

吉米多维奇习题集部分解答

陈程

2024 年 12 月 24 日

目录

1	分析引论	2
1.1	实数	2
1.2	数列理论	6
1.3	函数的极限	20
1.4	函数的连续性	35
1.5	函数的一致连续性	41
1.6	小结	43
1.7	补充题目	44
2	一元函数微分学	45
2.1	高阶的导数和微分	45
2.2	罗尔定理、拉格朗日定理和柯西定理	45
2.3	增函数与减函数	47
2.4	不定式的求值法	48

1 分析引论

1.1 实数

6. 证明伯努利不等式:

$$\prod_{i=1}^n (1 + x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^n x_i \quad (6.1)$$

式中 x_1, x_2, \dots, x_n 是符号相同且大于 -1 的数.

证明. 运用数学归纳法, 当 n 等于 1 的时候不等式显然成立.

假设 $n = k$ 时不等式 (6.1) 成立, 即

$$\prod_{i=1}^k (1 + x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^k x_i \quad (6.2)$$

则

$$\prod_{i=1}^{k+1} (1 + x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{k+1} x_i \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (1 + x_{k+1}) \cdot \prod_{i=1}^k (1 + x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^k x_i + x_{k+1} \\ &\Leftrightarrow (1 + x_{k+1}) \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^k x_i \right) \geq 1 + \sum_{i=1}^k x_i + x_{k+1} \\ &\Leftrightarrow x_{k+1} \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^k x_i \right) \geq x_{k+1} \\ &\Leftrightarrow x_{k+1} \sum_{i=1}^k x_i \geq 0 \end{aligned} \quad (6.4)$$

即当 $n = k + 1$ 时不等式 (6.1) 成立. □

8. 证明不等式:

$$n! < \left(\frac{n+1}{2} \right)^n \quad (n > 1) \quad (8.1)$$

证明. 令

$$A_n = n! \quad B_n = \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

则原不等式 (8.1) 等价于

$$A_n < B_n \quad (n > 1) \quad (8.2)$$

又因为 A_n, B_n 恒为正数, $A_2 = 2 < 9/4 = B_2$, 因此式 (8.2)

$$\Leftrightarrow \frac{A_{n+1}}{A_n} < \frac{B_{n+1}}{B_n} \quad (n > 1) \quad (8.3)$$

$$\Leftrightarrow n+1 < \frac{n+2}{2} \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \quad (n > 1)$$

$$\Leftrightarrow 2 < \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \quad (n > 1)$$

$$\Leftrightarrow 2 < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \quad (n > 1) \quad (8.4)$$

□

9. 证明不等式:

$$\prod_{i=1}^n (2i)! > [(n+1)!]^n \quad (n > 1) \quad (9.1)$$

证明. 不等式 (9.1)

$$\Leftrightarrow (2n+2)! > \frac{[(n+2)!]^{n+1}}{[(n+1)!]^n} \quad (n > 1) \quad (9.2)$$

$$\Leftrightarrow (2n+2)! > (n+2)!(n+2)^n \quad (n > 1)$$

$$\Leftrightarrow (2n+3)(2n+4) > (n+3) \cdot \frac{(n+3)^{n+1}}{(n+2)^n} \quad (n > 1) \quad (9.3)$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \frac{2n+3}{n+2} > \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{n+2} \quad (n > 1)$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \left(2 - \frac{1}{n+2}\right) > \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^{n+2} \quad (n > 1)$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \left(2 - \frac{1}{n+2}\right) > 3 > \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^{n+2} \quad (n > 1) \quad (9.4)$$

□

10. 证明不等式:

$$\left| \sin \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \right| \leq \sum_{k=1}^n \sin x_k \quad (0 \leq x_k \leq \pi, k = 1, 2, \dots, n) \quad (10.1)$$

证明. 运用数学归纳法, 当 $n = 1$ 时不等式 (10.1) 显然成立.

假设当 $n = p$ 时不等式 (10.1) 成立, 即

$$\left| \sin \left(\sum_{k=1}^p x_k \right) \right| \leq \sum_{k=1}^p \sin x_k \quad (10.2)$$

则

$$\begin{aligned} \left| \sin \left(\sum_{k=1}^{p+1} x_k \right) \right| &= \left| \sin \left(x_{p+1} + \sum_{k=1}^p x_k \right) \right| \\ &= \left| \sin(x_{p+1}) \cos \left(\sum_{k=1}^p x_k \right) + \sin \left(\sum_{k=1}^p x_k \right) \cos(x_{p+1}) \right| \\ &\leq \left| \sin(x_{p+1}) \cos \left(\sum_{k=1}^p x_k \right) \right| + \left| \sin \left(\sum_{k=1}^p x_k \right) \cos(x_{p+1}) \right| \\ &\leq \sin x_{p+1} + \left| \sin \left(\sum_{k=1}^p x_k \right) \right| \\ &\leq \sin x_{p+1} + \sum_{k=1}^p \sin x_k \\ &= \sum_{k=1}^{p+1} \sin x_k \end{aligned}$$

□

11. 设 c 为正整数, 而不为整数的平方, 且 A/B 为确定实数 \sqrt{c} 的分割, 其中 B 类包含所有满足 $b^2 > c$ 的正有理数 b , 而 A 类包含所有其余的有理数. 求证: 在 A 类中无最大数, 而在 B 类中无最小数.

证明. 引理: 对于正整数 c , 如果 \sqrt{c} 不是整数, 则不存在有理数 x 使得 $x^2 = c$.

所以 $\forall a \in A \cap \mathbb{Q}^+ : a^2 < c$.

如果 A 类中有最大数 a ，则可以验证

$$\left(\frac{c-1}{\frac{c-1}{a+1}+2} + 1 \right)^2 < c$$

所以 $\frac{c-1}{\frac{c-1}{a+1}+2} + 1 \in A$.

也可以验证

$$\frac{c-1}{\frac{c-1}{a+1}+2} + 1 > a$$

这与 a 是 A 中最大数矛盾.

同理, B 中也没有最小数. □

附记: 这里解释一下为什么会出现 $\frac{c-1}{\frac{c-1}{a+1}+2} + 1$ 这个看起来很奇怪的表达式, 这个表达式源于一种用有理数迭代估计无理数的方法.

这里以估计 $\sqrt{3}$ 为例.

$\sqrt{3}$ 是方程 $x^2 = 3$ 的一个 (正) 根, 将方程变形成

$$(x-1)(x+1) = 2$$

$$x = \frac{2}{x+1} + 1$$

我们构造一个数列 $\{x_n\}$, 令 $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \frac{2}{x_n+1} + 1$. 这个数列的极限就是 $\sqrt{3}$ (当然要先验证这个数列的极限存在). 这里给出该数列的前 10 项:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	2	1.6667	1.75	1.7273	1.7333	1.7317	1.7321	1.7320	1.7321	1.7321

可以看到, 数列的项一半小于根号三, 一半大于根号三, 交错排布, $|x_n - \sqrt{3}|$ 单调递减 (可以用代数严格证明), 因此只要一次迭代两步, 即 $x_{n+2} = \frac{2}{\frac{2}{x_n+1}+2} + 1$ 就能满足第 10 题的要求.

类似的, 也可以通过方程

$$x^3 = 3$$

$$\rightarrow (x-1)(x^2+x+1) = 2$$

$$\rightarrow x = \frac{2}{x^2 + x + 1} + 1$$

来构造数列满足 $x_{n+1} = \frac{2}{x_n^2 + x_n + 1} + 1$ 来估计 $\sqrt[3]{3}$.

1.2 数列理论

49. 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} \quad (49.1)$$

证明. 令

$$A_n = \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} \quad (49.2)$$

易得对于任意的正整数 n ,

$$A_n > 0$$

所以数列 A_n 与数列 $\sqrt[n]{A_1 A_2 \cdots A_n}$ 拥有相同的极限 (两者的极限要么同时存在, 要么都不存在), 而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{A_1 A_2 \cdots A_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}} = \frac{1}{3} \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(-2/3)^{n+1} + 1} \right)^{-1} = \frac{1}{3} \quad (49.3)$$

所以数列 A_n 的极限存在而且极限为 $1/3$. □

55. 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} \cdots + \frac{2n-1}{2^n} \right)$$

证明. 对级数进行分组,

$$\sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{2^k} = \sum_{k=1}^n \frac{2k}{2^k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k \frac{2}{2^k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=j}^n \frac{2}{2^k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}$$

易得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \sum_{k=j}^n \frac{2}{2^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=j}^n \frac{2}{2^k} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{4}{2^j} = 4$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{2^k} = 4 - 1 = 3$$

□

奇思妙想：对于一个给定的二元函数¹ A ，下面两个极限在什么情况下相等（在下列极限都存在的情况下考虑）？

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n A(i; j) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=i}^{\infty} A(i; j) \right)$$

证明. 因为

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n A(i; j) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=i}^{\infty} A(i; j) - \sum_{j=n+1}^{\infty} A(i; j) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=i}^{\infty} A(i; j) \right) - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} A(i; j) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=i}^{\infty} A(i; j) \right) - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} A(i; j) \right) \end{aligned}$$

所以两个极限相等只要

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} A(i; j) \right) = 0$$

其中 $\sum_{j=n+1}^{\infty} A(i; j)$ 可以看作无穷级数 $\sum_{j=1}^{\infty} A(i; j)$ 的余项，用 $R(i; n)$ 来表示.

所以把

$$\sum_{i=1}^n R(i; n)$$

看作是一个关于 n 的数列，只要在 $n \rightarrow \infty$ 时它是 $o(1)$ 即可.

然后定义

$$B_n := \sup \left\{ |R(i; n)| \mid i \leq n \right\}$$

有

$$\left| \sum_{i=1}^n R(i; n) \right| \leq n \cdot B_n$$

只要 B_n 在 $n \rightarrow \infty$ 时是 $o\left(\frac{1}{n}\right)$ 即可.

¹默认为实值函数，但是下面的论述也能推广到复数域上去

现在我们考虑对于任意的 i , $R(i; n) = o(1/n)$ 这一特殊情况

$$C(i; n) := \sup\{|R(i; j)| \mid j \geq n\}$$

我猜测在这种情况下原命题成立的一个充分条件为 $C(n; n) = o(1/n)$, 现在尝试证明.
因为当 $n \rightarrow \infty$ 时

$$\forall i \in \mathbb{N}^* : R(i; n) = o(1/n)$$

所以

$$\forall i \in \mathbb{N}^* : C(i; n) = o(1/n)$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^* : \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N}^* : \forall n > N : \forall i \leq k : C(i; n) < \frac{\varepsilon}{n} \quad (1)$$

因为 $C(n; n) = o(1/n)$, 所以

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists k \in \mathbb{N}^* : \forall n > k : C(n; n) < \frac{\varepsilon}{n} \quad (2)$$

再加上

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \left| \sum_{i=1}^n R(i; n) \right| \leq \sum_{i=1}^n C(i; n) \leq \sum_{i=1}^k C(i; n) + \sum_{i=k+1}^n C(i; i) \quad (3)$$

有

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists k \in \mathbb{N}^* : \exists N \in \mathbb{N}^* : \forall n > \max\{k, N\} : \left| \sum_{i=1}^n R(i; n) \right| < k \cdot \frac{\varepsilon}{n} + (n - k) \cdot \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n R(i; n) = 0$$

得证.

这里可以给几个具体例子来参考

$$A(i; j) = (-1)^{j-i} \cdot 2^{-\lfloor (j-i)/2 \rfloor}$$

$$A(i; j) = 2^{-j}$$

$$A(i; j) = \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}$$

□

70. 证明:

$$0 < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (70.1)$$

证明. 先证明引理:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (70.2)$$

对于数列 $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$, 因为

$$\begin{aligned} \frac{[1 + 1/(n+1)]^{n+1}}{(1 + 1/n)^n} &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \\ &= \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &> \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

所以 $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 是单调增数列, 即

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

不等式 (70.2) 另一边的证明同理.

所以

$$0 < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (70.3)$$

而且

$$\begin{aligned} e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &< \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} \\ &< \frac{e}{n} \\ &< \frac{3}{n} \end{aligned} \quad (70.4)$$

□

72. 求证:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) = e \quad (72.1)$$

并由此推出公式

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!n} \quad (72.2)$$

其中 $0 < \theta_n < 1$.

证明. 令

$$A_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n, \quad B_n = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} \quad (72.3)$$

因为

$$\begin{aligned} A_n &= 1 + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} \left(\frac{1}{n} \right)^i \\ &= 1 + \sum_{i=1}^n \left[\frac{n(n-1) \cdots (n-i+1)}{i!} \cdot \left(\frac{1}{n} \right)^i \right] \\ &= 1 + \sum_{i=1}^n \left[\left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{2}{n} \right) \cdots \left(1 - \frac{i-1}{n} \right) \cdot \frac{1}{i!} \right] \\ &= 1 + \sum_{i=1}^n \left[\prod_{j=0}^{i-1} \left(1 - \frac{j}{n} \right) \cdot \frac{1}{i!} \right] \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = e$$

$$A_n < B_n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

所以 (如果极限的确存在的话)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n \geq e \quad (72.4)$$

对于任意的正整数 k , 当 $n > k$ 时

$$A_n = 1 + \sum_{i=1}^k \left[\prod_{j=0}^{i-1} \left(1 - \frac{j}{n} \right) \cdot \frac{1}{i!} \right] + \sum_{i=k+1}^n \left[\prod_{j=0}^{i-1} \left(1 - \frac{j}{n} \right) \cdot \frac{1}{i!} \right]$$

所以

$$\begin{aligned}
 e &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \sum_{i=1}^k \left[\prod_{j=0}^{i-1} \left(1 - \frac{j}{n} \right) \cdot \frac{1}{i!} \right] \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=k+1}^n \left[\prod_{j=0}^{i-1} \left(1 - \frac{j}{n} \right) \cdot \frac{1}{i!} \right] \right) \\
 &= 1 + \sum_{i=1}^k \frac{1}{i!} + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=k+1}^n \left[\prod_{j=0}^{i-1} \left(1 - \frac{j}{n} \right) \cdot \frac{1}{i!} \right] \right) \\
 &= B_k + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=k+1}^n \left[\prod_{j=0}^{i-1} \left(1 - \frac{j}{n} \right) \cdot \frac{1}{i!} \right] \right)
 \end{aligned}$$

从而

$$\forall k \in \mathbb{N}^* : B_k \leq e \quad (72.5)$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = e \quad (72.6)$$

而且对于任意的正整数 n ,

$$\begin{aligned}
 e - B_n &= \sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{1}{i!} \\
 &= \frac{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots}{n!} \\
 &< \frac{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \cdots}{n!} \\
 &= \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} \right) \\
 &= \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{n} \\
 &= \frac{1}{n!n}
 \end{aligned}$$

□

73. 证明: 数 e 是无理数.

证明. 假设 e 是有理数, 则存在互素的正整数 p, q 使得

$$e = \frac{p}{q}$$

所以 $e \cdot q!$ 是一个整数.

又因为

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{q!} + \frac{\theta}{q!q}$$

其中 $0 < \theta < 1$

所以

$$\left(q! + q! + \frac{q!}{2!} + \frac{q!}{3!} + \cdots + \frac{q!}{q!} \right) + \frac{\theta}{q}$$

是一个整数, 而这是显然不可能的. □

74. 证明不等式:

$$\left(\frac{n}{e} \right)^n < n! < e \left(\frac{n}{2} \right)^n \quad (74.1)$$

证明. 显然当 $n = 1$ 时不等式 (74.1) 成立.

$$\left(\frac{n}{e} \right)^n < n! \quad (74.2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n \cdot e} < n+1$$

$$\Leftrightarrow (n+1)^n < n^n \cdot e$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n < e \quad (74.3)$$

$$n! < e \left(\frac{n}{2} \right)^n \quad (74.4)$$

$$\Leftrightarrow n+1 < \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n \cdot 2}$$

$$\Leftrightarrow 2 < \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \quad (74.5)$$

□

75. 求证:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(e^{1/n} - 1) = 1 \quad (75.1)$$

证明. 对常数 e 进行估计, 令

$$e = \left(1 + \frac{1 + \varphi_n}{n}\right)^n \quad (75.2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi$$

因为

$$e > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

推得

$$\varphi \geqslant 0 \quad (72.3)$$

根据估计 (75.2), 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(e^{1/n} - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \varphi_n = 1 + \varphi \quad (75.4)$$

所以要证明原命题 (75.1) 成立, 只要证明 $\varphi = 0$ 即可.

因为

$$\left(1 + \frac{1 + \varphi_n}{n}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \varphi_n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}$$

所以

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1 + \varphi_n}{n}\right)^n \geqslant \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \varphi_n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} \right] = e \cdot (1 + \varphi) \quad (75.5)$$

从而

$$\varphi = 0 \quad (75.6)$$

□

80. 证明下列数列收敛:

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$$

证明.

$$\ln x_n = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$$

数列 x_n 收敛的充要条件为级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$ 收敛. 而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/2^n}{1/n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$$

所以

$$\ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) < \frac{1}{k^2}$$

在 $k \rightarrow \infty$ 时最终成立.

所以存在 $N \in \mathbb{N}^*$ 使得

$$\sum_{k=N}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{2}{N^2}$$

从而该级数收敛. □

134. 证明: 若对于非负数列 x_n , 无论数列 y_n 如何选取, 以下两个等式中都至少有一个成立:

$$\begin{aligned}\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \\ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n\end{aligned}$$

则数列 x_n 收敛或者发散于 $+\infty$.

证明. 尝试证明逆否命题: 若非负数列 x_n 不收敛 (发散于 $+\infty$ 看作一种特殊的收敛), 存在数列 y_n 使得

$$\begin{aligned}\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) &\neq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \\ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) &\neq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n\end{aligned}$$

因为 x_n 不收敛, 则 $a = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ ²

存在 x_n 的一个子列 x_{p_n} 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p_n} = a$$

² b 可能是实数, 也可能是 $+\infty$, 但 a 一定是一个实数

构造

$$y_n = \begin{cases} 1, & n \in \{p_1, p_2, p_3, \dots\} \\ -x_n - 1, & n \notin \{p_1, p_2, p_3, \dots\} \end{cases}$$

于是

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_{p_n} + y_{p_n}) = a + 1 \neq b + 1 = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_{p_n} y_{p_n}) = a \neq b = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$$

□

136. 证明: 若数列 x_n 有界, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$$

则此数列的子列极限充满于下极限和上极限

$$l = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \text{和} \quad L = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$$

之间, 即区间 $[l, L]$ 中的任意一个数都是该数列的子列极限.

证明. 存在数列 x_n 的单调增子列 x_{p_n} 与 x_{q_n} 满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p_n} = L$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{q_n} = l$$

容易从 x_{p_n} 以及 x_{q_n} 再构造出两条单调增子列 $x_{p'_n}, x_{q'_n}$ 满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p'_n} = L$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{q'_n} = l$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : p'_n < q'_n < p'_{n+1}$$

显然, l 和 L 都是数列 x_n 的子列极限, 现在尝试证明: 对于一个给定的 $M \in (l, L)$, M 是数集 $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ 的一个极限点.

易得, 存在正整数 N_1 使得

$$\forall n > N_1 : x_{p'_n} > M > x_{q'_n}$$

对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N_2 使得

$$\forall n > N_2 : |x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$$

只要取满足 $k > N_1 \wedge p'_k > N_2$ 的正整数 k , 可以证明 $x_{p'_k}, x_{p'_k+1}, x_{p'_k+2}, \dots, x_{q'_k}$ 中必有一个数属于 $U^\varepsilon(M)$, 因此 M 是数集 $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ 的一个极限点. \square

146. 证明:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + C + \varepsilon_n \quad (146.1)$$

其中 C 是一个常实数, 当 $n \rightarrow \infty$ 时 $\varepsilon_n \rightarrow 0$.

证明. 式 (146.1) 成立等价于数列

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$$

收敛.

先证明引理: 对于正整数 $a, b (a < b)$, 有

$$\ln \left(\frac{b}{a} \right) < \sum_{i=a}^b \frac{1}{i} < \frac{1}{a} + \ln \left(\frac{b}{a} \right)$$

构造函数

$$f(x) = \frac{1}{\lceil x \rceil}$$

$$g(x) = \frac{1}{x}$$

$$h(x) = \frac{1}{\lfloor x \rfloor}$$

易得

$$\forall x \geq 1 : f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

$$\forall i \in \mathbb{N}^* : \int_i^{i+1} f(x) dx = \frac{1}{i+1}, \quad \int_i^{i+1} h(x) dx = \frac{1}{i}$$

所以

$$\sum_{i=a}^b \frac{1}{i} = \frac{1}{a} + \int_a^b f(x) dx < \frac{1}{a} + \int_a^b g(x) dx = \frac{1}{a} + \ln \left(\frac{b}{a} \right)$$

$$\sum_{i=a}^b \frac{1}{i} = \int_a^{b+1} h(x) dx > \int_a^{b+1} g(x) dx = \ln \left(\frac{b+1}{a} \right) > \ln \left(\frac{b}{a} \right)$$

从而

$$\ln \left(\frac{b}{a} \right) < \ln \left(\frac{b+1}{a} \right) < \sum_{i=a}^b \frac{1}{i} < \frac{1}{a} + \ln \left(\frac{b}{a} \right)$$

然后根据柯西收敛定理, 对于任何的正实数 ε , 对于任何大于 $2/\varepsilon$ 的正整数 p, q (不妨令 $p < q$), 有

$$|x_p - x_q| = \left| \sum_{i=p+1}^q \frac{1}{i} - \ln \left(\frac{q}{p} \right) \right| \leq \left| \sum_{i=p}^q \frac{1}{i} - \ln \left(\frac{q}{p} \right) \right| + \frac{1}{p} < \frac{2}{p} < \varepsilon$$

□

148. 数列 x_n ($n = 1, 2, \dots$) 由下列各式

$$x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2} \quad (n = 3, 4, \dots)$$

所确定, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

解. 构造数列 y_n ($n = 2, 3, \dots$),

$$y_n = x_n - x_{n-1}$$

易得

$$y_n = x_n - x_{n-1} = -\frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{2} = -\frac{y_{n-1}}{2} \quad (n = 3, 4, \dots)$$

于是

$$x_n = x_1 + \sum_{i=2}^n y_i = x_1 + y_2 \cdot \frac{1 - (-1/2)^{n-1}}{1 - (-1/2)} = a + (b - a) \cdot \frac{2}{3} \left[1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right] \quad (n = 2, 3, \dots)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a + \frac{2}{3}(b - a) = \frac{a + 2b}{3}$$

□

149. 设 x_n ($n = 1, 2, \dots$) 为由以下各式

$$x_0 > 0, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{1}{x_n} \right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

所确定的数列. 求证:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1 \quad (149.1)$$

证明. 如果 $x_0 = 1$, 则

$$\forall n \in \mathbb{N} : x_n = 1$$

所以命题 (149.1) 成立.

如果 $x_0 \neq 1$, 则

$$x_1 > 1$$

又因为若 $x_n > 0$ 且 $x_n \neq 1$, 则 $x_{n+1} > 1$

因此

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : x_n > 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x_n} - x_n \right) < 0$$

从而数列 x_n 存在极限 (最终单调递减数列存在下界). 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ($1 \leq a \leq x_1$), 有

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \left(x_n + \frac{1}{x_n} \right) \right] = \frac{1}{2} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} \right) = \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right)$$

解得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a = 1$$

□

150. 证明: 由下列各式

$$x_1 = a > 0, \quad y_1 = b > 0, \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$$

所确定的数列 x_n 和 y_n ($n = 1, 2, \dots$) 有共同的极限, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

证明. 因为算数平均数大于等于几何平均数, 所以

$$\forall n \geq 2 : y_n \geq x_n$$

所以

$$\forall n \geq 2 : y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \leq y_n$$

因此数列 y_n 是最终非严格递减数列, 有下界 0, 所以数列 y_n 的极限存在.
又因为

$$x_n = 2y_{n+1} - y_n$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2y_{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

□

1.3 函数的极限

438. 求极限:

$$\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}} \quad (438.1)$$

证明. 因为

$$\sqrt{1-x} - 3 = \frac{-x-8}{\sqrt{1-x}+3} \quad (438.2)$$

$$2 + \sqrt[3]{x} = 2 \cdot \left(1 - \sqrt[3]{-x/8}\right) = 2 \cdot \frac{1 - (-x/8)}{1 + (-x/8)^{1/3} + (-x/8)^{2/3}} = \frac{2 + x/4}{1 - \sqrt[3]{x}/2 + \sqrt[3]{x^2}/4} \quad (438.3)$$

所以只要令 $x = -8 + \epsilon$, 式 (438.1) 等于

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9-\epsilon} - 3}{2 + \sqrt[3]{-8+\epsilon}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(-4 \cdot \frac{1 - \sqrt[3]{-8+\epsilon}/2 + \sqrt[3]{(-8+\epsilon)^2}/4}{\sqrt{9-\epsilon} + 3} \right) = -2$$

□

451. 求极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x} - (1+x)}$$

证明. 因为

$$(1+5x)^{1/5} = 1 + x - \frac{2}{5}x^2 + o(x^2)$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x} - (1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{-\frac{2}{5}x^2 + o(x^2)} = -\frac{5}{2}$$

□

446. 求极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{x+x^2}$$

证明. 当 $x \rightarrow 0$ 时

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{8+3x-x^2} &= 2 \cdot \left(1 + \frac{3}{8}x + o(x)\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= 2 \cdot \left[1 + \left(\frac{1}{8}x + \frac{1}{3}o(x)\right) + o\left(\frac{3}{8}x + o(x)\right)\right] \\ &= 2 + \frac{1}{4}x + o(x)\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{x+x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{4}x + o(x)}{x + o(x)} = \frac{1}{4}$$

□

补: 在 $x \rightarrow 0$ 时

$$\begin{aligned}[a+bx+o(x)]^n &= a^n \cdot \left(1 + \frac{b}{a}x + o(x)\right)^n \\ &= a^n \cdot \left(1 + \frac{nb}{a}x + o(x)\right) \\ &= a^n + (na^{n-1}b)x + o(x)\end{aligned}$$

499. 求极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3}$$

证明.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3 \cdot (\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 + \sin x})} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)) - (x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3))}{x^3} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

□

507. 求极限:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{2x-1} \right)^{x^2}$$

证明.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{2x-1} \right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2/x}{2-1/x} \right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} 0.5^{x^2} = 0$$

□

511. 求极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1} \right)^{\frac{x-1}{x+1}}$$

证明.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1} \right)^{\frac{x-1}{x+1}} = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} \right)^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x+1}} = 1^1 = 1$$

□

523. 求极限

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}$$

证明.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{-\cot x}$$

在 $x \rightarrow 0$ 时

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{x + o(x)}$$

$$(\cos x)^{-\cot x} = \left[\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \right)^{\frac{1}{x^2}} \right]^{-\frac{x^2}{x + o(x)}}$$

所以

$$(\cos x)^{-\cot x} \rightarrow (e^{-1/2})^0 = 1$$

□

补: 在一个给定的基下, 如果 $f(x) \rightarrow A \in (0, +\infty)$, $g(x) \rightarrow B \in \mathbb{R}$, 那么

$$f(x)^{g(x)} \rightarrow A^B$$

证明.

$$\lim f(x)^{g(x)} = \exp \left[\lim [\ln f(x) \cdot g(x)] \right] = \exp \left[\lim [\ln f(x)] \cdot \lim g(x) \right] = \exp(\ln A \cdot B) = A^B$$

□

补: 在一个给定的基下, 如果函数 $f(x)^{g(x)}$ 收敛, 而且 $\tilde{g}(x) \sim g(x)$, 那么函数

$$f(x)^{\tilde{g}(x)}$$

也收敛而且拥有相同的极限.

补: 在 $x \rightarrow 0$ 时,

$$\left(1 + kx + o(x) \right)^{\frac{1}{x + o(x)}} \rightarrow e^k$$

证明. 在基 $x \rightarrow 0$ 下讨论

考虑函数

$$\left(1 + kx + \alpha(x) \right)^{\frac{1}{x + \beta(x)}}$$

其中

$$\alpha(x), \beta(x) \in o(x)$$

$$\left(1 + kx + \alpha(x)\right)^{\frac{1}{x+\beta(x)}} = \left[\left(1 + kx + \alpha(x)\right)^{\frac{1}{kx+\alpha(x)}}\right]^{\frac{kx+\alpha(x)}{x+\beta(x)}} \rightarrow e^k$$

□

545.(b) 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \sin x \cos \alpha x}{1 + \sin x \cos \beta x} \right)^{\cot^3 x}$$

证明. 考虑极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

其中

$$f(x) = \cot^3 x \cdot \ln \left(\frac{1 + \sin x \cos \alpha x}{1 + \sin x \cos \beta x} \right)$$

在 $x \rightarrow 0$ 时有

$$\cot^3 x = \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x} \sim \frac{1}{x^3}$$

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{1 + \sin x \cos \alpha x}{1 + \sin x \cos \beta x} \right) &= \ln \left(1 + \frac{\sin x (\cos \alpha x - \cos \beta x)}{1 + \sin x \cos \beta x} \right) \\ &\sim \frac{\sin x (\cos \alpha x - \cos \beta x)}{1 + \sin x \cos \beta x} \\ &\sim x \cdot (\cos \alpha x - \cos \beta x) \end{aligned}$$

所以

$$f(x) \sim \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2}$$

而

$$\cos \alpha x - \cos \beta x = \left(1 - \frac{1}{2}\alpha^2 x^2 + o(x^2)\right) - \left(1 - \frac{1}{2}\beta^2 x^2 + o(x^2)\right) = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2} x^2 + o(x^2)$$

所以

$$f(x) \rightarrow \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2}$$

也即

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \sin x \cos \alpha x}{1 + \sin x \cos \beta x} \right)^{\cot^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \exp[f(x)] = \exp \left[\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \right] = \exp \left(\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2} \right)$$

□

545.(d) 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2(\pi \cdot 2^x)}{\ln[\cos(\pi \cdot 2^x)]}$$

证明. 令 $t = \pi \cdot 2^x$, 再令 $\epsilon = t - 2\pi$, 当 $x \rightarrow 1$ 时有

$$t \rightarrow 2\pi$$

$$\epsilon \rightarrow 0$$

$$\sin^2(\pi \cdot 2^x) = \sin^2 \epsilon \sim \epsilon^2$$

$$\cos(\pi \cdot 2^x) = \cos \epsilon = 1 - \frac{1}{2}\epsilon^2 + o(\epsilon^2)$$

$$\ln[\cos(\pi \cdot 2^x)] \sim -\frac{1}{2}\epsilon^2$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2(\pi \cdot 2^x)}{\ln[\cos(\pi \cdot 2^x)]} = -2$$

□

552. 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{x} - 1) \quad (x > 0)$$

证明. 令 $\epsilon = 1/n$, 则当 $n \rightarrow +\infty$ 时

$$\epsilon \rightarrow 0$$

$$n(\sqrt[n]{x} - 1) = \frac{x^{0+\epsilon} - x^0}{\epsilon} \rightarrow \left. \frac{d(x^\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \ln x$$

□

补: 当 $n \rightarrow +\infty$ 时

$$\sqrt[n]{k} = 1 + \frac{\ln k + o(1)}{n}$$

553. 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}) \quad (x > 0)$$

证明. 令 $f(n) = \sqrt[n]{x}$.

根据微分中值定理,

$$\forall n \in \mathbb{R} : \exists \xi \in (n, n+1) : f(n+1) - f(n) = f'(\xi)$$

所以

$$\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x} = \frac{\ln x}{\xi^2} \sqrt[\xi]{x}$$

其中 $n < \xi < n+1$

所以

$$n^2 (\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}) = \frac{n^2}{\xi^2} \sqrt[\xi]{x} \cdot \ln x$$

因为

$$\left(\frac{n}{n+1} \right)^2 < \frac{n^2}{\xi^2} < 1$$

$$\sqrt[n+1]{x} < \sqrt[\xi]{x} < \sqrt[n]{x}$$

所以当 $n \rightarrow +\infty$ 时

$$\frac{n^2}{\xi^2} \rightarrow 1$$

$$\sqrt[\xi]{x} \rightarrow 1$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}) = \ln x$$

□

562. 求极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+2^x) \ln\left(1 + \frac{3}{x}\right)$$

证明. 当 $x \rightarrow +\infty$ 时,

$$\ln(1 + 2^x) = x \ln 2 + \ln\left(\frac{1 + 2^x}{2^x}\right)$$

因为

$$\frac{1 + 2^x}{2^x} \rightarrow 1$$

所以

$$\frac{\ln\left(\frac{1+2^x}{2^x}\right)}{\ln(1 + 2^x)} \rightarrow 0$$

所以

$$\ln(1 + 2^x) \sim x \ln 2$$

又因为

$$\ln\left(1 + \frac{3}{x}\right) \sim \frac{3}{x}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + 2^x) \ln\left(1 + \frac{3}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln 2 \cdot \frac{3}{x} = 3 \ln 2$$

□

569. 求极限

$$\lim_{x \rightarrow +0} \left[\ln(x \ln a) \cdot \ln\left(\frac{\ln ax}{\ln \frac{x}{a}}\right) \right] \quad (a > 1)$$

证明. 在 $x \rightarrow +0$ 时

$$\ln x \rightarrow -\infty$$

$$\ln(x \ln a) = \ln x + \ln \ln a$$

$$\frac{\ln ax}{\ln \frac{x}{a}} = \frac{\ln x + \ln a}{\ln x - \ln a} = 1 + \frac{2 \ln a}{\ln x - \ln a} \rightarrow 1$$

所以

$$\ln\left(\frac{\ln ax}{\ln \frac{x}{a}}\right) \sim \frac{2 \ln a}{\ln x - \ln a}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow +0} \left[\ln(x \ln a) \cdot \ln\left(\frac{\ln ax}{\ln \frac{x}{a}}\right) \right] = \lim_{x \rightarrow +0} 2 \ln a \cdot \frac{\ln x + \ln \ln a}{\ln x - \ln a} = 2 \ln a$$

□

575. 求极限

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^{\alpha+\beta} x}{\sqrt{(1 - \sin^{\alpha} x)(1 - \sin^{\beta} x)}} \quad (\alpha, \beta > 0)$$

证明. 当 $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 时 $\sin x \rightarrow 1$.

令 $\sin x = 1 + t$.

$$t \rightarrow 0^{-}$$

$$1 - \sin^{\alpha+\beta} x = 1 - (1 + t)^{\alpha+\beta} = 1 - [1 + (\alpha + \beta)t + o(t)] = -(\alpha + \beta)t + o(t)$$

$$(1 - \sin^{\alpha} x)(1 - \sin^{\beta} x) = [-\alpha t + o(t)][-\beta t + o(t)]$$

$$\frac{1 - \sin^{\alpha+\beta} x}{\sqrt{(1 - \sin^{\alpha} x)(1 - \sin^{\beta} x)}} = \frac{-(\alpha + \beta)t + o(t)}{\sqrt{[-\alpha t + o(t)][-\beta t + o(t)]}} = \frac{\alpha + \beta + o(1)}{\sqrt{[-\alpha + o(1)][-\beta + o(1)]}}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^{\alpha+\beta} x}{\sqrt{(1 - \sin^{\alpha} x)(1 - \sin^{\beta} x)}} = \frac{\alpha + \beta}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

□

591.(a) 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{100}} e^{-\frac{1}{x^2}}$$

证明. 当 $x \rightarrow 0$ 时

$$\frac{1}{x^2} \rightarrow +\infty$$

$$e^{-\frac{1}{x^2}} = o\left[\left(\frac{1}{x^2}\right)^{-k}\right] = o(x^{2k}) = o(x^k) \quad (k > 0)$$

$$x^{-100} e^{-\frac{1}{x^2}} = o(x^{k-100}) \quad (k > 0)$$

令 $k = 100$ 则得到

$$\frac{1}{x^{100}} e^{-\frac{1}{x^2}} = o(1) \rightarrow 0$$

□

补: 当 $n \rightarrow +\infty$ 时

$$\forall k > 0 : n^k = o(e^n), e^{-n} = o(n^{-k})$$

证明. 因为

$$\frac{e^n}{n^k} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{n^i}{i!}}{n^k} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{n^{i-k}}{i!} > \frac{n^{\lceil k \rceil - k + 1}}{(\lceil k \rceil + 1)!}$$

所以

$$\forall k > 0 : \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n}{n^k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{-k}}{e^{-n}} \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{\lceil k \rceil - k + 1}}{(\lceil k \rceil + 1)!} = +\infty$$

也即当 $n \rightarrow +\infty$ 时

$$\forall k > 0 : n^k = o(e^n), e^{-n} = o(n^{-k})$$

□

补: 当 $n \rightarrow +\infty$ 时

$$\forall k > 0 : \ln n = o(n^k)$$

当 $x \rightarrow 0^+$ 时

$$\forall k > 0 : \ln x = o(x^{-k})$$

证明. 当 $n \rightarrow +\infty$ 时

$$\forall j, k > 0 : e^{n^k} > (n^k)^j \text{ 最终成立}$$

所以

$$\forall j, k > 0 : n^k > jk \ln n \text{ 最终成立}$$

$$\forall j, k > 0 : \frac{n^k}{k \ln n} > j \text{ 最终成立}$$

所以

$$\forall k > 0 : \frac{n^k}{k \ln n} \rightarrow +\infty$$

$$\forall k > 0 : \ln n = \frac{1}{k} o(n^k) = o(n^k)$$

□

591.(b) 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$$

证明. 当 $x \rightarrow 0^+$ 时

$$x^{-1} \rightarrow +\infty$$

所以

$$x \ln x = \frac{\ln x}{x^{-1}} \sim \frac{(\ln x)'}{(x^{-1})'} = \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = -x \rightarrow 0$$

□

611. 已知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

求证

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) = e^x$$

证明.

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 + \sum_{i=1}^n \left[\prod_{k=0}^{i-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \cdot \frac{x^i}{i!} \right]$$

令

$$E_n = 1 + \sum_{i=1}^n \left[\prod_{k=0}^{i-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \cdot \frac{x^i}{i!} \right]$$

$$S_n = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{x^i}{i!}$$

因为

$$E_n < S_n$$

所以

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} E_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \quad (611.1)$$

对于任意的 $p \in \mathbb{N}^*$

$$E_n = 1 + \sum_{i=1}^p \left[\prod_{k=0}^{i-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \cdot \frac{x^i}{i!} \right] + \sum_{i=p+1}^n \left[\prod_{k=0}^{i-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \cdot \frac{x^i}{i!} \right]$$

因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^p \left[\prod_{k=0}^{i-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \cdot \frac{x^i}{i!} \right] = \sum_{i=1}^p \frac{x^i}{i!}$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n \geq S_p$$

也即

$$\forall p \in \mathbb{N}^* : e^x \geq S_p$$

从而

$$\lim_{p \rightarrow \infty} S_p \leq e^x \quad (611.2)$$

结合 (611.1), (611.2) 式得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = e^x$$

□

612. 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi en!)$$

证明. 因为

$$e = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : n! \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \in \mathbb{N}^*$$

所以

$$n \sin(2\pi en!) = n \sin \left(2n! \pi \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \right)$$

又因为

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n+1)!} &< \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots \\ &< \frac{1}{n!(n+1)} + \frac{1}{n!(n+1)^2} + \cdots \\ &= \frac{1}{n!(n+1)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} \\ &= \frac{1}{n!n} \end{aligned}$$

所以

$$\frac{2\pi}{n+1} < 2\pi en! < \frac{2\pi}{n}$$

继而在 $n \rightarrow \infty$ 时

$$\begin{aligned} 2\pi en! &\sim \frac{2\pi}{n} \\ n \sin(2\pi en!) &\sim n \cdot \frac{2\pi}{n} = 2\pi \end{aligned}$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi en!) = 2\pi$$

□

631. 设

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1$$

其中 $\psi(x) > 0$, 再设 $n \rightarrow \infty$ 时 $\alpha_{mn} \Rightarrow 0$, $\alpha_{mn} \neq 0$ ($m = 1, 2, \dots, n$), 换言之

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max \left\{ |\alpha_{mn}| \mid m = 1, 2, \dots, n \right\} = 0$$

以及存在正整数 N 使得对于任意满足 $n > N, m \leq n$ 的正整数 m, n 有 $\alpha_{mn} \neq 0$.

求证:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \varphi(\alpha_{in}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \psi(\alpha_{in}) \quad (631.1)$$

此处假定等式 (1) 右端的极限收敛.

证明. 当 $x \rightarrow 0$ 时设

$$\varphi(x) = \psi(x) + \gamma(x)\psi(x)$$

其中 $\lim_{x \rightarrow 0} \gamma(x) = 0$

证明式 (631.1) 成立只要证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \gamma(\alpha_{in})\psi(\alpha_{in}) = 0 \quad (631.2)$$

因为在相应的基下 $\alpha_{mn} \Rightarrow 0, \alpha_{mn} \neq 0, \gamma(x) \rightarrow 0$, 用 ε 语言表述为

$$\forall \varepsilon_1 > 0 : \exists N \in \mathbb{N}^* : \forall n > N : \forall m = 1, 2, \dots, n : \alpha_{mn} \in \mathring{U}^{\varepsilon_1}(0)$$

$$\forall \varepsilon_2 > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathring{U}^\delta(0) : \gamma(x) \in U^{\varepsilon_2}(0)$$

所以（经过一些逻辑思考）不难得到

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N}^* : \forall n > N : \forall m = 1, 2, \dots, n : \gamma(\alpha_{mn}) \in U^\varepsilon(0)$$

所以（再经过一些逻辑思考）可以得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max \left\{ |\gamma(\alpha_{mn})| \mid m = 1, 2, \dots, n \right\} = 0 \quad (631.3)$$

又因为对于任意的正整数 n 有

$$\left| \sum_{i=1}^n \gamma(\alpha_{in}) \psi(\alpha_{in}) \right| \leq \max \left\{ |\gamma(\alpha_{mn})| \mid m = 1, 2, \dots, n \right\} \cdot \sum_{i=1}^n \psi(\alpha_{in})$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{i=1}^n \gamma(\alpha_{in}) \psi(\alpha_{in}) \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\max \left\{ |\gamma(\alpha_{mn})| \mid m = 1, 2, \dots, n \right\} \right] \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \psi(\alpha_{in})$$

根据上式³、式 (631.3) 以及极限

$$\sum_{i=1}^n \psi(\alpha_{in})$$

收敛的条件可得式 (631.2) 成立. □

补：在一个给定的基 $x \rightarrow A$ 下，如果对于任意的正整数 i ， $f_i(x) \neq 0$ 最终成立，那么

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \sum_{i=1}^n o(f_i(x)) = o \left(\sum_{i=1}^n |f_i(x)| \right)$$

证明. 使用数学归纳法，先讨论 2 个函数的情况，不妨认为 $f(x), g(x) > 0$.

要证明（认为基已经提前给定）

$$o(f(x)) + o(g(x)) = o(f(x) + g(x))$$

只要证明在这个基下对于任意满足 $\alpha(x), \beta(x) = o(1)$ 的函数 $\alpha(x), \beta(x)$ 下式成立：

$$\alpha(x) \frac{f(x)}{f(x) + g(x)} + \beta(x) \frac{g(x)}{f(x) + g(x)} = o(1)$$

³因为公式太长就写不下公式编号了

令 $\gamma(x) = |\alpha(x)| + |\beta(x)|$, 有

$$\gamma(x) = o(1)$$

$$\left| \alpha(x) \frac{f(x)}{f(x) + g(x)} + \beta(x) \frac{g(x)}{f(x) + g(x)} \right| < \gamma(x) \frac{f(x)}{f(x) + g(x)} + \gamma(x) \frac{g(x)}{f(x) + g(x)} = \gamma(x) = o(1)$$

得证.

数学归纳法剩下的步骤略. □

637.3. 已知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

$$|\alpha| < 1$$

求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \alpha^{n-i} x_i$$

证明. 令 $T = \max\{|x_n|\}$, 则

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N}^* : \forall n > N : \left| \sum_{i=0}^n \alpha^{n-i} x_i \right| \leq \left| \sum_{i=0}^N \alpha^{n-i} T \right| + \left| \sum_{i=N+1}^n \alpha^{n-i} \varepsilon \right| \leq T \left| \frac{\alpha^{n-N}}{1-\alpha} \right| + \left| \frac{\varepsilon}{1-\alpha} \right|$$

所以

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{i=0}^n \alpha^{n-i} x_i \right| \leq \left| \frac{2\varepsilon}{1-\alpha} \right|$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \alpha^{n-i} x_i = 0$$

□

637.4. 数列 x_n 按下述方式给定:

$$x_0 = 1, \quad x_n = \frac{1}{1 + x_{n-1}} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

证明. 先假设数列 x_n 的极限 x 存在.

通过

$$x = \frac{1}{1+x}$$

可以解得

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

因为数列 x_n 是恒正的, 所以如果极限存在, 则极限为 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

现在证明数列 x_n 的极限的确存在.

先令 $\gamma = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, 考虑新数列 $x_n - \gamma$.

因为

$$x_n = \frac{1}{1+x_{n-1}}$$

所以

$$x_n - \gamma = \frac{1}{1+x_{n-1}} - \frac{1}{1+\gamma} = \frac{\gamma - x_{n-1}}{(1+x_{n-1})(1+\gamma)}$$

从而

$$|x_n - \gamma| < \left| \frac{x_{n-1} - \gamma}{1+\gamma} \right|$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n - \gamma = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \gamma = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

□

1.4 函数的连续性

734. 求证: 狄利克雷函数

$$\chi(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n(\pi m! x) \right]$$

处处不连续.

证明. 对于任意一个有理数 x , 可以求出它的最简分数形式 p/q , 也即

$$x = \frac{p}{q} \quad p \in \mathbb{Z} \quad q \in \mathbb{N}^* \quad \gcd(p, q) = 1$$

因为 $(q+2)!x = p(q+1)(q+2)$ 是一个偶数, 所以

$$\forall m \geq q+2 : 2 \mid m!x$$

$$\forall m \geq q+2 : \cos(\pi m!x) = 1$$

所以

$$\forall m \geq q+2 : \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n(\pi m!x) = 1$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n(\pi m!x) \right] = 1$$

对于任意一个无理数 x ,

$$\forall m \in \mathbb{N}^* : |\cos(\pi m!x)| < 1$$

所以

$$\forall m \in \mathbb{N}^* : \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n(\pi m!x) = 0$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n(\pi m!x) \right] = 0$$

从而

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

所以

$$\forall x \in \mathbb{R} : \forall \delta > 0 : \exists x' \in \overset{\circ}{U}^\delta(x) : |\chi(x') - \chi(x)| = 1$$

也即函数 χ 在 \mathbb{R} 上处处不连续. □

747. 求证: 若函数 $f(x)$ 是连续的, 则函数

$$f_c(x) = \begin{cases} f(x) & f(x) \leq c \\ c & f(x) > c \end{cases}$$

也是连续的.

证明1. 令

$$\varphi_c(x) = \begin{cases} x & x \leq c \\ c & x > c \end{cases}$$

则 $f_c(x) = \varphi_c(f(x))$.

又因为 $f(x)$ 和 $\varphi_c(x)$ 都是连续函数, 所以 $f_c(x)$ 也是连续函数. \square

证明2. 考虑 $f_c(x)$ 在 x_0 处的连续性.

如果 $f(x_0) < c$, 那么存在一个 x_0 的邻域 U 使得在这个邻域内 $f_c(x) = f(x)$, 所以 $f_c(x)$ 在 x_0 处连续.

如果 $f(x_0) > c$, 那么存在一个 x_0 的邻域 U 使得在这个邻域内 $f_c(x) = c$, 所以 $f_c(x)$ 在 x_0 处连续.

现在讨论 $f(x_0) = c$ 的情况.

函数 $f_c(x)$ 在 x_0 处连续当且仅当 $\lim_{x \rightarrow x_0} f_c(x) - f_c(x_0) = 0$.

而

$$|f_c(x) - f_c(x_0)| \leq \max\{f(x) - c, c - c\} = f(x) - c$$

所以

$$\left| \lim_{x \rightarrow x_0} f_c(x) - f(x_0) \right| \leq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = 0$$

所以 $f_c(x)$ 处处连续. \square

748. 求证: 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $E = [a, b]$ 上连续, 则函数

$$m(x) = \inf_{a \leq \xi \leq x} \{f(\xi)\}$$

在 E 上也是连续的.

证明. 首先容易得出

$$\forall x \in [a, b] : f(x) \geq m(x)$$

要证明函数 $m(x)$ 在 x_0 处连续只要证明

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega[m(x), U_E^\delta(x_0)] = 0$$

如果在某一点 x_0 处有 $f(x_0) > m(x_0)$, 那么存在一个 x_0 处的邻域 $U(x_0)$ 使得在这个邻域内 $f(x) > m(x_0)$, 也即

$$\forall x \in U(x_0) : m(x) = m(x_0)$$

所以函数 $m(x)$ 在 x_0 处连续.

如果在某一点 x_0 处有 $f(x_0) = m(x_0)$, 那么对于任意满足 $x_0 \leq x \leq b$ 的点都有

$$m(x) = \inf_{x_0 \leq \xi \leq x} \{f(\xi)\}$$

所以有

$$\inf\{f[U_E^\delta(x_0)]\} \leq \inf\{m[U_E^\delta(x_0)]\} \leq \sup\{m[U_E^\delta(x_0)]\} \leq \sup\{f[U_E^\delta(x_0)]\}$$

从而

$$\forall \delta > 0 : \omega[m(x), U_E^\delta(x_0)] \leq \omega[f(x), U_E^\delta(x_0)]$$

又因为 $f(x)$ 是连续函数, 从而

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega[f(x), U_E^\delta(x_0)] = 0$$

所以

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega[m(x), U_E^\delta(x_0)] = 0$$

□

750. 设函数 f 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义且有界. 求证: 函数

$$m(x) = \inf_{a \leq \xi < x} \{f(\xi)\}$$

在闭区间 $[a, b]$ 上是左连续的.

证明. 因为 $m(x)$ 是非严格单调减函数, 所以在任意一点的左极限的确存在且

$$\forall x_0 \in (a, b] : \lim_{x \rightarrow x_0^-} m(x) = \inf_{a \leq \xi < x_0} \{m(\xi)\}$$

设

$$\inf_{a \leq \xi < x_0} \{m(\xi)\} = A(x_0)$$

我们希望证明

$$A(x_0) = m(x_0)$$

因为

$$\inf_{a \leq \xi < x_0} \{m(\xi)\} = A(x_0) \geq m(x_0) = \inf_{a \leq \xi \leq x_0} \{m(\xi)\}$$

是显然的, 接下来尝试证明

$$A(x_0) \leq m(x_0)$$

根据 \inf 的定义, 我们知道对于任意的 x_0 , 我们任取满足 $a \leq x'' < x' < x_0$ 的实数 x'', x' 都有

$$A(x_0) = \inf_{a \leq \xi < x_0} \{m(\xi)\} \leq m(x') = \inf_{a \leq \xi < x'} \{f(\xi)\} \leq f(x'')$$

于是我们证明了

$$\forall a \leq \xi < x_0 : A(x_0) \leq f(\xi)$$

继而

$$A(x_0) \leq \inf_{a \leq \xi < x_0} \{f(\xi)\} = m(x_0)$$

□

752. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上连续并有界. 求证: 对于任何正实数 T , 可求得数列 $x_n \rightarrow +\infty$ 使

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n + T) - f(x_n) = 0$$

证明. 令函数 $g(x) = f(x + T) - f(x)$, 易得 $g(x)$ 是一个连续函数.

对于一个正实数 x' , 按照 $g(x' + nT)$ 的值分为两类, 用下面的方式定义集合 A, B .

如果

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : g(x' + nT) \cdot g(x') > 0 \quad (752.1)$$

那么 $x' \in A$, 否则 $x' \in B$.

易得 $A \cap B = \emptyset, A \cup B = \mathbb{R}^+$.

如果 $A = \emptyset$, 那么

$$\forall x' \in B = \mathbb{R}^+ : \exists x'' \geq x' : g(x'') = 0$$

所以可以找到一个数列 x_n 使得

$$g(x_n) = 0, \quad x_n \rightarrow \infty$$

从而满足题意.

如果 $A \neq \emptyset$, 那么随意从 A 中取一个元素 x' 构建数列 $x_n = x' + nT$.

因为 $x' \in A$, 所以满足 (752.1) 式, 所以

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \left| \sum_{k=1}^n g(x' + kT) \right| = \sum_{k=1}^n |g(x' + kT)| = \sum_{k=1}^n |g(x_k)|$$

因为

$$f[x' + (n+1)T] = f(x' + T) + \sum_{k=1}^n g(x' + kT)$$

有界, 所以

$$\sum_{k=1}^n |g(x_k)|$$

有界, 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_k) = 0$$

满足题意. □

753. 设 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 为定义在 \mathbb{R} 上的连续周期函数, 且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\varphi(x) - \psi(x)] = 0$$

求证: $\varphi(x) \equiv \psi(x)$.

证明. 容易证明连续周期函数在定义域上一致连续.

设正实数 T_1, T_2 满足

$$\varphi(x + T_1) = \varphi(x)$$

$$\psi(x + T_2) = \psi(x)$$

运用反证法, 如果原命题不成立, 则存在点 x' 使得 $\varphi(x') \neq \psi(x')$.

数论知识告诉我们, 对于任意的正实数 δ , 都能找到正整数 p, q 使得

$$|pT_1 - qT_2| < \delta$$

我们将这个结论转变成另一个有用的形式⁴: 存在正整数列 p_n, q_n 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时

$$p_n \rightarrow +\infty$$

$$q_n \rightarrow +\infty$$

$$|p_n T_1 - q_n T_2| \rightarrow 0$$

而根据一致连续性可知, 对于数列 a_n, b_n , 当 $n \rightarrow \infty$ 时

$$a_n - b_n \rightarrow 0 \Rightarrow [\varphi(a_n) - \varphi(b_n) \rightarrow 0 \wedge \psi(a_n) - \psi(b_n) \rightarrow 0]$$

⁴其实并不完全是等价命题转换, 还要额外证明一些小性质

然后我们现在来考察数列 $\varphi(x' + p_n T_1) - \psi(x' + q_n T_2)$.

因为

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x' + p_n T_1) &= \varphi(x') \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \psi(x' + q_n T_2) &= \psi(x') \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (x' + p_n T_1) - (x' + q_n T_2) &= 0\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x' + p_n T_1) - \psi(x' + q_n T_2) &= \varphi(x') - \psi(x') \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x' + p_n T_1) - \varphi(x' + q_n T_2) &= 0\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x' + q_n T_2) - \psi(x' + q_n T_2) = \varphi(x') - \psi(x')$$

又因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) - \psi(x) = 0$$

所以

$$\varphi(x') - \psi(x') = 0$$

而这与假设矛盾. □

1.5 函数的一致连续性

791. 求证: 若函数 $f(x)$ 是定义在区间 $E = [0, +\infty)$ 上的连续函数, 而且极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

存在且收敛, 则函数 $f(x)$ 在 E 上一致连续.

证明. 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 收敛, 所以对于任意小的正实数 ε , 总存在实数 N 使得

$$\omega[f(x), (N, +\infty)] < \varepsilon$$

也即

$$\forall x', x'' \in (N, +\infty) : |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

又因为函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, N+1]$ 上一定一致收敛, 因此存在 $\delta \in (0, 1)$ 使得对于任意满足 $x', x'' \in [0, N+1]$ 且 $|x'' - x'| < \delta$ 的实数 x', x'' 都有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

综上所述可得

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta \in (0, 1) : \forall x', x'' \in E : (|x'' - x'| < \delta) \Rightarrow (|f(x'') - f(x')| < \varepsilon)$$

□

806. 求证: 对于定义在有限开区间 $E = (a, b)$ 的函数 f , 能够保持连续性地延拓到闭区间 $[a, b]$ 的充要条件是函数 f 在区间 (a, b) 上一致连续.

证明. 能将函数 f 保持连续性地延拓到闭区间 $[a, b]$ 等价于存在连续函数

$$\tilde{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad (806.1)$$

使得 $\tilde{f}|_E = f$. 而这又等价于极限 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 都存在且收敛.

先证明必要性 “ \Rightarrow ”:

如果延拓性成立, 那么满足式 (806.1) 的连续函数 \tilde{f} 存在, 因为闭区间上的连续函数一致连续, 因此 \tilde{f} 在 $[a, b]$ 上一致连续. 所以在开区间 E 上 $\tilde{f}|_E = f$ 一致连续.

现在证明充分性 “ \Leftarrow ”:

如果函数 f 在 E 上一致连续, 那么对于任意小的 ε , 都存在正实数 δ 使得

$$\omega[f, U_E^\delta(b)] < \varepsilon \quad (806.2)$$

现在对于任何趋于 b^- 的数列 $\{x_n\}$ 都有: 对于任意小的 δ , 存在正整数 N 使得

$$\forall n > N : x_n \in U_E^\delta(b) \quad (806.3)$$

而这时

$$\forall m, n > N : |f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon \quad (806.4)$$

综合式 (806.2), (806.3), (806.4), 可得

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N}^* : \forall m, n > N : |f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon \quad (806.5)$$

从而数列 $\{f(x_n)\}$ 是柯西数列, 存在极限而且收敛.

所以函数 f 在 b^- 处的极限的确存在且收敛. 同理函数 f 在 a^+ 处的极限也存在且收敛. □

1.6 小结

需要能够处理以下问题:

1. 基本初等函数的极限

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^x$$

2. 初等函数的极限

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \sin x \cos \alpha x}{1 + \sin x \cos \beta x} \right)^{\cot^3 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{2x-1} \right)^{x^2}$$

3. 对无限函数族进行运算之后求极限

$$\lim_{x \rightarrow a} F[x, \{f_i(x)\}]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f[g(i, n)]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\sqrt[3]{1 + \frac{i}{n^2}} - 1 \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n \cos \frac{ia}{n\sqrt{n}}$$

4. 简单迭代数列的极限

已知 $y_0, y_n = f(y_{n-1})$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$

已知 $x, y_0, y_1 > 0, y_n = y_{n-1}(2 - xy_{n-1})$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$

1.7 补充题目

1*. 设 $a_1 = 2, a_2 = 3, a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{1}{\ln a_n}$, 求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n \ln a_n}{n}$$

证明. 易得数列 a_n 严格单调增, 因此它一定有有限或无限的极限.

如果数列 a_n 存在有限的极限 γ , 那么显然

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n \ln a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma \ln \gamma}{n} = 0$$

如果当 $n \rightarrow \infty$ 时 $a_n \rightarrow +\infty$, 那么有

$$\begin{aligned} a_{n+2} \ln a_{n+2} &= \left(a_{n+1} + \frac{1}{\ln a_n} \right) \ln a_{n+2} \\ &= a_{n+1} \cdot \ln \left(a_{n+1} + \frac{1}{\ln a_n} \right) + \frac{\ln a_{n+2}}{\ln a_n} \\ &< a_{n+1} \ln a_{n+1} + \frac{1}{\ln a_n} + (a_{n+2} - a_n) \\ &< a_{n+1} \ln a_{n+1} + \frac{3}{\ln a_n} \end{aligned}$$

这时 $\Delta(a_n \ln a_n) \rightarrow 0^+$.

所以对于任意小的正实数 ε 都能求出正整数 N 使得对于任意大于 N 的正整数 n 有

$$a_N \ln a_N < a_n \ln a_n < a_N \ln a_N + (n - N)\varepsilon$$

所以

$$\frac{a_n \ln a_n}{n} \rightarrow 0$$

综上, 极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n \ln a_n}{n} = 0$$

□

2 一元函数微分学

2.1 高阶的导数和微分

1188. 设

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

求 $y^{(n)}$.

证明.

$$y = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} \cdot (cx + d)^{-1}$$

设 $z = (cx + d)^{-1}$, 有

$$y^{(n)} = \frac{bc - ad}{c} \cdot z^{(n)}$$

通过数学归纳法不难得到

$$z^{(n)} = \frac{n!(-c)^n}{(cx + d)^{n+1}}$$

所以

$$y^{(n)} = (ad - bc) \cdot \frac{n!(-c)^{n-1}}{(cx + d)^{n+1}}$$

□

2.2 罗尔定理、拉格朗日定理和柯西定理

1239. 设定义在闭区间 $[a, b]$ 上的函数 f 在定义域上有连续的 $p + q$ 阶导数, 在 (a, b) 上有 $p + q + 1$ 阶导数, 并且

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(p)}(a) = 0$$

$$f(b) = f'(b) = \cdots = f^{(q)}(b) = 0$$

求证: 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$f^{(p+q+1)}(\xi) = 0$$

证明. 不失一般性地, 认为 $p \leq q$.

考虑 $f^{(n)}(x)$ 在 E 上的零点个数, 用 $Z(n)$ 表示.

因为 $f(a) = f(b) = 0$, 所以 $Z(0) \geq 2$.

又因为 $f(a) = f(b)$, 所以一定存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) = 0$, 从而 $Z(1) \geq 3$.

以此类推, 可以得到 $Z(p) \geq p + 2$.

因为 $f^{(n)}(x)$ 的任意两个零点之间一定有 $f^{(n+1)}(x)$ 的零点, 再加上当 $p \leq n \leq q$ 时 $f^{(n)}(b) = 0$, 可以得到

$$\forall n \in [p, q] : Z(n) \geq Z(n-1)$$

从而

$$Z(q) \geq Z(p) \geq p + 2$$

然后有

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : Z(n) \leq Z(n-1) - 1$$

所以

$$Z(p+q+1) \geq Z(q) - (p+1) \geq (p+2) - (p+1) = 1$$

而这意味着在 E 上有 $f^{(p+q+1)}(x)$ 的零点. □

1242. 求证: 切比雪夫-拉盖多项式

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$$

的所有实根都是正数.

证明. 先求出该多项式的具体形式

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{n}{k}\right)^2 \cdot (-x)^k \cdot k!$$

然后可以发现当 x 为负数时该求和的每一项都是正数, 因此它的根一定不是负数. □

1262. 求方程

$$y'(x) = \lambda y(x)$$

的通解, 其中 λ 为常数.

证明. 若函数 y 满足方程, 则

$$(y(x)e^{-\lambda x})' = y'(x)e^{-\lambda x} - \lambda y(x)e^{-\lambda x} = 0$$

所以存在实数 C 使得

$$y(x)e^{-\lambda x} = C \Rightarrow y(x) = Ce^{\lambda x}$$

再回头检验发现对于任意的实数 C , 函数

$$y(x) = Ce^{\lambda x}$$

都满足方程, 因此该方程的通解为

$$y(x) = Ce^{\lambda x}$$

其中 C 为任意常数. □

2.3 增函数与减函数

1286. 对于函数 f 定义域 E 上的一个极限点 x_0 , 若存在正实数 δ 使得在该点的去心邻域 $\dot{U}_E^\delta(x_0)$ 上有 $x - x_0$ 与 $f(x) - f(x_0)$ 同号, 则称函数 f 在点 x_0 是增函数.

求证: 若函数 f 在有限或无限的开区间 (a, b) 上的每一点皆为增函数, 则它在此区间上是增函数.

证明. 运用反证法, 假如 f 在该区间 (a, b) 上不是增函数, 那么存在不同的两点 $x', x'' \in (a, b)$ 满足

$$(x' < x'') \wedge (f(x') \geq f(x''))$$

根据题意, 对于闭区间 $[x', x'']$ 上的任意一点 x 都可以找到一个相应邻域 $U^\delta(x)$, 这些开区间能够覆盖 $[x', x'']$, 又根据开区间覆盖定理, 能够找到有限个开区间

$$U^{\delta_1}(x_1), U^{\delta_2}(x_2), \dots, U^{\delta_n}(x_n)$$

来覆盖 $[x', x'']$, 其中 $x' \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq x''$.

容易验证,

$$f(x_1) < f(x_2) < \dots < f(x_n)$$

$$f(x') \leq f(x_1)$$

$$f(x_n) \leq f(x'')$$

从而得到

$$f(x') < f(x'')$$

矛盾. □

2.4 不定式的求值法

1373.1. 求证: 若函数 $f(x)$ 的二阶导数 $f''(x)$ 存在, 则

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$

证明. 将

$$\frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$

看作是以 h 为自变量的函数, 发现当 $h \rightarrow 0$ 时分子分母都趋近于零, 运用洛必达法则

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f'(x+h) - f(x)}{2h} + \frac{f'(x+(-h)) - f'(x)}{-2h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f(x)}{2h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f(x)}{2h} \\ &= f''(x) \end{aligned}$$

□

1373.2. 研究函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

在点 $x = 0$ 的可微性.

证明. 在基 $x \rightarrow 0$ 下

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x + x^2/2 + o(x^2)} \\ &= \frac{x^2/2 + o(x^2)}{x^2 + x^3/2 + o(x^3)} \\ &= \frac{1 + o(1)}{1 + x/2 + o(x)} \end{aligned}$$

□