Teoria da Informação - Homework 02

Yuri Diego Santos Niitsuma

Review questions

1) Answer formally the following questions:
   a) Describe succinctly the two most common interpretations of probability: the *frequentist* interpretation, and the *Bayesian interpretation*.
   b) Define the concepts of *forward probability* and of *inverse probability*.
   c) What is the difference between the terms *likelihood* and *probability*? In what situation should each of them be used?

Resposta

a) **Interpretação frequentista**
   - Se jogarmos uma moeda 100 vezes e der como resultado cara 55 vezes. Então a probabilidade estimada é 0.55.
   - A cada 1.2 milhão de voos de avião, um deles sofre acidente. Então a probabilidade estimada é $\frac{1}{12 \cdot 10^5}$.

   Interpretação Bayesiana
   - Se eu tenho certeza que a moeda é justa (não-viciada). A minha "crença"de que a probabilidade da moeda dar cara se jogada uma vez é 0.5.
   - Dado que sei que a moeda possui cara nas duas faces. A probabilidade de dar resultado cara é 1. (Atualizar uma probabilidade posterior).

b) **Forward probability** descreve um modelo geral de um processo assumindo certos dados.
c) **inverse probability** descreve um modelo em que é calculado a probabilidade condicional de um ou mais variáveis não observadas no processo, dado tais variáveis observadas.

Chapter 2

2) Exercise 2.30.[1] An urn contains w white balls and b black balls. Two balls are drawn, one after the other, without replacement. Prove that the probability that the first ball is white is equal to the probability that the second is white.

Resposta

Denotamos b_i, w_i, sendo i indicando a i-ésima bola pegada.

$$P(w_1) = P(w_1,b_2) + P(w_1,w_2)$$
$$= \frac{w}{w+b} \cdot \frac{b}{(w-1)+b} + \frac{w}{w+b} \cdot \frac{w-1}{(w-1)+b}$$
$$P(w_2) = P(w_1, w_2) + P(b_1, w_2)$$
$$= \frac{w}{w+b} \cdot \frac{w-1}{(w-1)+b} + \frac{b}{w+b} \cdot \frac{w}{w+(b-1)}$$

Se $w + b - 1 > 0$:

$$\frac{w}{w+b} \cdot \frac{b}{(w-1)+b} = \frac{b}{w+b} \cdot \frac{w}{(w-1)+b} \Rightarrow$$
$$P(w_1,b_2) = P(b_1, w_2) \Rightarrow$$
$$P(w_1,b_2) + (P(w_1,w_2)) = P(b_1, w_2) + (P(w_1,w_2)) \Rightarrow$$
$$P(w_1) = P(w_2)$$

3) Exercise 2.37.[2] The inhabitants of an island tell the truth one third of the time. They lie with probability $2/3$.
On an occasion, after one of them made a statement, you ask another 'was that statement true?' and he says 'yes'.
What is the probability that the statement was indeed true?

Resposta

- D: Declaração do habitante ser verdadeira.
- R: Resposta de 'yes' do mesmo habitante.
- $P(R|D)$: Responde verdade sendo que a primeira é verdadeira.
- $P(R|\overline{D})$: Responde mentira sendo que a primeira é mentira.
- $P(D = true) = P(D) = \frac{1}{3}$
- $P(R = true) = P(R) = \frac{1}{3}$

Queremos saber $P(D|R)$:

$$P(R) = P(R|D) + P(R|\overline{D}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$$
$$P(D|R) = \frac{P(D,R)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{5}{9}$$

Chapter 3

4) Exercise 3.11.[2, p.61] Mrs S is found stabbed in her family garden. Mr S behaves strangely after her death and is considered as a suspect. On investigation of police and social records it is found that Mr S had beaten up his wife on at least nine previous occasions. The prosecution advances this data as evidence in favour of the hypothesis that Mr S is guilty of the murder. 'Ah no,' says Mr S's highly paid lawyer, '*statistically*, only one in a thousand wife-beaters actually goes on to murder his wife. So the wife-beating is not strong evidence at all. In fact, given the wife-beating evidence alone, it's extremely *unlikely* that he would be the murderer of his wife - only a $1/1000$ chance. You should therefore find him innocent.' Is the lawyer right to imply that the history of wife-beating does not point to Mr S's being the murderer? Or is the lawyer a slimy trickster? If the latter, what is wrong with his argument? [Having received an indignant letter from a lawyer about the preceding paragraph, I'd like to add an extra inference exercise at this point: *Does my suggestion that Mr. S.'s*

lawyer may have been a slimy trickster imply that I believe all lawyers are slimy tricksters? (Answer: No.)]

Resposta

Definindo as hipóteses:

- M: Senhor S matou senhora S.
- A: Senhora S foi assassinada.
- B: Senhor S já bateu em senhora S.
- O advogado falou que $P(M|B) = \frac{1}{1000}$.

Pelo teorema de Bayes.

$$P(M|A,B) = \frac{P(A|M,B)P(M,B)}{P(A|B)}$$

É fácil ver que $P(A|M,B) = 1$.

$$P(M|A,B) = \frac{P(M,B)}{P(A|B)}$$

O conjunto A pode ser particionado em:

- M: Senhor S assassinou senhora S.
- O: qualquer outra pessoa assassinou senhora S.

Temos duas razões diferentes.

$$\frac{P(M,B)}{P(A|B)} ? \frac{P(M,B)}{P(O|B)}$$

É bem mais evidente que a fração da esquerda é maior que da direita. Logo, o argumento do advogado é uma falácia.

5) Exercise 3.12.[2] A bag contains one counter, known to be either white or black. A white counter is put in, the bag is shaken, and a counter is drawn out, which proves to be white. What is now the chance of drawing a white counter? [Notice that the state of the bag, after the operations, is exactly identical to its state before.]

Resposta

Não consegui entender a tradução de "counter", talvez seja ficha.

- B: ficha branca
- P: ficha preta

Pelo enunciado, temos a certeza que é inserido uma segunda ficha que é branca. Logo, temos duas possibilidades no conteúdo da mochila:

- X conter duas bolas brancas
- $\overline{X}$ conter uma bola branca e uma preta.
- $P(X) = \frac{2}{3}$ pois qualquer das duas bolas poderia a primeira retirada. Uma outra forma de enxergar é considerar as bolas brancas diferentes.
- $P(\overline{X}) = \frac{1}{3}$.

Em resumo, para retirar a segunda bola branca é possível apenas no evento X.

$$P(B|X) = P(B)P(X) = 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$