数学分析

陈程

2024 年 2 月 14 日

目录

1 一些通用的数学概念与记号

略

2 准备工作

2.1 广义实数

定义 1. 定义广义实数 $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.[1]

定义 2.1. 对于实数 a，正实数 δ，

$$U^\delta(a) := \{x \mid |x - a| < \delta\} = (a - \delta, a + \delta)$$

定义 2.2. 对于正实数 δ，

$$U^\delta(+\infty) := (\delta, +\infty)$$

$$U^\delta(-\infty) := (-\infty, -\delta)$$

定义 2.3. 对于广义实数 a，正实数 δ，

$$\mathring{U}^\delta(a) := U^\delta(a) \backslash \{a\}$$

定义 2.4. 对于数集[2] E、实数 a 和正实数 δ，

$$U_E^\delta(a) := U^\delta(a) \cap E$$

定义 2.5. 对于数集 E、实数 a 和正实数 δ，

$$\mathring{U}_E^\delta(a) := \mathring{U}^\delta(a) \cap E$$

定义 3. 对于数集 E 和广义实数 a，如果

$$\forall \delta > 0 : \mathring{U}_E^\delta(a) \neq \varnothing$$

则称 a 是数集 E 的极限点.

---

[1] 这里先不给出 $+\infty, -\infty$ 的具体性质，只要明确 $+\infty, -\infty \notin \mathbb{R}$ 且 $+\infty \neq -\infty$ 即可

[2] 实数集的子集

2.2 函数

2.2.1 定义

定义 1. 设 $\odot$ 是实数上[3]的 $n(n \geqslant 1)$ 元运算，$f_1, f_2, \cdots, f_n$ 都是函数且 $\bigcap\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} D(f_i) \neq \varnothing$. $\odot(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ 是由下式

$$x \in D\big(\odot(f_1, f_2, \cdots, f_n)\big) \Leftrightarrow x \in \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant n} D(f_i) \wedge \big(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)\big) \in D(\odot)$$

$$\forall x \in D\big(\odot(f_1, f_2, \cdots, f_n)\big) : \odot(f_1, f_2, \cdots, f_n)(x) = \odot\big(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)\big)$$

所确定的函数. 因此 $\odot$ 也是函数上的 n 元运算.

定义 2. 设 $\odot$ 是函数上的 $n(n \geqslant 1)$ 元运算，$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n$ 都是函数集（由函数组成的集合）.

$$\odot(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n) := \big\{\odot(f_1, f_2, \cdots, f_n) \bigm| f_i \in \mathcal{A}_i, i = 1, 2, \cdots, n\big\}$$

因此 $\odot$ 也是函数集上的 n 元运算.

定义 3. 设 $\odot$ 是函数集上的运算，这里以二元运算为例，对于函数 f 和函数集 $\mathcal{A}$，

$$\odot(f, \mathcal{A}) := \odot(\{f\}, \mathcal{A})$$

$$\odot(\mathcal{A}, f) := \odot(\mathcal{A}, \{f\})$$

因此 $\odot$ 也是函数与函数集之间的运算.

2.2.2 基本定理

定理 1. 对于函数集 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$，

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = \mathcal{B} + \mathcal{A}$$

$$\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$$

定理 2. 对于函数集 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$，

$$\mathcal{A} + (\mathcal{B} + \mathcal{C}) = (\mathcal{A} + \mathcal{B}) + \mathcal{C} \tag{1}$$

[3]该定义很容易推广，不过数学分析不会用到复数

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C}) = (\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C} \tag{2}$$

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}\mathcal{C}+\mathcal{B}\mathcal{C} \tag{3}$$

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})\circ\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}\circ\mathcal{C}+\mathcal{B}\circ\mathcal{C} \tag{4}$$

$$\mathcal{A}\circ(\mathcal{B}+\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A}\circ\mathcal{B}+\mathcal{A}\circ\mathcal{C} \tag{5}$$

3 极限

3.1 数列的极限

3.1.1 定义

定义 1. 定义域为正整数集 $\mathbb{N}^*$ 的函数被称为数列[4]. 对于数列 f，$f(n)$ 被称为数列 f 的第 n 项，如果该数列的因变量是 x，那么也常把 $f(n)$ 记作 x_n.

补： 如果想强调某一数列（函数）的因变量，有时也用 f_{*x} 来表示以 x 作为因变量的数列 f.

定义 2. 定义 lim 是一个关系，其部分性质由下面给出：

对于函数 f，$(f,R)\in\lim\Rightarrow R\in\overline{\mathbb{R}}$.

对于数列 f，广义实数 R，

$$(f,R)\in\lim\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0:\exists N\in\mathbb{N}^*:\forall n>N:f(n)\in U^\varepsilon(R)$$

可以证明，lim 对于数列而言是一个函数（实际上是一个泛函）[5]. 对于一个数列 f，若 $f\in D(\lim)$，则称 $\lim(f)$ 为数列 f 的*极限*，如果还满足 $\lim(f)\in\mathbb{R}$，则称数列 f *收敛*. 若数列 f 不收敛，则称它*发散*.

补： 对于数列 f，$\lim(f)$ 也常记作 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$.

定义 3. 对于数列 f，如果

$$\forall\varepsilon>0:\exists N\in\mathbb{N}^*:\forall n,m>N:\big|f(m)-f(n)\big|<\varepsilon$$

则称数列 f 为*柯西数列*.

定义 4. 设 f 是一个数列，数列 g 的值域是正整数集的一个子集且 g 严格递增，可以证明 $f\circ g$ 也是一个数列，称数列 $f\circ g$ 为数列 f 的一个*子列*.

定义 5. 如果一个数列的某个子列有极限 $A\in\overline{\mathbb{R}}$，则称 A 是该数列的一个*部分极限*.

定义 6. 对于数列 f，

$$\sum_{n=1}^{\infty}f(n):=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(i)$$

[4] 数列的值域未必是实数域的子集，但在数学分析中若无特别说明默认讨论的是实值函数与实值数列（值域是实数域的子集）

[5] 只要证明对于一个数列 f，$(f,R)\in\lim\wedge(f,R')\in\lim\Rightarrow R=R'$ 即可

定义 7. 对于数列 f，构造数列 g 满足

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : g(n) = \sum_{i=1}^{n} f(i)$$

称构造出的数列 g 是数列 f 的级数或无穷级数.

定义 8. 对于数列 f_{*x}，如果 $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ 是实数，那么称数列 f 的级数绝对收敛.

3.1.2 基本定理

定理 1. 对于收敛数列 f, g，

$$\lim(f+g) = \lim(f) + \lim(g)$$

$$\lim(f \cdot g) = \lim(f) \cdot \lim(g)$$

如果还有 $\forall n \in \mathbb{N}^* : g(n) \neq 0$ 以及 $\lim(g) \neq 0$，那么

$$\lim(f/g) = \lim(f)/\lim(g)$$

定理 2. 对于收敛数列 f, g，如果 $\lim(f) < \lim(g)$，那么

$$\exists N \in \mathbb{N}^* : \forall n > N : f(n) < g(n)$$

定理 3. 对于收敛数列 f, g，如果

$$\exists n \in \mathbb{N}^* : \forall n > N : f(n) \geqslant g(n)$$

那么

$$\lim(f) \geqslant \lim(g)$$

定理 4. 设数列 f, g, h 满足

$$\exists n \in \mathbb{N}^* : \forall n > N : f(n) \geqslant g(n) \geqslant h(n)$$

$$\lim(f) = \lim(h)$$

那么数列 g 的极限也存在并且 $\lim(f) = \lim(g) = \lim(h)$.

定理 5. 数列收敛的充要条件为它是柯西数列.

定理 6. 不减数列收敛的充要条件是它上有界.

定理 7. 每个数列都含有极限存在的子列.

定理 8. 数列极限存在的充要条件是它的任意子列的极限都存在.

定理 9. 一个数列的级数收敛的充分条件是该数列的级数绝对收敛.

定理 10. 设对于数列 f，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{f(n+1)}{f(n)}\right| = \alpha$ 存在，则以下命题成立：
a) 如果 $\alpha < 1$，则 f 的级数绝对收敛.
b) 如果 $\alpha > 1$，则 f 的级数发散.

定理 11. 如果数列 f 是非负不增数列，那么 f 的级数收敛的充要条件是

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k f(2^k)$$

存在且是实数.

定理 12.

$$p \in (1, +\infty) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \in \mathbb{R}$$

$$p \in (-\infty, 1] \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = +\infty$$

3.1.3 有趣的推论

定理 13.

$$\mathrm{e} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \frac{\theta_n}{n}$$

其中 $0 < \theta_n < 3$.

定理 14.

$$\mathrm{e} = 1 + \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!n}$$

其中 $0 < \theta_n < 1$.

定理 15.

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$$

定理 16. 若

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : y_{n+1} > y_n$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = A \in \mathbb{R}$$

那么

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = A$$

3.2 函数的极限

3.2.1 定义

定义 1. 对于函数 f 和数集 E，$f|_E$ 被称为函数 f 在集合 E 上的限制，是由以下各式

$$D(f|_E) = D(f) \cap E \neq \varnothing$$

$$\forall x \in D(f|_E) : f|_E(x) = f(x)$$

所确定的函数.

定义 2. lim 的部分性质由下面给出：

对于函数 f 和广义实数 a，如果 $\big((f,a),R\big) \in \lim$，那么 a 是函数 f 定义域的极限点，$R \in \overline{\mathbb{R}}$.

对于函数 f 和其定义域 E 的极限点 a，广义实数 R，

$$\big((f,a),R\big) \in \lim \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathring{U}_E^{\delta}(a) : f(x) \in U^{\varepsilon}(R)$$

同样可以证明，lim 对于函数与广义实数所组成的序偶也是一个函数. 对于函数 f 和广义实数 a，若 $(f,a) \in D(\lim)$，则称 $\lim(f,a)$ 为函数 f 在 a 处的极限.

补：对于函数 f 和广义实数 a，$\lim(f,a)$ 也常记作 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

补：对于函数 f 和实数 a，$\lim(f|_{(a,+\infty)},a)$ 也常记作 $\lim(f,a^+)$ 或 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$. 类似地定义 $\lim(f,a^-)$ 和 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$.

定义 3. 对于在数集 E 上有定义的函数 f，称

$$\omega(f;E) := \sup_{x',x''\in E}\big(f(x')-f(x'')\big) := \sup\big\{f(x')-f(x'') \mid x',x''\in E\big\}$$

为函数 f 在 E 上的振幅.

定义 4. 对于函数 f 和实数 a，如果 a 是 $D(f)$ 的极限点，则

$$\omega(f;a) := \lim_{\delta\to 0^+}\omega(f;U^{\delta}_{D(f)})$$

被称为函数 f 在 a 处的振幅.

定义 5.1. 对于函数 g 和广义实数 a，$\underset{x\to a}{o}(g)$ 是所有满足下列性质

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

的函数 f 所组成的集合，在已明确 a 的值的情况下也可以简写为 $o(g)$.

定义 5.2. 对于函数集 $\mathcal{A}$ 和广义实数 a，

$$\underset{x\to a}{o}(\mathcal{A}) := \bigcup_{g\in\mathcal{A}}\underset{x\to a}{o}(g)$$

定义 6.1. 对于函数 g 和广义实数 a，$\underset{x\to a}{O}(g)$ 是所有满足下列性质

$$\exists\delta, M>0 : \forall x\in \mathring{U}^{\delta}_{D(g)}(a) : \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < M$$

的函数 f 所组成的集合，在已明确 a 的值的情况下也可以简写为 $o(g)$.

定义 6.2. 对于函数集 $\mathcal{A}$ 和广义实数 a，

$$\underset{x\to a}{O}(\mathcal{A}) := \bigcup_{g\in\mathcal{A}}\underset{x\to a}{O}(g)$$

定义 7. 对于函数 f, g 和广义实数 R，如果

$$\lim(f/g, R) = 1$$

则称函数 f 在趋近于 R 时等价于函数 g，记作 $f \overset{x\to R}{\sim} g$ 或简记为 $f \sim g$.

3.2.2 基本定理

定理 1. 设 f, g 在 $a \in \overline{\mathbb{R}}$ 处的极限都存在且是实数，a 是 $D(f) \cap D(g)$ 的极限点，有

$$\lim(f+g, a) = \lim(f, a) + \lim(g, a)$$

$$\lim(f \cdot g, a) = \lim(f, a) \cdot \lim(g, a)$$

如果还有 a 是 $D(f/g)$ 的极限点而且 $\lim(g, a) \neq 0$，那么

$$\lim(f/g, a) = \frac{\lim(f, a)}{\lim(g, a)}$$

定理 2. 对于函数 f, g 和广义实数 a，如果 $\lim(f, a) < \lim(g, a)$，那么令 $E = D(f) \cap D(g)$ 便有

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in \mathring{U}_E^\delta(a) : f(x) < g(x)$$

定理 3. 对于函数 f, g 和广义实数 a，如果两个函数在 a 处的极限存在并且令 $E = D(f) \cap D(g)$ 便有

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in \mathring{U}_E^\delta(a) : f(x) \leqslant g(x)$$

那么

$$\lim(f, a) \leqslant \lim(g, a)$$

定理 4. 对于函数 f 和 $D(f)$ 的一个极限点 a，函数 f 在 a 处的极限存在且是实数当且仅当

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \omega\left(f, \mathring{U}_{D(f)}^\delta\right) < \varepsilon$$

定理 5. 设 f 是 X 到 $Y\subseteq\mathbb{R}$ 的映射，g 是 Y 到 $\mathbb{R}$ 的映射，

$$\lim(g\circ f,a)=\lim\big(g,\lim(f,a)\big)$$

成立的充分条件是（在这些极限都存在的情况下考虑）

$$\exists\delta>0:\forall x\in\mathring{U}_X^\delta:f(x)\neq\lim(f,a)$$

或者

$$\lim(f,a)\in\mathbb{R}\wedge\omega\big(g;\lim(f,a)\big)=0$$

定理 6. 对于定义域为 E 的不减函数 f，f 在 $\sup E$ 处存在有限的极限的充要条件是函数 f 有上界.

定理 7. 对于函数集 $\mathcal{A},\mathcal{B}$，非零实数 A，

$$Ao(\mathcal{A})=o(\mathcal{A}) \tag{1}$$

$$o(\mathcal{A})\pm o(\mathcal{A})\subseteq o(\mathcal{A}) \tag{2}$$

$$o(\mathcal{A})\cdot\mathcal{B}\subseteq o(\mathcal{A}\mathcal{B}) \tag{3}$$

$$o(\mathcal{A})\circ\mathcal{B}\subseteq o(\mathcal{A}\circ\mathcal{B}) \tag{4}$$

$$o(\mathcal{A}+\mathcal{B})\subseteq o(\mathcal{A})+o(\mathcal{B}) \tag{5}$$

$$o(o(\mathcal{A}))\subseteq o(\mathcal{A}) \tag{6}$$

定理 8. 对于函数集 $\mathcal{A},\mathcal{B}$，非零实数 A，

$$AO(\mathcal{A})=O(\mathcal{A}) \tag{1}$$

$$O(\mathcal{A})\pm O(\mathcal{A})\subseteq O(\mathcal{A}) \tag{2}$$

$$O(\mathcal{A})\cdot\mathcal{B}\subseteq O(\mathcal{A}\mathcal{B}) \tag{3}$$

$$O(\mathcal{A})\circ\mathcal{B}\subseteq O(\mathcal{A}\circ\mathcal{B}) \tag{4}$$

$$O(\mathcal{A}+\mathcal{B})\subseteq O(\mathcal{A})+O(\mathcal{B}) \tag{5}$$

$$O(O(\mathcal{A}))\subseteq O(\mathcal{A}) \tag{6}$$

3.2.3 有趣的推论

定理 9. 当 $x \to 0$ 时，

$$o(x^m) \circ \left[Ax^n + o(x^n)\right] \subseteq o(x^{mn}) \tag{1}$$

$$x^m \circ \left[Ax^n + o(x^n)\right] \subseteq Ax^{mn} + o(x^{mn}) \tag{2}$$

特别地，

$$\left[P_n(x) + o(x^n)\right] \circ \left[Q_m(x) + o(x^m)\right] \subseteq \left[P_n(x) \circ Q_n(x)\right] + \left[o(x^n) + o(x^m)\right] \tag{3}$$

3.2.4 例题

1. 求极限

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[7]{1 + \frac{x^2 - x^3}{1 + x^3}} - \cos x}{x^2}$$

解. 已知当 $x \to 0$ 时

$$\sqrt[7]{1+x} \in 1 + \frac{1}{7}x + o(x)$$
$$\frac{x^2 - x^3}{1 + x^3} \in x^2 + o(x^2)$$
$$\cos x \in 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

所以

$$\begin{aligned}
\sqrt[7]{1 + \frac{x^2 - x^3}{1 + x^3}} &= \sqrt[7]{1+x} \circ \frac{x^2 - x^3}{1 + x^3} \\
&\in \left[1 + \frac{1}{7}x + o(x)\right] \circ \left[x^2 + o(x^2)\right] \\
&\subseteq {}^{6} 1 + \frac{1}{7}x \circ \left[x^2 + o(x^2)\right] + o(x) \circ \left[x^2 + o(x^2)\right] \\
&\subseteq {}^{7} 1 + \frac{1}{7}\left[x^2 + o(x^2)\right] + o(x^2) \\
&\subseteq {}^{8} 1 + \frac{1}{7}x^2 + o(x^2)
\end{aligned}$$

$$\sqrt[7]{1 + \frac{x^2 - x^3}{1 + x^3}} - \cos x \in \left[1 + \frac{1}{7}x^2 + o(x^2)\right] - \left[1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right] \subseteq \frac{9}{14}x^2 + o(x^2)$$

[6]根据 2.2.2 节定理 2 式 (4)
[7]根据 3.2.3 节定理 9 式 (1), (2)
[8]根据 3.2.2 节定理 7 式 (1), (2)

$$\frac{\sqrt[7]{1+\dfrac{x^2-x^3}{1+x^3}}-\cos x}{x^2} \in \frac{\dfrac{9}{14}x^2+o(x^2)}{x^2} \subseteq \frac{9}{14}+o(1)$$

从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[7]{1+\dfrac{x^2-x^3}{1+x^3}}-\cos x}{x^2}=\frac{9}{14}$$

$\square$

4 连续函数

4.1 定义

定义 1. 对于函数 f 和实数 a，如果

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

则分别称函数 f 在 a 处连续，左连续，右连续.

定义 2. 对于在数集 E 上有定义的函数 f，如果它在 E 的每个点都连续，则称函数 f 在 E 上连续.

定义 3. $C(E)$ 表示在所有在数集 E 上连续的函数所组成的集合.

定义 4. 如果函数 f 在 a 处不连续，则称 a 是函数 f 的间断点.

对于函数 f 的间断点 a，如果 $\lim(f,a)$ 存在，则称 a 是函数 f 的可去间断点.

定义 5.1. 如果函数 f 在 a 处不连续但极限

$$\lim_{x\to a^-} f(x), \quad \lim_{x\to a^+} f(x)$$

都存在，则称 a 是函数 f 的第一类间断点.

定义 5.2. 如果函数 f 在 a 处不连续但极限

$$\lim_{x\to a^-} f(x), \quad \lim_{x\to a^+} f(x)$$

至少有一个不存在，则称 a 是函数 f 的第二类间断点.

定义 6. 对于函数 f 与数集 E，如果

$$\forall\varepsilon > 0 : \exists\delta > 0 : \forall x', x''\big(|x' - x''| < \delta\big) : \big|f(x') - f(x'')\big| < \varepsilon$$

那么称函数 f 在数集 E 上一致连续.

4.2 基本定理

定理 1. 设函数 f, g 在 a 处连续，如果 a 是 $D(f) \cap D(g)$ 的极限点，则 $f+g$、$f \cdot g$ 也在 a 处连续. 如果还有 a 是 $D(f/g)$ 的极限点，$g(a) \neq 0$，那么 f/g 也在 a 处连续.

定理 2. 设 $f : X \to Y, g : Y \to \mathbb{R}$，如果 f 在 a 处连续而且 g 在 $f(a)$ 处连续，则 $g \circ f$ 在 a 处连续.

定理 3. 设函数 f 在闭区间 $E = [a, b]$ 上有定义且连续，如果 $f(a)f(b) < 0$，那么存在 $\xi \in E$ 使得 $f(\xi) = 0$.

定理 4. 在闭区间上连续的函数在该区间上有界. 闭区间上的连续函数取得到最大值也取得到最小值.

定理 5. 在闭区间上连续的函数也在该区间上一致连续.

定理 6. 连续函数的反函数（如果存在的话）也连续.

4.3 有趣的推论

定理 1. 如果 a 是单调函数 f 的间断点且 a 不是函数 f 定义域的端点，则极限

$$\lim_{x \to a^-} f(x), \quad \lim_{x \to a^+} f(x)$$

至少有一个存在.

定理 2. 单调函数的间断点的集合至多可数.