Grzegorz Mikołajczyk

Zadanie numeryczne 6

5. **(Zadanie numeryczne NUM6)** Znajdź i wykreśl wielomiany interpolacyjne stopnia n, $W_n(x)$, na przedziale $x \in \langle -1, 1 \rangle$ dla funkcji $y(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ dla

   (a) jednorodnych węzłów interpolacji, tj. $x_i = -1 + 2\frac{i}{n+1}$ $(i = 0, \ldots, n)$,

   (b) $x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2(n+1)}\pi\right)$ $(i = 0, \ldots, n)$.

   Dla węzłów z pkt. (a) i (b) wybierz kilka wartości n i porównaj zachowanie się tych wielomianów dla dużego n (najlepiej w tym celu wykreślić $W_n(x)$ dla kilku n na jednym wykresie). Zrób to samo dla funkcji $\tilde{y}(x) = \frac{1}{1+x^2}$, czy jest jakaś różnica jakościowa? Przy rozwiązywaniu tego zadania nie można korzystać z procedur bibliotecznych służących do interpolacji (chyba, że do sprawdzenia wyniku), algorytm należy zaimplementować samodzielnie.

Wprowadzenie

Celem zadania jest napisanie programu znajdującego wielomiany interpolacyjne danych funkcji, korzystając z danych wzorów na siatki punktów.

Wynik

Podpunkty a i b zadania rozwiązują odpowiednio programy *a.py* oraz *b.py* wykorzystujące do tego funkcję importowaną z pliku *shared.py*, która generuje funkcje interpolacyjne za pomocą wzoru interpolacyjnego Lagrange'a. Program korzysta z bibliotek *numpy* oraz *matplotlib*.

Wzory na wielomian interpolacyjny stopnia n wykorzystane w programie:

$$W_n(x) = \sum_i y_i \, \phi_i(x)$$

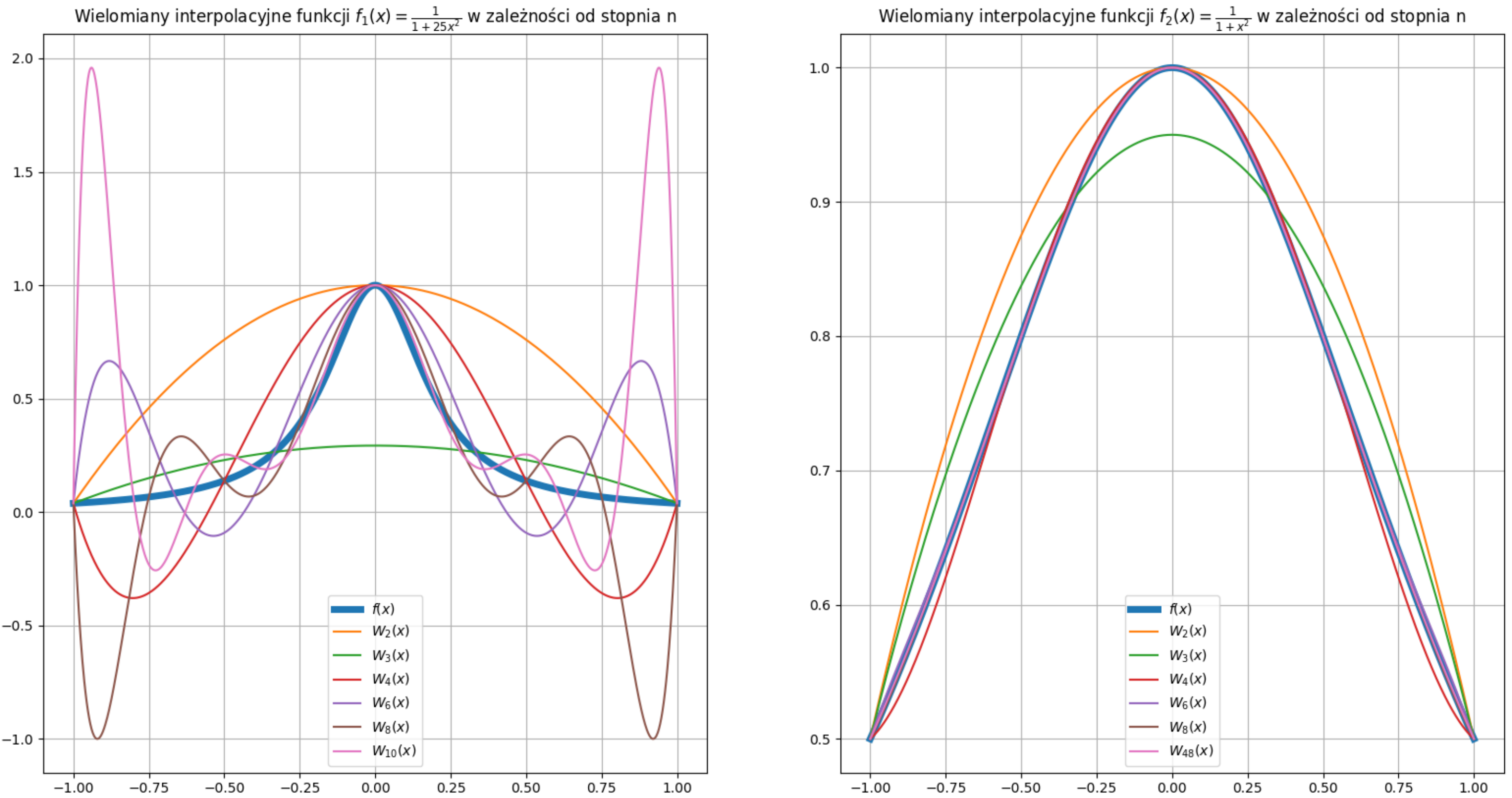
$$\phi_i(x) = \frac{(x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i+1}) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdot \ldots \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1}) \cdot \ldots \cdot (x_i - x_n)}$$

Program korzysta z funkcji przechowywanej w pliku *shared.py*, która przyjmuje jako parametr listę punktów interpolacyjnych i zwraca funkcję, zwracającą wartości wielomianu interpolacyjnego, wygenerowaną na podstawie otrzymanej listy punktów. Działanie programu sprowadza się do wybrania parametru n, wygenerowania punktów za pomocą danego wzoru na siatkę punktów, wygenerowania wielomianu na podstawie siatki i wyświetlenia tego wielomianu na wykresie.

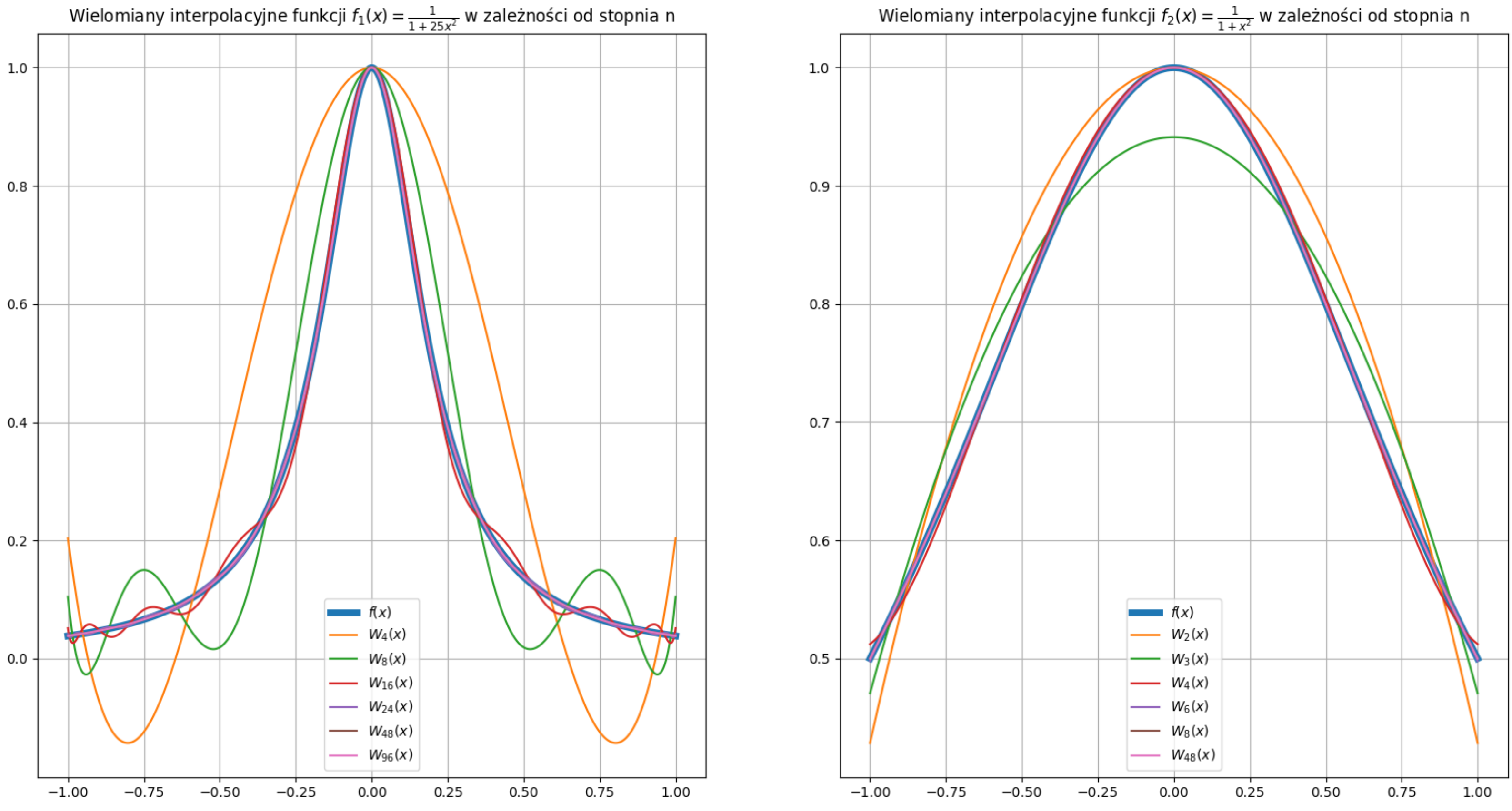
Grzegorz Mikołajczyk

Otrzymane wykresy:

Interpolacja wybranych funkcji za pomocą siatki $x_i = -1 + 2\frac{i}{n}$



Interpolacja wybranych funkcji za pomocą siatki $x_i = cos(\frac{2i+1}{2(n+1)}\pi)$



Dyskusja wyników

Dla podpunktu **a** węzły interpolacyjne były generowane za pomocą siatki o jednorodnym rozkładzie.

Dla pierwszego wykresu funkcji f_1 największe n wynosi 10, ponieważ dla stopni wyższych, wykres stawał się całkowicie nieczytelny, przez bardzo duże wartości blisko krańców, które przesuwały skalę wykresu czyniąc pozostałe wielomiany niewidoczne. Widać tutaj bardzo mocne oscylacje Rungego, już przy stosunkowo niewielkich stopniach wielomianów. Widać też na podstawie $W_3(x)$, że wielomiany niskiego nieparzystego stopnia (czyli utworzone na podstawie parzystej liczby punków), nie mają punktu interpolacji w środku wykresu, co powoduje „zgubienie” uniesienia na środku wykresu.

Natomiast na pierwszym wykresie funkcji f_2 widać, że jest ona bardzo dobrze przybliżana przez wielomiany, gdzie wraz ze stopniem wielomianu wzrasta precyzja przybliżenia. Już dla stopnia 4, przybliżenie jest dosyć precyzyjne, a dla wyższych stopni wykresy wielomianów zlewają się z wykresem funkcji.

Dla podpunktu **b** węzły interpolacyjne były generowane za pomocą siatki próbkującej funkcję znacznie częściej na jej krawędziach, w celu redukcji efektu oscylacji Rungego.

Na drugim wykresie funkcji f_1 widać, że zastosowana siatka przynosi dużo lepsze efekty, wraz ze wzrostem stopnia wielomianu rośnie też precyzja przybliżenia funkcji i o ile oscylacje na krańcach są widoczne dla małych n, dla większych praktycznie znikają, co daje bardzo dobrze przybliżenie funkcji przy odpowiednio dużym n.

Natomiast na drugim wykresie funkcji f_2 widać, że precyzja wielomianów nie uległa znaczącym zmianom, poza tym, że $x_i = cos\left(\frac{2i+1}{2(n+1)}\pi\right)$ nie jest w stanie przyjąć wartości 1 ani -1, przez co nie ma węzłów interpolacji na samych końcach przedziału, co skutkuje nieprecyzyjnymi przybliżeniami na końcu przedziału przez wielomiany niskiego stopnia.