

Filtros Não-Lineares

Filtros de Ordem Estatística e Operadores Morfológicos

Jefersson Alex dos Santos

jefersson@dcc.ufmg.br



¹Baseado nas aulas do Prof. Alexandre Xavier Falcão

Introdução

- Um dos problemas dos filtros passa-baixas (suavização) é a supressão de detalhes finos e bordas da imagem;



Original



Gaussiano

- Filtros não-lineares** procuram evitar a suavização homogênea ao longo de regiões próximas às bordas

Introdução

Sejam $\hat{I} = (D_I, I)$ e $\hat{K} = (\mathcal{A}, K)$ imagem e kernel.

Introdução

Sejam $\hat{I} = (D_I, I)$ e $\hat{K} = (\mathcal{A}, K)$ imagem e kernel.

- Esta aula aborda uma variedade de operações locais não-lineares envolvendo os valores $I(q)$ dos spels q em uma dada adjacência $\mathcal{A}(p)$ dos spels p .

Introdução

Sejam $\hat{I} = (D_I, I)$ e $\hat{K} = (\mathcal{A}, K)$ imagem e kernel.

- Esta aula aborda uma variedade de operações locais não-lineares envolvendo os valores $I(q)$ dos spels q em uma dada adjacência $\mathcal{A}(p)$ dos spels p .
- Algumas dessas operações consideram também os valores $K(q - p)$ associados a cada par $(p, q) \in \mathcal{A}$.

Introdução

Sejam $\hat{I} = (D_I, I)$ e $\hat{K} = (\mathcal{A}, K)$ imagem e kernel.

- Esta aula aborda uma variedade de operações locais não-lineares envolvendo os valores $I(q)$ dos spels q em uma dada adjacência $\mathcal{A}(p)$ dos spels p .
- Algumas dessas operações consideram também os valores $K(q-p)$ associados a cada par $(p, q) \in \mathcal{A}$.
- Essas operações incluem filtros **mediana**, **moda**, e **morfológicos**, gerando uma imagem $\hat{J} = (D_J, J)$.

Roteiro da Aula

1 Filtros Estatísticos

2 Morfologia Matemática

Filtro Mediana

O filtro mediana reduz ruído do tipo *speckle*, ordenando os spels $q \in \mathcal{A}(p)$ por $I(q)$ e atribuindo a $J(p)$ o valor mediano da sequência ordenada, para todo $p \in D_J$.



Original



Gaussiano



Mediana

* O filtro mediana tenta também preservar as bordas.

Filtro Mediana

O filtro mediana reduz ruído do tipo *speckle*, ordenando os spels $q \in \mathcal{A}(p)$ por $I(q)$ e atribuindo a $J(p)$ o valor mediano da sequência ordenada, para todo $p \in D_J$.



Original



Mediana

Filtro Mediana

O filtro mediana reduz ruído do tipo *speckle*, ordenando os spels $q \in \mathcal{A}(p)$ por $I(q)$ e atribuindo a $J(p)$ o valor mediano da sequência ordenada, para todo $p \in D_J$.



Original



Mediana

Filtro Mediana: Algoritmo

Entrada: $\hat{I} = (D_I, I)$ e \mathcal{A} .

Saída: $\hat{J} = (D_J, J)$.

Auxiliar: Lista $v(i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, |A| - 1$ e variáveis x , n e i .

- 1 Para todo $p \in D_J$, faça
- 2 $n \leftarrow 0$.
- 3 Para todo $q \in \mathcal{A}(p)$, tal que $q \in D_I$, faça
- 4 $v(n) \leftarrow I(q)$ e $i \leftarrow n$.
- 5 Enquanto $i > 0$ e $v(i) < v(i - 1)$, faça
- 6 $x \leftarrow v(i)$, $v(i) \leftarrow v(i - 1)$, $v(i - 1) \leftarrow x$, $i \leftarrow i - 1$.
- 7 $n \leftarrow n + 1$.
- 8 $J(p) \leftarrow v(n/2)$.

Filtro Máximo

Evidencia partes mais claras da imagem. Para todo $p \in D_J$:

$$J(p) = \max_{q \in \mathcal{A}(p)} \{I(q)\}.$$



Original



Máximo

Filtro Máximo

Evidencia partes mais claras da imagem. Para todo $p \in D_J$:

$$J(p) = \max_{q \in \mathcal{A}(p)} \{I(q)\}.$$



Original



Máximo

Filtro Mínimo

Evidencia partes mais escuras da imagem. Para todo $p \in D_J$:

$$J(p) = \min_{q \in \mathcal{A}(p)} \{I(q)\}.$$



Original



Mínimo

Filtro Mínimo

Evidencia partes mais escuras da imagem. Para todo $p \in D_J$:

$$J(p) = \min_{q \in \mathcal{A}(p)} \{I(q)\}.$$



Original



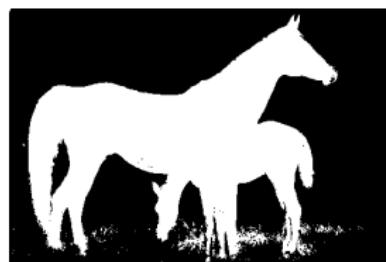
Máximo

Filtro Moda

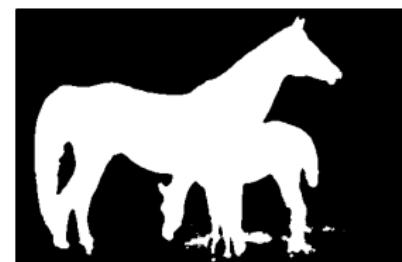
O filtro moda reduz erros de classificação, atribuindo a $J(p)$ o valor mais frequente de $I(q)$ entre spels $q \in \mathcal{A}(p)$, para todo $p \in D_J$.



Original



Antes da Moda



Depois da Moda

Filtro Moda

O filtro moda reduz erros de classificação, atribuindo a $J(p)$ o valor mais frequente de $I(q)$ entre spels $q \in \mathcal{A}(p)$, para todo $p \in D_J$.



Original



Moda

Filtro Moda

O filtro moda reduz erros de classificação, atribuindo a $J(p)$ o valor mais frequente de $I(q)$ entre spels $q \in \mathcal{A}(p)$, para todo $p \in D_J$.



Original



Moda

Filtro Moda: Algoritmo

Entrada: $\hat{I} = (D_I, I)$ e \mathcal{A} .

Saída: $\hat{J} = (D_J, J)$.

Auxiliar: Frequência $f(i) \leftarrow 0$, $i = 0, 1, \dots, I_{\max}$, onde I_{\max} é o maior brilho em \hat{I} , e variáveis i_{\max} e f_{\max} .

- 1** Para todo $p \in D_J$, faça
- 2** Para todo $q \in \mathcal{A}(p)$, tal que $q \in D_I$, faça
- 3** $f(I(q)) \leftarrow f(I(q)) + 1$.
- 4** $i_{\max} \leftarrow \text{nil}$ e $f_{\max} \leftarrow -\infty$.
- 5** Para todo $q \in \mathcal{A}(p)$, tal que $q \in D_I$, faça
- 6** Se $f(I(q)) > f_{\max}$, então
- 7** $i_{\max} \leftarrow I(q)$ e $f_{\max} \leftarrow f(I(q))$.
- 8** $f(I(q)) \leftarrow 0$.
- 9** $J(p) \leftarrow i_{\max}$.

Roteiro da Aula

1 Filtros Estatísticos

2 Morfologia Matemática

Morfologia matemática

Morfologia

A palavra normalmente denota uma área da biologia que lida com a forma e a estrutura de animais e plantas.

Morfologia matemática

Morfologia

A palavra normalmente denota uma área da biologia que lida com a forma e a estrutura de animais e plantas.

Morfologia Matemática

- Criada por Georges Matheron e Jean Serra em 1964
- Análise da geometria dos objetos em imagens binárias
- Estendida para imagens cinzas posteriormente

Morfologia Matemática \mapsto Teoria de Conjuntos (Álgebra de Minkowski)

Morfologia matemática

Aplicações

- Extração de componentes conexos
- Busca de padrões
- Fecho convexo
- Extração e afinamento de bordas

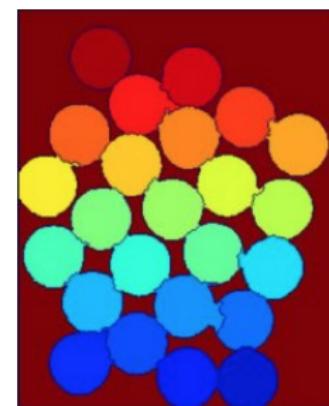
Morfologia matemática

Aplicações

- Extração de componentes conexos
- Busca de padrões
- Fecho convexo
- Extração e afinamento de bordas



Original



Componentes rotulados

Morfologia matemática

Aplicações

- Extração de componentes conexos
- **Busca de padrões**
- Fecho convexo
- Extração e afinamento de bordas

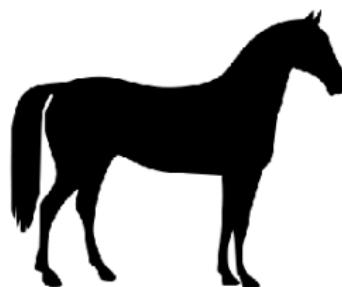


Morfologia matemática

Aplicações

- Extração de componentes conexos
- Busca de padrões
- **Fecho convexo**
- Extração e afinamento de bordas

original



convex hull



Morfologia matemática

Aplicações

- Extração de componentes conexos
- Busca de padrões
- Fecho convexo
- **Extração e afinamento de bordas**

Original



Gray-level closing



Gray-level opening



Morphological gradient



Morfologia matemática

- Transformações morfológicas essencialmente comparam uma imagem com outra menor (**elemento estruturante**), cuja geometria conhecida modifica os objetos da imagem.

Morfologia matemática

- Transformações morfológicas essencialmente comparam uma imagem com outra menor (**elemento estruturante**), cuja geometria conhecida modifica os objetos da imagem.
- Duas operações básicas são **dilatação** e **erosão**.

Morfologia matemática

- Transformações morfológicas essencialmente comparam uma imagem com outra menor (**elemento estruturante**), cuja geometria conhecida modifica os objetos da imagem.
- Duas operações básicas são **dilatação** e **erosão**.
- A primeira “engorda” os objetos de uma imagem binária (deixa mais clara a imagem cinza) enquanto a segunda “emagrece” os objetos (deixa mais escura a imagem cinza).

Morfologia matemática

- Transformações morfológicas essencialmente comparam uma imagem com outra menor (**elemento estruturante**), cuja geometria conhecida modifica os objetos da imagem.
- Duas operações básicas são **dilatação** e **erosão**.
- A primeira “engorda” os objetos de uma imagem binária (deixa mais clara a imagem cinza) enquanto a segunda “emagrece” os objetos (deixa mais escura a imagem cinza).

Elementos Estruturantes

São os filtros de “forma” utilizados nas operações morfológicas.

Dilatação

A **dilatação** $\hat{J} = \hat{I} \oplus \hat{K}$ de uma imagem \hat{I} por um elemento estruturante **não-planar** \hat{K} (kernel) é definida por:

$$J(p) = \max_{\forall q \in D_I} \{I(q) + K(q-p)\}.$$

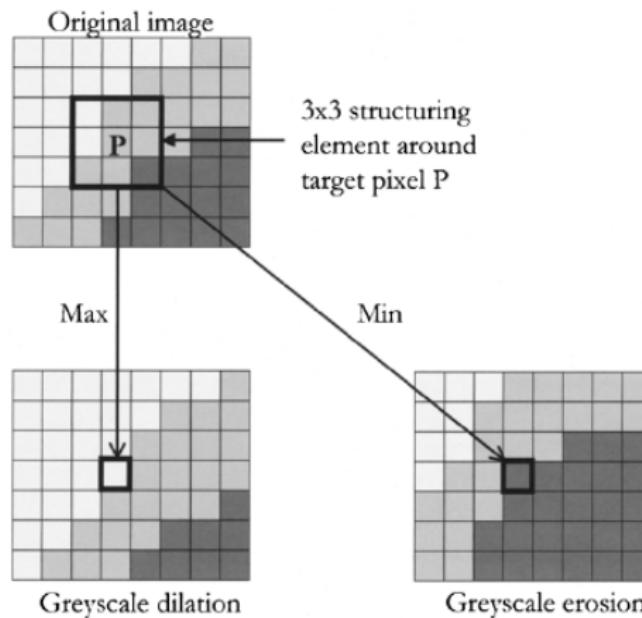
Erosão

A erosão $\hat{J} = \hat{I} \ominus \hat{K}$ de uma imagem \hat{I} por um elemento estruturante não-planar \hat{K} (kernel) é definida por:

$$J(p) = \min_{\forall q \in D_I} \{I(q) - K(q-p)\}.$$

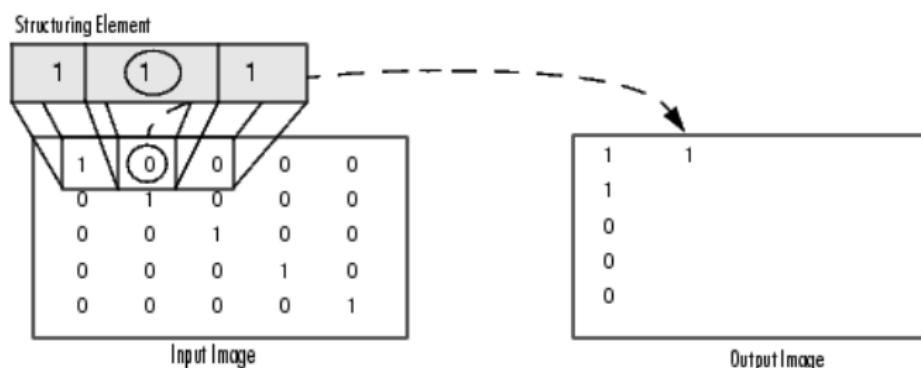
Erosão e Dilatação

Imagen em Níveis de Cinza



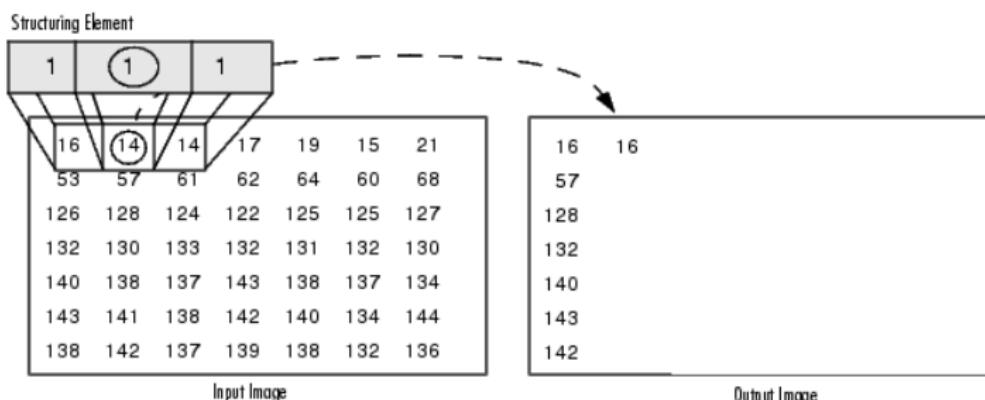
Erosão e Dilatação

Imagen Binária – Dilatação



Erosão e Dilatação

Imagen em Níveis de Cinza – Dilatação



Dilatação

A dilatação por um disco (elemento planar) de raio $r = 10$ elimina “bacias” (regiões escuras) de tamanho menor que o disco.



Original



Dilatada

Dilatação



Original

Quadrado 3×3 Quadrado 7×7 Disco 7×7 Diamante 7×7

Dilatação: Algoritmo

Entrada: $\hat{I} = (D_I, I)$ e \hat{K} .

Saída: $\hat{J} = (D_J, J)$.

Auxiliar: Variável i_{\max} .

- 1** Para todo $p \in D_J$, faça
- 2** $i_{\max} \leftarrow -\infty$.
- 3** Para todo $q \in \mathcal{A}(p)$, tal que $q \in D_I$, faça
 - 4** Se $I(q) + K(q-p) > i_{\max}$, então
 - 5** $i_{\max} \leftarrow I(q) + K(q-p)$.
- 6** $J(p) \leftarrow i_{\max}$.

Erosão

A erosão por um disco (elemento planar) de raio $r = 10$ elimina “domos” (regiões claras) de tamanho menor que o disco.



Original

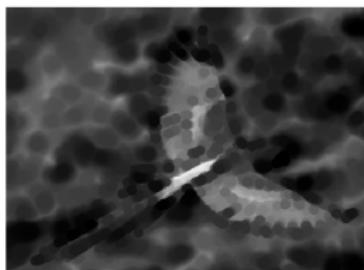
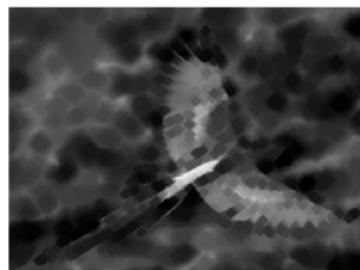


Erodida

Erosão



Original

Quadrado 3×3 Quadrado 7×7 Disco 7×7 Diamante 7×7

Erosão: Algoritmo

Entrada: $\hat{I} = (D_I, I)$ e \hat{K} .

Saída: $\hat{J} = (D_J, J)$.

Auxiliar: Variável i_{\min} .

- 1** Para todo $p \in D_J$, faça
- 2** $i_{\min} \leftarrow +\infty$.
- 3** Para todo $q \in \mathcal{A}(p)$, tal que $q \in D_I$, faça
 - 4** Se $I(q) - K(q-p) < i_{\min}$, então
 - 5** $i_{\min} \leftarrow I(q) - K(q-p)$.
- 6** $J(p) \leftarrow i_{\min}$.

Filtros morfológicos

As operações de dilatação e erosão podem ser combinadas para gerar vários filtros morfológicos, com as seguintes propriedades:

Filtros morfológicos

As operações de dilatação e erosão podem ser combinadas para gerar vários filtros morfológicos, com as seguintes propriedades:

- monotonicidade - O filtro Ψ preserva a relação de ordem entre as imagens cinza $\hat{I} = (D_I, I)$ e $\hat{J} = (D_J, J)$, onde $D_I = D_J$.

$$\hat{I} \leq \hat{J} \Rightarrow \Psi(\hat{I}) \leq \Psi(\hat{J}),$$

onde $\hat{I} \leq \hat{J}$ significa que $I(p) \leq J(p)$, para todo pixel $p \in D_I$.

Filtros morfológicos

As operações de dilatação e erosão podem ser combinadas para gerar vários filtros morfológicos, com as seguintes propriedades:

- monotonicidade - O filtro Ψ preserva a relação de ordem entre as imagens cinza $\hat{I} = (D_I, I)$ e $\hat{J} = (D_J, J)$, onde $D_I = D_J$.

$$\hat{I} \leq \hat{J} \Rightarrow \Psi(\hat{I}) \leq \Psi(\hat{J}),$$

onde $\hat{I} \leq \hat{J}$ significa que $I(p) \leq J(p)$, para todo pixel $p \in D_I$.

- idempotência - O filtro Ψ aplicado duas vezes à imagem gera o mesmo resultado de quando é aplicado uma única vez.

$$\Psi(\Psi(\hat{I})) = \Psi(\hat{I}).$$

Fechamento e abertura

Filtros de fechamento e de abertura morfológicos buscam reduzir as degradações causadas pela dilatação e erosão.

Fechamento e abertura

Filtros de fechamento e de abertura morfológicos buscam reduzir as degradações causadas pela dilatação e erosão.

- O fechamento $\hat{I} \bullet \hat{K}$ é dado por:

$$\hat{J} = (\hat{I} \oplus \hat{K}) \ominus \hat{K}$$

Fechamento e abertura

Filtros de fechamento e de abertura morfológicos buscam reduzir as degradações causadas pela dilatação e erosão.

- O fechamento $\hat{I} \bullet \hat{K}$ é dado por:

$$\hat{J} = (\hat{I} \oplus \hat{K}) \ominus \hat{K}$$

- A abertura $\hat{I} \circ \hat{K}$ é dada por:

$$\hat{J} = (\hat{I} \ominus \hat{K}) \oplus \hat{K}$$

Fechamento e abertura



Original



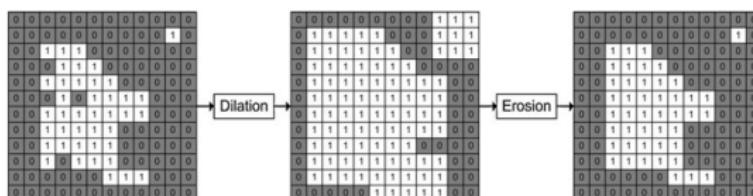
Fechada



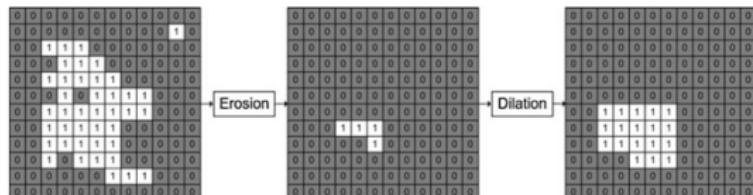
Aberta

Fechamento e abertura

Fechamento

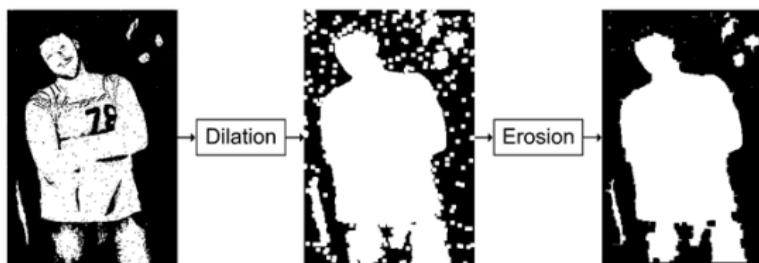


Abertura

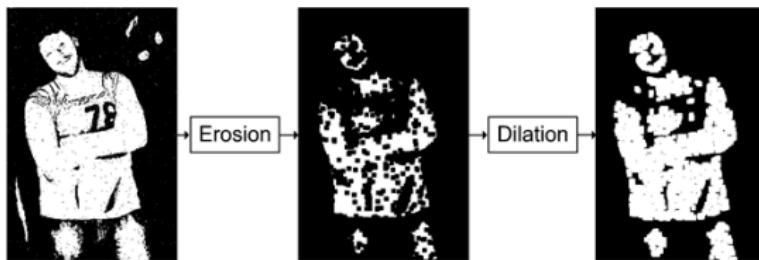


Fechamento e abertura

Fechamento



Abertura



Filtros alternados sequênciais

- Filtros alternados sequênciais resultam da aplicação alternada de aberturas (O de *opening*) e fechamentos (C de *closing*) morfológicos.

Filtros alternados sequênciais

- Filtros alternados sequênciais resultam da aplicação alternada de aberturas (O de *opening*) e fechamentos (C de *closing*) morfológicos.
- Por exemplo,

$$CO(\hat{I}, \hat{K}) = (\hat{I} \bullet \hat{K}) \circ \hat{K} \quad (1)$$

$$OC(\hat{I}, \hat{K}) = (\hat{I} \circ \hat{K}) \bullet \hat{K} \quad (2)$$

$$COC(\hat{I}, \hat{K}) = ((\hat{I} \bullet \hat{K}) \circ \hat{K}) \bullet \hat{K} \quad (3)$$

$$OCO(\hat{I}, \hat{K}) = ((\hat{I} \circ \hat{K}) \bullet \hat{K}) \circ \hat{K} \quad (4)$$

Filtros alternados sequênciais

- Filtros alternados sequênciais resultam da aplicação alternada de aberturas (O de *opening*) e fechamentos (C de *closing*) morfológicos.
- Por exemplo,

$$CO(\hat{I}, \hat{K}) = (\hat{I} \bullet \hat{K}) \circ \hat{K} \quad (1)$$

$$OC(\hat{I}, \hat{K}) = (\hat{I} \circ \hat{K}) \bullet \hat{K} \quad (2)$$

$$COC(\hat{I}, \hat{K}) = ((\hat{I} \bullet \hat{K}) \circ \hat{K}) \bullet \hat{K} \quad (3)$$

$$OCO(\hat{I}, \hat{K}) = ((\hat{I} \circ \hat{K}) \bullet \hat{K}) \circ \hat{K} \quad (4)$$

- Esses filtros também podem ser aplicados sucessivas vezes aumentando o tamanho do elemento estruturante a cada passo.

Gradiente morfológico

- Como a erosão é uma operação anti-extensiva (a função resultante é menor que a original) e a dilatação é extensiva, bordas da imagem podem ser realçadas calculando-se o resíduo dessas operações.

Gradiente morfológico

- Como a erosão é uma operação anti-extensiva (a função resultante é menor que a original) e a dilatação é extensiva, bordas da imagem podem ser realçadas calculando-se o resíduo dessas operações.

•

$$\begin{aligned}\hat{G}_1 &= \hat{I} - (\hat{I} \ominus \hat{K}) \\ \hat{G}_2 &= (\hat{I} \oplus \hat{K}) - \hat{I} \\ \hat{G}_3 &= (\hat{I} \oplus \hat{K}) - (\hat{I} \ominus \hat{K})\end{aligned}$$

Gradiente morfológico

- Como a erosão é uma operação anti-extensiva (a função resultante é menor que a original) e a dilatação é extensiva, bordas da imagem podem ser realçadas calculando-se o resíduo dessas operações.

•

$$\begin{aligned}\hat{G}_1 &= \hat{I} - (\hat{I} \ominus \hat{K}) \\ \hat{G}_2 &= (\hat{I} \oplus \hat{K}) - \hat{I} \\ \hat{G}_3 &= (\hat{I} \oplus \hat{K}) - (\hat{I} \ominus \hat{K})\end{aligned}$$

- As imagens resultantes são denominadas gradientes morfológicos e podem ser usadas na segmentação. Note que este tipo de gradiente é não-direcional.

Gradiente morfológico



Gradiente morfológico

Original



Gray-level closing



Gray-level opening



Morphological gradient



Chapéu mexicano

- Outra forma de realçar bordas (*WTH* de *white top-hat*) ou objetos escuros (*BTH* de *black top-hat*) na imagem é calculando o resíduo com relação à abertura e ao fechamento.

Chapéu mexicano

- Outra forma de realçar bordas (*WTH* de *white top-hat*) ou objetos escuros (*BTH* de *black top-hat*) na imagem é calculando o resíduo com relação à abertura e ao fechamento.



$$WTH(\hat{I}, \hat{K}) = \hat{I} - (\hat{I} \circ \hat{K})$$

$$BTH(\hat{I}, \hat{K}) = (\hat{I} \bullet \hat{K}) - \hat{I}$$

Chapéu mexicano

- Outra forma de realçar bordas (*WTH* de *white top-hat*) ou objetos escuros (*BTH* de *black top-hat*) na imagem é calculando o resíduo com relação à abertura e ao fechamento.



$$WTH(\hat{I}, \hat{K}) = \hat{I} - (\hat{I} \circ \hat{K})$$

$$BTH(\hat{I}, \hat{K}) = (\hat{I} \bullet \hat{K}) - \hat{I}$$

- O volume de resíduo para elementos estruturantes de diferentes tamanhos pode ser utilizado para descrever o conteúdo granulométrico da imagem (análise de textura por granulometria).

Transformada tudo-ou-nada

- A transformada tudo-ou-nada (*HMT* de *hit-or-miss transform*) é usada para encontrar configurações específicas de pixels em imagens binárias.

Transformada tudo-ou-nada

- A transformada tudo-ou-nada (*HMT* de *hit-or-miss transform*) é usada para encontrar configurações específicas de spels em imagens binárias.
- Não existe extensão da *HMT* para o caso de imagens cinza.

Transformada tudo-ou-nada

- A transformada tudo-ou-nada (*HMT* de *hit-or-miss transform*) é usada para encontrar configurações específicas de spels em imagens binárias.
- Não existe extensão da *HMT* para o caso de imagens cinza.
- Sejam \hat{K}_0 e \hat{K}_1 dois elementos **estruturantes planares** com mesma origem, onde o primeiro indica a configuração desejada dos spels com valor zero e o segundo indica a configuração desejada dos spels com valor 1.

Transformada tudo-ou-nada

- A transformada tudo-ou-nada (*HMT* de *hit-or-miss transform*) é usada para encontrar configurações específicas de spels em imagens binárias.
- Não existe extensão da *HMT* para o caso de imagens cinza.
- Sejam \hat{K}_0 e \hat{K}_1 dois elementos **estruturantes planares** com mesma origem, onde o primeiro indica a configuração desejada dos spels com valor zero e o segundo indica a configuração desejada dos spels com valor 1.
-

$$\hat{J} = (\hat{I} \ominus \hat{K}_1) \cap (\hat{I}^c \ominus \hat{K}_0)$$

Bibliografia

- Processamento de Imagens Digitais (Gonzalez & Woods)
 - Seção 4.3 - Filtragem Espacial
 - Seção 8.4 - Morfologia
- Análise de Imagens (Pedrini & Schwartz)
 - Seção 4.4.1 - Filtragem no Domínio Espacial
 - Cap. 9 - Morfologia Matemática
- Notas de aula do Prof. Falcão:
 - <http://www.ic.unicamp.br/~afalcao/mo443/aula9.pdf>
 - <http://www.ic.unicamp.br/~afalcao/mo443/aula14.pdf>
- Skimage:
 - <http://scikit-image.org/docs/dev/api/skimage.filters.html>
 - <http://scikit-image.org/docs/dev/api/skimage.filters.rank.html>
 - <http://scikit-image.org/docs/dev/api/skimage.morphology.html>