Modelos Gráficos Probabilísticos
Solução da Lista 02

Questão 1.

Pelas probabilidades da tabela, temos que:

- $\mathbb{P}(D = d^0) = \sum_{i \in I} \sum_{g \in G} \mathbb{P}(I = i, D = d^0, G = g) = 0.7.$
  $\mathbb{P}(D = d^1) = 1 - \mathbb{P}(D = d^0) = 1 - 0.7 = 0.3$
- $\mathbb{P}(I = i, D = d) = \sum_{g \in G} \mathbb{P}(I = i.D = d, G = g)$. Com isso temos:

I	D	$\mathbb{P}(I = i, D = d)$
i^0	d^0	0.42
i^0	d^1	0.18
i^1	d^0	0.28
i^1	d^1	0.12

- $\mathbb{P}(I = i, D = d|G = g^2) = \frac{\mathbb{P}(I=i,D=d,G=g^2)}{\mathbb{P}(G=g^2)}$. Com isso, temos:

I	D	$\mathbb{P}(I = i, D = d)$
i^0	d^0	0.6190
i^0	d^1	0.1658
i^1	d^0	0.0825
i^1	d^1	0.1327

- $\mathbb{P}(D = d|G = g^2) = \frac{\sum_{i \in I} \mathbb{P}(D=d,I=i,G=g^2)}{\mathbb{P}(G=g^2)}$. Com isso, temos:

D	$\mathbb{P}(I = i, D = d)$
d^0	0.7015
d^1	0.2985

Questão 2.

Realizando o passo 1, temos:

$\mathbb{P}(D = d^0, G = g^2) = 0.1680 + 0.0224 = 0.1904$
$\mathbb{P}(D = d^1, G = g^2) = 0.0450 + 0.0360 = 0.0810$

Realizando o passo 2, temos:

$\mathbb{P}(D = d^0|G = g^2) = \frac{0.1904}{0.1904+0.0810} = 0.7015$
$\mathbb{P}(D = d^1|G = g^2) = \frac{0.0810}{0.1904+0.0810} = 0.2985$

Questão 3.

Iremos mostrar que a partir de $\mathbb{P}(X = x, Y = y|Z = z) = \mathbb{P}(x|z)\mathbb{P}(y|z)$ podemos derivar as outras definições de independência.

- $\mathbb{P}(X=x|Y=y,Z=z) = \frac{\mathbb{P}(X=x,Y=y,Z=z)}{\mathbb{P}(Y=y,Z=z)} = \frac{\mathbb{P}(Z=z)\mathbb{P}(X=x,Y=y|Z=z)}{\mathbb{P}(Z=z)\mathbb{P}(Y=y|Z=z)} = \frac{\mathbb{P}(X=x|Z=z)\mathbb{P}(Y=y|Z=z)}{\mathbb{P}(Y=y|Z=z)}$
  $= \mathbb{P}(X=x|Z=z)$
- Similar ao item anterior
- $\mathbb{P}(X=x,Y=y,Z=z) = \mathbb{P}(Z=z)\mathbb{P}(X=x,Y=y|Z=z)$
  $= \mathbb{P}(Z=z)\mathbb{P}(X=x|Z=z)\mathbb{P}(Y=y|Z=z) \propto g(x,z)h(y,z)$

Questão 4.

Sejam A e B duas moedas, e $\mathbb{P}(Cara|Moeda=A) = 0.7$ e $\mathbb{P}(Cara|Moeda=B) = 0.10$.

- $\mathbb{P}(X_1 = Cara, X_2 = Cara, \ldots, X_{10} = Cara|Moeda = A) = \prod_{i=1}^{1} 0\mathbb{P}(X_i = Cara|Moeda = A) = (0.7)^{10}$
- $\mathbb{P}(X_1 = Cara, X_2 = Cara, \ldots, X_{10} = Cara|Moeda = B) = \prod_{i=1}^{1} 0\mathbb{P}(X_i = Cara|Moeda = B) = (0.1)^{10}$
- $\mathbb{P}(X_1 = Cara, X_2 = Cara, \ldots, X_{10} = Cara) = 0.5 \cdot (0.7)^{10} + 0.5 \cdot (0.1)^1 0$
- $\mathbb{P}(X_{10} = Cara|X_1 = Cara, \ldots, X_9 = Cara) = \frac{\mathbb{P}(X_1=Cara,X_2=Cara,\ldots,X_{10}=Cara)}{\mathbb{P}(X_1=Cara,\ldots,X_9=Cara)} = \frac{0.5\cdot(0.7)^{10}+0.5\cdot(0.1)^{10}}{0.5\cdot(0.7)^{9}+0.5\cdot(0.1)^{9}}$
- $\mathbb{P}(X_{10} = Cara|Moeda = A, X_1 = Cara, \ldots, X_9 = Cara) = \mathbb{P}(X_{10} = Cara|Moeda = A) = 0.7$
- $\mathbb{P}(X_{10} = Cara|Moeda = B, X_1 = Cara, \ldots, X_9 = Cara) = \mathbb{P}(X_{10} = Cara|Moeda = B) = 0.1$

Questão 5.

Iremos assumir que a primeira fórmula (a que aparece na maioria dos livros) é verdadeira, e deduzir as outras.

- $\chi^2 = \sum_{i,j} \frac{(N_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}} = \sum_{i,j} \frac{(N_{++}\hat{p}_{ij}-N_{++}\hat{p}_{i+}\hat{p}_{+j})^2}{N_{++}\hat{p}_{i+}\hat{p}_{+j}} = \sum_{i,j} \frac{N_{++}^2(\hat{p}_{ij}-\hat{p}_{i+}\hat{p}_{+j})^2}{N_{++}\hat{p}_{i+}\hat{p}_{+j}} = N_{++}\sum_{i,j} \frac{(\hat{p}_{ij}-\hat{p}_{i+}\hat{p}_{+j})^2}{\hat{p}_{i+}\hat{p}_{+j}}$
- $\sum_{i,j} \frac{(N_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}} = \sum_{i,j} \frac{(N_{ij}^2+E_{ij}^2-2N_{ij}E_{ij})}{E_{ij}} = \sum_{i,j} \frac{N_{ij}^2}{E_{ij}} + \sum_{i,j} \frac{E_{ij}^2}{E_{ij}} - \sum_{i,j} \frac{2N_{ij}E_{ij}}{E_{ij}} = \sum_{i,j} \frac{N_{ij}^2}{E_{ij}} + \sum_{i,j} E_{ij} - 2\sum_{i,j} N_{ij} = \sum_{i,j} \frac{N_{ij}^2}{E_{ij}} + N_{++}\sum_{i,j} p_{i+}p_{+j} - 2N_{++} = \sum_{i,j} \frac{N_{ij}^2}{E_{ij}} + N_{++} - 2N_{++} = \sum_{i,j} \frac{N_{ij}^2}{E_{ij}} - N_{++}$

Questão 6.

- $\mathbb{P}(A \cap B) \leq min\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)$.
  Verdade. Temos que:
  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A) \leq \mathbb{P}(A)$
  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B) \leq \mathbb{P}(B)$
  Logo $\mathbb{P}(A \cap B)$ deve ser menor que o menor valor entre $\mathbb{P}(A)$ e $\mathbb{P}(B)$.
- Sejam A e C dois eventos quaisquer e $B_1, \ldots, B_k$ uma partição do espaço amostral (isto é, $\bigcup_i B_i = \Omega$ e $B_i \cap B_j = \emptyset$ se $i \neq j$). Então:
  $$\mathbb{P}(A|C) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A|C,B_i)\mathbb{P}(B_i|C)$$
  Verdadeiro. Se $B_1, \ldots, B_k$ é uma partição do espaço amostral, então:
  $\mathbb{P}(A|C) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A,B_i|C) = \mathbb{P}(B_i|C)\mathbb{P}(A|B_i,C)$
- $\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A^c \cap B) = 1$
  Falso.

- $\mathbb{P}(A|B) + \mathbb{P}(A^c|B) = 1$

  Verdadeiro.

- $\mathbb{P}(A|B) + \mathbb{P}(A|B^c) = 1$

  Falso.

- $\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A^c \cap B) = \mathbb{P}(B)$

  Verdadeiro.

- Se $\mathbb{P}(A|B) > \mathbb{P}(A)$, então $\mathbb{P}(A^c|B) < \mathbb{P}(A^c)$

  Verdadeiro.

- Se $\mathbb{P}(A|B) > \mathbb{P}(A^c|B)$ então $\mathbb{P}(A|B) > 1/2$.

  Verdadeiro. Temos que

  $\mathbb{P}(A|B) > 1 - \mathbb{P}(A|B)$

  $2 \cdot \mathbb{P}(A|B) > 1$

  $\mathbb{P}(A|B) > 1/2$