Teoria da Informação - Lista 01A

Yuri Diego Santos Niitsuma

15 de agosto de 2017

Review questions

1. (a) Se S não é um espaço de amostragem vazio e E é um evento que está contido em S, temos que a probabilidade de $p(E)$ é:

$$p(E) = \frac{|E|}{|S|}$$

   sendo que $|X|$ é a cardinalidade do conjunto $|X|$.

   (b) $\frac{1}{C(50,6)} = \frac{1}{\left(\frac{50!}{54!\cdot 6!}\right)} = \frac{1}{1590700} \approx 0.0000000629$

2. (a) As condições são:

$$\forall i\,(0 \leq p(x_i) \leq 1)$$
$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$$

   (b) Seja H o conjunto que a moeda jogada dê como resultado cara, e T coroa, temos:

$$p(H) = \frac{3}{4}, p(T) = \frac{1}{4}$$

3. (a) Seja E e F eventos com $p(F) > 0$. A probabilidade condicional de E dado F, denotado por $p(E|F)$, é definido como:

$$p(E|F) = \frac{p(E \cap F)}{p(F)}$$

(b)

$$
\begin{aligned}
&E = \{2,4,6\}\\
&F = \{1,2,3\}\\
&E \cap F = \{2\}\\
&p(F) = p(1) + p(2) + p(3) = \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{2}\\
&p(E \cap F) = p(2) = \tfrac{1}{6}\\
&p(E|F) = \tfrac{p(E \cap F)}{p(F)} = \frac{\left(\frac{1}{6}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)} = \tfrac{1}{3}
\end{aligned}
$$

4. (a) Os eventos E and F são independentes se e somente se:

$$p(E \cap F) = p(E)p(F)$$

   (b) Sim

$$
\begin{aligned}
&E = \{2,4,6\}\\
&F = \{5,6\}\\
&E \cap F = \{6\}\\
&p(E) = p(2) + p(4) + p(6) = \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{2}\\
&p(F) = p(5) + p(6) = \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{3}\\
&p(E \cap F) = p(6) = \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{3} = p(E) \cdot p(F)
\end{aligned}
$$

5. (a) Uma variável aleatória é uma função do espaço amostral de um experimento de um conjunto de números reais. Em outras palavras é um mapeamento de um número com um evento possível.

   (b) Os possíveis valores são $1, 2, 3, 4, 5, 6$.

6. Representando os resultados dos dois dados como pares ordenados tal que:

$$S = \{(x_i, y_j) \in \{1, 2, \ldots, 6\} \times \{1, 2, \ldots, 6\}\} \Rightarrow |S| = 36$$

A soma dos dados dar par são os conjuntos dos eventos E:

$$
\begin{aligned}
&E =\\
&\{(1,1),(1,3),(1,5),\\
&(2,2),(2,4),(2,6),\\
&(3,1),\ldots,\\
&\ldots,(6,6)\}
\end{aligned}
$$

Temos que $|E| = 18$. Logo,

$$p(\text{somadosdadosdarpar}) = \frac{p(E)}{p(S)} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

7. Queremos $k = 6$ sucessos em $n = 6$ ensaios tal que eventos de sucessos seja "o dado dar resultado ímpar".

   A probabilidade de dar um resultado par é $p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ e como colorário $1 - p = \frac{1}{2}$.

   Assim, temos:

$$C(n,k)p^k(1-p)^{n-k} = C(6,6)p^6(1-p)^{6-6} =$$
$$\underbrace{C(6,6)}_{1} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^6}_{\frac{1}{64}} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^0}_{1} = \frac{1}{64}$$

   Outra solução alternativa é mostrar a combinação de strings de tamanho 6 contendo H, T.

8. Primeiro na situação em que dois dados são jogados darem a soma 9.

   Mostrando os pares que a soma dar 9:

$$E = \{(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)\}$$
$$S = \{1, \ldots, 6\}^2$$
$$p(E) = \tfrac{|E|}{|S|} = \tfrac{4}{36} = \tfrac{1}{9} \approx 0.111$$

   Na situação em que 3 dados darem a soma 9.

   Aqui fiquei com preguiça de listar tudo.

   x_i representa o resultado do i-ésimo dado tal que $x_1, x_2, x_3 \in 1..6$.

   $x_1 + x_2 + x_3 = 9$

   Se subtrairmos 1 em cada x_i, temos:

$$\underbrace{(x_1 - 1)}_{x_1'} + \underbrace{(x_2 - 1)}_{x_2'} + \underbrace{(x_3 - 1)}_{x_3'} = 9 - (1 + 1 + 1) \Rightarrow x_1' + x_2' + x_3' = 6$$
$$x_i' \in \{0, \ldots, 5\}$$

Observe que agora a cardinalidade das somas possíveis é a mesma que a permutação da string ||||||++ menos os 3 resultados que um dos $x_i = 6$:

$\{||||||++, +||||||+, ++||||||\}$

Assim, $C(6+2,2) - 3 = C(8,2) - 3 = 28 - 3 = 25$.

O espaço amostral é $S = \{0..5\}^3 \Rightarrow |S| = 6^3$.

$$p(E) = \frac{|E|}{|S|} = \frac{25}{6^3} = \frac{25}{216} \approx 0.115$$

Logo, o segundo caso é mais provável.

9. Questão semelhante a passada em aula.

   Seja H representando resultado da moeda dar cara e T coroa, temos:

$$\begin{cases} p(H) = 3p(T) \\ p(H) + p(T) = 1 \end{cases}$$
$$\underbrace{p(H)}_{3p(T)} + p(T) = 1 \Rightarrow p(T) = \tfrac{1}{4} \Rightarrow p(H) = \tfrac{3}{4}$$

   Logo, a probabilidade do resultado dar coroa é 0.25.

10. Primeiro, temos como hipóteses, $p(E) = 0.7$ e $p(F) = 0.5$... e só... T_T.

    Sabemos que $E, F \subset S$, S é o espaço amostral, o que implica em $p(E \cup F) \leq 1$, pois não foi garantido que $E \cup F = S$.

    Obviamente, $E \subset (E \cup F)$, assim $p(E) \leq p(E \cup F) \Rightarrow 0.7 \leq p(E \cup F)$.

    Agora para provarmos que $p(E \cap F) \geq 0.2$, temos que $p(E \cup F) \leq p(S) = 1$. Utilizando o princípio da inclusão e exclusão, temos:

$$p(E \cup F) \leq 1 \Rightarrow \underbrace{p(E)}_{0.7} + \underbrace{p(E)}_{0.5} - p(E \cap F) \leq 1 \Rightarrow$$
$$1.2 - 1 \leq p(E \cap F) \Rightarrow p(E \cap F) \geq 0.2$$

11. Por hipótese, $p(E \cap F) = p(E) \cdot p(F)$. Queremos saber se $p(\overline{E} \cap F) = p(\overline{E}) \cdot p(F)$.

Brincando com conjuntos, temos:

$$
\begin{aligned}
&p(F) = p\left((F \cap E) \cup \left(F \cap \overline{E}\right)\right) = \\
&p\left(F \cap E\right) + p\left(F \cap \overline{E}\right) - \underbrace{p\left((F \cap E) \cap \left(F \cap \overline{E}\right)\right)}_{p\left(F \cap E \cap F \cap \overline{E}\right) = p\left(F \cap E \cap \overline{E}\right) = 0} \Rightarrow \\
&p(F) = \underbrace{p\left(F \cap E\right)}_{p(F)\cdot p(E)} + p\left(F \cap \overline{E}\right) \Rightarrow \\
&p(F) - p(F)\cdot p(E) = p\left(F \cap \overline{E}\right) \Rightarrow \\
&p\left(F \cap \overline{E}\right) = p(F) \cdot \underbrace{(1 - p(E))}_{p\left(\bar{E}\right)} = p(F) \cdot p\left(\bar{E}\right)
\end{aligned}
$$

Que é o que queriamos provar.

12. F: Existem 8 strings que começam com o bit 1. $F \cap E$: Queremos $\{100x, 1x00\}$, em que $x \in \{0, 1\}$. Listando os elementos, temos: $|\{1000, 1001, 1100\}| = 3$

    Logo, calculando a probabilidade condicional:

    $$p(E|F) = \frac{p(E \cap F)}{p(F)} = \frac{\frac{3}{|S|}}{\frac{8}{|S|}} = \frac{3}{8}$$

13. Seja M = masculino e F = feminino.

    Representamos os quatro filhos como uma string de tamanho 4. Logo, $|S| = 2^4 = 16$.

    Seja E dos 4 terem meninos e meninas, temos:

    $$p(E) = p(S) - p\left(\overline{E}\right) = 1 - p(MMMM) - p(FFFF) = 1 - \frac{1}{16} - \frac{1}{16} = \frac{14}{16}$$

    Seja F dos eventos que tem um menino:

    $$p(F) = p(MFFF) + p(FMFF) + p(FFMF) + p(FFFM) = \frac{4}{16}$$

    $E \cap F$:

$$p(F \cap E) = p(MFFF) + p(FMFF) + p(FFMF) + p(FFFM) = \frac{4}{16}$$

O que implica que:

$$p(F \cap E) = p(F) = \frac{4}{16}$$

Se fosse independente:

$$p(F \cap E) = p(F) \cdot p(E) \Rightarrow \frac{4}{16} = \frac{4}{16}.p(E) \Rightarrow p(E) = 1$$

O que é falso, pois $p(E) = \frac{14}{16}$.