

数学分析

陈程

2024 年 2 月 14 日

目录

1	准备工作	2
1.1	广义实数	2
1.2	函数	3
1.2.1	定义	3
1.2.2	基本定理	3
2	极限	5
2.1	数列的极限	5
2.1.1	定义	5
2.1.2	基本定理	6
2.1.3	有趣的推论	7
2.2	函数的极限	8
2.2.1	定义	8
2.2.2	基本定理	10
2.2.3	有趣的推论	12
2.2.4	例题	12
3	连续函数	14
3.1	定义	14
3.2	基本定理	15
3.3	有趣的推论	15

1 准备工作

1.1 广义实数

定义 1. 定义广义实数 $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.¹

定义 2.1. 对于实数 a , 正实数 δ ,

$$U^\delta(a) := \{x \mid |x - a| < \delta\} = (a - \delta, a + \delta)$$

定义 2.2. 对于正实数 δ ,

$$U^\delta(+\infty) := (\delta, +\infty)$$

$$U^\delta(-\infty) := (-\infty, -\delta)$$

定义 2.3. 对于广义实数 a , 正实数 δ ,

$$\mathring{U}^\delta(a) := U^\delta(a) \setminus \{a\}$$

定义 2.4. 对于数集² E 、实数 a 和正实数 δ ,

$$U_E^\delta(a) := U^\delta(a) \cap E$$

定义 2.5. 对于数集 E 、实数 a 和正实数 δ ,

$$\mathring{U}_E^\delta(a) := \mathring{U}^\delta(a) \cap E$$

定义 3. 对于数集 E 和广义实数 a , 如果

$$\forall \delta > 0 : \mathring{U}_E^\delta(a) \neq \emptyset$$

则称 a 是数集 E 的极限点.

¹这里先不给出 $+\infty, -\infty$ 的具体性质, 只要明确 $+\infty, -\infty \notin \mathbb{R}$ 且 $+\infty \neq -\infty$ 即可

²实数集的子集

1.2 函数

1.2.1 定义

定义 1. 设 \odot 是实数上³的 $n(n \geq 1)$ 元运算, f_1, f_2, \dots, f_n 都是函数且 $\bigcap_{1 \leq i \leq n} D(f_i) \neq \emptyset$.
 $\odot(f_1, f_2, \dots, f_n)$ 是由下式

$$x \in D(\odot(f_1, f_2, \dots, f_n)) \Leftrightarrow x \in \bigcap_{1 \leq i \leq n} D(f_i) \wedge (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) \in D(\odot)$$

$$\forall x \in D(\odot(f_1, f_2, \dots, f_n)) : \odot(f_1, f_2, \dots, f_n)(x) = \odot(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$$

所确定的函数. 因此 \odot 也是函数上的 n 元运算.

定义 2. 设 \odot 是函数上的 $n(n \geq 1)$ 元运算, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$ 都是函数集 (由函数组成的集合).

$$\odot(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n) := \{\odot(f_1, f_2, \dots, f_n) \mid f_i \in \mathcal{A}_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

因此 \odot 也是函数集上的 n 元运算.

定义 3. 设 \odot 是函数集上的运算, 这里以二元运算为例, 对于函数 f 和函数集 \mathcal{A} ,

$$\odot(f, \mathcal{A}) := \odot(\{f\}, \mathcal{A})$$

$$\odot(\mathcal{A}, f) := \odot(\mathcal{A}, \{f\})$$

因此 \odot 也是函数与函数集之间的运算.

1.2.2 基本定理

定理 1. 对于函数集 \mathcal{A}, \mathcal{B} ,

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = \mathcal{B} + \mathcal{A}$$

$$\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$$

定理 2. 对于函数集 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$,

$$\mathcal{A} + (\mathcal{B} + \mathcal{C}) = (\mathcal{A} + \mathcal{B}) + \mathcal{C} \tag{1}$$

³该定义很容易推广, 不过数学分析不会用到复数

$$\mathcal{A}(\mathcal{BC}) = (\mathcal{AB})\mathcal{C} \quad (2)$$

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})\mathcal{C} \subseteq \mathcal{AC} + \mathcal{BC} \quad (3)$$

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B}) \circ \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A} \circ \mathcal{C} + \mathcal{B} \circ \mathcal{C} \quad (4)$$

$$\mathcal{A} \circ (\mathcal{B} + \mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A} \circ \mathcal{B} + \mathcal{A} \circ \mathcal{C} \quad (5)$$

2 极限

2.1 数列的极限

2.1.1 定义

定义 1. 定义域为正整数集 \mathbb{N}^* 的函数被称为数列⁴. 对于数列 f , $f(n)$ 被称为数列 f 的第 n 项, 如果该数列的因变量是 x , 那么也常把 $f(n)$ 记作 x_n .

补: 如果想强调某一数列 (函数) 的因变量, 有时也用 f_{*x} 来表示以 x 作为因变量的数列 f .

定义 2. 定义 \lim 是一个关系, 其部分性质由下面给出:

对于函数 f , $(f, R) \in \lim \Rightarrow R \in \overline{\mathbb{R}}$.

对于数列 f , 广义实数 R ,

$$(f, R) \in \lim \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N}^* : \forall n > N : f(n) \in U^\varepsilon(R)$$

可以证明, \lim 对于数列而言是一个函数 (实际上是一个泛函)⁵. 对于一个数列 f , 若 $f \in D(\lim)$, 则称 $\lim(f)$ 为数列 f 的极限, 如果还满足 $\lim(f) \in \mathbb{R}$, 则称数列 f 收敛. 若数列 f 不收敛, 则称它发散.

补: 对于数列 f , $\lim(f)$ 也常记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$.

定义 3. 对于数列 f , 如果

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N}^* : \forall n, m > N : |f(m) - f(n)| < \varepsilon$$

则称数列 f 为柯西数列.

定义 4. 设 f 是一个数列, 数列 g 的值域是正整数集的一个子集且 g 严格递增, 可以证明 $f \circ g$ 也是一个数列, 称数列 $f \circ g$ 为数列 f 的一个子列.

定义 5. 如果一个数列的某个子列有极限 $A \in \overline{\mathbb{R}}$, 则称 A 是该数列的一个部分极限.

定义 6. 对于数列 f ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(i)$$

⁴数列的值域未必是实数域的子集, 但在数学分析中若无特别说明默认讨论的是实值函数与实值数列 (值域是实数域的子集)

⁵只要证明对于一个数列 f , $(f, R) \in \lim \wedge (f, R') \in \lim \Rightarrow R = R'$ 即可

定义 7. 对于数列 f , 构造数列 g 满足

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : g(n) = \sum_{i=1}^n f(i)$$

称构造出的数列 g 是数列 f 的级数或无穷级数.

定义 8. 对于数列 f_{*x} , 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ 是实数, 那么称数列 f 的级数绝对收敛.

2.1.2 基本定理

定理 1. 对于收敛数列 f, g ,

$$\lim(f + g) = \lim(f) + \lim(g)$$

$$\lim(f \cdot g) = \lim(f) \cdot \lim(g)$$

如果还有 $\forall n \in \mathbb{N}^* : g(n) \neq 0$ 以及 $\lim(g) \neq 0$, 那么

$$\lim(f/g) = \lim(f)/\lim(g)$$

定理 2. 对于收敛数列 f, g , 如果 $\lim(f) < \lim(g)$, 那么

$$\exists N \in \mathbb{N}^* : \forall n > N : f(n) < g(n)$$

定理 3. 对于收敛数列 f, g , 如果

$$\exists n \in \mathbb{N}^* : \forall n > N : f(n) \geq g(n)$$

那么

$$\lim(f) \geq \lim(g)$$

定理 4. 设数列 f, g, h 满足

$$\exists n \in \mathbb{N}^* : \forall n > N : f(n) \geq g(n) \geq h(n)$$

$$\lim(f) = \lim(h)$$

那么数列 g 的极限也存在并且 $\lim(f) = \lim(g) = \lim(h)$.

定理 5. 数列收敛的充要条件为它是柯西数列.

定理 6. 不减数列收敛的充要条件是它上有界.

定理 7. 每个数列都含有极限存在的子列.

定理 8. 数列极限存在的充要条件是它的任意子列的极限都存在.

定理 9. 一个数列的级数收敛的充分条件是该数列的级数绝对收敛.

定理 10. 设对于数列 f , 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(n+1)}{f(n)} \right| = \alpha$ 存在, 则以下命题成立:

a) 如果 $\alpha < 1$, 则 f 的级数绝对收敛.

b) 如果 $\alpha > 1$, 则 f 的级数发散.

定理 11. 如果数列 f 是非负不增数列, 那么 f 的级数收敛的充要条件是

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k f(2^k)$$

存在且是实数.

定理 12.

$$p \in (1, +\infty) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \in \mathbb{R}$$

$$p \in (-\infty, 1] \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = +\infty$$

2.1.3 有趣的推论

定理 13.

$$e = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \frac{\theta_n}{n}$$

其中 $0 < \theta_n < 3$.

定理 14.

$$e = 1 + \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!n}$$

其中 $0 < \theta_n < 1$.

定理 15.

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$$

定理 16. 若

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : y_{n+1} > y_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = A \in \mathbb{R}$$

那么

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = A$$

2.2 函数的极限

2.2.1 定义

定义 1. 对于函数 f 和数集 E , $f|_E$ 被称为函数 f 在集合 E 上的限制, 是由以下各式

$$D(f|_E) = D(f) \cap E \neq \emptyset$$

$$\forall x \in D(f|_E) : f|_E(x) = f(x)$$

所确定的函数.

定义 2. \lim 的部分性质由下面给出:

对于函数 f 和广义实数 a , 如果 $((f, a), R) \in \lim$, 那么 a 是函数 f 定义域的极限点, $R \in \mathbb{R}$.

对于函数 f 和其定义域 E 的极限点 a , 广义实数 R ,

$$((f, a), R) \in \lim \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathring{U}_E^\delta(a) : f(x) \in U^\varepsilon(R)$$

同样可以证明, \lim 对于函数与广义实数所组成的序偶也是一个函数. 对于函数 f 和广义实数 a , 若 $(f, a) \in D(\lim)$, 则称 $\lim(f, a)$ 为函数 f 在 a 处的极限.

补：对于函数 f 和广义实数 a ， $\lim(f, a)$ 也常记作 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 。

补：对于函数 f 和实数 a ， $\lim(f|_{(a, +\infty)}, a)$ 也常记作 $\lim(f, a^+)$ 或 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 。类似地定义 $\lim(f, a^-)$ 和 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ 。

定义 3. 对于在数集 E 上有定义的函数 f ，称

$$\omega(f; E) := \sup_{x', x'' \in E} (f(x') - f(x'')) := \sup\{f(x') - f(x'') \mid x', x'' \in E\}$$

为函数 f 在 E 上的振幅。

定义 4. 对于函数 f 和实数 a ，如果 a 是 $D(f)$ 的极限点，则

$$\omega(f; a) := \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega(f; U_{D(f)}^\delta)$$

被称为函数 f 在 a 处的振幅。

定义 5.1. 对于函数 g 和广义实数 a ， $o(g)$ 是所有满足下列性质

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

的函数 f 所组成的集合，在已明确 a 的值的条件下也可以简写为 $o(g)$ 。

定义 5.2. 对于函数集 \mathcal{A} 和广义实数 a ，

$$o(\mathcal{A}) := \bigcup_{g \in \mathcal{A}} o(g)_{x \rightarrow a}$$

定义 6.1. 对于函数 g 和广义实数 a ， $O(g)$ 是所有满足下列性质

$$\exists \delta, M > 0 : \forall x \in \mathring{U}_{D(g)}^\delta(a) : \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < M$$

的函数 f 所组成的集合，在已明确 a 的值的条件下也可以简写为 $O(g)$ 。

定义 6.2. 对于函数集 \mathcal{A} 和广义实数 a ，

$$O(\mathcal{A}) := \bigcup_{g \in \mathcal{A}} O(g)_{x \rightarrow a}$$

定义 7. 对于函数 f, g 和广义实数 R , 如果

$$\lim(f/g, R) = 1$$

则称函数 f 在趋近于 R 时等价于函数 g , 记作 $f \overset{x \rightarrow R}{\sim} g$ 或简记为 $f \sim g$.

2.2.2 基本定理

定理 1. 设 f, g 在 $a \in \overline{\mathbb{R}}$ 处的极限都存在且是实数, a 是 $D(f) \cap D(g)$ 的极限点, 有

$$\lim(f + g, a) = \lim(f, a) + \lim(g, a)$$

$$\lim(f \cdot g, a) = \lim(f, a) \cdot \lim(g, a)$$

如果还有 a 是 $D(f/g)$ 的极限点而且 $\lim(g, a) \neq 0$, 那么

$$\lim(f/g, a) = \frac{\lim(f, a)}{\lim(g, a)}$$

定理 2. 对于函数 f, g 和广义实数 a , 如果 $\lim(f, a) < \lim(g, a)$, 那么令 $E = D(f) \cap D(g)$ 便有

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_E^\delta(a) : f(x) < g(x)$$

定理 3. 对于函数 f, g 和广义实数 a , 如果两个函数在 a 处的极限存在并且令 $E = D(f) \cap D(g)$ 便有

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_E^\delta(a) : f(x) \leq g(x)$$

那么

$$\lim(f, a) \leq \lim(g, a)$$

定理 4. 对于函数 f 和 $D(f)$ 的一个极限点 a , 函数 f 在 a 处的极限存在且是实数当且仅当

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \omega\left(f, \overset{\circ}{U}_{D(f)}^\delta\right) < \varepsilon$$

定理 5. 设 f 是 X 到 $Y \subseteq \mathbb{R}$ 的映射, g 是 Y 到 \mathbb{R} 的映射,

$$\lim(g \circ f, a) = \lim(g, \lim(f, a))$$

成立的充分条件是 (在这些极限都存在的情况下考虑)

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in \mathring{U}_X^\delta : f(x) \neq \lim(f, a)$$

或者

$$\lim(f, a) \in \mathbb{R} \wedge \omega(g; \lim(f, a)) = 0$$

定理 6. 对于定义域为 E 的不减函数 f , f 在 $\sup E$ 处存在有限的极限的充要条件是函数 f 有上界.

定理 7. 对于函数集 \mathcal{A}, \mathcal{B} , 非零实数 A ,

$$Ao(\mathcal{A}) = o(\mathcal{A}) \tag{1}$$

$$o(\mathcal{A}) \pm o(\mathcal{A}) \subseteq o(\mathcal{A}) \tag{2}$$

$$o(\mathcal{A}) \cdot \mathcal{B} \subseteq o(\mathcal{A}\mathcal{B}) \tag{3}$$

$$o(\mathcal{A}) \circ \mathcal{B} \subseteq o(\mathcal{A} \circ \mathcal{B}) \tag{4}$$

$$o(\mathcal{A} + \mathcal{B}) \subseteq o(\mathcal{A}) + o(\mathcal{B}) \tag{5}$$

$$o(o(\mathcal{A})) \subseteq o(\mathcal{A}) \tag{6}$$

定理 8. 对于函数集 \mathcal{A}, \mathcal{B} , 非零实数 A ,

$$AO(\mathcal{A}) = O(\mathcal{A}) \tag{1}$$

$$O(\mathcal{A}) \pm O(\mathcal{A}) \subseteq O(\mathcal{A}) \tag{2}$$

$$O(\mathcal{A}) \cdot \mathcal{B} \subseteq O(\mathcal{A}\mathcal{B}) \tag{3}$$

$$O(\mathcal{A}) \circ \mathcal{B} \subseteq O(\mathcal{A} \circ \mathcal{B}) \tag{4}$$

$$O(\mathcal{A} + \mathcal{B}) \subseteq O(\mathcal{A}) + O(\mathcal{B}) \tag{5}$$

$$O(O(\mathcal{A})) \subseteq O(\mathcal{A}) \tag{6}$$

2.2.3 有趣的推论

定理 9. 当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$o(x^m) \circ [Ax^n + o(x^n)] \subseteq o(x^{mn}) \quad (1)$$

$$x^m \circ [Ax^n + o(x^n)] \subseteq Ax^{mn} + o(x^{mn}) \quad (2)$$

特别地,

$$[P_n(x) + o(x^n)] \circ [Q_m(x) + o(x^m)] \subseteq [P_n(x) \circ Q_m(x)] + [o(x^n) + o(x^m)] \quad (3)$$

2.2.4 例题

1. 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[7]{1 + \frac{x^2 - x^3}{1 + x^3}} - \cos x}{x^2}$$

解. 已知当 $x \rightarrow 0$ 时

$$\sqrt[7]{1+x} \in 1 + \frac{1}{7}x + o(x)$$

$$\frac{x^2 - x^3}{1 + x^3} \in x^2 + o(x^2)$$

$$\cos x \in 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

所以

$$\begin{aligned} \sqrt[7]{1 + \frac{x^2 - x^3}{1 + x^3}} &= \sqrt[7]{1+x} \circ \frac{x^2 - x^3}{1 + x^3} \\ &\in \left[1 + \frac{1}{7}x + o(x)\right] \circ [x^2 + o(x^2)] \\ &\subseteq {}^6 1 + \frac{1}{7}x \circ [x^2 + o(x^2)] + o(x) \circ [x^2 + o(x^2)] \\ &\subseteq {}^7 1 + \frac{1}{7}[x^2 + o(x^2)] + o(x^2) \\ &\subseteq {}^8 1 + \frac{1}{7}x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

$$\sqrt[7]{1 + \frac{x^2 - x^3}{1 + x^3}} - \cos x \in \left[1 + \frac{1}{7}x^2 + o(x^2)\right] - \left[1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right] \subseteq \frac{9}{14}x^2 + o(x^2)$$

⁶根据 2.2.2 节定理 2 式 (4)

⁷根据 3.2.3 节定理 9 式 (1), (2)

⁸根据 3.2.2 节定理 7 式 (1), (2)

$$\frac{\sqrt[7]{1 + \frac{x^2 - x^3}{1 + x^3}} - \cos x}{x^2} \in \frac{\frac{9}{14}x^2 + o(x^2)}{x^2} \subseteq \frac{9}{14} + o(1)$$

从而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[7]{1 + \frac{x^2 - x^3}{1 + x^3}} - \cos x}{x^2} = \frac{9}{14}$$

□

3 连续函数

3.1 定义

定义 1. 对于函数 f 和实数 a , 如果

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

则分别称函数 f 在 a 处连续, 左连续, 右连续.

定义 2. 对于在数集 E 上有定义的函数 f , 如果它在 E 的每个点都连续, 则称函数 f 在 E 上连续.

定义 3. $C(E)$ 表示在所有在数集 E 上连续的函数所组成的集合.

定义 4. 如果函数 f 在 a 处不连续, 则称 a 是函数 f 的间断点.

对于函数 f 的间断点 a , 如果 $\lim(f, a)$ 存在, 则称 a 是函数 f 的可去间断点.

定义 5.1. 如果函数 f 在 a 处不连续但极限

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

都存在, 则称 a 是函数 f 的第一类间断点.

定义 5.2. 如果函数 f 在 a 处不连续但极限

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

至少有一个不存在, 则称 a 是函数 f 的第二类间断点.

定义 6. 对于函数 f 与数集 E , 如果

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x', x'' (|x' - x''| < \delta) : |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

那么称函数 f 在数集 E 上一致连续.

3.2 基本定理

定理 1. 设函数 f, g 在 a 处连续, 如果 a 是 $D(f) \cap D(g)$ 的极限点, 则 $f + g$ 、 $f \cdot g$ 也在 a 处连续. 如果还有 a 是 $D(f/g)$ 的极限点, $g(a) \neq 0$, 那么 f/g 也在 a 处连续.

定理 2. 设 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow \mathbb{R}$, 如果 f 在 a 处连续而且 g 在 $f(a)$ 处连续, 则 $g \circ f$ 在 a 处连续.

定理 3. 设函数 f 在闭区间 $E = [a, b]$ 上有定义且连续, 如果 $f(a)f(b) < 0$, 那么存在 $\xi \in E$ 使得 $f(\xi) = 0$.

定理 4. 在闭区间上连续的函数在该区间上有界. 闭区间上的连续函数取得到最大值也取得到最小值.

定理 5. 在闭区间上连续的函数也在该区间上一致连续.

定理 6. 连续函数的反函数 (如果存在的话) 也连续.

3.3 有趣的推论

定理 1. 如果 a 是单调函数 f 的间断点且 a 不是函数 f 定义域的端点, 则极限

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

至少有一个存在.

定理 2. 单调函数的间断点的集合至多可数.