1. **Исправление ломаных границ исходного земельного участка**

Задача исправления границ исходного земельного участка заключается в упрощении конфигурации замкнутого полигона – простого многоугольника, соответствующего данному земельному участку. Упрощение конфигурации заключается в уменьшении числа поворотных точек, определяющих границы земельного участка, при этом требуется сохранить площадь исходного земельного участка.

В рамках решения данной задачи используется аппарат аналитической геометрии. Итоговые формулы реализованы на языке программирования Python. Представлен способ автоматизации исправления границ исходного земельного участка, включающий следующие составные части:

1. Формирование входного массива данных установленного образца. Шапка текстового (.csv) файла включает следующие поля:

number – номер исходной точки;

x, y – координаты исходной точки в плоской системе координат;

status – статус данной точки. Определяется 4 значениями:

'start' – точка начала сглаживания участка;

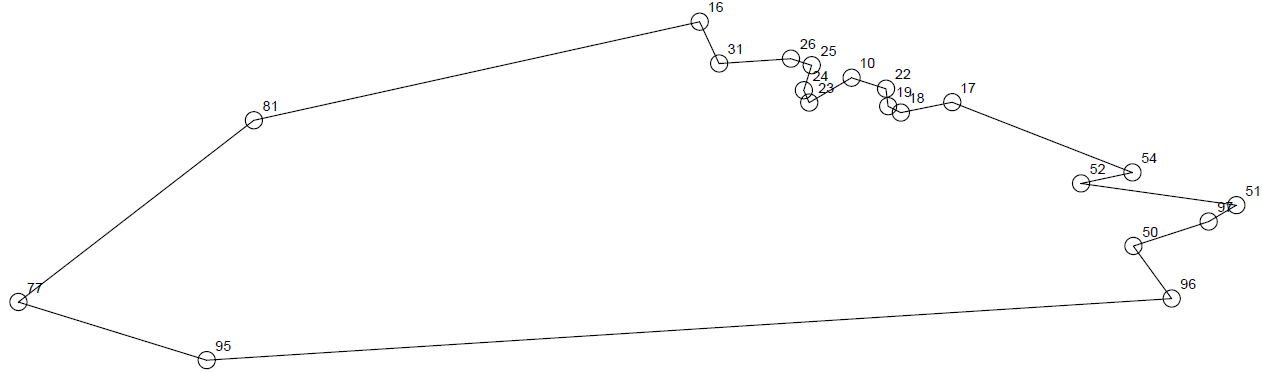
'stop' – точка конца сглаживания участка;

'+' – точка сглаживания;

' ' – пустое поле для точек, не относящихся к участку сглаживания.

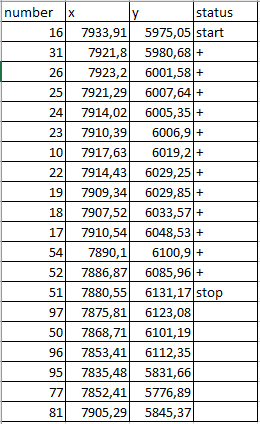
1. Функция считывания входного массива данных и его запись в переменную с использованием библиотеки Pandas.
2. Функция применения математических операций над массивом данных и записи полученных решений в новые переменные.
3. Формирование выходного массива данных.
   1. **Формирование входного массива данных**

В качестве исходных данных используется набор координат поворотных точек полигона. Точки вносятся последовательно в соответствии с движением по часовой стрелке. При этом соблюдается условие расположения точек, подлежащих сглаживанию, между точками начала и окончания сглаживания соответственно.



**Рисунок 1** – Исходный полигон земельного участка

* 1. **Функция считывания входного массива данных**



*Функция 1* - ***read\_polygon\_data(filename):***

def read\_polygon\_data(filename):

file = read\_csv(filename, sep=';', decimal=',')

return file.astype({"x": float, "y": float})

**Принимает** на вход массив данных filename (.csv).

Разделитель между значениями - ';'.

Разделитель целой и дробной части значений – ','.

Значения колонок 'x', 'y' переопределяются в качестве вещественных чисел и хранятся мантиссой и порядком (тип float).

**Возвращает** массив данных в виде числовой таблицы (программная библиотека pandas).

*Функция 2* - ***get\_polygon\_coords(dataframe,***

***inverse=False):***

def get\_polygon\_coords(dataframe, inverse=False):

columns = ["x", "y"]

if inverse:

columns.reverse()

coords = dataframe[columns].values.tolist()

return coords

**Рисунок 2** – Входной массив данных

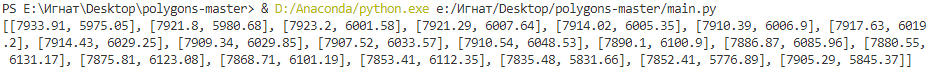
**Принимает** на вход числовую таблицу, сформированную *Функцией 1.*

В качестве входного параметра имеет булеву переменную ***inverse*** (False по умолчанию), позволяющую поменять местами колонки значений X и Y. В случае работы с аппаратом аналитической геометрии есть вероятность получить неверный результат из-за наименования осей в геодезической прямоугольной плоской системе координат, не соответствующего общепринятому наименованию осей прямоугольной системы координат на плоскости.

Выполняет преобразование в список типа list в виде: [[x1, y1], [x2, y2], …, [xn, yn]].

**Возвращает** список.

Дальнейшее хранение массива данных о геометрических элементах полигона или иной геометрической фигуры будет осуществляться в переменной с типом список (list). Такой тип данных удобен быстродействием обращения, а также возможностью итерации по списку при цикличных вычислениях (в данном случае – формула Гаусса).



**Рисунок 3** – Входной массив данных в виде списка

* 1. **Математические преобразования**

Задача исправления границ исходного земельного участка путём замены исходных поворотных точек новой/новыми поворотными точками имеет бесконечное множество решений, поэтому необходимо ввести ряд условий, чтобы найти удовлетворительные решения для частного случая и автоматизировать данный процесс.

Рассмотрим частный случай задачи:

Необходимо определить новую конфигурацию земельного участка путём замены поворотных точек, подлежащих сглаживанию, одной новой поворотной точкой, лежащей на исходном ребре многоугольника. В случае отсутствия решения расположить новую поворотную точку равноудаленно от точек начала и конца сглаживания.

**Решение:**

1. Определим разность площадей между исходным полигоном и полигоном, не включающим точки сглаживания . Для этого необходимо определить площадь каждого из полигонов, воспользовавшись формулой площади Гаусса (1) и найти разность значений площади по модулю (2):

В ходе выполнения *Функции 2* сформируем два массива данных (list) для обоих полигонов. Расчёт площади Гаусса для простого многоугольника с координатами вершин, представленными списком, реализован в *Функции 3*:

*Функция 3* - ***area\_by\_shoelace(coords):***

def area\_by\_shoelace(coords):

x, y = zip(\*coords)

return 0.5 \* np.abs(np.dot(x[:-1], y[1:]) + x[-1]\*y[0] -

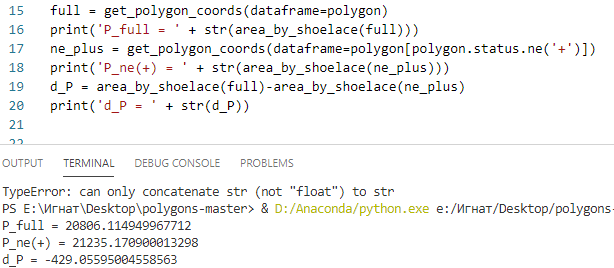
np.dot(y[:-1], x[1:]) - y[-1]\*x[0])

**Принимает** на вход массив вершин полигона в виде списка

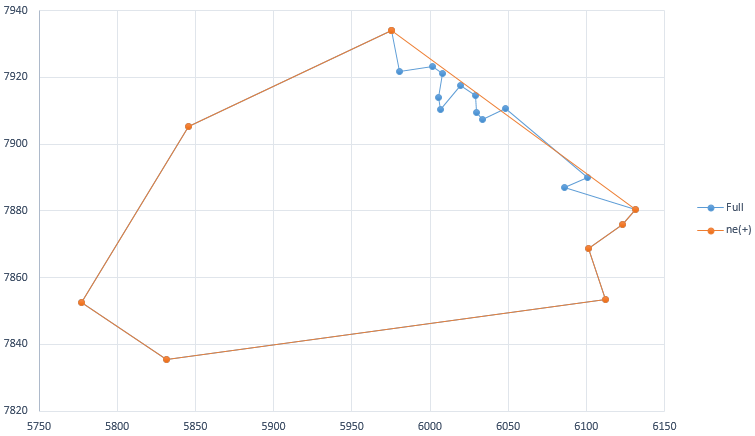
Функция zip() создает список кортежей из пар значений x, y.

Функция np.dot() выполняет перемножение значений из соответствующих кортежей списка с последующим сложением.

**Возвращает** абсолютное значение площади вещественным числом.



**Рисунок 4** – Вычисление разности площадей двух полигонов



**Рисунок 5** – Визуальное отображение двух полигонов

На первом этапе была получена величина . Площадь полигона необходимо уменьшить на величину добавлением одной новой поворотной точки.

2. Уменьшим площадь полигона на величину . Пусть - площадь треугольника, вершины при основании которого – это точки начала и окончания сглаживания (start, stop). Тогда, по условию задачи, третья вершина h треугольника расположена на исходном ребре полигона и удалена от основания треугольника (start, stop) на величину H – высоту треугольника.

Для упрощения решаемых алгебраических уравнений выполним композицию преобразований исходной системы координат. Представим основание треугольника в качестве вектора (start, stop), коллинеарного и сонаправленного вектору оси абсцисс (O', X') новой системы координат O'X'Y', а точку start вектора (start, stop) – совпадающей с началом новой системы координат O'. Выполним параллельный перенос и поворот исходной системы координат с пересчётом координат точек, участвующих в сглаживании, в новую систему координат *(Функция 4).* Для верности алгебраических операций входной массив формируется *Функцией 2* с параметром *inverse* = True:

*Функция 4* - ***transform\_coordinates(coords, start, stop):***

def transform\_coordinates(coords, start, stop):

basis = dist(start, stop)

xn, yn = start

cos, sin = np.divide(np.subtract(stop, start), basis)

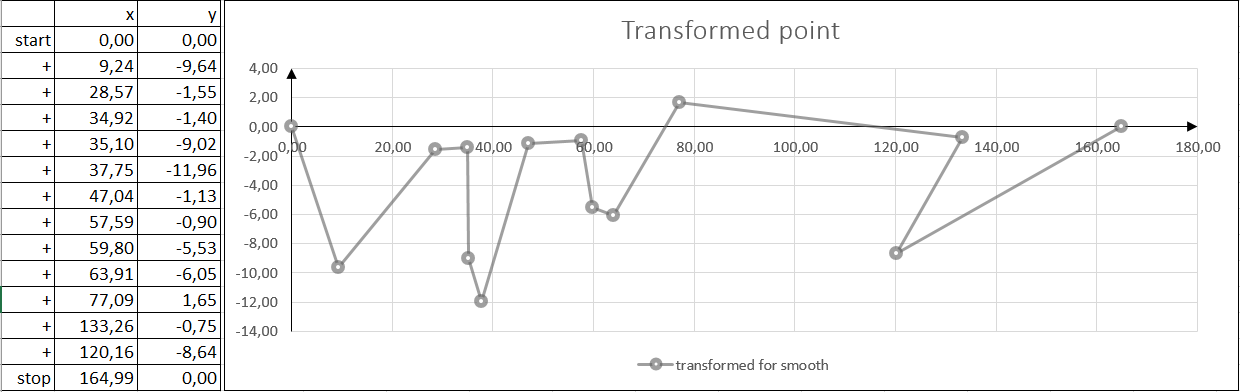
transformed = [[

(x - xn)\*cos + (y - yn)\*sin, -(x - xn)\*sin + (y - yn)\*cos] for x, y in coords]

return transformed

**Принимает** на вход массив вершин полигона, участвующих в сглаживании, в виде списка.

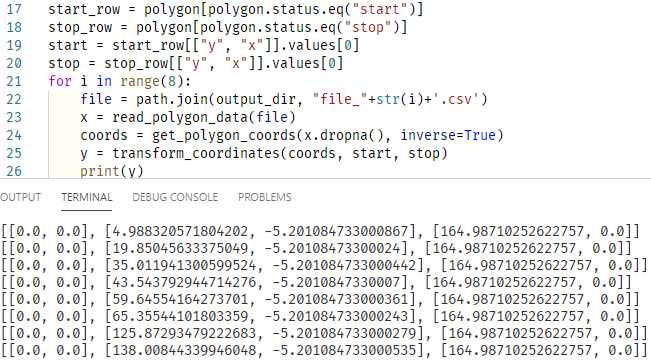
**Возвращает** массив координат в новой СК. Пересчёт в соответствии с формулами (3-7).



**Рисунок 6** – Участок сглаживания в новой системе координат

3. Заметим, что в новой системе координат значение высоты H треугольника (start, stop, h) будет соответствовать координате yh точки h. Необходимо выразить величину H (9) и выделить пары точек сглаживания, на отрезке (ребре) между которыми существует точка h. Зная величину yh = H и координаты пар точек сглаживания, составим и решим для xh алгебраическое уравнение прямой по двум точкам (11):

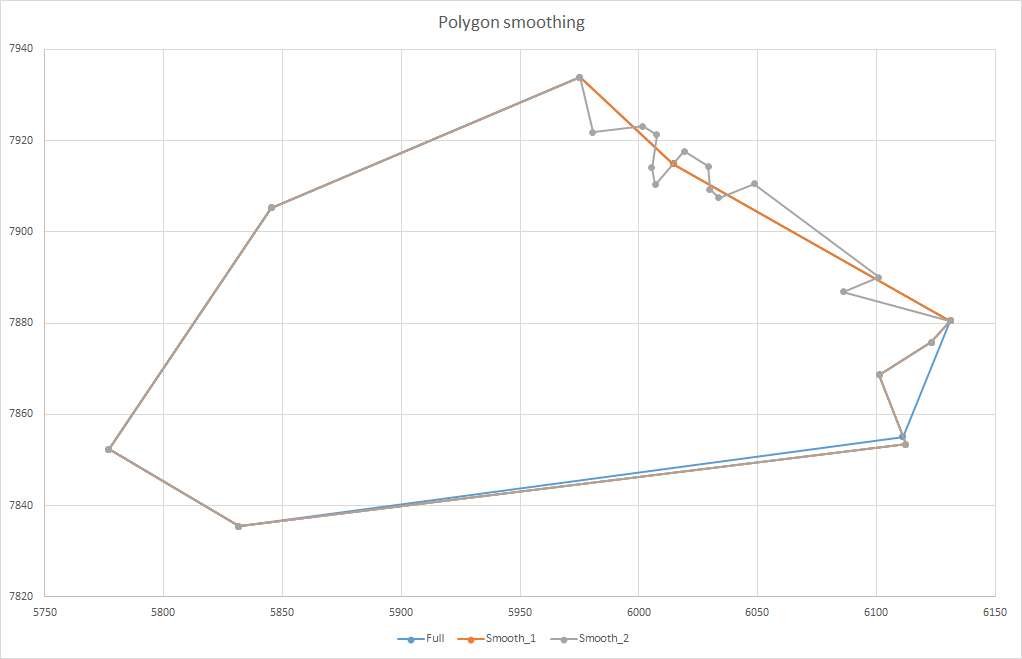
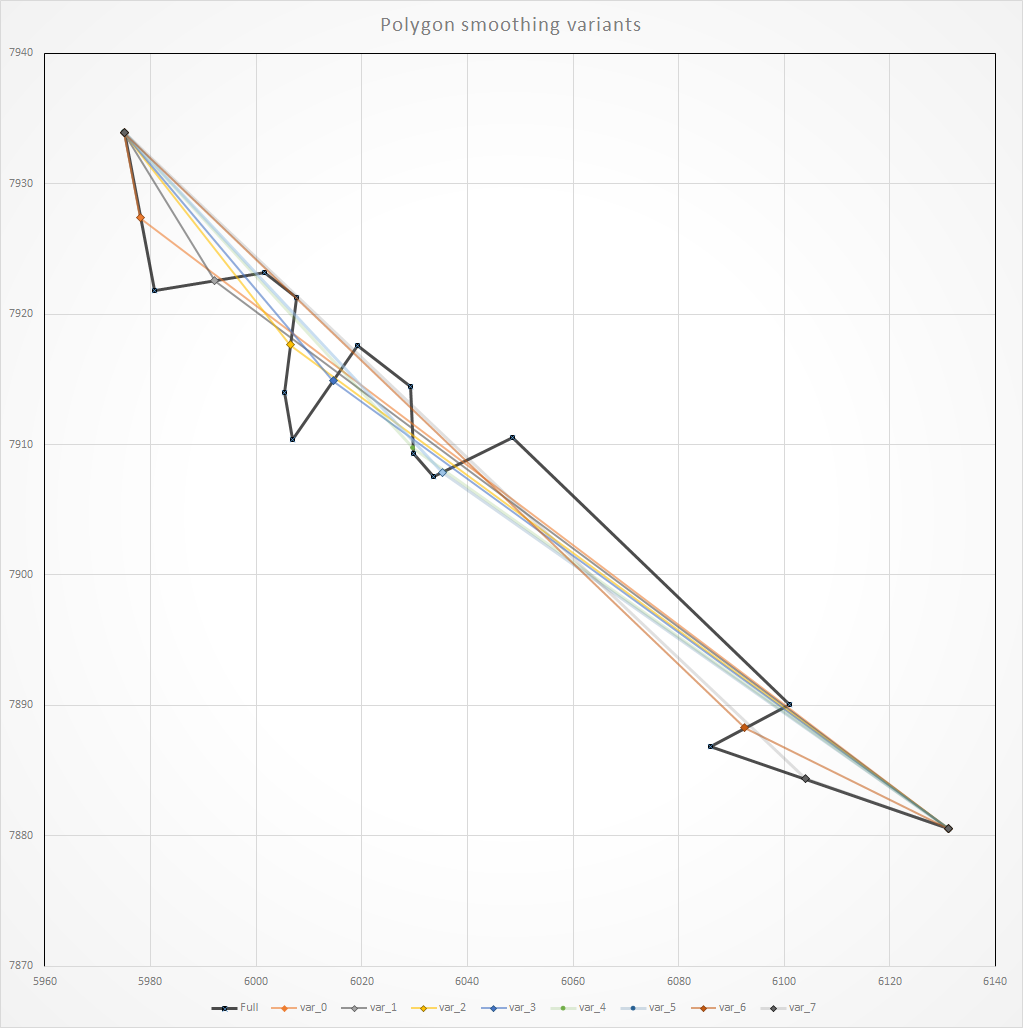
В данном случае получим 8 новых конфигураций полигона:



**Рисунок 7** – Варианты конфигурации участка сглаживания

Выполним обратное преобразование новых координат в исходную систему координат:

Отобразим варианты полученных преобразований. Выберем один из вариантов конфигурации полигона и осуществим повторное сглаживание для нового участка, если это необходимо.



**Рисунок 8** – Варианты конфигурации участка сглаживания

**Рисунок 9** – Конечная конфигурация полигона

1. **Проектирование участка дороги внутри полигона**

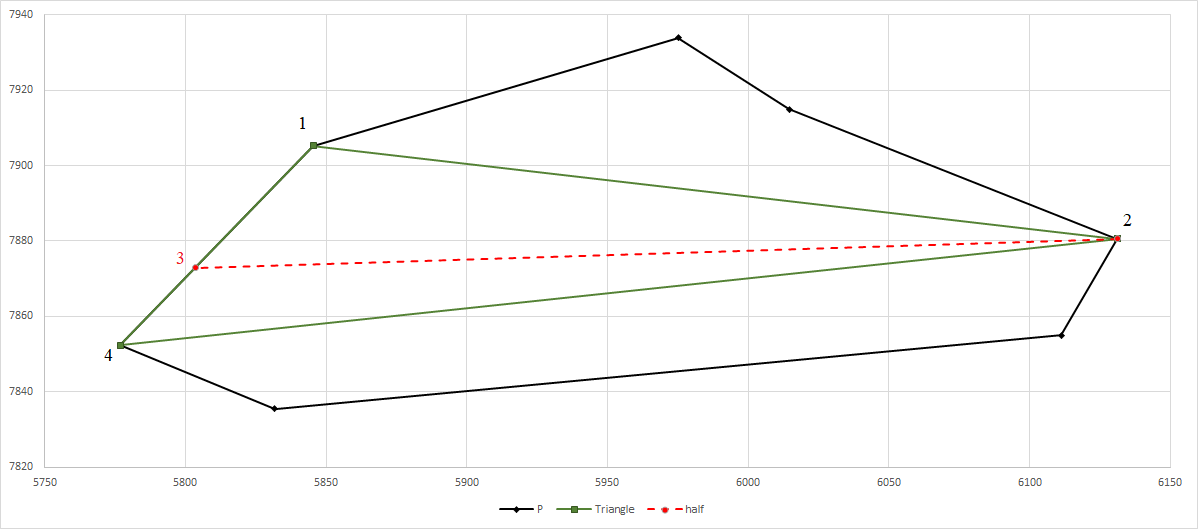
Рассмотрим задачу размещения прямой дорожной полосы заданной ширины внутри полигона, представляющего собой простой многоугольник. Условием для дальнейшего проектирования является равенство площадей двух участков внутри полигона, образованных в результате размещения дорожной полосы. Точка начала проектирования может быть выбрана произвольно. Представлено аналитическое решение для вершины 51 в качестве точки начала проектирования.

* 1. **Разделение полигона на два равных по площади участка**

1. Существует только одна линия, проходящая через точку 51 и делящая данный полигон на две равные по площади части. Определим координаты второй точки, принадлежащей данной линии и лежащей на одном из ребер данного полигона. Последующее решение предполагает попадание второй точки на ребро с удалением от вершины полигона более, чем на заданную ширину дороги, или попадание второй точки в вершину полигона. Частные случаи, при которых вторая точка находится в окрестности вершины, не рассматриваются в рамках данного исследования, и требуют написания дополнительного модуля программного кода.

Вычислим половину площади полигона . Относительно точки 51 выполним перебор пар соседних вершин полигона в направлении по часовой стрелке с последовательным вычислением площадей образующихся треугольников, используя *Формулу 3*. На каждой итерации суммируем полученную площадь с предыдущей. Остановим итерации после первого выполнения условия: .

2. Рассмотрим треугольник, на котором остановился итерационный процесс:



**Рисунок 10** – Последний треугольник и линия деления

Точка 51 обозначена как точка 2. , где – площадь треугольника (1,2,3).

Необходимо определить координаты точки 3. Составим и решим систему уравнений:

Первое уравнение – формула площади Гаусса для треугольника (1,2,3). Второе – уравнение прямой по двум точкам. Выполним ряд преобразований для выражения координат точки 3:

Выполним подстановку уравнения 2 в уравнение 1. Выполним замену: .

Выразим в первом уравнении:

Выполним замену: .

При и получим пару значений решением системы алгебраических уравнений (15). Добавим данную точку в исходный полигон.

*Функция 5* – ***split\_polygon(coords):***

def split\_polygon(coords):

total\_polygon\_area = area\_by\_shoelace(coords)

half\_area = total\_polygon\_area\*0.5

triangles = [[coords[0], \*coords[i:i+2]] for i in range(len(coords)-2)]

current\_area = 0

triangle\_areas = {i: area\_by\_shoelace(

triangle) for i, triangle in enumerate(triangles)}

for index, triangle in enumerate(triangles):

current\_area += triangle\_areas.get(index)

if current\_area >= half\_area:

break

area = triangle\_areas.get(index) - (current\_area-half\_area)

splitting\_point = find\_splitting\_point(

triangle, area)

split\_line = [coords[0], splitting\_point]

coords.insert(index+1, splitting\_point)

return [coords, split\_line]

**Принимает** на вход массив вершин сглаженного полигона.

Внутри цикла есть обращение к *Функции 6* – ***find\_splitting point(triangle, area)***. Данная функция принимает на вход координаты вершин рассматриваемого треугольника (1,2,4) и значение величины . Осуществляет вычисление координат точки [x3, y3] согласно системе алгебраических уравнений (15).

**Возвращает:**

1) Массив координат вершин полигона с новой точкой ;

2) Координаты начальной и новой точке в формате [[x2, y2], [x3, y3]].

Получены следующие координаты точки 3 в геодезической системе координат:

x3, y3 = [7872.9580198726, 5803.499841166332]

* 1. **Проектирование участка дороги заданной ширины**

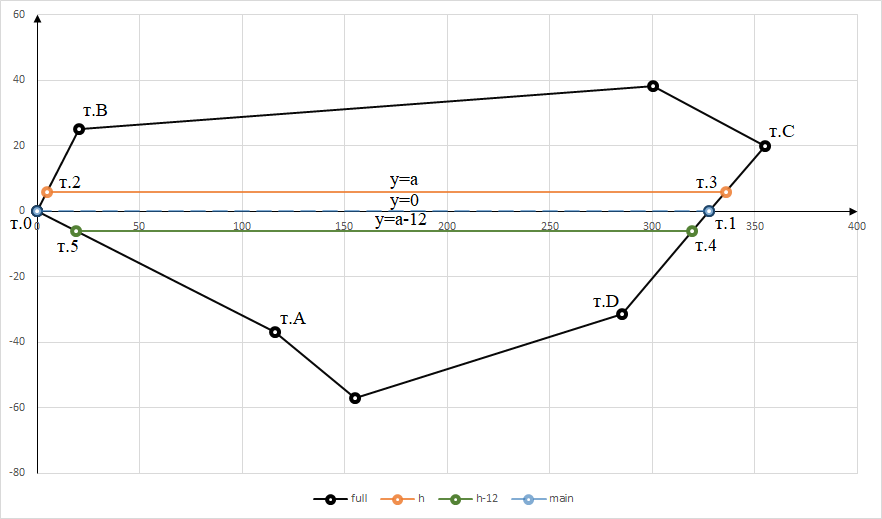
На данном этапе проектирования участка дороги необходимо расположить обочины дороги, не нарушив условия равенства площадей двух образуемых участков внутри полигона. Из-за несимметричности полигона относительно линии деления [[x2,y2], [x3,y3]] невозможно разместить обочины равноудаленно от данной линии – условие равенства площадей не будет выполнено.

Сформулируем задачу:

Через данный полигон необходимо провести две параллельные линии, удаленные друг от друга на величину ширины дороги и содержащие между собой линию деления. Внутри полигона площадь участка, образуемого линией деления и первой линией, должна быть равна площади участка, образуемого линией деления и второй линией соответственно.

Решение:

1. Выполним композицию преобразований исходной системы координат с помощью *Функции 4*. Представим линию деления в качестве вектора (2, 3), коллинеарного и сонаправленного вектору оси абсцисс (O', X') новой системы координат O'X'Y', а точку 2 вектора (2, 3) – совпадающей с началом новой системы координат O'. Данное преобразование позволит составить менее объемную систему алгебраических уравнений (16).



**Рисунок 11** – Проектирование участка дороги в новой СК

Воспользуемся новыми наименованиями вершин для удобства записи:

1) Точка 2 – т.0, Точка 3 – т.1;

2) Вершины исходного полигона записаны в направлении по часовой стрелке с началом списка в т.0. Тогда т.А, т.В – предыдущая и последующая вершины относительно т.0 соответственно, а т.С, т.D – предыдущая и последующая вершины относительно т.1 соответственно.

3) Первая линия y=a образует т.2 и т.3 на пересечении с полигоном.

4) Вторая линия y=a-12 образует т.4 и т.5 на пересечении с полигоном.

По условию фигуры (т.0, т.2, т.3, т.1) и (т.0, т.1, т.4, т.5) должны быть равны по площади (Рисунок 11). Расположение первой и второй линии определяет переменная 'a'. Решим систему алгебраических уравнений и выразим 'a'. Затем определим т.2, т.3, т.4, т.5.

Выразим площадь фигуры 1 (т.0, т.2, т.3, т.1) по формуле площади Гаусса:

Выразим площадь фигуры 2 (т.0, т.1, т.4, т.5) по формуле площади Гаусса:

Так как , то упростим выражения (16) и (17):

т.2, т.3, т.4, т.5 определим при решении систем алгебраических уравнений для двух прямых, пересекающихся в данной точке соответственно:

Для т.2:

Для т.3:

Для т.4:

Для т.5:

Рассматриваемые фигуры имеют общее основание (т.0, т.1) на оси абсцисс. Для фигуры 1 справедливо: . Для фигуры 2 справедливо: . Таким образом, для формулы площади Гаусса к данным фигурам всегда выполняется: Условие равенства площадей запишем в виде:

Запишем систему алгебраических уравнений в конечном виде:

Из уравнений 4-7 системы (25) выразим величины и подставим в уравнение 1. Заметим, что преобразования приведут уравнение 1 к квадратному уравнению вида . Выразим уравнение и его корни:

Подставив выражения в (25,1):

(27)

Выполним группировку и приведем уравнение (27) к виду :

Тогда:

Где:

В рамках решаемой задачи получены следующие корни уравнения (28):

h1, h2 = [5.856907888352913, -245.58619567227146]

Условию задачи удовлетворяет корень h1 = 5.856907888352913.

Выразим координаты точек пересечения линий y = a и y = 12-a с полигоном:

Получим координаты данных точек в исходной системе координат.