Grzegorz Mikołajczyk

Zadanie numeryczne 1

6. (**Zadanie numeryczne NUM1**) Napisz program wyliczający przybliżenie pochodnej ze wzorów:

   (a) $D_h f(x) \equiv \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$,

   (b) $D_h f(x) \equiv \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$.

   Przeanalizuj, jak zachowuje się błąd $|D_h f(x) - f'(x)|$ dla funkcji $f(x) = \cos(x)$ oraz punktu $x = 0.3$ przy zmianie parametru h dla różnych typów zmiennoprzecinkowych (float, double). Wykreśl $|D_h f(x) - f'(x)|$ w funkcji h w skali logarytmicznej. Poeksperymentuj również używając innych funkcji.

Wprowadzenie

Program liczy przybliżenie pochodnej funkcji $f(x) = cos(x)$ w punkcie $x = 0.3$ przez podstawienie odpowiednio małej wartości h do wzoru który normalnie liczy granicę dla $h \to 0$.

Następnie program oblicza błąd wyliczonego przybliżenia, przez porównanie go z rzeczywistą wartością pochodnej w punkcie x oraz rysuje wykres pokazujący jak zmienia się otrzymany błąd obliczeniowy w zależności od wybranego h.

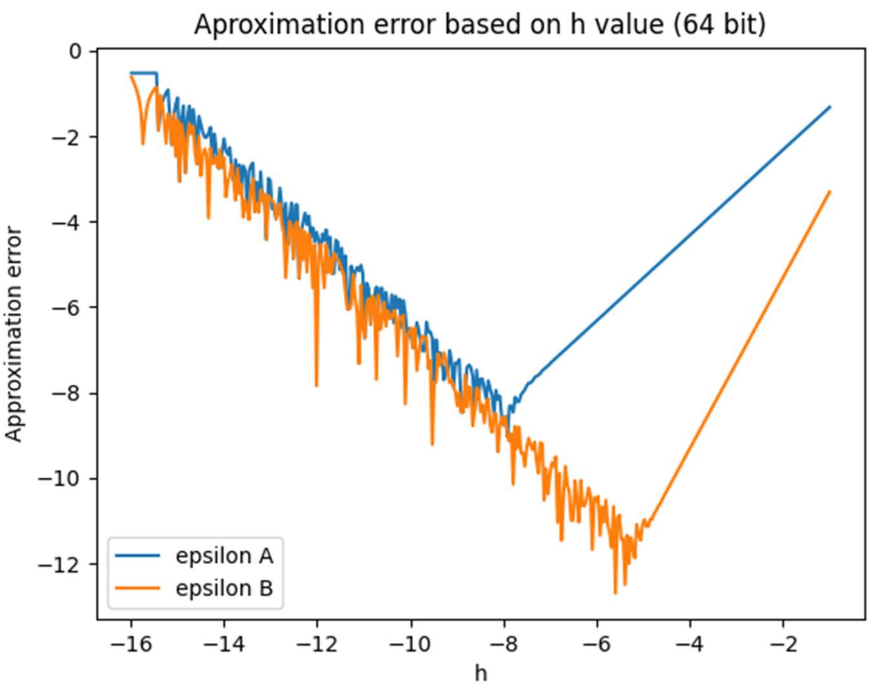
Wynik

Do rozwiązania zadania użyłem dwóch programów, które w działaniu są prawie identyczne, z tym, że *program32.py* operuje na 32 bitowych liczbach i zakresie $h \in [0.1, 10^{-7}]$, a *program64.py* na 64 bitowych liczbach i zakresie $h \in [0.1, 10^{-16}]$.

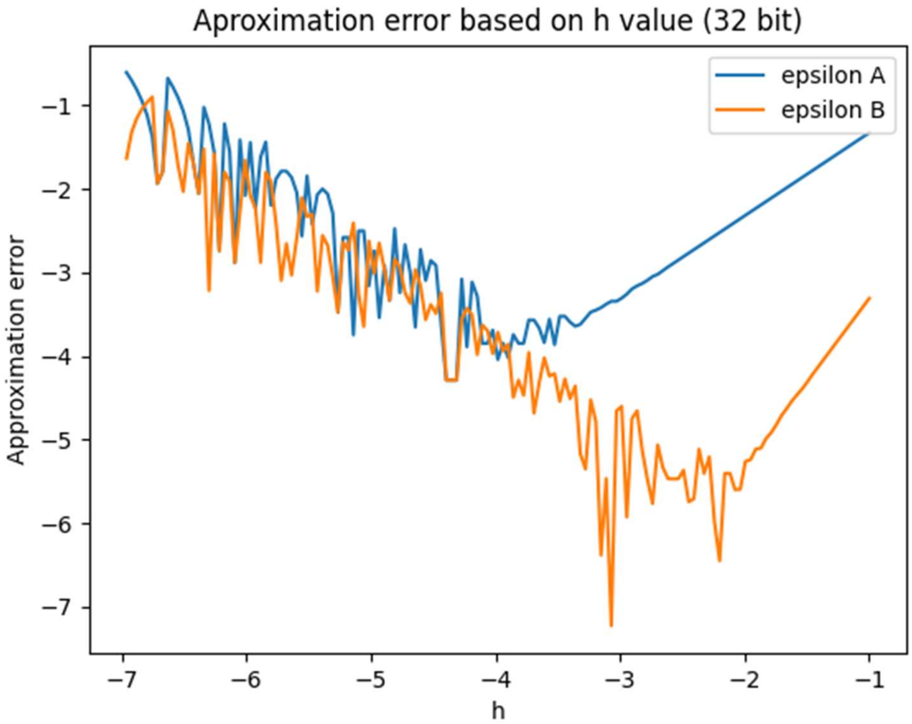
Programy te obliczają epsilon dla obu wzorów przez obliczenie wartości bezwzględnej z różnicy przybliżenia danego wzorem oraz rzeczywistej wartości pochodnej funkcji $f(y) = cos(x)$.

Do obliczeń na typach zmiennoprzecinkowych została wykorzystana biblioteka *numpy*, a do wygenerowania wykresów *matplotlib*.

Wykres otrzymany dla działań na 64-bitowych liczbach:



Wykres otrzymany dla działań na 32-bitowych liczbach:



Dyskusja wyników

Otrzymany wykres błędu dla równania a przypomina literę V, ponieważ w miarę jak zmniejszamy h, zbliżamy się do 0 co precyzyjniej odpowiada oczekiwanej granicy ze wzoru – stąd widać jak na prawej stronie wykresu płynnie zmniejsza się błąd. Jednak we wzorze występuje również dzielenie przez h, co sprawia że gdy h jest bardzo małe, błędy spowodowane przez określoną precyzję działań zmiennoprzecinkowych na komputerze są bardzo mocno powielone. Z tego powodu po pewnym optymalnym h^*, wzięcie mniejszego h powoduje wzrost błędu, co powoduje nieregularną lewą stronę wykresu, na której widać powielone błędy obliczeniowe.

Wykres błędu dla równania b osiąga lepszą maksymalną precyzję, co jest spowodowane użyciem innego wzoru na przybliżenie, w którym dzielimy przez liczbę $2h$, co redukuje błędy spowodowane dzieleniem przez małą liczbę.

W przypadku działań na 32 bitowych typach zmiennoprzecinkowych, wykresy mają podobne kształty, jednak znacznie mniejszą maksymalną precyzję.

Dla liczb 64 bitowych otrzymane wartości h^* to:

a) $h^* = 1.22 \cdot 10^{-8}$, $\varepsilon(h^*) = 9.31 \cdot 10^{-10}$
b) $h^* = 2.54 \cdot 10^{-6}$ $\varepsilon(h^*) = 2.01 \cdot 10^{-13}$

A dla liczb 32 bitowych:

a) $h^* = 4.88 \cdot 10^{-5}$, $\varepsilon(h^*) = 5.18 \cdot 10^{-5}$
b) $h^* = 8.51 \cdot 10^{-4}$ $\varepsilon(h^*) = 5.96 \cdot 10^{-8}$