# 吉米多维奇习题集部分解答

陈程

2024 年 7 月 1 日

# 1 分析引论

## 1.1 实数

**6.** 证明伯努利不等式：

$$\prod_{i=1}^{n}(1+x_i) \geqslant 1+\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{6.1}$$

式中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是符号相同且大于 $-1$ 的数.

证明. 运用数学归纳法，当 $n$ 等于 1 的时候不等式显然成立.

假设 $n=k$ 时不等式 (6.1) 成立，即

$$\prod_{i=1}^{k}(1+x_i) \geqslant 1+\sum_{i=1}^{k} x_i \tag{6.2}$$

则

$$\prod_{i=1}^{k+1}(1+x_i) \geqslant 1+\sum_{i=1}^{k+1} x_i \tag{6.3}$$

$$\Leftrightarrow (1+x_{k+1}) \cdot \prod_{i=1}^{k}(1+x_i) \geqslant 1+\sum_{i=1}^{k} x_i + x_{k+1}$$

$$\Leftarrow (1+x_{k+1}) \cdot \left(1+\sum_{i=1}^{k} x_i\right) \geqslant 1+\sum_{i=1}^{k} x_i + x_{k+1}$$

$$\Leftrightarrow x_{k+1} \cdot \left(1+\sum_{i=1}^{k} x_i\right) \geqslant x_{k+1}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} x_i x_{k+1} \geqslant 0 \tag{6.4}$$

即当 $n=k+1$ 时不等式 (6.1) 成立. □

**8.** 证明不等式：

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad (n>1) \tag{8.1}$$

证明. 令

$$A_n = n! \quad B_n = \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

则原不等式 (8.1) 等价于

$$A_n < B_n \quad (n > 1) \tag{8.2}$$

又因为 $A_n, B_n$ 恒为正数，$A_2 = 2 < 4/9 = B_2$，因此式 (8.2)

$$\Leftarrow \frac{A_{n+1}}{A_n} < \frac{B_{n+1}}{B_n} \quad (n > 1) \tag{8.3}$$

$$\Leftrightarrow n+1 < \frac{n+2}{2} \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \quad (n > 1)$$

$$\Leftrightarrow 2 < \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \quad (n > 1)$$

$$\Leftrightarrow 2 < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \quad (n > 1) \tag{8.4}$$

□

**9.** 证明不等式:

$$\prod_{i=1}^{n} (2i)! > [(n+1)!]^n \quad (n > 1) \tag{9.1}$$

证明. 不等式 (9.1)

$$\Leftarrow (2n+2)! > \frac{[(n+2)!]^{n+1}}{[(n+1)!]^n} \quad (n > 1) \tag{9.2}$$

$$\Leftrightarrow (2n+2)! > (n+2)!(n+2)^n \quad (n > 1)$$

$$\Leftarrow (2n+3)(2n+4) > (n+3) \cdot \frac{(n+3)^{n+1}}{(n+2)^n} \quad (n > 1) \tag{9.3}$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \frac{2n+3}{n+2} > \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{n+2} \quad (n > 1)$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \left(2 - \frac{1}{n+2}\right) > \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^{n+2} \quad (n > 1)$$

$$\Leftarrow 2 \cdot \left(2 - \frac{1}{n+2}\right) > 3 > \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^{n+2} \quad (n > 1) \tag{9.4}$$

□

**10.** 证明不等式：

$$\left|\sin\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n}\sin x_k \quad (0\leqslant x_k\leqslant \pi, k=1,2,\cdots,n) \tag{10.1}$$

证明. 运用数学归纳法，当 $n=1$ 时不等式 (10.1) 显然成立.

假设当 $n=p$ 时不等式 (10.1) 成立，即

$$\left|\sin\left(\sum_{k=1}^{p}x_k\right)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{p}\sin x_k \tag{10.2}$$

则

$$\begin{aligned}
\left|\sin\left(\sum_{k=1}^{p+1}x_k\right)\right| &= \left|\sin\left(x_{p+1}+\sum_{k=1}^{p}x_k\right)\right| \\
&= \left|\sin(x_{p+1})\cos\left(\sum_{k=1}^{p}x_k\right)+\sin\left(\sum_{k=1}^{p}x_k\right)\cos(x_{p+1})\right| \\
&\leqslant \left|\sin(x_{p+1})\cos\left(\sum_{k=1}^{p}x_k\right)\right|+\left|\sin\left(\sum_{k=1}^{p}x_k\right)\cos(x_{p+1})\right| \\
&\leqslant \sin x_{p+1}+\left|\sin\left(\sum_{k=1}^{p}x_k\right)\right| \\
&\leqslant \sin x_{p+1}+\sum_{k=1}^{p}\sin x_k \\
&= \sum_{k=1}^{p+1}\sin x_k
\end{aligned}$$

□

**11.** 设 $c$ 为正整数，而不为整数的平方，且 $A/B$ 为确定实数 $\sqrt{c}$ 的分割，其中 $B$ 类包含所有满足 $b^2>c$ 的正有理数 $b$，而 $A$ 类包含所有其余的有理数. 求证：在 $A$ 类中无最大数，而在 $B$ 类中无最小数.

证明. 引理：对于正整数 $c$，如果 $\sqrt{c}$ 不是整数，则不存在有理数 $x$ 使得 $x^2=c$.

所以 $\forall a\in A\cap\mathbb{Q}^+ : a^2<c$.

如果 $A$ 类中有最大数 $a$，则可以验证

$$\left(\frac{c-1}{\frac{c-1}{a+1}+2}+1\right)^2<c$$

所以 $\dfrac{c-1}{\frac{c-1}{a+1}+2}+1\in A$.

也可以验证

$$\frac{c-1}{\frac{c-1}{a+1}+2}+1>a$$

这与 $a$ 是 $A$ 中最大数矛盾.

同理，$B$ 中也没有最小数. □

附记：这里解释一下为什么会出现 $\dfrac{c-1}{\frac{c-1}{a+1}+2}+1$ 这个看起来很奇怪的表达式，这个表达式源于一种用有理数迭代估计无理数的方法.

这里以估计 $\sqrt{3}$ 为例.

$\sqrt{3}$ 是方程 $x^2=3$ 的一个（正）根，将方程变形成

$$(x-1)(x+1)=2$$

$$x=\frac{2}{x+1}+1$$

我们构造一个数列 $\{x_n\}$，令 $x_1=1$，$x_{n+1}=\dfrac{2}{x_n+1}+1$. 这个数列的极限就是 $\sqrt{3}$（当然要先验证这个数列的极限存在）. 这里给出该数列的前 10 项：

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | 2 | 1.6667 | 1.75 | 1.7273 | 1.7333 | 1.7317 | 1.7321 | 1.7320 | 1.7321 | 1.7321 |

可以看到，数列的项一半小于根号三，一半大于根号三，交错排布，$|x_n-\sqrt{3}|$ 单调递减（可以用代数严格证明），因此只要一次迭代两步，即 $x_{n+2}=\dfrac{2}{\frac{2}{x_n+1}+2}+1$ 就能满足第 10 题的要求.

类似的，也可以通过方程

$$x^3=3$$

$$\to (x-1)(x^2+x+1)=2$$

$$\to x = \frac{2}{x^2+x+1} + 1$$

来构造数列满足 $x_{n+1} = \dfrac{2}{x_n^2+x_n+1} + 1$ 来估计 $\sqrt[3]{3}$. 这种估计的方式很经典，但也有点过时了，这个数列收敛的速度并不快.

## 1.2 数列理论

**49.** 求极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} \tag{49.1}$$

证明. 令

$$A_n = \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} \tag{49.2}$$

易得对于任意的正整数 $n$，

$$A_n > 0$$

所以数列 $A_n$ 与数列 $\sqrt[n]{A_1A_2\cdots A_n}$ 拥有相同的极限（两者的极限要么同时存在，要么都不存在），而

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{A_1A_2\cdots A_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}} = \frac{1}{3}\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(-2/3)^{n+1}+1}\right)^{-1} = \frac{1}{3} \tag{49.3}$$

所以数列 $A_n$ 的极限存在而且极限为 1/3. □

**55.** 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$$

证明. 对级数进行分组，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{2^k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\frac{2}{2^k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n}\frac{2}{2^k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}$$

易得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n}\frac{2}{2^k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=j}^{n}\frac{2}{2^k}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{4}{2^j}=4$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k}=4-1=3$$

$\square$

**奇思妙想**：对于一个给定的二元函数[1] $A$，下面两个极限在什么情况下相等（在下列极限都存在的情况下考虑）？

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}A(i;j)=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=i}^{\infty}A(i;j)\right)$$

证明. 因为

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}A(i;j)&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{\infty}A(i;j)-\sum_{j=n+1}^{\infty}A(i;j)\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{\infty}A(i;j)\right)-\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=n+1}^{\infty}A(i;j)\right)\\&=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=i}^{\infty}A(i;j)\right)-\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=n+1}^{\infty}A(i;j)\right)\end{aligned}$$

所以两个极限相等只要

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=n+1}^{\infty}A(i;j)\right)=0$$

其中 $\displaystyle\sum_{j=n+1}^{\infty}A(i;j)$ 可以看作无穷级数 $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}A(i;j)$ 的余项，用 $R(i;n)$ 来表示.

所以把

$$\sum_{i=1}^{n}R(i;n)$$

看作是一个关于 $n$ 的数列，只要在 $n\to\infty$ 时它是 $o(1)$ 即可.

然后定义

$$B_n:=\sup\left\{\left|R(i;n)\right|\;\middle|\;i\leqslant n\right\}$$

有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}R(i;n)\right|\leqslant n\cdot B_n$$

只要 $B_n$ 在 $n\to\infty$ 时是 $o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 即可.

[1]默认为实值函数，但是下面的论述也能推广到复数域上去

现在我们考虑对于任意的 $i$，$R(i;n)=o(1/n)$ 这一特殊情况

$$C(i;n):=\sup\Big\{\big|R(i;j)\big|\ \Big|\ j\geqslant n\Big\}$$

我猜测在这种情况下原命题成立的一个充分条件为 $C(n;n)=o(1/n)$，现在尝试证明.
因为当 $n\to\infty$ 时

$$\forall i\in\mathbb{N}^*:R(i;n)=o(1/n)$$

所以

$$\forall i\in\mathbb{N}^*:C(i;n)=o(1/n)$$

$$\forall k\in\mathbb{N}^*:\forall\varepsilon>0:\exists N\in\mathbb{N}^*:\forall n>N:\forall i\leqslant k:C(i;n)<\frac{\varepsilon}{n}\tag{1}$$

因为 $C(n;n)=o(1/n)$，所以

$$\forall\varepsilon>0:\exists k\in\mathbb{N}^*:\forall n>k:C(n;n)<\frac{\varepsilon}{n}\tag{2}$$

再加上

$$\forall n\in\mathbb{N}^*:\left|\sum_{i=1}^{n}R(i;n)\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n}C(i;n)\leqslant\sum_{i=1}^{k}C(i;n)+\sum_{i=k+1}^{n}C(i;i)\tag{3}$$

有

$$\forall\varepsilon>0:\exists k\in\mathbb{N}^*:\exists N\in\mathbb{N}^*:\forall n>\max\{k,N\}:\left|\sum_{i=1}^{n}R(i;n)\right|<k\cdot\frac{\varepsilon}{n}+(n-k)\cdot\frac{\varepsilon}{n}=\varepsilon$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}R(i;n)=0$$

得证.
这里可以给几个具体例子来参考

$$A(i;j)=(-1)^{j-i}\cdot 2^{-\lfloor (j-i)/2\rfloor}$$

$$A(i;j)=2^{-j}$$

$$A(i;j)=\frac{1}{j}-\frac{1}{j+1}$$

□

**70.** 证明：

$$0 < \mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n} \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{70.1}$$

证明. 先证明引理：

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{70.2}$$

对于数列 $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$，因为

$$\begin{aligned}
\frac{[1 + 1/(n+1)]^{n+1}}{(1 + 1/n)^n} &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \\
&= \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right) \\
&> \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

所以 $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 是单调增数列，即

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$$

不等式 (70.2) 另一边的证明同理.

所以

$$0 < \mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{70.3}$$

而且

$$\begin{aligned}
\mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &< \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\
&= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} \\
&< \frac{\mathrm{e}}{n} \\
&< \frac{3}{n}
\end{aligned} \tag{70.4}$$

□

**72.** 求证：

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=\mathrm{e} \tag{72.1}$$

并由此推出公式

$$\mathrm{e}=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n!n} \tag{72.2}$$

其中 $0<\theta_n<1$.

证明. 令

$$A_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\quad B_n=1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i!} \tag{72.3}$$

因为

$$\begin{aligned}A_n&=1+\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\left(\frac{1}{n}\right)^i\\&=1+\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^i\right]\\&=1+\sum_{i=1}^{n}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{i-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{i!}\right]\\&=1+\sum_{i=1}^{n}\left[\prod_{j=1}^{i-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)\cdot\frac{1}{i!}\right]\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\mathrm{e}$$

$$A_n<B_n\quad(n=1,2,\cdots)$$

所以（如果极限的确存在的话）

$$\lim_{n\to\infty}B_n\geqslant\mathrm{e} \tag{72.4}$$

对于任意的正整数 $k$，当 $n>k$ 时

$$A_n=1+\sum_{i=1}^{k}\left[\prod_{j=0}^{i-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)\cdot\frac{1}{i!}\right]+\sum_{i=k+1}^{n}\left[\prod_{j=0}^{i-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)\cdot\frac{1}{i!}\right]$$

所以

$$\begin{aligned}
\mathrm{e} &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\sum_{i=1}^{k}\left[\prod_{j=0}^{i-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)\cdot\frac{1}{i!}\right]\right)+\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=k+1}^{n}\left[\prod_{j=0}^{i-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)\cdot\frac{1}{i!}\right]\right)\\
&= 1+\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i!}+\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=k+1}^{n}\left[\prod_{j=0}^{i-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)\cdot\frac{1}{i!}\right]\right)\\
&= B_k+\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=k+1}^{n}\left[\prod_{j=0}^{i-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)\cdot\frac{1}{i!}\right]\right)
\end{aligned}$$

从而

$$\forall k\in\mathbb{N}^*: B_k\leqslant \mathrm{e} \tag{72.5}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} B_n=\mathrm{e} \tag{72.6}$$

而且对于任意的正整数 $n$，

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}-B_n &= \sum_{i=n+1}^{+\infty}\frac{1}{i!}\\
&= \frac{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\cdots}{n!}\\
&< \frac{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\cdots}{n!}\\
&= \frac{1}{n!}\cdot\left(\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}\right)\\
&= \frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{n}\\
&= \frac{1}{n!n}
\end{aligned}$$

□

**73.** 证明：数 e 是无理数.

证明. 假设 e 是有理数，则存在互素的正整数 $p, q$ 使得

$$\mathrm{e}=\frac{p}{q}$$

所以 $\mathrm{e} \cdot q!$ 是一个整数.

又因为

$$\mathrm{e} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{q!} + \frac{\theta}{q!q}$$

其中 $0 < \theta < 1$

所以

$$\left(q! + q! + \frac{q!}{2!} + \frac{q!}{3!} + \cdots + \frac{q!}{q!}\right) + \frac{\theta}{q}$$

是一个整数，而这是显然不可能的. □

**74.** 证明不等式：

$$\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n < n! < \mathrm{e}\left(\frac{n}{2}\right)^n \tag{74.1}$$

证明. 显然当 $n = 1$ 时不等式 (74.1) 成立.

$$\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n < n! \tag{74.2}$$

$$\Leftarrow \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n \cdot \mathrm{e}} < n + 1$$

$$\Leftrightarrow (n+1)^n < n^n \cdot \mathrm{e}$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e} \tag{74.3}$$

$$n! < \mathrm{e}\left(\frac{n}{2}\right)^n \tag{74.4}$$

$$\Leftarrow n + 1 < \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n \cdot 2}$$

$$\Leftrightarrow 2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{74.5}$$

□

**75.** 求证：

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\mathrm{e}^{1/n} - 1\right) = 1 \tag{75.1}$$

证明. 对常数 e 进行估计，令

$$\mathrm{e}=\left(1+\frac{1+\varphi_n}{n}\right)^n \tag{75.2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n=\varphi$$

因为

$$\mathrm{e}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

推得

$$\varphi\geqslant 0 \tag{72.3}$$

根据估计 (75.2) ，有

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\mathrm{e}^{1/n}-1\right)=\lim_{n\to\infty}1+\varphi_n=1+\varphi \tag{75.4}$$

所以要证明原命题 (75.1) 成立，只要证明 $\varphi=0$ 即可.

因为

$$\left(1+\frac{1+\varphi_n}{n}\right)^n>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n+\varphi_n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}$$

所以

$$\mathrm{e}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1+\varphi_n}{n}\right)^n\geqslant\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n+\varphi_n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}\right]=\mathrm{e}\cdot(1+\varphi) \tag{75.5}$$

从而

$$\varphi=0 \tag{75.6}$$

□

**80.** 证明下列数列收敛：

$$x_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$$

证明.

$$\ln x_n=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$$

数列 $x_n$ 收敛的充要条件为级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{2^k}\right)$ 收敛. 而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1/2^n}{1/n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n}=0$$

所以

$$\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)<\frac{1}{k^2}$$

在 $k\to\infty$ 时最终成立.

所以存在 $N\in\mathbb{N}^*$ 使得

$$\sum_{k=N}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)\leqslant\sum_{k=N}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{2}{N^2}$$

从而该级数收敛. □

**134.** 证明：若对于非负数列 $x_n$，无论数列 $y_n$ 如何选取，以下两个等式中都至少有一个成立：

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\varlimsup_{n\to\infty}x_n+\varlimsup_{n\to\infty}y_n$$

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_ny_n)=\varlimsup_{n\to\infty}x_n\cdot\varlimsup_{n\to\infty}y_n$$

则数列 $x_n$ 收敛或者发散于 $+\infty$.

证明. 尝试证明逆否命题：若非负数列 $x_n$ 不收敛（发散于 $+\infty$ 看作一种特殊的收敛），存在数列 $y_n$ 使得

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n+y_n)\neq\varlimsup_{n\to\infty}x_n+\varlimsup_{n\to\infty}y_n$$

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_ny_n)\neq\varlimsup_{n\to\infty}x_n\cdot\varlimsup_{n\to\infty}y_n$$

因为 $x_n$ 不收敛，则 $a=\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n<\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n=b$[2]

存在 $x_n$ 的一个子列 $x_{p_n}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}x_{p_n}=a$$

[2] $b$ 可能是实数，也可能是 $+\infty$，但 $a$ 一定是一个实数

构造

$$y_n = \begin{cases} 1, & n \in \{p_1, p_2, p_3, \cdots\} \\ -x_n - 1, & n \notin \{p_1, p_2, p_3, \cdots\} \end{cases}$$

于是

$$\varlimsup_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} (x_{p_n} + y_{p_n}) = a + 1 \neq b + 1 = \varlimsup_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} (x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} (x_{p_n} y_{p_n}) = a \neq b = \varlimsup_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty} y_n$$

□

**136.** 证明：若数列 $x_n$ 有界，且

$$\lim_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$$

则此数列的子列极限充满于下极限和上极限

$$l = \varliminf_{n\to\infty} x_n \quad 和 \quad L = \varlimsup_{n\to\infty} x_n$$

之间，即区间 $[l, L]$ 中的任意一个数都是该数列的子列极限.

*证明.* 存在数列 $x_n$ 的单调增子列 $x_{p_n}$ 与 $x_{q_n}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} x_{p_n} = L$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{q_n} = l$$

容易从 $x_{p_n}$ 以及 $x_{q_n}$ 再构造出两条单调增子列 $x_{p'_n}, x_{q'_n}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} x_{p'_n} = L$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{q'_n} = l$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : p'_n < q'_n < p'_{n+1}$$

显然，$l$ 和 $L$ 都是数列 $x_n$ 的子列极限，现在尝试证明：对于一个给定的 $M \in (l, L)$，$M$ 是数集 $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ 的一个极限点.

易得，存在正整数 $N_1$ 使得

$$\forall n > N_1 : x_{p'_n} > M > x_{q'_n}$$

对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在正整数 $N_2$ 使得

$$\forall n > N_2 : |x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$$

只要取满足 $k > N_1 \wedge p'_k > N_2$ 的正整数 $k$，可以证明 $x_{p'_k}, x_{p'_k+1}, x_{p'_k+2}, \cdots, x_{q'_k}$ 中必有一个数属于 $(M-\varepsilon, M+\varepsilon)$，因此 $M$ 是数集 $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ 的一个极限点. □

**146.** 证明：

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + C + \varepsilon_n \tag{146.1}$$

其中 $C$ 是一个常实数，当 $n \to \infty$ 时 $\varepsilon_n \to 0$.

证明. 式 (146.1) 成立等价于数列

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

收敛.

先证明引理：对于正整数 $a, b(a < b)$，有

$$\ln\left(\frac{b}{a}\right) < \sum_{i=a}^{b} \frac{1}{i} < \frac{1}{a} + \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

构造函数

$$f(x) = \frac{1}{\lceil x \rceil}$$

$$g(x) = \frac{1}{x}$$

$$h(x) = \frac{1}{\lfloor x \rfloor}$$

易得

$$\forall x \geqslant 1 : f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$$

$$\forall i \in \mathbb{N}^* : \int_i^{i+1} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{i+1}, \quad \int_i^{i+1} h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{i}$$

所以

$$\sum_{i=a}^{b} \frac{1}{i} = \frac{1}{a} + \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x < \frac{1}{a} + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a} + \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\sum_{i=a}^{b}\frac{1}{i}=\int_{a}^{b+1}h(x)\,\mathrm{d}x>\int_{a}^{b+1}g(x)\,\mathrm{d}x=\ln\left(\frac{b+1}{a}\right)>\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

从而

$$\ln\left(\frac{b}{a}\right)<\ln\left(\frac{b+1}{a}\right)<\sum_{i=a}^{b}\frac{1}{i}<\frac{1}{a}+\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

然后根据柯西收敛定理，对于任何的正实数 $\varepsilon$，对于任何大于 $2/\varepsilon$ 的正整数 $p,q$（不妨令 $p<q$），有

$$|x_p-x_q|=\left|\sum_{i=p+1}^{q}\frac{1}{i}-\ln\left(\frac{q}{p}\right)\right|\leqslant\left|\sum_{i=p}^{q}\frac{1}{i}-\ln\left(\frac{q}{p}\right)\right|+\frac{1}{p}<\frac{2}{p}<\varepsilon$$

□

**148.** 数列 $x_n$ $(n=1,2,\cdots)$ 由下列各式

$$x_1=a,\quad x_2=b,\quad x_n=\frac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2}\quad(n=3,4,\cdots)$$

所确定，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解. 构造数列 $y_n$ $(n=2,3,\cdots)$，

$$y_n=x_n-x_{n-1}$$

易得

$$y_n=x_n-x_{n-1}=-\frac{x_{n-1}-x_{n-2}}{2}=-\frac{y_{n-1}}{2}\quad(n=3,4,\cdots)$$

于是

$$x_n=x_1+\sum_{i=2}^{n}y_i=x_1+y_2\cdot\frac{1-(-1/2)^{n-1}}{1-(-1/2)}=a+(b-a)\cdot\frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]\quad(n=2,3,\cdots)$$

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a+\frac{2}{3}(b-a)=\frac{a+2b}{3}$$

□

**149.** 设 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 为由以下各式

$$x_0>0,\quad x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

所确定的数列. 求证：

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1 \tag{149.1}$$

证明. 如果 $x_0 = 1$，则

$$\forall n \in \mathbb{N} : x_n = 1$$

所以命题 (149.1) 成立.

如果 $x_0 \neq 1$，则

$$x_1 > 1$$

又因为若 $x_n > 0$ 且 $x_n \neq 1$，则 $x_{n+1} > 1$

因此

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\} : x_n > 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\} : x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_n} - x_n\right) < 0$$

从而数列 $x_n$ 存在极限（最终单调递减数列存在下界）. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a\ (1 \leqslant a \leqslant x_1)$，有

$$a = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} x_n + \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$$

解得

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a = 1$$

□

**150.** 证明：由下列各式

$$x_1 = a > 0, \quad y_1 = b > 0, \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$$

所确定的数列 $x_n$ 和 $y_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 有共同的极限，即

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$$

证明. 因为算数平均数大于等于几何平均数，所以

$$\forall n \geqslant 2 : y_n \geqslant x_n$$

所以

$$\forall n \geqslant 2 : y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \leqslant y_n$$

因此数列 $y_n$ 是最终非严格递减数列，有下界 0，所以数列 $y_n$ 的极限存在.

又因为

$$x_n = 2y_{n+1} - y_n$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} 2y_{n+1} - \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} y_n$$

□

## 1.3 函数的极限

**438.** 求极限：

$$\lim_{x\to -8} \frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}} \tag{438.1}$$

证明. 因为

$$\sqrt{1-x}-3 = \frac{-x-8}{\sqrt{1-x}+3} \tag{438.2}$$

$$2+\sqrt[3]{x} = 2\cdot\left(1-\sqrt[3]{-x/8}\right) = 2\cdot\frac{1-(-x/8)}{1+(-x/8)^{1/3}+(-x/8)^{2/3}} = \frac{2+x/4}{1-\sqrt[3]{x}/2+\sqrt[3]{x^2}/4} \tag{438.3}$$

所以只要令 $x=-8+\epsilon$，式 (438.1) 等于

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{\sqrt{9-\epsilon}-3}{2+\sqrt[3]{-8+\epsilon}} = \lim_{\epsilon\to 0}\left(-4\cdot\frac{1-\sqrt[3]{-8+\epsilon}/2+\sqrt[3]{(-8+\epsilon)^2}/4}{\sqrt{9-\epsilon}+3}\right) = -2$$

□

**451.** 求极限：

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-(1+x)}$$

证明. 因为

$$(1+5x)^{1/5} = 1+x-\frac{2}{5}x^2+o(x^2)$$

所以

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-(1+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{-\frac{2}{5}x^2+o(x^2)} = -\frac{5}{2}$$

□

**446.** 求极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{x+x^2}$$

证明. 当 $x\to 0$ 时

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{8+3x-x^2} &= 2\cdot\left(1+\frac{3}{8}x+o(x)\right)^{\frac{1}{3}}\\ &= 2\cdot\left[1+\left(\frac{1}{8}x+\frac{1}{3}o(x)\right)+o\left(\frac{3}{8}x+o(x)\right)\right]\\ &= 2+\frac{1}{4}x+o(x)\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{x+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{4}x+o(x)}{x+o(x)}=\frac{1}{4}$$

□

**补：** 在 $x\to 0$ 时

$$\begin{aligned}\left[a+bx+o(x)\right]^n &= a^n\cdot\left(1+\frac{b}{a}x+o(x)\right)^n\\ &= a^n\cdot\left(1+\frac{nb}{a}x+o(x)\right)\\ &= a^n+(na^{n-1}b)x+o(x)\end{aligned}$$

**499.** 求极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$$

证明.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\tan x-\sin x}{x^3\cdot\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}\right)} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin x\cos x}{x^3\cos x} \\
&= \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x}{x^3} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)-\frac{1}{2}\left(2x-\frac{1}{6}(2x)^3+o(x^3)\right)}{x^3} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

□

**507.** 求极限：

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}$$

证明.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+2/x}{2-1/x}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}0.5^{x^2}=0$$

□

**511.** 求极限

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$$

证明.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}=\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x+1}}=1^1=1$$

□

**523.** 求极限

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$$

证明.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}=\lim_{x\to 0}(\cos x)^{-\cot x}$$

在 $x\to 0$ 时

$$\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$$

$$\cot x=\frac{1}{\tan x}=\frac{1}{x+o(x)}$$

$$(\cos x)^{-\cot x}=\left[\left(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)^{\frac{1}{x^2}}\right]^{-\frac{x^2}{x+o(x)}}$$

所以

$$(\cos x)^{-\cot x}\to\left(\mathrm{e}^{-1/2}\right)^0=1$$

$\square$

**补：**在一个给定的基下，如果 $f(x)\to A\in(0,+\infty)$，$g(x)\to B\in\mathbb{R}$，那么

$$f(x)^{g(x)}\to A^B$$

证明.

$$\lim f(x)^{g(x)}=\exp\Big[\lim\big[\ln f(x)\cdot g(x)\big]\Big]=\exp\Big[\lim[\ln f(x)]\cdot\lim g(x)\Big]=\exp(\ln A\cdot B)=A^B$$

$\square$

**补：**在一个给定的基下，如果函数 $f(x)^{g(x)}$ 收敛，而且 $\tilde{g}(x)\sim g(x)$，那么函数

$$f(x)^{\tilde{g}(x)}$$

也收敛而且拥有相同的极限.

**补：**在 $x\to 0$ 时，

$$\Big(1+kx+o(x)\Big)^{\frac{1}{x+o(x)}}\to\mathrm{e}^k$$

证明. 在基 $x \to 0$ 下讨论

考虑函数

$$\Big(1 + kx + \alpha(x)\Big)^{\frac{1}{x+\beta(x)}}$$

其中

$$\alpha(x), \beta(x) \in o(x)$$

$$\Big(1 + kx + \alpha(x)\Big)^{\frac{1}{x+\beta(x)}} = \left[\Big(1 + kx + \alpha(x)\Big)^{\frac{1}{kx+\alpha(x)}}\right]^{\frac{kx+\alpha(x)}{x+\beta(x)}} \to \mathrm{e}^k$$

□

**545.(b)** 求极限

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\sin x\cos\alpha x}{1+\sin x\cos\beta x}\right)^{\cot^3 x}$$

证明. 考虑极限

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

其中

$$f(x) = \cot^3 x \cdot \ln\left(\frac{1+\sin x\cos\alpha x}{1+\sin x\cos\beta x}\right)$$

在 $x \to 0$ 时有

$$\cot^3 x = \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x} \sim \frac{1}{x^3}$$

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{1+\sin x\cos\alpha x}{1+\sin x\cos\beta x}\right) &= \ln\left(1 + \frac{\sin x(\cos\alpha x - \cos\beta x)}{1+\sin x\cos\beta x}\right) \\
&\sim \frac{\sin x(\cos\alpha x - \cos\beta x)}{1+\sin x\cos\beta x} \\
&\sim x\cdot(\cos\alpha x - \cos\beta x)
\end{aligned}$$

所以

$$f(x) \sim \frac{\cos\alpha x - \cos\beta x}{x^2}$$

而

$$\cos\alpha x - \cos\beta x = \left(1 - \frac{1}{2}\alpha^2 x^2 + o(x^2)\right) - \left(1 - \frac{1}{2}\beta^2 x^2 + o(x^2)\right) = \frac{\beta^2-\alpha^2}{2}x^2 + o(x^2)$$

所以

$$f(x) \to \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2}$$

也即

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\sin x\cos\alpha x}{1+\sin x\cos\beta x}\right)^{\cot^3 x} = \lim_{x\to 0}\exp[f(x)] = \exp\left[\lim_{x\to 0} f(x)\right] = \exp\left(\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}\right)$$

□

**545.(d)** 求极限

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin^2(\pi\cdot 2^x)}{\ln[\cos(\pi\cdot 2^x)]}$$

证明. 令 $t = \pi\cdot 2^x$，再令 $\epsilon = t - 2\pi$，当 $x\to 1$ 时有

$$t \to 2\pi$$

$$\epsilon \to 0$$

$$\sin^2(\pi\cdot 2^x) = \sin^2\epsilon \sim \epsilon^2$$

$$\cos(\pi\cdot 2^x) = \cos\epsilon = 1 - \frac{1}{2}\epsilon^2 + o(\epsilon^2)$$

$$\ln[\cos(\pi\cdot 2^x)] \sim -\frac{1}{2}\epsilon^2$$

所以

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin^2(\pi\cdot 2^x)}{\ln[\cos(\pi\cdot 2^x)]} = -2$$

□

**552.** 求极限

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x}-1) \quad (x>0)$$

证明. 令 $\epsilon = 1/n$，则当 $n\to+\infty$ 时

$$\epsilon \to 0$$

$$n(\sqrt[n]{x}-1) = \frac{x^{0+\epsilon}-x^0}{\epsilon} \to \left.\frac{\mathrm{d}(x^\epsilon)}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \ln x$$

□

**补：** 当 $n \to +\infty$ 时

$$\sqrt[n]{k} = 1 + \frac{\ln k + o(1)}{n}$$

**553.**求极限

$$\lim_{n\to\infty} n^2(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}) \quad (x > 0)$$

证明. 令 $f(n) = \sqrt[n]{x}$.

根据微分中值定理，

$$\forall n \in \mathbb{R} : \exists \xi \in (n, n+1) : f(n+1) - f(n) = f'(\xi)$$

所以

$$\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x} = \frac{\ln x}{\xi^2} \sqrt[\xi]{x}$$

其中 $n < \xi < n+1$

所以

$$n^2(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}) = \frac{n^2}{\xi^2} \sqrt[\xi]{x} \cdot \ln x$$

因为

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 < \frac{n^2}{\xi^2} < 1$$

$$\sqrt[n+1]{x} < \sqrt[\xi]{x} < \sqrt[n]{x}$$

所以当 $n \to +\infty$ 时

$$\frac{n^2}{\xi^2} \to 1$$

$$\sqrt[\xi]{x} \to 1$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} n^2(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}) = \ln x$$

□

**562.** 求极限

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(1 + 2^x) \ln\left(1 + \frac{3}{x}\right)$$

证明. 当 $x \to +\infty$ 时，

$$\ln(1+2^x) = x\ln 2 + \ln\left(\frac{1+2^x}{2^x}\right)$$

因为

$$\frac{1+2^x}{2^x} \to 1$$

所以

$$\frac{\ln\left(\frac{1+2^x}{2^x}\right)}{\ln(1+2^x)} \to 0$$

所以

$$\ln(1+2^x) \sim x\ln 2$$

又因为

$$\ln\left(1+\frac{3}{x}\right) \sim \frac{3}{x}$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(1+2^x)\ln\left(1+\frac{3}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} x\ln 2\cdot\frac{3}{x} = 3\ln 2$$

□

**569.** 求极限

$$\lim_{x\to+0}\left[\ln(x\ln a)\cdot\ln\left(\frac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}}\right)\right] \quad (a>1)$$

证明. 在 $x \to +0$ 时

$$\ln x \to -\infty$$

$$\ln(x\ln a) = \ln x + \ln\ln a$$

$$\frac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}} = \frac{\ln x + \ln a}{\ln x - \ln a} = 1 + \frac{2\ln a}{\ln x - \ln a} \to 1$$

所以

$$\ln\left(\frac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}}\right) \sim \frac{2\ln a}{\ln x - \ln a}$$

所以

$$\lim_{x\to+0}\left[\ln(x\ln a)\cdot\ln\left(\frac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}}\right)\right] = \lim_{x\to+0} 2\ln a\cdot\frac{\ln x + \ln\ln a}{\ln x - \ln a} = 2\ln a$$

□

**575.** 求极限

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^{\alpha+\beta}x}{\sqrt{(1-\sin^{\alpha}x)(1-\sin^{\beta}x)}}\quad(\alpha,\beta>0)$$

证明. 当 $x\to\dfrac{\pi}{2}$ 时 $\sin x\to 1$.

令 $\sin x=1+t$.

$$t\to 0^-$$

$$1-\sin^{\alpha+\beta}x=1-(1+t)^{\alpha+\beta}=1-[1+(\alpha+\beta)t+o(t)]=-(\alpha+\beta)t+o(t)$$

$$(1-\sin^{\alpha}x)(1-\sin^{\beta}x)=\big[-\alpha t+o(t)\big]\big[-\beta t+o(t)\big]$$

$$\frac{1-\sin^{\alpha+\beta}x}{\sqrt{(1-\sin^{\alpha}x)(1-\sin^{\beta}x)}}=\frac{-(\alpha+\beta)t+o(t)}{\sqrt{\big[-\alpha t+o(t)\big]\big[-\beta t+o(t)\big]}}=\frac{\alpha+\beta+o(1)}{\sqrt{[-\alpha+o(1)][-\beta+o(1)]}}$$

所以

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^{\alpha+\beta}x}{\sqrt{(1-\sin^{\alpha}x)(1-\sin^{\beta}x)}}=\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

□

**591.(a)** 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{100}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$$

证明. 当 $x\to 0$ 时

$$\frac{1}{x^2}\to+\infty$$

$$\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}=o\left[\left(\frac{1}{x^2}\right)^{-k}\right]=o\big(x^{2k}\big)=o\big(x^{k}\big)\quad(k>0)$$

$$x^{-100}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}=o\big(x^{k-100}\big)\quad(k>0)$$

令 $k=100$ 则得到

$$\frac{1}{x^{100}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}=o(1)\to 0$$

□

**补：** 当 $n \to +\infty$ 时

$$\forall k > 0 : n^k = o(\mathrm{e}^n), \mathrm{e}^{-n} = o(n^{-k})$$

证明. 因为

$$\frac{\mathrm{e}^n}{n^k} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{n^i}{i!}}{n^k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{n^{i-k}}{i!} > \frac{n^{\lceil k \rceil - k + 1}}{(\lceil k \rceil + 1)!}$$

所以

$$\forall k > 0 : \lim_{n \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^n}{n^k} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^{-k}}{\mathrm{e}^{-n}} \geqslant \lim_{n \to +\infty} \frac{n^{\lceil k \rceil - k + 1}}{(\lceil k \rceil + 1)!} = +\infty$$

也即当 $n \to +\infty$ 时

$$\forall k > 0 : n^k = o(\mathrm{e}^n), \mathrm{e}^{-n} = o(n^{-k})$$

□

**补：** 当 $n \to +\infty$ 时

$$\forall k > 0 : \ln n = o(n^k)$$

当 $x \to 0^+$ 时

$$\forall k > 0 : \ln x = o(x^{-k})$$

证明. 当 $n \to +\infty$ 时

$$\forall j, k > 0 : \mathrm{e}^{n^k} > \left(n^k\right)^j \text{ 最终成立}$$

所以

$$\forall j, k > 0 : n^k > jk \ln n \text{ 最终成立}$$

$$\forall j, k > 0 : \frac{n^k}{k \ln n} > j \text{ 最终成立}$$

所以

$$\forall k > 0 : \frac{n^k}{k \ln n} \to +\infty$$

$$\forall k > 0 : \ln n = \frac{1}{k} o(n^k) = o(n^k)$$

□

**591.(b)** 求极限

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x$$

证明. 当 $x \to 0^+$ 时

$$x^{-1} \to +\infty$$

所以

$$x \ln x = \frac{\ln x}{x^{-1}} \sim \frac{(\ln x)'}{(x^{-1})'} = \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = -x \to 0$$

□

**611.** 已知

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x$$

求证

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) = \mathrm{e}^x$$

证明.

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 + \sum_{i=1}^{n} \left[\prod_{k=0}^{i-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \cdot \frac{x^i}{i!}\right]$$

令

$$E_n = 1 + \sum_{i=1}^{n} \left[\prod_{k=0}^{i-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \cdot \frac{x^i}{i!}\right]$$

$$S_n = 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{x^i}{i!}$$

因为

$$E_n < S_n$$

所以

$$\mathrm{e}^x = \lim_{n\to\infty} E_n \leqslant \lim_{n\to\infty} S_n \tag{611.1}$$

对于任意的 $p \in \mathbb{N}^*$

$$E_n = 1 + \sum_{i=1}^{p} \left[\prod_{k=0}^{i-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \cdot \frac{x^i}{i!}\right] + \sum_{i=p+1}^{n} \left[\prod_{k=0}^{i-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \cdot \frac{x^i}{i!}\right]$$

因为

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{p} \left[\prod_{k=0}^{i-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \cdot \frac{x^i}{i!}\right] = \sum_{i=1}^{p} \frac{x^i}{i!}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} E_n \geqslant S_p$$

也即

$$\forall p \in \mathbb{N}^* : \mathrm{e}^x \geqslant S_p$$

从而

$$\lim_{p\to\infty} S_p \leqslant \mathrm{e}^x \tag{611.2}$$

结合 (611.1), (611.2) 式得到

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \mathrm{e}^x$$

□

**612.** 求极限

$$\lim_{n\to\infty} n\sin(2\pi\mathrm{e}n!)$$

证明. 因为

$$\mathrm{e} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} + \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : n!\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} \in \mathbb{N}^*$$

所以

$$n\sin(2\pi\mathrm{e}n!) = n\sin\left(2n!\pi\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}\right)$$

又因为

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!} &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots \\ &< \frac{1}{n!n} + \frac{1}{n!n^2} + \cdots \\ &= \frac{1}{n!n}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n}}\end{aligned}$$

□

**631.** 设

$$\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=1$$

其中 $\psi(x)>0$，再设 $n\to\infty$ 时 $\alpha_{mn}\rightrightarrows 0$, $\alpha_{mn}\neq 0$ $(m=1,2,\cdots,n)$，换言之

$$\lim_{n\to\infty}\max\Big\{|\alpha_{mn}|\ \Big|\ m=1,2,\cdots,n\Big\}=0$$

以及存在正整数 $N$ 使得对于任意满足 $n>N,m\leqslant n$ 的正整数 $m,n$ 有$\alpha_{mn}\neq 0$.

求证：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\varphi(\alpha_{in})=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\psi(\alpha_{in}) \tag{631.1}$$

此处假定等式 (1) 右端的极限收敛.

证明. 当 $x\to 0$ 时

$$\varphi(x)=\psi(x)+\gamma(x)\psi(x)$$

其中 $\lim\limits_{x\to 0}\gamma(x)=0$

证明式 (631.1) 成立只要证明

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\gamma(\alpha_{in})\psi(\alpha_{in})=0 \tag{631.2}$$

因为在相应的基下 $\alpha_{mn}\rightrightarrows 0,\alpha_{mn}\neq 0,\gamma(x)\to 0$，用 $\varepsilon$ 语言表述为

$$\forall\varepsilon_1>0:\exists N\in\mathbb{N}^*:\forall n>N:\forall m=1,2,\cdots,n:\alpha_{mn}\in\mathring{U}^{\varepsilon_1}(0)$$

$$\forall\varepsilon_2>0:\exists\delta>0:\forall x\in\mathring{U}^{\delta}(0):\gamma(x)\in U^{\varepsilon_2}(0)$$

所以（经过一些逻辑思考）不难得到

$$\forall\varepsilon>0:\exists N\in\mathbb{N}^*:\forall n>N:\forall m=1,2,\cdots,n:\gamma(\alpha_{mn})\in U^{\varepsilon}(0)$$

所以（再经过一些逻辑思考）可以得到

$$\lim_{n\to\infty}\max\Big\{|\gamma(\alpha_{in})|\ \Big|\ m=1,2,\cdots,n\Big\}=0 \tag{631.3}$$

又因为对于任意的正整数 $n$ 有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\gamma(\alpha_{in})\psi(\alpha_{in})\right|\leqslant\max\Big\{|\gamma(\alpha_{in})|\ \Big|\ m=1,2,\cdots,n\Big\}\cdot\sum_{i=1}^{n}\psi(\alpha_{in})$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{i=1}^{n}\gamma(\alpha_{in})\psi(\alpha_{in})\right| \leqslant \lim_{n\to\infty}\left[\max\left\{|\gamma(\alpha_{in})| \;\middle|\; m=1,2,\cdots,n\right\}\right]\cdot\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\psi(\alpha_{in})$$

根据上式[3]、式 (631.3) 以及极限

$$\sum_{i=1}^{n}\psi(\alpha_{in})$$

收敛的条件可得式 (631.2) 成立. □

**补：**在一个给定的基 $x\to A$ 下，如果对于任意的正整数 $i$，$f_i(x)\neq 0$ 最终成立，那么

$$\forall n\in\mathbb{N}^*:\sum_{i=1}^{n}o(f_i(x)) = o\left(\sum_{i=1}^{n}|f_i(x)|\right)$$

证明. 使用数学归纳法，先讨论 2 个函数的情况，不妨认为 $f(x),g(x)>0$.

要证明（认为基已经提前给定）

$$o(f(x))+o(g(x)) = o(f(x)+g(x))$$

只要证明在这个基下对于任意满足 $\alpha(x),\beta(x)=o(1)$ 的函数 $\alpha(x),\beta(x)$ 下式成立：

$$\alpha(x)\frac{f(x)}{f(x)+g(x)}+\beta(x)\frac{g(x)}{f(x)+g(x)} = o(1)$$

令 $\gamma(x)=|\alpha(x)|+|\beta(x)|$，有

$$\gamma(x)=o(1)$$

$$\left|\alpha(x)\frac{f(x)}{f(x)+g(x)}+\beta(x)\frac{g(x)}{f(x)+g(x)}\right| < \gamma(x)\frac{f(x)}{f(x)+g(x)}+\gamma(x)\frac{g(x)}{f(x)+g(x)} = \gamma(x) = o(1)$$

得证.

数学归纳法剩下的步骤略. □

**637.3.** 已知

$$\lim_{n\to\infty}x_n = 0$$

$$|\alpha|<1$$

[3] 因为公式太长就写不下公式编号了

求极限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\alpha^{n-i}x_i$$

证明. 令 $T=\max\{|x_n|\}$，则

$$\forall\varepsilon>0:\exists N\in\mathbb{N}^*:\forall n>N:\left|\sum_{i=0}^{n}\alpha^{n-i}x_i\right|\leqslant\left|\sum_{i=0}^{N}\alpha^{n-i}T\right|+\left|\sum_{i=N+1}^{n}\alpha^{n-i}\varepsilon\right|\leqslant T\left|\frac{\alpha^{n-N}}{1-\alpha}\right|+\left|\frac{\varepsilon}{1-\alpha}\right|$$

所以

$$\forall\varepsilon>0:\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{i=0}^{n}\alpha^{n-i}x_i\right|<\left|\frac{\varepsilon}{1-\alpha}\right|$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\alpha^{n-i}x_i=0$$

□

**637.4.** 数列 $x_n$ 按下述方式给定：

$$x_0=1,\quad x_n=\frac{1}{1+x_{n-1}}\quad(n=1,2,\cdots)$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

证明. 先假设数列 $x_n$ 的极限 $x$ 存在.

通过

$$x=\frac{1}{1+x}$$

可以解得

$$x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

因为数列 $x_n$ 是恒正的，所以如果极限存在，则极限为 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

现在证明数列 $x_n$ 的极限的确存在.

先令 $\gamma=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，考虑新数列 $x_n-\gamma$.

因为

$$x_n=\frac{1}{1+x_{n-1}}$$

所以

$$x_n - \gamma = \frac{1}{1+x_{n-1}} - \frac{1}{1+\gamma} = \frac{\gamma - x_{n-1}}{(1+x_{n-1})(1+\gamma)}$$

从而

$$|x_n - \gamma| < \left|\frac{x_{n-1} - \gamma}{1+\gamma}\right|$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} x_n - \gamma = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \gamma = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

□

## 1.4 函数的连续性

**734.** 求证：狄利克雷函数

$$\chi(x) = \lim_{m\to\infty}\left[\lim_{n\to\infty}\cos^n(\pi m! x)\right]$$

处处不连续.

证明. 对于任意一个有理数 $x$，可以求出它的最简分数形式 $p/q$，也即

$$x = \frac{p}{q} \quad p\in\mathbb{Z} \quad q\in\mathbb{N}^* \quad \gcd(p,q)=1$$

因为 $(q+2)!x = p(q+1)(q+2)$ 是一个偶数，所以

$$\forall m \geqslant q+2 : 2 \mid m!x$$

$$\forall m \geqslant q+2 : \cos(\pi m! x) = 1$$

所以

$$\forall m \geqslant q+2 : \lim_{n\to\infty}\cos^n(\pi m! x) = 1$$

$$\lim_{m\to\infty}\left[\lim_{n\to\infty}\cos^n(\pi m! x)\right] = 1$$

对于任意一个无理数 $x$，

$$\forall m \in \mathbb{N}^* : |\cos(\pi m! x)| < 1$$

所以

$$\forall m \in \mathbb{N}^* : \lim_{n\to\infty} \cos^n(\pi m! x) = 0$$

$$\lim_{m\to\infty} \left[\lim_{n\to\infty} \cos^n(\pi m! x)\right] = 0$$

从而

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$$

所以

$$\forall x \in \mathbb{R} : \forall \delta > 0 : \exists x' \in \mathring{U}^\delta(x) : |\chi(x') - \chi(x)| = 1$$

也即函数 $\chi$ 在 $\mathbb{R}$ 上处处不连续. □

**747.** 求证：若函数 $f(x)$ 是连续的，则函数

$$f_c(x) = \begin{cases} f(x) & f(x) \leqslant c \\ c & f(x) > c \end{cases}$$

也是连续的.

*证明1.* 令

$$\varphi_c(x) = \begin{cases} x & x \leqslant c \\ c & x > c \end{cases}$$

则 $f_c(x) = \varphi_c(f(x))$.

又因为 $f(x)$ 和 $\varphi_c(x)$ 都是连续函数，所以 $f_c(x)$ 也是连续函数. □

*证明2.* 考虑 $f_c(x)$ 在 $x_0$ 处的连续性.

如果 $f(x_0) < c$，那么存在一个 $x_0$ 的邻域 $U$ 使得在这个邻域内 $f_c(x) = f(x)$，所以 $f_c(x)$ 在 $x_0$ 处连续.

如果 $f(x_0) > c$，那么存在一个 $x_0$ 的邻域 $U$ 使得在这个邻域内 $f_c(x) = c$，所以 $f_c(x)$ 在 $x_0$ 处连续.

现在讨论 $f(x_0) = c$ 的情况.

函数 $f_c(x)$ 在 $x_0$ 处连续当且仅当 $\lim\limits_{x\to x_0} f_c(x) - f_c(x_0) = 0$.

而

$$|f_c(x) - f_c(x_0)| \leqslant \max\{f(x) - c, c - c\} = f(x) - c$$

所以

$$\left|\lim_{x\to x_0} f_c(x)-f(x_0)\right| \leqslant \lim_{x\to x_0} f(x)-f(x_0)=0$$

所以 $f_c(x)$ 处处连续. □

**748.** 求证：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $E=[a,b]$ 上连续，则函数

$$m(x)=\inf_{a\leqslant\xi\leqslant x}\{f(\xi)\}$$

在 $E$ 上也是连续的.

证明. 首先容易得出

$$\forall x\in[a,b]: f(x)\geqslant m(x)$$

要证明函数 $m(x)$ 在 $x_0$ 处连续只要证明

$$\lim_{\delta\to 0^+}\omega[m(x),U_E^\delta(x_0)]=0$$

如果在某一点 $x_0$ 处有 $f(x_0)>m(x_0)$，那么存在一个 $x_0$ 处的邻域 $U(x_0)$ 使得在这个邻域内 $f(x)>m(x_0)$，也即

$$\forall x\in U(x_0): m(x)=m(x_0)$$

所以函数 $m(x)$ 在 $x_0$ 处连续.

如果在某一点 $x_0$ 处有 $f(x_0)=m(x_0)$，那么对于任意满足 $x_0\leqslant x\leqslant b$ 的点都有

$$m(x)=\inf_{x_0\leqslant\xi\leqslant x}\{f(\xi)\}$$

所以有

$$\forall\delta>0:\omega[m(x),U_E^\delta(x_0)]\leqslant\omega[f(x),U_E^\delta(x_0)]$$

又因为 $f(x)$ 是连续函数，从而

$$\lim_{\delta\to 0^+}\omega[f(x),U_E^\delta(x_0)]=0$$

所以

$$\lim_{\delta\to 0^+}\omega[m(x),U_E^\delta(x_0)]=0$$

□

**750.** 设函数 $f$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义且有界. 求证：函数

$$m(x)=\inf_{a\leqslant\xi<x}\{f(\xi)\}$$

在闭区间 $[a,b]$ 上是左连续的.

证明. 因为 $m(x)$ 是非严格单调减函数，所以在任意一点的左极限的确存在且

$$\forall x_0\in(a,b]:\lim_{x\to x_0^-}m(x)=\inf_{a\leqslant\xi<x_0}\{m(\xi)\}$$

设

$$\inf_{a\leqslant\xi<x_0}\{m(\xi)\}=A(x_0)$$

因为

$$\forall x\in[a,x_0):A(x_0)\leqslant m(x)\leqslant f(x)$$

所以

$$A(x_0)\leqslant\inf_{a\leqslant\xi<x_0}\{f(\xi)\}$$

又因为

$$\forall\varepsilon>0:\exists x'\in[a,x_0):m(x')<A(x_0)+\varepsilon$$

所以

$$\forall\varepsilon>0:\exists x''\in[a,x_0):f(x'')<A(x_0)+\varepsilon$$

综上可得

$$\forall\varepsilon>0:A(x_0)\leqslant\inf_{a\leqslant\xi<x_0}\{f(\xi)\}<A(x_0)+\varepsilon$$

所以

$$m(x_0)=\inf_{a\leqslant\xi<x_0}\{f(\xi)\}=A(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}m(x)$$

□

**752.** 设函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上连续并有界. 求证：对于任何数 $T$，可求得数列 $x_n\to+\infty$ 使

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n+T)-f(x_n)=0$$

证明. 令函数 $g(x)=f(x+T)-f(x)$，易得 $g(x)$ 是一个连续函数.

对于一个正实数 $x'$，按照 $g(x'+nT)$ 的值分为两类，用下面的方式定义集合 $A,B$.

如果

$$\forall n\in\mathbb{N}^*: g(x'+nT)\cdot g(x'+T)>0 \tag{752.1}$$

那么 $x'\in A$，否则 $x'\in B$.

易得 $A\cap B=\varnothing, A\cup B=\mathbb{R}^+$.

如果 $A=\varnothing$，那么

$$\forall x'\in B=\mathbb{R}^+:\exists x''\geqslant x'+T: g(x'')=0$$

所以可以找到一个数列 $x_n$ 使得

$$\forall n\in\mathbb{N}^*: \big(g(x_n)=0\big)\wedge\big(x_{n+1}-x_n\geqslant T\big)$$

从而满足题意.

如果 $A\neq\varnothing$，那么随意从 $A$ 中取一个元素 $x'$ 构建数列 $x_n=x'+nT$.

因为 $x'\in A$，所以满足 (752.1) 式，所以

$$\forall n\in\mathbb{N}^*: \left|\sum_{k=1}^{n} g(x'+kT)\right|=\sum_{k=1}^{n}|g(x'+kT)|=\sum_{k=1}^{n}|g(x_k)|$$

因为

$$f[x'+(n+1)T]=f(x'+T)+\sum_{k=1}^{n} g(x'+kT)$$

有界，所以

$$\sum_{k=1}^{n}|g(x_k)|$$

有界，从而

$$\lim_{n\to\infty} g(x_k)=0$$

满足题意. □

**753.** 设 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 为定义在 $\mathbb{R}$ 上的连续周期函数，且

$$\lim_{x\to+\infty}[\varphi(x)-\psi(x)]=0$$

求证：$\varphi(x)\equiv\psi(x)$.

## 1.5 函数的一致连续性

**791.** 求证：若函数 $f(x)$ 是定义在区间 $E=[0,+\infty)$ 上的连续函数，而且极限

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

存在且收敛，则函数 $f(x)$ 在 $E$ 上一致连续.

证明. 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 收敛，所以对于任意小的正实数 $\varepsilon$，总存在实数 $N$ 使得

$$\omega\big[f(x),(N,+\infty)\big]<\varepsilon$$

也即

$$\forall x',x''\in(N,+\infty):|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

又因为函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,N+1]$ 上一定一致收敛，因此存在 $\delta\in(0,1)$ 使得对于任意满足 $x',x''\in[0,N+1]$ 且 $|x''-x'|<\delta$ 的实数 $x',x''$ 都有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

综上可得

$$\forall\varepsilon>0:\exists\delta\in(0,1):\forall x',x''\in E:(|x''-x'|<\delta)\Rightarrow(|f(x'')-f(x')|<\varepsilon)$$

□

**806.** 求证：对于定义在有限开区间 $E=(a,b)$ 的函数 $f$，能够保持连续性地延拓到闭区间 $[a,b]$ 的充要条件是函数 $f$ 在区间 $(a,b)$ 上一致连续.

证明. 能将函数 $f$ 保持连续性地延拓到闭区间 $[a,b]$ 等价于存在连续函数

$$\tilde{f}:[a,b]\to\mathbb{R} \tag{806.1}$$

使得 $\tilde{f}|_E=f$. 而这又等价于极限 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 都存在且收敛.

先证明必要性“$\Rightarrow$”：

如果延拓性成立，那么满足式 (806.1) 的连续函数 $\tilde{f}$ 存在，因为闭区间上的连续函数一致连续，因此 $\tilde{f}$ 在 $[a,b]$ 上一致连续. 所以在开区间 $E$ 上 $\tilde{f}|_E=f$ 一致连续.

现在证明充分性“$\Leftarrow$”：

如果函数 $f$ 在 $E$ 上一致连续，那么对于任意小的 $\varepsilon$，都存在正实数 $\delta$ 使得

$$\omega[f,U_E^{\delta}(b)]<\varepsilon \tag{806.2}$$

现在对于任何趋于 $b^-$ 的数列 $\{x_n\}$ 都有：对于任意小的 $\delta$，存在正整数 $N$ 使得

$$\forall n > N : x_n \in U_E^{\delta}(b) \tag{806.3}$$

而这时有

$$\forall m, n > N : |f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon \tag{806.4}$$

综合式 (806.2), (806.3), (806.4)，可得

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N}^* : \forall m, n > N : |f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon \tag{806.5}$$

从而数列 $\{f(x_n)\}$ 是柯西数列，存在极限而且收敛.

所以函数 $f$ 在 $b^-$ 处的极限的确存在且收敛. 同理函数 $f$ 在 $a^+$ 处的极限也存在且收敛. □

## 1.6 小结

需要能够处理以下问题：

1. 基本初等函数的极限

$$\lim_{x\to a} f(x)$$

$$\lim_{x\to 0} \mathrm{e}^x$$

2. 初等函数的极限

$$\lim_{x\to a} f(x)$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1+\sin x\cos \alpha x}{1+\sin x\cos \beta x}\right)^{\cot^3 x}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}$$

3. 对无限函数族进行运算之后求极限

$$\lim_{x\to a} F\Big[x, \{f_i(x)\}\Big]$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\big[g(i,n)\big]$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\sqrt[3]{1+\frac{i}{n^2}} - 1\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}\cos\frac{ia}{n\sqrt{n}}$$

4. 简单迭代数列的极限

$$\text{已知 } y_0,\ y_n = f(y_{n-1}), \text{求 } \lim_{n\to\infty} y_n$$

$$\text{已知 } x, y_0, y_1 > 0,\ y_n = y_{n-1}(2 - xy_{n-1}), \text{求 } \lim_{n\to\infty} y_n$$

## 1.7 补充题目

**1*.** 设 $a_1 = 2, a_2 = 3, a_{n+2} = a_{n+1} + \dfrac{1}{\ln a_n}$，求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n\ln a_n}{n}$$

证明. 易得数列 $a_n$ 严格单调增，因此它一定有有限或无限的极限.

如果数列 $a_n$ 存在有限的极限 $\gamma$，那么显然

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n\ln a_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\gamma\ln\gamma}{n} = 0$$

如果当 $n\to\infty$ 时 $a_n\to+\infty$，那么有

$$\begin{aligned}
a_{n+2}\ln a_{n+2} &= \left(a_{n+1} + \frac{1}{\ln a_n}\right)\ln a_{n+2} \\
&= a_{n+1}\cdot\ln\left(a_{n+1} + \frac{1}{\ln a_n}\right) + \frac{\ln a_{n+2}}{\ln a_n} \\
&< a_{n+1}\ln a_{n+1} + \frac{1}{\ln a_n} + (a_{n+2} - a_n) \\
&< a_{n+1}\ln a_{n+1} + \frac{3}{\ln a_n}
\end{aligned}$$

这时 $\Delta(a_n\ln a_n)\to 0^+$.

所以对于任意小的正实数 $\varepsilon$ 都能求出正整数 $N$ 使得对于任意大于 $N$ 的正整数 $n$ 有

$$a_N\ln a_N < a_n\ln a_n < a_N\ln a_N + (n-N)\varepsilon$$

所以

$$\frac{a_n\ln a_n}{n}\to 0$$

综上，极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n\ln a_n}{n}=0$$

$\square$

# 2 一元函数微分学

## 2.1 高阶的导数和微分

**1188.** 设

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

求 $y^{(n)}$.

*证明.*

$$y = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c} \cdot (cx+d)^{-1}$$

设 $z = (cx+d)^{-1}$，有

$$y^{(n)} = \frac{bc-ad}{c} \cdot z^{(n)}$$

通过数学归纳法不难得到

$$z^{(n)} = \frac{n!(-c)^n}{(cx+d)^{n+1}}$$

所以

$$y^{(n)} = (ad-bc) \cdot \frac{n!(-c)^{n-1}}{(cx+d)^{n+1}}$$

□

## 2.2 罗尔定理、拉格朗日定理和柯西定理

**1239.** 设定义在闭区间 $[a,b]$ 上的函数 $f$ 在定义域上有连续的 $p+q$ 阶导数，在 $(a,b)$ 上有 $p+q+1$ 阶导数，并且

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(p)}(a) = 0$$

$$f(b) = f'(b) = \cdots = f^{(q)}(b) = 0$$

求证：存在 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$f^{(p+q+1)}(\xi) = 0$$

*证明.* 不失一般性地，认为 $p \leqslant q$.

考虑 $f^{(n)}(x)$ 在 $E$ 上的零点个数，用 $Z(n)$ 表示.

因为 $f(a) = f(b) = 0$，所以 $Z(0) \geqslant 2$.

又因为 $f(a)=f(b)$，所以一定存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$，从而 $Z(1)\geqslant 3$.

以此类推，可以得到 $Z(p)\geqslant p+2$.

因为 $f^{(n)}(x)$ 的任意两个零点之间一定有 $f^{(n+1)}(x)$ 的零点，再加上当 $p\leqslant n\leqslant q$ 时 $f^{(n)}(b)=0$，可以得到

$$\forall n\in[p,q]:Z(n)\geqslant Z(n-1)$$

从而

$$Z(q)\geqslant Z(p)\geqslant p+2$$

然后有

$$\forall n\in\mathbb{N}^*:Z(n)\leqslant Z(n-1)-1$$

所以

$$Z(p+q+1)\geqslant Z(q)-(p+1)\geqslant(p+2)-(p+1)=1$$

而这意味着在 $E$ 上有 $f^{(p+q+1)}(x)$ 的零点. □

**1242.** 求证：切比雪夫-拉盖多多项式

$$L_n(x)=\mathrm{e}^x\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n\mathrm{e}^{-x})$$

的所有实根都是正数.

证明. 先求出该多项式的具体形式

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{n!}{k!}\right)^2\cdot\frac{(-x)^k}{(n-k)!}$$

然后可以发现当 $x$ 为负数时该求和的每一项都是正数，因此它的根一定不是负数. □