

Zadanie numeryczne 3

7. (zadanie numeryczne NUM3) Wyznacz $\mathbf{y} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$ dla

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1.2 & \frac{0.1}{1} & \frac{0.4}{1^2} & & & & & & & \\ 0.2 & 1.2 & \frac{0.1}{2} & \frac{0.4}{2^2} & & & & & & \\ & 0.2 & 1.2 & \frac{0.1}{3} & \frac{0.4}{3^2} & & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & & & & 0.2 & 1.2 & \frac{0.1}{N-2} & \frac{0.4}{(N-2)^2} & \\ & & & & & & 0.2 & 1.2 & \frac{0.1}{N-1} & \\ & & & & & & & 0.2 & 1.2 & \end{pmatrix}$$

oraz $\mathbf{x} = (1, 2, \dots, N)^T$. Ustalamy $N = 100$. Oblicz również wyznacznik macierzy \mathbf{A} . Zadanie rozwiąż właściwą metodą (uzasadnij wybór) i wykorzystaj strukturę macierzy (w przeciwnym wypadku zadanie nie będzie zaliczone). Algorytm proszę zaprogramować samodzielnie – nie należy stosować procedur bibliotecznych z zakresu algebry liniowej ani pakietów algebry komputerowej (chyba, że do sprawdzenia swojego rozwiązania, co zawsze jest mile widziane).

Wprowadzenie

Celem zadania jest napisanie programu rozwiązującego równanie z dużą macierzą wstęgową oraz obliczającego jej wyznacznik. Program nie powinien wykorzystywać gotowych procedur algebry oraz powinien w optymalny sposób przechowywać macierz w pamięci.

Wynik

Problem rozwiązuje program [program.py](#), który oprócz wbudowanych funkcji pythona wykorzystuje tylko funkcję [array](#) z biblioteki [numpy](#) w celu bardziej przejrzystego wyświetlenia wyniku.

Program ten najpierw generuje i zapisuje wejściową macierz \mathbf{A} w liście $\text{N}[4]$, zapisując tylko wartości ze wstęg.

Następnie program przeprowadza rozkład LU w strukturze tej macierzy, korzystając ze wzorów iteracyjnych dla tej macierzy, wyprowadzonych ze wzorów ogólnych na elementy macierzy \mathbf{L} i \mathbf{U} :

$$\begin{aligned} u_{ii} &= a_{ii} - \sum_{k < i} l_{ik} u_{ki} = a_{ii} - \overbrace{l_{i,i-1} u_{i-1,i}} - \overbrace{l_{i,i-2} u_{i-2,i}} - \dots = a_{ii} - l_{i,i-1} u_{i-1,i} \\ u_{i,i+1} &= a_{i,i+1} - \sum_{k < i} l_{ik} u_{k,i+1} = a_{i,i+1} - \overbrace{l_{i,i-1} u_{i-1,i+1}} - \overbrace{l_{i,i-2} u_{i-2,i+1}} - \dots = a_{i,i+1} - l_{i,i-1} u_{i-1,i+1} \\ u_{i,i+2} &= a_{i,i+2} - \sum_{k < i} l_{ik} u_{k,i+2} = a_{i,i+2} - \overbrace{l_{i,i-1} u_{i-1,i+2}} - \dots = a_{i,i+2} \\ l_{i+1,i} &= \frac{a_{i+1,i} - \sum_{k < i} l_{i+1,k} u_{ki}}{u_{ii}} = \frac{a_{i+1,i} - \overbrace{l_{i+1,i-1} u_{i-1,i}} - \dots}{u_{ii}} = \frac{a_{i+1,i}}{u_{ii}} \end{aligned}$$

Po przeprowadzeniu rozkładu LU program oblicza równanie $L\vec{t} = \vec{x}$ metodą „forward substitution”, zapisując wyniki w liście (Wektor \vec{x} nie jest nigdzie przechowywany, jako że jego i-ty element jest po prostu zawsze równy i).

Następnie program oblicza równanie $U\vec{y} = \vec{t}$ metodą „backward substitution” otrzymując szukany wektor \vec{y} .

Na koniec program oblicza wyznacznik macierzy A poprzez obliczenie iloczynu elementów na diagonalu macierzy U.

Dyskusja wyników

Wyniki obliczone przez program, to:

$\vec{y} = (0.03287133486041399, 1.339622798096375, 2.066480295894664, 2.825543605175336, 3.557571715528883, 4.284492868897645, 5.00721018451999, 5.727664002754518, 6.446615582748809, 7.164554400995276, 7.881773878242026, 8.598465868371878, 9.314759799907844, 10.030746230199036, 10.746490321152768, 11.46204012796359, 12.177431844626687, 12.892693237901542, 13.60784595684208, 14.322907124390252, 15.03789045794619, 15.752807073551208, 16.467666073000725, 17.182474979167374, 17.897240063340146, 18.611966594532937, 19.32665903159678, 20.041321172855753, 20.755956273816828, 21.47056714061568, 22.18515620483152, 22.899725583859315, 23.61427712998635, 24.328812470561147, 25.043333041083297, 25.757840112626393, 26.472334814693667, 27.186818154368854, 27.901291032443737, 28.615754257064278, 29.33020855532933, 30.04465458319117, 30.75909293394065, 31.473524145507586, 32.1879487067645, 32.902367062989086, 33.61677962061327, 34.33118675136514, 35.045588795892535, 35.75998606694211, 36.474378852156384, 37.18876741654113, 37.90315200464761, 38.61753284250725, 39.331910139350974, 40.04628408914067, 40.76065487193609, 41.47502265511775, 42.189387594482916, 42.90374983523002, 43.6181095128443, 44.33246675389621, 45.04682167676243, 45.76117439227791, 46.47552500432681, 47.18987361037867, 47.904220301975755, 48.618565165176626, 49.332908280960545, 50.047249725596565, 50.76158957098093, 51.47592788494589, 52.19026473154275, 52.904600171301595, 53.6189342614698, 54.33326705623164, 55.04759860691019, 55.761928962153874, 56.47625816810818, 57.19058626857465, 57.90491330515779, 58.61923931740096, 59.33356434291259, 60.04788841748285, 60.76221157519233, 61.47653384851288, 62.1908552684013, 62.9051758643867, 63.61949566465192, 64.33381469610926, 65.04813298447127, 65.76245055431694, 66.47676742915336, 67.19108363147355, 67.9053991828134, 68.61971410401004, 69.33402833257784, 70.0483379441879, 70.7650588638003, 71.53915685603329)^\top$

$$\det(A) = 78240161.00959387$$

W celu weryfikacji wyników napisałem dodatkowy program [test.py](#), który po wygenerowaniu wejściowej macierzy A, wykorzystuje funkcje biblioteczne [numpy.linalg.solve](#), oraz [numpy.linalg.det](#) do wyliczenia wektora \vec{y} oraz wyznacznika macierzy A.

<pre>\$ python program.py wektor y: [3.28713349e-02 1.33962280e+00 2.06648030e+00 2.82554361e+00 3.55757172e+00 4.28449287e+00 5.00721018e+00 5.72766400e+00 6.44661558e+00 7.16455440e+00 7.88177388e+00 8.59846587e+00 9.31475980e+00 1.00307462e+01 1.07464903e+01 1.14620401e+01 1.21774318e+01 1.28926932e+01 1.36078460e+01 1.43229071e+01 1.50378905e+01 1.57528071e+01 1.64676661e+01 1.71824750e+01 1.78972401e+01 1.86119666e+01 1.93266590e+01 2.00413212e+01 2.07559563e+01 2.14705671e+01 2.21851562e+01 2.28997256e+01 2.36142771e+01 2.43288125e+01 2.50433330e+01 2.57578401e+01 2.64723348e+01 2.71868182e+01 2.79012910e+01 2.86157543e+01 2.93302086e+01 3.00446546e+01 3.07590929e+01 3.14735241e+01 3.21879487e+01 3.29023671e+01 3.36167796e+01 3.43311868e+01 3.50455888e+01 3.57599861e+01 3.64743789e+01 3.71887674e+01 3.79031520e+01 3.86175328e+01 3.93319101e+01 4.00462841e+01 4.07606549e+01 4.14750227e+01 4.21893876e+01 4.29037498e+01 4.36181095e+01 4.43324668e+01 4.50468217e+01 4.57611744e+01 4.64755250e+01 4.71898736e+01 4.79042203e+01 4.86185652e+01 4.93329083e+01 5.00472497e+01 5.07615896e+01 5.14759279e+01 5.21902647e+01 5.29046002e+01 5.36189343e+01 5.43332671e+01 5.50475986e+01 5.57619290e+01 5.64762582e+01 5.71905863e+01 5.79049133e+01 5.86192393e+01 5.93335643e+01 6.00478884e+01 6.07622116e+01 6.14765338e+01 6.21908553e+01 6.29051759e+01 6.36194957e+01 6.43338147e+01 6.50481330e+01 6.57624506e+01 6.64767674e+01 6.71910836e+01 6.79053992e+01 6.86197141e+01 6.93340283e+01 7.00483379e+01 7.07650589e+01 7.15391569e+01] wyznacznik A: 78240161.00959387</pre>	<pre>\$ python test.py wektor y: [3.28713349e-02 1.33962280e+00 2.06648030e+00 2.82554361e+00 3.55757172e+00 4.28449287e+00 5.00721018e+00 5.72766400e+00 6.44661558e+00 7.16455440e+00 7.88177388e+00 8.59846587e+00 9.31475980e+00 1.00307462e+01 1.07464903e+01 1.14620401e+01 1.21774318e+01 1.28926932e+01 1.36078460e+01 1.43229071e+01 1.50378905e+01 1.57528071e+01 1.64676661e+01 1.71824750e+01 1.78972401e+01 1.86119666e+01 1.93266590e+01 2.00413212e+01 2.07559563e+01 2.14705671e+01 2.21851562e+01 2.28997256e+01 2.36142771e+01 2.43288125e+01 2.50433330e+01 2.57578401e+01 2.64723348e+01 2.71868182e+01 2.79012910e+01 2.86157543e+01 2.93302086e+01 3.00446546e+01 3.07590929e+01 3.14735241e+01 3.21879487e+01 3.29023671e+01 3.36167796e+01 3.43311868e+01 3.50455888e+01 3.57599861e+01 3.64743789e+01 3.71887674e+01 3.79031520e+01 3.86175328e+01 3.93319101e+01 4.00462841e+01 4.07606549e+01 4.14750227e+01 4.21893876e+01 4.29037498e+01 4.36181095e+01 4.43324668e+01 4.50468217e+01 4.57611744e+01 4.64755250e+01 4.71898736e+01 4.79042203e+01 4.86185652e+01 4.93329083e+01 5.00472497e+01 5.07615896e+01 5.14759279e+01 5.21902647e+01 5.29046002e+01 5.36189343e+01 5.43332671e+01 5.50475986e+01 5.57619290e+01 5.64762582e+01 5.71905863e+01 5.79049133e+01 5.86192393e+01 5.93335643e+01 6.00478884e+01 6.07622116e+01 6.14765338e+01 6.21908553e+01 6.29051759e+01 6.36194957e+01 6.43338147e+01 6.50481330e+01 6.57624506e+01 6.64767674e+01 6.71910836e+01 6.79053992e+01 6.86197141e+01 6.93340283e+01 7.00483379e+01 7.07650589e+01 7.15391569e+01] wyznacznik A 78240161.0095941</pre>
--	---

Jak widać, otrzymane wyniki są identyczne, poza drobną różnicą w precyzji obliczonego wyznacznika.