МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Университет ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЁТ
по лабораторной работе №6
по дисциплине
«Линейные системы автоматического управления»

по теме:
КРИТЕРИЙ НАЙКВИСТА И СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ
(ВАРИАНТ 12)

Студент:
Группа R3343 *Ткачёв И.Ю.*

Предподаватель:
ассистент *Пашенко А.В.*

Санкт-Петербург
2024

СОДЕРЖАНИЕ

1 ГОДОГРАФ НАЙКВИСТА 3
1.1 Объект №1 3
1.2 Объект №2 6
1.3 Объект №3 10
1.4 Вывод 13

2 КОЭФФИЦИЕНТ УСИЛЕНИЯ 14
2.1 Объект №1 14
2.2 Объект №2 16
2.3 Вывод 19

3 ЗАПАЗДЫВАНИЕ 20
3.1 Объект №1 20
3.2 Объект №2 22
3.3 Вывод 26

4 ВЫВОДЫ 27

1 ГОДОГРАФ НАЙКВИСТА

Рассмотрим передаточную функцию разомкнутой системы 5-го порядка:

$$W_o(s) = \frac{\sum_{i=0}^{5} a_i s^i}{\sum_{i=0}^{5} b_i s^i}$$

Тогда передаточная функция для замкнутой системы будет:

$$W_c(s) = \frac{W_o(s)}{1 + W_o(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{5} a_i s^i}{\sum_{i=0}^{5} (a_i + b_i) s^i}$$

Полюса для разомкнутой системы мы можем задать следующим образом:

$$\sum_{i=0}^{5} b_i s^i = (s - s_{o1})(s - s_{o2})(s - s_{o3})(s - s_{o4})(s - s_{o5})$$

Для замкнутой:

$$\sum_{i=0}^{5} (a_i + b_i) s^i = (s - s_{c1})(s - s_{c2})(s - s_{c3})(s - s_{c4})(s - s_{c5})$$

Тогда коэффициенты a_i для числителя передаточных функций разомкнутой и замкнутой системы, будут равны разности соответствующих коэффициентов их знаментателей:

$$a_i = (a_i + b_i) - b_i$$

, где $(a_i + b_i)$ коэффициенты знаменателя замкнутой системы, b_i - разомкнутой.

1.1 Объект №1

Выберем следующие полюса разомкнутой системы:

$$s_{o1} = -0.5, \quad s_{o2,o3} = -1 \pm 1i, \quad s_{o4,o5} = 2 \pm 0.5i$$

Для замкнутой:

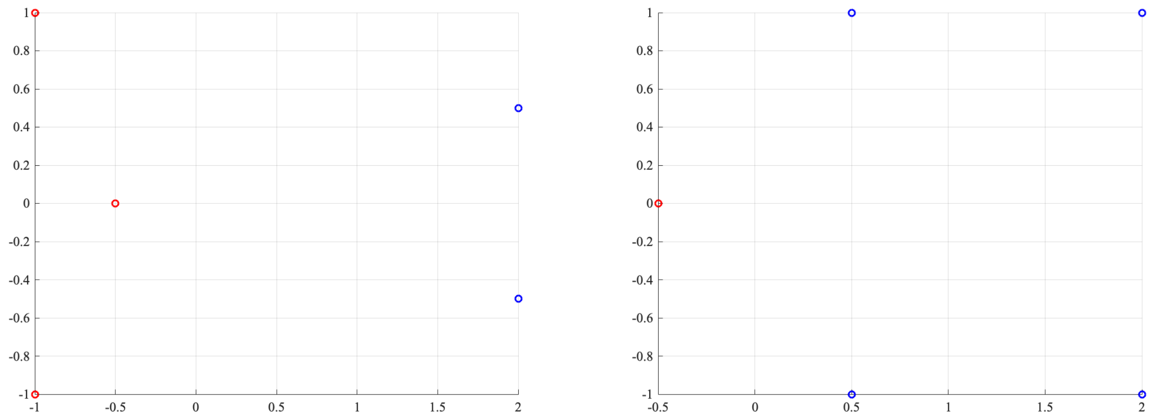
$$s_{c1} = -0.5, \quad s_{c2,c3} = 0.5 \pm 1i, \quad s_{c4,c5} = 2 \pm 1i$$

Получим следующие передаточные функции:

$$W_o(s) = \frac{-3s^4 + \frac{21}{2}s^3 - \frac{9}{2}s^2 - \frac{15}{2}s - \frac{9}{8}}{s^5 - \frac{3}{2}s^4 - \frac{11}{4}s^3 - \frac{3}{8}s^2 + \frac{35}{4}s + \frac{17}{4}}$$

$$W_c(s) = \frac{-3s^4 + \frac{21}{2}s^3 - \frac{9}{2}s^2 - \frac{15}{2}s - \frac{9}{8}}{s^5 - \frac{9}{2}s^4 + \frac{31}{4}s^3 - \frac{39}{8}s^2 + \frac{5}{4}s + \frac{25}{4}}$$

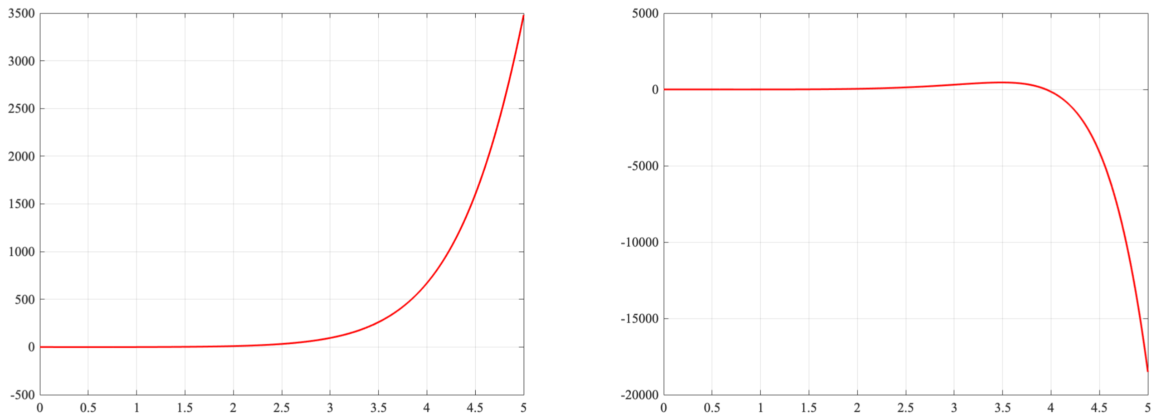
Разомкнутая и замкнутая система имеют положительные полюса, системы неустойчивы.



(а) Разомкнутая система

(б) Замкнутая система

Рисунок 1 — Карты полюсов (красные - устойчивые, синие - неустойчивые)



(а) Разомкнутая система

(б) Замкнутая система

Рисунок 2 — Переходные характеристики

Можем заметитить, что годограф делает два оборота по часовой стрелке вокруг точки $(-1{,}0)$. По критерию Найквиста, число оборотов будет равно:

$$m - n = 4 - 2 = 2$$

, где m - число неустойчивый полюсов замкнутой системы, n - разомкнутой. Наши вычисления совпали с результатами моделирования.

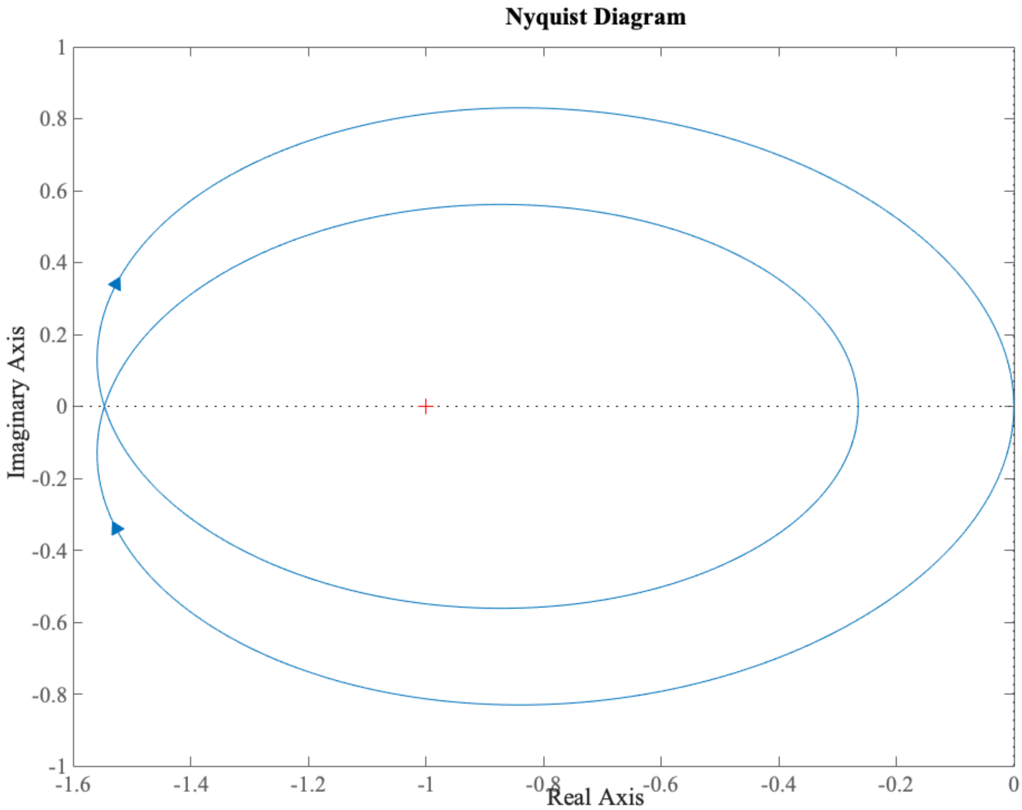


Рисунок 3 — Годограф Найквиста

По логарифмическому критерию Найквиста, нам требуется один положительный переход ЛФЧХ, однако наблюдаем только один отрицательный. Замкнутая система неустойчива.

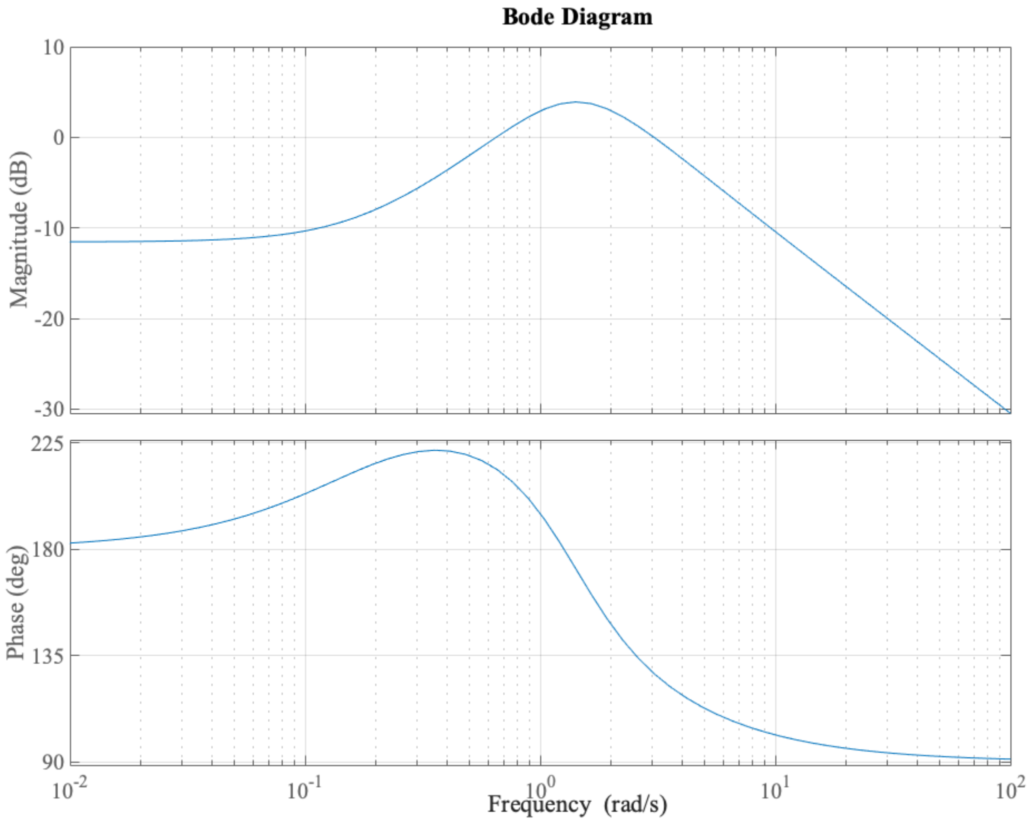


Рисунок 4 — ЛАФЧХ разомкнутой системы

1.2 Объект №2

Выберем следующие полюса разомкнутой системы:

$$s_{o1} = -0.5, \quad s_{o2,o3} = -1 \pm 1i, \quad s_{o4,o5} = -2 \pm 0.5i$$

Для замкнутой:

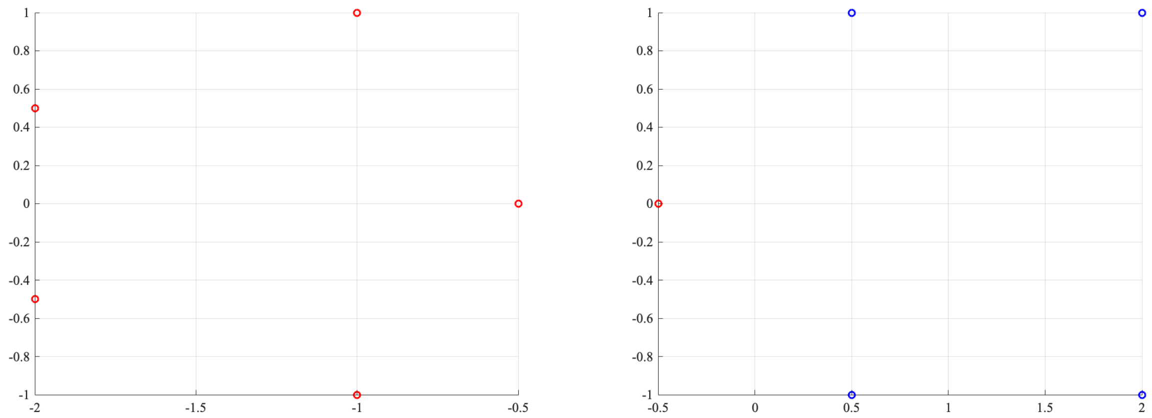
$$s_{c1} = -0.5, \quad s_{c2,c3} = 0.5 \pm 1i, \quad s_{c4,c5} = 2 \pm 1i$$

Получим следующие передаточные функции:

$$W_o(s) = \frac{-11s^4 - \frac{19}{2}s^3 - \frac{57}{2}s^2 - \frac{31}{2}s - \frac{9}{8}}{s^5 + \frac{13}{2}s^4 + \frac{69}{4}s^3 + \frac{189}{8}s^2 + \frac{67}{4}s + \frac{17}{4}}$$

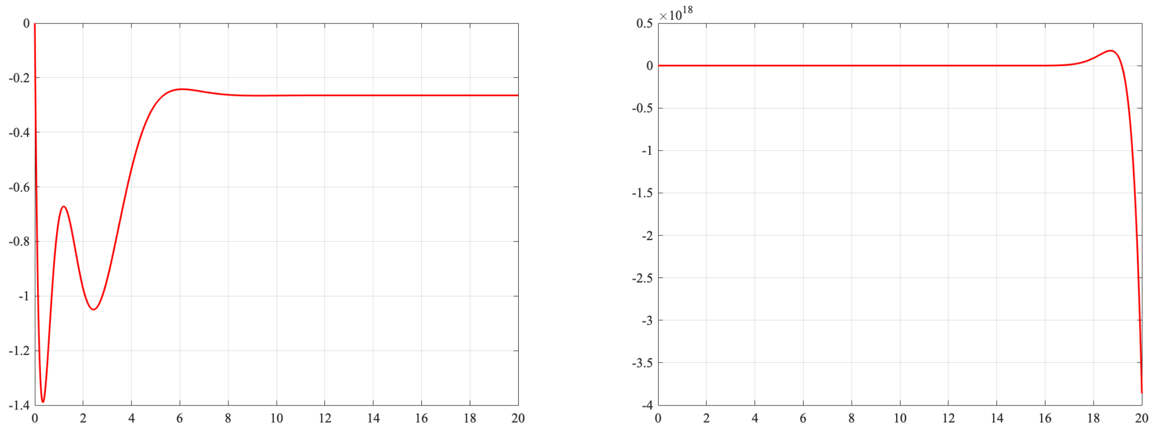
$$W_c(s) = \frac{-11s^4 - \frac{19}{2}s^3 - \frac{57}{2}s^2 - \frac{31}{2}s - \frac{9}{8}}{s^5 - \frac{9}{2}s^4 + \frac{31}{4}s^3 - \frac{39}{8}s^2 + \frac{5}{4}s + \frac{25}{4}}$$

Разомкнутая не имеет положительных полюсов, она устойчива. Замкнутая имеет 4 положительных полюса, она неустойчива.



(а) Разомкнутая система (б) Замкнутая система

Рисунок 5 — Карты полюсов (красные - устойчивые, синие - неустойчивые)



(а) Разомкнутая система (б) Замкнутая система

Рисунок 6 — Переходные характеристики

Можем заметитить, что годограф делает четыре оборота по часовой стрелке вокруг точки $(-1{,}0)$. По критерию Найквиста, число оборотов будет равно:

$$m - n = 4 - 0 = 4$$

, где m - число неустойчивый полюсов замкнутой системы, n - разомкнутой. Наши вычисления совпали с результатами моделирования.

Разомкнутая система была устойчива, поэтому нам не требуются переходы ЛФЧХ. Однако мы видим два отрицательных перехода. Замкнутая система неустойчива.

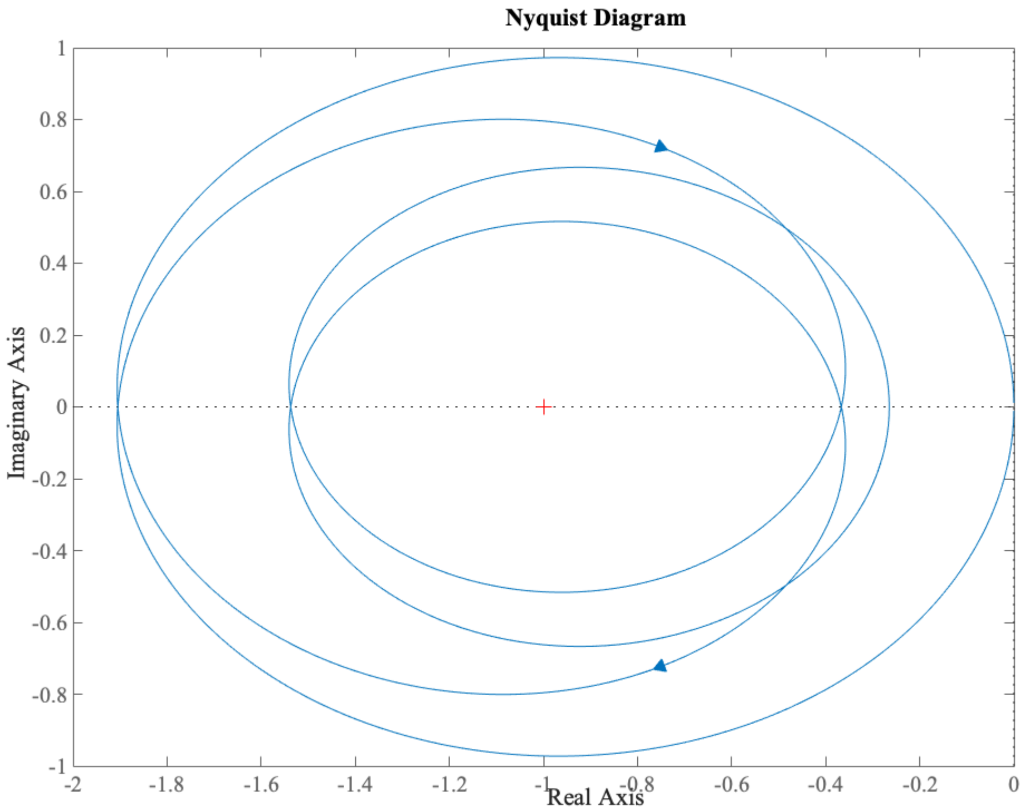


Рисунок 7 — Годограф Найквиста

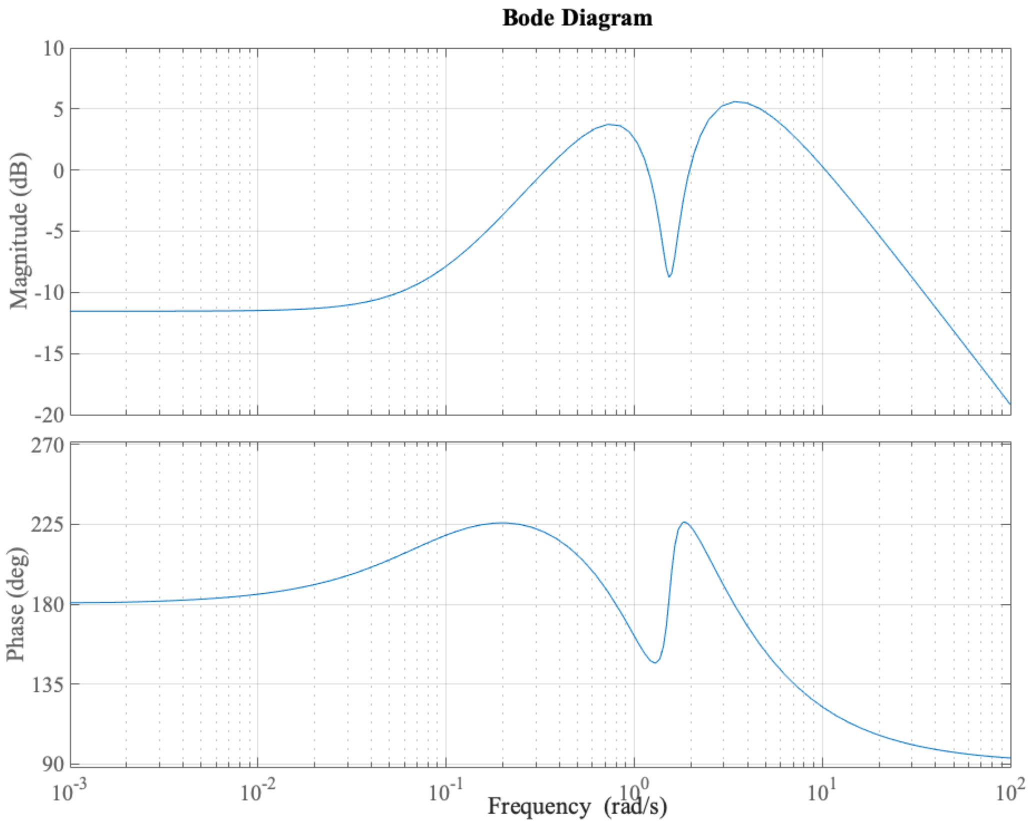


Рисунок 8 — ЛАФЧХ разомкнутой системы

1.3 Объект №3

Выберем следующие полюса разомкнутой системы:

$$s_{o1} = -0.5, \quad s_{o2,o3} = 1 \pm 1i, \quad s_{o4,o5} = -2 \pm 0.5i$$

Для замкнутой:

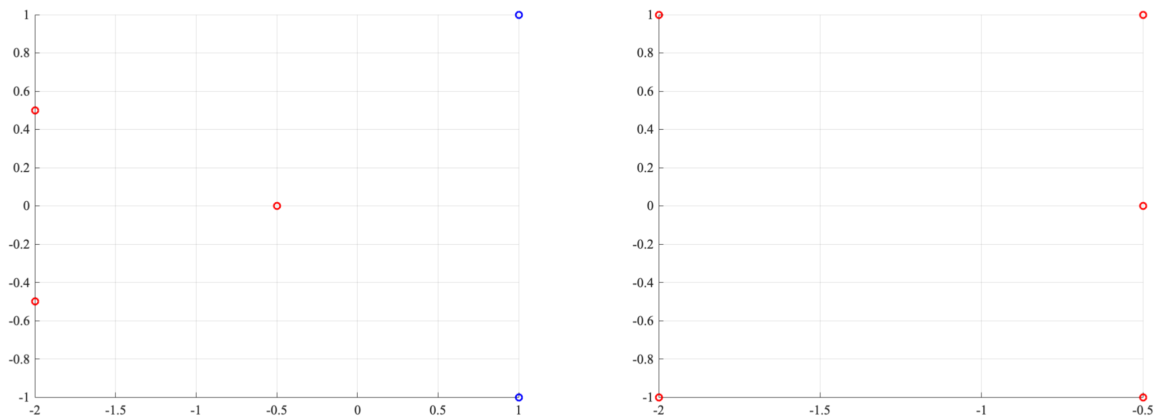
$$s_{c1} = -0.5, \quad s_{c2,c3} = -0.5 \pm 1i, \quad s_{c4,c5} = -2 \pm 1i$$

Получим следующие передаточные функции:

$$W_o(s) = \frac{3s^4 + \frac{27}{2}s^3 + \frac{33}{2}s^2 + 3s - \frac{9}{8}}{s^5 + \frac{5}{2}s^4 - \frac{3}{4}s^3 - \frac{11}{8}s^2 + \frac{33}{4}s + \frac{17}{4}}$$

$$W_c(s) = \frac{3s^4 + \frac{27}{2}s^3 + \frac{33}{2}s^2 + 3s - \frac{9}{8}}{s^5 + \frac{11}{2}s^4 + \frac{51}{4}s^3 + \frac{121}{8}s^2 + \frac{45}{4}s + \frac{25}{8}}$$

Разомкнутая имеет положительные полюса, она неустойчива. Замкнутая не имеет положительных полюсов, она устойчива.



(а) Разомкнутая система

(б) Замкнутая система

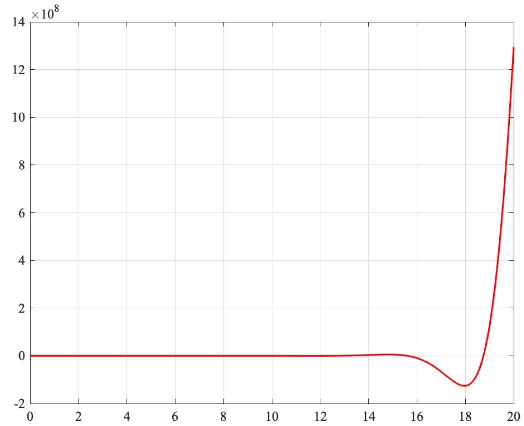
Рисунок 9 — Карты полюсов (красные - устойчивые, синие - неустойчивые)

Можем заметитить, что годограф делает два оборота против часовой стрелки вокруг точки $(-1{,}0)$. По критерию Найквиста, число оборотов будет равно:

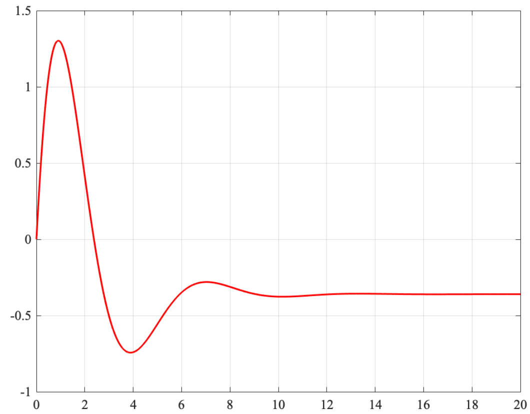
$$m - n = 0 - 2 = -2$$

, где m - число неустойчивый полюсов замкнутой системы, n - разомкнутой. Наши вычисления совпали с результатами моделирования.

По логарифмическому критерию Найквиста, нам требуется один положительный переход ЛФЧХ. Видим, что у нас имеется один положительный переход, поэтому замкнутая система устойчива.



(а) Разомкнутая система



(б) Замкнутая система

Рисунок 10 — Переходные характеристики

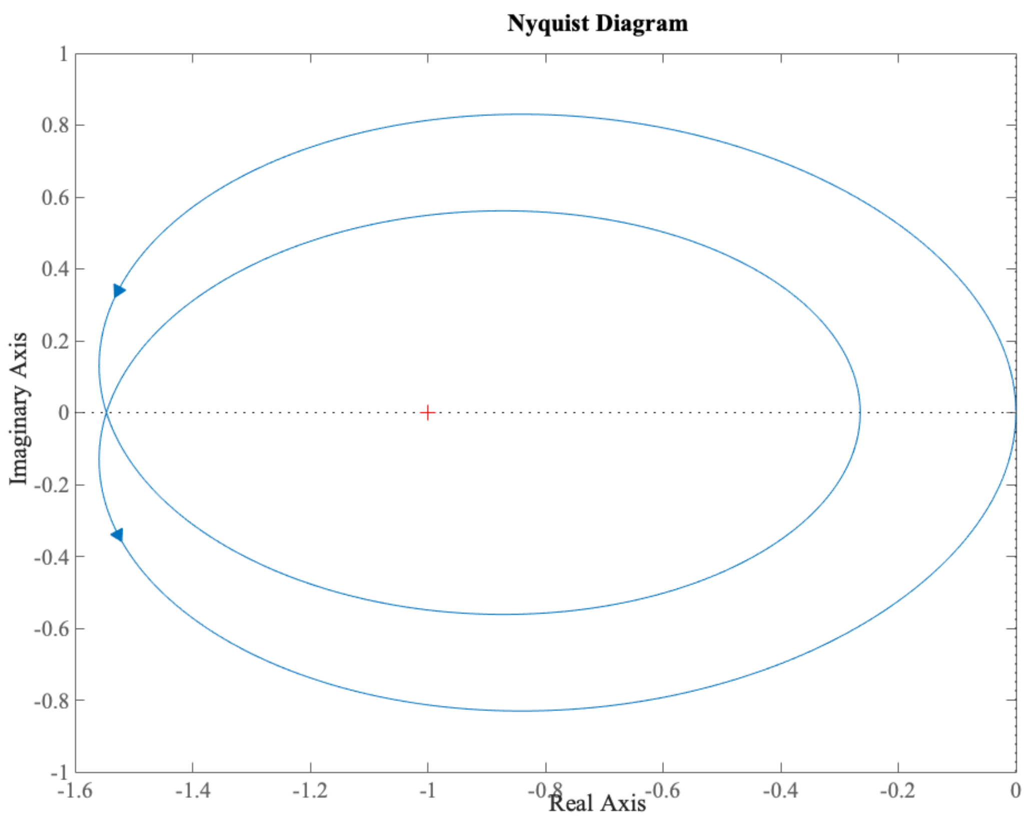


Рисунок 11 — Годограф Найквиста

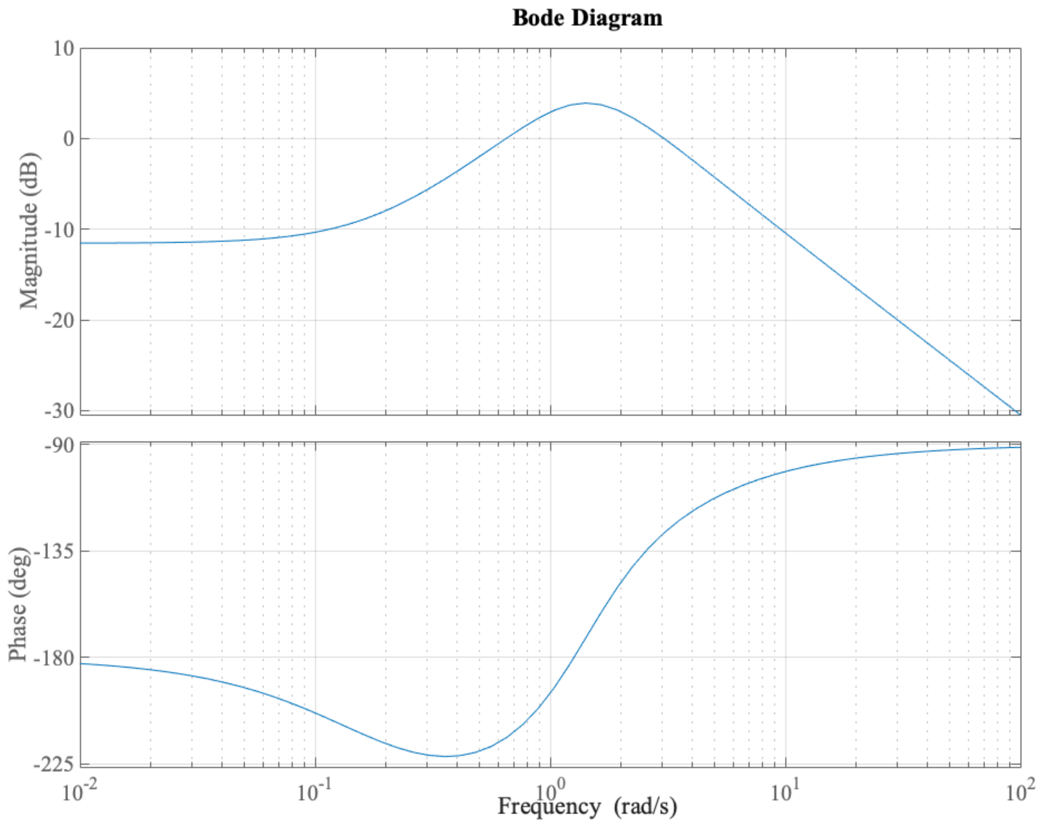


Рисунок 12 — ЛАФЧХ разомкнутой системы

1.4 Вывод

С помощью критерия Найквиста (и его логарифмического варианта) мы смогли оценить устойчивость замкнутой системы. Наши расчеты совпали с результами моделирования.

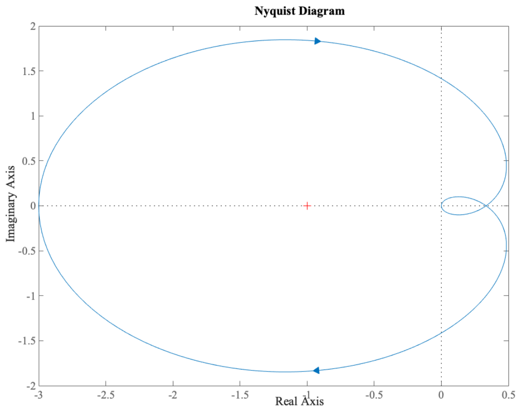
2 КОЭФФИЦИЕНТ УСИЛЕНИЯ

2.1 Объект №1

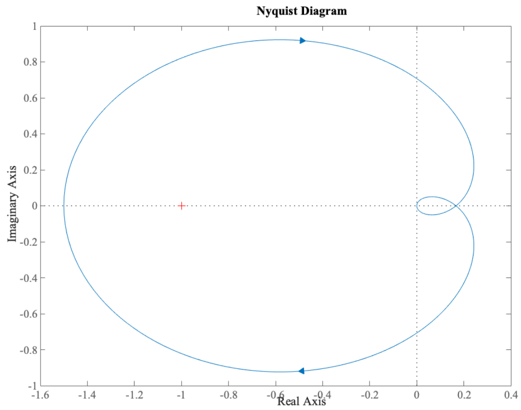
Рассмотрим объект, заданный следующей передаточной функцией:

$$W(s) = \frac{K(s-3)}{s^2+3s+1}$$

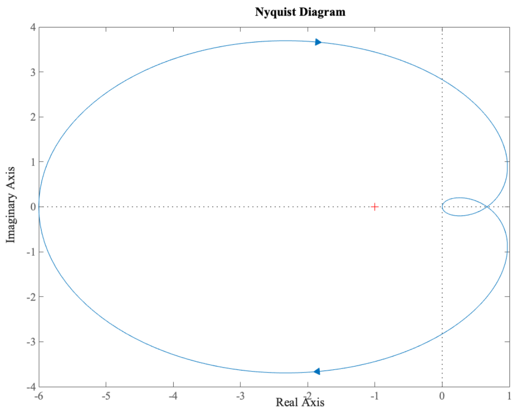
K - коэффициент усиления.
Изучим влияние коэффициента усиления на кривую годографа. Коэффициент влият на растяжение кривой. От него зависит, охватывает ли годограф точку $(-1{,}0)$. Соотвественно, он влияет на устойчивость.



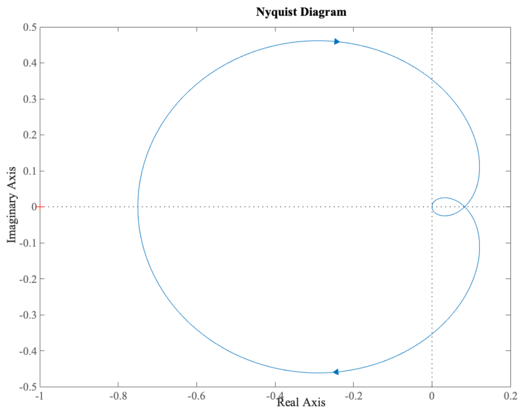
(а) $K = 1$



(б) $K = 0.5$



(в) $K = 2$



(г) $K = 0.25$

Рисунок 13 — Годограф Найквиста

Найдем, как K влияет на устойчивость замкнутой системы. Передаточная функция замкнутой системы:

$$W(s) = \frac{K(s-3)}{s^2 + (3+K)s + (1-3K)}$$

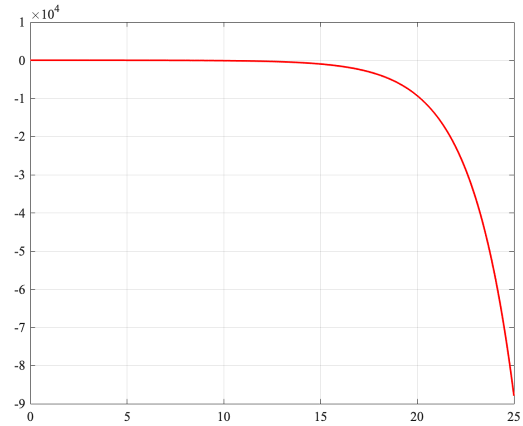
По критерию Гурвица система будет устойчива, при условии:

$$\begin{cases} 3 + K > 0 \\ 1 - 3K > 0 \end{cases}$$

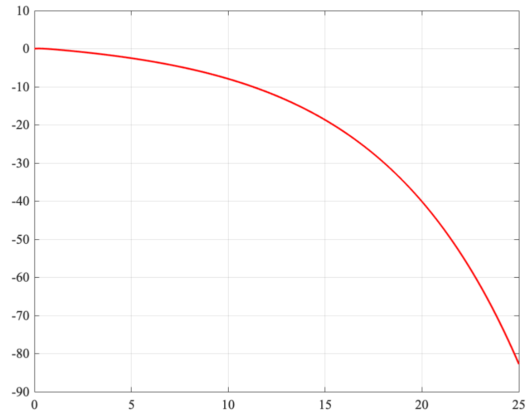
Так как мы считаем K положительным, замкнутая система будет устойчива при $K \in (0; \frac{1}{3})$.

Определим запас устойчивости по амплитуде с помощью годографа Найквиста. Разомкнутая система устойчива. При $K = 1$ видим, что годограф делает один оборот по часовой стрелке вокруг точки $(-1, 0)$, замкнутая система неустойчива. При этом годограф пересекает вещественную ось в точке $(-3, 0)$, нам требуется амплитуда в $\frac{1}{3}$ меньше, чтобы выйти на границу устойчивости. Получаем, что система будет устойчива при $K \in (0; \frac{1}{3})$. Результат совпал с расчетами критического коэффициента усиления.

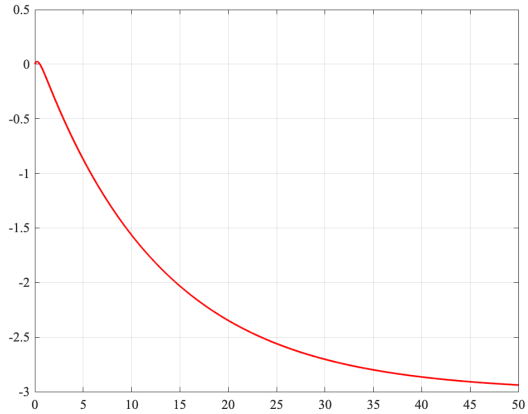
Выполним моделирование системы при различных K. Наши расчеты оказались верны. При $K \geq \frac{1}{3}$ система становится неустойчивой, при $K < \frac{1}{3}$ система устойчива.



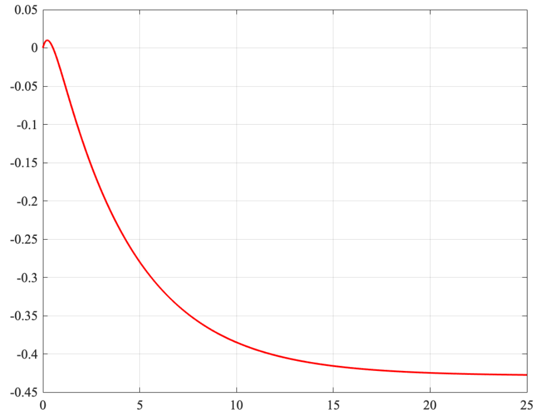
(а) $K = 1$



(б) $K = 0.5$



(в) $K = 0.25$



(г) $K = 0.1$

Рисунок 14 — Переходные характеристики

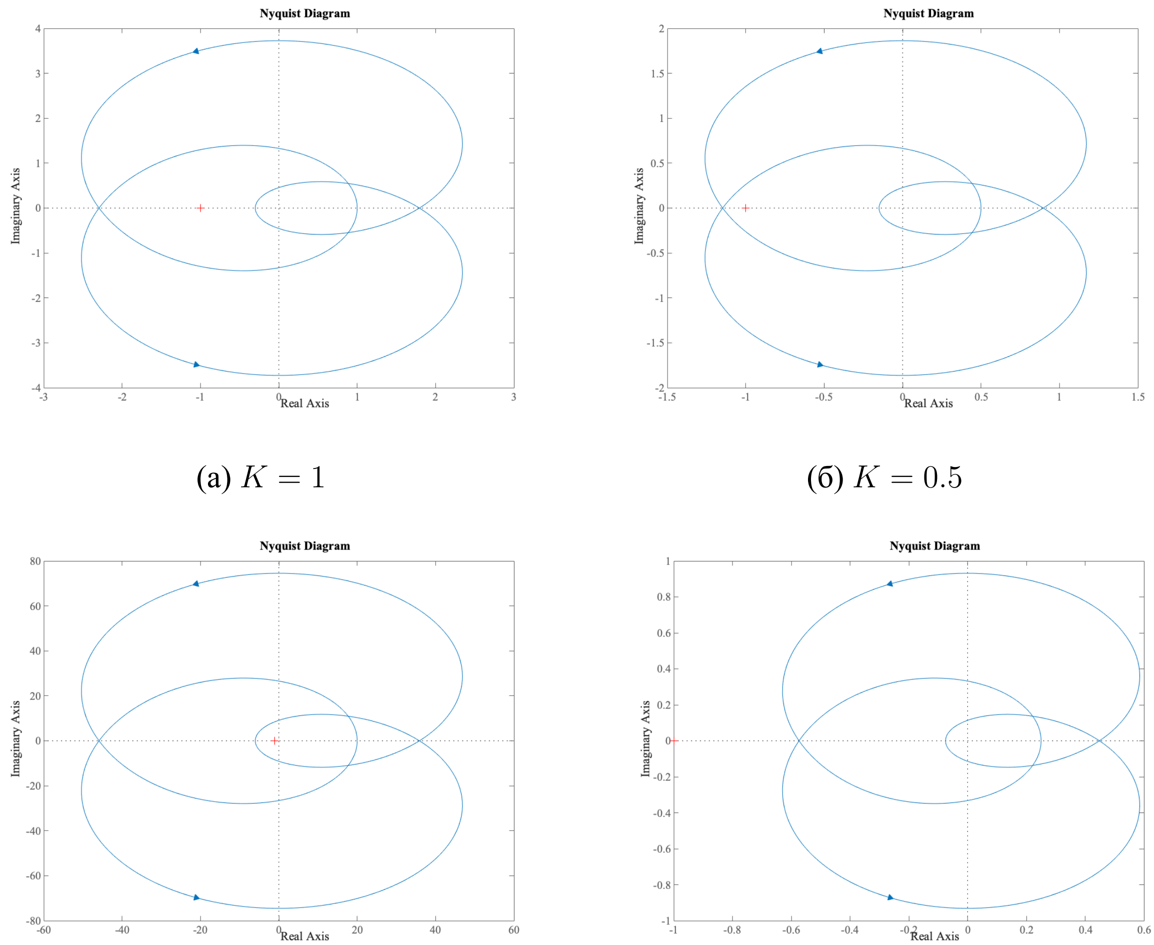
2.2 Объект №2

Рассмотрим объект, заданный следующей передаточной функцией:

$$W(s) = \frac{K(100s^3 + 110s^2 + 10s - 0.3)}{100s^3 - 60s^2 + 6s - 1}$$

K - коэффициент усиления.

Изучим влияние коэффициента усиления на кривую годографа. Коэффициент влият на растяжение кривой. От него зависит, охватывает ли годограф точку $(-1{,}0)$. Также, в этот раз от коэффициента усиления зависит, сколько оборотов сделал годограф.



(а) $K = 1$ (б) $K = 0.5$

(в) $K = 20$ (г) $K = 0.25$

Рисунок 15 — Годограф Найквиста

Найдем, как K влияет на устойчивость замкнутой системы. Передаточная функция замкнутой системы:

$$W(s) = \frac{K(100s^3 + 110s^2 + 10s - 0.3)}{(100 + 100K)s^3 + (-60 + 110K)s^2 + (6 + 10K)s + (-1 + 0.3K)}$$

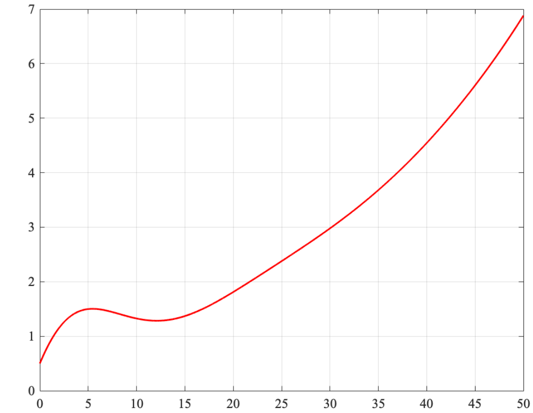
По критерию Гурвица система будет устойчива, при условии:

$$\begin{cases} 100 + 100K > 0 \\ -60 + 110K > 0 \\ 6 + 10K > 0 \\ -1 + 0.3K > 0 \\ (-60 + 110K)(6 + 10K) - (100 + 100K)(-1 + 0.3K) > 0 \end{cases}$$

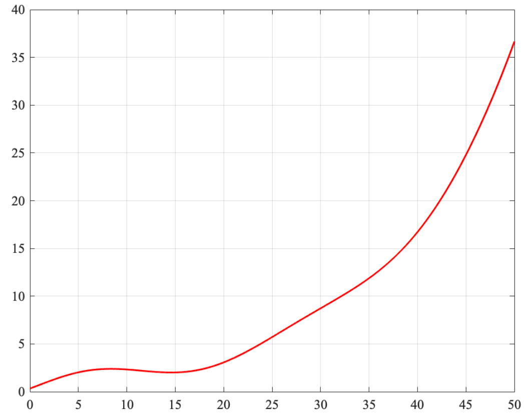
Так как мы считаем K положительным, замкнутая система будет устойчива при $K \in (\frac{10}{3}; \infty)$.

Получается, чтобы поддерживать замкнутую систему устойчивой нам требуется коэффициент усиления $K > \frac{10}{3}$. В данном случае странно говорить о запасе устойчивости, так как нам в принципе требует коэффициент усиления больше единицы, чтобы система была устойчива. Мы можем проанализировать влияние K на количество неустойчивых полюсов с помощью годографа Найквиста. Годограф пересекает вещественную ось в точках $(-\frac{3}{10}; 0)$ и $(-\frac{23}{10}; 0)$. Получаем, что при $K \in (0; \frac{10}{23})$ система будет иметь три неустойчивых полюса. При $K \in (\frac{10}{23}; \frac{10}{3})$ система будет иметь один неустойчивый полюс. При $K \in (\frac{10}{3}; \infty)$ система будет устойчива. Это совпадает с нашим расчетом по критерию Гурвица.

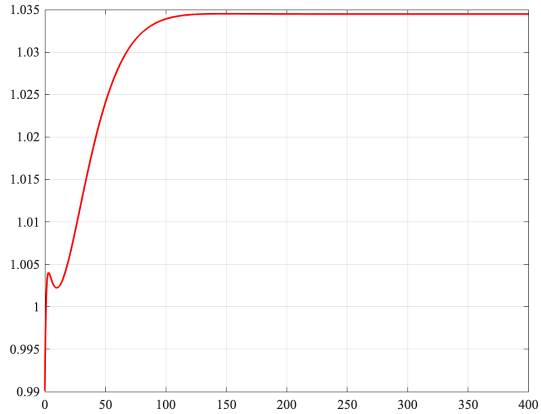
Выполним моделирование системы при различных K. Наши расчеты оказались верны. При $K \leq \frac{10}{3}$ система неустойчива, при $K > \frac{10}{3}$ система становится устойчивой.



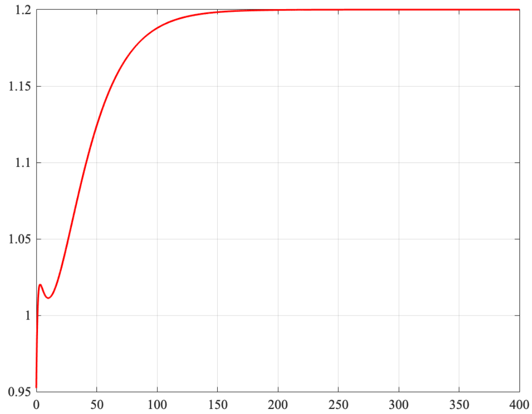
(а) $K = 1$



(б) $K = 0.5$



(в) $K = 100$



(г) $K = 20$

Рисунок 16 — Переходные характеристики

2.3 Вывод

В данном задании был осуществлен расчет критических значений коэффициента усиления, при которых замкнутая система будет устойчивой. При этом использовались различные средства: годограф Найквиста, критерий Гурвица. Расчеты совпали с результатами моделирования, что говорит об их корректности.

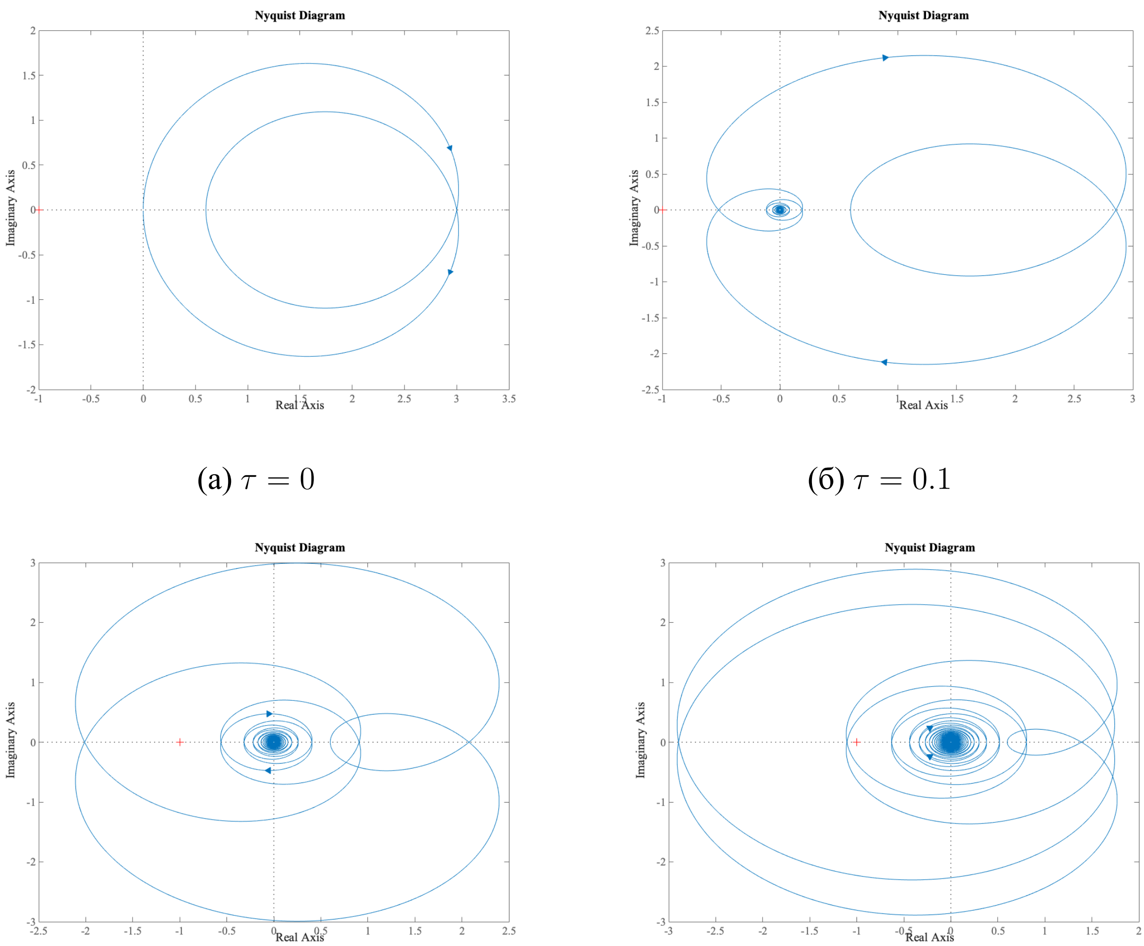
3 ЗАПАЗДЫВАНИЕ

3.1 Объект №1

Рассмотрим следующий объект со звеном чистого запаздывания:

$$W(s) = \frac{9s+3}{s^2+3s+5}e^{-\tau s}$$

Изучим влияние запаздывания τ на кривую годографа. Видим, что с увеличением запаздывания, кривая закручиваются в начале координат. Также, меняется число оборотов вокруг точки $(-1{,}0)$, что влияет на устойчивость замкнутой системы.



(а) $\tau = 0$

(б) $\tau = 0.1$

(в) $\tau = 0.5$

(г) $\tau = 1$

Рисунок 17 — Годограф Найквиста

Найдем запас устойчивости по фазе. Амплитуда равна 1, при $\omega \approx 8$. При таком ω фаза будет $\approx -70°$. Таким образом, запас устойчивости $110° = \frac{11}{18}\pi$. Теперь мы можем найти критическое значение τ.

$$\tau_{\text{кр}} = \frac{\frac{11}{18}\pi}{8} \approx 0.24$$

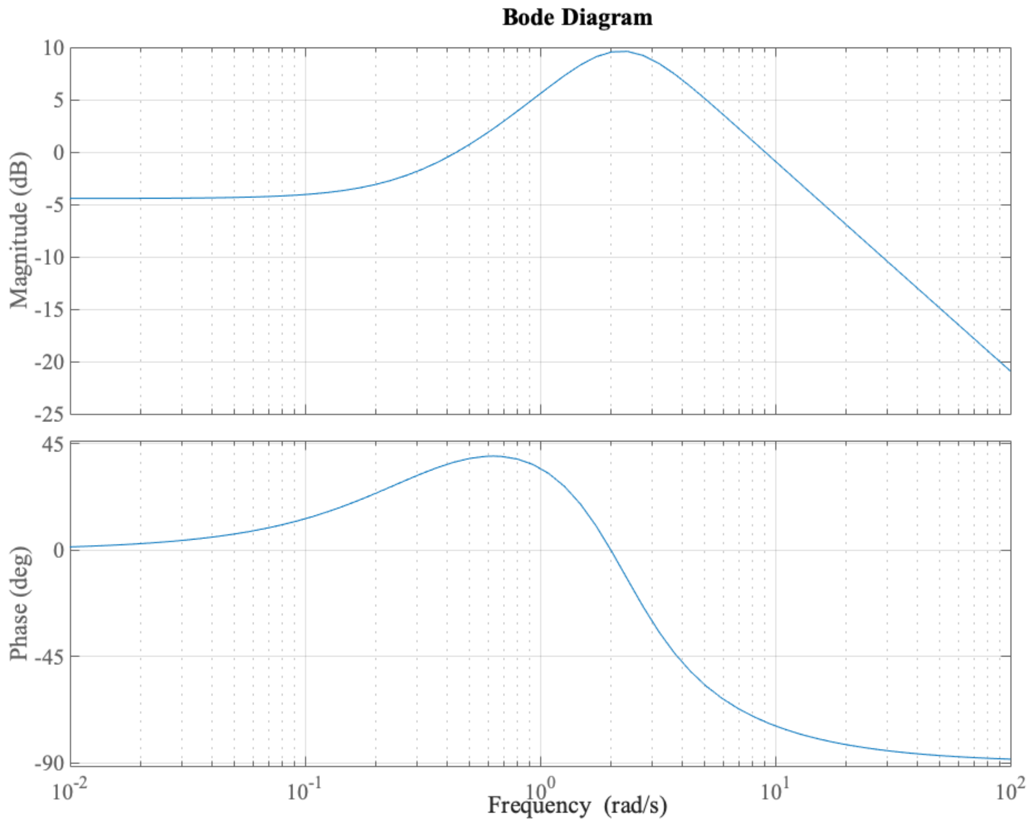
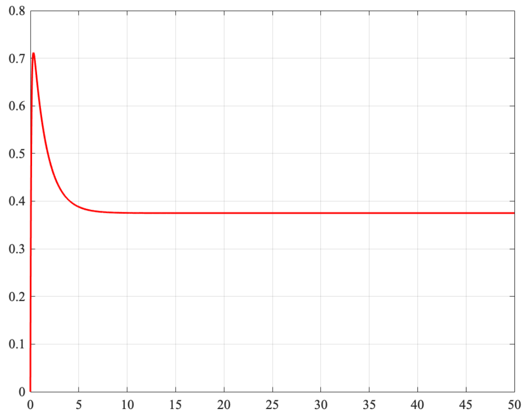
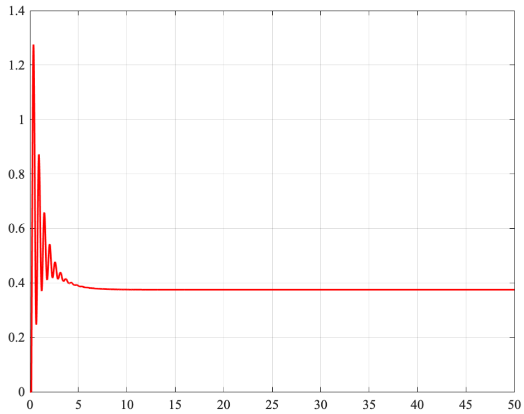


Рисунок 18 — ЛАФЧХ разомкнутой системы

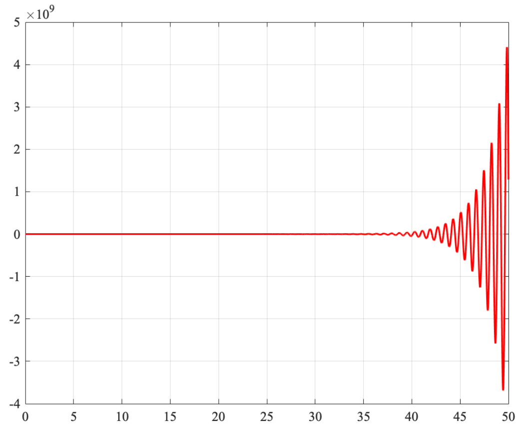
Проверим корректность расчетов с помощью моделирования системы.



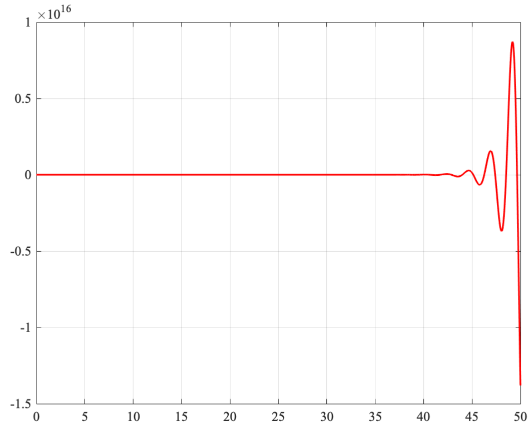
(а) $\tau = 0$



(б) $\tau = 0.15$



(в) $\tau = 0.25$



(г) $\tau = 1$

Рисунок 19 — Переходные характеристики

3.2 Объект №2

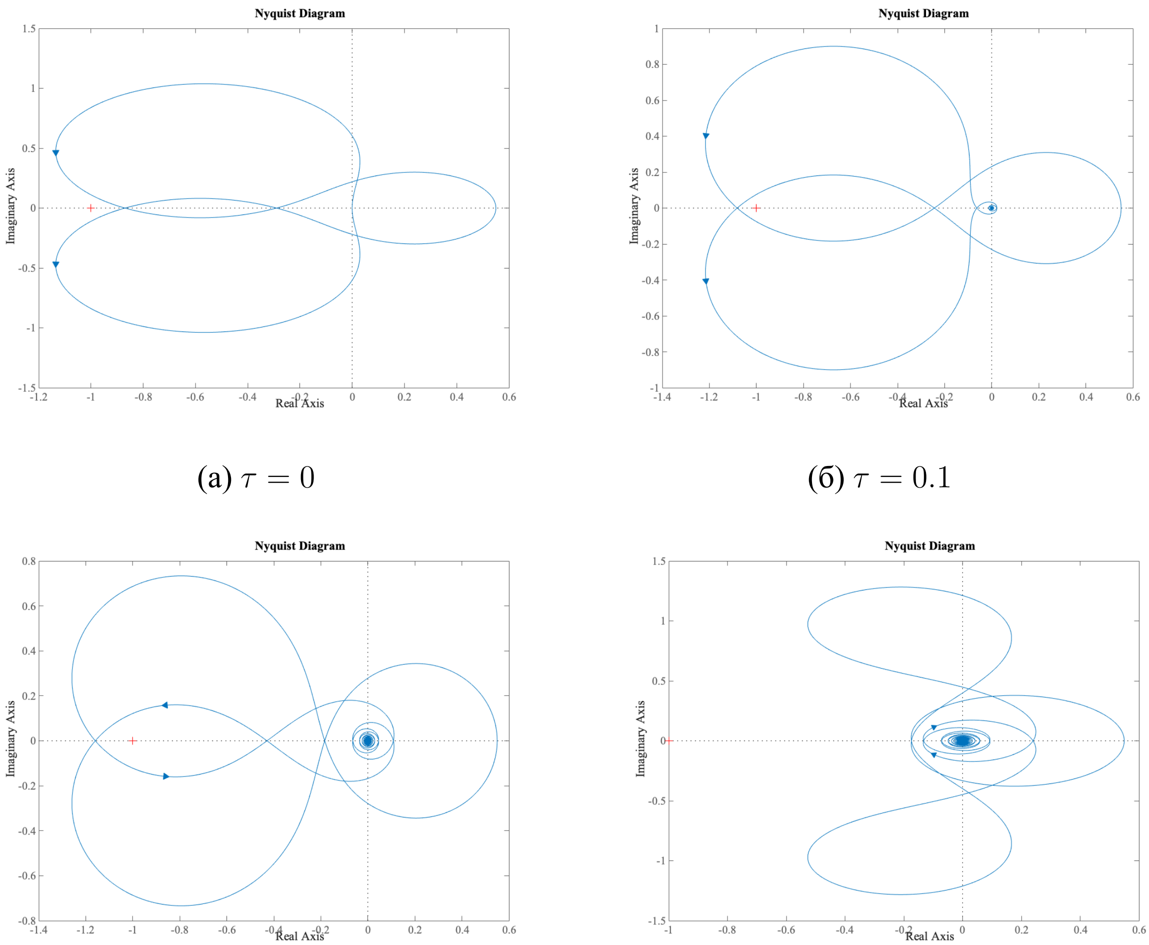
Рассмотрим следующий объект со звеном чистого запаздывания:

$$W(s) = \frac{10s^2 - 6s + 11}{10s^3 - s^2 + 38s + 20} e^{-\tau s}$$

Изучим влияние запаздывания τ на кривую годографа. Видим, что с увеличением запаздывания, кривая закручиваются в начале координат. Также, меняется число оборотов вокруг точки $(-1{,}0)$, что влияет на устойчивость замкнутой системы.

При $\tau = 0$ замкнутая система неустойчива, соответственно запаса устойчивости у нас нет. Найдем τ при которых система будет устойчива:

$$\omega_{\text{кр}_1} \approx 1.88, \quad \omega_{\text{кр}_2} \approx 2.22$$



(а) $\tau = 0$

(б) $\tau = 0.1$

(в) $\tau = 0.5$

(г) $\tau = 1$

Рисунок 20 — Годограф Найквиста

$$\varphi_1 = 180^\circ - \varphi(\omega_{\text{кр}_1}) \approx 14^\circ = \frac{7}{90}\pi$$

$$\varphi_2 = 180^\circ - \varphi(\omega_{\text{кр}_2}) \approx 65^\circ = \frac{13}{36}\pi$$

$$\tau_1 = \frac{\frac{7}{90}\pi}{1.88} \approx 0.13, \quad \tau_2 = \frac{\frac{13}{36}\pi}{2.22} \approx 0.51$$

Система будет устойчива при $\tau \in (0.13; 0.51)$

Проверим корректность расчетов с помощью моделирования системы.

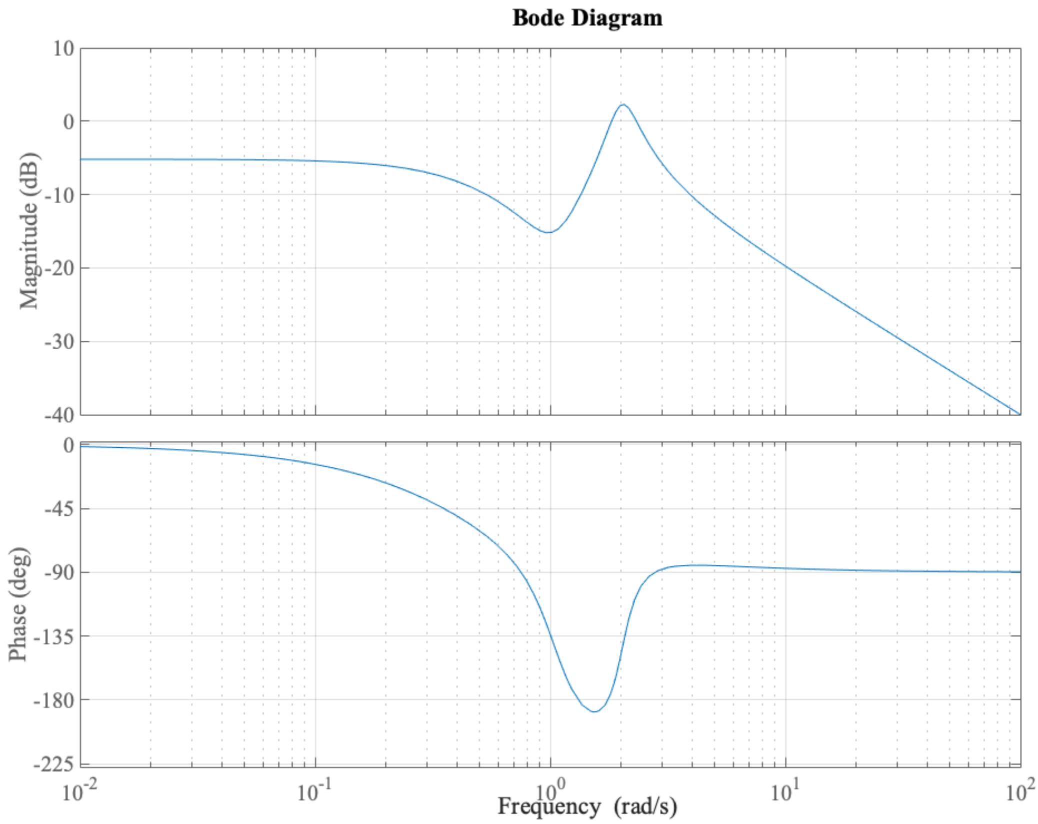
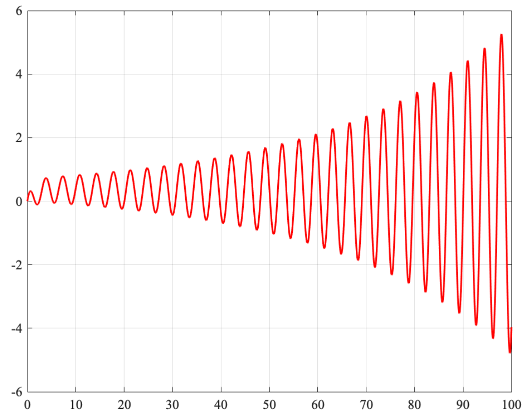
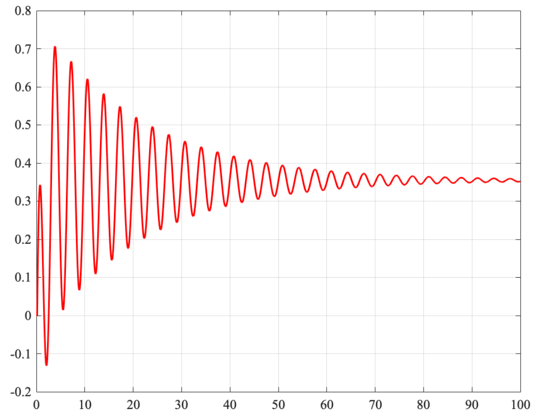


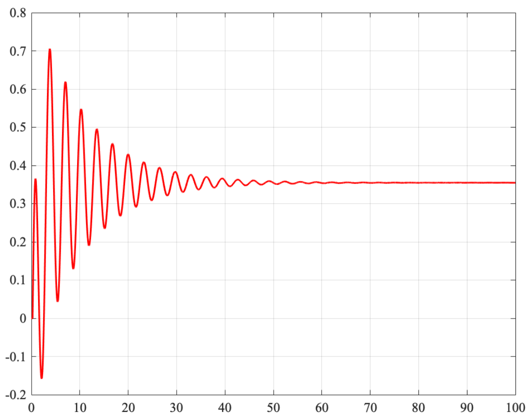
Рисунок 21 — ЛАФЧХ разомкнутой системы



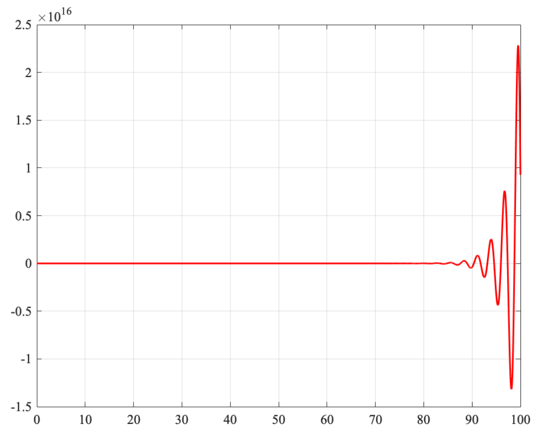
(а) $\tau = 0$



(б) $\tau = 0.15$



(в) $\tau = 0.25$



(г) $\tau = 1$

Рисунок 22 — Переходные характеристики

3.3 Вывод

В данном задании были рассмотрены системы с запаздыванием. Был произведен расчет запаса устойчивости по фазе и критических значений запаздывания. Теоретически данные совпали с результатами моделирования.

4 ВЫВОДЫ

В данной работе мы познакомились с критерием Найквиста, с помощью которого мы оценивали устойчивость замкнутой системы. Также были произведены расчеты запасов устойчивости по амплитуде и фазе. Были найдены критические значения коэффициента усиления. Для систем с запаздыванием было найдено критическое время запаздывания.