

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Университет ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЁТ
по лабораторной работе №5
по дисциплине
«Линейные системы автоматического управления»

по теме:
ТИПОВЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗВЕНЬЯ
(ВАРИАНТ 12)

Студент:
Группа R3343

Ткачёв И.Ю.

Предподаватель:
ассистент

Пашенко А.В.

Санкт-Петербург
2024

СОДЕРЖАНИЕ

1	ДВИГАТЕЛЬ ПОСТОЯННОГО ТОКА	3
1.1	Временные характеристики	3
1.2	Частотные характеристики	6
2	ДВИГАТЕЛЬ ПОСТОЯННОГО ТОКА 2.0	10
2.1	Временные характеристики	10
2.2	Частотные характеристики	13
3	КОНДЕНСАТОР	17
3.1	Временные характеристики	17
3.2	Частотные характеристики	20
4	ПРУЖИННЫЙ МАЯТНИК	24
4.1	Временные характеристики	24
4.2	Частотные характеристики	27
5	РЕГУЛЯТОР НА ОПЕРАЦИОННОМ УСИЛИТЕЛЕ	31
5.1	Временные характеристики	31
5.2	Частотные характеристики	34
6	ВЫВОДЫ	38

1 ДВИГАТЕЛЬ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Запишем уравнения двигателя постоянного тока:

$$J\dot{\omega} = M, \quad M = k_m I, \quad I = \frac{U + \varepsilon_i}{R}, \quad \varepsilon_i = -k_e \omega$$

Объединим их в одно ДУ:

$$\dot{\omega} + \frac{k_e k_m}{JR} \omega = \frac{k_m}{JR} U$$

Перепишем в виде передаточной функции:

$$W(s) = \frac{k_m}{JR s + k_e k_m} = \frac{\frac{1}{k_e}}{\frac{JR}{k_e k_m} s + 1}$$

Получаем **апериодическое звено первого порядка** $\frac{K}{Ts+1}$, где $T = \frac{JR}{k_e k_m}$ и $K = \frac{1}{k_e}$. Данное динамическое звено является типовым, и мы с легкостью можем найти его различные характеристики.

1.1 Временные характеристики

Весовая функция для апериодического звена первого порядка равна:

$$w(t) = \frac{K}{T} e^{-\frac{t}{T}} = \frac{k_m}{JR} e^{-\frac{k_e k_m}{JR} t}$$

Переходная функция для апериодического звена первого порядка равна:

$$h(t) = K(1 - e^{-\frac{t}{T}}) = \frac{1}{k_e}(1 - e^{-\frac{k_e k_m}{JR} t})$$

Графики временных характеристик, полученных в результате моделирования совпадают с найденными аналитически, что говорит о корректности вычислений.

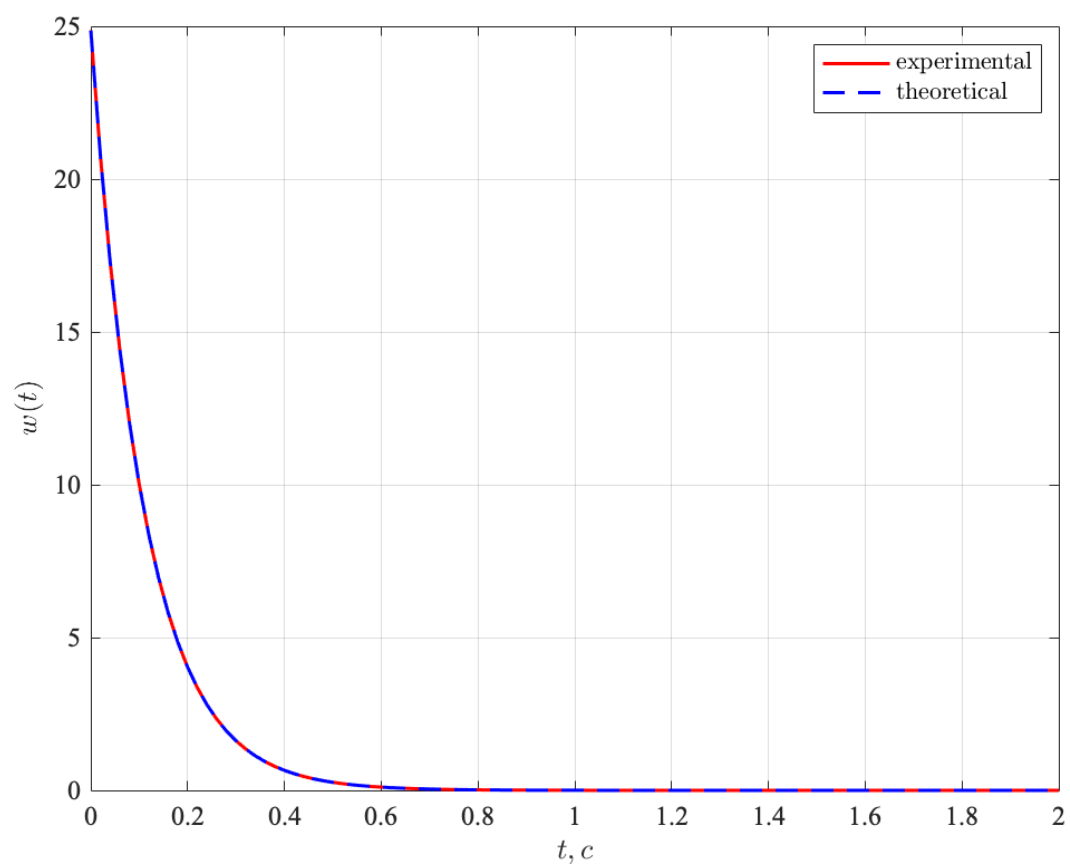


Рисунок 1 — Весовая функция

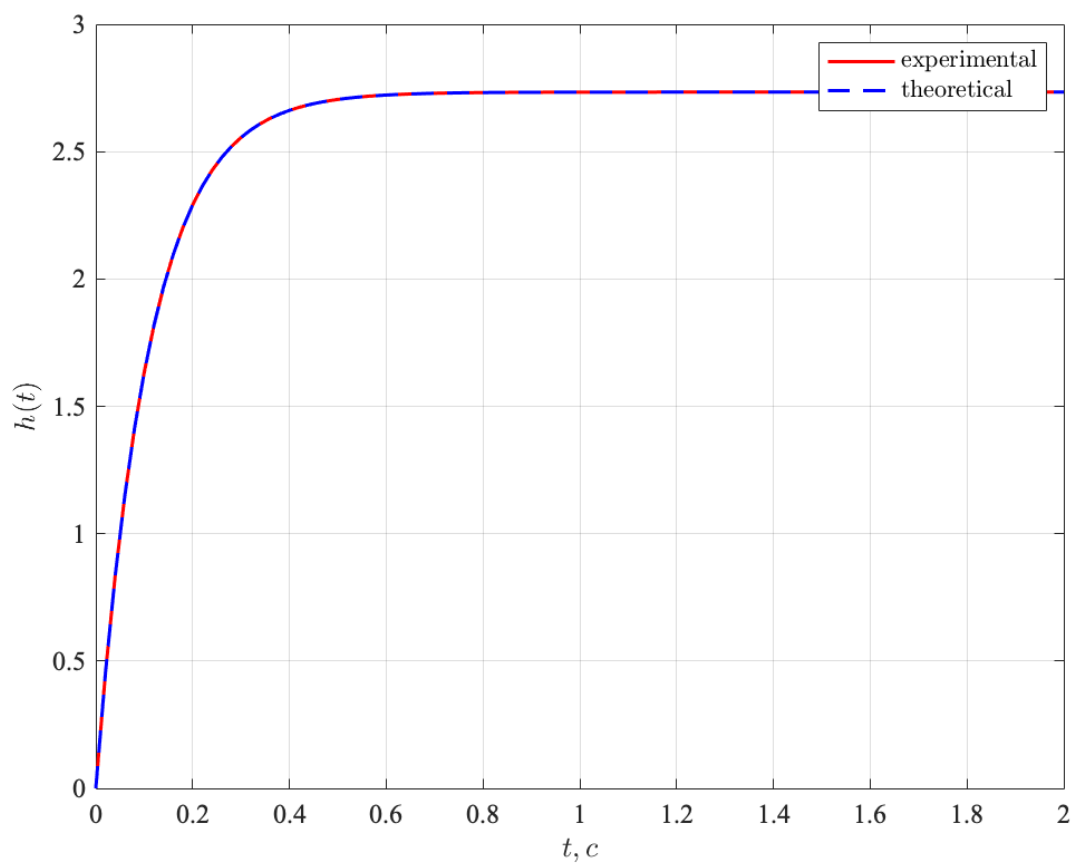


Рисунок 2 — Переходная функция

1.2 Частотные характеристики

АЧХ для апериодического звена первого порядка равна:

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} = \frac{1}{k_e \sqrt{1 + (\frac{JR}{k_e k_m})^2 \omega^2}}$$

ФЧХ для апериодического звена первого порядка равна:

$$\phi(\omega) = -\arctan(\omega T) = -\arctan(\frac{JR}{k_e k_m} \omega)$$

ЛАЧХ для апериодического звена первого порядка равна:

$$L(\omega) = 20 \log K - 20 \log \sqrt{1 + T^2\omega^2} = -20l \log k_e - 10 \log (1 + (\frac{JR}{k_e k_m})^2 \omega^2)$$

Графики частотных характеристик, полученных в результате моделирова-

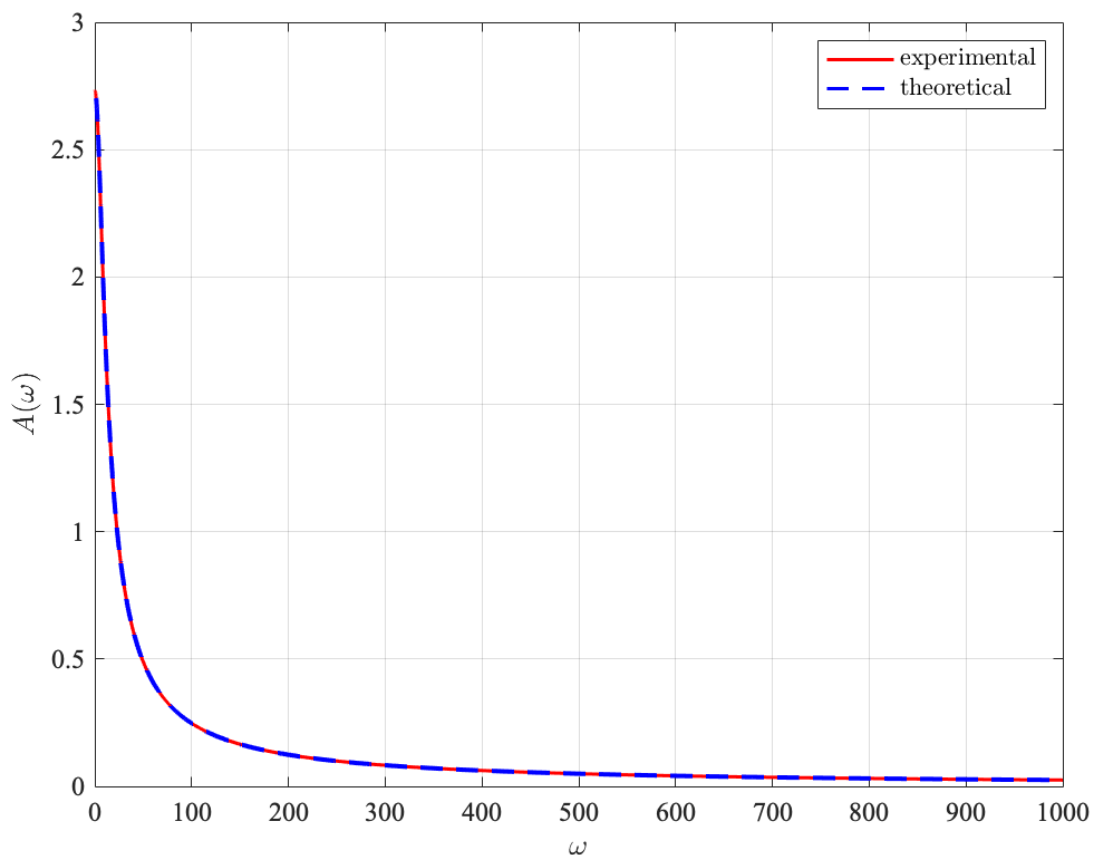


Рисунок 3 — АЧХ

ния совпадают с найденными аналитически, что говорит о корректности вычислений.

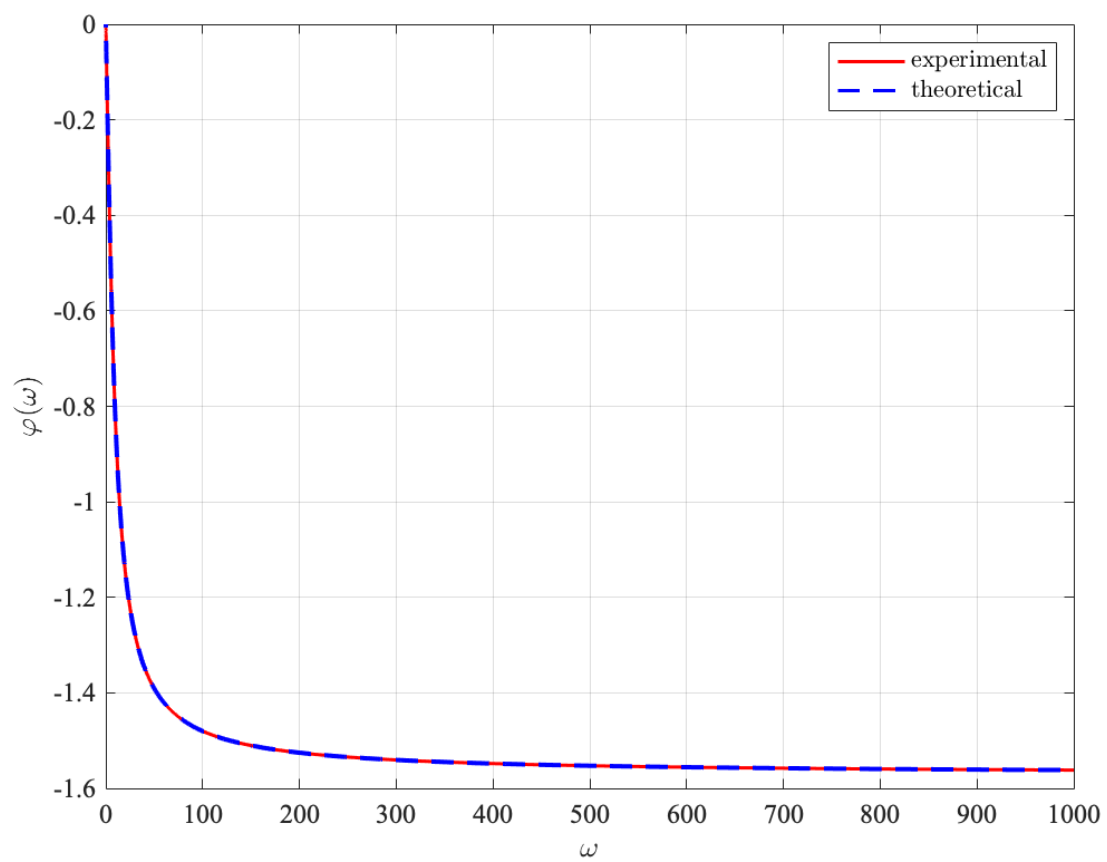


Рисунок 4 — ФЧХ

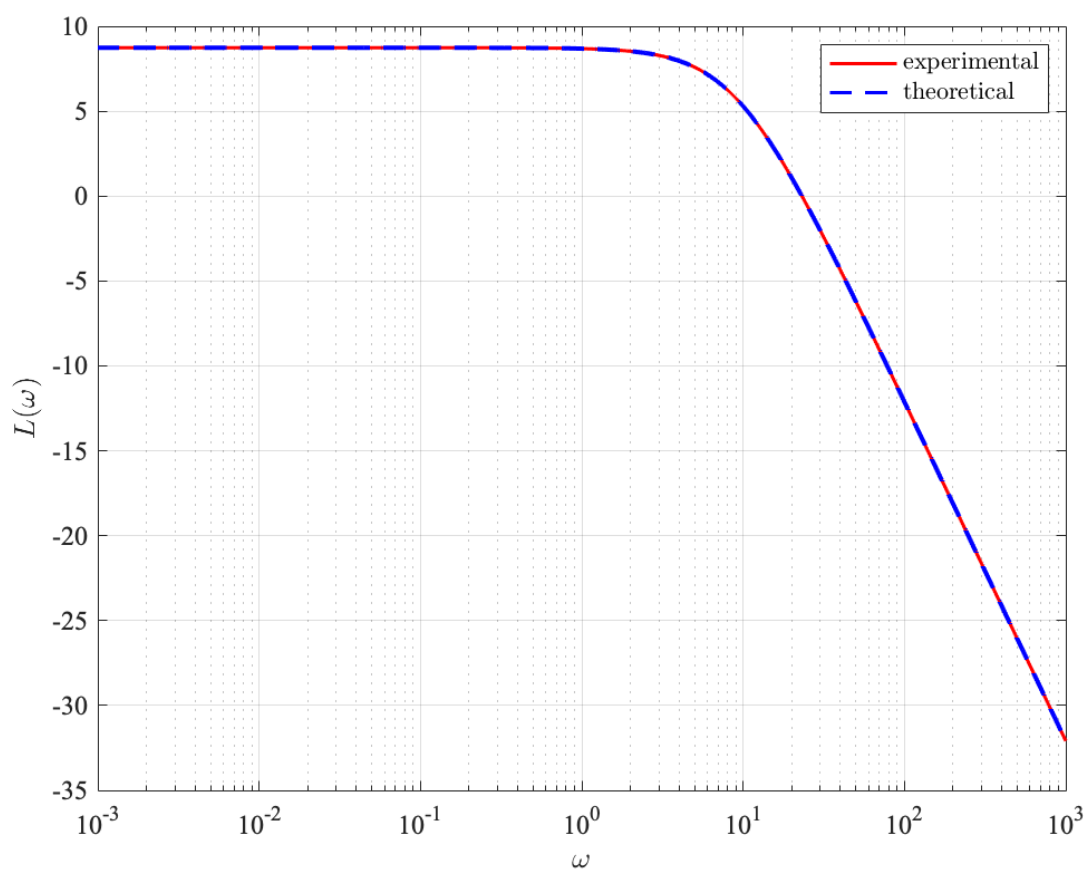


Рисунок 5 — ЛАЧХ

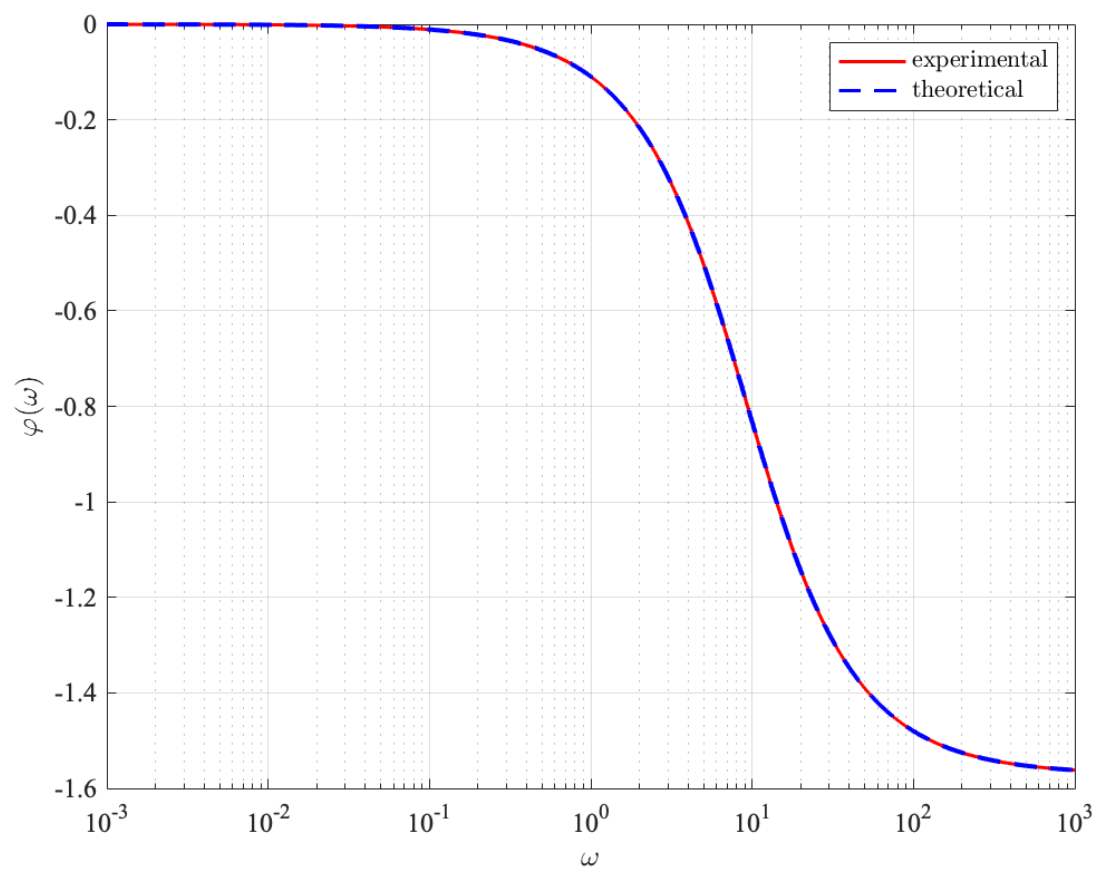


Рисунок 6 — ЛФЧХ

2 ДВИГАТЕЛЬ ПОСТОЯННОГО ТОКА 2.0

Теперь запишем уравнения двигателя постоянного тока с учетом индуктивности:

$$J\dot{\omega} = M, \quad M = k_m I, \quad I = \frac{U + \varepsilon}{R}, \quad \varepsilon = \varepsilon_i + \varepsilon_s \quad \varepsilon_i = -k_e \omega \quad \varepsilon_s = -L\dot{I}$$

Объединим их в одно ДУ:

$$\frac{L}{R}\ddot{\omega} + \dot{\omega} + \frac{k_e k_m}{JR}\omega = \frac{k_m}{JR}U$$

Перепишем в виде передаточной функции:

$$W(s) = \frac{k_m}{JLs^2 + RJs + k_e k_m} = \frac{\frac{1}{k_e}}{\frac{JL}{k_e k_m}s^2 + \frac{RJ}{k_e k_m} + 1}$$

Получаем:

$$K = \frac{1}{k_e}, \quad T = \sqrt{\frac{JL}{k_e k_m}}, \quad \xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{J}{Lk_e k_m}}$$

Перед нами **колебательное звено**, так как $0 < \xi \approx 0.35 < 1$.

2.1 Временные характеристики

Найдем весовую функцию для колебательного звена:

$$w(t) = \frac{K e^{-\frac{\xi}{T}t} \sin\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}t\right)}{T\sqrt{1-\xi^2}}$$

Найдем переходную функцию для колебательного звена:

$$h(t) = K\left(1 - \frac{e^{-\frac{\xi}{T}t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}t + \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right)\right)$$

Графики временных характеристик, полученных в результате моделирования совпадают с найденными аналитически, что говорит о корректности вычислений.

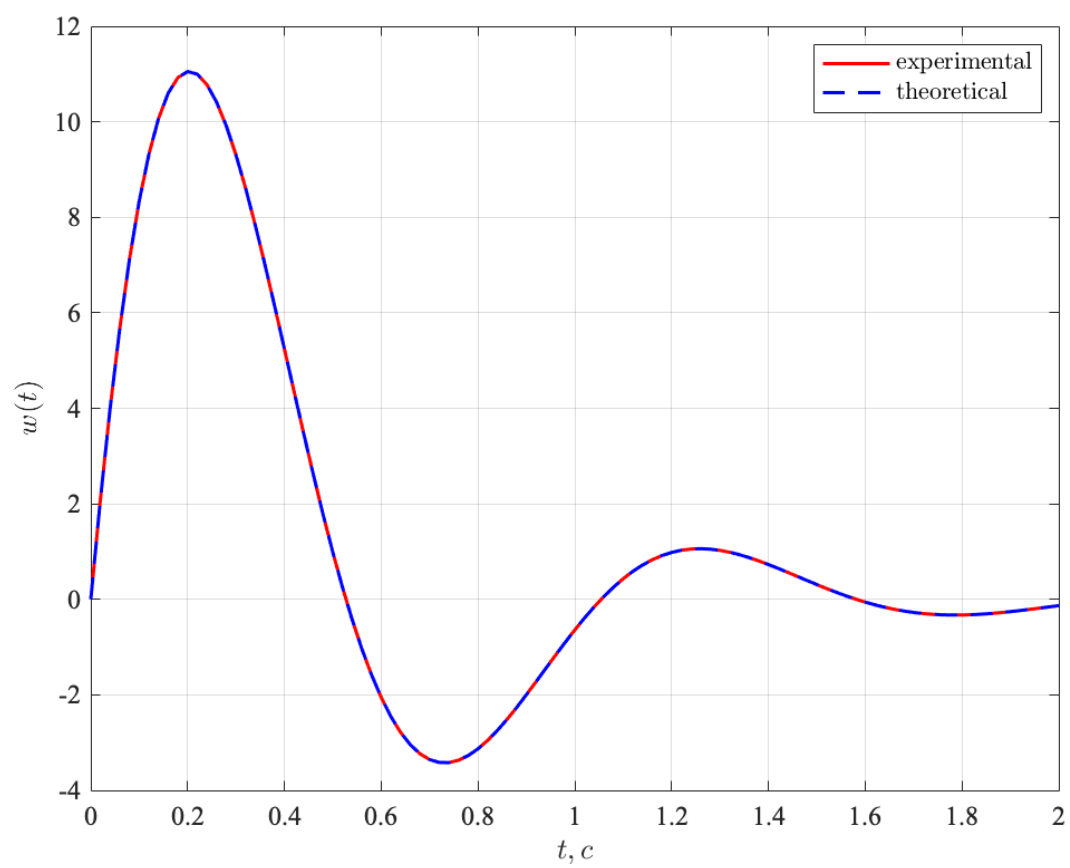


Рисунок 7 — Весовая функция

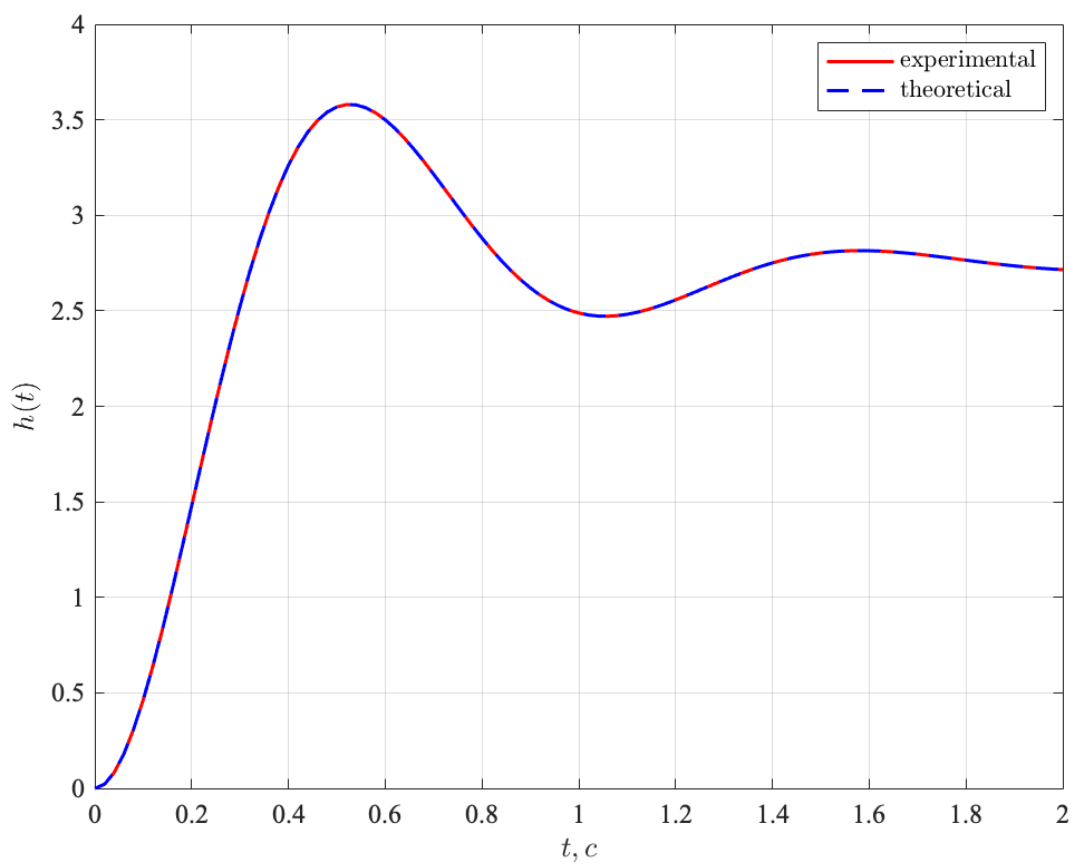


Рисунок 8 — Переходная функция

2.2 Частотные характеристики

АЧХ для колебательного звена равна:

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\omega^2 \xi^2 T^2}}$$

ФЧХ для колебательного звена равна:

$$\phi(\omega) = -\arctan(2\xi T\omega, 1 - \omega^2 T^2)$$

ЛАЧХ для колебательного звена равна:

$$L(\omega) = 20 \log K - 10 \log ((1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\omega^2 \xi^2 T^2)$$

Графики частотных характеристик, полученных в результате моделирова-

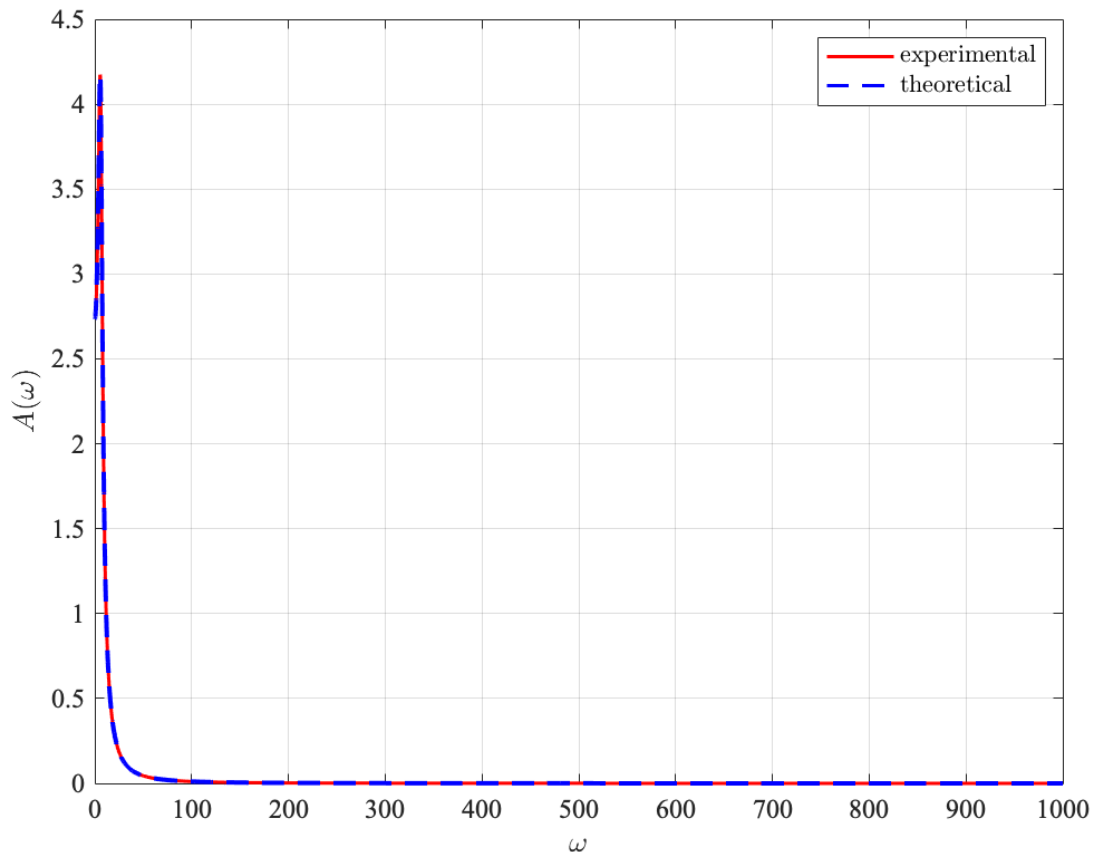


Рисунок 9 — АЧХ

ния совпадают с найденными аналитически, что говорит о корректности вычислений.

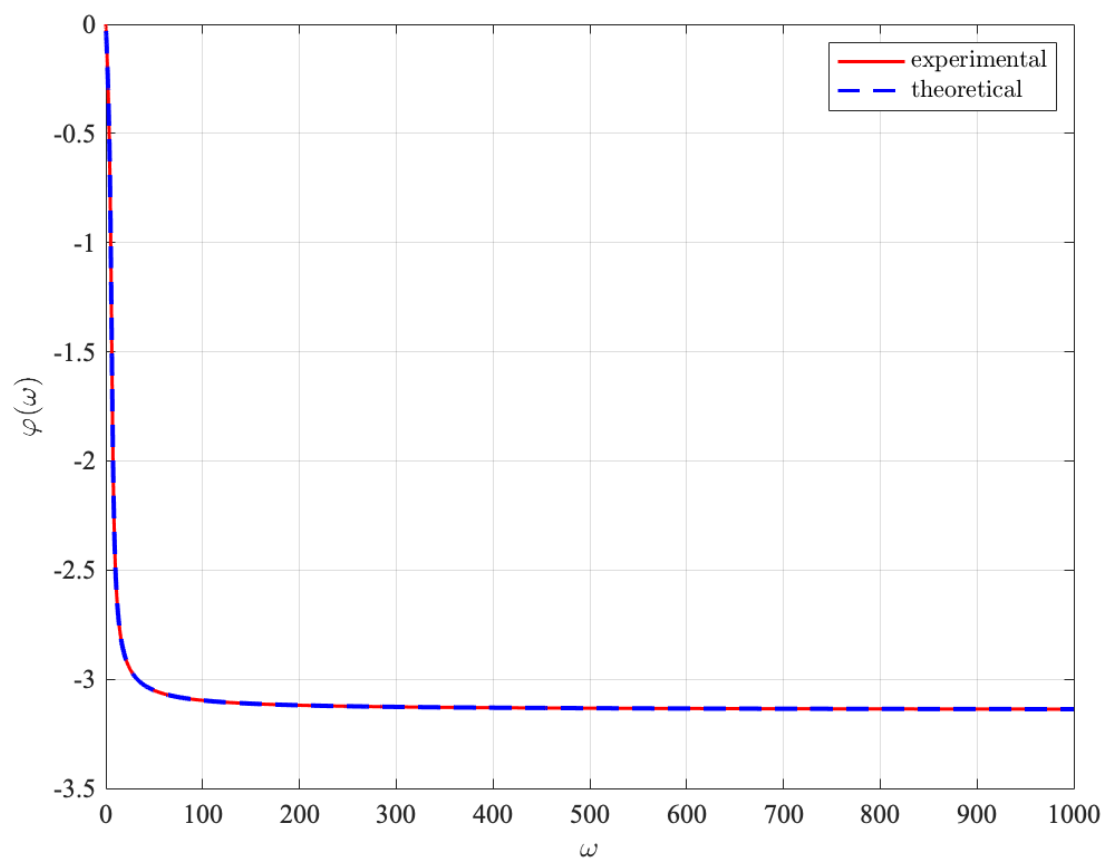


Рисунок 10 — ФЧХ

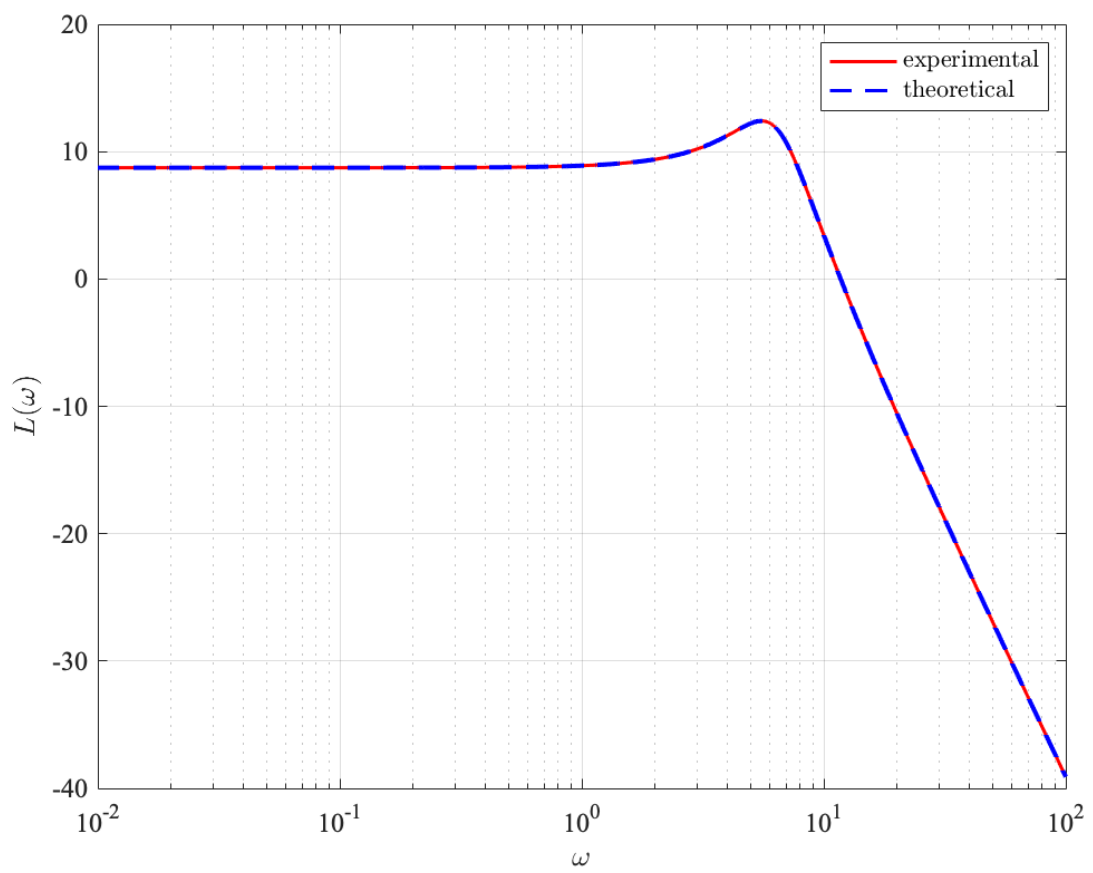


Рисунок 11 — ЛАЧХ

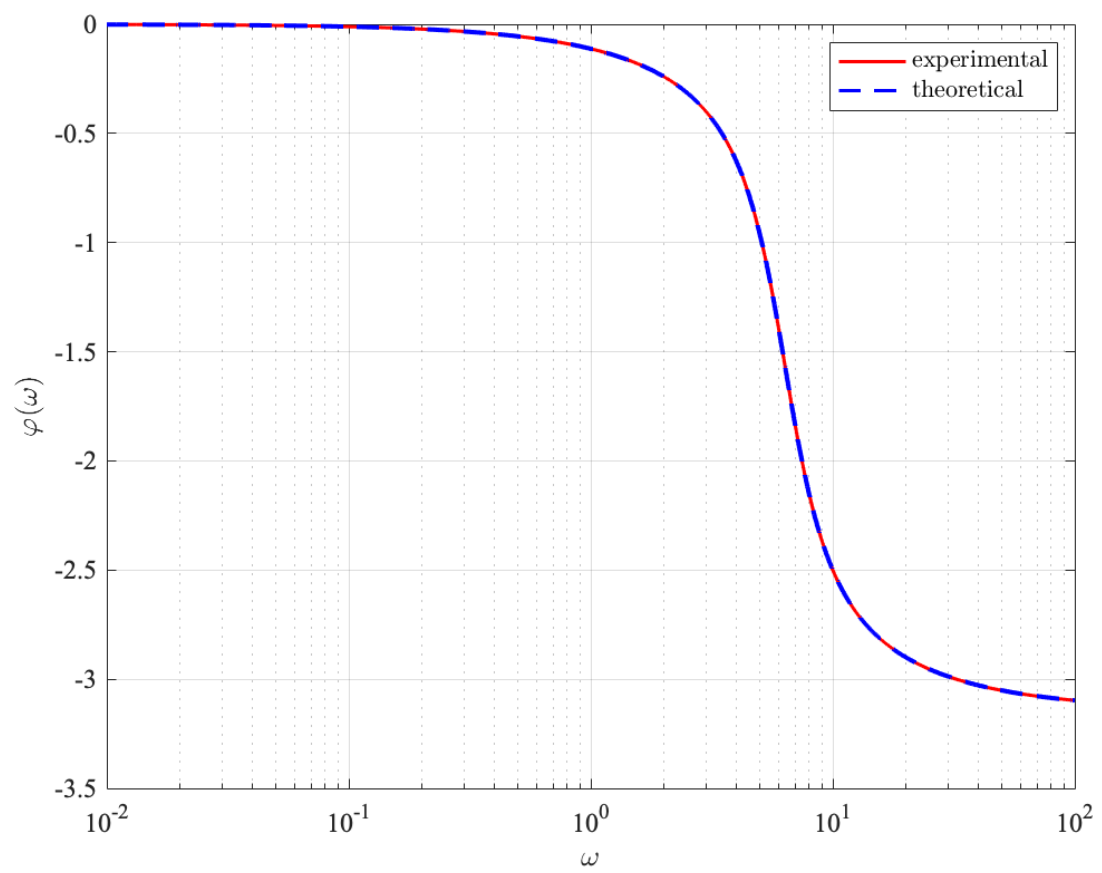


Рисунок 12 — ЛФЧХ

3 КОНДЕНСАТОР

Рассмотрим уравнение конденсатора:

$$I = C \frac{dU}{dt}$$

Перепишем в виде передаточной функции:

$$W(s) = \frac{1}{Cs}$$

Это **идеальное интегрирующее звено**, где $K = \frac{1}{C}$.

3.1 Временные характеристики

Весовая функция для идеального интегрирующего звена равна:

$$w(t) = K = \frac{1}{C}$$

Переходная функция для идеального интегрирующего звена равна:

$$h(t) = Kt = \frac{t}{C}$$

Графики временных характеристик, полученных в результате моделирования совпадают с найденными аналитически, что говорит о корректности вычислений.

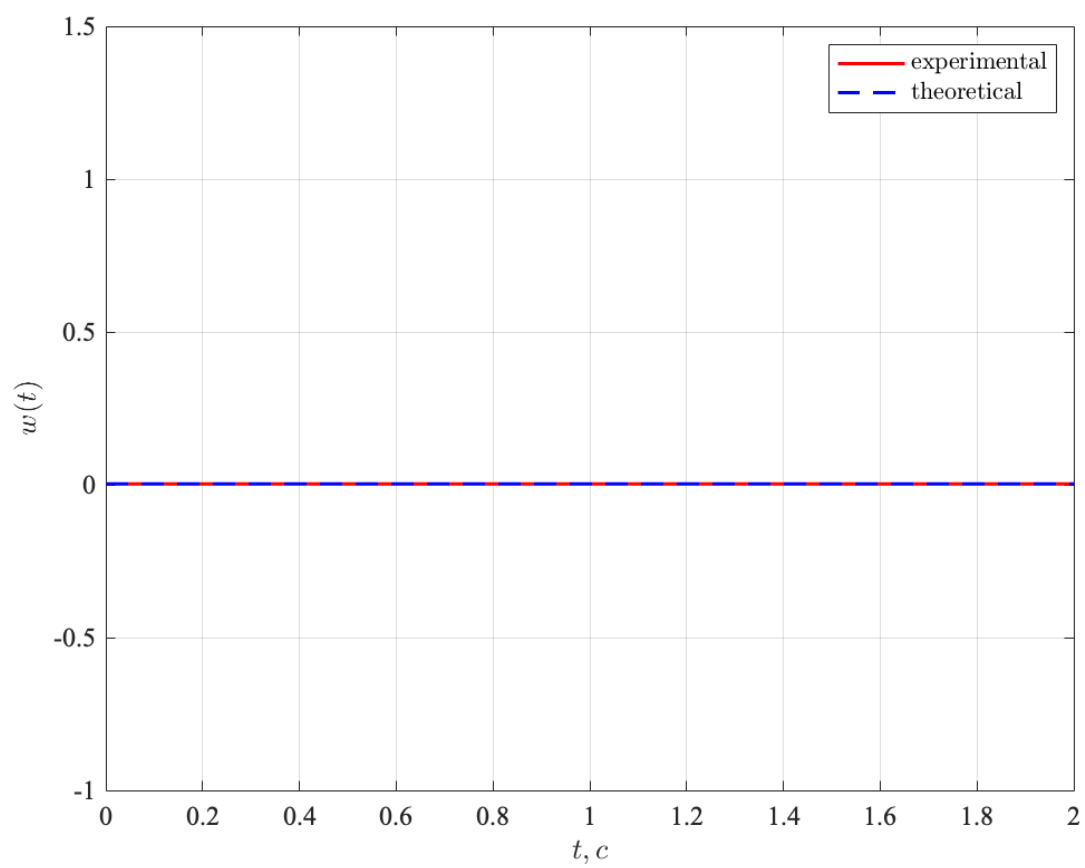


Рисунок 13 — Весовая функция

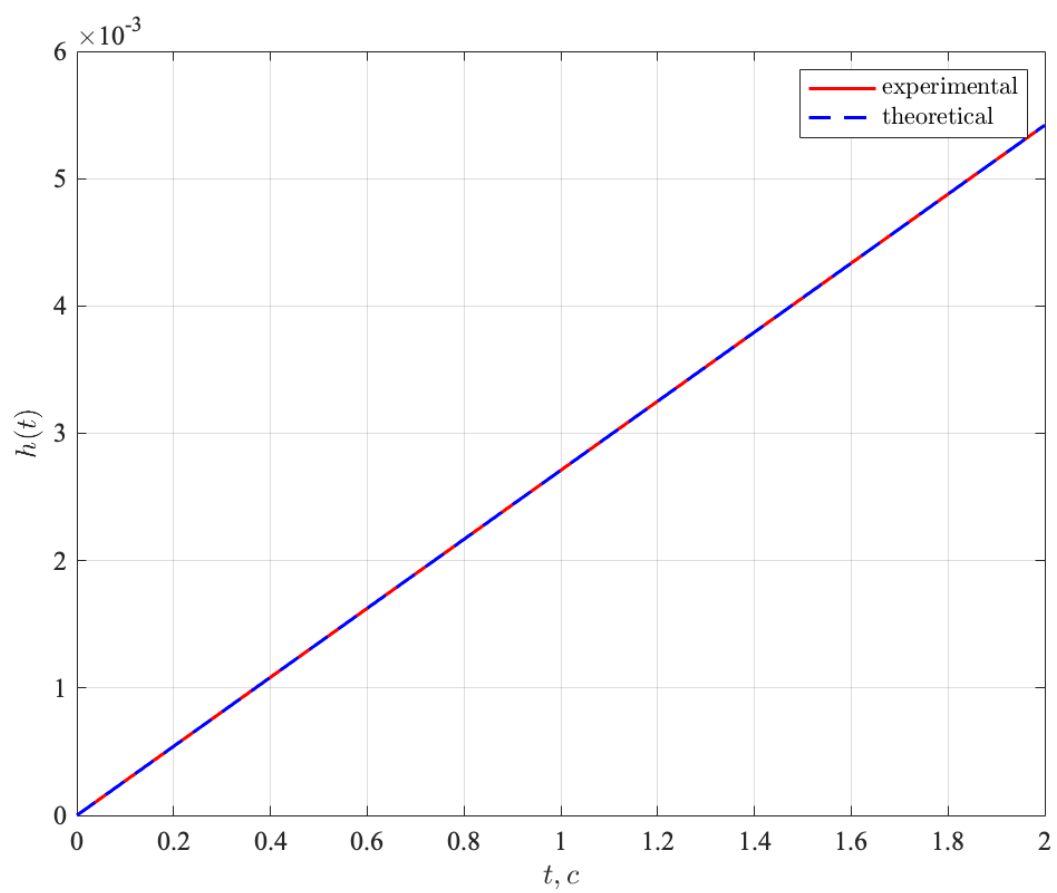


Рисунок 14 — Переходная функция

3.2 Частотные характеристики

АЧХ для идеального интегрирующего звена равна:

$$A(\omega) = \frac{K}{\omega} = \frac{1}{C\omega}$$

ФЧХ для идеального интегрирующего звена равна:

$$\phi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

ЛАЧХ для идеального интегрирующего звена равна:

$$L(\omega) = 20 \log K - 20 \log \omega = -20 \log C\omega$$

Графики частотных характеристик, полученных в результате моделирова-

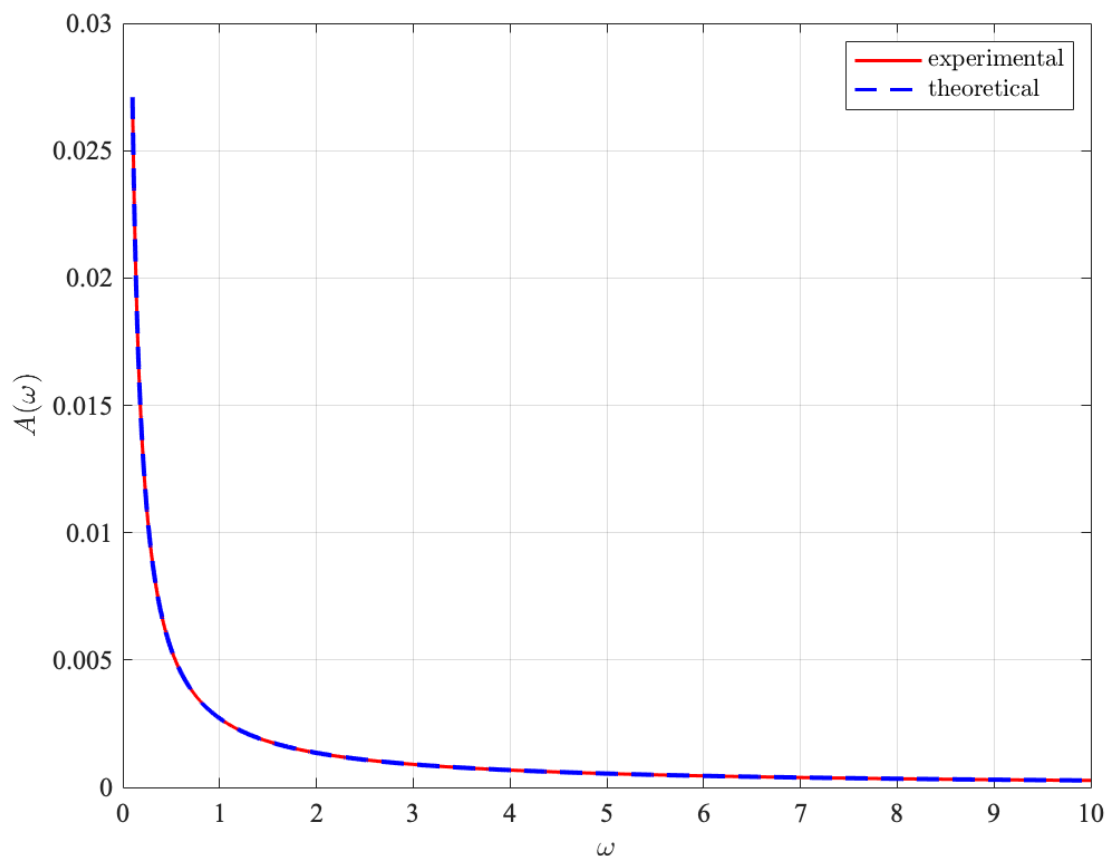


Рисунок 15 — АЧХ

ния совпадают с найденными аналитически, что говорит о корректности вычислений.

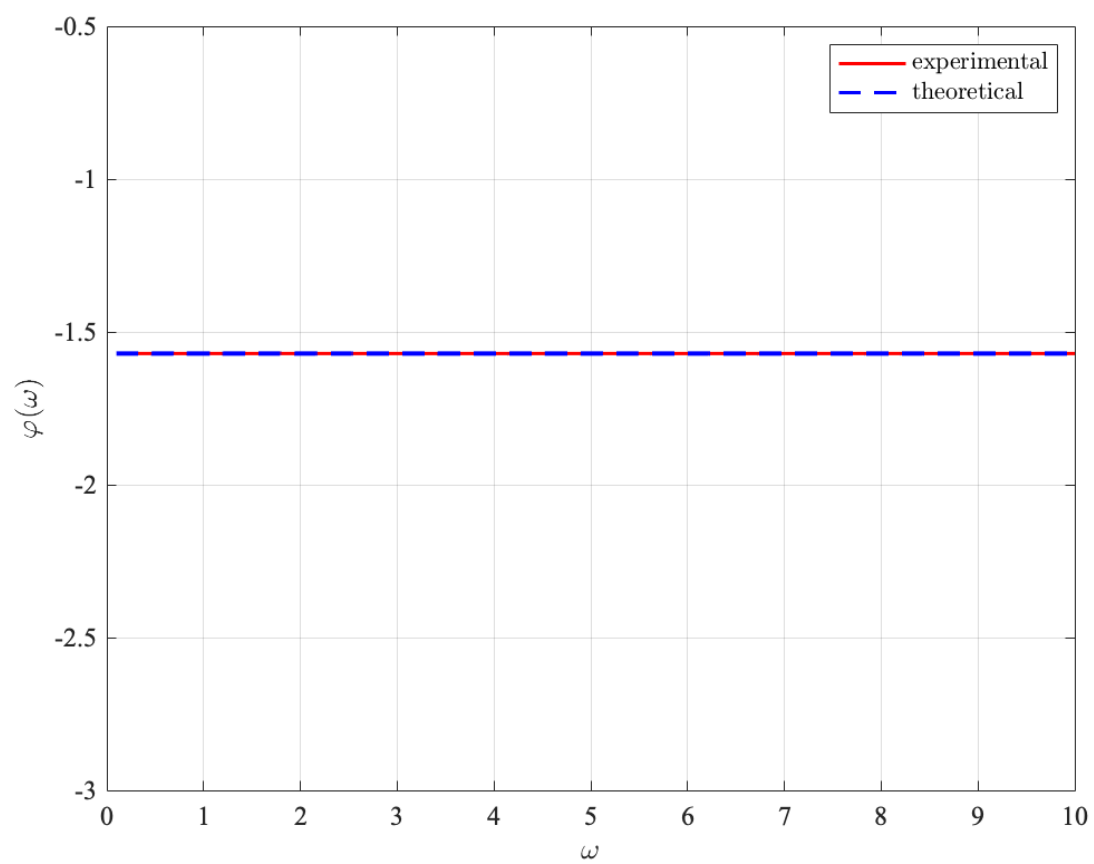


Рисунок 16 — ФЧХ

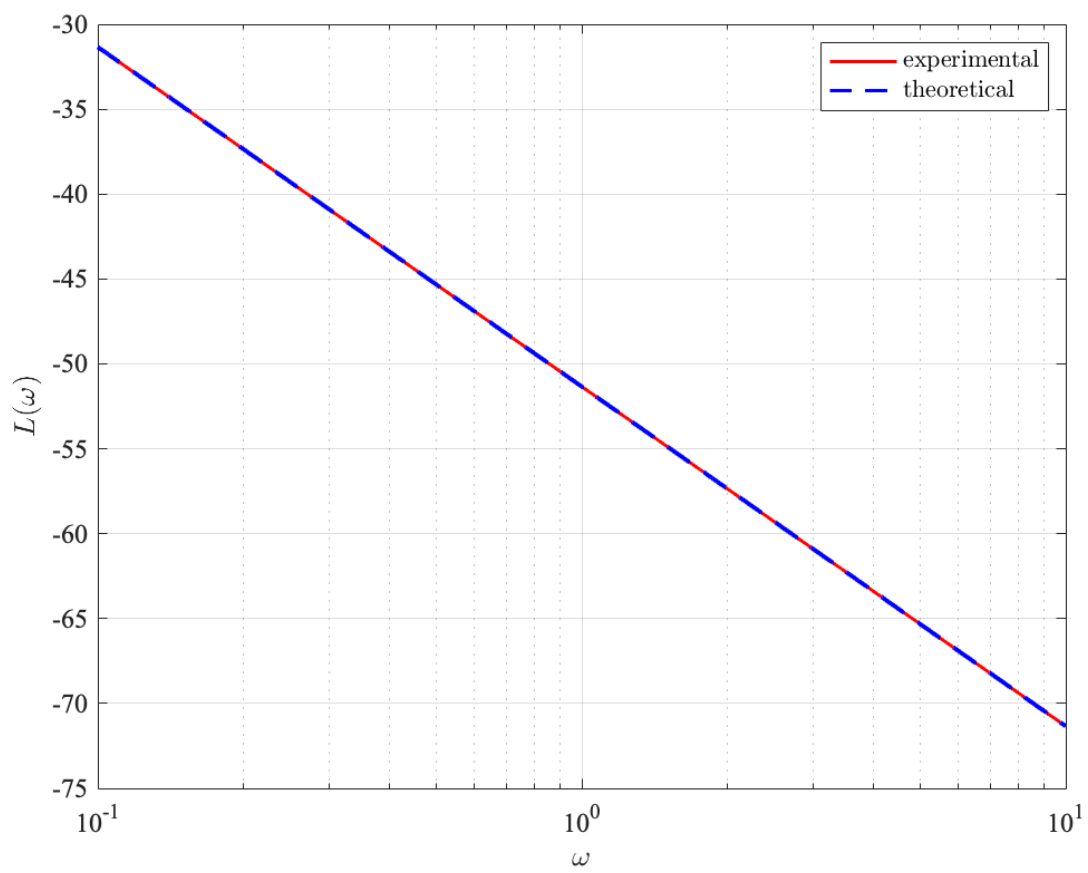


Рисунок 17 — ЛАЧХ

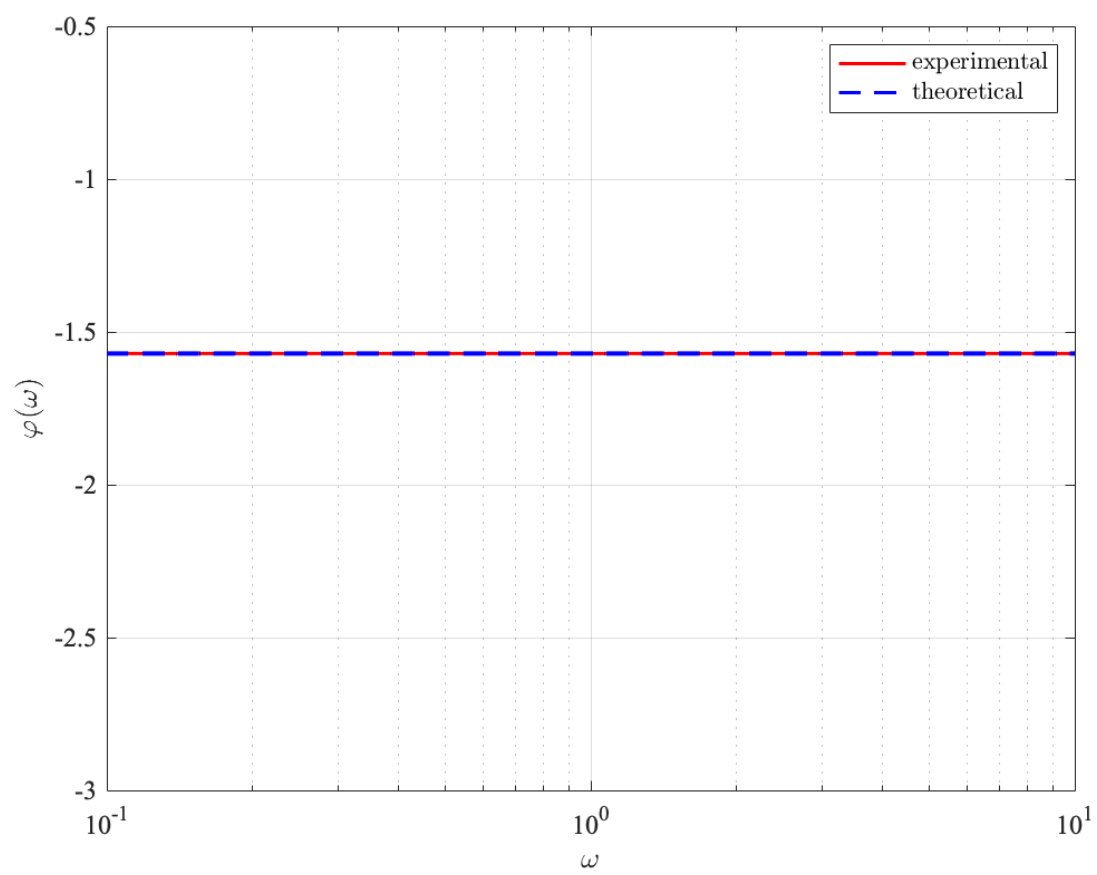


Рисунок 18 — ЛФЧХ

4 ПРУЖИННЫЙ МАЯТНИК

Даны уравнения пружинного маятника:

$$F_{\text{упр}} = -kx, \quad F = ma$$

Запишем следующее ДУ:

$$m\ddot{x} = -kx + F_{\text{внеш}}(t)$$

Перезапишем в виде передаточной функции:

$$W(s) = \frac{1}{ms^2 + k} = \frac{\frac{1}{k}}{\frac{m}{k}s^2 + 1}$$

Получили **консервативное звено**, где $K = \frac{1}{k}$ и $T = \sqrt{\frac{m}{k}}$.

4.1 Временные характеристики

Весовая функция для консервативного звена равна:

$$w(t) = \frac{K}{T} \sin\left(\frac{t}{T}\right) = \frac{1}{\sqrt{mk}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

Переходная функция для консервативного звена равна:

$$h(t) = K(1 - \cos(\frac{t}{T})) = \frac{1}{k}(1 - \cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t))$$

Графики временных характеристик, полученных в результате моделирования совпадают с найденными аналитически, что говорит о корректности вычислений.

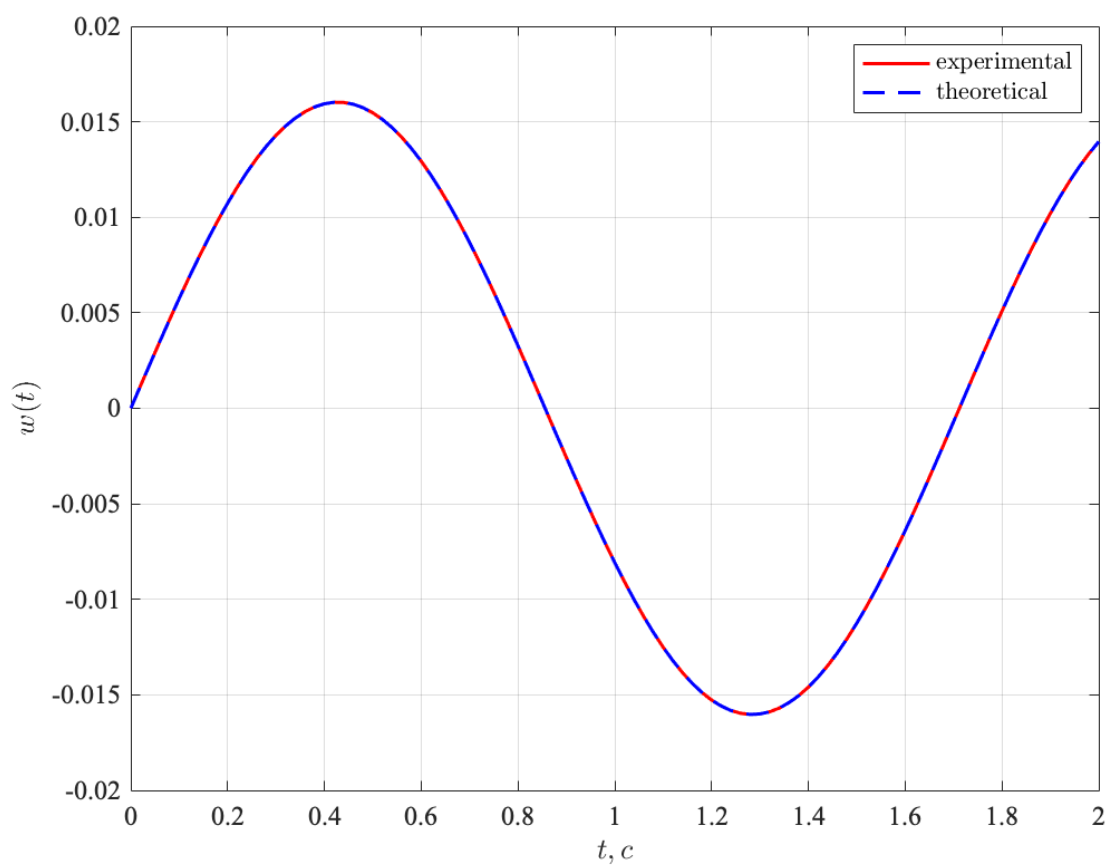


Рисунок 19 — Весовая функция

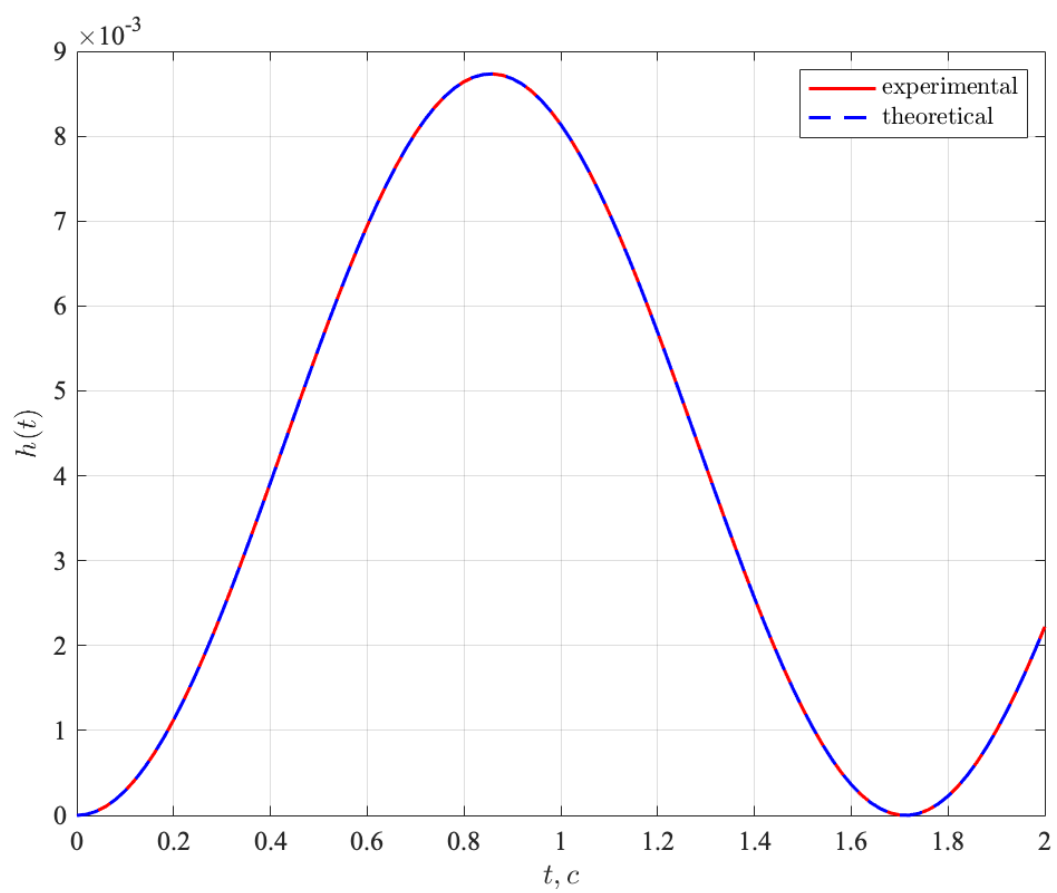


Рисунок 20 — Переходная функция

4.2 Частотные характеристики

АЧХ консервативного звена равна:

$$A(\omega) = \frac{K}{|1 - \omega^2 T^2|} = \frac{1}{k|1 - \omega^2 \frac{m}{k}|}$$

ФЧХ консервативного звена равна:

$$\phi(\omega) = -atan2(0, 1 - \omega^2 T^2) = -atan2(0, 1 - \omega^2 \frac{m}{k})$$

ЛАЧХ консервативного звена равна:

$$L(\omega) = 20 \log K - 20 \log |1 - \omega^2 T^2| = -20 \log k|1 - \omega^2 \frac{m}{k}|$$

Графики частотных характеристик, полученных в результате моделирова-

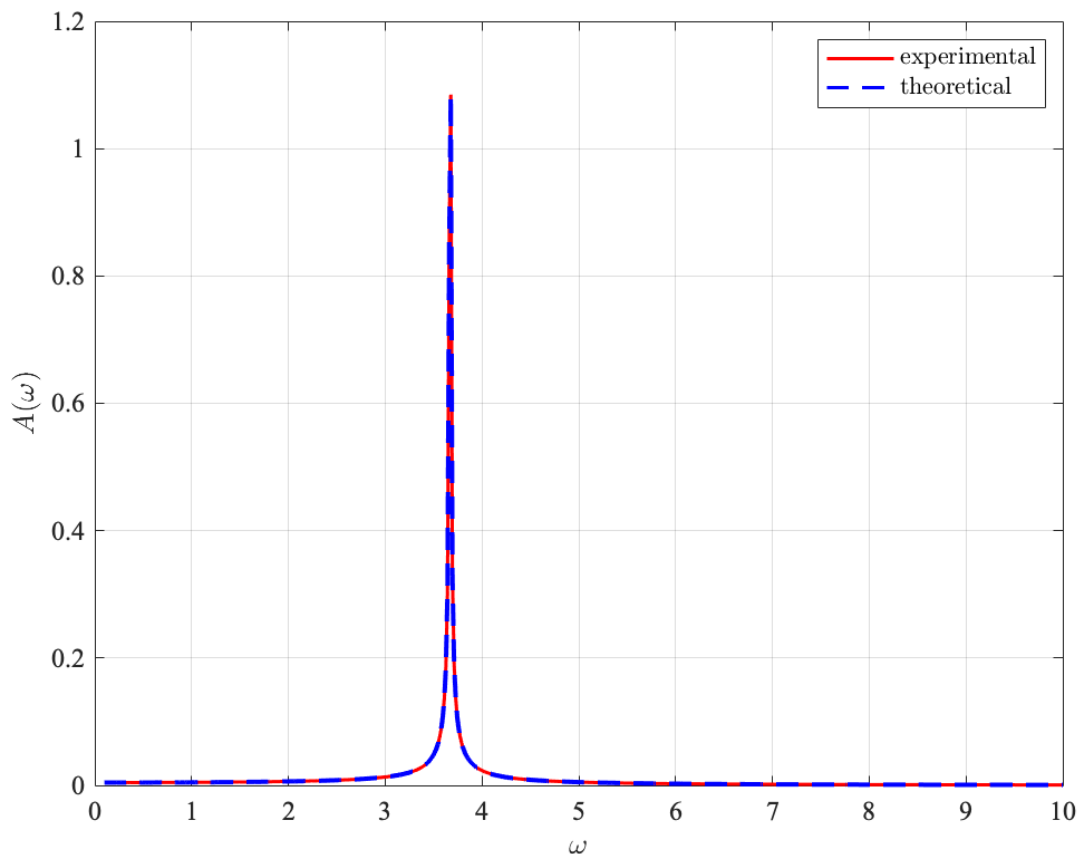


Рисунок 21 — АЧХ

ния совпадают с найденными аналитически, что говорит о корректности вычислений.

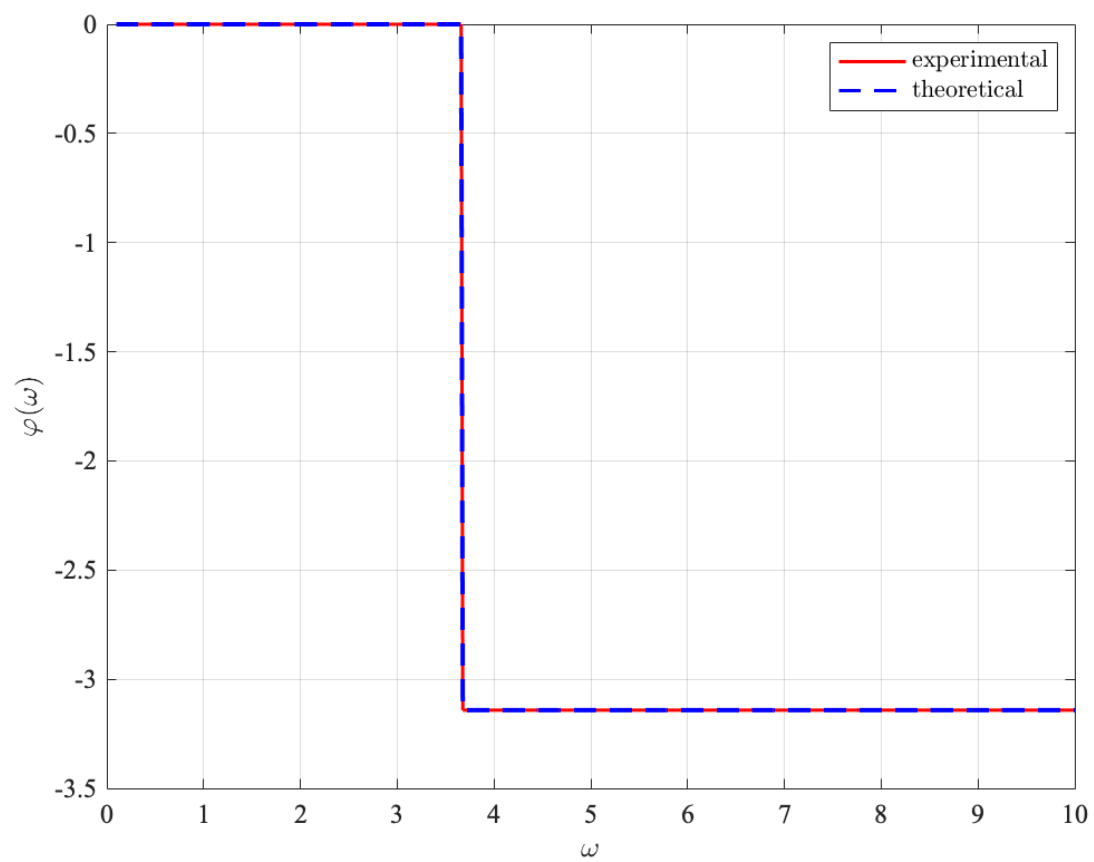


Рисунок 22 — ФЧХ

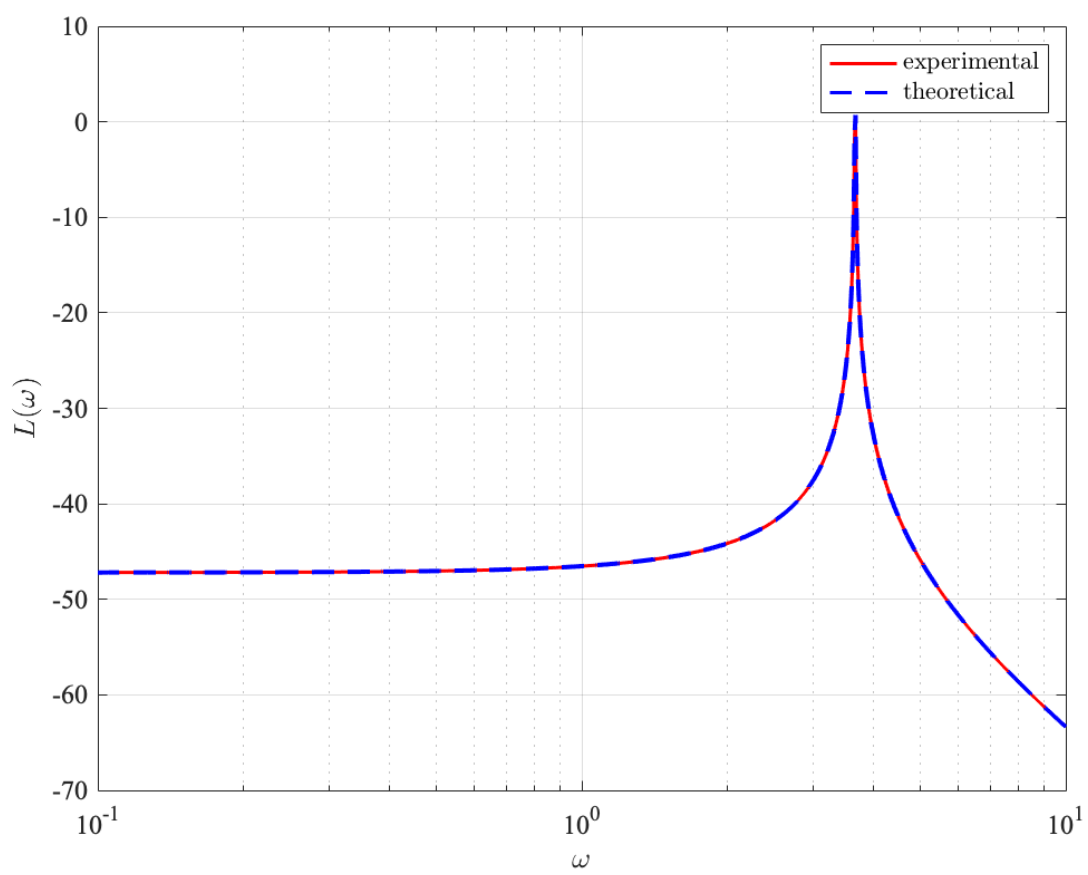


Рисунок 23 — ЛАЧХ

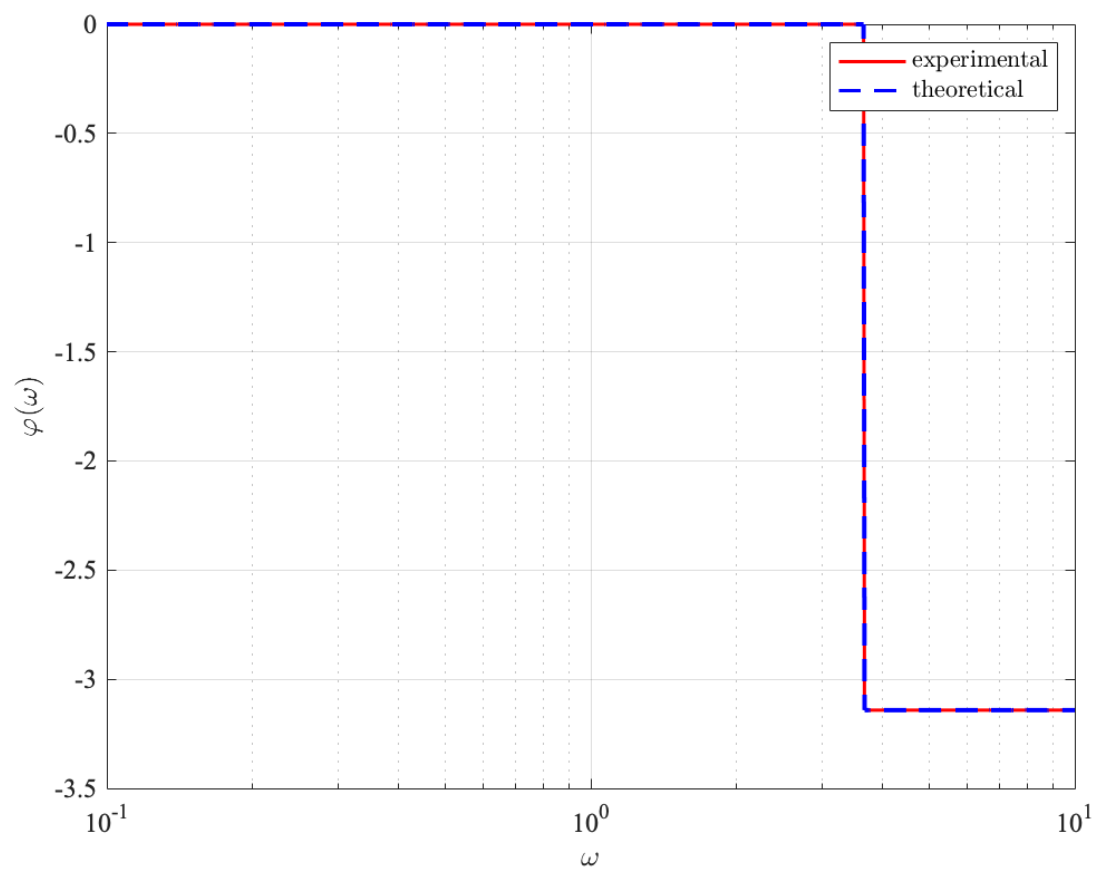


Рисунок 24 — ЛФЧХ

5 РЕГУЛЯТОР НА ОПЕРАЦИОННОМ УСИЛИТЕЛЕ

Данная схема представляет собой **ПИ-регулятор**. Передаточная функция записывается следующим образом:

$$W(s) = \frac{T_2 s + 1}{T_1 s} = \frac{T_2}{T_1} + \frac{1}{T_1 s}$$

, где $T_1 = R_1 C$ и $T_2 = R_2 C$. Коэффициенты регулятора: $K_p = \frac{T_2}{T_1} = \frac{R_2}{R_1}$, $K_i = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{R_1 C}$

5.1 Временные характеристики

Найдем весовую функцию регулятора:

$$w(t) = \frac{T_2 \delta(t) + 1}{T_1}$$

Найдем переходную функцию регулятора:

$$h(t) = \frac{t + T_2}{T_1}$$

Графики временных характеристик, полученных в результате моделирования совпадают с найденными аналитически, что говорит о корректности вычислений.

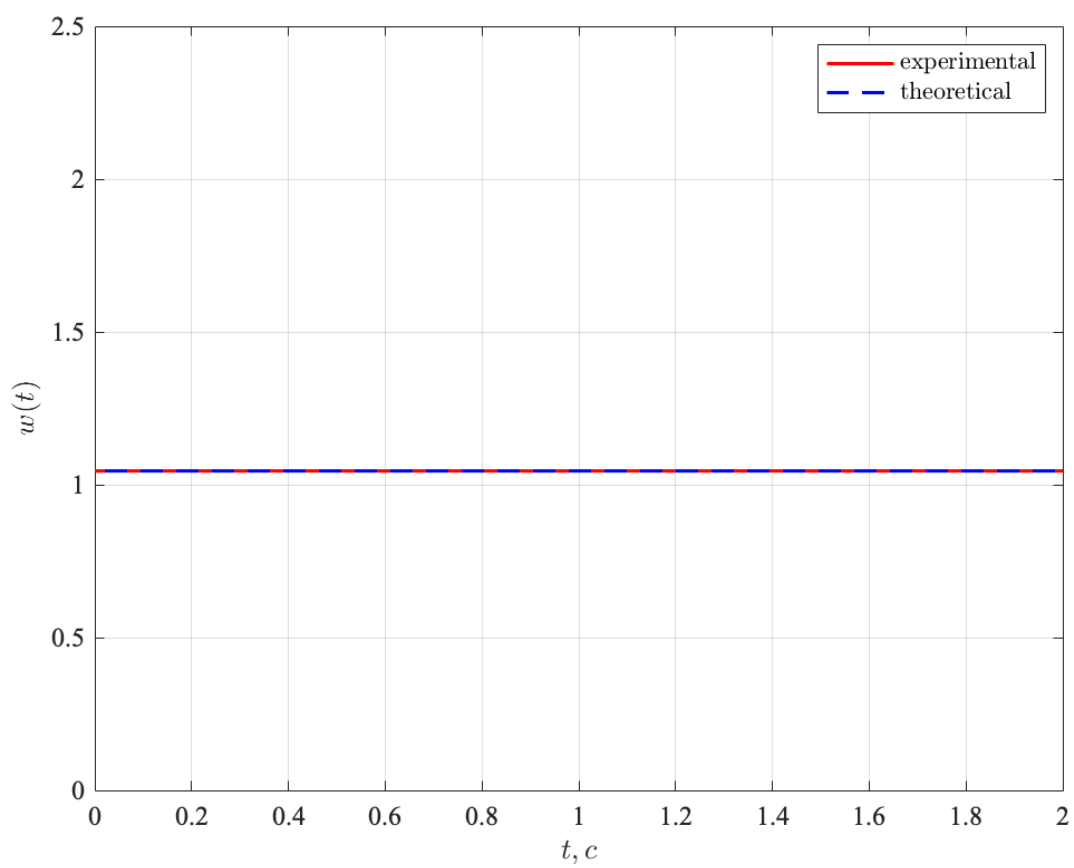


Рисунок 25 — Весовая функция

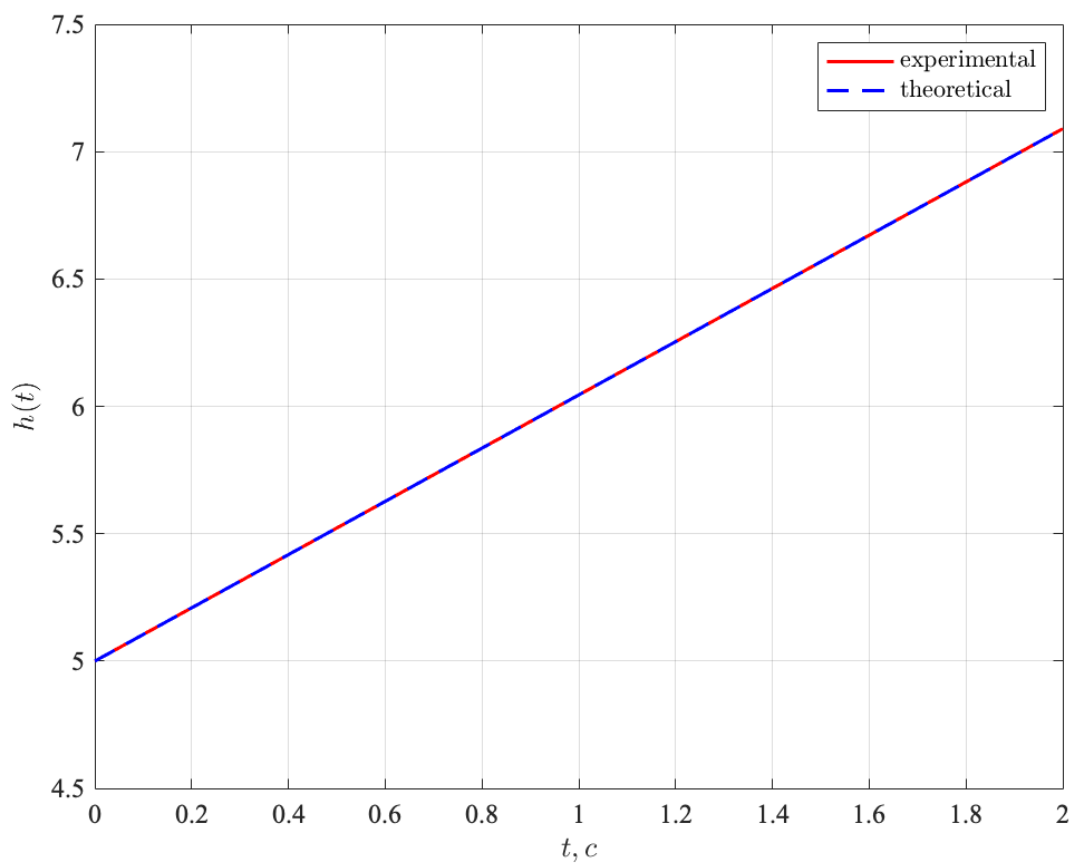


Рисунок 26 — Переходная функция

5.2 Частотные характеристики

Найдем АЧХ регулятора:

$$A(\omega) = \sqrt{\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 + \frac{1}{T_1^2 \omega^2}}$$

Найдем ФЧХ регулятора:

$$\phi(\omega) = \text{atan2}\left(\frac{1}{T_1 \omega}, \frac{T_2}{T_1}\right)$$

Найдем ЛАЧХ регулятора:

$$L(\omega) = 20 \log \left(\sqrt{\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 + \frac{1}{T_1^2 \omega^2}} \right)$$

Графики частотных характеристик, полученных в результате моделирова-

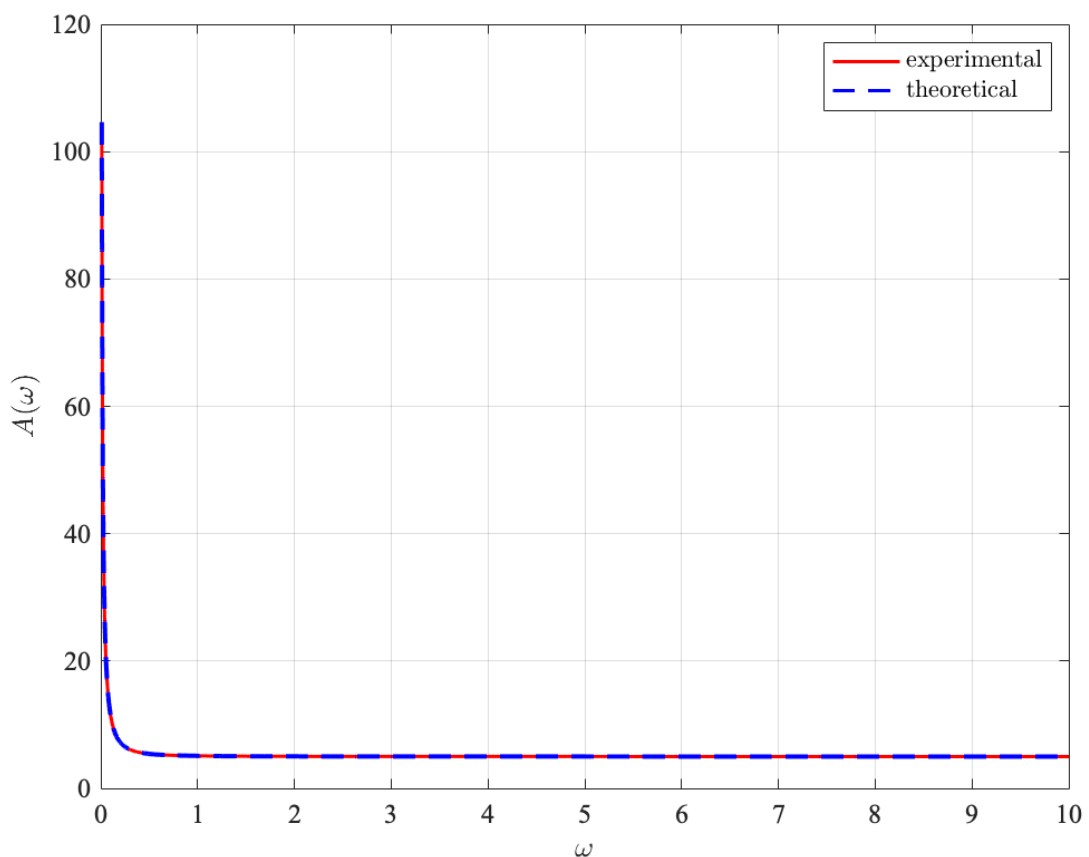


Рисунок 27 — АЧХ

ния совпадают с найденными аналитически, что говорит о корректности вычислений.

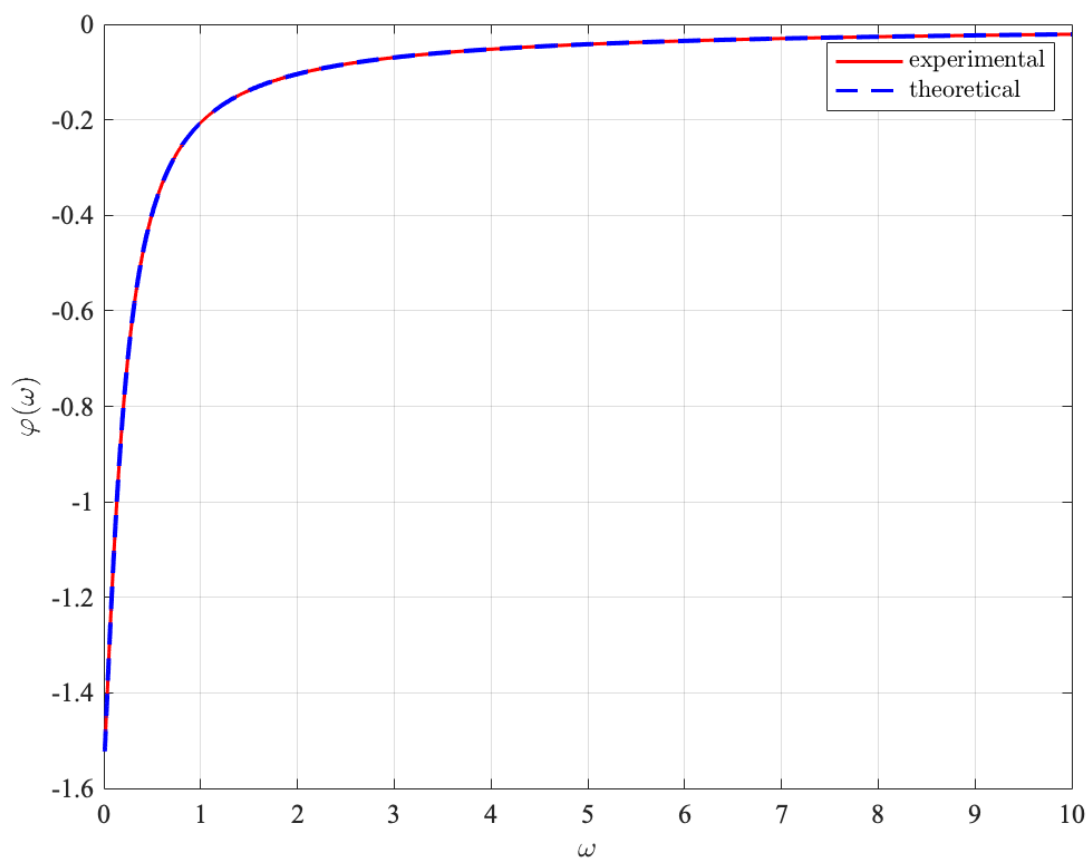


Рисунок 28 — ФЧХ

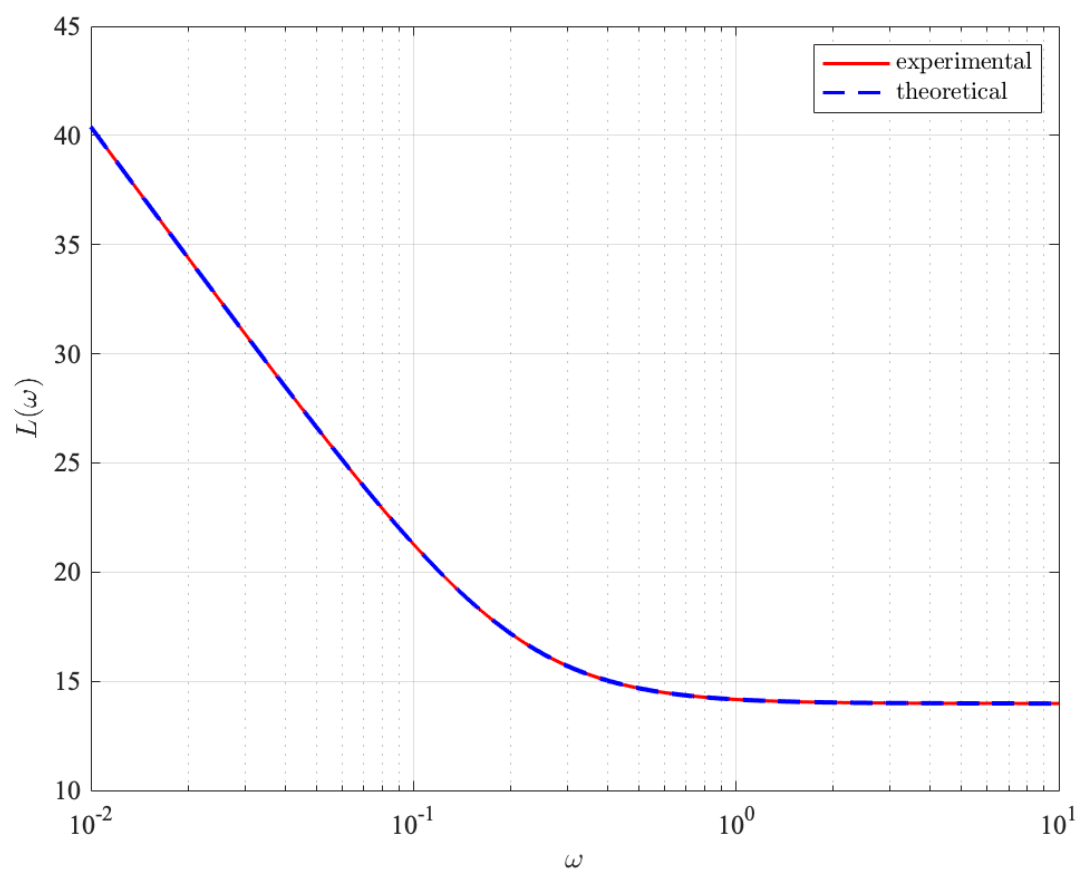


Рисунок 29 — ЛАЧХ

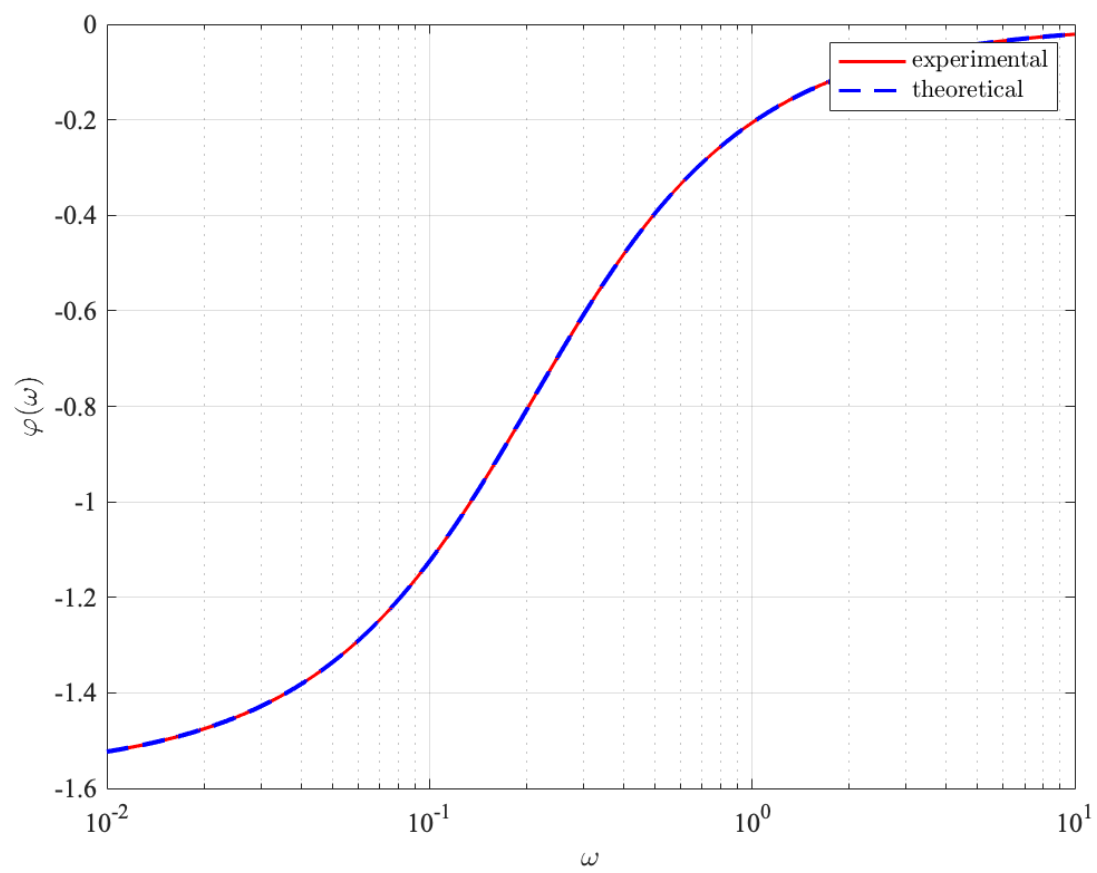


Рисунок 30 — ЛФЧХ

6 ВЫВОДЫ

В данной работе мы познакомились с различными типовыми динамическими звеньями, а также нашли их временные и частотные характеристики, проверили корректность их вычисления с помощью моделирования.