

# 数学分析

陈程

2024 年 2 月 11 日

## 目录

<b>1</b>	<b>一些通用的数学概念与记号</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>准备工作</b>	<b>3</b>
2.1	广义实数	3
2.2	函数	4
2.2.1	定义	4
2.2.2	基本定理	4
<b>3</b>	<b>极限</b>	<b>6</b>
3.1	数列的极限	6
3.1.1	定义	6
3.1.2	基本定理	7
3.1.3	有趣的推论	8
3.2	函数的极限	9
3.2.1	定义	9
3.2.2	基本定理	11
3.2.3	有趣的推论	13
3.2.4	例题	13
<b>4</b>	<b>连续函数</b>	<b>15</b>
4.1	定义	15
4.2	基本定理	15

## 1 一些通用的数学概念与记号

略

## 2 准备工作

### 2.1 广义实数

**定义 1.** 定义广义实数  $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ .<sup>1</sup>

**定义 2.1.** 对于实数  $a$ , 正实数  $\delta$ ,

$$U^\delta(a) := \{x \mid |x - a| < \delta\} = (a - \delta, a + \delta)$$

**定义 2.2.** 对于正实数  $\delta$ ,

$$U^\delta(+\infty) := (\delta, +\infty)$$

$$U^\delta(-\infty) := (-\infty, -\delta)$$

**定义 2.3.** 对于广义实数  $a$ , 正实数  $\delta$ ,

$$\mathring{U}^\delta(a) := U^\delta(a) \setminus \{a\}$$

**定义 2.4.** 对于数集<sup>2</sup>  $E$ 、实数  $a$  和正实数  $\delta$ ,

$$U_E^\delta(a) := U^\delta(a) \cap E$$

**定义 2.5.** 对于数集  $E$ 、实数  $a$  和正实数  $\delta$ ,

$$\mathring{U}_E^\delta(a) := \mathring{U}^\delta(a) \cap E$$

**定义 3.** 对于数集  $E$  和广义实数  $a$ , 如果

$$\forall \delta > 0 : \mathring{U}_E^\delta(a) \neq \emptyset$$

则称  $a$  是数集  $E$  的极限点.

---

<sup>1</sup>这里先不给出  $+\infty, -\infty$  的具体性质, 只要明确  $+\infty, -\infty \notin \mathbb{R}$  且  $+\infty \neq -\infty$  即可

<sup>2</sup>实数集的子集

## 2.2 函数

### 2.2.1 定义

**定义 1.** 设  $\odot$  是实数上<sup>3</sup>的  $n(n \geq 1)$  元运算,  $f_1, f_2, \dots, f_n$  都是函数且  $\bigcap_{1 \leq i \leq n} D(f_i) \neq \emptyset$ .  $\odot(f_1, f_2, \dots, f_n)$  是由下式

$$D(\odot(f_1, f_2, \dots, f_n)) = \bigcap_{1 \leq i \leq n} D(f_i)$$

$$\forall x \in D(\odot(f_1, f_2, \dots, f_n)) : \odot(f_1, f_2, \dots, f_n)(x) = \odot(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$$

所确定的函数. 因此  $\odot$  也是函数上的  $n$  元运算.

**定义 2.** 设  $\odot$  是函数上的  $n(n \geq 1)$  元运算,  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$  都是函数集 (由函数组成的集合).

$$\odot(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n) := \{\odot(f_1, f_2, \dots, f_n) \mid f_i \in \mathcal{A}_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

因此  $\odot$  也是函数集上的  $n$  元运算.

**定义 3.** 设  $\odot$  是函数集上的运算, 这里以二元运算为例, 对于函数  $f$  和函数集  $\mathcal{A}$ ,

$$\odot(f, \mathcal{A}) := \odot(\{f\}, \mathcal{A})$$

$$\odot(\mathcal{A}, f) := \odot(\mathcal{A}, \{f\})$$

因此  $\odot$  也是函数与函数集之间的运算.

### 2.2.2 基本定理

**定理 1.** 对于函数集  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ ,

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = \mathcal{B} + \mathcal{A}$$

$$\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$$

**定理 2.** 对于函数集  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ ,

$$\mathcal{A} + (\mathcal{B} + \mathcal{C}) = (\mathcal{A} + \mathcal{B}) + \mathcal{C} \tag{1}$$

---

<sup>3</sup>该定义很容易推广, 不过数学分析不会用到复数

$$\mathcal{A}(\mathcal{BC}) = (\mathcal{AB})\mathcal{C} \quad (2)$$

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})\mathcal{C} \subseteq \mathcal{AC} + \mathcal{BC} \quad (3)$$

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B}) \circ \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A} \circ \mathcal{C} + \mathcal{B} \circ \mathcal{C} \quad (4)$$

$$\mathcal{A} \circ (\mathcal{B} + \mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A} \circ \mathcal{B} + \mathcal{A} \circ \mathcal{C} \quad (5)$$

## 3 极限

### 3.1 数列的极限

#### 3.1.1 定义

**定义 1.** 定义域为正整数集  $\mathbb{N}^*$  的函数被称为数列<sup>4</sup>. 对于数列  $f$ ,  $f(n)$  被称为数列  $f$  的第  $n$  项, 如果该数列的因变量是  $x$ , 那么也常把  $f(n)$  记作  $x_n$ .

**补:** 如果想强调某一数列 (函数) 的因变量, 有时也用  $f_{*x}$  来表示以  $x$  作为因变量的数列  $f$ .

**定义 2.** 定义  $\lim$  是一个关系, 其部分性质由下面给出:

设  $f$  是一个数列,  $(f, R) \in \lim \Rightarrow R \in \overline{\mathbb{R}}$ .

对于数列  $f$ , 广义实数  $R$ ,

$$(f, R) \in \lim \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N}^* : \forall n > N : f(n) \in U^\varepsilon(R)$$

可以证明,  $\lim$  对于数列而言是一个函数 (实际上是一个泛函)<sup>5</sup>. 对于一个数列  $f$ , 若  $f \in D(\lim)$ , 则称  $\lim(f)$  为数列  $f$  的极限, 如果还满足  $\lim(f) \in \mathbb{R}$ , 则称数列  $f$  收敛. 若数列  $f$  不收敛, 则称它发散.

**补:** 对于数列  $f$ ,  $\lim(f)$  也常记作  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$ .

**定义 3.** 对于数列  $f$ , 如果

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N}^* : \forall n, m > N : |f(m) - f(n)| < \varepsilon$$

则称数列  $f$  为柯西数列.

**定义 4.** 设  $f$  是一个数列, 数列  $g$  的值域是正整数集的一个子集且  $g$  严格递增, 可以证明  $f \circ g$  也是一个数列, 称数列  $f \circ g$  为数列  $f$  的一个子列.

**定义 5.** 如果一个数列的某个子列有极限  $A \in \overline{\mathbb{R}}$ , 则称  $A$  是该数列的一个部分极限.

**定义 6.** 对于数列  $f$ ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(i)$$

<sup>4</sup>数列的值域未必是实数域的子集, 但在数学分析中若无特别说明默认讨论的是实值函数与实值数列 (值域是实数域的子集)

<sup>5</sup>只要证明对于一个数列  $f$ ,  $(f, R) \in \lim \wedge (f, R') \in \lim \Rightarrow R = R'$  即可

**定义 7.** 对于数列  $f$ , 构造数列  $g$  满足

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : g(n) = \sum_{i=1}^n f(i)$$

称构造出的数列  $g$  是数列  $f$  的级数或无穷级数.

**定义 8.** 对于数列  $f_{*x}$ , 如果  $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$  是实数, 那么称数列  $f$  的级数绝对收敛.

### 3.1.2 基本定理

**定理 1.** 对于收敛数列  $f, g$ ,

$$\lim(f + g) = \lim(f) + \lim(g)$$

$$\lim(f \cdot g) = \lim(f) \cdot \lim(g)$$

如果还有  $\forall n \in \mathbb{N}^* : g(n) \neq 0$  以及  $\lim(g) \neq 0$ , 那么

$$\lim(f/g) = \lim(f)/\lim(g)$$

**定理 2.** 对于收敛数列  $f, g$ , 如果  $\lim(f) < \lim(g)$ , 那么

$$\exists N \in \mathbb{N}^* : \forall n > N : f(n) < g(n)$$

**定理 3.** 对于收敛数列  $f, g$ , 如果

$$\exists n \in \mathbb{N}^* : \forall n > N : f(n) \geq g(n)$$

那么

$$\lim(f) \geq \lim(g)$$

**定理 4.** 设数列  $f, g, h$  满足

$$\exists n \in \mathbb{N}^* : \forall n > N : f(n) \geq g(n) \geq h(n)$$

$$\lim(f) = \lim(h)$$

那么数列  $g$  的极限也存在并且  $\lim(f) = \lim(g) = \lim(h)$ .

**定理 5.** 数列收敛的充要条件为它是柯西数列.

**定理 6.** 不减数列收敛的充要条件是它上有界.

**定理 7.** 每个数列都含有极限存在的子列.

**定理 8.** 数列极限存在的充要条件是它的任意子列的极限都存在.

**定理 9.** 一个数列的级数收敛的充分条件是该数列的级数绝对收敛.

**定理 10.** 设对于数列  $f$ , 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(n+1)}{f(n)} \right| = \alpha$  存在, 则以下命题成立:

a) 如果  $\alpha < 1$ , 则  $f$  的级数绝对收敛.

b) 如果  $\alpha > 1$ , 则  $f$  的级数发散.

**定理 11.** 如果数列  $f$  是非负不增数列, 那么  $f$  的级数收敛的充要条件是

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k f(2^k)$$

存在且是实数.

**定理 12.**

$$p \in (1, +\infty) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \in \mathbb{R}$$

$$p \in (-\infty, 1] \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = +\infty$$

### 3.1.3 有趣的推论

**定理 13.**

$$e = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \frac{\theta_n}{n}$$

其中  $0 < \theta_n < 3$ .



定理 14.

$$e = 1 + \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!n}$$

其中  $0 < \theta_n < 1$ .

定理 15.

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$$

定理 16. 若

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : y_{n+1} > y_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = A \in \mathbb{R}$$

那么

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = A$$

## 3.2 函数的极限

### 3.2.1 定义

定义 1. 对于函数  $f$  和数集  $E$ ,  $f|_E$  被称为函数  $f$  在集合  $E$  上的限制, 是由以下各式

$$D(f|_E) = D(f) \cap E \neq \emptyset$$

$$\forall x \in D(f|_E) : f|_E(x) = f(x)$$

所确定的函数.

定义 2.  $\lim$  的部分性质由下面给出:

对于函数  $f$  和其定义域的极限点  $a$ ,  $((f, a), R) \in \lim \Rightarrow R \in \overline{\mathbb{R}}$ .

对于函数  $f$  和其定义域  $E$  的极限点  $a$ , 广义实数  $R$ ,

$$((f, a), R) \in \lim \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_E^\delta(a) : f(x) \in U^\varepsilon(R)$$

同样可以证明,  $\lim$  对于函数与函数定义域的极限点所组成的序偶也是一个函数. 对于一个函数  $f$  和其定义域的极限点  $a$ , 若  $(f, a) \in D(\lim)$ , 则称  $\lim(f, a)$  为函数  $f$  在  $a$  处的极限.

补: 对于函数  $f$  和  $f$  定义域的极限点  $a$ ,  $\lim(f, a)$  也常记作  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .

**补:** 对于函数  $f$  和  $f$  定义域的有限极限点  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\lim(f|_{(a,+\infty)}, a)$  (如果存在的话) 也常记作  $\lim(f, a^+)$  或  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ . 类似地定义  $\lim(f, a^-)$  和  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ .

**定义 3.** 对于在数集  $E$  上有定义的函数  $f$ , 称

$$\omega(f; E) := \sup_{x', x'' \in E} (f(x') - f(x'')) := \sup\{f(x') - f(x'') \mid x', x'' \in E\}$$

为函数  $f$  在  $E$  上的振幅.

**定义 4.** 对于函数  $f$  和函数定义域的一个极限点  $a$ ,  $\omega(f; a)$  被称为函数  $f$  在  $a$  处的振幅 (不一定存在),  $\omega(f; a)$  的定义见下:

如果  $a \in \mathbb{R}$

$$\omega(f; a) := \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega(f; U_{D(f)}^\delta)$$

如果  $a \in \{+\infty, -\infty\}$

$$\omega(f; a) := \lim_{\delta \rightarrow +\infty} \omega(f; U_{D(f)}^\delta)$$

**定义 5.1.** 对于函数  $g$  和  $D(g)$  的一个极限点  $a$ ,  $o(g)$  是满足下列性质

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

的函数  $f$  所组成的集合.

**定义 5.2.** 对于函数集  $\mathcal{A}$  和广义实数  $a$ ,

$$o(\mathcal{A}) := \bigcup_{g \in \mathcal{A}} o(g)$$

**定义 6.1.** 对于函数  $g$  和  $D(g)$  的一个极限点  $a$ ,  $O(g)$  是满足下列性质

$$\exists \delta, M > 0 : \forall x \in \mathring{U}_{D(g)}^\delta(a) : \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < M$$

的函数  $f$  所组成的集合.

**定义 6.2.** 对于函数集  $\mathcal{A}$  和广义实数  $a$ ,

$$O(\mathcal{A}) := \bigcup_{g \in \mathcal{A}} O(g)$$

**定义 7.** 对于拥有相同定义域的函数  $f, g$  和广义实数  $R$ , 如果

$$\lim_{x \rightarrow R} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

则称函数  $f$  在趋近于  $R$  时等价于函数  $g$ , 记作  $f \overset{x \rightarrow R}{\sim} g$  或简记为  $f \sim g$ .

### 3.2.2 基本定理

**定理 1.** 如果函数  $f, g$  具有相同的定义域, 而且  $\lim(f, a) = A \in \mathbb{R}, \lim(g, a) = B \in \mathbb{R}$ , 那么

$$\lim(f + g, a) = A + B$$

$$\lim(f \cdot g, a) = A \cdot B$$

如果还有  $\forall x \in D(g) : g(x) \neq 0$  以及  $B \neq 0$ , 那么

$$\lim(f/g, a) = \frac{A}{B}$$

**定理 2.** 若函数  $f, g$  拥有相同的定义域  $E$  并且  $\lim(f, a) < \lim(g, a)$ , 那么

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_E^\delta(a) : f(x) < g(x)$$

**定理 3.** 对于拥有相同定义域  $E$  的函数  $f, g$  和  $E$  的一个极限点  $a$ , 如果两个函数在  $a$  处的极限存在并且

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_E^\delta(a) : f(x) \leq g(x)$$

那么

$$\lim(f, a) \leq \lim(g, a)$$

**定理 4.** 对于函数  $f$  和  $D(f)$  的一个极限点  $a$ , 函数  $f$  在  $a$  处的极限存在且是实数当且仅当

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \omega(f, \overset{\circ}{U}_{D(f)}^\delta) < \varepsilon$$

**定理 5.** 设  $f$  是  $X$  到  $Y \subseteq \mathbb{R}$  的映射,  $g$  是  $Y$  到  $\mathbb{R}$  的映射,

$$\lim(g \circ f, a) = \lim(g, \lim(f, a))$$

成立的充分条件是 (在这些极限都存在的情况下考虑)

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_X^\delta : f(x) \neq \lim(f, a)$$

或者

$$a \in \mathbb{R} \wedge \omega(g; \lim(f, a)) = 0$$

**定理 6.** 对于定义域为  $E$  的不减函数  $f$ ,  $f$  在  $\sup E$  处存在有限的极限的充要条件是函数  $f$  有上界.

**定理 7.** 对于函数集  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ , 非零实数  $A$ ,

$$Ao(\mathcal{A}) = o(\mathcal{A}) \tag{1}$$

$$o(\mathcal{A}) \pm o(\mathcal{A}) \subseteq o(\mathcal{A}) \tag{2}$$

$$o(\mathcal{A}) \cdot \mathcal{B} \subseteq o(\mathcal{A}\mathcal{B}) \tag{3}$$

$$o(\mathcal{A}) \circ \mathcal{B} \subseteq o(\mathcal{A} \circ \mathcal{B}) \tag{4}$$

$$o(\mathcal{A} + \mathcal{B}) \subseteq o(\mathcal{A}) + o(\mathcal{B}) \tag{5}$$

$$o(o(\mathcal{A})) \subseteq o(\mathcal{A}) \tag{6}$$

**定理 8.** 对于函数集  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ , 非零实数  $A$ ,

$$AO(\mathcal{A}) = O(\mathcal{A}) \tag{1}$$

$$O(\mathcal{A}) \pm O(\mathcal{A}) \subseteq O(\mathcal{A}) \tag{2}$$

$$O(\mathcal{A}) \cdot \mathcal{B} \subseteq O(\mathcal{A}\mathcal{B}) \tag{3}$$

$$O(\mathcal{A}) \circ \mathcal{B} \subseteq O(\mathcal{A} \circ \mathcal{B}) \tag{4}$$

$$O(\mathcal{A} + \mathcal{B}) \subseteq O(\mathcal{A}) + O(\mathcal{B}) \tag{5}$$

$$O(O(\mathcal{A})) \subseteq O(\mathcal{A}) \tag{6}$$

## 3.2.3 有趣的推论

定理 9.

$$o(x^m) \circ [Ax^n + o(x^n)] \subseteq o(x^{mn}) \quad (1)$$

$$x^m \circ [Ax^n + o(x^n)] \subseteq Ax^{mn} + o(x^{mn}) \quad (2)$$

特别地,

$$[P_n(x) + o(x^n)] \circ [Q_m(x) + o(x^m)] \subseteq [P_n(x) \circ Q_m(x)] + [o(x^n) + o(x^m)] \quad (3)$$

## 3.2.4 例题

1. 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[7]{1 + \frac{x^2 - x^3}{1 + x^3}} - \cos x}{x^2}$$

解. 已知当  $x \rightarrow 0$  时

$$\sqrt[7]{1+x} \in 1 + \frac{1}{7}x + o(x)$$

$$\frac{x^2 - x^3}{1 + x^3} \in x^2 + o(x^2)$$

$$\cos x \in 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

所以

$$\begin{aligned} \sqrt[7]{1 + \frac{x^2 - x^3}{1 + x^3}} &= \sqrt[7]{1+x} \circ \frac{x^2 - x^3}{1 + x^3} \\ &\in \left[1 + \frac{1}{7}x + o(x)\right] \circ [x^2 + o(x^2)] \\ &\subseteq {}^6 1 + \frac{1}{7}x \circ [x^2 + o(x^2)] + o(x) \circ [x^2 + o(x^2)] \\ &\subseteq {}^7 1 + \frac{1}{7}[x^2 + o(x^2)] + o(x^2) \\ &\subseteq {}^8 1 + \frac{1}{7}x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

$$\sqrt[7]{1 + \frac{x^2 - x^3}{1 + x^3}} - \cos x \in \left[1 + \frac{1}{7}x^2 + o(x^2)\right] - \left[1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right] \subseteq \frac{9}{14}x^2 + o(x^2)$$

<sup>6</sup>根据 2.2.2 节定理 2 式 (4)<sup>7</sup>根据 3.2.3 节定理 9 式 (1), (2)<sup>8</sup>根据 3.2.2 节定理 7 式 (1), (2)

$$\frac{\sqrt[7]{1 + \frac{x^2 - x^3}{1 + x^3}} - \cos x}{x^2} \in \frac{\frac{9}{14}x^2 + o(x^2)}{x^2} \subseteq \frac{9}{14} + o(1)$$

从而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[7]{1 + \frac{x^2 - x^3}{1 + x^3}} - \cos x}{x^2} = \frac{9}{14}$$

□

## 4 连续函数

### 4.1 定义

**定义 1.** 对于定义域为  $E$  的函数  $f$  和  $E$  上的一个极限点  $a \in E$ , 如果

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

则分别称函数  $f$  在  $a$  处连续, 左连续, 右连续.

**定义 2.** 对于在数集  $E$  上有定义的函数  $f$ , 如果它在  $E$  的每个点都连续则称函数  $f$  在  $E$  上连续.

### 4.2 基本定理

**定理 1.** 对于拥有相同定义域的函数  $f, g$ , 如果两个函数都在  $a$  处连续, 则  $f + g$ 、 $f \cdot g$  以及  $f/g$  (当然要  $g(a) \neq 0$ ) 也都在  $a$  处连续.

**定理 2.** 设函数  $f$  在闭区间  $E = [a, b]$  上有定义且连续, 如果  $f(a)f(b) < 0$ , 那么存在  $\xi \in E$  使得  $f(\xi) = 0$ .