

# Filtragem no Domínio Espacial

## Relações de Adjacência, Kernel, Correlação e Convolução

Jefersson Alex dos Santos

jefersson@dcc.ufmg.br



<sup>1</sup>Baseado nas aulas do Prof. Alexandre Xavier Falcão

# Roteiro da Aula

**1** Relação de Adjacência

**2** Kernel

**3** Correlação

**4** Convolução

# Introdução

## Filtragem no Domínio Espacial



# Introdução

## Filtragem no Domínio Espacial



# Introdução

Filtragem no Domínio Espacial

Photoshop – Suavização



# Introdução

## Filtragem no Domínio Espacial

### Photoshop – Suavização



# Introdução

## Filtragem no Domínio Espacial

### Aguçamento



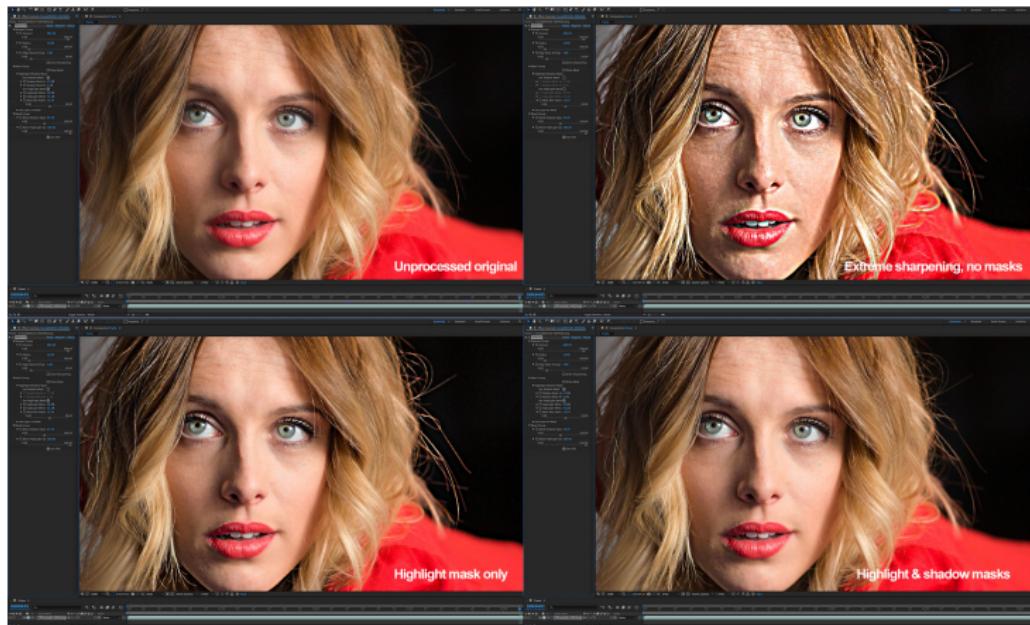
Before

After

# Introdução

## Filtragem no Domínio Espacial

### Photoshop - Aguçamento



# Introdução

Filtragem no Domínio Espacial

Aguçamento



# Introdução

Filtragem no Domínio Espacial

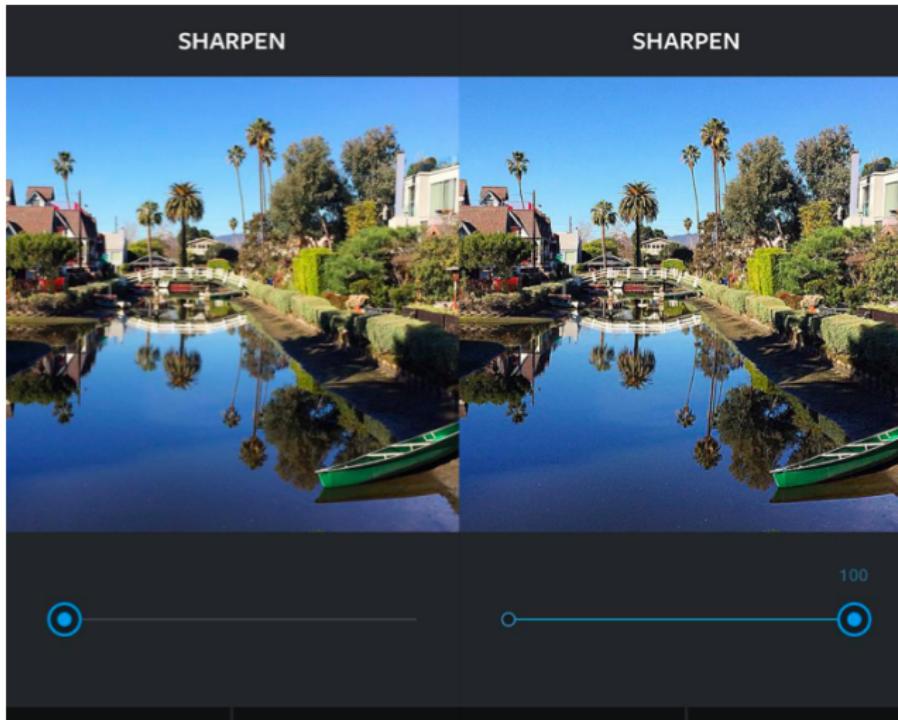
Aguçamento



# Introdução

## Filtragem no Domínio Espacial

Instagram - Aguçamento



# Introdução

## Filtragem no Domínio Espacial

### Bordas



# Filtragem no Domínio Espacial

Filtragem realizada por meio da aplicação de máscaras (*kernel*)

- Cada posição da máscara é associada a um valor numérico (peso)
- Aplicada diretamente nos pixels da imagem: gera uma nova imagem substituindo o brilho de um pixel/spel  $p$  de coordenadas  $(x, y)$  pelo resultado de uma **operação**
- A máscara é movida sobre todas as direções da imagem

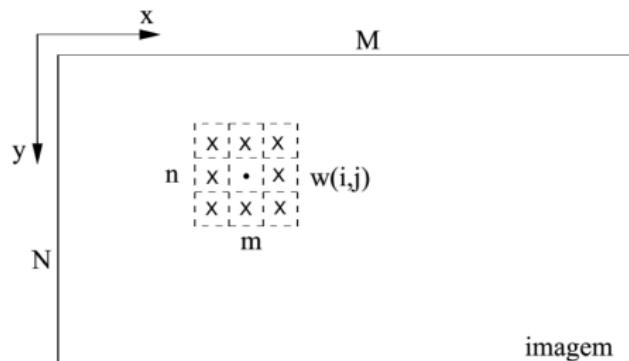
$w_1$	$w_2$	$w_3$
$w_4$	$w_5$	$w_6$
$w_7$	$w_8$	$w_9$

Figura 4.18: Máscara de  $3 \times 3$  pixels com coeficientes arbitrários.

# Filtragem no Domínio Espacial

Filtragem realizada por meio da aplicação de máscaras (*kernel*)

- Cada posição da máscara é associada a um valor numérico (peso)
- Aplicada diretamente nos pixels da imagem: gera uma nova imagem substituindo o brilho de um pixel/spel  $p$  de coordenadas  $(x,y)$  pelo resultado de uma **operação**
- A máscara é movida sobre todas as direções da imagem



# Relação de Adjacência

Dada uma imagem  $\hat{I} = (D_I, \vec{I})$ , uma relação de adjacência  $\mathcal{A} \subset D_I \times D_I$  é uma relação binária entre spels  $p$  e  $q$ , a qual leva em conta algum **critério de distância** entre eles. Por exemplo:

- Dois spels,  $p$  e  $q$  são adjacentes, i.e.  $(p, q) \in \mathcal{A}$ , se a distância entre eles no espaço imagem for menor ou igual a um raio  $r \geq 1$ , i.e.  $\|q - p\| \leq r$ .
- Para  $D_I \subset \mathbb{Z}^2$ , se  $r = 1$ ,  $p$  e  $q$  compartilham uma aresta (**vizinhança-4**), se  $r = \sqrt{2}$ , eles compartilham pelo menos um vértice (**vizinhança-8**).
- Para  $D_I \subset \mathbb{Z}^3$ , se  $r = 1$ ,  $p$  e  $q$  compartilham uma face (**vizinhança-6**), se  $r = \sqrt{2}$ , eles compartilham pelo menos uma aresta (**vizinhança-18**), e se  $r = \sqrt{3}$ , eles compartilham pelo menos um vértice (**vizinhança-26**).

# Relação de Adjacência

Dada uma imagem  $\hat{I} = (D_I, \vec{I})$ , uma relação de adjacência  $\mathcal{A} \subset D_I \times D_I$  é uma relação binária entre spels  $p$  e  $q$ , a qual leva em conta algum **critério de distância** entre eles. Por exemplo:

- Dois spels,  $p$  e  $q$  são adjacentes, i.e.  $(p, q) \in \mathcal{A}$ , se a distância entre eles no espaço imagem for menor ou igual a um raio  $r \geq 1$ , i.e.  $\|q - p\| \leq r$ .
- Para  $D_I \subset \mathbb{Z}^2$ , se  $r = 1$ ,  $p$  e  $q$  compartilham uma aresta (**vizinhança-4**), se  $r = \sqrt{2}$ , eles compartilham pelo menos um vértice (**vizinhança-8**).
- Para  $D_I \subset \mathbb{Z}^3$ , se  $r = 1$ ,  $p$  e  $q$  compartilham uma face (**vizinhança-6**), se  $r = \sqrt{2}$ , eles compartilham pelo menos uma aresta (**vizinhança-18**), e se  $r = \sqrt{3}$ , eles compartilham pelo menos um vértice (**vizinhança-26**).

# Relação de Adjacência

Dada uma imagem  $\hat{I} = (D_I, \vec{I})$ , uma relação de adjacência  $\mathcal{A} \subset D_I \times D_I$  é uma relação binária entre spels  $p$  e  $q$ , a qual leva em conta algum **critério de distância** entre eles. Por exemplo:

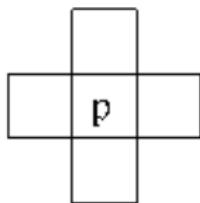
- Dois spels,  $p$  e  $q$  são adjacentes, i.e.  $(p, q) \in \mathcal{A}$ , se a distância entre eles no espaço imagem for menor ou igual a um raio  $r \geq 1$ , i.e.  $\|q - p\| \leq r$ .
- Para  $D_I \subset \mathbb{Z}^2$ , se  $r = 1$ ,  $p$  e  $q$  compartilham uma aresta (**vizinhança-4**), se  $r = \sqrt{2}$ , eles compartilham pelo menos um vértice (**vizinhança-8**).
- Para  $D_I \subset \mathbb{Z}^3$ , se  $r = 1$ ,  $p$  e  $q$  compartilham uma face (**vizinhança-6**), se  $r = \sqrt{2}$ , eles compartilham pelo menos uma aresta (**vizinhança-18**), e se  $r = \sqrt{3}$ , eles compartilham pelo menos um vértice (**vizinhança-26**).

# Relação de Adjacência

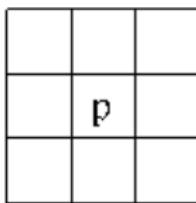
Dada uma imagem  $\hat{I} = (D_I, \vec{I})$ , uma relação de adjacência  $\mathcal{A} \subset D_I \times D_I$  é uma relação binária entre spels  $p$  e  $q$ , a qual leva em conta algum **critério de distância** entre eles. Por exemplo:

- Dois spels,  $p$  e  $q$  são adjacentes, i.e.  $(p, q) \in \mathcal{A}$ , se a distância entre eles no espaço imagem for menor ou igual a um raio  $r \geq 1$ , i.e.  $\|q - p\| \leq r$ .
- Para  $D_I \subset \mathbb{Z}^2$ , se  $r = 1$ ,  $p$  e  $q$  compartilham uma aresta (**vizinhança-4**), se  $r = \sqrt{2}$ , eles compartilham pelo menos um vértice (**vizinhança-8**).
- Para  $D_I \subset \mathbb{Z}^3$ , se  $r = 1$ ,  $p$  e  $q$  compartilham uma face (**vizinhança-6**), se  $r = \sqrt{2}$ , eles compartilham pelo menos uma aresta (**vizinhança-18**), e se  $r = \sqrt{3}$ , eles compartilham pelo menos um vértice (**vizinhança-26**).

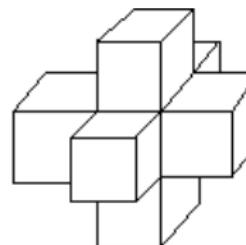
# Relação de Adjacência



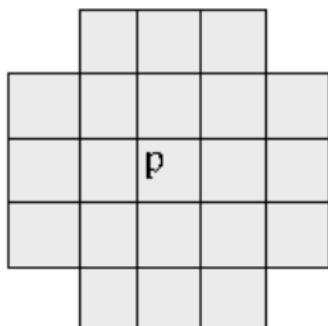
4 neighbors(2D)



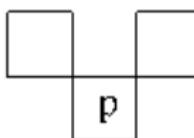
8 neighbors(2D)



6 neighbors(3D)



$$r = \sqrt{5}$$



# Relação de Adjacência

## Algumas propriedades

- A relação de adjacência  $\mathcal{A} : (p, q) \in \mathcal{A}$  se  $\|q - p\| \leq r$ , para  $r \geq 1$ , é reflexiva, simétrica e não-transitiva.
- No entanto, uma relação de adjacência pode ser irreflexiva e/ou assimétrica. Por exemplo:  $(p, q) \in \mathcal{A}$  se  $(q - p) \in \{(1, -1), (-1, -1)\}$ .
- Portanto, dizemos que  $q$  pertence ao conjunto de adjacentes de  $p$ , i.e.  $q \in \mathcal{A}(p)$ , se  $q$  for adjacente a  $p$  de acordo com  $\mathcal{A}$ .

# Relação de Adjacência

## Algumas propriedades

- A relação de adjacência  $\mathcal{A} : (p, q) \in \mathcal{A}$  se  $\|q - p\| \leq r$ , para  $r \geq 1$ , é reflexiva, simétrica e não-transitiva.
- No entanto, uma relação de adjacência pode ser irreflexiva e/ou assimétrica. Por exemplo:  $(p, q) \in \mathcal{A}$  se  $(q - p) \in \{(1, -1), (-1, -1)\}$ .
- Portanto, dizemos que  $q$  pertence ao conjunto de adjacentes de  $p$ , i.e.  $q \in \mathcal{A}(p)$ , se  $q$  for adjacente a  $p$  de acordo com  $\mathcal{A}$ .

# Relação de Adjacência

## Algumas propriedades

- A relação de adjacência  $\mathcal{A} : (p, q) \in \mathcal{A}$  se  $\|q - p\| \leq r$ , para  $r \geq 1$ , é reflexiva, simétrica e não-transitiva.
- No entanto, uma relação de adjacência pode ser irreflexiva e/ou assimétrica. Por exemplo:  $(p, q) \in \mathcal{A}$  se  $(q - p) \in \{(1, -1), (-1, -1)\}$ .
- Portanto, dizemos que  $q$  pertence ao conjunto de adjacentes de  $p$ , i.e.  $q \in \mathcal{A}(p)$ , se  $q$  for adjacente a  $p$  de acordo com  $\mathcal{A}$ .

# Relação de Adjacência

- As relações de adjacência até o momento são invariantes à translação e este é o caso mais comum.
- No entanto, se  $\mathcal{A}$  também levar em conta os valores dos spels na imagem, a relação deixa de ser invariante à translação. Por exemplo:  $(p, q) \in \mathcal{A}$  se  $\|q - p\| \leq r \geq 1$  e  $I(q) = I(p)$ .
- Podemos ainda definir a relação de adjacência usando apenas distâncias no espaço de parâmetros. Por exemplo:  $(p, q) \in \mathcal{A}$  se  $\|\vec{I}(q) - \vec{I}(p)\| \leq r \geq 0$ .

# Relação de Adjacência

- As relações de adjacência até o momento são invariantes à translação e este é o caso mais comum.
- No entanto, se  $\mathcal{A}$  também levar em conta os valores dos spels na imagem, a relação deixa de ser invariante à translação. Por exemplo:  $(p, q) \in \mathcal{A}$  se  $\|q - p\| \leq r \geq 1$  e  $I(q) = I(p)$ .
- Podemos ainda definir a relação de adjacência usando apenas distâncias no espaço de parâmetros. Por exemplo:  $(p, q) \in \mathcal{A}$  se  $\|\vec{I}(q) - \vec{I}(p)\| \leq r \geq 0$ .

# Relação de Adjacência

- As relações de adjacência até o momento são invariantes à translação e este é o caso mais comum.
- No entanto, se  $\mathcal{A}$  também levar em conta os valores dos spels na imagem, a relação deixa de ser invariante à translação. Por exemplo:  $(p, q) \in \mathcal{A}$  se  $\|q - p\| \leq r \geq 1$  e  $I(q) = I(p)$ .
- Podemos ainda definir a relação de adjacência usando apenas distâncias no espaço de parâmetros. Por exemplo:  $(p, q) \in \mathcal{A}$  se  $\|\vec{I}(q) - \vec{I}(p)\| \leq r \geq 0$ .

# Relação de Adjacência

Nesta aula, estaremos interessados em relações de adjacência **invariantes à translação**.

- Estas relações podem ser armazenadas em um vetor de deslocamentos. Por exemplo, para  $D_I \subset \mathbb{Z}^2$ , dizemos que  $q \in \mathcal{A}(p)$  se

$$q - p \in \{(dx_1, dy_1), (dx_2, dy_2), \dots, (dx_d, dy_d)\},$$

onde  $d = |\mathcal{A}(p)|$ . Estes deslocamentos serão os mesmos independente de  $p$ .

- Notem ainda que os adjacentes  $q$  são alcançados a partir de qualquer  $p$  por

$$(x_q, y_q) = (x_p, y_p) + (dx_i, dy_i), i = 1, 2, \dots, d,$$

onde  $q = (x_q, y_q)$  e  $p = (x_p, y_p)$ .

# Relação de Adjacência

Nesta aula, estaremos interessados em relações de adjacência **invariantes à translação**.

- Estas relações podem ser armazenadas em um vetor de deslocamentos. Por exemplo, para  $D_I \subset \mathbb{Z}^2$ , dizemos que  $q \in \mathcal{A}(p)$  se

$$q - p \in \{(dx_1, dy_1), (dx_2, dy_2), \dots, (dx_d, dy_d)\},$$

onde  $d = |\mathcal{A}(p)|$ . Estes deslocamentos serão os mesmos independente de  $p$ .

- Notem ainda que os adjacentes  $q$  são alcançados a partir de qualquer  $p$  por

$$(x_q, y_q) = (x_p, y_p) + (dx_i, dy_i), i = 1, 2, \dots, d,$$

onde  $q = (x_q, y_q)$  e  $p = (x_p, y_p)$ .

# Relação de Adjacência

Nesta aula, estaremos interessados em relações de adjacência **invariantes à translação**.

- Estas relações podem ser armazenadas em um vetor de deslocamentos. Por exemplo, para  $D_I \subset \mathbb{Z}^2$ , dizemos que  $q \in \mathcal{A}(p)$  se

$$q - p \in \{(dx_1, dy_1), (dx_2, dy_2), \dots, (dx_d, dy_d)\},$$

onde  $d = |\mathcal{A}(p)|$ . Estes deslocamentos serão os mesmos independente de  $p$ .

- Notem ainda que os adjacentes  $q$  são alcançados a partir de qualquer  $p$  por

$$(x_q, y_q) = (x_p, y_p) + (dx_i, dy_i), i = 1, 2, \dots, d,$$

onde  $q = (x_q, y_q)$  e  $p = (x_p, y_p)$ .

# Roteiro da Aula

**1** Relação de Adjacência

**2** Kernel

**3** Correlação

**4** Convolução

# Kernel

A.k.a. Máscara, Filtro

Um *kernel*  $\hat{K}$  é uma imagem (móvel) de pesos definidos sobre os deslocamentos de uma relação de adjacência  $\mathcal{A}$ .

- $\hat{K} = (\mathcal{A}, K)$  consiste do mapeamento de pesos  $K(q-p) \in \{w_1, w_2, \dots, w_d\}$  associados a cada deslocamento em  $\mathcal{A}(p)$ , respectivamente.
- Ao considerar cada spel  $p \in D_I$ , estamos essencialmente deslocando uma imagem  $\hat{K}$  sobre a imagem  $\hat{I}$ .
- A **correlação** e a **convolução** calculam a soma dos produtos entre o valor em  $\hat{I}$  de cada spel adjacente e o seu peso em  $\hat{K}$ , para cada deslocamento possível.

# Kernel

A.k.a. Máscara, Filtro

Um *kernel*  $\hat{K}$  é uma imagem (móvel) de pesos definidos sobre os deslocamentos de uma relação de adjacência  $\mathcal{A}$ .

- $\hat{K} = (\mathcal{A}, K)$  consiste do mapeamento de pesos  $K(q-p) \in \{w_1, w_2, \dots, w_d\}$  associados a cada deslocamento em  $\mathcal{A}(p)$ , respectivamente.
- Ao considerar cada spel  $p \in D_I$ , estamos essencialmente deslocando uma imagem  $\hat{K}$  sobre a imagem  $\hat{I}$ .
- A **correlação** e a **convolução** calculam a soma dos produtos entre o valor em  $\hat{I}$  de cada spel adjacente e o seu peso em  $\hat{K}$ , para cada deslocamento possível.

# Kernel

A.k.a. Máscara, Filtro

Um *kernel*  $\hat{K}$  é uma imagem (móvel) de pesos definidos sobre os deslocamentos de uma relação de adjacência  $\mathcal{A}$ .

- $\hat{K} = (\mathcal{A}, K)$  consiste do mapeamento de pesos  $K(q-p) \in \{w_1, w_2, \dots, w_d\}$  associados a cada deslocamento em  $\mathcal{A}(p)$ , respectivamente.
- Ao considerar cada spel  $p \in D_I$ , estamos essencialmente deslocando uma imagem  $\hat{K}$  sobre a imagem  $\hat{I}$ .
- A **correlação** e a **convolução** calculam a soma dos produtos entre o valor em  $\hat{I}$  de cada spel adjacente e o seu peso em  $\hat{K}$ , para cada deslocamento possível.

# Kernel

A.k.a. Máscara, Filtro

Um *kernel*  $\hat{K}$  é uma imagem (móvel) de pesos definidos sobre os deslocamentos de uma relação de adjacência  $\mathcal{A}$ .

- $\hat{K} = (\mathcal{A}, K)$  consiste do mapeamento de pesos  $K(q-p) \in \{w_1, w_2, \dots, w_d\}$  associados a cada deslocamento em  $\mathcal{A}(p)$ , respectivamente.
- Ao considerar cada spel  $p \in D_I$ , estamos essencialmente deslocando uma imagem  $\hat{K}$  sobre a imagem  $\hat{I}$ .
- A **correlação** e a **convolução** calculam a soma dos produtos entre o valor em  $\hat{I}$  de cada spel adjacente e o seu peso em  $\hat{K}$ , para cada deslocamento possível.

# **Kernel**

- A relação de adjacência  $\mathcal{A}$  em  $\hat{K}$  tem sempre uma origem  $(0,0)$  referente ao spel  $p$ .
- Diferença entre correlação e convolução: reflexão  $\hat{K}'$  de  $\hat{K}$  em relação à origem.

$$\begin{matrix} \mathbf{K}(x,y) \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & -1 \\ \hline 2 & 0 & -2 \\ \hline 1 & 0 & -1 \\ \hline \end{array} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x \\ \downarrow \\ y \end{matrix}$$

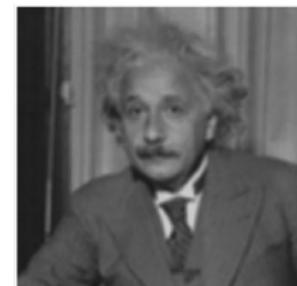
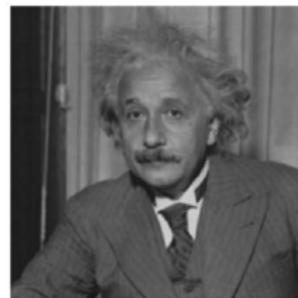
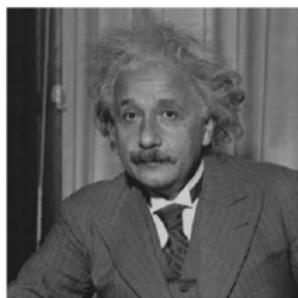
$$\begin{matrix} \mathbf{K}(-x,-y) \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline -2 & 0 & 2 \\ \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x \\ \downarrow \\ y \end{matrix}$$

# Kernel

$$h_1 = \frac{1}{9} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$h_2 = \frac{1}{25} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$h_3 = \frac{1}{49} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$



# Roteiro da Aula

**1 Relação de Adjacência**

**2 Kernel**

**3 Correlação**

**4 Convolução**

# Correlação

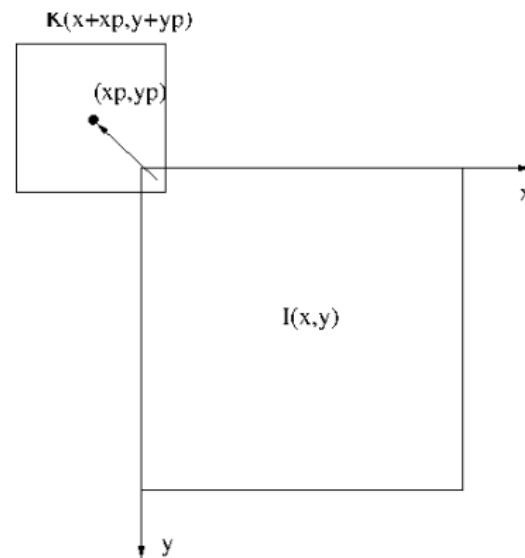
A correlação  $\hat{I} \odot \hat{K}$  entre  $\hat{I} = (D_I, I)$  e  $\hat{K} = (\mathcal{A}, K)$  gera uma imagem  $\hat{J} = (D_J, J)$  tal que para todo  $p \in D_I$ :

$$J(p) = \sum_{\forall q \in \mathcal{A}(p)} I(q)K(q-p) = \sum_{i=1}^d I(q_i)w_i$$

onde  $q_i, i = 1, 2, \dots, d$  são os adjacentes de  $p$  em  $\mathcal{A}(p)$ .

# Correlação

A rigor, a imagem  $\hat{K}$  desloca-se deste o infinito negativo de cada eixo até o infinito positivo de cada eixo, valendo para todo  $p \in D_J$  tal que  $D_I \subset D_J$ , mas na prática forçamos que  $D_J = D_I$ .



# Correlação

Em 2D, a correlação entre  $\hat{I} = (D_I, I)$  e  $\hat{K} = (D_K, K)$  geraria a imagem  $\hat{J} = (D_J, J)$ , onde para todo  $p \in D_J$ :

$$J(x_p, y_p) = \sum_{y=-\infty}^{\infty} \sum_{x=-\infty}^{\infty} I(x, y)K(x + x_p, y + y_p)$$

onde  $(x_p, y_p)$  seriam os deslocamentos em relação a origem  $(0, 0)$ .

- $J(x_p, y_p)$  só existe na intersecção entre  $\hat{I} = (D_I, I)$  e  $\hat{K} = (D_K, K)$ .
- Se  $D_I$  tiver  $n_x \times n_y$  pixels e  $D_K$  tiver  $m_x \times m_y$  pixels, então  $D_J$  terá  $(n_x + m_x - 1) \times (n_y + m_y - 1)$  pixels.

# Correlação

Em 2D, a correlação entre  $\hat{I} = (D_I, I)$  e  $\hat{K} = (D_K, K)$  geraria a imagem  $\hat{J} = (D_J, J)$ , onde para todo  $p \in D_J$ :

$$J(x_p, y_p) = \sum_{y=-\infty}^{\infty} \sum_{x=-\infty}^{\infty} I(x, y)K(x + x_p, y + y_p)$$

onde  $(x_p, y_p)$  seriam os deslocamentos em relação a origem  $(0, 0)$ .

- $J(x_p, y_p)$  só existe na intersecção entre  $\hat{I} = (D_I, I)$  e  $\hat{K} = (D_K, K)$ .
- Se  $D_I$  tiver  $n_x \times n_y$  pixels e  $D_K$  tiver  $m_x \times m_y$  pixels, então  $D_J$  terá  $(n_x + m_x - 1) \times (n_y + m_y - 1)$  pixels.

# Correlação

Em 2D, a correlação entre  $\hat{I} = (D_I, I)$  e  $\hat{K} = (D_K, K)$  geraria a imagem  $\hat{J} = (D_J, J)$ , onde para todo  $p \in D_J$ :

$$J(x_p, y_p) = \sum_{y=-\infty}^{\infty} \sum_{x=-\infty}^{\infty} I(x, y)K(x + x_p, y + y_p)$$

onde  $(x_p, y_p)$  seriam os deslocamentos em relação a origem  $(0, 0)$ .

- $J(x_p, y_p)$  só existe na intersecção entre  $\hat{I} = (D_I, I)$  e  $\hat{K} = (D_K, K)$ .
- Se  $D_I$  tiver  $n_x \times n_y$  pixels e  $D_K$  tiver  $m_x \times m_y$  pixels, então  $D_J$  terá  $(n_x + m_x - 1) \times (n_y + m_y - 1)$  pixels.

# Correlação

## Exemplo

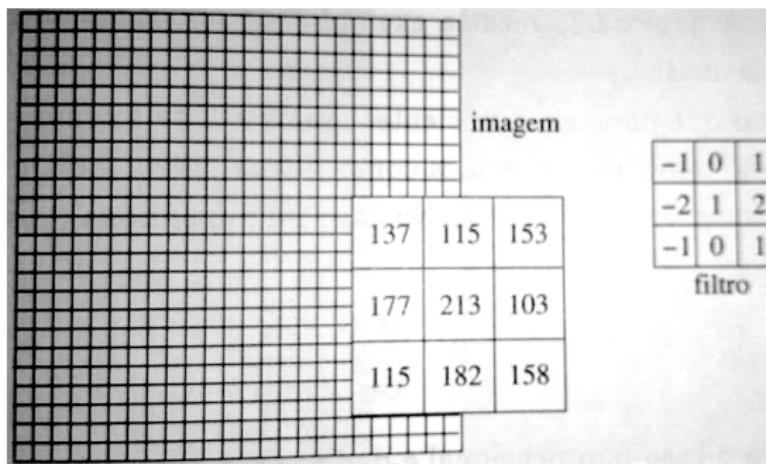
The diagram illustrates the convolution operation  $I * K$ . It shows three matrices:  $I$ ,  $K$ , and  $I * K$ .

- Matrix  $I$ :** A 7x7 binary matrix with values 0 or 1. A 3x3 submatrix in the top-left corner is highlighted in red. The elements of this submatrix are labeled with multipliers:  $\times 1$  for the top-left element,  $\times 0$  for the top-middle and middle-middle elements, and  $\times 1$  for the middle-right element.
- Matrix  $K$ :** A 3x3 binary matrix used as a kernel.
- Matrix  $I * K$ :** The resulting 7x7 matrix. The element at position (4,4) is highlighted in green and has a value of 4, indicating it is the result of the convolution step where the kernel  $K$  was applied to the submatrix of  $I$ .

The operation is represented by the formula  $I * K = \text{Result}$ .

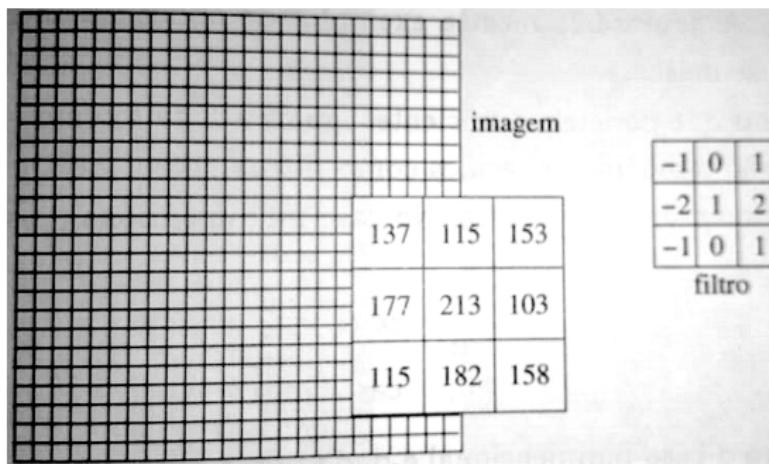
# Correlação

## Exemplo



# Correlação

## Exemplo



## Correlação

$$137 * (-1) + 115 * 0 + 153 * 1 + 177 * (-2) + 213 * 1 + 103 * 2 + 115 * (-1) + 182 * 0 + 158 * 1 = 124$$

# Roteiro da Aula

**1 Relação de Adjacência**

**2 Kernel**

**3 Correlação**

**4 Convolução**

# Convolução

A convolução  $\hat{I} * \hat{K}$  entre  $\hat{I} = (D_I, I)$  e  $\hat{K} = (\mathcal{A}, K)$  requer a reflexão  $\hat{K}'$  de  $\hat{K}$ :

$$\begin{aligned}\hat{K}' &= (\mathcal{A}', K) \\ \mathcal{A}' &= \{(-dx_1, -dy_1), (-dx_2, -dy_2), \dots, (-dx_d, -dy_d)\} \\ K(p-q) &\in \{w_1, w_2, \dots, w_d\}\end{aligned}$$

# Convolução

Essa convolução  $\hat{J} = (D_J, J)$  tal que para todo  $p \in D_I$ :

$$J(p) = \sum_{\forall q \in \mathcal{A}'(p)} I(q)K(p-q) = \sum_{i=1}^d I(q_i)w_i$$

onde  $q_i, i = 1, 2, \dots, d$  são os adjacentes de  $p$  em  $\mathcal{A}'(p)$ . Também forçamos  $D_J = D_I$ .

# Convolução

Em 2D, a convolução entre  $\hat{I} = (D_I, I)$  e  $\hat{K} = (D_K, K)$  geraria a imagem  $\hat{J} = (D_J, J)$ , onde para todo  $p \in D_J$ :

$$J(x_p, y_p) = \sum_{y=-\infty}^{\infty} \sum_{x=-\infty}^{\infty} I(x, y)K(-x + x_p, -y + y_p)$$

onde  $(x_p, y_p)$  seriam os deslocamentos em relação a origem  $(0, 0)$ .

- $J(x_p, y_p)$  só existe na intersecção entre  $\hat{I} = (D_I, I)$  e  $\hat{K} = (D_K, K)$ .
- Se  $D_I$  tiver  $n_x \times n_y$  pixels e  $D_K$  tiver  $m_x \times m_y$  pixels, então  $D_J$  terá  $(n_x + m_x - 1) \times (n_y + m_y - 1)$  pixels.

# Convolução

Em 2D, a convolução entre  $\hat{I} = (D_I, I)$  e  $\hat{K} = (D_K, K)$  geraria a imagem  $\hat{J} = (D_J, J)$ , onde para todo  $p \in D_J$ :

$$J(x_p, y_p) = \sum_{y=-\infty}^{\infty} \sum_{x=-\infty}^{\infty} I(x, y)K(-x + x_p, -y + y_p)$$

onde  $(x_p, y_p)$  seriam os deslocamentos em relação a origem  $(0, 0)$ .

- $J(x_p, y_p)$  só existe na intersecção entre  $\hat{I} = (D_I, I)$  e  $\hat{K} = (D_K, K)$ .
- Se  $D_I$  tiver  $n_x \times n_y$  pixels e  $D_K$  tiver  $m_x \times m_y$  pixels, então  $D_J$  terá  $(n_x + m_x - 1) \times (n_y + m_y - 1)$  pixels.

# Convolução

Em 2D, a convolução entre  $\hat{I} = (D_I, I)$  e  $\hat{K} = (D_K, K)$  geraria a imagem  $\hat{J} = (D_J, J)$ , onde para todo  $p \in D_J$ :

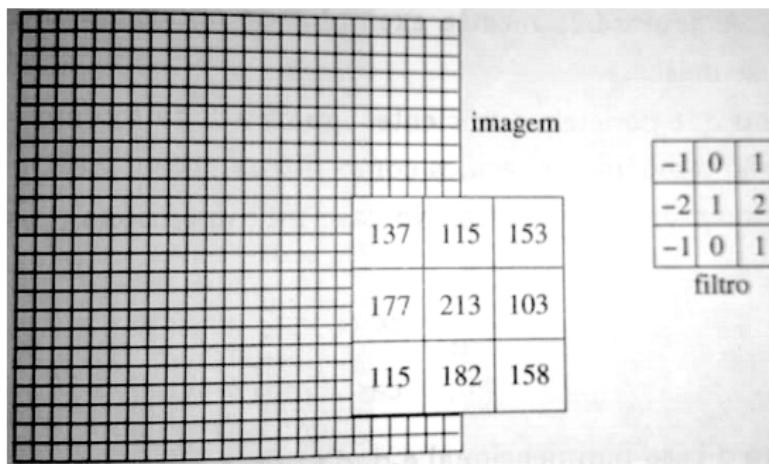
$$J(x_p, y_p) = \sum_{y=-\infty}^{\infty} \sum_{x=-\infty}^{\infty} I(x, y)K(-x + x_p, -y + y_p)$$

onde  $(x_p, y_p)$  seriam os deslocamentos em relação a origem  $(0, 0)$ .

- $J(x_p, y_p)$  só existe na intersecção entre  $\hat{I} = (D_I, I)$  e  $\hat{K} = (D_K, K)$ .
- Se  $D_I$  tiver  $n_x \times n_y$  pixels e  $D_K$  tiver  $m_x \times m_y$  pixels, então  $D_J$  terá  $(n_x + m_x - 1) \times (n_y + m_y - 1)$  pixels.

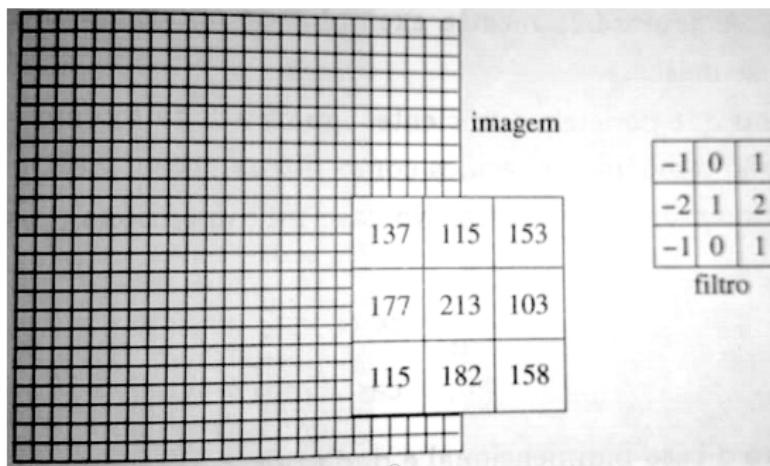
# Convolução

## Exemplo



# Convolução

## Exemplo



## Convolução

$$137 * (1) + 115 * 0 + 153 * (-1) + 177 * 2 + 213 * 1 + 103 * (-2) + 115 * 1 + 182 * 0 + 158 * (-1) = 302$$

# Algumas propriedades

A convolução está associada à filtragem linear. Então vamos estudar suas propriedades matemáticas.

- Comutatividade:  $\hat{I} * \hat{K} = \hat{K} * \hat{I}$ .
- Associatividade:  $\hat{I} * (\hat{J} * \hat{K}) = (\hat{I} * \hat{J}) * \hat{K}$ .
- Distributividade:  $\hat{I} * (\hat{J} + \hat{K}) = (\hat{I} * \hat{J}) + (\hat{I} * \hat{K})$ .
- Associatividade com escalar:  $a(\hat{I} * \hat{K}) = (a\hat{I}) * \hat{K}$ .
- Identidade multiplicativa:  $\hat{I} * \hat{\delta} = \hat{I}$ , onde  $\hat{\delta} = (D_\delta, \delta)$  é a imagem do Delta de Dirac.

# Algumas propriedades

A convolução está associada à filtragem linear. Então vamos estudar suas propriedades matemáticas.

- Comutatividade:  $\hat{I} * \hat{K} = \hat{K} * \hat{I}$ .
- Associatividade:  $\hat{I} * (\hat{J} * \hat{K}) = (\hat{I} * \hat{J}) * \hat{K}$ .
- Distributividade:  $\hat{I} * (\hat{J} + \hat{K}) = (\hat{I} * \hat{J}) + (\hat{I} * \hat{K})$ .
- Associatividade com escalar:  $a(\hat{I} * \hat{K}) = (a\hat{I}) * \hat{K}$ .
- Identidade multiplicativa:  $\hat{I} * \hat{\delta} = \hat{I}$ , onde  $\hat{\delta} = (D_\delta, \delta)$  é a imagem do Delta de Dirac.

# Algumas propriedades

A convolução está associada à filtragem linear. Então vamos estudar suas propriedades matemáticas.

- Comutatividade:  $\hat{I} * \hat{K} = \hat{K} * \hat{I}$ .
- Associatividade:  $\hat{I} * (\hat{J} * \hat{K}) = (\hat{I} * \hat{J}) * \hat{K}$ .
- Distributividade:  $\hat{I} * (\hat{J} + \hat{K}) = (\hat{I} * \hat{J}) + (\hat{I} * \hat{K})$ .
- Associatividade com escalar:  $a(\hat{I} * \hat{K}) = (a\hat{I}) * \hat{K}$ .
- Identidade multiplicativa:  $\hat{I} * \hat{\delta} = \hat{I}$ , onde  $\hat{\delta} = (D_\delta, \delta)$  é a imagem do Delta de Dirac.

# Algumas propriedades

A convolução está associada à filtragem linear. Então vamos estudar suas propriedades matemáticas.

- Comutatividade:  $\hat{I} * \hat{K} = \hat{K} * \hat{I}$ .
- Associatividade:  $\hat{I} * (\hat{J} * \hat{K}) = (\hat{I} * \hat{J}) * \hat{K}$ .
- Distributividade:  $\hat{I} * (\hat{J} + \hat{K}) = (\hat{I} * \hat{J}) + (\hat{I} * \hat{K})$ .
- Associatividade com escalar:  $a(\hat{I} * \hat{K}) = (a\hat{I}) * \hat{K}$ .
- Identidade multiplicativa:  $\hat{I} * \hat{\delta} = \hat{I}$ , onde  $\hat{\delta} = (D_\delta, \delta)$  é a imagem do Delta de Dirac.

# Algumas propriedades

A convolução está associada à filtragem linear. Então vamos estudar suas propriedades matemáticas.

- Comutatividade:  $\hat{I} * \hat{K} = \hat{K} * \hat{I}$ .
- Associatividade:  $\hat{I} * (\hat{J} * \hat{K}) = (\hat{I} * \hat{J}) * \hat{K}$ .
- Distributividade:  $\hat{I} * (\hat{J} + \hat{K}) = (\hat{I} * \hat{J}) + (\hat{I} * \hat{K})$ .
- Associatividade com escalar:  $a(\hat{I} * \hat{K}) = (a\hat{I}) * \hat{K}$ .
- Identidade multiplicativa:  $\hat{I} * \hat{\delta} = \hat{I}$ , onde  $\hat{\delta} = (D_\delta, \delta)$  é a imagem do Delta de Dirac.

# Algumas propriedades

A convolução está associada à filtragem linear. Então vamos estudar suas propriedades matemáticas.

- Comutatividade:  $\hat{I} * \hat{K} = \hat{K} * \hat{I}$ .
- Associatividade:  $\hat{I} * (\hat{J} * \hat{K}) = (\hat{I} * \hat{J}) * \hat{K}$ .
- Distributividade:  $\hat{I} * (\hat{J} + \hat{K}) = (\hat{I} * \hat{J}) + (\hat{I} * \hat{K})$ .
- Associatividade com escalar:  $a(\hat{I} * \hat{K}) = (a\hat{I}) * \hat{K}$ .
- Identidade multiplicativa:  $\hat{I} * \hat{\delta} = \hat{I}$ , onde  $\hat{\delta} = (D_\delta, \delta)$  é a imagem do Delta de Dirac.

# Algoritmo de Convolução

Entrada:  $\hat{I} = (D_I, I)$  e  $\hat{K} = (\mathcal{A}, K)$ .

Saída:  $\hat{J} = (D_J, J)$ ,  $D_I \subset D_J$ .

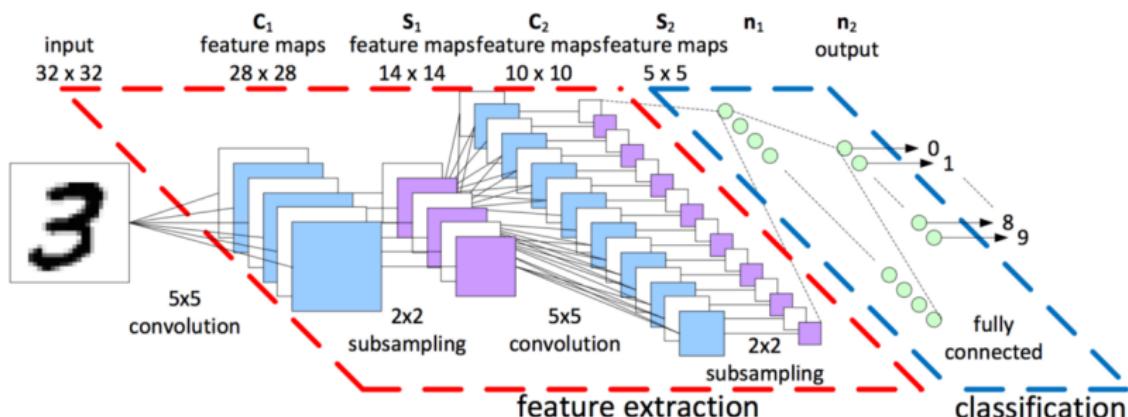
- 1 Calcula  $\hat{K}' = (\mathcal{A}', K)$ .
- 2 Para todo  $p \in D_J$ , faça
- 3      $J(p) \leftarrow 0$ .
- 4     Para todo  $q \in \mathcal{A}'(p)$ , tal que  $q \in D_I$ , faça
- 5          $J(p) \leftarrow J(p) + I(q)K(p - q)$ .

# Filtragem no Domínio Espacial

## Outras questões relevantes

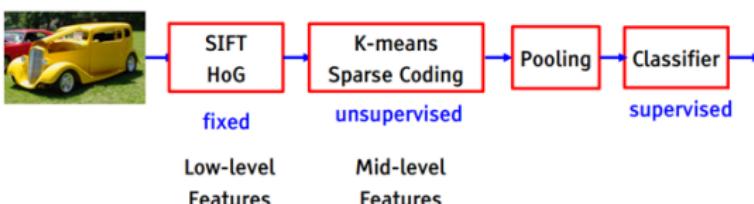
- Pixels na borda da imagem devem ser tratados de forma diferente
- Utilizamos máscaras quadradas com  $n \times n$  pixels com  $n$  ímpar (simetria)
- O valor de  $n$  geralmente é pequeno por questões de desempenho. A convolução entre uma máscara  $3 \times 3$  e uma imagem de  $512 \times 512$  requer:
  - 9 multiplicações e 8 adições para cada pixel
  - total de 2.359.296 multiplicações e 2.097.152 adições
- E no caso de imagens coloridas?

# Redes Convolucionais

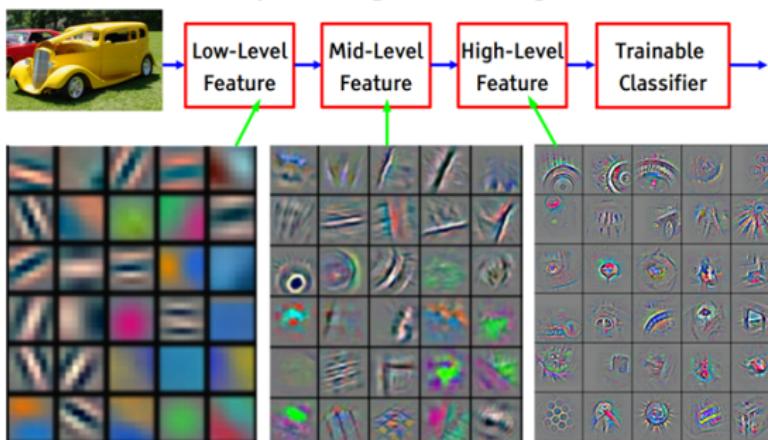


# Redes Convolucionais

Object recognition 2006-2012



## State of the art object recognition using CNNs



# Redes Convolucionais



# Referências

Demos:

- <http://www.fit.vutbr.cz/study/courses/ISS/public/demos/conv/>
- <https://graphics.stanford.edu/courses/cs178-10/applets/convolution.html>