Metody numeryczne 2021/2022: lista 5

1. Sformułuj zagadnienie interpolacji.

2. Niech funkcja $f(x)$ przyjmuje w punktach $x_0, \ldots, x_n$ wartości $y_0 = f(x_0), \ldots y_n = f(x_n)$. Udowodnij, że istnieje *dokładnie jeden* wielomian interpolacyjny stopnia nie większego niż n, który w punktach x_i przejmuje wartości y_i.

3. (Wzór interpolacyjny Lagrange'a) Przyjmijmy znów $y_i \equiv f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$. Zapiszmy wielomian interpolacyjny jako $W_n(x) \equiv y_0\Phi_0(x) + \ldots + y_n\Phi_n(x)$, gdzie $\Phi_i(x)$ są wielomianami stopnia nie większego niż n, które spełniają warunek $\Phi_j(x_i) \equiv \delta_{ij}$. Biorąc pod uwagę, że $W_n(x_i) \equiv f(x_i)$ dla $i = 0, \ldots, n$, znajdź postać wielomianów $\Phi_i(x)$.

4. Znajdź wielomian interpolacyjny trzeciego stopnia, który w punktach $-1, 0, 1, 2$ przyjmuje wartości $2, 1, 4, 5$.

5. **(Zadanie numeryczne NUM6)** Znajdź i wykreśl wielomiany interpolacyjne stopnia n, $W_n(x)$, na przedziale $x \in \langle -1, 1\rangle$ dla funkcji $y(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ dla

   (a) jednorodnych węzłów interpolacji, tj. $x_i = -1 + 2\frac{i}{n+1}$ $(i = 0, \ldots, n)$,

   (b) $x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2(n+1)}\pi\right)$ $(i = 0, \ldots, n)$.

   Dla węzłów z pkt. (a) i (b) wybierz kilka wartości n i porównaj zachowanie się tych wielomianów dla dużego n (najlepiej w tym celu wykreślić $W_n(x)$ dla kilku n na jednym wykresie). Zrób to samo dla funkcji $\tilde{y}(x) = \frac{1}{1+x^2}$, czy jest jakaś różnica jakościowa? Przy rozwiązywaniu tego zadania nie można korzystać z procedur bibliotecznych służących do interpolacji (chyba, że do sprawdzenia wyniku), algorytm należy zaimplementować samodzielnie.

6. Sformułuj problem interpolacji za pomocą funkcji sklejanych ("splajnów").

7. Niech zadana będzie jednorodna siatka $n+1$ punktów $x_i = a + (b-a)\cdot\frac{i}{n}$ $(i = 0, \ldots, n)$, dla której znamy wartości funkcji $f(x_i) \equiv y_i$. Pokaż, że funkcja zadana przedziałami w następujący sposób:

$$s(x) \equiv \xi_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h} + \xi_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h} + A_i(x - x_{i-1}) + B_i \quad \text{dla } x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle,$$

   gdzie $h \equiv (b-a)/n$, $A_i \equiv \frac{y_i - y_{i-1}}{h} - \frac{h}{6}(\xi_i - \xi_{i-1})$, $B_i \equiv y_{i-1} - \xi_{i-1}\frac{h^2}{6}$, spełnia następujące warunki:

   (a) $s(x)$ jest ciągła na przedziale $\langle a, b\rangle$,

   (b) $s(x_i) = y_i$ dla $i = 0, \ldots, n$,

   (c) $s''(x_i) = \xi_i$,

   (d) $s(x)$ ma ciągłą drugą pochodną na przedziale $\langle a, b\rangle$.

8. Na funkcję $s(x)$ z poprzedniego zadania nałóżmy dodatkowe warunki: $s'(x_i + 0^+) \equiv s'(x_i - 0^+)$ dla $i = 1, \ldots, n-1$ (tj. ciągłość pierwszej pochodnej w punktach sklejania). Wyprowadź równania na ξ_i wynikające z tego założenia. Przedyskutuj postać równań dla $\xi_0 = \xi_n = 0$. Jak można te równania efektywnie rozwiązywać?

9. **(Zadanie numeryczne NUM7)** Zadany jest ciąg punktów $x_i = -1 + 2\frac{i}{n}$, $n = 0, \ldots, n$ oraz odpowiadających im wartości funkcji $y_i \equiv f(x_i)$. Przyjmijmy, że $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ (por. zadanie NUM6). Skonstruuj naturalny splajn kubiczny $s(x)$ przechodzący przez punkty (x_i, y_i). Wykreśl, na jednym wykresie, funkcje $f(x)$ i $s(x)$ na przedziale $\langle -1, 1\rangle$ dla kilku wyborów parametru n. Przeanalizuj, jak zachowuje się różnica $|f(x) - s(x)|$ pomiędzy węzłami interpolacji.