Zadanie numeryczne 2

12. (**Zadanie numeryczne NUM2**) Zadane są macierze

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 2.40827208 & -0.36066254 & 0.80575445 & 0.46309511 & 1.20708553 \\ -0.36066254 & 1.14839502 & 0.02576113 & 0.02672584 & -1.03949556 \\ 0.80575445 & 0.02576113 & 2.45964907 & 0.13824088 & 0.0472749 \\ 0.46309511 & 0.02672584 & 0.13824088 & 2.05614464 & -0.9434493 \\ 1.20708553 & -1.03949556 & 0.0472749 & -0.9434493 & 1.92753926 \end{pmatrix}$$

oraz

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 2.61370745 & -0.6334453 & 0.76061329 & 0.24938964 & 0.82783473 \\ -0.6334453 & 1.51060349 & 0.08570081 & 0.31048984 & -0.53591589 \\ 0.76061329 & 0.08570081 & 2.46956812 & 0.18519926 & 0.13060923 \\ 0.24938964 & 0.31048984 & 0.18519926 & 2.27845311 & -0.54893124 \\ 0.82783473 & -0.53591589 & 0.13060923 & -0.54893124 & 2.6276678 \end{pmatrix}.$$

Zdefiniujmy wektory $\mathbf{b} \equiv (5.40780228, 3.67008677, 3.12306266, -1.11187948, 0.54437218)^T$ oraz $\mathbf{b}' \equiv \mathbf{b} + (10^{-5}, 0, 0, 0, 0)^T$. Używając wybranego pakietu algebry komputerowej lub biblioteki numerycznej, rozwiąż równania $\mathbf{A}_i\mathbf{y}_i = \mathbf{b}$ oraz $\mathbf{A}_i\mathbf{y}'_i = \mathbf{b}'$ dla $i = 1, 2$. Wyznacz $\Delta_i \equiv ||\mathbf{y}_i - \mathbf{y}'_i||_2$ oraz zinterpretuj różnicę wartości Δ_1 i Δ_2.

Wprowadzenie

Program dla dwóch różnych macierzy rozwiązuje równania z dwoma różnymi wektorami: $\vec{b}$ oraz $\vec{b}'$ będącym wynikiem zaburzenia pierwszej składowej wektora $\vec{b}$ przez błąd rzędu 10^{-5}. Następnie dla obu macierzy program oblicza Δ poprzez obliczenie normy euklidesowej z różnicy otrzymanych wektorów wynikowych $\vec{y}$ oraz $\vec{y}'$.

Celem zadania jest sprawdzenie, że macierze mogą mieć różną podatność na błędy obliczeniowe.

Wynik

Wynik oblicza program *program.py*, wykorzystując bibliotekę *numpy.linalg* do rozwiązania równania z macierzą i wyliczenia normy wektora.

Dla macierzy A_1 otrzymane wyniki to:

$\vec{y}_1 = (3.28716602,\ \ 3.8029998,\ \ 0.25146854,\ \ -1.57875474,\ \ -0.50410395)^T$

$\vec{y}'_1 = (16.74173332\ ,\ \ -14.06233583\ ,\ \ -2.70495914,\ \ -15.57494944,\ \ -25.34234556)^T$

$\boldsymbol{\Delta_1 = 36.35612431941617}$

Dla macierzy A_2 otrzymane wyniki to:

$\vec{y}_2 = (3.18374857,\ \ 3.94032033,\ \ 0.27419287,\ \ -1.47117406,\ \ -0.31318674)^T$

$\vec{y}'_2 = (3.18375389,\ \ 3.94032237,\ \ 0.27419131,\ \ -1.47117514,\ \ -0.31318814)^T$

$\boldsymbol{\Delta_2 = 0.0000061667394655004 67}$

Dyskusja wyników

W celu ułatwienia weryfikacji wyników, napisałem program *kappa.py*, który wykorzystując te same narzędzia, oblicza wartości własne oraz współczynnik $\boldsymbol{\kappa}$ dla obu macierzy. Współczynnik ten odpowiada podatności danej macierzy na błędy obliczeniowe.

Dla macierzy $\boldsymbol{A_1}$ otrzymany współczynnik $\boldsymbol{\kappa}$ wynosi około ***39 295 748***.

Dla macierzy $\boldsymbol{A_2}$, wynosi on około ***4***.

Widać więc, że mimo minimalnego błędu wielkości 10^{-5}, którym obarczony jest wektor $\vec{b}'$, macierz A_1 jest bardzo mocno podatna na błędy obliczeniowe ($\boldsymbol{\kappa}$ wielkości 10^7), co w rezultacie daje deltę wielkości 10^1.

Natomiast macierz A_2 nie jest podatna na błędy obliczeniowe ($\boldsymbol{\kappa}$ wielkości 10^0), co w rezultacie daje deltę wielkości 10^{-6}.

Więc widać, że otrzymany wynik zgadza się z oczekiwanym, w macierzy A_1 podatnej na błędy obliczeniowe błąd wielkości 10^{-5} skutkuje dużą różnicą wyników, podczas gdy dla macierzy A_2 nie podatnej na błędy obliczeniowe, różnica wyników jest minimalna.