**CONTROLLO ROBUSTO DI SISTEMI A PIÙ VARIABILI**

**Indicazioni per i progetti della seconda parte del corso**

1. **Verifiche preliminari**

* Verificare le proprietà di raggiungibilità e di osservabilità, e, in caso di esito negativo, quelle di Cb-stabilizzabilità e/o di Cb-rilevabilità, per scelte opportune di Cb.
* Nel caso di impianto non quadrato, renderlo tale rimuovendo uno o piu‘ ingressi e verificare se si conserva la proprietà di raggiungibilità (o di Cb-stabilizzabilità).

1. **Progetto con controllo ottimo lineare quadratico su intervallo infinito e „Loop Transfer Recovery“**

* Primo passo: controllo ottimo con indice quadratico su intervallo infinito, supponendo che lo stato sia accessibile alla misura (ovvero: sintesi della retroazione lineare istantanea ottima dallo stato):
* a) scegliere Q = CQ'CQ, in maniera tale che la coppia (A, CQ) sia rilevabile e in modo tale che CQ(sI-A)-1Bsia quadrata, non singolare nel campo razionale e priva di zeri di trasmissione sull'asse immaginario (o, meglio ancora, con parte reale maggiore o uguale a zero);
* b) scegliere R=ρI, con ρ>0 né troppo grande (per evitare che così il controllo ottimo dia luogo a una risposta troppo lenta), né troppo piccolo (per evitare che l'andamento della curva del massimo valor singolare della matrice U0(jω) del sistema a ciclo chiuso così ottenuto sia troppo alto alle alte frequenze, a causa di un fattore di guadagno troppo elevato), e calcolare la matrice K∞ dei guadagni ottimi per tali scelte di Q e R.
* Secondo passo: ricavare il massimo valor singolare della matrice U0(jω) del sistema a ciclo chiuso così ottenuto (considerando come matrice di trasferimento nominale dell’impianto quella con uscita data dallo stato, pari a (sI-A)-1B, e ovviamente come matrice di trasferimento del controllore così ottenuto quella costante e pari alla matrice K∞ dei guadagni ottimi così calcolata, essendo il „meno“ già fornito dal „meno“ presente sul comparatore del sistema di controllo).
* Terzo passo: fare il *Loop Transfer Recovery*:
* a) verificare preliminarmente che la matrice di trasferimento nominale dell’impianto, ma considerandone l’uscita effettiva (matrice pari a C(sI-A)-1B se la matrice D di legame diretto ingresso-uscita nominale dell’impianto è nulla) sia quadrata, non singolare nel campo razionale e priva di zeri di trasmissione sull'asse immaginario;
* b) sostituire, nella stessa legge di controllo già calcolata, la retroazione (istantanea) dallo stato con quella da una stima di esso fornita da un filtro di Kalman, scegliendo per la cosiddetta „matrice di intensità“ relativa al rumore che agisce sullo stato dell‘impianto, che si è indicata con V nella parte del testo dedicata al filtro di Kalman (tale matrice entra come fattore costante, da moltiplicare poi per un impulso di Dirac, nell’espressione della matrice di covarianza di tale rumore) l’espressione V=σ2BB', con scelte crescenti del parametro reale positivo σ (in maniera tale da far tendere in teoria tale parametro all’infinito), fino a che il massimo valor singolare [il cui inverso al variare di ω va ricavato e si indicherà con *l*ma(ω)] della matrice U0(jω) del sistema a ciclo chiuso effettivamente ottenuto in tal modo, in una banda [0,ω] di larghezza molto ampia (e tanto più ampia quanto più grande è il valore scelto di σ), sia pari all'incirca al massimo valor singolare della matrice U0(jω) corrispondente al sistema di controllo con retroazione dallo stato (calcolato al secondo passo).
* Quarto passo: verificare la robustezza della stabilità del sistema di controllo che si è così ottenuto con il controllo L.Q.G./L.T.R., considerando variazioni moltiplicative riportate sull'ingresso (variando un pochino in modo casuale alcuni degli elementi delle matrici che caratterizzano l’impianto nominale, calcolando la corrispondente matrice di trasferimento dell‘impianto perturbato, la relativa variazione additiva, e da essa la corrispondente variazione moltiplicativa riportata sull‘ingresso) che per ogni ω abbiano un massimo valor singolare minore della funzione o *bound* *l*ma(ω) prima ricavata, e qualche variazione moltiplicativa che non soddisfi, di poco, in uno o più intervalli di frequenze, tale diseguaglianza, ma ciononostante sia tale che con la perturbazione ad essa corrispondente la stabilità ancora si mantenga. Tale verifica può essere compiuta calcolando semplicemente gli autovalori del sistema di controllo relativo all‘impianto perturbato. Verificare poi, per una o più variazioni moltiplicative riportate sull‘ingresso il cui massimo valor singolare violi fortemente (almeno in un intervallo di frequenze) la citata diseguaglianza, che per l’impianto così perturbato non si matenga la stabilità asintotica del sistema di controllo (dando luogo ad autovalori con parte reale non negativa; eventualmente si può simulare la risposta libera visualizzando l’esistenza di modi non convergenti o divergenti).

1. **Calcolo e predisposizione di strumenti da utilizzare nell‘applicazione della tecnica di controllo H∞**

* Calcolare anche la matrice S0(s) corrispondente al progetto già completato col controllo ottimo L.Q. e „Loop Transfer Recovery“, il massimo valor singolare di S0(jω) al variare di ω, nonché l’inverso ps(ω) di tale massimo valor singolare; correggere poi tale andamento alle frequenze elevate sì da ottenere da esso una funzione ps(ω) che tenda a zero per ω che tende all’infinito, e abbia valori comunque piuttosto minori di 1 da una certa ω in poi, e valori alquanto maggiori di 1 (e in ogni caso non minori dei valori di ps(ω)), sino a un po‘ prima di tale ω. La funzione ps(ω) così ottenuta costituirà una prima scelta della funzione ps(ω) da usare in sede di progetto con il controllo H**∞**. In vista di ciò, individuare un'approssimazione della funzione ps(ω), o meglio, e più precisamente, una funzione razionale scalare w1(s), strettamente propria e con poli e zeri con parte reale negativa, il cui modulo per s=jω sia all’incirca uguale a ps(ω) (ma preferibilmente maggiore o uguale di ps(ω)).
* Variando un pochino in modo casuale alcuni degli elementi delle matrici che caratterizzano l’impianto nominale, calcolare per ogni scelta delle matrici perturbate così ottenute la corrispondente matrice di trasferimento dell‘impianto perturbato, e poi la relativa variazione additiva δP(s). Ripetere più e più volte per ottenere un certo numero, non troppo piccolo, di tali δP(s). Ricavare poi il massimo valor singolare di ognuna di tali δP(jω) al variare di ω, e quindi una maggiorante *l*a(ω) di tutte tali funzioni di ω. Ricavare anche il massimo valor singolare, al variare di ω, della matrice V0(jω) corrispondente al progetto già completato col controllo ottimo L.Q. e „Loop Transfer Recovery“, nonché l’inverso *l*a(ω) di tale massimo valor singolare; verificare che *l*a(ω) sia maggiore o uguale di *l*a(ω) per ogni ω, e altrimenti correggere *l*a(ω) in modo che soddisfi tale proprietà. Individuare infine un'approssimazione della funzione *l*a(ω) così ottenuta, o meglio, e più precisamente, una funzione razionale propria scalare w2(s), non strettamente propria e con poli e zeri tutti con parte reale negativa, il cui modulo per s=jω sia all’incirca eguale a *l*a(ω), ma preferibilmente maggiore o uguale di *l*a(ω).
* Per ciascuna delle stesse perturbazioni delle matrici nominali dell’impianto considerate al punto precedente, o per altre ottenute similmente (e in numero simile), calcolare non soltanto la matrice di trasferimento dell‘impianto perturbato nonché la relativa variazione additiva δP(s), ma anche la corrispondente variazione moltiplicativa riportata sull’uscita δP(s). Ricavare poi il massimo valor singolare di ognuna di tali δP(jω) al variare di ω, e quindi una maggiorante *l*m(ω) di tutte tali funzioni di ω. Ricavare anche il massimo valor singolare, al variare di ω, della matrice T0(jω) corrispondente al progetto già completato col controllo ottimo L.Q. e „Loop Transfer Recovery“, nonché l’inverso *l*mb(ω) di tale massimo valor singolare; verificare che *l*m(ω) sia, per ogni ω, maggiore o uguale sia di *l*ma(ω) che di *l*mb(ω), e altrimenti correggere *l*m(ω) in modo che soddisfi tale proprietà. Individuare infine un'approssimazione della funzione *l*m(ω) così ottenuta, o meglio, e più precisamente, una funzione razionale propria scalare w3(s), non strettamente propria e con poli e zeri tutti con parte reale negativa, il cui modulo per s=jω sia all’incirca eguale a *l*m(ω), ma preferibilmente maggiore o uguale di *l*m(ω).
* Poiché w1(s), w2(s) e w3(s) debbono comunque essere scelte con poli e zeri tutti con parte reale negativa, se nella procedura prima descritta una w2(s) o una w3(s) che soddisfacesse gli altri requisiti fosse con poli sull’asse immaginario (probabilmente a causa di poli ivi di P0(s) e/o di P(s) o di zeri di trasmissione ivi di P0(s)), ciò renderebbe necessario modificare il confine di Cb, sostituendo una retta di ascissa „- alfa“, con „alfa“ opportuno (e tale che sul nuovo confine di Cb non ci siano poli o zeri di trasmissione di P0(s)) all’asse immaginario, ovvero rafforzando la semplice stabilità asintotica in una Cb-stabilità: non tanto o non solo perché altrimenti si potrebbe incorrere in una difficoltà di applicazione dei programmi disponibili per il controllo H∞, quanto per evitare che, senza tale modifica, la presenza sull’asse jω di poli di P0(s) o di zeri di trasmissione di P0(s) renda del tutto esigua la famiglia di impianti perturbati per i quali, usando z2 e/o z3 come uscite di prestazione, si riesca a garantire la stabilità asintotica; infatti per questo motivo tale eventuale presenza rende in ogni caso opportuna, o meglio necessaria, la detta modifica del confine di Cb.

1. **Progetti con l‘uso della tecnica di controllo H∞**

* Considerare come uscita di prestazione [z1‘ z2‘]‘ e [z1‘ z3‘]‘; o, se quest’ultima scelta non risulta possibile, oppure eventualmente in aggiunta, [z1‘ z2‘ z3‘]‘. Si suppone di non avere informazioni sufficienti ad effettuare l‘“equalizzazione“ delle componenti di y(t) e di u(t) per l’impianto assegnato; perciò si assume E1=I e E2=I.
* Per ciascuna di tali due o tre scelte dell’uscita di prestazione sintetizzare con i programmi disponibili un controllore che renda minore di 1 (oppure, eventualmente, renda „minima“) la norma H∞ della matrice di trasferimento complessiva tra l’ingresso esogeno considerato (il riferimento che si suppone entri direttamente sul comparatore) e l’uscita di prestazione considerata. Se, per una, o più d’una, di tali scelte, il valore γ di tale norma H∞ conseguito con il controllore sintetizzato dai programmi è (significativamente) maggiore di 1, si può cercare eventualmente di ridurre tale valore di γ, modificando una delle due, o tre, funzioni di sagomatura w1(s), w2(s) e w3(s), o correggendola in modo tale che il suo modulo per s=jω risulti un po‘ minore di prima in una o piu‘ zone di frequenza scelte opportunamente, o semplicemente con l‘aggiunta ad essa di un fattore minore di 1 (rendendo cosi‘ o meno forte la robustezza della stabilità, perché garantita per una famiglia di impianti meno ampia, o meno forte la specifica di prestazione di sensibilità, accettando un errore, o un effetto dei disturbi sull’uscita, più consistente: tipico „compromesso“ tra opposte esigenze, spesso necessario in un sistema di controllo). Se si fa una tale correzione (o qualunque altra) a una delle funzioni di sagomatura è però preferibile che la stessa funzione, corretta in tal modo, sia usata anche nell’altra, o nelle altre, sintesi in cui essa compare nominalmente: sì che per tutte le scelte dell‘uscita di prestazione, ove possibile, si usino una e una sola W1(s), una e una sola W2(s), una e una sola W3(s), rendendo più facile un confronto dei risultati ottenuti nei vari casi.
* Per ciascuna delle prime due scelte, verificare la robustezza della stabilità conseguita per il sistema di controllo ottenuto con il controllo H∞, considerando varie perturbazioni (additive nel primo caso, moltiplicative riportate sull’uscita nel secondo) in maniera simile a quanto precisato all’ultimo punto della descrizione del progetto L.Q./L.T.R., e cioè considerando alcune perturbazioni il cui massimo valor singolare sia del tutto al di sotto dell’andamento del modulo della corrispondente funzione w2(jω) o w3(jω), alcune che per uno o più intervalli di ω si trovino poco al di sopra di tale funzione maggiorante ma siano tali che per esse si mantenga la stabilità, e una (o più d’una) che, non rispettando, ma in modo più significativo, tale maggiorazione, sia tale che per essa (cioè ove l’impianto sia perturbato nel modo da essa descritto) risulti destabilizzato il sistema di controllo sintetizzato. Naturalmente, ove si sia usata [z1‘ z2‘ z3‘]‘ come uscita di prestazione, la stessa verifica può essere fatta per l’uno e per l’altro tipo di perturbazioni. In tutte tali verifiche si ricordi che, se l’impianto nominale ha una matrice di legame diretto ingresso-uscita D non nulla, di essa si deve tener conto nella riformulazione del problema di controllo, introducendo una retroazione pari a Du(t) intorno al controllore sintetizzato dai programmi di controllo H∞ (se questo non viene fatto direttamente dai programmi); e che pertanto in tal caso il „vero“ controllore, da utilizzare per analizzare il comportamento del sistema complessivo di controllo così ottenuto, non è quello fornito dal programma utilizzato, ma è il sistema la cui matrice di trasferimento in Fig. 12.5 a pag. 1074 è indicata con G(s) (quello cioè tra l’uscita del comparatore e l‘uscita del controllore sintetizzato); a meno che, come detto prima, il programma preliminarmente introduca lui stesso la retroazione pari a Du(t), fornendo poi tale G(s) (gia‘ calcolata direttamente) come matrice di trasferimento del controllore sintetizzato.
* Avendo poi sintetizzato due, o tre, differenti controllori con il controllo H∞, e un altro, prima, con la tecnica LQ/LTR, è possibile confrontare i tre, o quattro, corrispondenti sistemi di controllo dai vari punti di vista. In particolare si può calcolare la norma H∞ di W1(s)S0(s) per ciascuno di essi, ovviamente con la stessa W1(s); certamente, se si è fatta la sintesi anche con uscita di prestazione [z1‘ z2‘ z3‘]‘, il corrispondente sistema di controllo („più conservativo“) darà luogo a una norma H∞ di W1(s)S0(s) maggiore o uguale che negli altri casi. Si può altresì verificare se la norma H∞ di W2(s)V0(s) conseguita dal sistema di controllo sintetizzato con uscita di prestazione [z1‘ z2‘]‘ sia effettivamente minore di quella conseguita dagli altri due o tre sistemi di controllo (ovviamente per la stessa W2(s)). E similmente per W3(s)T0(s) e [z1‘ z3‘]‘.