Metody numeryczne 2021/2022: lista 4

1. Przedstaw metody Jacobiego i Gaussa-Seidela.

2. Udowodnij, że jeżeli $||\mathbf{M}||_p < 1$, to macierz $\mathbb{1} - \mathbf{M}$ jest nieosobliwa ($\mathbb{1}$ oznacza macierz jednostkową).

3. Niech $\mathbf{M}$ oznacza macierz rzeczywistą. Zdefiniujmy ciąg $\mathbf{x}^{(i+1)} = \mathbf{M}\mathbf{x}^{(i)} + \mathbf{b}$ ($\mathbf{x}^{(i)}$ – wektory). Pokaż, że (dla dowolnego $\mathbf{b}$ i $\mathbf{x}^{(0)}$) ciąg $\mathbf{x}^{(n)}$ jest zbieżny jeśli $||\mathbf{M}||_p < 1$.

4. Pokaż, że jeśli macierz $\mathbf{A}$ jest silnie diagonalnie dominująca, to metoda Jacobiego rozwiązania układu $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{b}$ jest zbieżna. **Wskazówka:** niech zadany będzie rozkład $\mathbf{A} = \mathbf{D}+\mathbf{L}+\mathbf{U}$ ($\mathbf{D}$ – macierz diagonalna, $\mathbf{L}/\mathbf{U}$ – macierz poddiagonalna/naddiagonalna). Oszacuj $||\mathbf{D^{-1}}(\mathbf{L}+\mathbf{U})||_\infty$.

5. Rozważmy układ równań $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Niech macierz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ będzie symetryczna i dodatnio określona. Zdefiniujmy $\mathbf{r}_1 \equiv \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_1$, gdzie $\mathbf{x}_1$ jest dowolnie wybranym “punktem startowym”, oraz $\mathbf{p}_1 \equiv \mathbf{r}_1$. Zadajmy następującą iterację:

$$\begin{cases} \alpha_k = \frac{\mathbf{r}_k^T\mathbf{r}_k}{p_k^T\mathbf{A}p_k}, \\ \mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k - \alpha_k\mathbf{A}\mathbf{p}_k, \\ \beta_k = \frac{\mathbf{r}_{k+1}^T\mathbf{r}_{k+1}}{\mathbf{r}_k^T\mathbf{r}_k}, \\ \mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{r}_{k+1} + \beta_k\mathbf{p}_k, \\ \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k\mathbf{p}_k. \end{cases}$$

   Udowodnij, że:

   (a) dla $i > j$ zachodzi $\mathbf{r}_i^T\mathbf{r}_j = 0$, $\mathbf{r}_i^T\mathbf{p}_j = 0$, $\mathbf{p}_i^T\mathbf{A}\mathbf{p}_j = 0$,

   (b) $\mathbf{x}_{N+1}$ jest ścisłym rozwiązaniem równania $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (przy założeniu arytmetyki dokładnej).

   Wskazówka: dowód w pkt. (a) można przeprowadzić indukcyjnie.

6. **(zadanie numeryczne NUM5)** Rozwiąż układ równań

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0.2 & & & & \\ 1 & 3 & 1 & 0.2 & & & \\ 0.2 & 1 & 3 & 1 & 0.2 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & & 0.2 & 1 & 3 & 1 \\ & & & & 0.2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \dots \\ N-1 \\ N \end{pmatrix}$$

   dla $N = 100$ za pomocą metod Jacobiego i Gaussa-Seidela. Przedstaw graficznie różnicę pomiędzy pomiędzy dokładnym rozwiązaniem a jego przybliżeniami w kolejnych iteracjach wybierając kilka zestawów punktów startowych. Na tej podstawie porównaj dwie metody.