Grzegorz Mikołajczyk

# Zadanie numeryczne 7

9. **(Zadanie numeryczne NUM7)** Zadany jest ciąg punktów $x_i = -1 + 2\frac{i}{n}$, $n = 0, \ldots, n$ oraz odpowiadających im wartości funkcji $y_i \equiv f(x_i)$. Przyjmijmy, że $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ (por. zadanie NUM6). Skonstruuj naturalny splajn kubiczny $s(x)$ przechodzący przez punkty $(x_i, y_i)$. Wykreśl, na jednym wykresie, funkcje $f(x)$ i $s(x)$ na przedziale $\langle -1, 1\rangle$ dla kilku wyborów parametru $n$. Przeanalizuj, jak zachowuje się różnica $|f(x) - s(x)|$ pomiędzy węzłami interpolacji.

## Wprowadzenie

Celem zadania jest napisanie programu znajdującego interpolacje danej funkcji za pomocą naturalnych splajnów kubicznych.

## Wynik

Funkcja generująca splajny znajduje się w pliku *shared.py*, z którego korzystają pozostałe programy.

Tworzenie splajnów kubicznych przechodzących przez $n$ przebiega następująco:

Tworzona jest siatka punktów $x_i = -1 + 2\frac{i}{n}; i = 0, \ldots, n$ oraz odpowiadających im $y_i = f(x_i)$.

Wtedy wartość funkcji sklejanej wynosi:

$$s(x) = \xi_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h} + \xi_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h} + A_i(x - x_{i-1}) + B_i \text{ dla } x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$$

Gdzie $h = \frac{x_n - x_0}{n}$, $A_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h} - \frac{h}{6}(\xi_i - \xi_{i-1})$, $B_i = y_{i-1} - \xi_{i-1}\frac{h^2}{6}$,

$\xi_0 = \xi_n = 0$, a pozostałe wartości $\xi$ można wyliczyć rozwiązując równanie z macierzą:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_{n-1} \end{pmatrix} = \frac{6}{h^2}\begin{pmatrix} y_0 - 2y_1 + y_2 \\ \vdots \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \end{pmatrix}$$

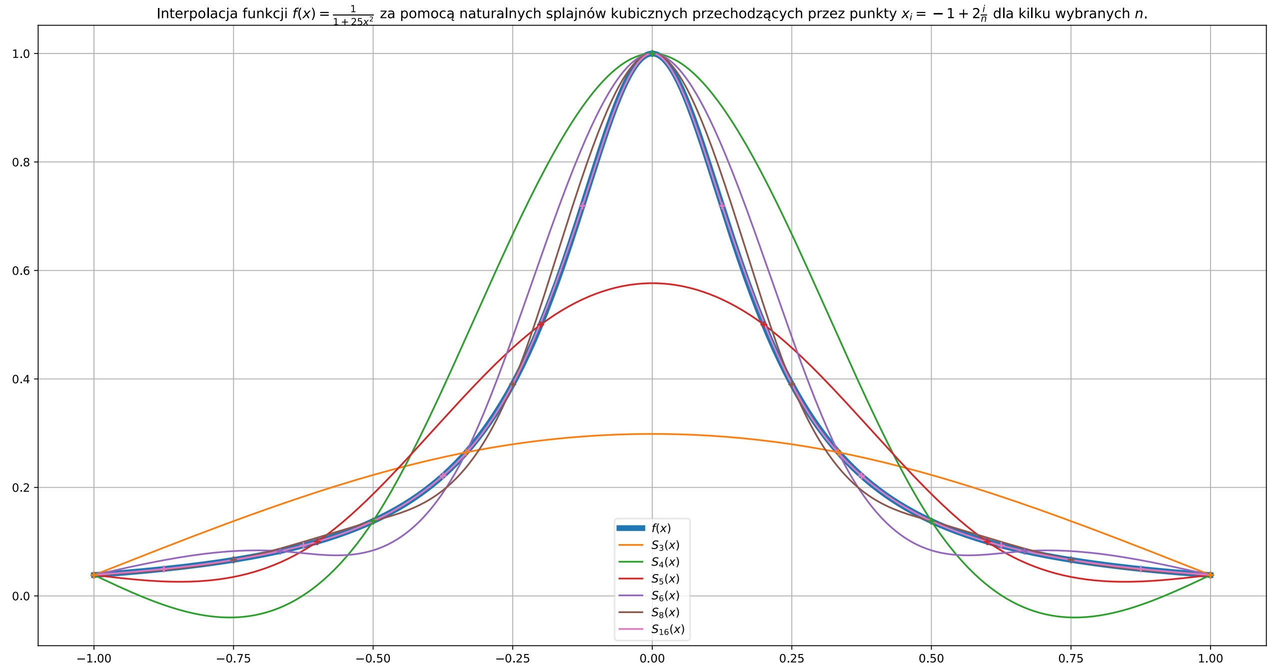
W celu rozwiązania równania z macierzą została wykorzystana procedura *scipy.sparse.linalg.solve* z biblioteki *scipy*, służąca do rozwiązywania równań liniowych z macierzą rzadką. Sama macierz jest generowana za pomocą procedury *scipy.sparse.diags* i przechowywana w formacie CSR.

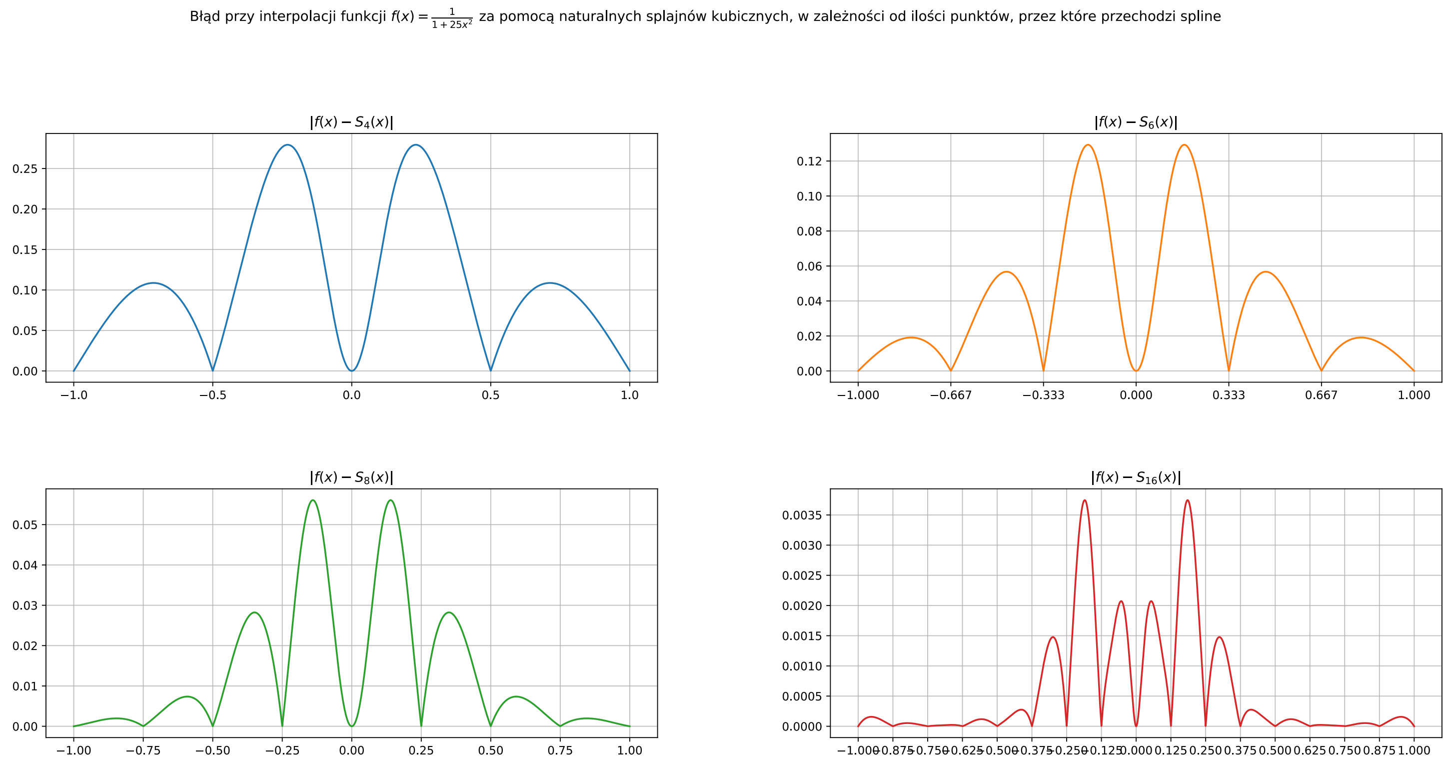
Program *drawSplines.py* generuje i wykreślna na wykresie funkcje $f(x)$ oraz kilka funkcji $s(x)$ dla kilku wybranych $n$.

Program *splineDiff.py* oblicza i wykreśla na wykresach różnicę $|f(x) - s(x)|$ dla kilku wybranych $n$.

Grzegorz Mikołajczyk

# Otrzymane wykresy:



## Dyskusja wyników

Na wykresie widać, że interpolacja za pomocą splajnów jest dobra nawet dla takiej funkcji, dla której interpolacja wielomianami przy jednorodnej siatce skutkowała oscylacjami na krańcach przedziału.

Już przy $n = 16$ widać, że interpolacja jest bardzo precyzyjna, a dla nieco niższych n też nie ma żadnych sporych odchyleń. Widać też, że wybranie nieparzystego $n$ skutkuje parzystą ilością punktów w siatce, co dla niskich $n$ skutkuje sporym odchyleniem na środku przedziału spowodowanym braku punktu na wierzchołku wykresu.

Na wykresach analizujących różnicę $|f(x) - s(x)|$ widać, że pomiędzy węzłami interpolacji różnica rośnie w miarę oddalania się od najbliższego węzła, podczas gdy w samych węzłach wynosi 0. Widać także, że wraz ze wzrostem ilości węzłów interpolacji maleje maksymalne odchylenie któremu podlega funkcja sklejana.