Modelos Gráficos Probabilísticos
Solução da Lista 03

Para a solução da lista de exercícios, iremos assumir a distribuição conjunta dada por:

$$\mathbb{P}(D = d, I = i, G = g, S = s, L = l) = \mathbb{P}(D = d)\mathbb{P}(I = i)\mathbb{P}(S = s|I = i)\mathbb{P}(G = g|D = d, I = i)\mathbb{P}(L = l|G = g)$$

Questão 1.

Para que a equação seja uma distribuição de probabilidade, todos os valores de $\mathbb{P}(D = d, I = i, G = g, S = s, L = l)$ devem ser maior do que 0, e a soma sobre todos os valores deve ser igual a 1. Como todos os termos da fatoração são maiores do que 0 (por serem uma distribuição de probabilidade, como nas tabelas), o produto também será maior do que 0. Temos então que mostrar que a soma sobre todos os valores é igual a 1.

$\sum_{D,I,G,S,L} \mathbb{P}(D = d)\mathbb{P}(I = i)\mathbb{P}(S = s|I = i)\mathbb{P}(G = g|D = d, I = i)\mathbb{P}(L = l|G = g)$

Podemos observar que $\mathbb{P}(L = l|G = g)$ é a única probabilidade que depende apenas de L. Com isso, temos:

$\sum_{D,I,G,S} \mathbb{P}(D = d)\mathbb{P}(I = i)\mathbb{P}(S = s|I = i)\mathbb{P}(G = g|D = d, I = i) \sum_L \mathbb{P}(L = l|G = g)$

Como, fixado um valor de G, $\sum_L \mathbb{P}(L = l|G = g) = 1$, o último somatório irá sumir da equação. Usando esse mesmo raciocínio, teremos:

$\sum_{D,I,G,S} \mathbb{P}(D = d)\mathbb{P}(I = i)\mathbb{P}(S = s|I = i)\mathbb{P}(G = g|D = d, I = i)$

$= \sum_{D,I,G} \mathbb{P}(D = d)\mathbb{P}(I = i)\mathbb{P}(G = g|D = d, I = i) \sum_S \mathbb{P}(S = s|I = i)$

$= \sum_{D,I,G} \mathbb{P}(D = d)\mathbb{P}(I = i)\mathbb{P}(G = g|D = d, I = i)$

$= \sum_{D,I} \mathbb{P}(D = d)\mathbb{P}(I = i) \sum_G \mathbb{P}(G = g|D = d, I = i)$

$= \sum_{D,I} \mathbb{P}(D = d)\mathbb{P}(I = i) = \sum_D \mathbb{P}(D = d) \sum_I \mathbb{P}(I = i) = 1$

Logo, a fatoração é uma distribuição de probabilidade válida.

Questão 2.

$\sum_{I,G,S,L} \mathbb{P}(D = d^0, I = i, G = g, S = s, L = l)$

$\sum_{I,G,S,L} \mathbb{P}(D = d^0)\mathbb{P}(I = i)\mathbb{P}(S = s|I = i)\mathbb{P}(G = g|D = d^0, I = i)\mathbb{P}(L = l|G = g)$

$\sum_{I,G,S} \mathbb{P}(D = d^0)\mathbb{P}(I = i)\mathbb{P}(S = s|I = i)\mathbb{P}(G = g|D = d^0, I = i) \sum_L \mathbb{P}(L = l|G = g)$

$\sum_{I,G,S} \mathbb{P}(D = d^0)\mathbb{P}(I = i)\mathbb{P}(S = s|I = i)\mathbb{P}(G = g|D = d^0, I = i)$

$= \sum_{I,G} \mathbb{P}(D = d^0)\mathbb{P}(I = i)\mathbb{P}(G = g|D = d^0, I = i) \sum_S \mathbb{P}(S = s|I = i)$

$= \sum_{I,G} \mathbb{P}(D = d^0)\mathbb{P}(I = i)\mathbb{P}(G = g|D = d^0, I = i)$

$= \sum_I \mathbb{P}(D = d^0)\mathbb{P}(I = i) \sum_G \mathbb{P}(G = g|D = d^0, I = i)$

$= \sum_I \mathbb{P}(D = d^0)\mathbb{P}(I = i) = \mathbb{P}(D = d^0) \sum_I \mathbb{P}(I = i) = \mathbb{P}(D = d^0) = 0.6$

Utilizando o mesmo raciocínio, temos que $\mathbb{P}(D = d^1) = 0.4$

Questão 3.

$\mathbb{P}(S = s^0) = \sum_{D,I,G,L} \mathbb{P}(D = d)\mathbb{P}(I = i)\mathbb{P}(S = s^0|I = i)\mathbb{P}(G = g|D = d, I = i)\mathbb{P}(L = l|G = g)$

$\mathbb{P}(S = s^0) = \sum_{D,I,G} \mathbb{P}(D = d)\mathbb{P}(I = i)\mathbb{P}(S = s^0|I = i)\mathbb{P}(G = g|D = d, I = i) \sum_L \mathbb{P}(L = l|G = g)$

$\mathbb{P}(S = s^0) = \sum_{D,I} \mathbb{P}(D = d)\mathbb{P}(I = i)\mathbb{P}(S = s^0|I = i) \sum_G \mathbb{P}(G = g|D = d, I = i)$

$\mathbb{P}(S = s^0) = \sum_{D,I} \mathbb{P}(D = d)\mathbb{P}(I = i)\mathbb{P}(S = s^0|I = i)$

$\mathbb{P}(S = s^0) = \sum_D \mathbb{P}(D = d) \sum_I \mathbb{P}(I = i)\mathbb{P}(S = s^0|I = i)$

$\mathbb{P}(S = s^0) = (\sum_D \mathbb{P}(D = d)) \cdot (\sum_I \mathbb{P}(I = i)\mathbb{P}(S = s^0|I = i)) = \sum_I \mathbb{P}(I = i)\mathbb{P}(S = s^0|I = i)$

$\mathbb{P}(S = s^0) = \mathbb{P}(I = i_0) \cdot \mathbb{P}(S = s^0|I = i^0) + \mathbb{P}(I = i^1) \cdot \mathbb{P}(s = s^0|I = i^1)$

$\mathbb{P}(S = s^0) = 0.7 \cdot 0.95 + 0.3 \cdot 0.2 = 0.725$

$\mathbb{P}(S = s^1) = 1 - \mathbb{P}(S = s^0) = 1 - 0.725 = 0.275$

Questão 4.

$\mathbb{P}(D = d, I = i) = \sum_{G,S,L} \mathbb{P}(D = d)\mathbb{P}(I = i)\mathbb{P}(S = s|I = i)\mathbb{P}(G = g|D = d, I = i)\mathbb{P}(L = l|G = g)$

$\mathbb{P}(D = d, I = i) = \sum_{G,S} \mathbb{P}(D = d)\mathbb{P}(I = i)\mathbb{P}(S = s|I = i)\mathbb{P}(G = g|D = d, I = i) \sum_L \mathbb{P}(L = l|G = g)$

$\mathbb{P}(D = d, I = i) = \sum_S \mathbb{P}(D = d)\mathbb{P}(I = i)\mathbb{P}(S = s|I = i) \sum_G \mathbb{P}(G = g|D = d, I = i)$

$\mathbb{P}(D = d, I = i) = \mathbb{P}(D = d)\mathbb{P}(I = i) \sum_S \mathbb{P}(S = s|I = i) = \mathbb{P}(D = d)\mathbb{P}(I = i)$

Em particular, $\mathbb{P}(D = d^0, I = i^1) = \mathbb{P}(D = d^0)\mathbb{P}(I = i^1) = 0.6 \cdot 0.3 = 0.18$

Questão 5.

Para mostrar o efeito de uma estrutura v iremos comparar a tabela $\mathbb{P}(D = d, I = i|G = g)$ com a tabela $\mathbb{P}(D = d|G = g)\mathbb{P}(I = i|G = g)$. Para isso, primeiro será calculado $\mathbb{P}(G = g)$ para cada g.

$\mathbb{P}(G = g^1) = \mathbb{P}(D = d^0)\mathbb{P}(I = i^0)\mathbb{P}(G = g^1|D = d^0, I = i^0) + \mathbb{P}(D = d^0)\mathbb{P}(I = i^1)\mathbb{P}(G = g^1|D = d^0, I = i^1) + \mathbb{P}(D = d^1)\mathbb{P}(I = i^0)\mathbb{P}(G = g^1|D = d^1, I = i^0) + \mathbb{P}(D = d^1)\mathbb{P}(I = i^1)\mathbb{P}(G = g^1|D = d^1, I = i^1)$

$\mathbb{P}(G = g^1) = 0.6 * 0.7 * 0.3 + 0.4 * 0.7 * 0.05 + 0.6 * 0.3 * 0.9 + 0.4 * 0.3 * 0.5 = 0.362$

$\mathbb{P}(G = g^2) = 0.2884$

$\mathbb{P}(G = g^3) = 0.3496$

Agora podemos calcular a probabilidade $\mathbb{P}(D = d, I = i|G = g)$.
$\mathbb{P}(D = d^0, I = i^0|G = g^1) = \frac{\mathbb{P}(D=d^0,I=i^0,G=g^1)}{\mathbb{P}(G=g^1)} = \frac{\mathbb{P}(D=d^0)\mathbb{P}(I=i^0)\mathbb{P}(G=g^1|D=d^0,I=i^0)}{\mathbb{P}(G=g^1)} = \frac{0.6*0.7*0.3}{0.362} = 0.3481$

$\mathbb{P}(D = d, I = i\|G = g)$	(d^0, i^0)	(d^1, i^0)	(d^0, i^1)	(d^1, i^1)
g^1	0.3481	0.0387	0.4475	0.1657
g^2	0.5825	0.2427	0.0500	0.1248
g^3	0.3604	0.5606	0.0103	0.0687

Para calcular a tabela de $\mathbb{P}(D = d|G = g)\mathbb{P}(I = i|G = g)$, precisamos calcular $\mathbb{P}(D = d|G = g)$ e $\mathbb{P}(I = i|G = g)$.

$\mathbb{P}(D = d^0|G = g^1) = \frac{\mathbb{P}(D=d^0,G=g^1)}{\mathbb{P}(G=g^1)} = \frac{\mathbb{P}(D=d^0,G=g^1,I=i^0)+\mathbb{P}(D=d^0,G=g^1,I=i^1)}{\mathbb{P}(G=g^1)} = \frac{0.6*0.7*0.3+0.6*0.3*0.9}{0.362} = 0.7956$

$\mathbb{P}(D = d\|G = g)$	d^0	d^1
g^1	0.7956	0.2044
g^2	0.6325	0.3675
g^3	0.2506	0.7494

Fazendo os mesmos cálculos para $\mathbb{P}(I = i|G = g)$

$\mathbb{P}(D = d\|G = g)$	i^0	i^1
g^1	0.3867	0.6132
g^2	0.8252	0.1747
g^3	0.9210	0.0790

Fazendo o produto, temos:

$\mathbb{P}(D = d\|G = g)\mathbb{P}(I = i\|G = g)$	(d^0, i^0)	(d^1, i^0)	(d^0, i^1)	(d^1, i^1)
g^1	0.3077	0.0790	0.4879	0.1254
g^2	0.5219	0.3033	0.1106	0.1248
g^3	0.2308	0.6902	0.0198	0.0592

Questão 6.
Basta fazer os cálculos como na questão anterior.

Questão 7.

$D \perp L$ - Falso
$I \perp L$ - Falso
$S \perp L$ - Falso
$S \perp G$ - Falso
$D \perp S$ - Verdadeiro
$(D \perp L|I)$ - Falso
$(I \perp L|S)$ - Falso
$(I \perp L|G)$ - Verdadeiro
$(S \perp L|I)$ - Verdadeiro
$(I \perp D|G)$ - Falso
$(I \perp D|L)$ - Falso
$(S \perp G|L)$ - Falso
$(D \perp S|L)$ - Falso
$(D \perp L|I, S)$ - Falso
$(I \perp L|G, S)$ - Verdadeiro
$(S \perp L|I, G)$ - Verdadeiro
$(I \perp D|L, S)$ - Falso
$(S \perp G|L, D)$ - Falso
$(D \perp S|L, I)$ - Verdadeiro

Questão 8.
$\mathbb{P}(G = g^1|I)$ não é uma distribuição de probabilidade. $\mathbb{P}(G = g^1|I = i^0) = 0.2, \mathbb{P}(G = g^1|I = i^i) = 0.74$

Questão 9.

Temos que:

$\mathbb{P}(D = d, L = l|G = g) = \mathbb{P}(L = l|G = g)\mathbb{P}(D = d|L = l, G = g) = \mathbb{P}(D = d|G = g)\mathbb{P}(L = l|G = g)$.

Questão 10 (6).

Seja a rede Bayesiana $X \to Z \to Y$. Temos que $\mathbb{P}(X|Y) = \frac{\mathbb{P}(X,Y)}{\mathbb{P}(Y)}$. Seja as seguintes CPDs:

x_1	x_2
0.5	0.5

	z_1	z_2
x_1	0.9	0.1
x_2	0.2	0.8

	y_1	y_2
z_1	0.7	0.3
z_2	0.4	0.6

Temos que $\mathbb{P}(Y = y_1) = 0.5 * (0.9 * 0.7 + 0.1 * 0.4 + 0.2 * 0.7 + 0.8 * 0.4) = 0.565$. Com isso, temos: $\mathbb{P}(X = x_1|Y = y_1) = \frac{\mathbb{P}(X=x_1,Y=y_1)}{\mathbb{P}(Y=y_1)} = \frac{0.5*0.9*0.7+0.5*0.1*0.4}{0.565} = 0.5929 \neq \mathbb{P}(X = x_1)$.

Logo, X não é independente de Y.

$\mathbb{P}(X = x_1|Z = z_1, Y = y_1) = \mathbb{P}(X = x_1|Z = z_1) = \frac{\mathbb{P}(X=x_1,Z=z_1)}{\mathbb{P}(Z=z_1)} = \frac{0.5*0.9}{0.5*0.9+0.5*0.2} = 0.8182 \neq \mathbb{P}(X = x_1)$

Questão 11 (7).

Seja a rede Bayesiana $X \rightarrow Z \leftarrow Y$. Seja as seguintes CPTs:

x_1	x_2
0.5	0.5

y_1	y_2
0.9	0.1

	z_1	z_2
(x_1, y_1)	0.7	0.3
(x_1, y_2)	0.4	0.6
(x_2, y_1)	0.8	0.2
(x_2, y_2)	0.6	0.4

Temos que $X \perp Y$.

Temos que X não é independente de Z dado Y.

$\mathbb{P}(X = x_1|Z = z_1, Y = y_1) = \frac{\mathbb{P}(X=x_1,Y=y_1,Z=z_1)}{\mathbb{P}(Z=z_1,Y=y_1)} = \frac{\mathbb{P}(X=x_1)\mathbb{P}(Y=y_1)\mathbb{P}(Z=z_1|X=x_1,Y=y_1)}{\mathbb{P}(Y=y_1)\mathbb{P}(Z=z_1|Y=y_1)} = \frac{\mathbb{P}(X=x_1)\mathbb{P}(Z=z_1|X=x_1,Y=y_1)}{\mathbb{P}(Z=z_1|Y=y_1)}$
$= \frac{0.5*0.7}{0.75} = 0.467 \neq 0.5$

A questão possui um erro, pois uma rede de causa comum é da forma $X \leftarrow Z \rightarrow Y$. Neste caso, X não é independente de Y.

Questão 12 (8).

Temos que:

$\mathbb{P}(X = x, Y = y|Z = z) = \mathbb{P}(X = x|Z = z)\mathbb{P}(Y = y|X = x, Z = z)$

A expressão será igual a $\mathbb{P}(X = x|Z = z)\mathbb{P}(Y = y|Z = z)$ somente quando Y for independente de X dado Z