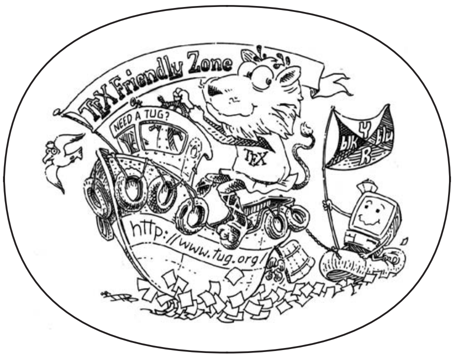
IGNACIO TIRABOSCHI

GENERALIZACIÓN DE META-PROGRAMAS CON TIPADO DEPENDIENTE EN MTAC2

GENERALIZACIÓN DE META-PROGRAMAS CON TIPADO DEPENDIENTE EN MTAC2

IGNACIO TIRABOSCHI



Un desarrollo de generalización cuasi automática

Marzo 2020 – classicthesis v4.6

Ohana means family.
Family means nobody gets left behind, or forgotten.

— Lilo & Stitch

Dedicated to the loving memory of Rudolf Miede.

1939 – 2005

ABSTRACT

Short summary of the contents in English. . . a great guide by Kent Beck how to write good abstracts can be found here:

https://plg.uwaterloo.ca/~migod/research/beckOOPSLA.html

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE CUADROS

LISTINGS

ACRONYMS

Parte I

UNA INTRODUCCIÓN

1 COQ

En este capitulo introduciremos las características más relevantes del asistente de pruebas interactivo Coq. El objetivo de este capitulo es introducir todos los conceptos que utilizaremos más adelante, pero esto significa que no es una introducción completa.

El desarrollo de Coq comenzó en 1984 con el apoyo de INRIA como el trabajo de Gérard Huet y Thierry Coquand. En ese momento Coquand estaba implementado un lenguaje llamado *Calculus of Constructions* cuando el 1991 una nueva implementación basada en un Calculus of Inductive Constructions extendido comenzó a ser desarrollado tomando el nombre de Coq.

Ahora mismo Coq es desarrollado por más de 40 desarrolladores activos y es reconocido como unos de los asistentes de prueba principales.

Como un asistente de pruebas la orientación de Coq es la de permitir la escritura totalmente formal de teoremas y pruebas, y asegurarnos de su correción. Se parte de lo que se denomina *kernel*, el nucleo de Coq, que es el que verifica que la prueba corresponde al teorema, es decir, que sea correcta. De esta forma, el humano no está encargado de verificar la prueba, solo de escribirla.

1.1 LOS LENGUAJES COQ

Coq no es técnicamente un lenguaje de programación, si no un asistente de pruebas. Pero podemos encontrar múltiples lenguajes dentro de Coq que nos permiten expresarnos.

- *Gallina*: este es el lenguaje de especificación de Coq. Permite desarrollar teorías matemáticas y probar especificaciones de programas. Utilizaremos extensivamente un lenguaje muy similar a este para definir nuestros programas en Mtac2.
- *Ltac*: este el lenguaje en que se definen las *tácticas* de Coq. Dado que Coq está centrado en las tácticas, Ltac es una de las partes centrales del aparato.
- *Vernacular*.

Aunque Coq no es un lenguaje de programación propiamente dicho, este puede ser utilizado como un lenguaje de programación funcional. Estos programas serán especificados en Gallina. Dada la naturaleza de Coq como provador de teoremas, estos programas son funciones puras, es decir, no producen efectos secundarios y siempre terminan.

1.2 LA TEORÍA DE COQ

Calculus of Inductive Constructions es la base de Coq. Este es un cálculo lambda tipado de alto orden y puede ser interpretado como una extensión de la correspondencia Curry-Howard.

Llamaremos *Terms* (o términos) a los elementos básicos de esta teoría. Terms incluye *Type*, *Prop*, variables, tuplas, funciones, entre otros. Estás son algúnas de las herramientas que utilizaremos para escribir nuestros programas.

1.3 TIPOS DE DATOS Y FUNCIONES

Ahora aprenderemos a codificar nuestros programas funcionales en Coq. Lo primero que debemos entender es que operamos sobre *términos* y algo es un término si tiene tipo. Coq provee muchos tipos predefinidos, por ejemplo `unit`, `bool`, `nat`, `list`, entre otros. A continuación estudiaremos cómo definir tipos y funciones.

Veamos cómo se define el tipo `bool`:

```
Inductive bool : Set :=
 | true : bool
 | false : bool.
```

Como podemos observar, es un tipo inductivo, especificado por la keyword `Inductive`, con dos constructores `true` y `false`. De por sí, el tipo `bool` no posee un significado hasta que nosotros lo proveamos de uno. Podemos ahora intentar definir algunos operadores booleanos.

```
Definition andb (b1 b2:bool) : bool := if b1 then b2 else false.
Definition orb (b1 b2:bool) : bool := if b1 then true else b2.
Definition implb (b1 b2:bool) : bool := if b1 then b2 else true.
Definition negb (b:bool) := if b then false else true.
```

Las definiciones de funciones no recursivas comienzan con el keyword `Definition`. La primera se llama `andb` y toma dos booleanos como argumentos y retorna un booleano. Se utiliza la notación `if b then x else y` para matchear sobre los booleanos de manera más fácil. Finalmente podemos definir una función más interesante.

```
Definition Is_true (b:bool) :=
 match b with
  | true ⇒ True
  | false ⇒ False
 end.
```

Ahora, veamos un tipo con un ingrediente un poco más complicado, `nat`.

```
Inductive nat : Set :=
 | O : nat
 | S : nat → nat.
```

Notemos que el constructor `S` es una función que recibe un término de tipo nat, es decir, `nat` es un tipo recursivo. Por ejemplo el término `S (S 0)` es de tipo `nat` y representa al número 2.

Para continuar con este desarrollo, veamos el tipo de `list` que es polimórfico.

```
Inductive list (A : Type) : Type :=
  | nil : list A
  | cons : A → list A → list .
```

Este tipo es un tipo polimórfico dado que requiere de un `A : Type`. Por ejemplo, una posible lista es `cons (S 0)nil : list nat` que representa a la lista con un único elemento 1 de tipo `nat`.

Definiremos una función que añade un elemento a una lista.

```
Definition add_list {A} (x : A) (l : list A) : list A :=
  cons x l.
```

Dado que el tipo `A` puede ser inferido facilmente por Coq, utilizamos llaves a su alrededor para expresar que sea un argumento implícito. En el cuerpo de la función solo utilizamos `cons`, uno de los constructores de `list`, para añadir un elemento delante de `l`.

Ahora nos interesa definir la función `length` que retorna el largo de una lista.

```
Fixpoint len {A} (l : list A) : nat :=
match l with
| [] ⇒ 0
| x :: xs ⇒ S (len xs)
end.
```

Coq está diseñado de forma que necesitamos utilizar el keyword `Fixpoint` para poder definir funciones recursiva. Aquí Coq está encontrando el argumento decreciente de la función `len` y por eso acepta nuestra definición. El cuerpo de `len` inspecciona a `l` y lo *matchea* con el caso correspondiente. Utilizamos `S` y `0`, los constructores de `nat` para expresar el valor de retorno.

1.4 TIPOS DEPENDIENTES

Una de las herramientas más importantes que hay en Coq son los tipos dependientes. Estos nos permiten hablar de elementos que dependen de otros anteriores. Por ejemplo, puede ser de nuestro interés hablar de números positivos, en otras palabras, `x : nat` tal que `x <> 0`. En este caso, `x <> 0` es una prueba que depende de `x` y solo existirá cuando `x` sea mayor a 0.

Para hablar de un ejemplo práctico de tipos dependientes, hemos elegido la función `head` que retorna la cabeza de una lista. Comencemos con la versión más simple, donde utilizamos un valor default `d` para el caso en que la lista es vacía.

```
Definition head_d {A} (l : list A) (d : A) : A :=
```

```
  match l with
  | [] ⇒ d
  | x :: xs ⇒ x
  end.
```

El problema de esta solución es que a excepción de que `d` sea un valor único, no hay manera de saber si la función retornó realmente la cabeza de la lista.

La segunda opción es utilizar el tipo `option`.

```
Inductive option A : Type :=
| None : option A
| Some : A → option A.
```

Con este tipo auxiliar podemos reescribir `hd`.

```
Definition head_o {A} (l : list A) : option A :=
  match l with
  | [] ⇒ None
  | x :: xs ⇒ Some x
  end.
```

Esta solución es mejor que la anterior pero sigue sufriendo de una deficiencia. Dado que `head_o` retorna un `option` no sabemos si el resultado de esta función será realmente un elemento o si será el constructor vacío, por lo que todas las funciones que utilicen a `head_o` deben también utilizar `option`.

Esto nos lleva a nuestra última solución. Esta requiere que nos aseguremos que la lista `l` no es vacia, es decir, `l <> []`. Pero para entenderla debemos ver dos cosas más: Σ-*types* y `Program`. Intuitivamente, los Σ-*types* son tuplas donde el argumento de la derecha es dependiente del de la izquierda. A continuación, la definición.

```
Inductive sig (A : Type) (P : A → Prop) : Type :=
  exist : ∀ x : A, P x → {x : A | P x}
```

Se utiliza la notación `{x : A |P x}` para expresar `sig A (λ x ⇒ P)`.

`Program` es una libreria que permite progamar en Coq como si fuera un lenguaje de programación funcional mientras que se utiliza una especificación tan rica como se desee y probando que el codigo cumple la especificación utilizando todo el mecanizmo de Coq. En nuestro caso utilizaremos `Program` para codificar `head` de una manera casi transparente.

```
Program Definition head {A}
(l : list A | [] <> l ) : A :=
  match l with
  | [] ⇒ !
  | x :: xs ⇒ x
  end.
```

Como podemos observar, la única diferencia es que la signatura de `head` especificamos que `l` es una lista junto con una prueba que muestra que no es vacía.

1.5 TÁCTICAS

En la próxima sección hablaremos de pruebas, metas (*goals*) y tácticas. Para esto introduciremos un ejemplo que nos facilite entender estos conceptos.

Ejemplo 1.5.1. `Lemma sub_0_r : forall n, n - 0 = n.`
`Proof. intro n. case n; [ | intro n']; reflexivity. Qed.`

El teorema a probar restar 0 a cualquier número n es n. Ya que la resta está definida por pattern matching en el primer argumento, esta igualdad no es automáticamente cierta computando. Por eso, debemos hacer análisis por casos.

El código comienza con el comando `Lemma`, donde efectivamente definimos lo que queremos probar. Luego utilizamos el comando `Proof` para indicar el inicio de la prueba, la cual será resuelta a través de la concatenación de tácticas de Ltac. Estas tácticas trasnforman el *proof-state* incrementalmente construyendo un *proof-term*, la prueba.

Después de `Proof`, Coq genera una `goal`, una meta. Internamente, una meta en Coq es representada con una *meta-variable*. Esta meta-variable tiene un tipo, en concreto el lema que queremos probar. En este caso nuestra meta $?g$ tiene tipo ∀ `n, n - 0 = n`.

Para introducir la variable n, utilizamos `intro`. Esta instancia a $?g$ como λ `n:nat` $\Rightarrow ?g_1$ donde el tipo de $?g_1$ es `n - 0 = n`.

Ya introducida la variable, el próximo paso es hacer análisis por casos en ella. Con `case` podemos analizar a n según los constructores de su tipo. Para el primer caso: `0 - 0 = 0` es trivial. El segundo caso es ∀ `n':nat, S n' - 0 = S n'`, para el cual, primero introduciremos n' y luego, por la naturaleza inductiva de la resta, será igualmente trivial para Coq. La táctica `case` retorna estas dos sub-metas, las cuales componemos, con el operador de composición (el punto y coma), con las tácticas listadas en `[ | intro n']`. La primer sub-meta es resuelta por la táctica a la izquierda del `|`, que es implicitamente la táctica identidad (`idtac`), mientras que la segunda sub-meta es resuelta por la táctica a la derecha de `|`, `intro n'`. La salida de esta composición son de nuevo dos tácticas las que de nuevo compondremos con `reflexivity`. Esto signfica que aplicaremos `reflexivity` a ambas tácticas resultantes, resolviendolas trivialmente por computación.

1.6 INTERFAZ INTERACTIVA

Cuando se dice que Coq es un asistente *interactivo* nos referimos a que Coq nos puede ayudar a desarrollar la prueba en cierta medida. Por ejemplo, supongamos que queremos probar el siguiente teorema.

Ejemplo 1.6.1. `Definition le_S (n : nat) : n <= S n.`

Al entrar a alguno de los editores de textos compatibles con Coq (Emacs, Visual Studio Code o CoqIDE) cargamos el teorema y Coq entrará al modo interactivo, en el cual nos mostrará el estado actual de la prueba. En este caso comenzamos con la hipótesis `n : ℕ` ya en nuestro contexto y una única meta $?g$ de tipo `n <= S n`. Ahora aplicamos inducción en `n` obteniendo dos sub-metas: $?g_1$ con tipo `0 <= S 0` y $?g_2$ con tipo `S n <= S (S n)`. Para la primera meta $?g_1$ utilizamos `apply` para aplicar el teorema `le_0_n` instanciado con `S n`, esto soluciona automaticamente la sub-meta. La segunda sub-meta se resuelve de una manera similar, solo que tenemos una hipótesis inductiva `IHn`.

En la siguiente figura podemos observar como se nos presenta esta información.

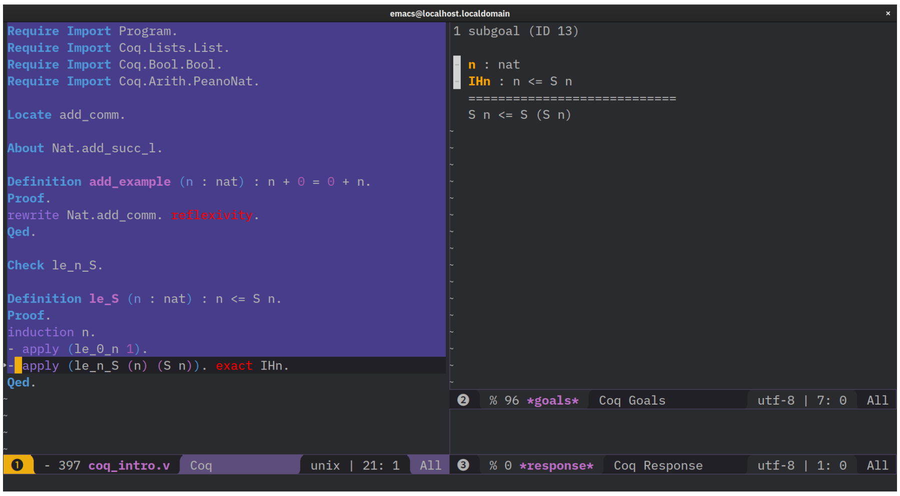


Figura 1.1: Ejemplo de interfaz de Coq

Coq cuenta con muchos comandos que se usan constantemente.

- `Check` imprime el tipo de un término. Cuando es llamado en modo prueba, el término es chequeado en el contexto local de la sub-meta.
- El comando `About` muestra información general.
- `Print`:
- `Locate`:
- `Eval`:

2 MTAC2

Mtac2 es un meta-lenguaje de programación para Coq. Esto quiere decir que complementa a Coq, permitiendo "hacer Coq" de una manera distinta. En el trabajo, nos centramos en ampliar Mtac2 y por eso es importante que veamos que nos permite hacer y cómo.

2.1 META-TÁCTICAS

Ahora volveremos al ejemplo 1.5.1 y utilizaremos meta-tácticas para probarlo.

Ejemplo 2.1.1. `MProof.`
```
intro n. case n &> [m: idtac | intro n'] &> reflexivity.
Qed.
```

2.2 MÓNADAS

Las mónadas son uno de los temas esotéricos de programación funcional y son una implementación del concepto de teoría de categorías. Según el libro X son ... Por esto nos limitaremos a hablar de mónadas a un nivel más computacional. Dentro de este contexto, utilizamos la función `M : Type` $\rightarrow$ `Prop` para referirnos a la versión monádica de un tipo cualquiera. A partir de los tipos monádicos pasamos a tener elementos monádicos. Estos elementos efectivamente reflejan pasos computacionales y se construyen a través de dos funciones: `bind` compone pasos computacionales y `return` o `ret` los envuelve en la mónada. Por ejemplo, podemos tener el tipo `M nat` que expresa posibles valores naturales, y uno de estos elementos es `ret 5`. Lo importante de las mónadas es que nos permiten expresar programas con efectos secundarios de una manera funcional. Esto también es lo que nos permite tener tacticas tipadas, pero no nos interesan los detalles de la implementación.

2.3 CONFECCIÓN DE META-PROGRAMAS

Ya habiendo mencionado meta-tátcias, ahora hablaremos de meta-programas. Estos son la base de las meta-tácticas y podemos escribir programas que luego serán tácticas. Estos programas se caracterizan por ser monádicos, es decir, que tienen efectos secundarios. Esto se amplia a muchas caracteristicas útiles, pero nada es gratis, entonces debemos comprender las limitaciones impuestas por el meta-lenguaje.

Comenzaremos analizando `mmatch`. Como ya vimos en Gallina, el `match` es puro, o sea, necesitamos matchear todos los casos del constructor y a su vez no podemos matchear en terminos que no sean constructores del tipo. Mientras tanto, `mmatch` nos permite matchear libremente. Esto significa que podemos matchear en expresiones sintácticas de manera de separarlas muy especificamente para nuestra conveniencia. Un ejemplo puede ser el siguiente.

Imaginemos un programa que a todo número le suma uno, pero especificamente no modifica el número original si este está exprezado como una suma. Esto se puede exprezar de la siguiente forma en `Mtac2`.

```
Definition test_match (n : nat) : M nat :=
 mmatch n with
 | [? x y] add x y ⇒ ret n
 | 0 ⇒ ret (S 0)
 | [? n']S n' ⇒ ret (S (S n'))
 end.
```

El único detalle extraño que podemos encontrar es que en dos de los casos tenemos unos corchetes antes de la expresión. Esto se utiliza para decirle a Mtac2 que esas variables están siendo introducidas en ese momento.

Para hacer programas recursivos utilizaremos `mfix`. Existen multiples variantes para una cantidad distinta de argumentos recursivos: `mfix1`, `mfix2`, e tcetera. Un ejemplo puede ser `map`.

```
Definition map {A} {B} (t : A → B) : ∀ (l : list A), M (list B)
    :=
mfix1 m (l : list A) : M list B :=
 mmatch l with
 | nil ⇒ ret nil
 | [? x xs] x::xs ⇒ xs' ← m xs;
                 ret ((t x)::xs')
 end.
```

En el ejemplo anterior se hace uso de los dos operadores monádicos mencionados anteriormente. Para `bind`, utilizamos la notación ← que conecta a `m xs` con `ret ((t x)::xs')`.

2.4 EL COSTO

Como dijimos anteriormente, las funcionalidades de Mtac2 tienen un coste. Habiamos mencionado que un elemento monádico de tipo `M nat` puede ser `ret 5`. Pero imaginemos que estamos calculando el cociente entre dos números enteros y el divisor en 0. Entonces el programa no puede devolver el cociente y debe fallar. Esto signfica que un programa monádico puede fallar o no. Mientras tanto en el mundo de Coq este concepto no existe. Un programa que retorna un entero, debe retornar un entero, y más aún, un programa que tiene el tipo de una proposición, efectivamente es una prueba de la misma. Supongamos esa proposición es `P : Prop`. Ahora para probarla monádicamente necesitamos un programa `p : M P`, pero para cualquier `P` podemos escribir un programa `p` y no tener una prueba.

```
Definition univ (P : Prop): M P :=
  raise MyException.
```

Si no utilizaramos la mónada esto no sería posible. La mónada no nos da tantas garantías como un tipo nativo de Coq.

Dada esta limitación todas las funciones nativas de Coq pueden ser utilizadas en los tipos de las funciones, pero no sucede lo mismo con las funciones monádicas. Esto hace que se tenga que pensar de manera estratégica que funciones deseamos hacer nativas y cuales monádicas.

2.5 ALTERNATIVAS

2.6 TELESCOPIOS

En Mtac2 llamamos *telescopios* a una estructura de datos inductiva que permite expresar una secuencia de tipos posiblemente dependientes de largo arbitrario.

```
Inductive MTele : Type :=
| mBase : MTele
| mTele {X : Type} (F : X → MTele) : MTele.
```

El tipo `MTele` crea una cadena de abstracciones. Este se codifica a través de funciones, lo que permite que sean dependientes, es decir, un telescopio puede tener elementos que dependan de elementos anteriores.

Los telescopios, junto con las funciones que lo acompañan, serán claves a la hora de poder expresar nuestro problema y nuestra solución.

Los telescopios no se caracterizan por su simpleza. Para comenzar a estudiarlos podemos pensarlos en jerarquías. La primera jerarquía serían los telescopios en sí, elementos de tipo `MTele`. Definiremos la siguiente notación para poder referirnos a estos de manera más simple.

```
mBase ≡ [ ]_t
mTele (λ T : Type ⇒ mTele R : T → Type) ≡ [T : Type;> R : (T
    → Type)]_t
mTele (λ T : Type ⇒ mTele t : T) ≡ [T : Type;> t : T]_t
```

Las otras jerarquías entran en juego cuando utilizamos las distintas funciones telescopicas.

La principal función es `MTele_Sort`. Dado un telescopio `t` de largo n y un `s : Sort`, esta función computa $\forall$ `x`$_1$ `...` `x`$_n$`, s`, es decir, retorna el tipo expresado por ese telescopio y el `Sort` dado. Utilizaremos `MTele_Ty` y `MTele_Prop` para expresar `MTele_Sort Type`$_s$ y `MTele_Sort Prop`$_s$ respectivamente. Elementos de este tipo serán de la segunda jerarquía.

También debemos poder referirnos a valores de estos tipos telescópicos. Esto signfica que dado un elemento de tipo `MTele_Sort s t`, podamos conseguir un elemento de tipo `s`. En terminos matemáticos, λ `x`$_1$ `...` `x`$_n$ $\Rightarrow$ `T x`$_1$ `...` `x`$_n$ con `T : MTele_Sort s t`. Consideraremos que estos elementos pertenecen a la tercera y última jerarquía.

Deseriamos que este fuera el final de los telescopios, pero nos falta el último ingrediente que nos proveerá del poder que buscamos. Con `MTele_In` podemos ganar acceso a múltiples tipos y valores telescopios al mismo tiempo, así siendo capaces de computar un nuevo tipo telescópico.

Parte II

LIFT

You can put some informational part preamble text here.

3 MOTIVACIÓN

Mtac2 nos permite definir funciones monádicas. Estas cuentan con ciertas ventajas. Un ejemplo de un meta-programa es el siguiente.

```
Definition list_max_nat :=
  mfix f (l: list nat) : l <> nil → M nat :=
    mtmmatch l as l' return l' <> nil → M nat with
    | [? e] [e] ⇒m λ nonE ⇒ M.ret e
    | [? e1 e2 l'] (e1 :: e2 :: l') ⇒m λ nonE ⇒
      let m := Nat.max e1 e2 in
      f (m :: l') cons_not_nil
    | [? l' r'] l' ++ r' ⇒ (* cualquier cosa *)
    end.
```

Esta función calcula el máximo de una lista de números `nat : Set`. Dado que en el último caso de `mtmmatch`, `match` monádico generalizado, analiza una expresión con una función, y no un constructor, es imposible implementar esto sin Mtac2. Notar que tampoco podemos utilizar `mmatch` ya que el tipo que retornamos es `l' <> nil → M nat`.

Ahora supongamos que deseamos parametrizar $\mathbb{N}$ y tener una función que acepte múltiples conjuntos. Sea

```
Definition max (S: Set) : M (S → S → S) :=
  mmatch S in Set as S' return M (S' → S' → S') with
  | nat ⇒ M.ret Nat.max
  end.
```

la función que retorna la relación máximo en un conjunto S. A primera vista nuestra idea podría fucionar, es decir, conceptualmente no es incorrecta.

```
Definition list_max (S: Set) :=
  max ← max S; (* error! *)
  mfix f (l: list S) : l' <> nil → M S :=
    mtmmatch l as l' return l' <> nil → M S with
    | [? e] [e] ⇒m λ nonE⇒ M.ret e
    | [? e1 e2 l'] (e1 :: e2 :: l') ⇒m λ nonE ⇒
      m ← max e1 e2;
      f (m :: l') cons_not_nil
    end.
```

Al intentar que Coq interprete la función veremos que esta función no tipa. Esto es debido a la signatura de `bind`. Nuestro `mfix` no puede unificarse a `M B`, ya que tiene tipo `f : forall (l: list S)l' <> nil → M S`.

```
bind : forall A B, M A → (A → M B) → M B.
```

Solucionar esta situación específica no es un problema. Una alternativa es introducir los parámetros de la función y beta-expandir la definición del fixpoint. Otra es codificar un nuevo bind que tenga el tipo necesario. El problema será que ambas soluciones son específicas al problema, entonces en cada situación debemos volver a implementar alguno de estos recursos.

Es por eso que nuestro proyecto es la codificación de un nuevo meta-programa Lift que automaticamente puede generalizar meta-programas con las dependencias necesarias para que sea utilizado en el contexto. En nuestro ejemplo, con Lift podemos generalizar `bind` consiguiendo un nuevo meta-programa que se comporta como la función original pero con una signatura distinta, permitiendo su uso.

4 LIFT

Denominamos `lift` a la función desarrollada en este trabajo. La misma tiene la tarea de agregar dependencias a meta-programas de manera quasi automática: solo requiere un telescopio.

Lift se basa en analizar los tipos de las funciones y modificarlos añadiendo dependencias triviales en los tipos que se encuentran bajo la mónada, generando así nuevos meta-programas más generales. El signficado real de este funcionamiento será trabajado en este capítulo a través de ejemplos que mostrarán el comportamiento de lift.

4.1 LIFTEANDO FUNCIONES SIMPLES

Una de las funciones monádica más simples es `ret : ∀A, A → M A`, uno de los operadores monádicos. Supongamos que nos interesa tener

```
ret^ : ∀(A : nat → nat → Type), (∀ n n', A n n') → (∀ n n', M
    (A n n'))
```

Ahora, nuestro trabajo es poder definir un telescopio que se amolde a la información que necesitamos agregar. En este caso el telescopio es el siguiente: `t := [n : nat ;> n' : nat]`$_t$ dado que queremos que A dependa de dos $\mathbb{N}$. Efectivamente `ret^ := lift ret t`.

Este ejemplo es simple porque no involucra funciones. Pero en ese caso, estudiemos que sucede con `bind`.

```
bind : ∀A B, M A → (A → M B) → M B
```

Bind es el operador monádico más importante y es central en estos problemas. Supongamos que queremos utilizamos el telescopio `t := [T : Type ;> l : list T]`$_t$ donde `list T` es el tipo de las listas con elementos de tipo T. Al momento de liftearlo, no es obvio cual debería ser el resultado, así que veamoslo.

```
bind^ : ∀A B : ∀T : Type, list T → Type,
      (∀ (T : Type) (l : list T), M (A T l)) →
      (∀ (T : Type) (l : list T), A T l → M (B T l)) →
      (∀ (T : Type) (l : list T), M (B T l))
```

Lo más imporante es que si observamos la definición de esta función es sumamente simple.

```
λ(A B : ∀T : Type, list T → Type)
   (ma : ∀(T : Type) (l : list T), M (A T l))
   (f : ∀(T : Type) (l : list a), A T l → M (B T l))
   (T : Type) (l : list T) ⇒
   bind (A T l) (B T l) (ma T l) (f T l)
```

Esta definición es efectivamente la que buscabamos y funciona perfectamente. El otro aspecto que seguiremos observando es que Lift no genera información innecesaria en la función destino.

5 ASPECTOS TÉCNICOS

En esta sección discutiremos los aspectos técnicos de Lift. Comenzaremos discutiendo su funcionamiento básico y de ahí escalaremos a los detalles más profundos.

5.1 TYTREE

En términos generales Lift es un fixpoint sobre un telescopio con un gran análisis por casos sobre los tipos. Entonces surge un problema: ¿Cómo podemos hacer *pattern matching* en los tipos de manera sintáctica? La solución es utilizar un reflejo de los mismos, de manera de que podamos expresarlos de manera inductiva.

```
Inductive TyTree : Type :=
| val{m : MTele} (T : MTele_Ty m) : TyTree
| M(T : Type) : TyTree
| MFA{m : MTele} (T : MTele_Ty m) : TyTree
| In(s : Sort) {m : MTele} (F : accessor m → s) : TyTree
| imp(T : TyTree) (R : TyTree) : TyTree
| FATeleVal{m : MTele} (T : MTele_Ty m)
  (F : ∀ t : MTele_val T, TyTree) : TyTree
| FATeleType(m : MTele) (F : ∀ (T : MTele_Ty m), TyTree) : TyTree
| FAVal(T : Type) (F : T → TyTree) : TyTree
| FAType(F : Type → TyTree) : TyTree
| base(T : Type) : TyTree
.
```

Con este tipo podemos reescribir todas las signaturas de funciones. Varios de los constructores, como por ejemplo `MFA` o `FATeleVal`, tendrán sentido más adelante, dado que reflejan elementos en funciones lifteadas.

Una de las propiedades principales de este reflejo es que a primera vista parece que un tipo puede escribirse de múltiples formas en `TyTree`, pero los tratamos de manera distinta y por eso podemos plantear una biyección entre `Type` y `TyTree`. Utilizamos la función `to_ty : TyTree → Type` para transformar un `TyTree` en su `Type` correspondiente. Notar que esta función no es monádica, y eso es principal, ya que nos permite utilizar la función en las signaturas que definimos. En cambio, la función `to_tree : Type → M TyTree` necesariamente es monádica ya que debemos hacer un analisis sintáctico en los tipos de Coq. Haremos uso extensivo de `to_ty`.

Utilizaremos $\texttt{Const}_t$ para expresar `tyTree_Const`, donde `Const` representa alguno de los nombres de los constructores de la definición de `TyTree`.

Ahora tomaremos una función `f` e iremos modificando si signatura para mostrar este reflejo de tipos. Para simplificar escribiremos `P ≡ Q` para expresar que un tipo es equivalente a un `TyTree` aunque no sea técnicamente correcto en Coq.

```
f : nat → nat → nat
```

Su tipo traducido es

```
f : imp(base nat) (imp (base nat) (base nat))
```

Dado que no hay dependencias de tipos, podemos utilizar `imp`. Ahora si parametrizamos $\mathbb{N}$ por cualquier tipo.

```
∀ A, A → A → A
≡
FAType(λ A ⇒ imp(base A) (imp (base A) (base A))
```

Con `FAType` podemos observar claramente la dependencia de `A`.

Para expresar la dependencia de un valor utilizamos `FAVal`.

```
∀ A (B : A → Type) (a : A), (B a)
≡
FAType(λ A ⇒ FAType(λ B : A → Type ⇒ FAValA (λ a ⇒ base(B a))
    ))
```

El centro de nuestro trabajo son las funciones monádicas, esto significa utilizar `M`.

```
ret : ∀ A, A → M A
≡
ret : FAType(λ A ⇒ imp(base A) (M A))
```

Es importante notar que podemos encontrar usos de `M` en múltiples secciones de la signatura, solo se matcheará `M` en LIFT con el retorno de la función.

5.2 EL TIPO DE LIFT

Analicemos la definición de LIFT.

```
Fixpoint lift (m : MTele) (U : ArgsOf m) (p l : bool) (T : TyTree
    ) :
  ∀ (f : to_ty T), M m:{ T : TyTree & to_ty T} := ...
```

Dentro de esta signatura vemos elementos conocidos como el telescopio `m : MTele` que anuncia las dependencias, un `T : TyTree` que representa el tipo de la función a *liftear* y la `f : to_ty T` de tipo `T`. También conocemos

```
M m:{ T : TyTree & to_ty T}
(* Σ-type con un tipo y un elemento del mismo *)
```

En el retorno conseguimos un nuevo `T' : TyTree` que representa la signatura de la función `f` lifteada, y un elemento de tipo `T'`, es decir, la nueva función.

Ahora, ¿qué representan los argumentos que no mencionamos? Es **fácil** comprender quienes son `p` y `l`.

- p: la polaridad. Comienza con valor true. Este solo se modifica cuando matcheamos imp en Lift. No es útil para lift_in y representa...
  - p = true:
- l: comienza en false. Representa si nos encontramos a la derecha o izquierda de una implicación de manera inmediata. Es útil para...

En cuanto a U : ArgsOf m, U representa los argumentos que el telescopio añade, y es nuestro truco para poder hacer funcionar Lift, ya que nos permite transportar argumentos de manera descurrificada. Esto quiere decir que transporta a los argumentos en un "contenedor". Lo que sucede es que cuando encontremos un tipo A cualquiera en nuestra función, este tipo puede o no estar bajo la mónada. En el caso de estarlo debemos modificarlo, es decir, reemplazar A : Type por A : MTele_Ty t con t : MTele.

5.3 TYTREES MONÁDICOS

Ahora nos centraremos en cómo representar funciones lifteadas con TyTree. Esto significa entender aún más detalles de los tipos dependientes de telescopios.

En este caso observamos el tipo de ret lifteado. Es importante notar que está parametrizado a cualquier telescopio, lo que significa que liftear una función no necesariamente necesita de un telescopio específico.

```
λ m : MTele ⇒
 FATeleTypem
  (λ  A : MTele_Ty m ⇒
   imp(In Type_s (λ  a : accessor m ⇒ acc_sort a A))
   (MFA A))
```

Este es el tipo lifteado de ret. En este podemos observa el uso de FATeleType, In y MFA.

Con FATeleType podemos introducir tipos telescopios, se comporta de igual manera que FAType.

MTele_In nos permite adentrarnos a un tipo telescópico, momentáneamente introduciendo todos los argumentos con un accessor y trabajando sobre el tipo de manera directa. Dado que no tenemos interés real es usar estos argumentos del telescopio, no tenemos que hacer demasiado trabajo, simplemente generamos tipos de manera trivial, es decir, ignorando los argumentos. Esto es expresado por acc_sort a A que en verdad está produciendo el tipo $\forall x_1 \ldots x_n, A\ x_1 \ldots x_n$.

Utilizamos MFA para representar tipos monádicos cuantificados. Definimos MFA en Mtac2 de la siguiente manera.

```
Definition MFA {t} (T : MTele_Ty t) := (MTele_val
 (MTele_C Type_sort Prop_sort M T)).
```

Sea `t : MTele` de largo n y `T : MTele_Ty t`, `MFA T` representará

`∀ x₁ ... xₙ, M (T x₁ ... xₙ)`

Finalmente, en el caso anterior, interpretando los tipos de una manera más matemática, tomamos un valor `∀ x₁ ... xₙ, A x₁ ... xₙ` y retornamos `∀ x₁ ... xₙ, M (T x₁ ... xₙ)`.

En el caso de `ret`, la signatura `In Type`$_s$ `(λ a : accessor m ⇒ acc_sort a A)` es simplemente equivalente a `val A` pero Coq no puede inferir esto directamente. La forma en que hemos definido LIFT utiliza esta forma más general en todos los casos.

Si concretizamos el telescopio conseguiremos una signatura más parecida a la matemática y la función resultante será muy simple. Para mostrar esto supongamos que tenemos un telescopio `t := [x₁ : T₁;> x₂ : T₂;> x₃ : T₃]`$_t$. Luego,

```
ret^ :=
λ (A : T1 → T2 → T3 → Type)
  (x : ∀ (t1 : T1) (t2 : T2) (t3 : T3), A t1 t2 t3)
  (x1 : T1) (x2 : T2) (x3 : T3) ⇒ r (A x1 x2 x3) (A x1 x2 x3)
: ∀ T : T1 → T2 → T3 → Type,
  (∀ (t1 : T1) (t2 : T2) (t3 : T3), T t1 t2 t3) →
  ∀ (t1 : T1) (t2 : T2) (t3 : T3), M (T t1 t2 t3)
```

Solo nos falta hablar de `FATeleVal`. Tomemos una función de ejemplo con la siguiente signatura.

```
∀ (T : Type) (R : T → Type) (t : T), M (R t)
≡
FAType (λ T ⇒ FAType (λ R : T → Type ⇒ FAVal T (λ t ⇒ M (R t))
    ))
```

La traducción será muy directa.

```
FAType (λ T ⇒ FATeleType (λ R : T → Type ⇒ FATeleVal T (λ t ⇒
    M (R t))))
```

Notar que el primer constructor no es reemplazado ya que `T` no se encuentra bajo la mónada en ningún momento.

5.4 EL ALGORITMO

A continuación haremos un recorrido paso a paso de como `ret` es lifteado.

1. Matcheamos `FAType F` donde `F : Type → TyTree`. Generamos un tipo arbitrario `A` y calculamos `is_m (F A)A`. Esta función retornará `true` ya que efectivamente el tipo `A` se encuentra bajo la mónada en la signatura `F A`. Entonces generamos un nuevo `A : MTele_Ty t` aplicamos LIFTde manera recursiva sobre `F (apply_sort A U)`.

2. Ahora debemos liftear algo del siguiente tipo.

   ```
   F (apply_sort A U) ≡
   imp(base (apply_sort A U)) (M (apply_sort A U)))
   ```

Nuestra expresión matcheará con el caso `imp` en el cual comenzaremos evaluando `contains_u m U X` donde `X` será `base(apply_sort A U)`. En nuestro caso es claro que se cumple dado que hemos reemplazado `A` por un tipo descurrificado. Estos nos lleva a tener que utilizar `lift_in`.

3. Tendremos una llamada `lift_in U (base (apply_sort A U))` matcheando el caso correspondiente. `lift_in` retornará una Σ-Type con un valor `F : accessor t` $\rightarrow$ `Type`$_s$ y una prueba de que el tipo `base (apply_sort A U)` es igual a `F (uncurry_in_acc U)`. `uncurry_in_acc U` nos retorna el accessor trivial de `U`. Lo importante es que sabemos que `F (uncurry_in_acc U)` es igual al lado izquierdo de la implicación de `ret`.

4. Ahora volvemos a Lift y generamos un valor `x : X'` con

   `X' := MTele_val (MTele_In Type`$_s$ `F)`

   Es decir, un valor `x` del tipo resultante de liftear `X` en el paso anterior. Lo que resta es tomar nuestra función `f` de tipo `X'` $\rightarrow$ `Y` y liftear. Esto signfica liftear `f x`. No entraremos en los detalles específicos de como expresar `f x` ya que son meros métodos de escribirlo y no portan un valor real.

5. El último paso es `lift t U Y (f x)` sabiendo que `Y = M(apply_sort A U)`, entonces matcheamos con el caso correspondiente. Primero, lo que hacemos es abstraer a `U` de `f` obteniendo

   `f = (`λ `U` $\Rightarrow$ `to_ty (tyTree_M (apply_sort A U)))`

   y luego aplicamos `f` a `curry`, de esa manera, la función pasa a tener tipo `to_ty (MFAA)`.

   `f :` $\forall$ x_1 x_n $\Rightarrow$ `MFA(A` x_1 `...` x_n`)`

6. Finalmente, Lift retorna una `T' : TyTree` y `ret^ : to_ty (T')` con

   `T' = FATeleType(`λ `A` $\Rightarrow$ `imp(val A) (MFA A)).`

Parte III

APPENDIX

A

APPENDIX TEST

Lorem ipsum at nusquam appellantur his, ut eos erant homero concludaturque. Albucius appellantur deterruisset id eam, vivendum partiendo dissentiet ei ius. Vis melius facilisis ea, sea id convenire referrentur, takimata adolescens ex duo. Ei harum argumentum per. Eam vidit exerci appetere ad, ut vel zzril intellegam interpretaris.

More dummy text.

A.1 APPENDIX SECTION TEST

Test: Tabla A.1 (This reference should have a lowercase, small caps A if the option `floatperchapter` is activated, just as in the table itself → however, this does not work at the moment.)

LABITUR BONORUM PRI NO	QUE VISTA	HUMAN
fastidii ea ius	germano	demonstratea
suscipit instructior	titulo	personas
quaestio philosophia	facto	demonstrated

Cuadro A.1: Autem usu id.

A.2 ANOTHER APPENDIX SECTION TEST

Equidem detraxit cu nam, vix eu delenit periculis. Eos ut vero constituto, no vidit propriae complectitur sea. Diceret nonummy in has, no qui eligendi recteque consetetur. Mel eu dictas suscipiantur, et sed placerat oporteat. At ipsum electram mei, ad aeque atomorum mea. There is also a useless Pascal listing below: Listing A.1.

```
for i:=maxint downto 0 do
begin
{ do nothing }
end;
```

Listing A.1: A floating example (`listings` manual)

DECLARATION

Put your declaration here.

Córdoba, Marzo 2020

Ignacio Tiraboschi

COLOPHON

This document was typeset using the typographical look-and-feel `classicthesis` developed by André Miede and Ivo Pletikosić. The style was inspired by Robert Bringhurst's seminal book on typography "*The Elements of Typographic Style*". `classicthesis` is available for both LaTeX and LyX:

https://bitbucket.org/amiede/classicthesis/

Happy users of `classicthesis` usually send a real postcard to the author, a collection of postcards received so far is featured here:

http://postcards.miede.de/

Thank you very much for your feedback and contribution.