выборки
2.00
1.75
1.50
1.25
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
$|\hat{\theta} - \theta|$
0
2000
4000
6000
8000
10000
Размер выборки
$2\overline{X}$
$\overline{X} + X_{(n)}/2$
$(n+1)X_{(1)}$
$X_{(1)} + X_{(n)}$
$\frac{n+1}{n}X_{(n)}$

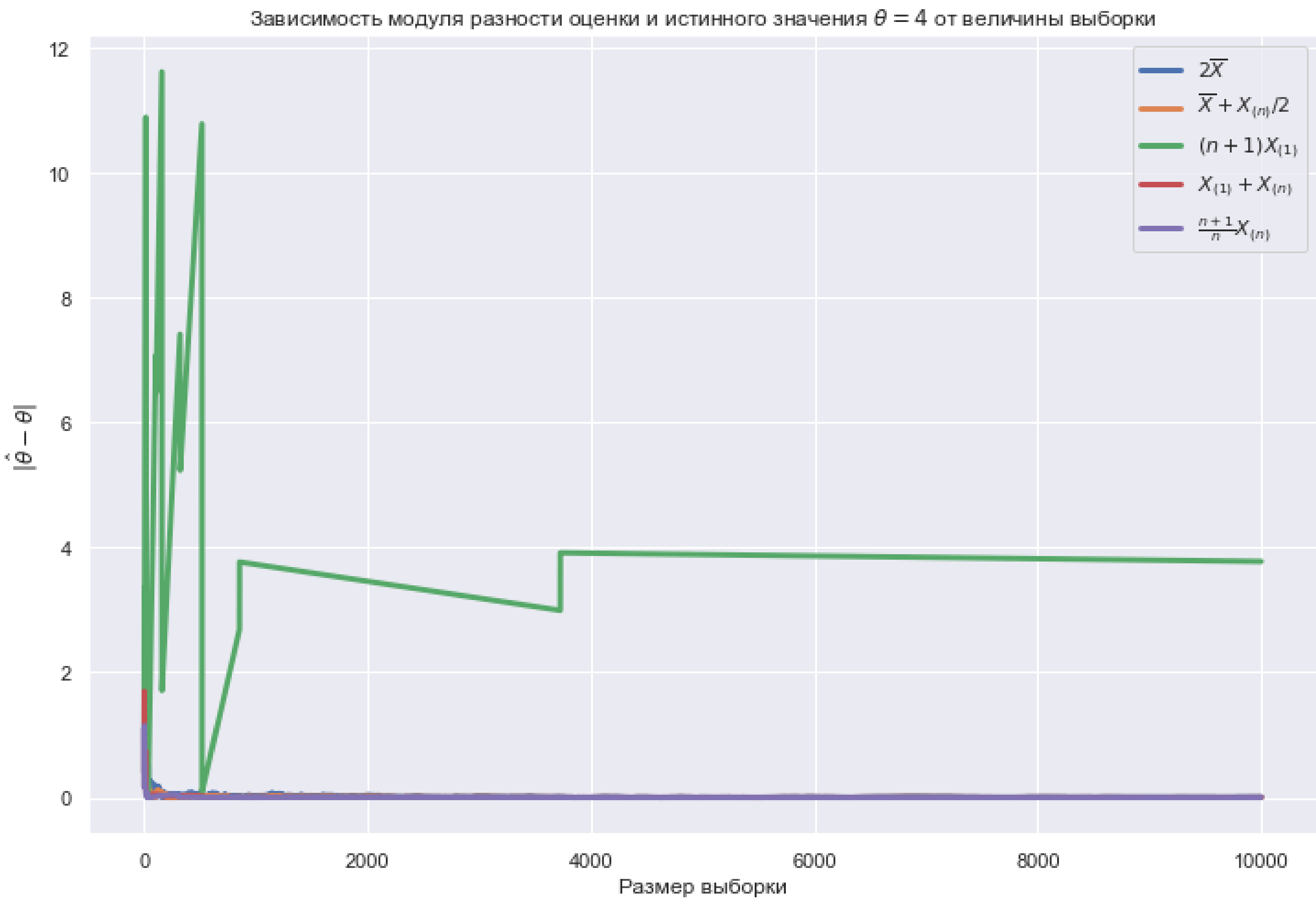


Зависимость модуля разности оценки и истинного значения $\theta = 2$ от величины выборки
$2\overline{X}$
$\overline{X} + X_{(n)}/2$
$X_{(1)} + X_{(n)}$
$\frac{n+1}{n}X_{(n)}$
$|\hat{\theta} - \theta|$
0.0200
0.0175
0.0150
0.0125
0.0100
0.0075
0.0050
0.0025
0.0000
3000
4000
5000
6000
7000
8000
9000
10000
Размер выборки

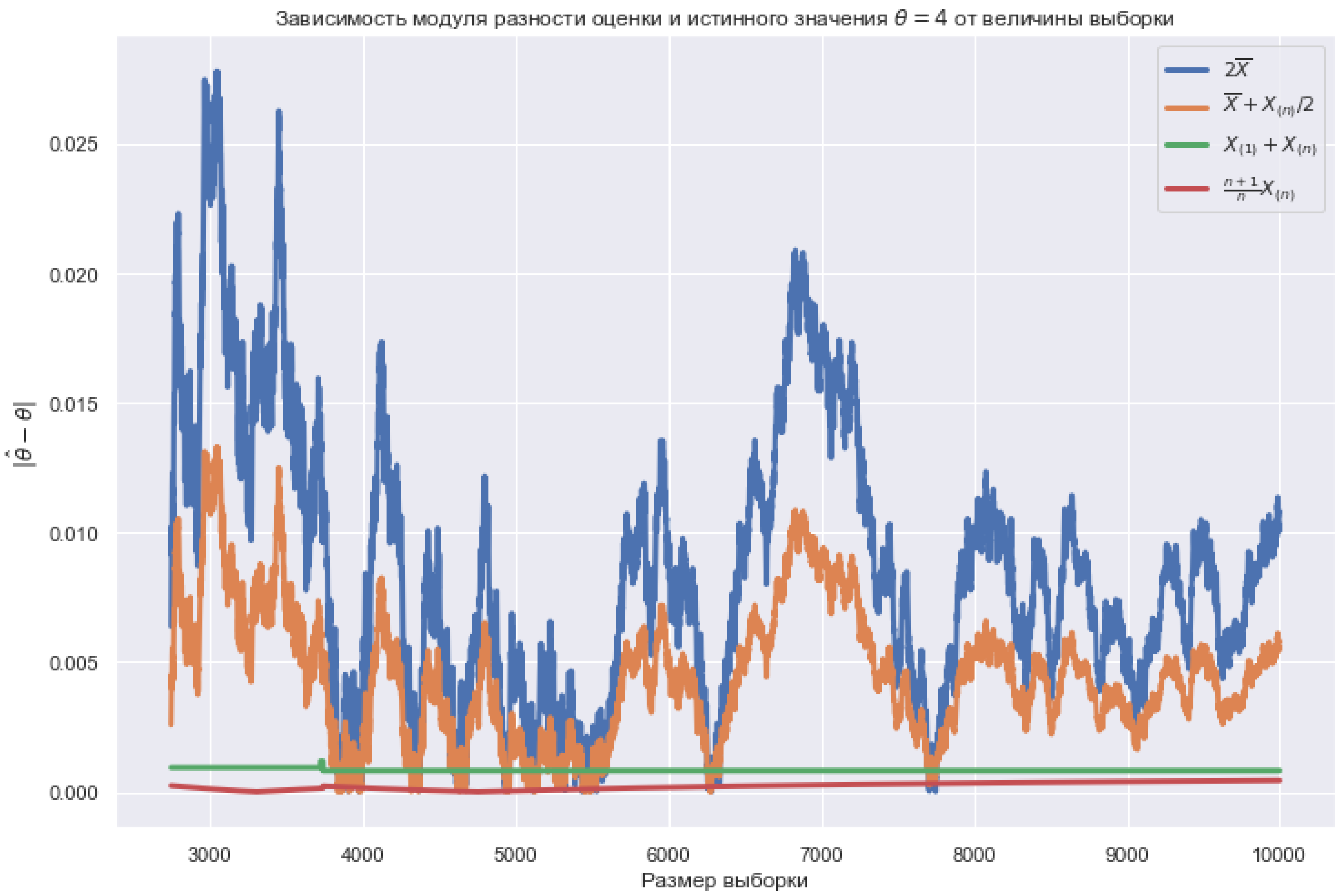

Зависимость модуля разности оценки и истинного значения $\theta = 3$ от величины выборки
$2\overline{X}$
$\overline{X} + X_{(n)}/2$
$(n+1)X_{(1)}$
$X_{(1)} + X_{(n)}$
$\frac{n+1}{n}X_{(n)}$
$|\hat{\theta} - \theta|$
0
2
4
6
8
10
12
0
2000
4000
6000
8000
10000
Размер выборки

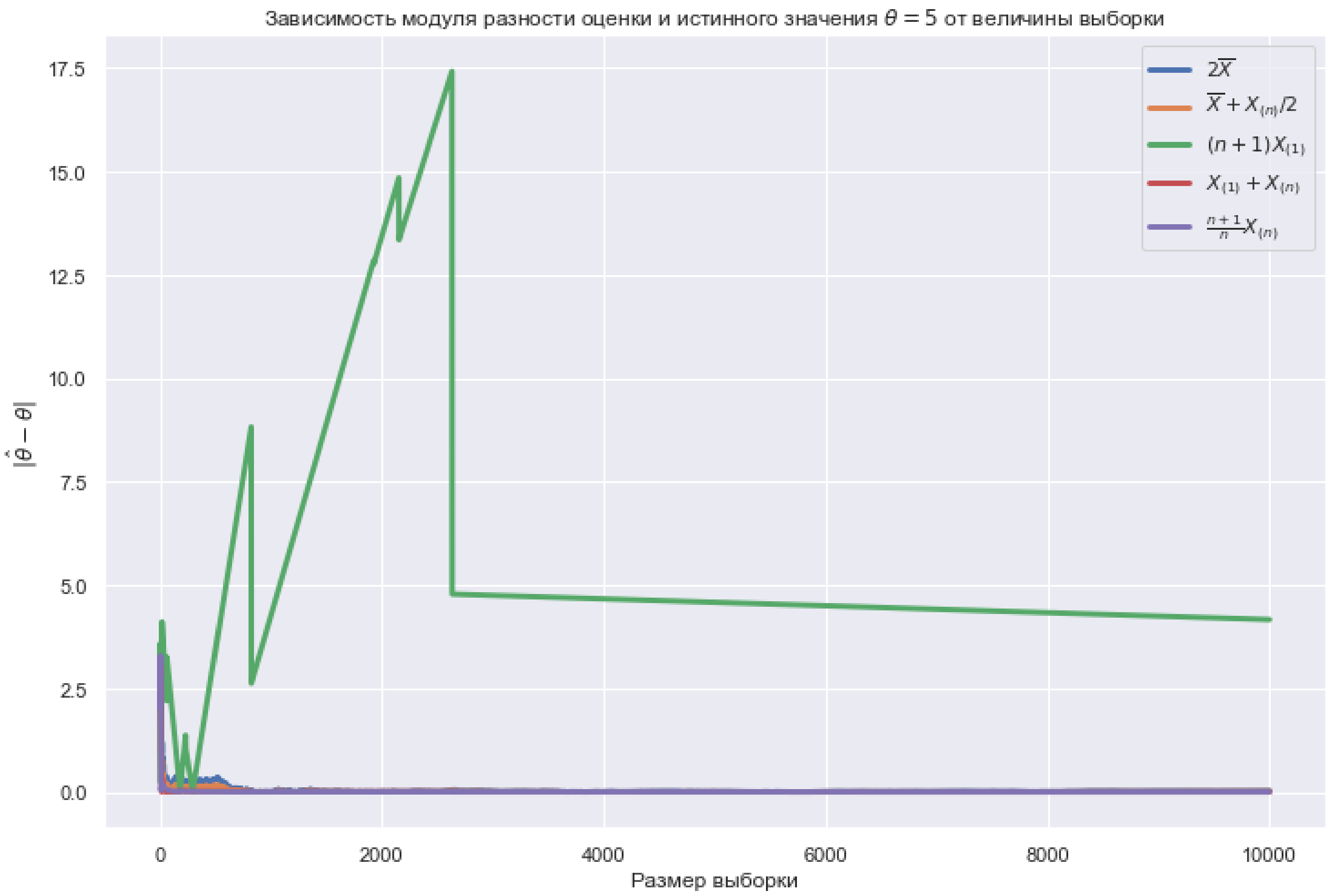


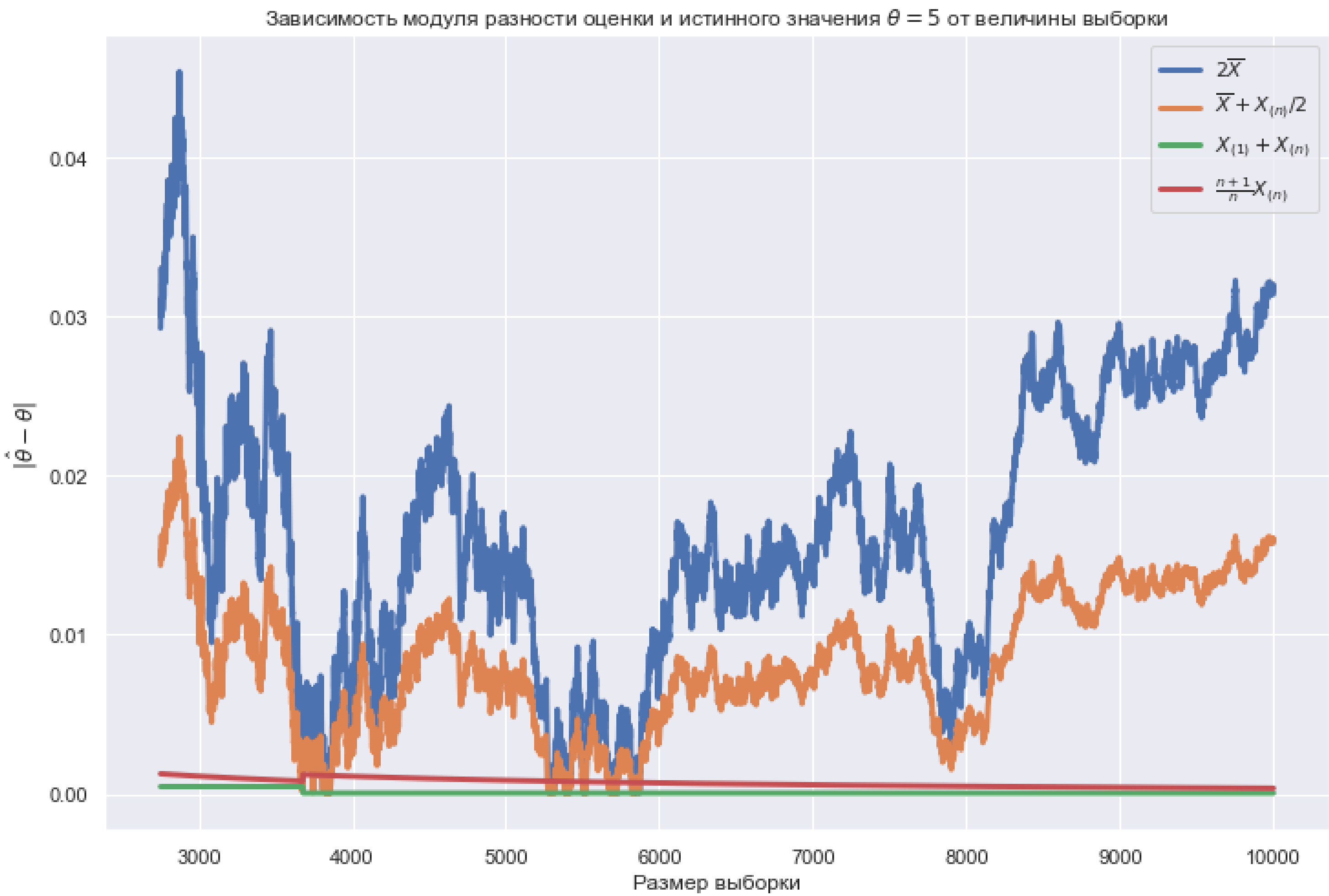
Зависимость модуля разности оценки и истинного значения $\theta = 3$ от величины выборки
$2\overline{X}$
$\overline{X} + X_{(n)}/2$
$X_{(1)} + X_{(n)}$
$\frac{n+1}{n}X_{(n)}$
0.08
0.06
0.04
0.02
0.00
$|\hat{\theta} - \theta|$
3000
4000
5000
6000
7000
8000
9000
10000
Размер выборки



Зависимость модуля разности оценки и истинного значения $\theta = 4$ от величины выборки
$2\overline{X}$
$\overline{X} + X_{(n)}/2$
$(n+1)X_{(1)}$
$X_{(1)} + X_{(n)}$
$\frac{n+1}{n}X_{(n)}$
$|\hat{\theta} - \theta|$
0
2
4
6
8
10
12
0
2000
4000
6000
8000
10000
Размер выборки


Зависимость модуля разности оценки и истинного значения $\theta = 4$ от величины выборки
$2\overline{X}$
$\overline{X} + X_{(n)}/2$
$X_{(1)} + X_{(n)}$
$\frac{n+1}{n}X_{(n)}$
$|\hat{\theta} - \theta|$
0.000
0.005
0.010
0.015
0.020
0.025
3000
4000
5000
6000
7000
8000
9000
10000
Размер выборки


Зависимость модуля разности оценки и истинного значения $\theta = 5$ от величины выборки
$2\overline{X}$
$\overline{X} + X_{(n)}/2$
$(n+1)X_{(1)}$
$X_{(1)} + X_{(n)}$
$\frac{n+1}{n}X_{(n)}$
$|\hat{\theta} - \theta|$
Размер выборки
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
15.0
17.5
0
2000
4000
6000
8000
10000



Сделайте вывод.

Вывод: Все хорошие оценки (те, которые слабо отклоняются от истинного значения θ) -- состоятельные. Самой худшей оказалась единственная несостоятельная оценка $(n+1)X_{(1)}$. Самыми лучшими оказались оценки $X_{(1)} + X_{(n)}$ и $\frac{n+1}{n}X_{(n)}$.

Задача 2

Сгенерируйте выборку $X_1, \dots, X_N$ из экспоненциального распределения с параметром $\theta = 1$ для $N = 10^4$.

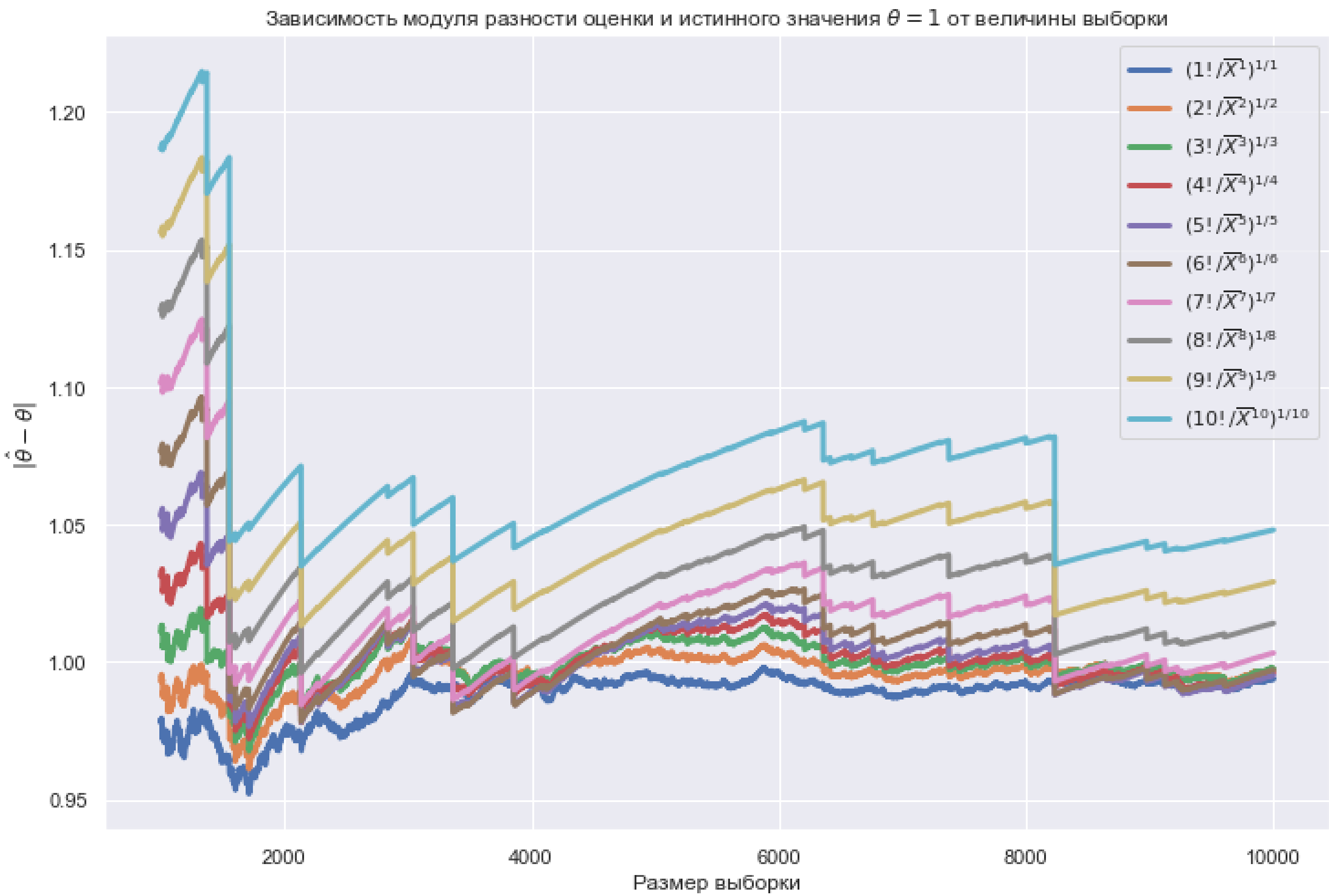
In [15]:
```
N = 10000
exp_sample = sps.expon.rvs(scale=1, size=10000)
exp_sample
```

Out[15]:
```
array([1.87886481, 0.68224096, 0.21749157, ..., 0.36337572, 0.52317241,
       0.73988957])
```

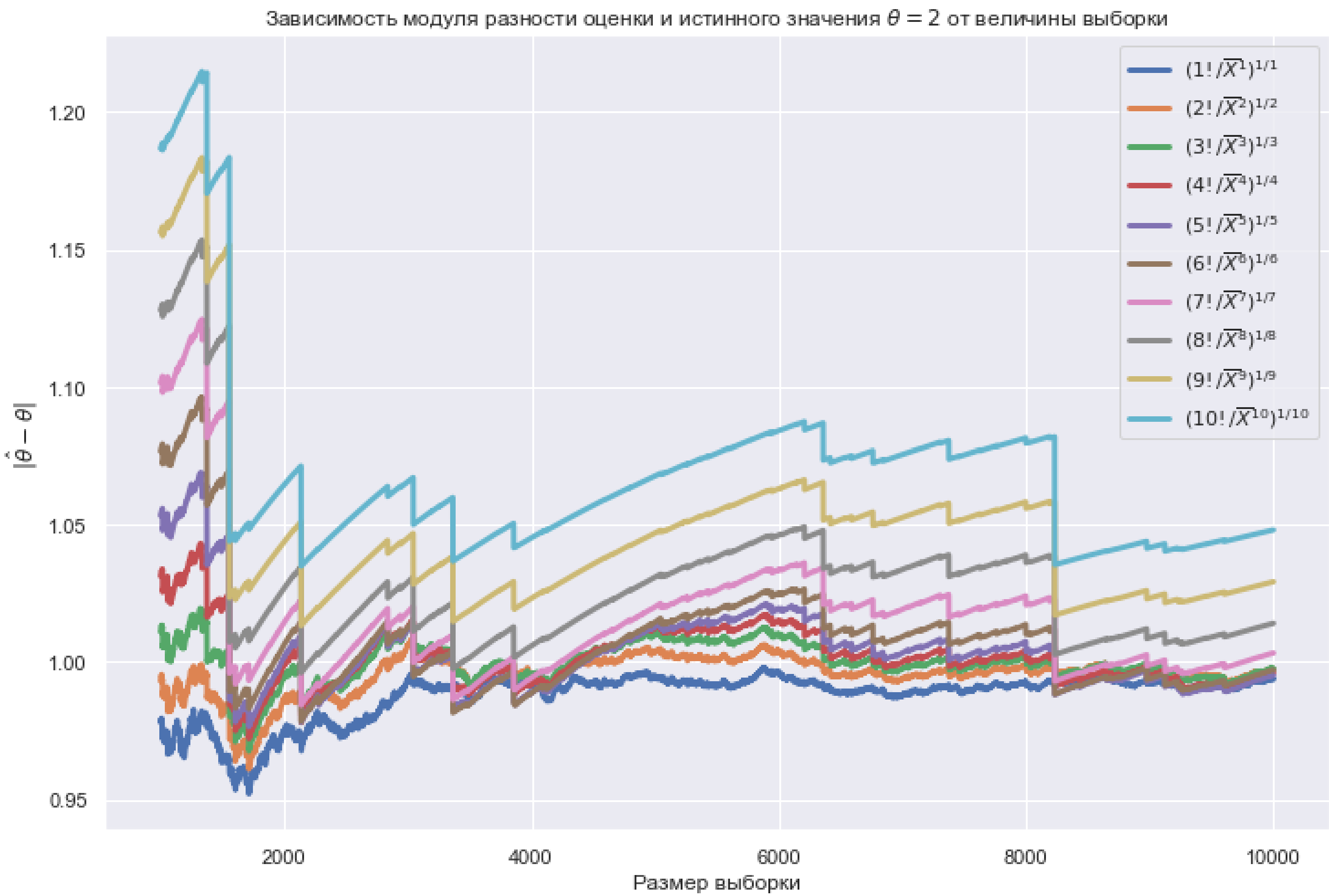
Для всех $n \leqslant N$ посчитайте оценку $(k!/\overline{X^k})^{1/k}$ параметра θ. Проведите исследование, аналогичное предыдущей задаче, и выясните, при каком k оценка ведет себя лучше (рассмотрите не менее 10 различных значений k).

In [16]:
```
def exp_estimator_func(sample, k):
    return (
        np.repeat(np.math.factorial(k), len(sample)) /
        (np.cumsum(sample ** k) / np.arange(1, len(sample) + 1))
    ) ** (1 / k)
```

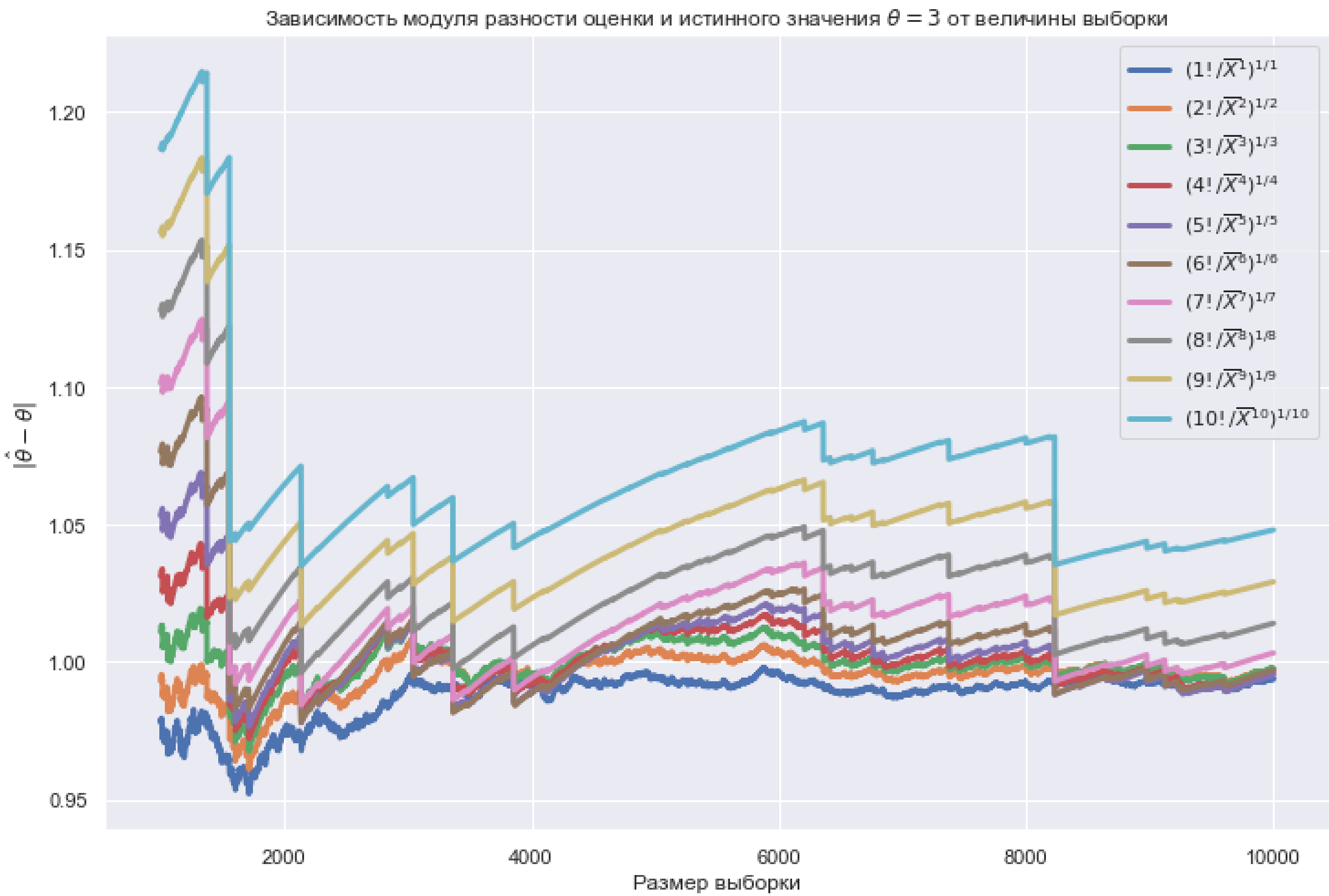
In [17]:
```
def plot_estimates(theta, start: int, estimates):
    plt.figure(figsize=(12, 8))
    plt.title(
        r'Зависимость модуля разности оценки и истинного значения $\theta={}$ от величины выборки'.format(theta)
    )
    plt.xlabel('Размер выборки')
    plt.ylabel(r'$|\hat\theta - \theta|$')
    for k, estimate in estimates.items():
        plt.plot(
            np.arange(start, N) + 1,
            np.absolute(estimate[start:]),
#             np.absolute(estimate[start:] - np.repeat(theta, N - start)),
            lw=3,
            label='$(%s! / \overline{X}^{%s})^{1/%s}$' % (k, k, k)
        )
    plt.legend()

def conduct_experiment(sample, theta):
    estimates = {str(k): exp_estimator_func(sample, k) for k in range(1, 11)}
    plot_estimates(theta, 1000, estimates)

for theta in range(1, 6):
    conduct_experiment(exp_sample, theta)
```



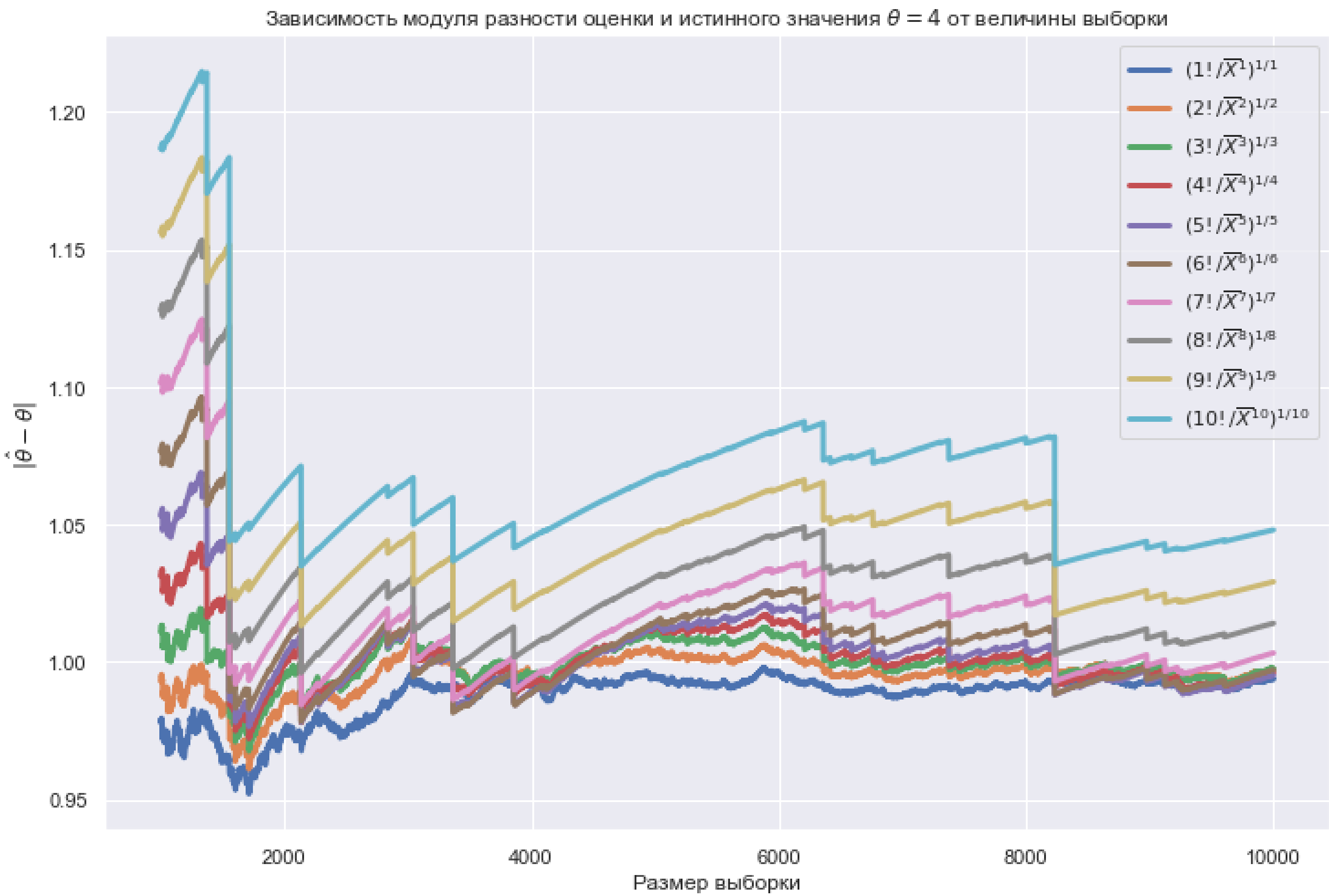
Зависимость модуля разности оценки и истинного значения $\theta = 1$ от величины выборки
$|\hat{\theta} - \theta|$
Размер выборки
$(1!/\overline{X}^1)^{1/1}$
$(2!/\overline{X}^2)^{1/2}$
$(3!/\overline{X}^3)^{1/3}$
$(4!/\overline{X}^4)^{1/4}$
$(5!/\overline{X}^5)^{1/5}$
$(6!/\overline{X}^6)^{1/6}$
$(7!/\overline{X}^7)^{1/7}$
$(8!/\overline{X}^8)^{1/8}$
$(9!/\overline{X}^9)^{1/9}$
$(10!/\overline{X}^{10})^{1/10}$
1.20
1.15
1.10
1.05
1.00
0.95
2000
4000
6000
8000
10000



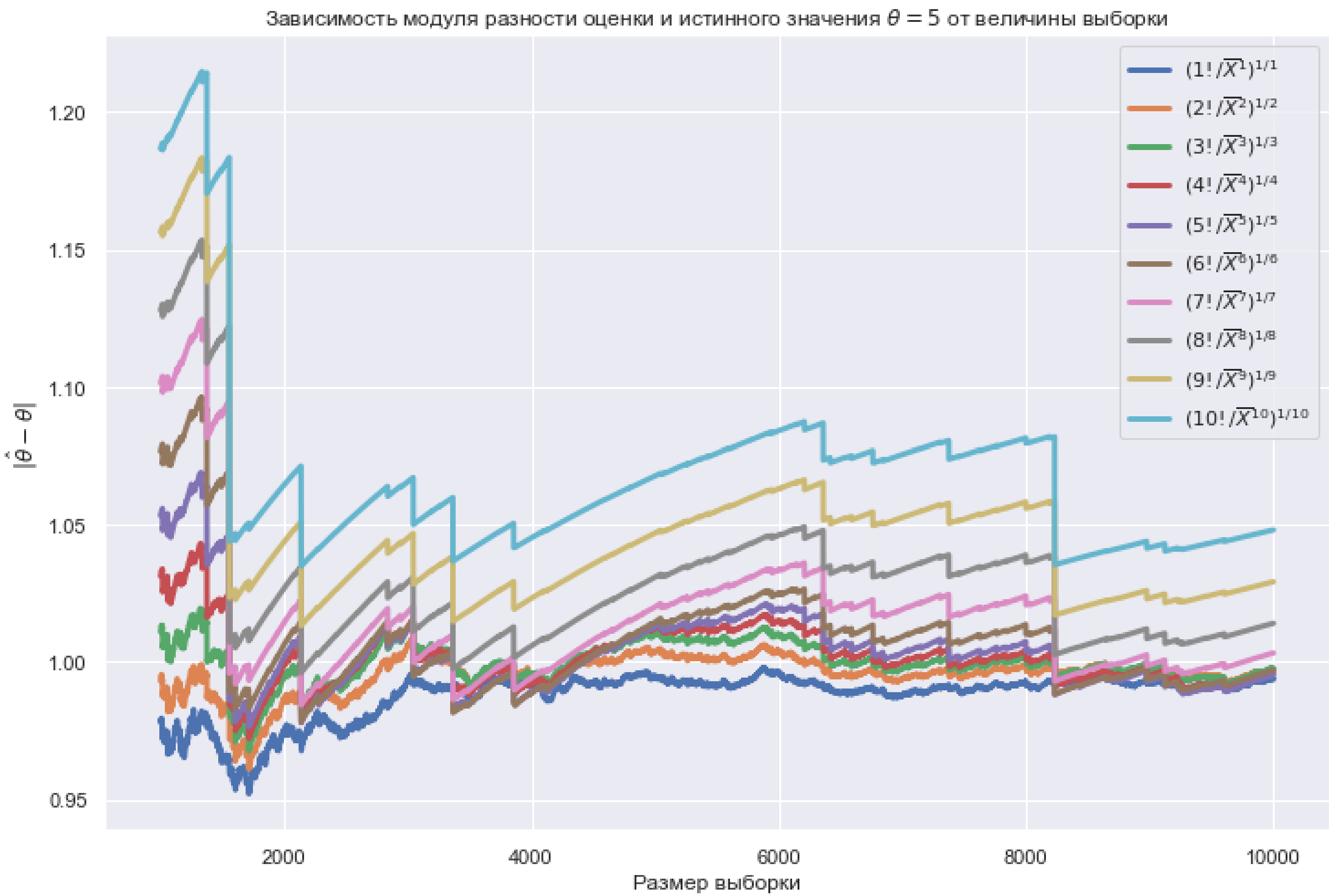
Зависимость модуля разности оценки и истинного значения $\theta = 2$ от величины выборки
$|\hat{\theta} - \theta|$
Размер выборки
1.20
1.15
1.10
1.05
1.00
0.95
2000
4000
6000
8000
10000
$(1!/\overline{X^1})^{1/1}$
$(2!/\overline{X^2})^{1/2}$
$(3!/\overline{X^3})^{1/3}$
$(4!/\overline{X^4})^{1/4}$
$(5!/\overline{X^5})^{1/5}$
$(6!/\overline{X^6})^{1/6}$
$(7!/\overline{X^7})^{1/7}$
$(8!/\overline{X^8})^{1/8}$
$(9!/\overline{X^9})^{1/9}$
$(10!/\overline{X^{10}})^{1/10}$



Зависимость модуля разности оценки и истинного значения $\theta = 3$ от величины выборки
$|\hat{\theta} - \theta|$
Размер выборки
$(1!/\overline{X^1})^{1/1}$
$(2!/\overline{X^2})^{1/2}$
$(3!/\overline{X^3})^{1/3}$
$(4!/\overline{X^4})^{1/4}$
$(5!/\overline{X^5})^{1/5}$
$(6!/\overline{X^6})^{1/6}$
$(7!/\overline{X^7})^{1/7}$
$(8!/\overline{X^8})^{1/8}$
$(9!/\overline{X^9})^{1/9}$
$(10!/\overline{X^{10}})^{1/10}$
1.20
1.15
1.10
1.05
1.00
0.95
2000
4000
6000
8000
10000



Зависимость модуля разности оценки и истинного значения $\theta = 4$ от величины выборки
$|\hat{\theta} - \theta|$
Размер выборки
1.20
1.15
1.10
1.05
1.00
0.95
2000
4000
6000
8000
10000
$(1!/\overline{X^1})^{1/1}$
$(2!/\overline{X^2})^{1/2}$
$(3!/\overline{X^3})^{1/3}$
$(4!/\overline{X^4})^{1/4}$
$(5!/\overline{X^5})^{1/5}$
$(6!/\overline{X^6})^{1/6}$
$(7!/\overline{X^7})^{1/7}$
$(8!/\overline{X^8})^{1/8}$
$(9!/\overline{X^9})^{1/9}$
$(10!/\overline{X^{10}})^{1/10}$



Сделайте вывод.

Вывод: чем меньше взять значение k в оценке $(k!/\overline{X^k})^{1/k}$, тем она будет лучше.

Задача 3

Придумайте распределение, у которого конечны первые четыре момента, а пятый - нет. Сгенерируйте выборку $X_1, \ldots, X_N$ из этого распределения для $N = 10^4$.

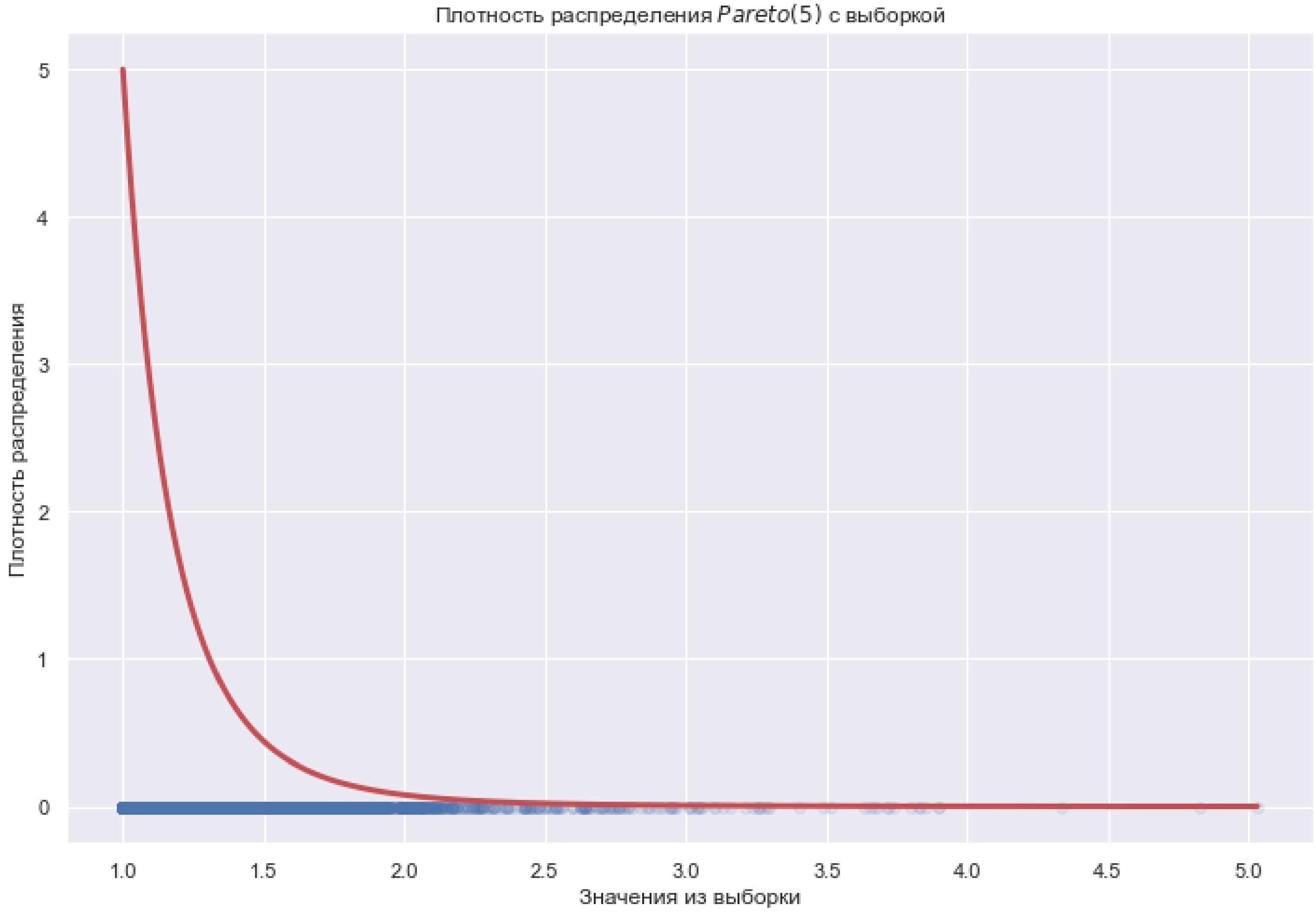
In [18]:
```
N = 10 ** 4

pareto5_dist = sps.pareto(b=5)
pareto5_sample = pareto5_dist.rvs(size=N)
```

Постройте график плотности, а также нанесите точки выборки на график (с нулевой y-координатой)

Подсказка: Может быть полезен параметр `alpha` в функции `plt.plot`

In [19]:
```
def plot_dist_with_sample(dist, sample, num, dist_name):
    grid = np.linspace(np.min(sample), np.max(sample), num)
    plt.figure(figsize=(12, 8))
    plt.title(r'Плотность распределения {} с выборкой'.format(dist_name))
    plt.xlabel('Значения из выборки')
    plt.ylabel('Плотность распределения')
    plt.scatter(
        sample,
        np.repeat(0, len(sample)),
        marker='o',
        alpha=0.1
    )
    plt.plot(
        grid,
        dist.pdf(grid),
        color='r',
        lw=3
    )
```

In [20]:
```
plot_dist_with_sample(pareto5_dist, pareto5_sample, 1000, '$Pareto(5)$')
```



Для всех $n \leq N$ посчитайте оценку $s^2 = s^2(X_1, \ldots, X_N)$ для дисперсии.

In [21]:
```
def calc_sample_var(sample):
    return (np.cumsum(sample ** 2)) / (np.arange(len(sample)) + 1) - \
           ((np.cumsum(sample) / (np.arange(len(sample)) + 1)) ** 2)
```

In [22]:
```
pareto5_sample_var = calc_sample_var(pareto5_sample)
pareto5_sample_var
```

Out[22]:
```
array([0.        , 0.01212137, 0.02656124, ..., 0.09302429, 0.09301906,
       0.09301488])
```

Постройте график зависимости модуля разности оценки дисперсии и ее истинного значения от n.

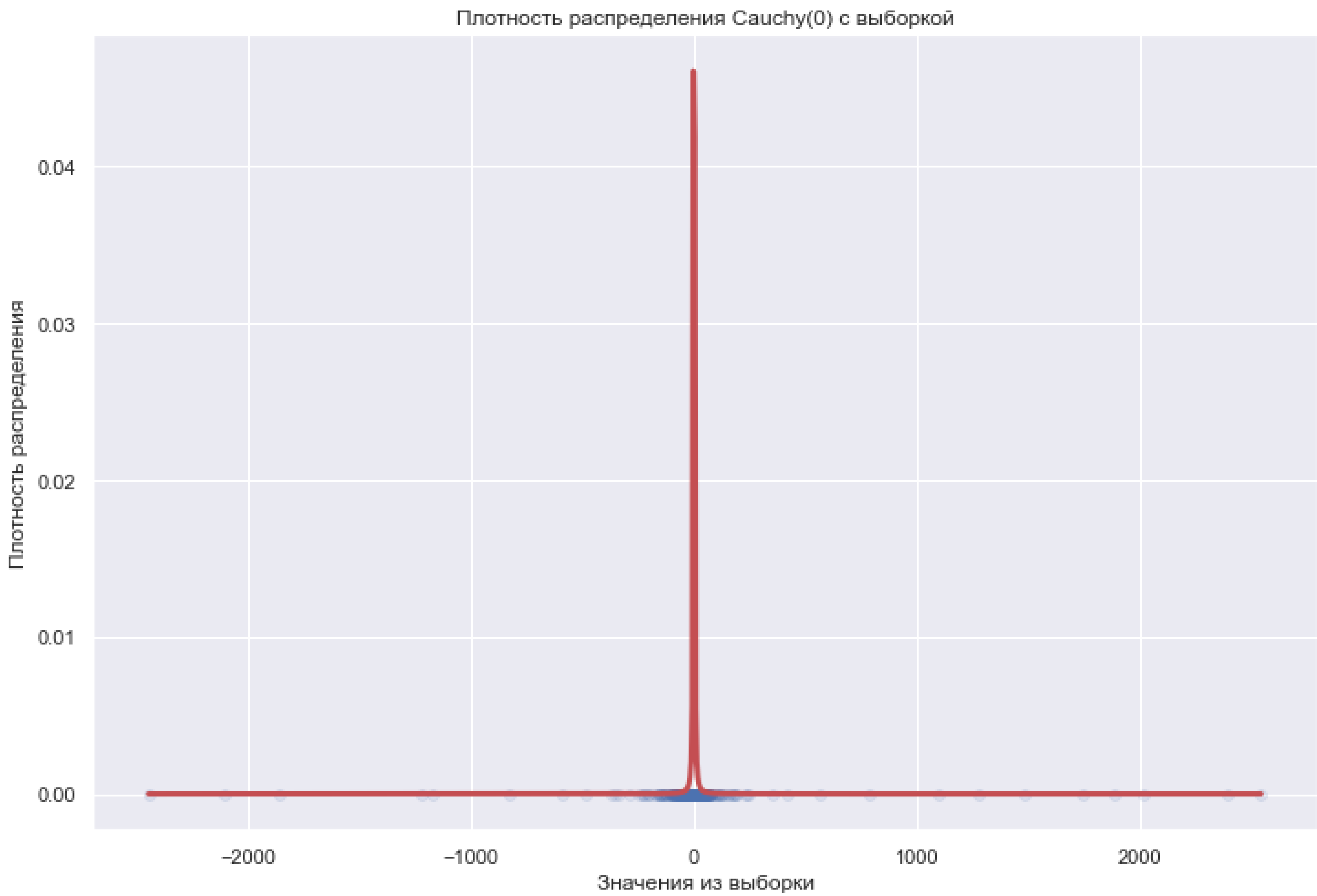
In [23]:
```
plt.figure(figsize=(12, 8))
plt.plot(
    np.arange(N),
    np.abs(pareto5_sample_var - np.repeat(pareto5_dist.var(), N)),
    lw=3,
    label=r'$|s^2(X_1,\dots,X_n)-\mathbb{D}X|$'
)
plt.title('Отклонение оценки дисперсии распределения $Pareto(5)$ от её настоящего значения')
plt.xlabel('Размер выборки')
plt.ylabel('Величина отклонения')
plt.legend()
```

Out[23]: <matplotlib.legend.Legend at 0x1fe4a9c2888>

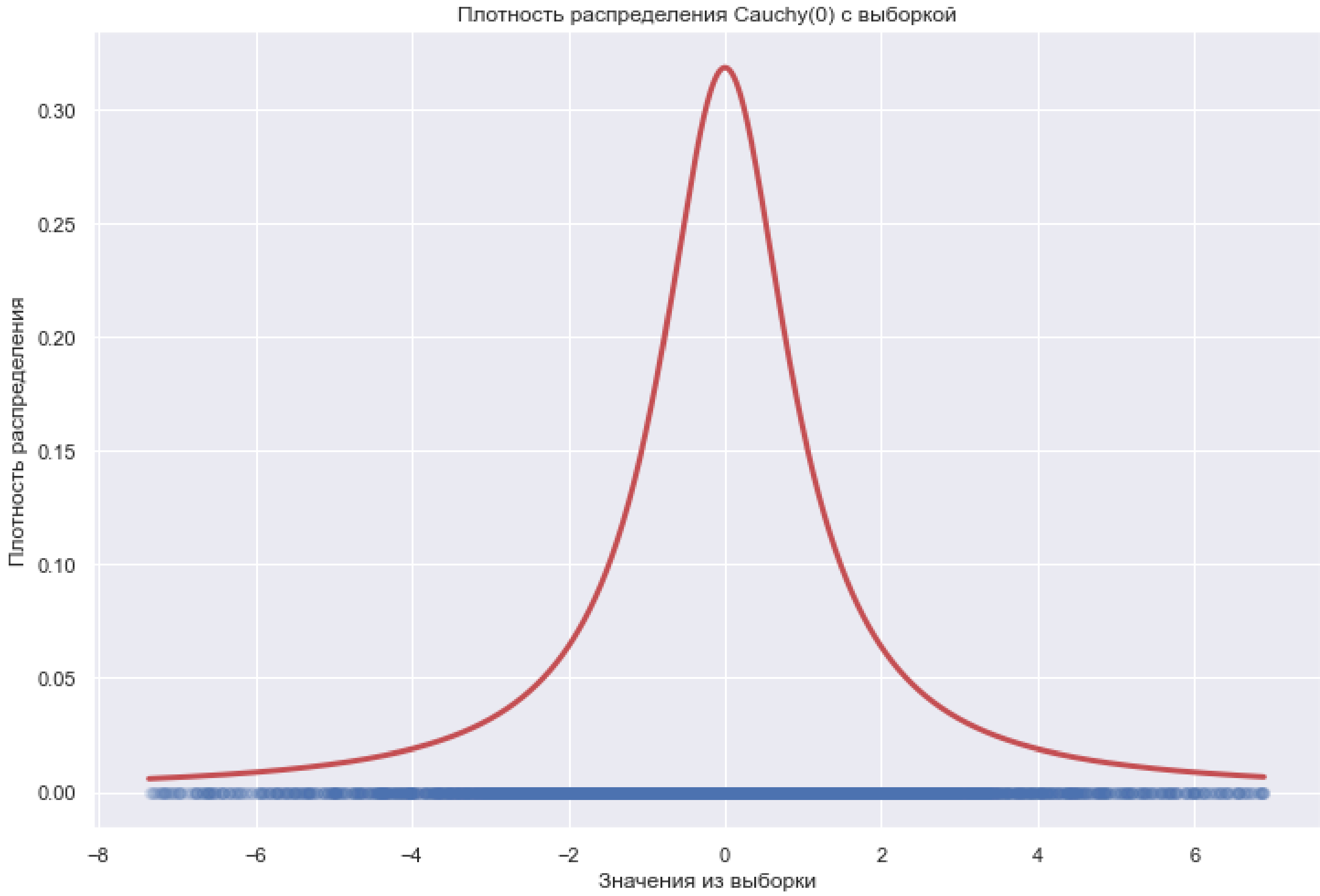
Проведите аналогичное исследование для выборки из распределения Коши, где вместо графика модуля разности оценки дисперсии и ее истинного значения (которого не существует) постройте график оценки дисперсии.

In [24]:
```
cauchy0_dist = sps.cauchy(0)
cauchy0_sample = cauchy0_dist.rvs(N)
```

In [25]:
```
plot_dist_with_sample(
    cauchy0_dist,
    cauchy0_sample,
    1000,
    'Cauchy(0)'
)
```



In [26]:
```
plot_dist_with_sample(
    cauchy0_dist,
    sps.trimboth(cauchy0_sample, 0.04),
    1000,
    'Cauchy(0)'
)
```

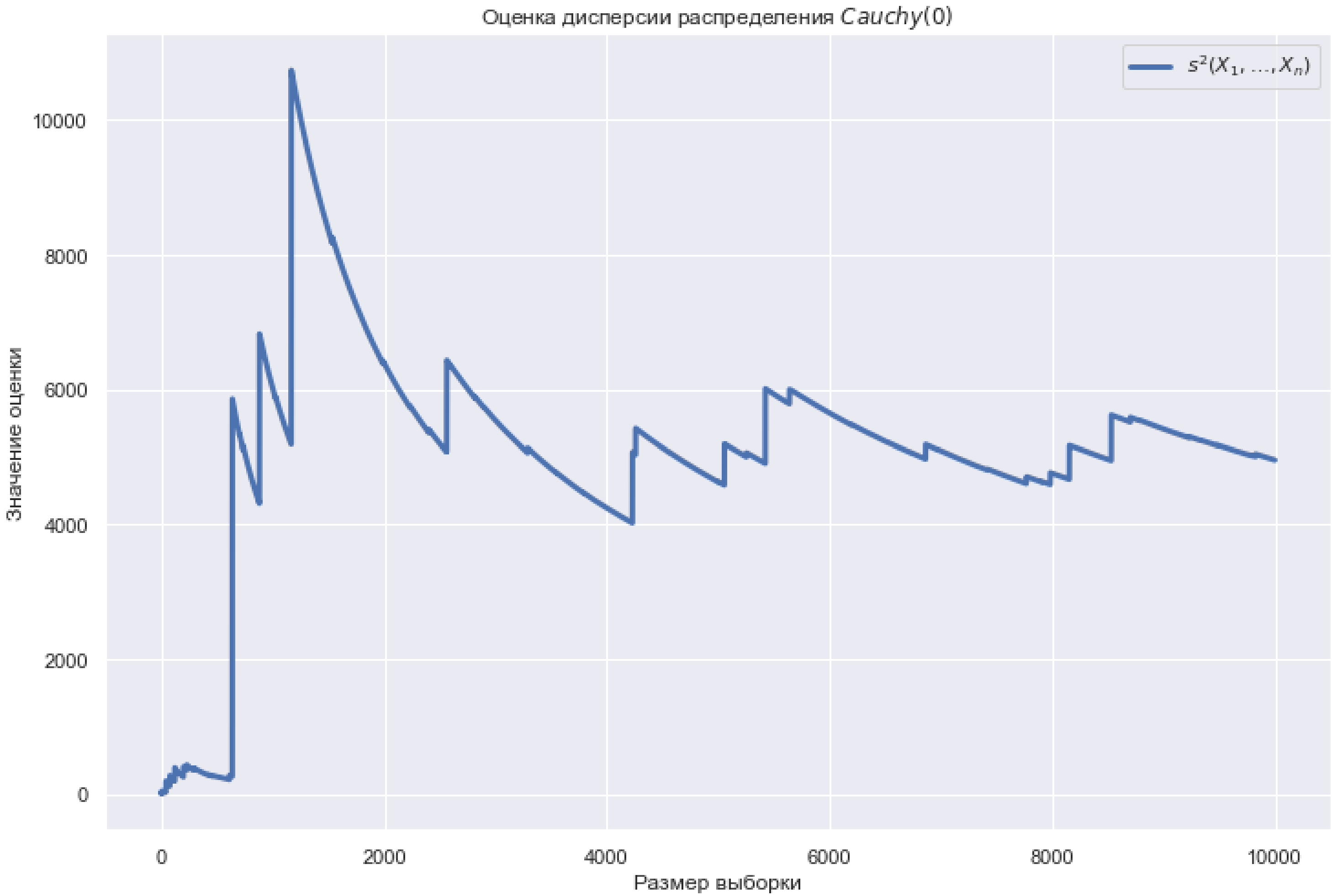


In [27]:
```
cauchy0_sample_var = calc_sample_var(cauchy0_sample)
cauchy0_sample_var
```

Out[27]:
```
array([   0.        ,   20.654995  ,   14.54500591, ..., 4954.44216664,
       4953.94734632, 4953.45520781])
```

In [28]:
```
plt.figure(figsize=(12, 8))
plt.plot(
    np.arange(N),
    cauchy0_sample_var,
    lw=3,
    label=r'$s^2(X_1, \dots, X_n)$'
)
plt.title(r'Оценка дисперсии распределения $Cauchy(0)$')
plt.xlabel('Размер выборки')
plt.ylabel('Значение оценки')
plt.legend()
```

Out[28]: <matplotlib.legend.Legend at 0x1fe4c1e1948>



Задача 4

Сгенерируйте выборку $X_1, \ldots, X_N$ из стандартного нормального распределения для $N = 10^4$.

In [29]:
```
N = 10 ** 4
std_norm_sample = sps.norm.rvs(size=int(N))
std_norm_sample
```

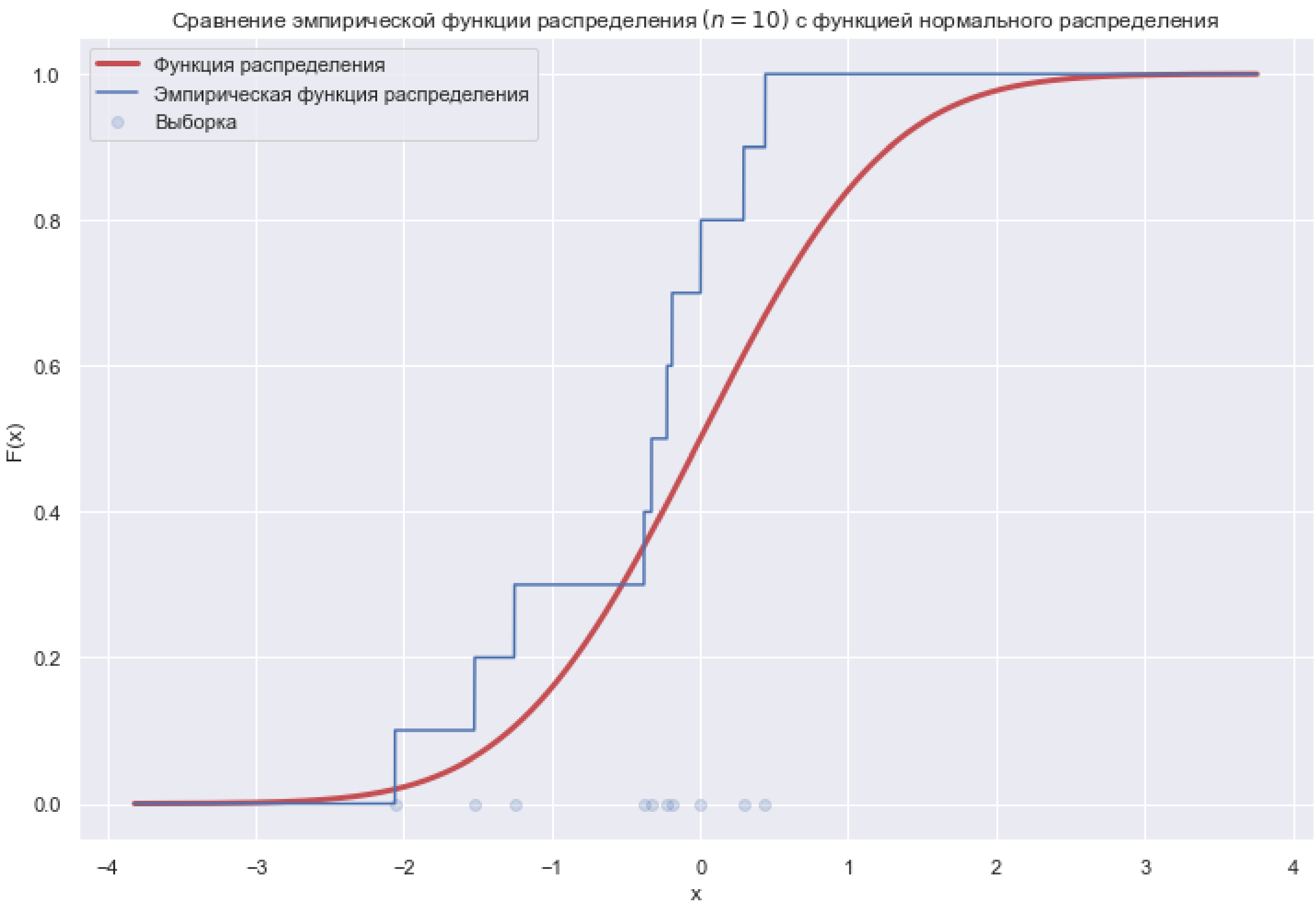
Out[29]:
```
array([-0.32659693,  0.29293114, -0.22462296, ...,  0.74438819,
        1.19356535,  0.38408355])
```

Для всех $n \leqslant N$ посчитайте по ней эмпирическую функцию распределения.

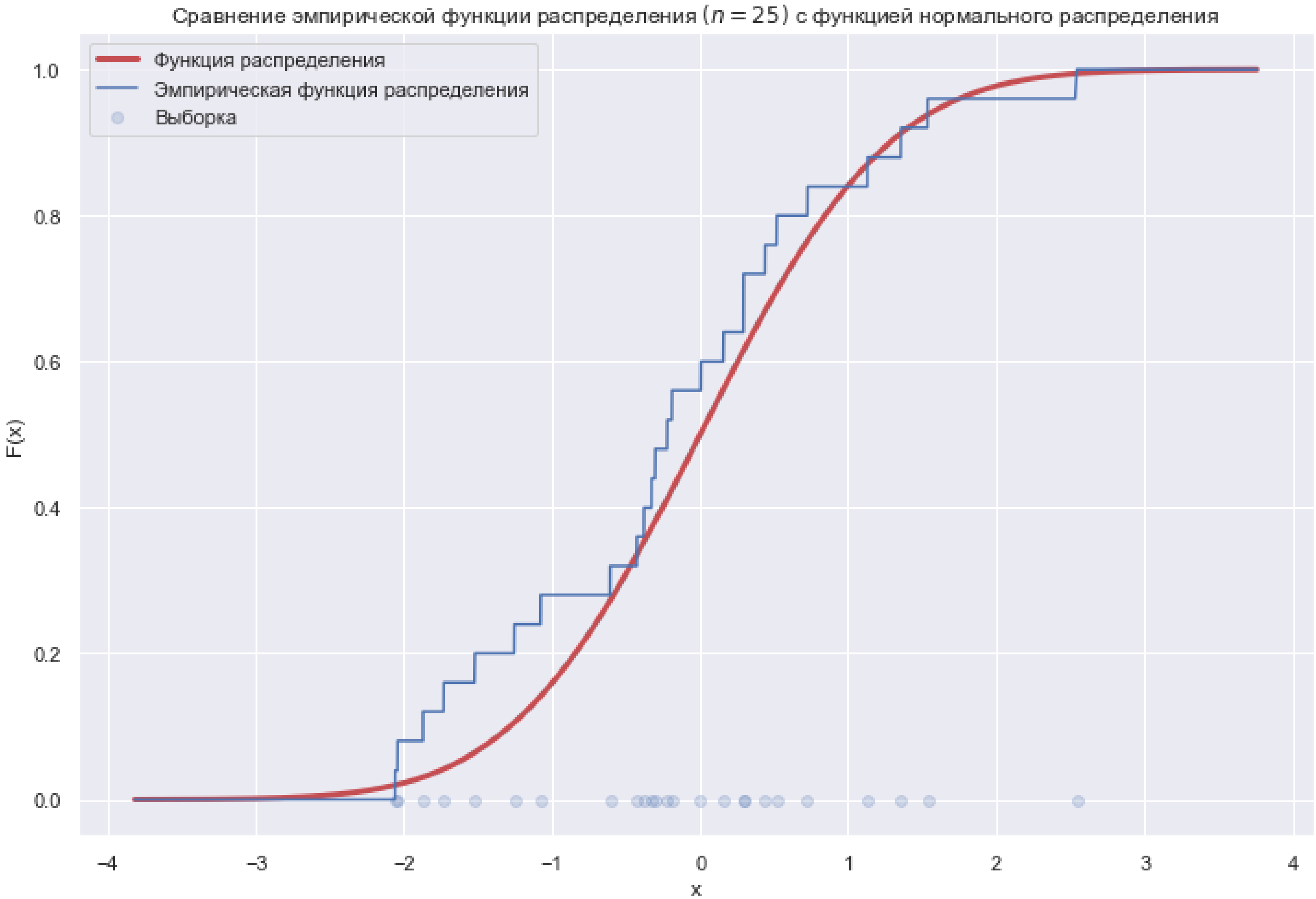
In [30]:
```
from statsmodels.distributions.empirical_distribution import ECDF  # can be useful, but not necessary

ecdfs = [ECDF(std_norm_sample[:i + 1]) for i in range(int(N))]
```

Для некоторых n (например, $n \in \{10, 25, 50, 100, 1000, N\}$ постройте графики эмпирической функции распределения (отметьте на оси абсцисс точки "скачков" кривых, нанеся каждую из "подвыборок" на ось абсцисс на каждом соответствующем графике с коэффициентом прозрачности `alpha=0.2`), нанеся на каждый из них истинную функцию распределения (количество графиков равно количеству различныз значений n).

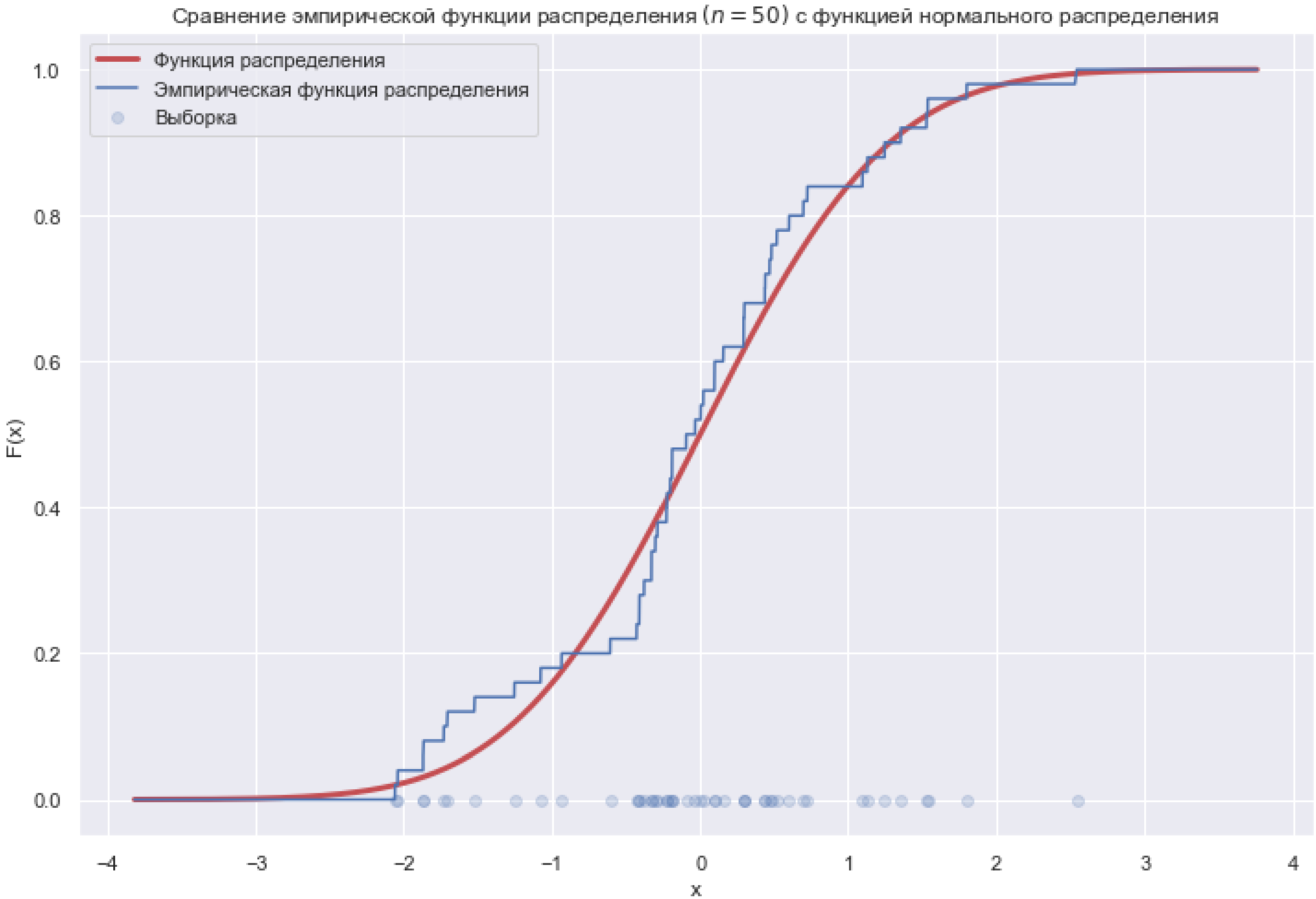
In [31]:
```
n = [10, 25, 50, 100, 1000, int(N)]
std_norm_sample_sorted = np.sort(std_norm_sample)
for i in n:
    plt.figure(figsize=(12, 8))
    plt.title(
        r'Сравнение эмпирической функции распределения $(n={})$ с функцией нормального распределения'.format(i)
    )
    plt.xlabel('x')
    plt.ylabel('F(x)')
    grid = np.linspace(np.min(std_norm_sample), np.max(std_norm_sample), 10000)
    plt.plot(grid, sps.norm.cdf(grid), color='r', lw=3, label='Функция распределения')
    plt.plot(
        std_norm_sample_sorted,
        list(map(ecdfs[i - 1], std_norm_sample_sorted)),
        label='Эмпирическая функция распределения'
    )
    plt.scatter(
        std_norm_sample[:i],
        np.zeros(i),
        marker='o',
        alpha=0.2,
        label='Выборка'
    )
    plt.legend()
```

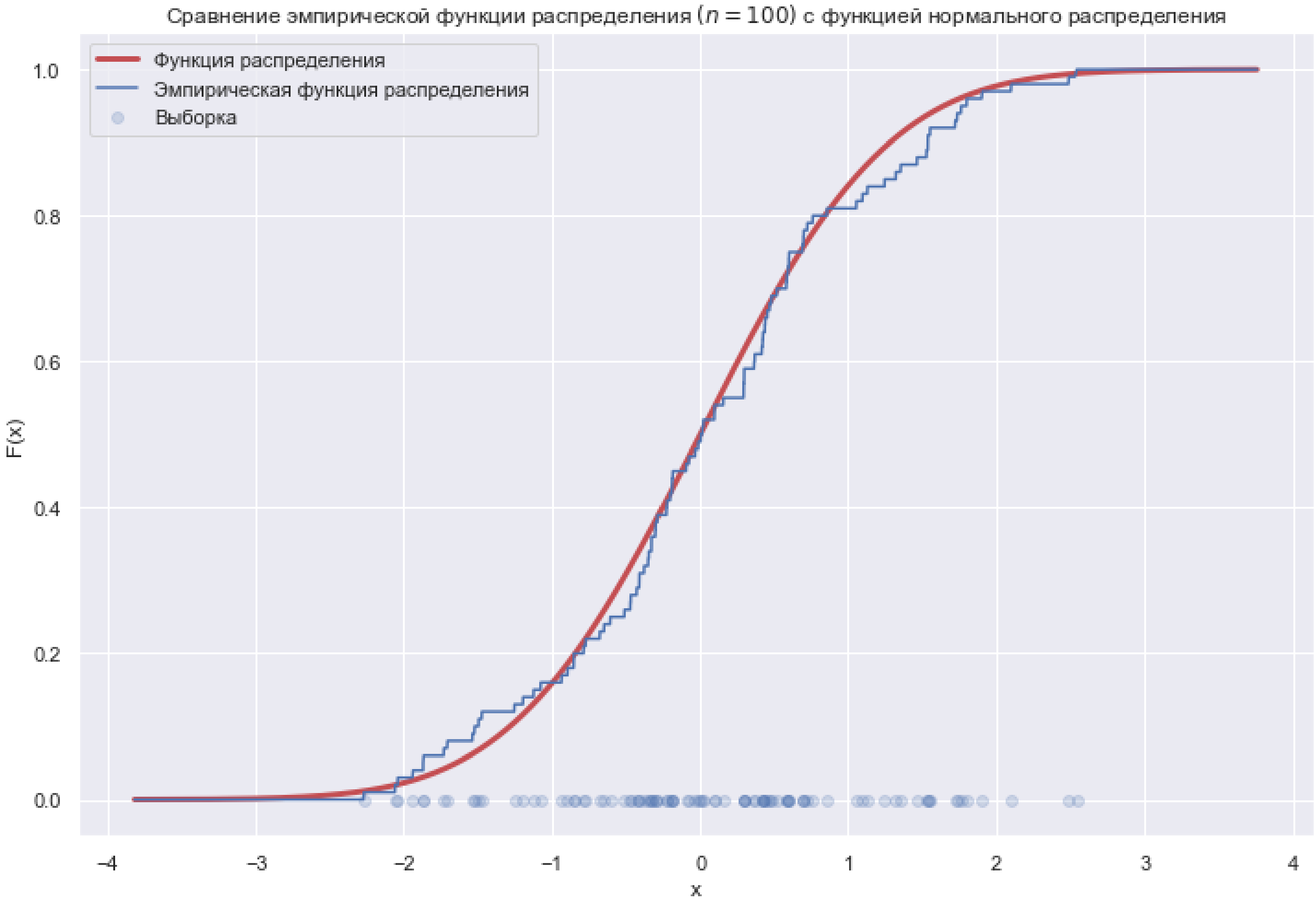


Сравнение эмпирической функции распределения $(n = 10)$ с функцией нормального распределения
Функция распределения
Эмпирическая функция распределения
Выборка
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
F(x)
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
x

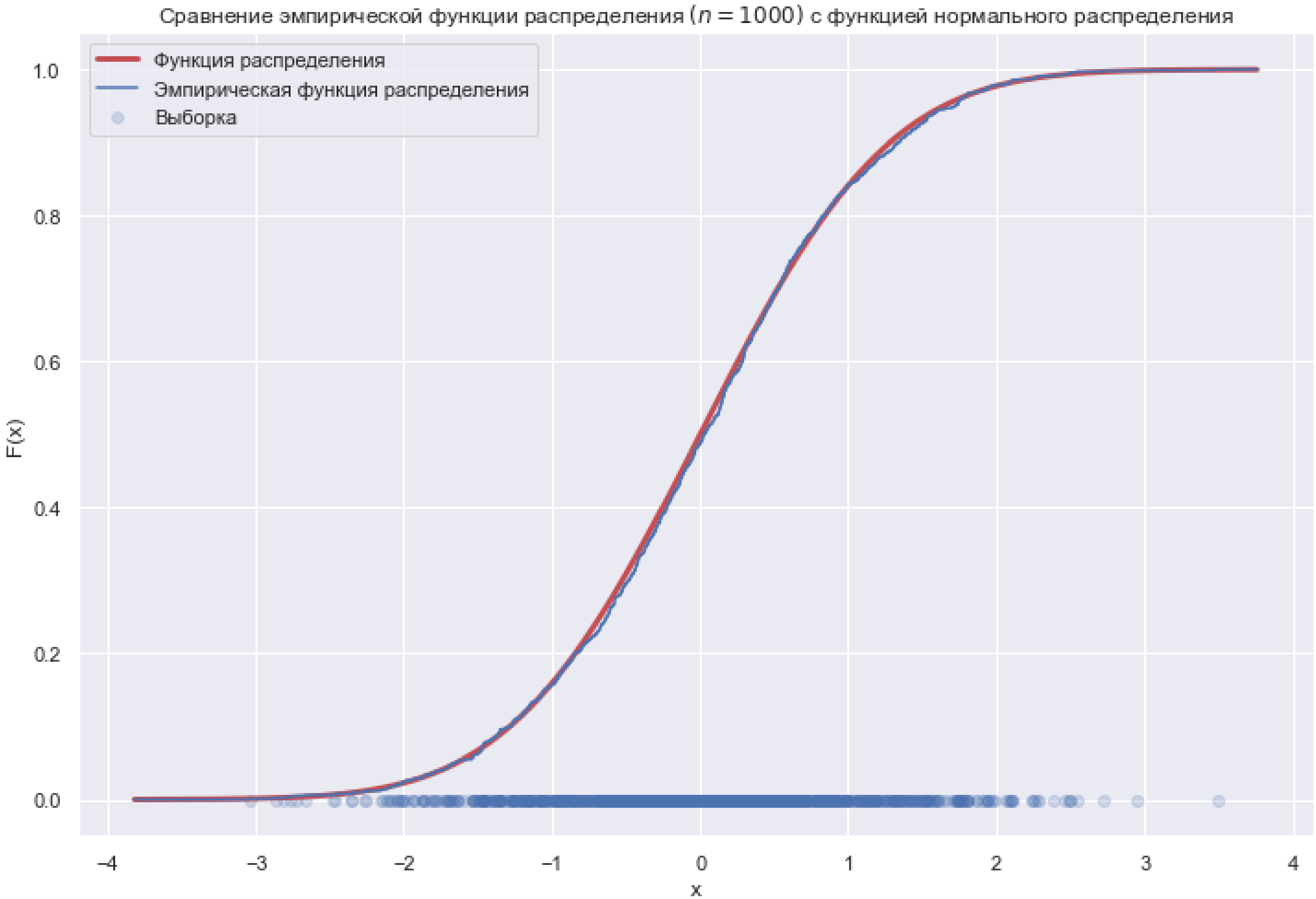


Сравнение эмпирической функции распределения $(n = 25)$ с функцией нормального распределения
Функция распределения
Эмпирическая функция распределения
Выборка
F(x)
x
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4

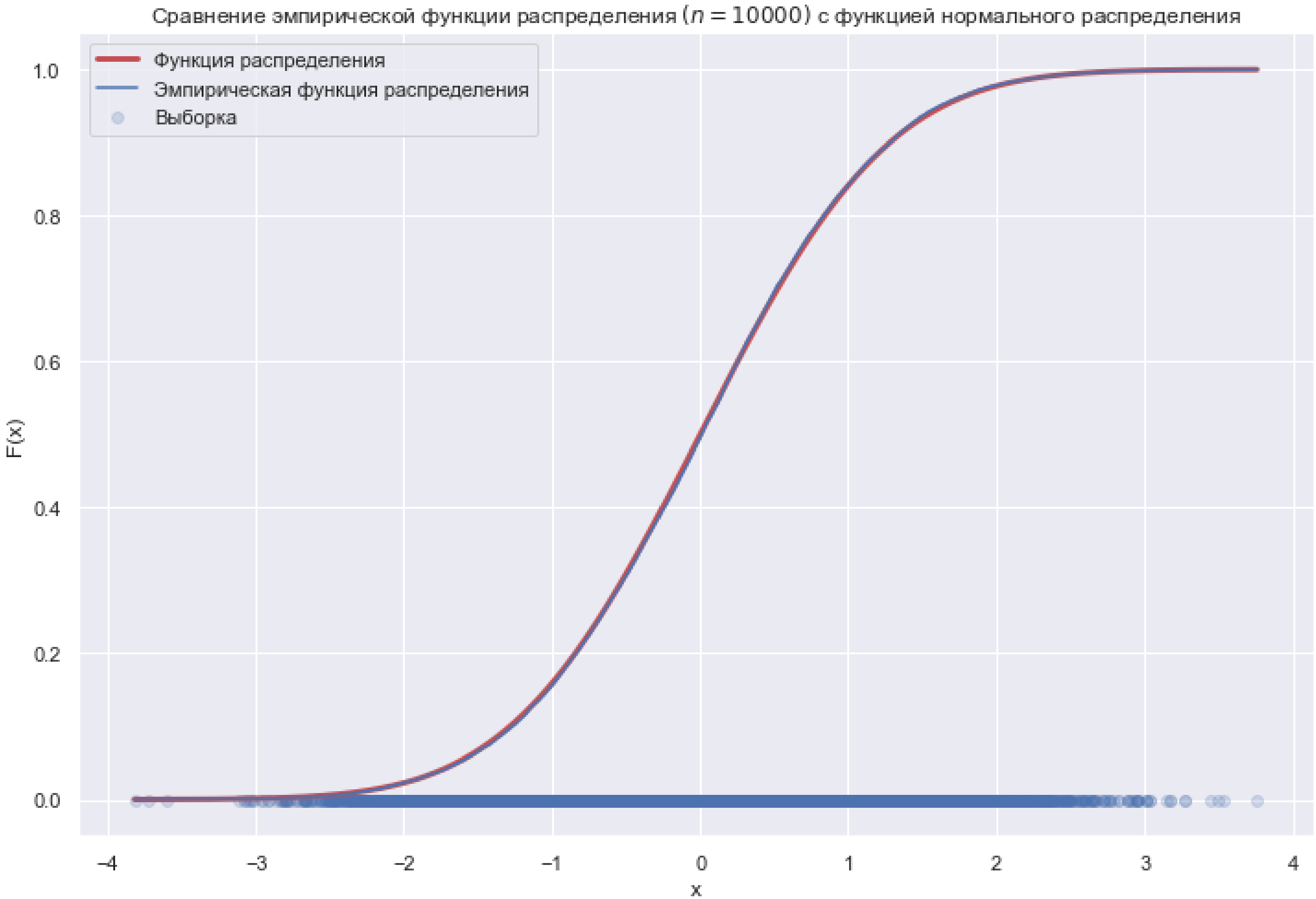

Сравнение эмпирической функции распределения ($n = 50$) с функцией нормального распределения
Функция распределения
Эмпирическая функция распределения
Выборка
F(x)
x
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4



Сравнение эмпирической функции распределения ($n = 100$) с функцией нормального распределения
Функция распределения
Эмпирическая функция распределения
Выборка
F(x)
x
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4



Сравнение эмпирической функции распределения ($n = 1000$) с функцией нормального распределения
Функция распределения
Эмпирическая функция распределения
Выборка
F(x)
x
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4



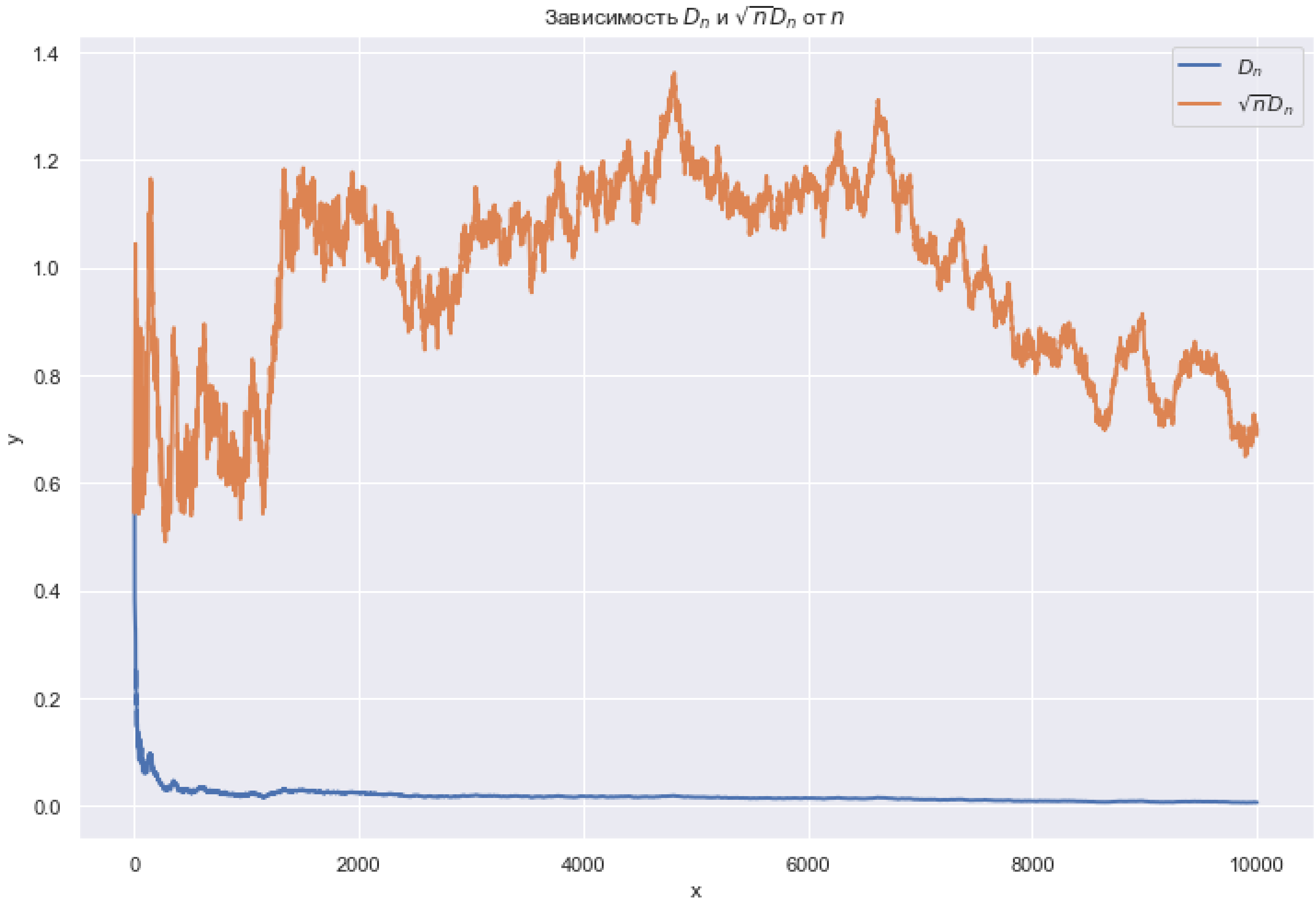
Для всех $n \leq N$ посчитайте точное значение $D_n = \sup_{x \in R} |\hat{F}_n(x) - F(x)|$ и постройте график зависимости статистик D_n и $\sqrt{n}D_n$ от n.

In [32]:
```
D = [
    np.max(
        np.abs(
            ecdfs[i](std_norm_sample) - sps.norm.cdf(std_norm_sample)
        )
    )
    for i in range(N)
]
```

In [33]:

```
plt.figure(figsize=(12,8))
plt.title(r'Зависимость $D_n$ и $\sqrt{n}D_n$ от $n$')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.plot(
    np.arange(1, N + 1),
    D,
    lw=2,
    label=r'$D_n$'
)
plt.plot(
    np.arange(1, N + 1),
    np.sqrt(np.arange(1, N + 1)) * D,
    lw=2,
    label=r'$\sqrt{n}D_n$'
)
plt.legend()
```

Out[33]: <matplotlib.legend.Legend at 0x1fe4c003508>



Задача 5

Сгенерируйте $N_{\text{samples}} = 400$ выборок из равномерного распределения $U_{[0,\theta]}$ $\theta = 1$ размера $N = 40$. Для каждой выборки посчитайте статистики $\hat{\theta} = 2\overline{X},\ \theta^* = \frac{n+1}{n}X_{(n)}$. Постройте гистограмму получившихся значений каждой из статистик на одном графике, в качестве параметра `bins` функции `plt.hist` передайте значение ниже, а также передайте параметр `alpha=0.6` .

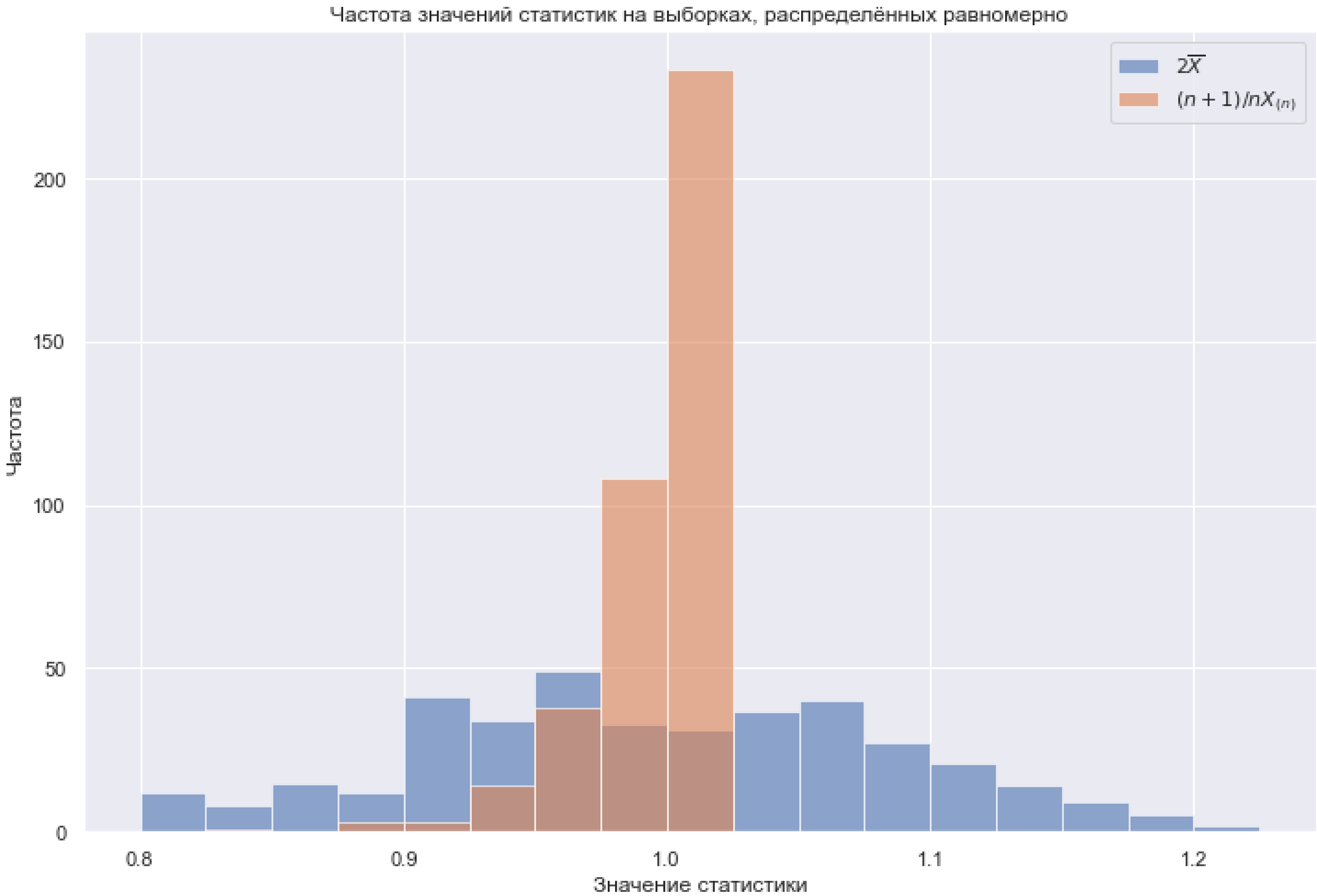
In [34]:
```
N_samples = 400
N = 40

bins = [i / 40 + 0.8 for i in range(18)]

one_to_n = np.arange(1, N + 1)

theta = 1
u_samples = sps.uniform.rvs(0, theta, size=[N_samples, N])
u_samples
```

Out[34]:
```
array([[0.17365939, 0.45163403, 0.382949  , ..., 0.53485807, 0.85634614,
        0.88862597],
       [0.21605272, 0.43199408, 0.14802435, ..., 0.62399977, 0.99837701,
        0.94396011],
       [0.22074075, 0.09872516, 0.4260727 , ..., 0.70578142, 0.74248005,
        0.29119284],
       ...,
       [0.90381365, 0.94755282, 0.37805295, ..., 0.7683514 , 0.17887968,
        0.59574396],
       [0.47187615, 0.60286414, 0.96608107, ..., 0.89781396, 0.98765845,
        0.1416442 ],
       [0.27554688, 0.82149069, 0.39493785, ..., 0.16823684, 0.11630878,
        0.83402775]])
```

In [35]:
```
theta_hat = 2 * (np.mean(u_samples, axis=1))
theta_star = ((N + 1) / N) * np.max(u_samples, axis=1)
```

In [36]:
```
plt.figure(figsize=(12, 8))

plt.title('Частота значений статистик на выборках, распределённых равномерно')
plt.xlabel('Значение статистики')
plt.ylabel('Частота')
plt.hist(theta_hat, bins=bins, alpha=0.6, label='$2\overline{X}$')
plt.hist(theta_star, bins=bins, alpha=0.6, label='$(n+1)/n X_{(n)}$')

plt.legend()
plt.plot()
```

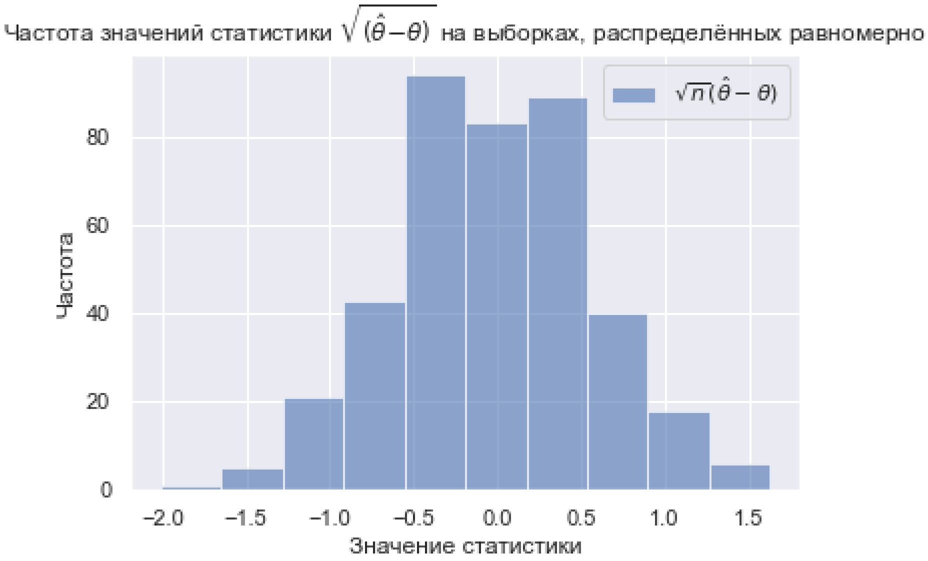
Out[36]: []



Постройте гистограммы для статистик $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)$ и $1 - n(\theta^* - \theta)$

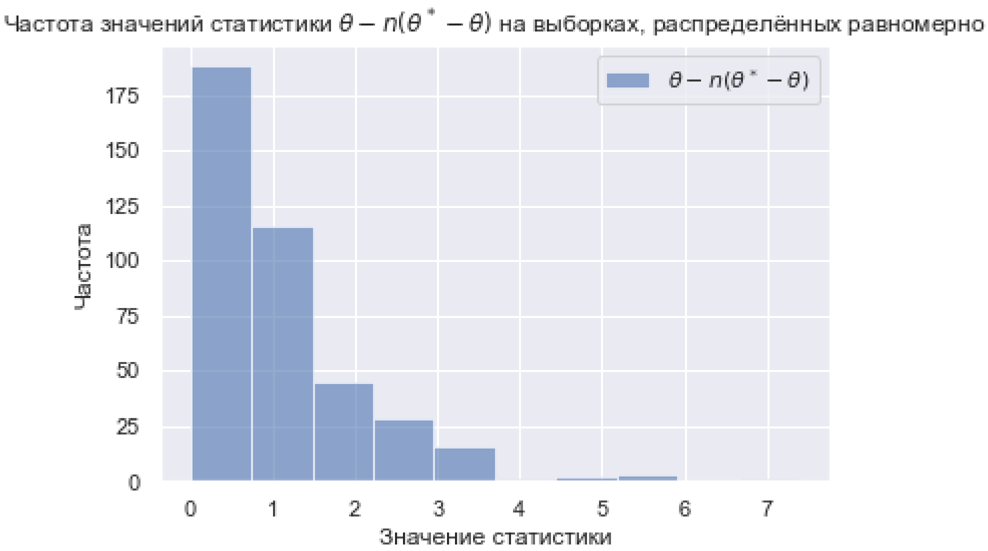
In [37]:
```
hat_stat = np.repeat(np.sqrt(N), N_samples) * (theta_hat - np.repeat(theta, N_samples))

plt.title(r'Частота значений статистики $\sqrt{(\hat\theta -\theta)}$ на выборках, распределённых равномерно')
plt.xlabel('Значение статистики')
plt.ylabel('Частота')
plt.hist(hat_stat, alpha=0.6, label=r'$\sqrt{n} (\hat\theta - \theta)$')

plt.legend()
plt.plot()
```

Out[37]: []



In [38]:
```
star_stat = 1 - (N * (theta_star - np.repeat(theta, N_samples)))

plt.title(r'Частота значений статистики $\theta - n(\theta^* - \theta)$ на выборках, распределённых равномерно')
plt.xlabel('Значение статистики')
plt.ylabel('Частота')
plt.hist(star_stat, alpha=0.6, label=r'$\theta - n(\theta^* - \theta)$')

plt.legend()
plt.plot()
```

Out[38]: []



На какие распределения похожи получившиеся гистограммы?

Ответ: распределение $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)$ похоже на нормальное, а $1 - n(\theta^* - \theta)$ -- на экспоненциальное.

Вспомните чему равен коэффициент $\sigma(\theta)$ для асимптотически нормальной оценки $\hat{\theta} = 2\overline{X}$ для параметра θ равномерного распределения в формуле

$$\sqrt{n}\frac{\left(\hat{\theta} - \theta\right)}{\sqrt{\sigma(\theta)}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

.

Ответ: $\sigma^2(\theta) = \theta^2/3$

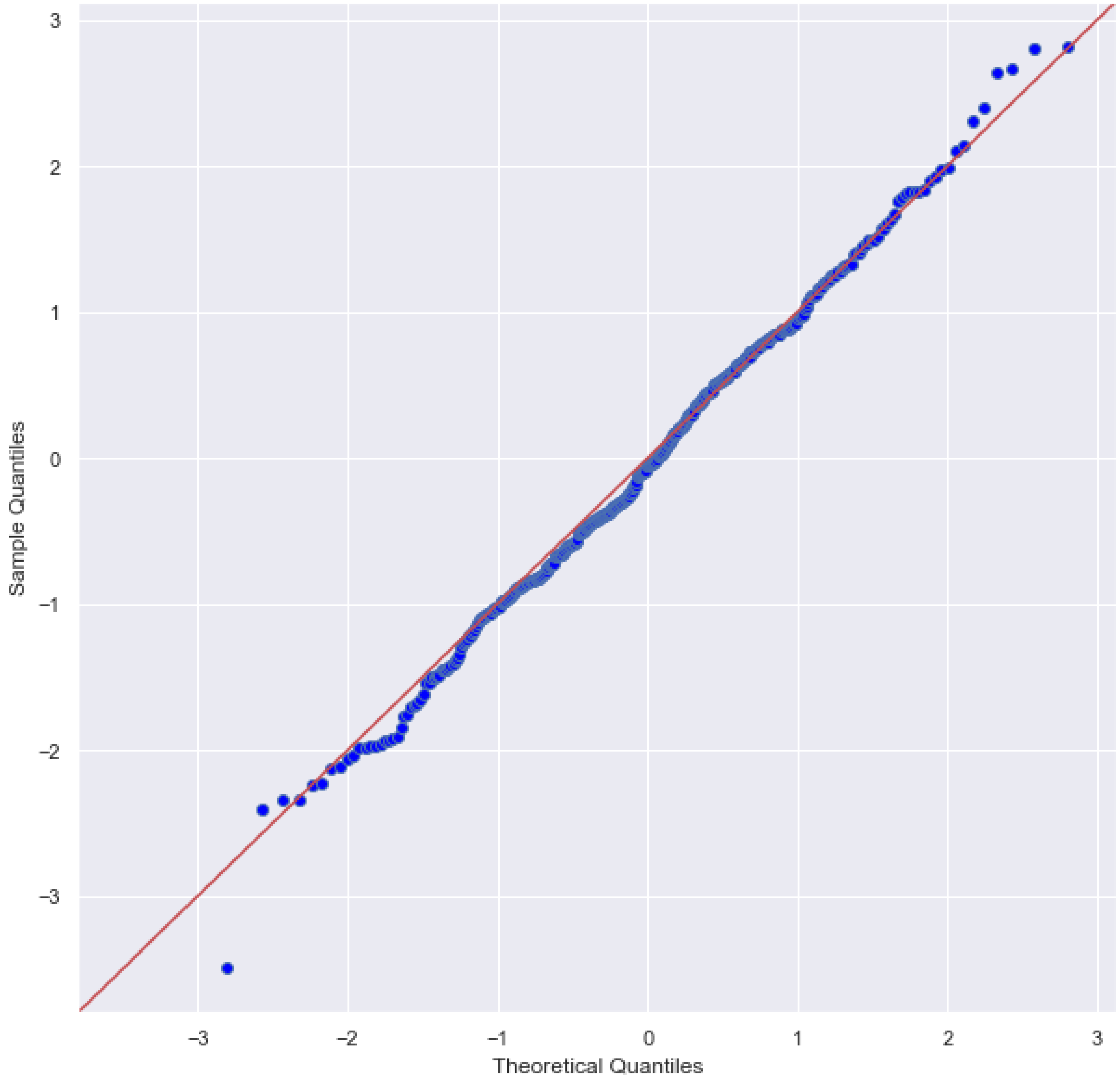
Посчитайте значения статистики

$$\sqrt{n}\frac{\left(\hat{\theta} - \theta\right)}{\sqrt{\sigma(\theta)}}$$

для каждой выборки. Передайте получившиеся значения в переменную `theta_norm`. И запустите ячейку снизу.

In [39]:
```
import statsmodels.api as sm


theta_norm = hat_stat / np.repeat(theta / np.sqrt(3), N_samples)
fig, ax = plt.subplots(figsize=(10, 10))
sm.qqplot(theta_norm, line='45', ax=ax)
fig.show()
```

```
C:\ProgramData\Anaconda3\lib\site-packages\ipykernel_launcher.py:7: UserWarning: Matplotlib is currently using modul
e://ipykernel.pylab.backend_inline, which is a non-GUI backend, so cannot show the figure.
  import sys
```



Для быстрой проверки гипотезы о том, что выборка принадлежит какому-либо распределению часто используется инструмент под названием `QQ-plot` (первые буквы означают `Quantile`). На нем по оси x отложены теоретические значения квантиля, а по оси y -- квантили тестируемой выборки. Очевидно, в идеале такие квантили должны совпадать, поэтому на графике можно увидеть красную линию соответствующую графику функции $y = x$.

Сделайте вывод по графику выше. Можно ли утверждать, что выборка взята из нормального распределения?

Ответ: да, можно, потому что почти все точки, соответствующие данным, полученным по выборке, лежат на прямой $y = x$, соответствующей полному совпадению тестируемых данных с теоретическими, а те, которые не лежат на прямой, отклоняются от неё незначительно.

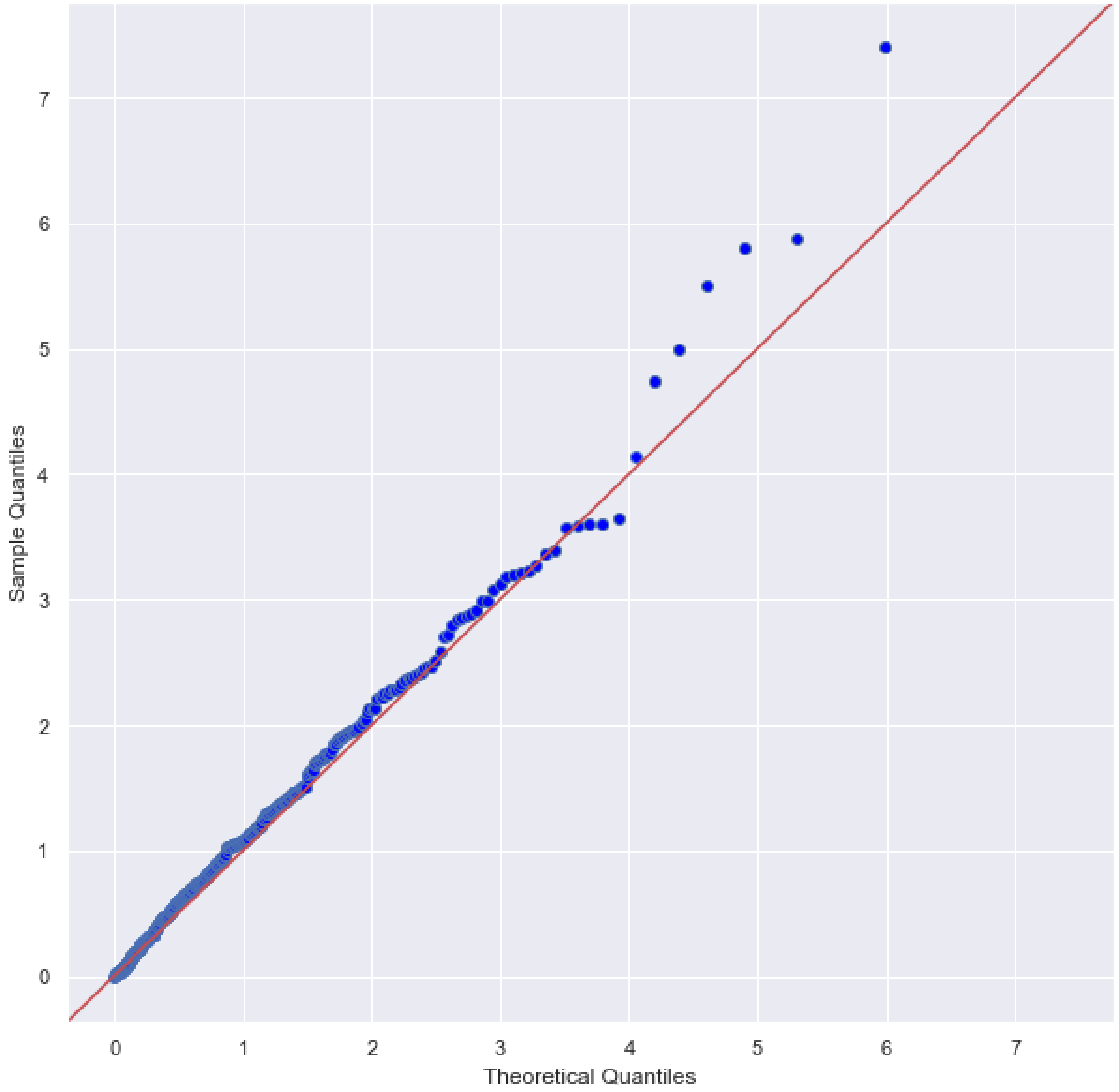
Вернемся к статистике $\theta - n(\theta^* - \theta)$. Еще раз взгляните на гистограмму, соотвутствующую этой статистике. Попробуйте построить `QQ-plot` для различных распределений (например можно передать в параметр `dist=sps.uniform` в функцию `sm.qqplot` или любое другое из модуля `scipy.stats`). Какое распределение подходит лучше всего?

Ответ: лучше всего подходит экспоненциальное распределение.

In [40]:

```
fig, ax = plt.subplots(figsize=(10, 10))
sm.qqplot(star_stat, dist=sps.expon, line='45', ax=ax)
fig.show()
```

```
C:\ProgramData\Anaconda3\lib\site-packages\ipykernel_launcher.py:3: UserWarning: Matplotlib is currently using modul
e://ipykernel.pylab.backend_inline, which is a non-GUI backend, so cannot show the figure.
  This is separate from the ipykernel package so we can avoid doing imports until
```



Плохо ли, что оценка θ^* не асимптотически нормальна? Сделайте вывод о скорости сходимости оценок. Какая из них «выгоднее»?

Ответ: то, что оценка θ^* не асимптотически нормальна плохо, потому что случайные величины, рспределённые нормально, мало отклоняются от математического ожидание. Соответственно, разброс меньше и оценка сходится быстрее, а значит асимптотически нормальная оценка $\hat{\theta}$ «выгоднее» не асимптотически нормальной θ^*.

Перед отправкой нажмите `Restart and run all`. Проверьте, что все работает без ошибок.

In [ ]:

```

```