

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Университет ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЁТ
по лабораторной работе №2
по дисциплине
«Линейные системы автоматического управления»

по теме:
СВОБОДНОЕ ДВИЖЕНИЕ, УСТОЙЧИВОСТЬ
(ВАРИАНТ 12)

Студент:
Группа R3343

Ткачёв И.Ю.

Предподаватель:
ассистент

Пашенко А.В.

Санкт-Петербург
2024

СОДЕРЖАНИЕ

1	СВОБОДНОЕ ДВИЖЕНИЕ	3
1.1	Структурная схема системы	3
1.2	Листинги аналитических расчетов	3
1.3	Результаты вычисления коэффициентов a_0, a_1	4
1.4	Аналитические выражения $y_{св}(t)$	4
1.5	Графики сигналов $y_{св}(t)$, их сопоставление с вычисленными аналитически	4
1.6	Выводы	12
2	ОБЛАСТЬ УСТОЙЧИВОСТИ	13
2.1	Листинги аналитических расчетов	13
2.2	Графическое изображение границы устойчивости на плоскости двух параметров $K(T_1)$ для случая фиксированной T_2	14
2.3	Графическое изображение границы устойчивости на плоскости двух параметров $K(T_2)$ для случая фиксированной T_1	15
2.4	Графики сигналов $y(t)$ для трех наборов параметров K, T_1 и T_2 , соответствующих различным случаям устойчивости	16
2.5	Вывод	21
3	АВТОНОМНЫЙ ГЕНЕРАТОР	22
3.1	Листинги аналитических расчетов	22
3.2	Графики сигналов $g_{ж}(t)$ и $g(t)$ с их сопоставлением	23
4	ВЫВОД	25

1 СВОБОДНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Рассмотрим математическую модель системы в виде дифференциального уравнения:

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = u$$

с некоторыми начальными условиями $y(0), \dot{y}(0)$.

1.1 Структурная схема системы

С помощью блоков элементарных операций построим структурную схему системы. Проведем шесть экспериментов с различными параметрами

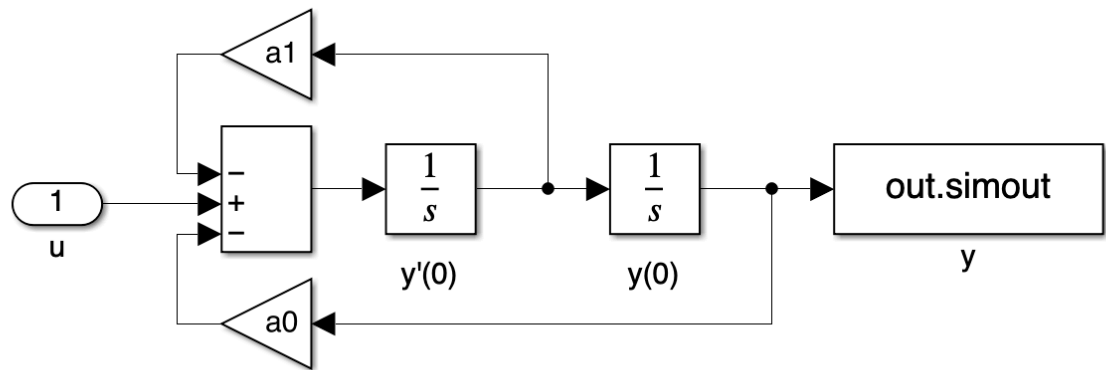


Рисунок 1 — Структурная схема системы в Simulink

системы. Так как мы изучаем свободное движение системы, входное воздействие $u(t)$ примем за 0.

1.2 Листинги аналитических расчетов

Запишем характеристическое уравнение нашего ДУ:

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

Из теоремы Виета знаем, что:

$$\begin{cases} a_0 = \lambda_1 * \lambda_2 \\ a_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2) \end{cases}$$

Так мы сможем найти коэффициенты a_0 и a_1 в зависимости от корней характеристического уравнения.

Общий вид решения однородного ДУ:

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

Это и будет являться аналитическим выражением $y_{\text{св}}(t)$. Коэффициенты c_1 и c_2 находятся в зависимости от начальных условий $y(0)$ и $\dot{y}(0)$.

1.3 Результаты вычисления коэффициентов a_0, a_1

Приведу полученные коэффициенты для каждого из экспериментов:

1. $a_1 = 8, a_0 = 16$
2. $a_1 = 3.4, a_0 = 198.89$
3. $a_1 = 0, a_0 = 196$
4. $a_1 = -3.4, a_0 = 198.89$
5. $a_1 = -8, a_0 = 16$
6. $a_1 = 0, a_0 = -1.69$

1.4 Аналитические выражения $y_{\text{св}}(t)$

1. $y_{\text{св}}(t) = e^{-4t} + 4te^{-4t}$
2. $y_{\text{св}}(t) = \frac{17}{140}e^{-1.7t}\sin 14t + e^{-1.7t}\cos 14t$
3. $y_{\text{св}}(t) = e^{-4t} + 4te^{-4t}$
4. $y_{\text{св}}(t) = \cos 14t$
5. $y_{\text{св}}(t) = 0.05e^{4t} - 0.2te^{4t}$
6. $y_{\text{св}}(t) = \frac{1}{26}e^{1.3t} - \frac{1}{26}e^{-1.3t}$

1.5 Графики сигналов $y_{\text{св}}(t)$, их сопоставление с вычисленными аналитически

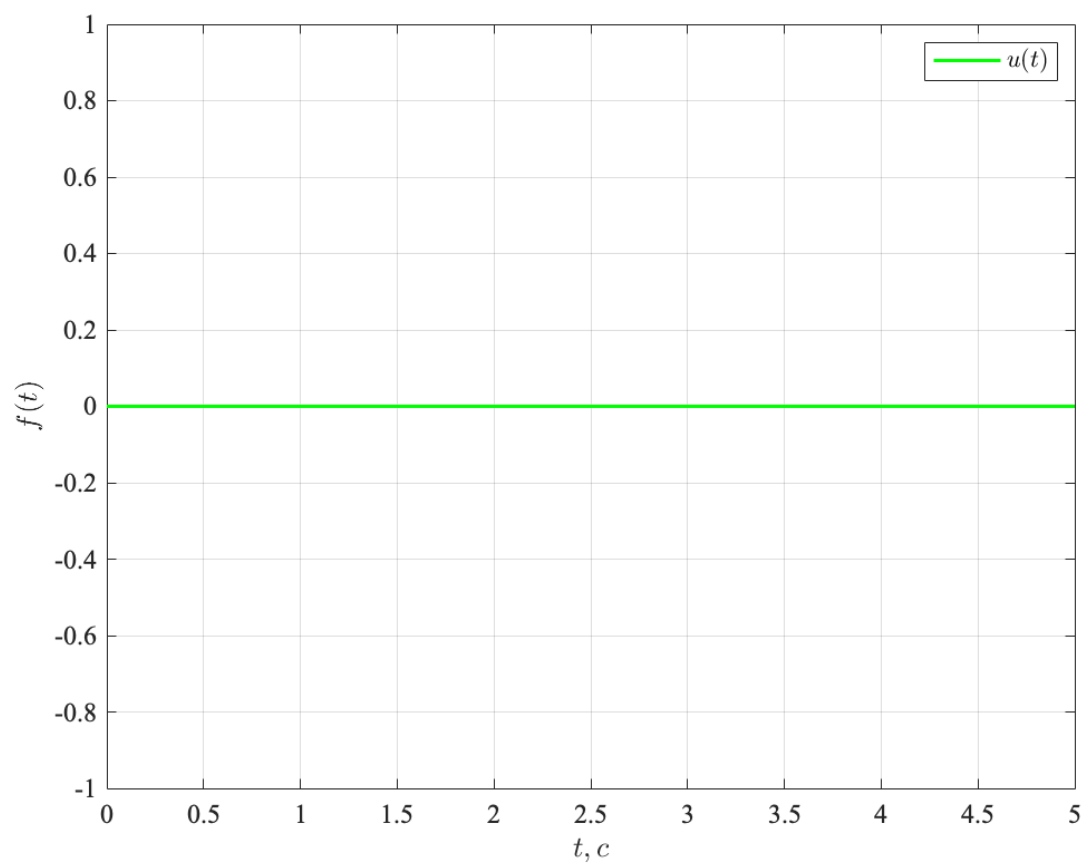


Рисунок 2 — График входного сигнала

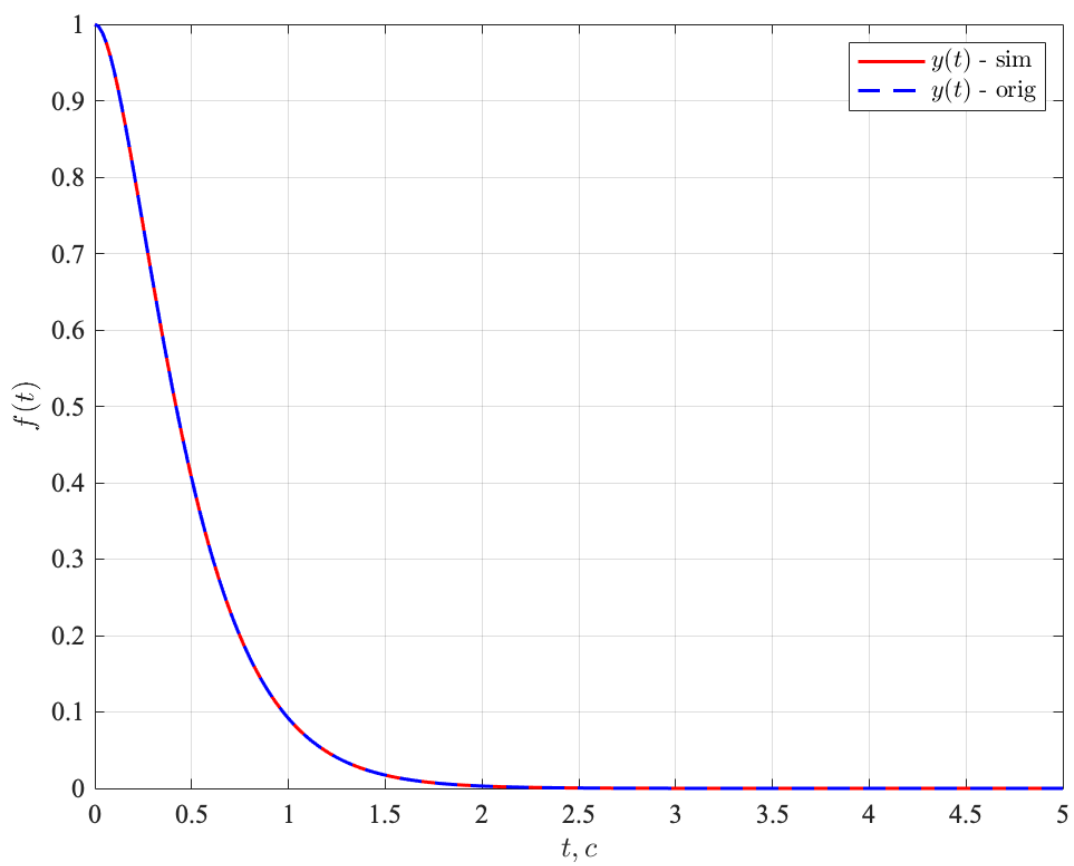


Рисунок 3 — Эксперимент 1

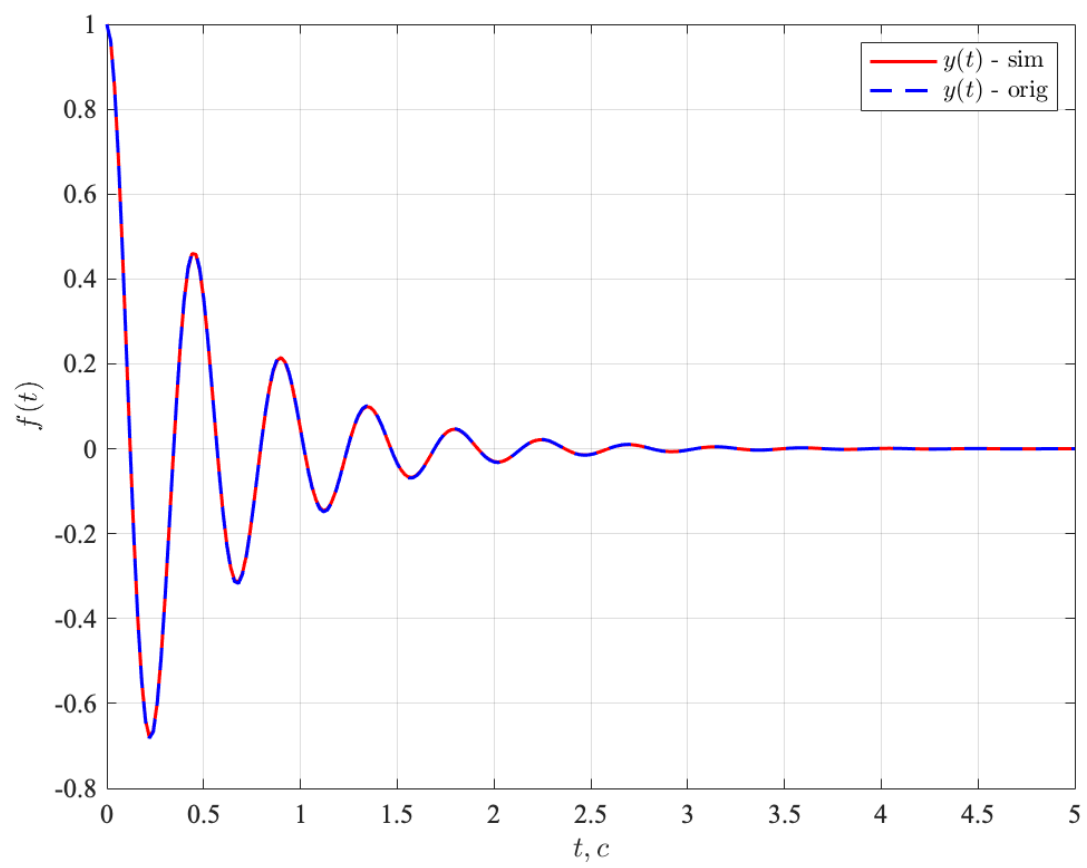


Рисунок 4 — Эксперимент 2

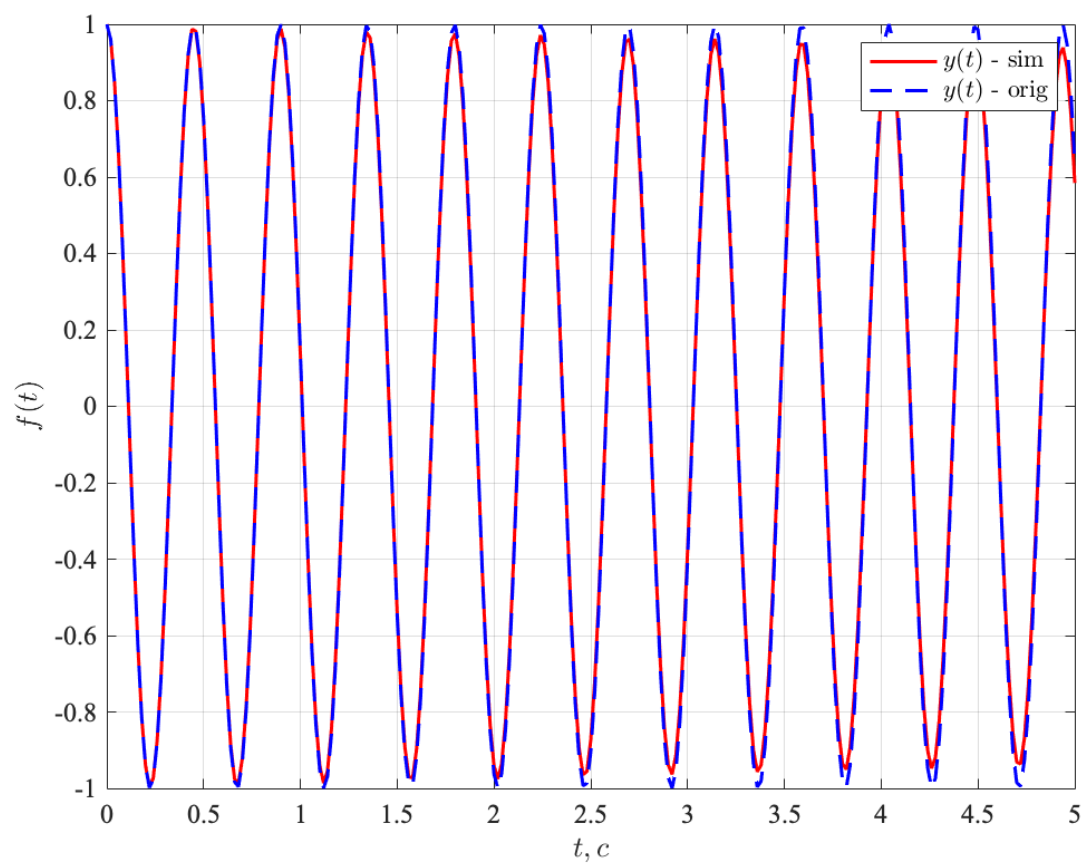


Рисунок 5 — Эксперимент 3

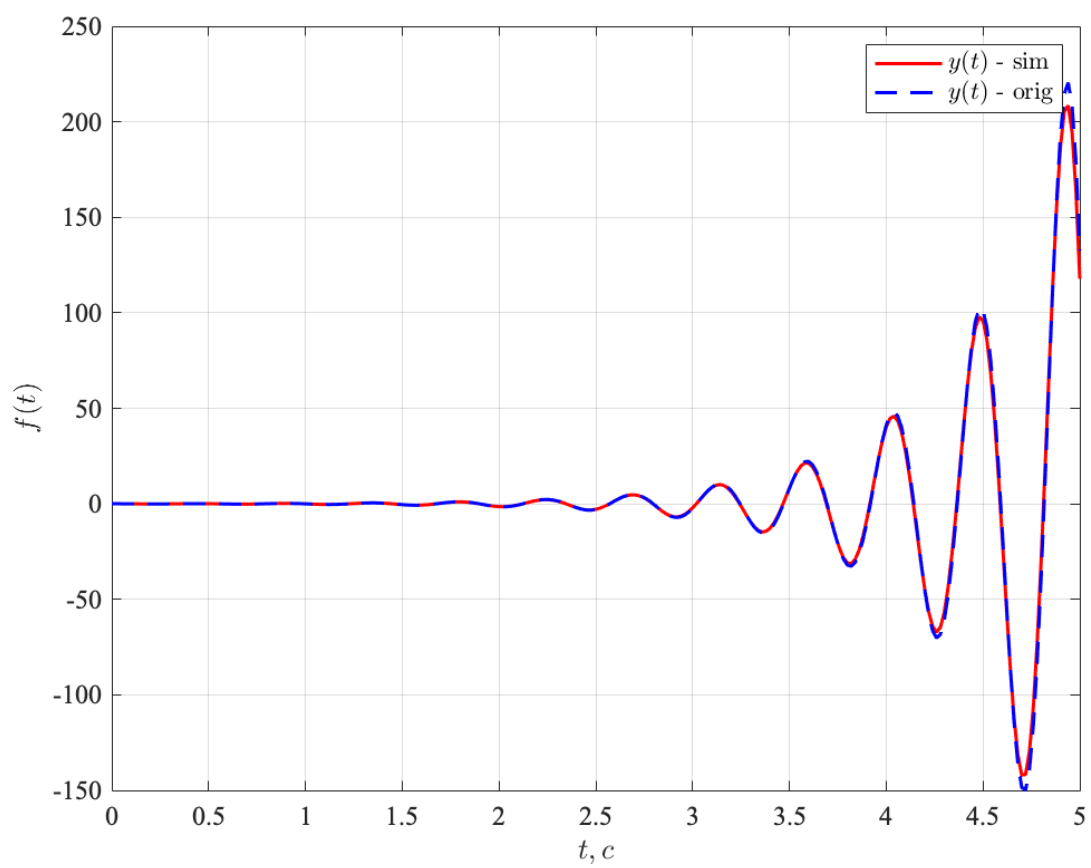


Рисунок 6 — Эксперимент 4

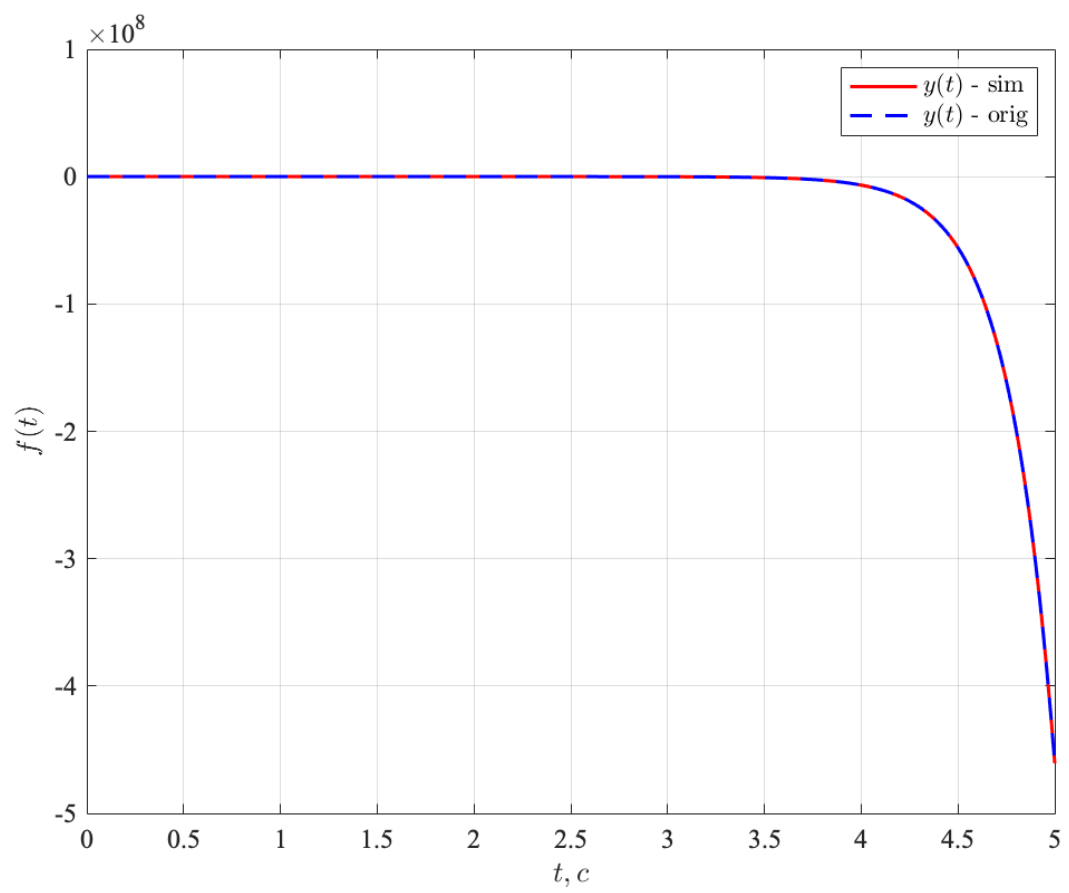


Рисунок 7 — Эксперимент 5

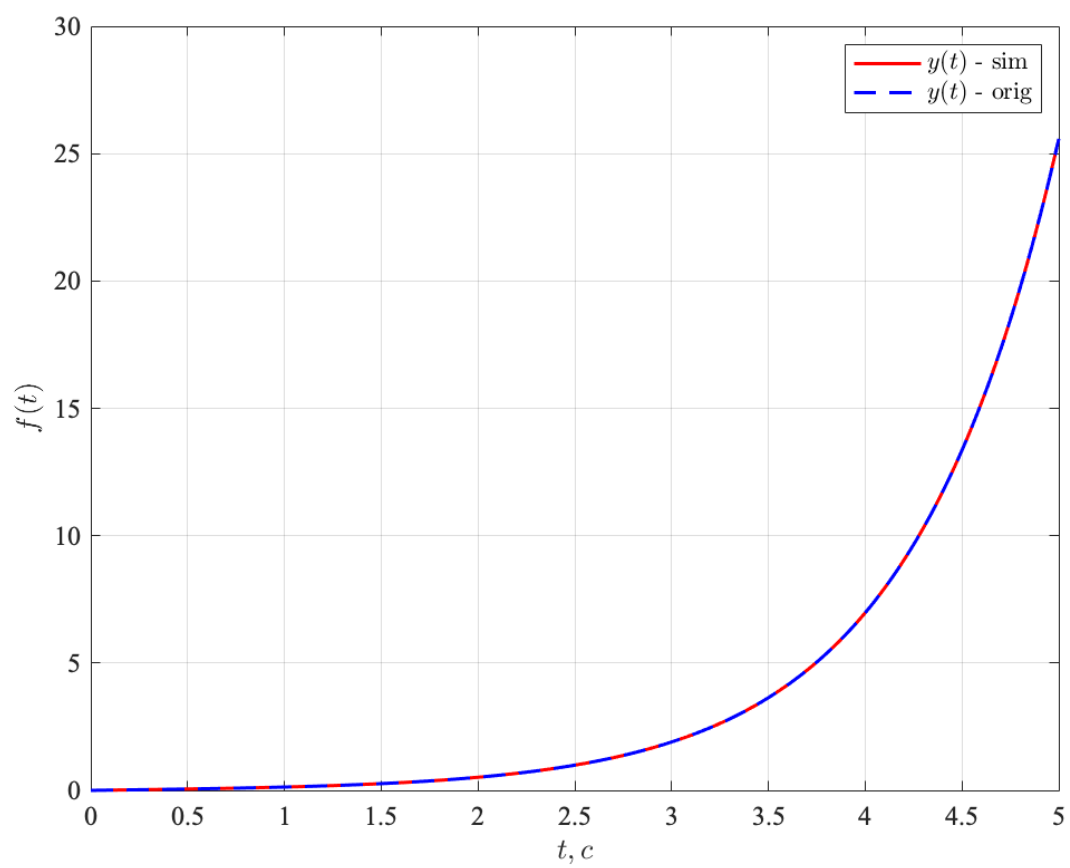


Рисунок 8 — Эксперимент 6

1.6 Выводы

Графики сигналов, получившиеся в результате моделирования, совпадаю с вычисленными аналитически. Также можно сделать вывод об устойчивости каждой из систем:

1. Система асимптотически устойчива. Это можно наблюдать на графике сигнала, также $Re\lambda_1, \lambda_2 < 0$
2. Система асимптотически устойчива. Это можно наблюдать на графике сигнала, также $Re\lambda_1, \lambda_2 < 0$
3. Система устойчива (но не асимптотически). Это можно наблюдать на графике сигнала, также $Re\lambda_1, \lambda_2 = 0$ и $Im\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$
4. Система неустойчива. Это можно наблюдать на графике сигнала, также $Re\lambda_1, \lambda_2 > 0$
5. Система неустойчива. Это можно наблюдать на графике сигнала, также $Re\lambda_1, \lambda_2 > 0$
6. Система неустойчива. Это можно наблюдать на графике сигнала, также $Re\lambda_1 > 0$

2 ОБЛАСТЬ УСТОЙЧИВОСТИ

2.1 Листинги аналитических расчетов

В данном задании мы имеем дело с системой 3-го порядка, заданной следующей структурной схемой.

Определим при каких значениях постоянных времени T_1 и T_2 , полюса со-

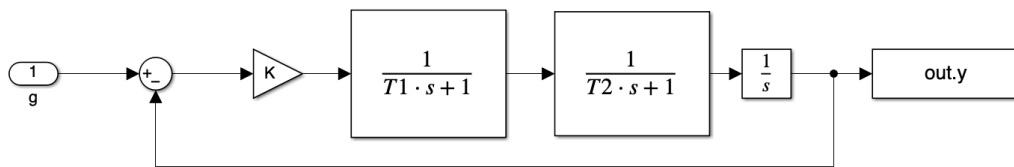


Рисунок 9 — Структурная схема системы

ответствующих передаточных функций совпадут с первым набором корней λ_1, λ_2 из **Задания 1**.

Запишем следующую систему:

$$\begin{cases} T_1 s + 1 = 0 \\ T_2 s + 1 = 0 \\ s = -4 \end{cases}$$

Получим следующие значения T_1 и T_2 :

$$\begin{cases} T_1 = \frac{1}{4} \\ T_2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Определим границу устойчивости в пространстве параметров K и T_1 с фиксированным T_2 , опираясь на критерий Гурвица. Аналогично определим границу устойчивости в пространстве параметров K и T_2 с фиксированным T_1 . Для начала запишем ДУ нашей системы:

$$y = \frac{K(g - y)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} = \frac{K(g - y)}{T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + s}$$

$$T_1 T_2 \ddot{y} + (T_1 + T_2) \dot{y} + y + K y = 0$$

$$\ddot{y} + \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} \dot{y} + \frac{1}{T_1 T_2} y + \frac{K}{T_1 T_2} y = 0$$

Получили следующее:

$$\begin{cases} a_3 = 1 \\ a_2 = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} \\ a_1 = \frac{1}{T_1 T_2} \\ a_0 = \frac{K}{T_1 T_2} \end{cases}$$

В нашем случае критерий Гурвица можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} K > 0 \\ T_1, T_2 > 0 \\ \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} > K \end{cases}$$

Теперь, подставив фиксированное T_2 или T_1 , мы можем получить уравнения границ устойчивости $K(T_1)$ и $K(T_2)$. Области, лежащие под этими кривыми будут областями устойчивости в каждом из пространств параметров.

$$\begin{cases} K(T_1) = 4 + \frac{1}{T_1} \\ K(T_2) = 4 + \frac{1}{T_2} \end{cases}$$

2.2 Графическое изображение границы устойчивости на плоскости двух параметров $K(T_1)$ для случая фиксированной T_2

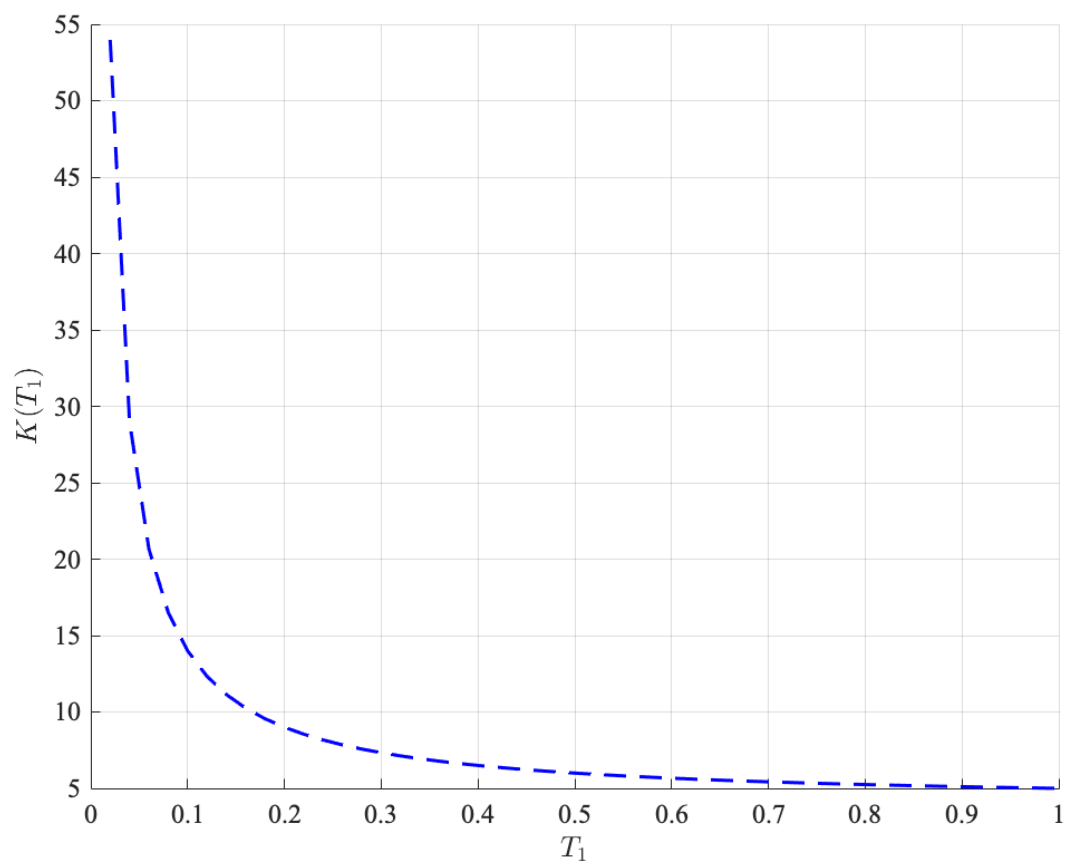


Рисунок 10 — Граница устойчивости $K(T_1)$

2.3 Графическое изображение границы устойчивости на плоскости двух параметров $K(T_2)$ для случая фиксированной T_1

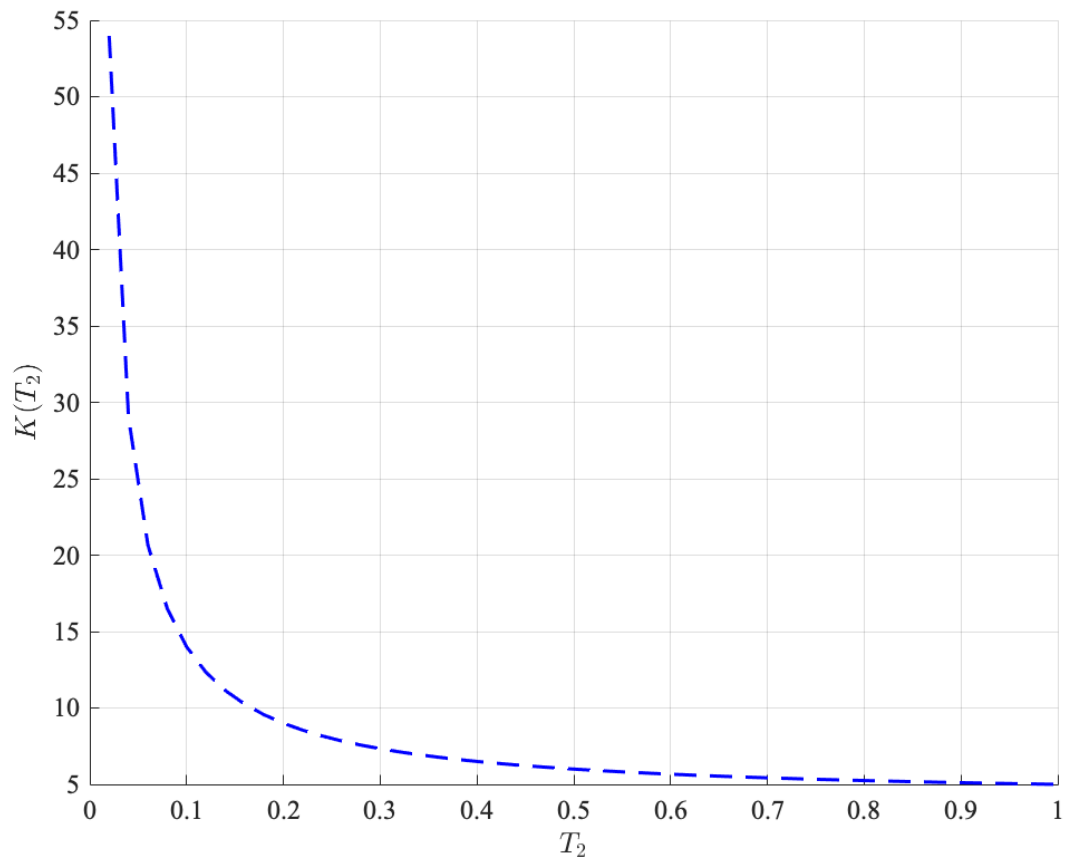


Рисунок 11 — Граница устойчивости $K(T_2)$

2.4 Графики сигналов $y(t)$ для трех наборов параметров K , T_1 и T_2 , соответствующих различным случаям устойчивости

Теперь зададимся тремя наборами параметров K , T_1 , T_2 :

1. $K = 4$, $T_1 = 0.25$, $T_2 = 0.2$ (асимптотически устойчивая система)
2. $K = 5$, $T_1 = 0.25$, $T_2 = 1$ (система на границе устойчивости)
3. $K = 10$, $T_1 = 0.6$, $T_2 = 0.25$ (неустойчивая система)

Проведем моделирование при входном воздействии $g(t) = 1$.

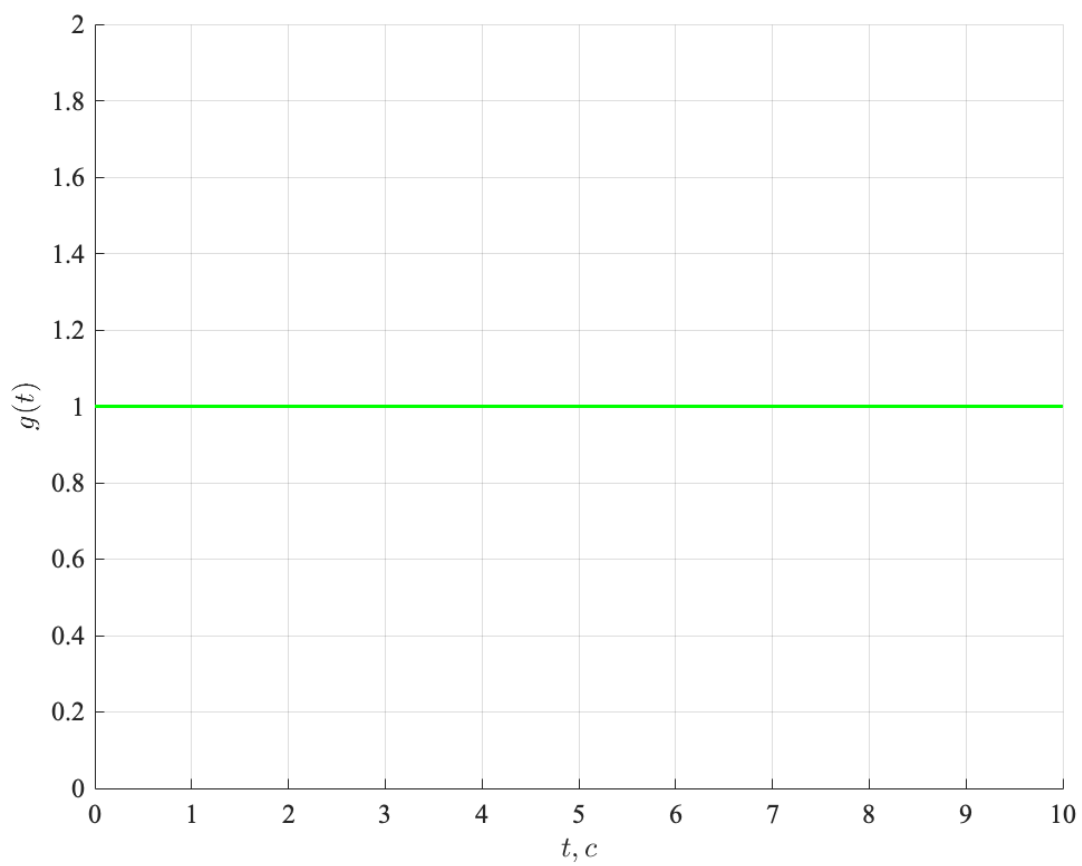


Рисунок 12 — Входной сигнал

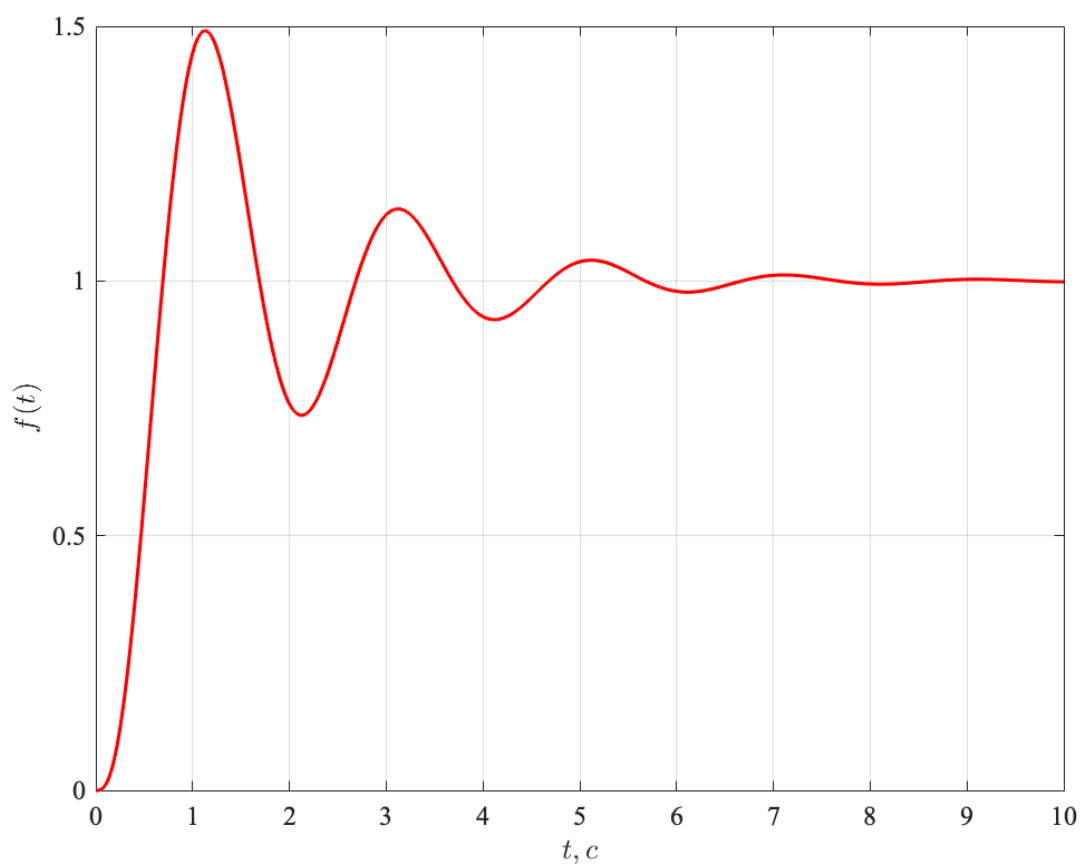


Рисунок 13 — Асимптотически устойчивая система

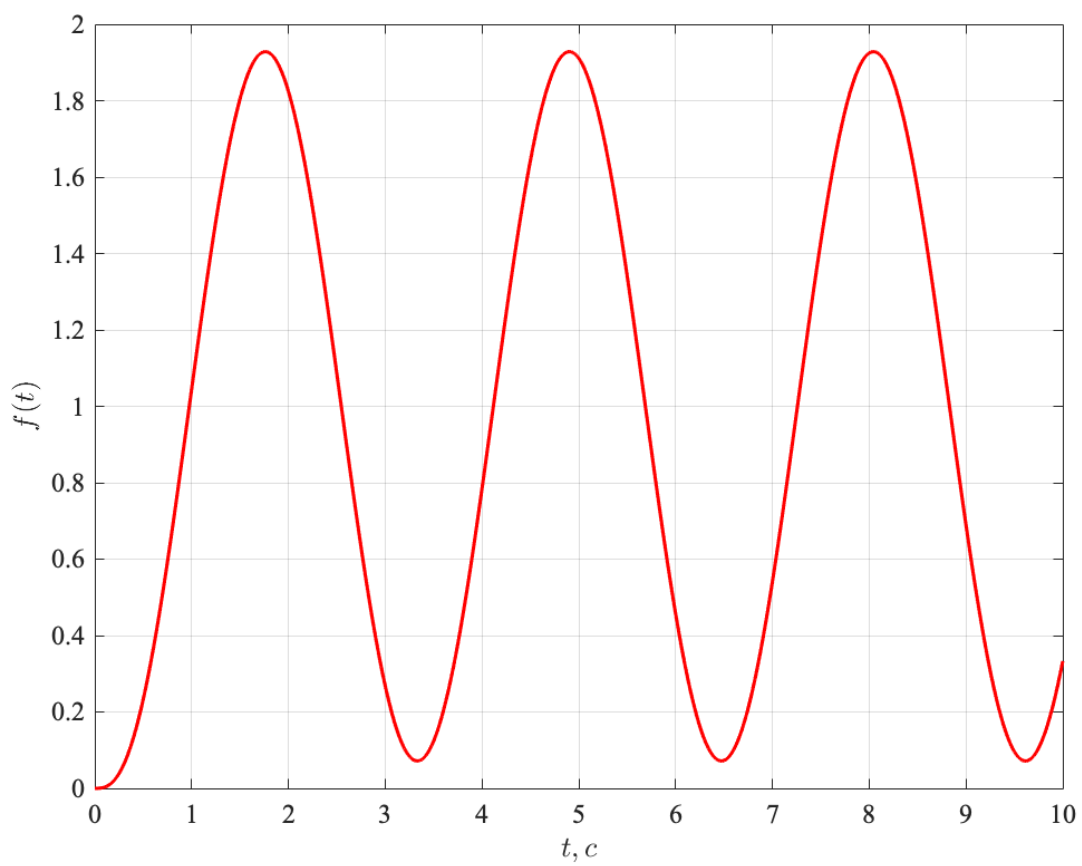


Рисунок 14 — Система на границе устойчивости

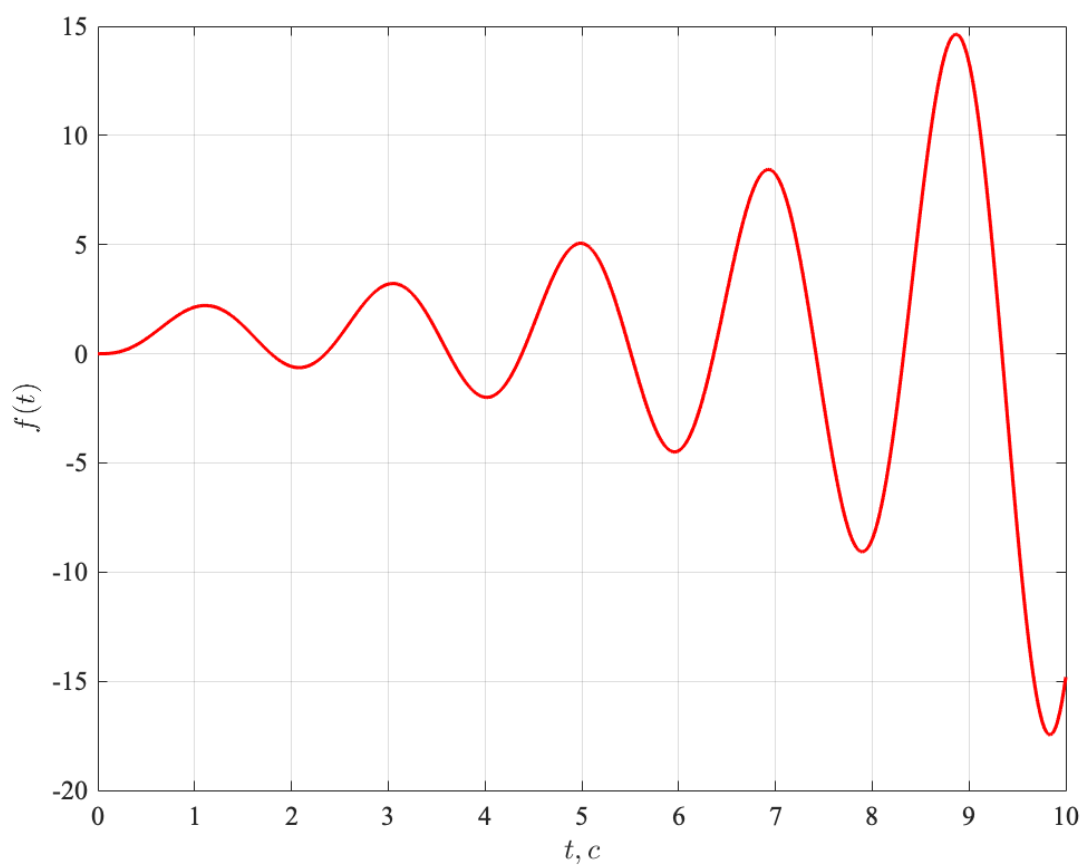


Рисунок 15 — Неустойчивая система

2.5 Вывод

В этом задании мы воспользовались критерием Гурвица для исследования устойчивости системы 3-го порядка, что позволило нам определить критический коэффициент усиления K .

3 АВТОНОМНЫЙ ГЕНЕРАТОР

3.1 Листинги аналитических расчетов

Рассмотрим систему вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ g = Cx \end{cases}$$

Зададим для системы такие параметры $A, C, x(0)$, чтобы выход системы при свободном движении совпадал с желаемым выходом:

$$g_{\text{ж}} = \sin(-3t) + e^{7t} \sin t$$

Запишем общий вид решение приведенной нами системы:

$$\begin{cases} x(t) = e^{At} x(0) \\ y(t) = C e^{At} x(0) \end{cases}$$

Запишем жорданову матрицу A , в соответствии с нашим желаемым выходом:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Запишем матричную экспоненту e^{At} :

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cos 3t & \sin 3t & 0 & 0 \\ -\sin 3t & \cos 3t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{7t} \cos t & e^{7t} \sin t \\ 0 & 0 & -e^{7t} \sin t & e^{7t} \cos t \end{pmatrix}$$

А также вектор начальных условий $x(0)$ и вектор C :

$$x(0) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix}$$

Тогда выход нашей системы будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} Ce^{At}x(0) &= \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 3t & \sin 3t & 0 & 0 \\ -\sin 3t & \cos 3t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{7t}\cos t & e^{7t}\sin t \\ 0 & 0 & -e^{7t}\sin t & e^{7t}\cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \\ &= a_1c_1\cos 3t + a_2c_1\sin 3t - a_1c_2\sin 3t + a_2c_2\cos 3t \\ &+ a_3c_3e^{7t}\cos t + a_4c_3e^{7t}\sin t - a_3c_4e^{7t}\sin t + a_4c_4e^{7t}\cos t = \\ &= (a_1c_1 + a_2c_2)\cos 3t + (a_2c_1 - a_1c_2)\sin 3t \\ &+ (a_3c_3 + a_4c_4)e^{7t}\cos t + (a_4c_3 - a_3c_4)e^{7t}\sin t \end{aligned}$$

Теперь подберем коэффициенты так, чтобы выход системы соответствовал желаемому:

$$\begin{cases} a_1c_1 + a_2c_2 = 0 \\ a_2c_1 - a_1c_2 = -1 \\ a_3c_3 + a_4c_4 = 0 \\ a_4c_3 - a_3c_4 = 1 \end{cases}$$

Например, подойдут следующие значения:

$$x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3.2 Графики сигналов $g_{\text{ж}}(t)$ и $g(t)$ с их сопоставлением

Проведем моделирование следующей структурной схемы в Simulink, чтобы убедиться в корректности расчетов.

График выходного сигнала нашей системы совпал с желаемым выходным сигналом, значит наши расчеты были произведены верно.

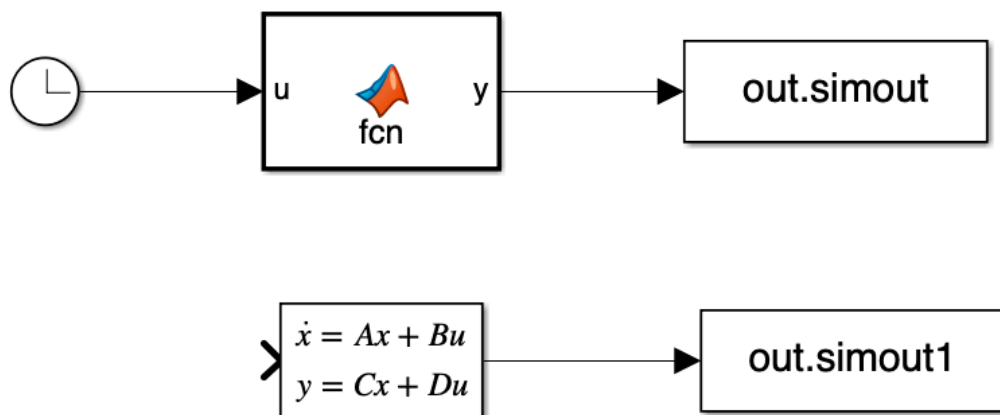


Рисунок 16 — Структурная схема

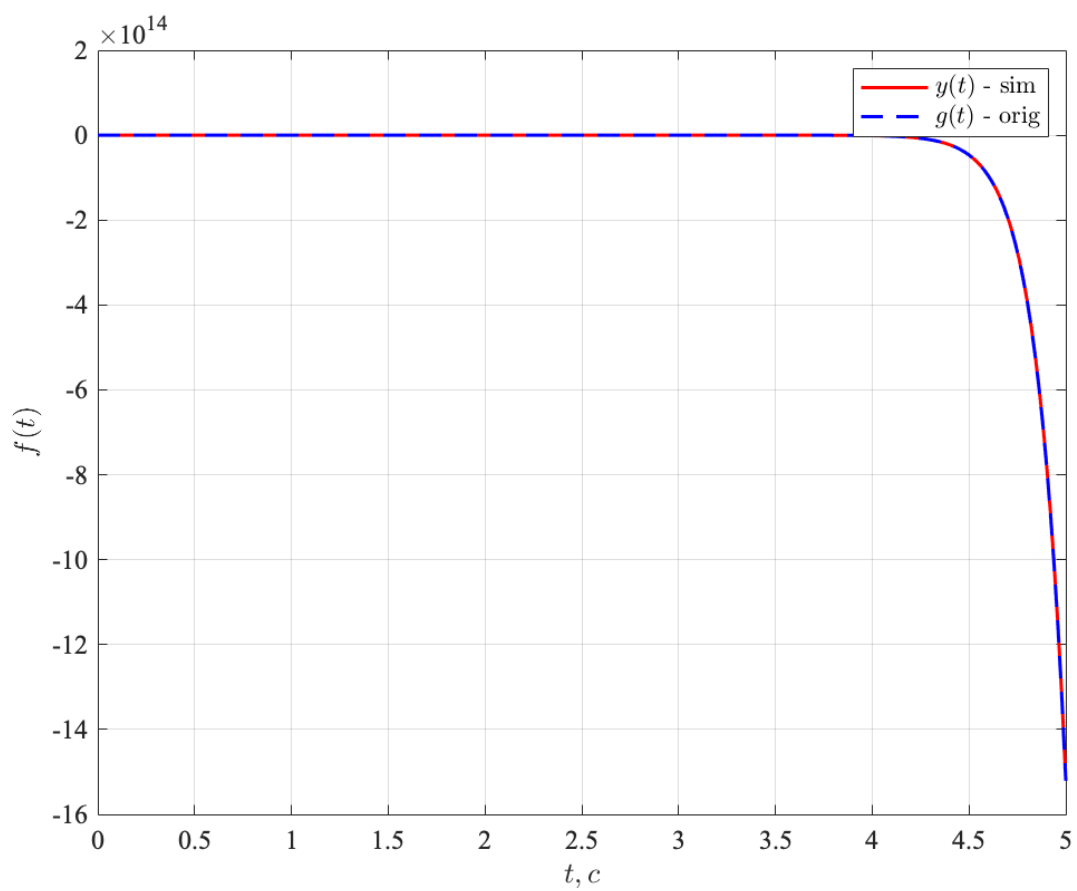


Рисунок 17 — Сопоставление выхода системы с желаемым выходом

4 ВЫВОД

В данной лабораторной работе мы изучили свободное движение динамической системы. Также мы рассмотрели различные виды устойчивости системы, а также критерии устойчивости.