Metody numeryczne 2021/2022: lista 3

1. Niech $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^N$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. Zdefiniujmy macierz $\mathbf{P} = \mathbb{I} - 2\frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^T}{||\mathbf{u}||^2}$.

   (a) Wyznacz $\mathbf{P}^{-1}$.

   (b) Znajdź wektory i wartości własne macierzy $\mathbf{P}$.

   (c) Oblicz wyznacznik macierzy $\mathbf{P}$.

   (d) Podaj interpretację geometryczną macierzy $\mathbf{P}$.

2. Przyjmijmy $\mathbf{u} \equiv \mathbf{x} \mp ||\mathbf{x}||\mathbf{e}_1$, gdzie $\mathbf{e}_1 \equiv (1, 0, \ldots, 0)$. Niech $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$. Oblicz $\mathbf{Px}$ dla macierzy $\mathbf{P}$ z 1. zadania.

3. Używając transformacji Householdera dokonaj rozkładu QR następujących macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ -4 & 0 & -4 \\ -4 & -3 & -4 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -2 & -4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   oraz rozwiąż układy równań $\mathbf{Ax} = (1, 1, 1)^T$, $\mathbf{Bx} = (1, 2, 3)^T$.

4. Metodą obrotów Givensa znajdź faktoryzację QR następującej macierzy:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{6} + \frac{3}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{11}{4}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{6} + \frac{3}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{9}{4}\sqrt{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

5. Udowodnij, że dla nieosobliwej macierzy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ rozkład $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ ($\mathbf{Q}$ – macierz ortogonalna, $\mathbf{R}$ – macierz trójkątna górna) jest jednoznaczny jeśli zażądamy, że elementy na diagonali macierzy $\mathbf{R}$ są dodatnie.

6. Udowodnij wzór Shermana-Morrisona

$$\left(\mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T\right)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}}$$

   dla $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det\mathbf{A} \neq 0$, $1 + \mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u} \neq 0$ oraz $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Do czego można ten wzór wykorzystać?

7. **(zadanie numeryczne NUM4)** Rozwiąż równanie macierzowe $\mathbf{Ay} = \mathbf{b}$ dla

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 8 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 10 & 8 & \ldots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 10 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 10 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

   oraz $\mathbf{b} \equiv (5, \ldots, 5)^T$. Macierz $\mathbf{A}$ ma liczby 10 na diagonali, 8 na pierwszej pozycji nad diagonalą, a pozostałe elementy są równe 1. Wymiar macierzy ustalamy na $N = 50$. Odpowiedni algorytm, podobnie jak dla zadania **NUM3**, należy zaimplementować samodzielnie (mile widziane jest sprawdzenie wyniku przy użyciu procedur bibliotecznych lub pakietów algebry komputerowej).