Lista 02 - PGM2017

Renato Assunção - DCC, UFMG

Agosto 2016

1. A tabela abaixo apresenta uma distribuição de probabilidade conjunta do vetor $\mathbf{X} = (I, D, G)$. Usando esta distribuição, obtenha:
   - A distribuição marginal de D. Isto é, obtenha $\mathbb{P}(D = d^0)$ e $\mathbb{P}(D = d^1)$.
   - A distribuição marginal do subvetor (I, D). Isto é, marginalize sobre G para obter os quatro valores de $\mathbb{P}(I = i, D = d)$.
   - A distribuição condicional do sub-vetor (I, D) dado que $G = g^2$.
   - A distribuição condicional da variável D dado que $G = g^2$.

I	D	G	$\mathbb{P}(I = i, D = d, G = g)$
i^0	d^0	g^1	0.1260
i^0	d^0	g^2	0.1680
i^0	d^0	g^3	0.1260
i^0	d^1	g^1	0.0090
i^0	d^1	g^2	0.0450
i^0	d^1	g^3	0.1260
i^1	d^0	g^1	0.2520
i^1	d^0	g^2	0.0224
i^1	d^0	g^3	0.0056
i^1	d^1	g^1	0.0600
i^1	d^1	g^2	0.0360
i^1	d^1	g^3	0.0240

2. Considere a tabela anterior, que apresenta uma distribuição de probabilidade conjunta do vetor $\mathbf{X} = (I, D, G)$. Aprendemos em sala que, para obtermos a distribuição condicional $\mathbb{P}(D = d|G = g^2)$ da variável D dado que $G = g^2$, usamos um algoritmo em dois passos a partir da tabela do vetor conjunto:
   - Passo 1: obtemos a distribuição condicional $\mathbb{P}(I = i, D = d|G = g^2)$ do sub-vetor (I, D) dado que $G = g^2$.
   - Passo 2: Marginalizamos a variável I somando sobre seus valores para obtermos $\mathbb{P}(D = d|G = g^2)$. Isto é, calculamos:

   $$\mathbb{P}(D = d|G = g^2) = \mathbb{P}(I = i^0, D = d|G = g^2) + \mathbb{P}(I = i^1, D = d|G = g^2)$$

   Mostre *empiricamente* que obtemos o mesmo resultado se fizermos os seguintes dois passos:
   - Passo 1*: obtenha os elementos $\mathbb{P}(D = d, G = g^2)$ da distribuição conjunta do sub-vetor (D, G) marginalizando sobre I. Isto é, obtenha a tabela com duas entradas com os valores das probabilidades.

   $$\mathbb{P}(D = d, G = g^2) = \mathbb{P}(I = i^0, D = d, G = g^2) + \mathbb{P}(I = i^1, D = d, G = g^2)$$

- Passo 2*: Renormalize as entradas obtidas para que somem 1.

Este é um resultado geral, não é apenas uma coincidência numérica deste exercício.

3. Mostre que são equivalentes as seguintes definições de independência condicional $X \perp Y|Z$:

   - $\mathbb{P}(X=x, Y=y|Z=z) = \mathbb{P}(x|z)\mathbb{P}(y|z)$
   - $\mathbb{P}(X=x|Y=y, Z=z) = \mathbb{P}(X=x|Z=z)$
   - $\mathbb{P}(Y=y|X=x, Z=z) = \mathbb{P}(Y=y|Z=z)$
   - $\mathbb{P}(X=x, Y=y, Z=z) \propto g(x,z)h(y,z)$

4. Uma de duas moedas, A ou B, é escolhida ao acaso. A moeda A possui $\mathbb{P}(\text{Cara}|\text{Moeda}=A) = 0.70$ e a moeda B possui $\mathbb{P}(\text{Cara}|\text{Moeda}=B) = 0.10$. A moeda escolhida é jogada dez vezes sucessivamente e independentemente. Seja X_i o resultado, cara ou coroa, do i-ésimo lançamento. Calcule:

   - $\mathbb{P}(X_1 = \text{Cara}, X_2 = \text{Cara}, \ldots, X_{10} = \text{Cara}|\text{Moeda}=A)$
   - $\mathbb{P}(X_1 = \text{Cara}, X_2 = \text{Cara}, \ldots, X_{10} = \text{Cara}|\text{Moeda}=B)$
   - $\mathbb{P}(X_1 = \text{Cara}, X_2 = \text{Cara}, \ldots, X_{10} = \text{Cara})$
   - $\mathbb{P}(X_{10} = \text{Cara}|X_1 = \text{Cara}, X_2 = \text{Cara}, \ldots, X_9 = \text{Cara})$
   - $\mathbb{P}(X_{10} = \text{Cara}|\text{Moeda}=A, X_1 = \text{Cara}, X_2 = \text{Cara}, \ldots, X_9 = \text{Cara})$
   - $\mathbb{P}(X_{10} = \text{Cara}|\text{Moeda}=B, X_1 = \text{Cara}, X_2 = \text{Cara}, \ldots, X_9 = \text{Cara})$

5. Considere a estatística qui-quadrado para testar independência entre duas variáveis aleatórias discretas. Mostre que ela pode ser calculada por qualquer uma das três fórmulas seguintes:

   - $\chi^2 = \sum_{i,j} \frac{(N_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}}$ (esta é a fórmula que aparece na maioria dos livros).
   - $\chi^2 = N_{++} \sum_{i,j} \frac{(\hat{p}_{ij}-\hat{p}_{i+}\hat{p}_{+j})^2}{\hat{p}_{i+}\hat{p}_{+j}}$ (esta fórmula é a que usei em sala de aula).
   - $\chi^2 = \sum_{i,j} \left(\frac{N_{ij}^2}{E_{ij}}\right) - N_{++}$

   onde $N_{++} = \sum_{ij} N_{ij}$ é o tamanho da amostra, $\hat{p}_{+j} = \sum_i N_{ij}/N_{++}$ e $\hat{p}_{i+} = \sum_j N_{ij}/N_{++}$ sãao as probabilidades marginais estimadas e $\hat{p}_{ij} = N_{ij}/N_{++}$. O valor $E_{ij} = N_{++}\hat{p}_{i+}\hat{p}_{+j}$ é o valor esperado de N_{ij} sob a hipótese de independência.

6. V ou F:

   - $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \min\{\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)\}$.
   - Sejam Ae C dois eventos quaisquer e $B_1, \ldots, B_k$ uma partição do espaço amostral (isto é, $\cup_i B_i = \Omega$ e $B_i \cap B_j = \varnothing$ se $i \neq j$. Então

   $$\mathbb{P}(A|C) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A|C, B_i)\ \mathbb{P}(B_i|C)$$

   - $\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A^c \cap B) = 1$
   - $\mathbb{P}(A|B) + \mathbb{P}(A^c|B) = 1$
   - $\mathbb{P}(A|B) + \mathbb{P}(A|B^c) = 1$
   - $\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A^c \cap B) = \mathbb{P}(B)$
   - Se $\mathbb{P}(A|B) > \mathbb{P}(A)$ então $\mathbb{P}(A^c|B) < \mathbb{P}(A^c)$
   - Se $\mathbb{P}(A|B) > \mathbb{P}(A^c|B)$ então $\mathbb{P}(A|B) > 1/2$.