МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Университет ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЁТ
по лабораторной работе №4
по дисциплине
«Линейные системы автоматического управления»

по теме:
ТОЧНОСТНЫЕ СВОЙСТВА СИСТЕМЫ, АСТАТИЗМЫ И РЕГУЛЯТОРЫ
(ВАРИАНТ 12)

Студент:
Группа R3343 *Ткачёв И.Ю.*

Предподаватель:
ассистент *Пашенко А.В.*

Санкт-Петербург
2024

СОДЕРЖАНИЕ

1 ЗАДАЧА СТАБИЛИЗАЦИИ С ИДЕАЛЬНЫМ ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩИМ ЗВЕНОМ

Рассмотрим объект управления, заданный следующим ДУ:

$$a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 = u$$

Подберем такие коэффициенты a_2, a_1, a_0, чтобы система содержала один неустойчивый полюс:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{a_1}{a_2} \\ \lambda_1\lambda_2 = \frac{a_0}{a_2} \end{cases}$$

Например, возьмем $a_0 = -8, a_1 = -2, a_2 = 1$, получим:

$$\begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = 4 \end{cases}$$

Начальные условия примем такие: $y(0) = -1, \dot{y}(0) = 0$. Проведем моделирование свободного движения разомкнутой системы.

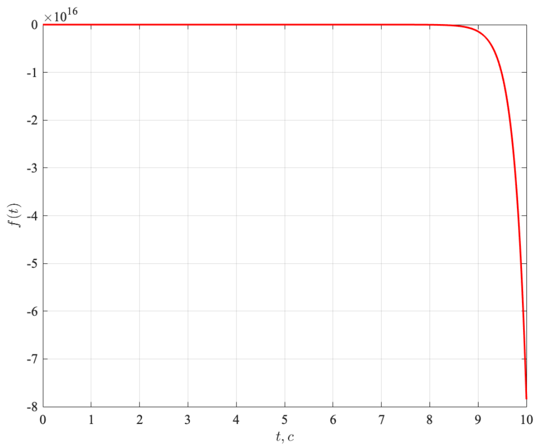

Рисунок 1 — Свободное движение разомкнутой системы

Видим, система неустойчива, как и ожидалось.
Теперь рассмотрим регулятор, который будет стабилизировать наш объект управления:

$$u = k_0y + k_1\dot{y}$$

Определим при каких значениях коэффициентов k_0, k_1 система будет устойчивой:

$$\ddot{y} - 2\dot{y} - 8y = k_0 y + k_1 \dot{y}$$

$$\ddot{y} + (-k_1 - 2)\dot{y} + (-k_0 - 8)y = 0$$

По критерию Гурвица, можем наложить на k_0, k_1 следующие ограничения:

$$\begin{cases} -k_1 - 2 > 0 \\ -k_0 - 8 > 0 \end{cases}$$

Тогда, система будет устойчивой при $k_0 \in (-\infty; -8)$ и $k_1 \in (-\infty; -2)$. Например, выберем $k_0 = -9, k_1 = -3$.

Теперь, построим структурную схему замкнутой системы и проведем моделирование.

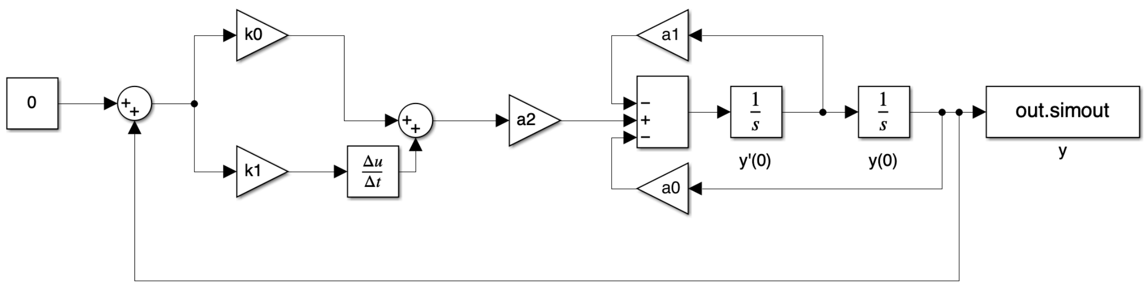

Рисунок 2 — Структурная схема замкнутой системы

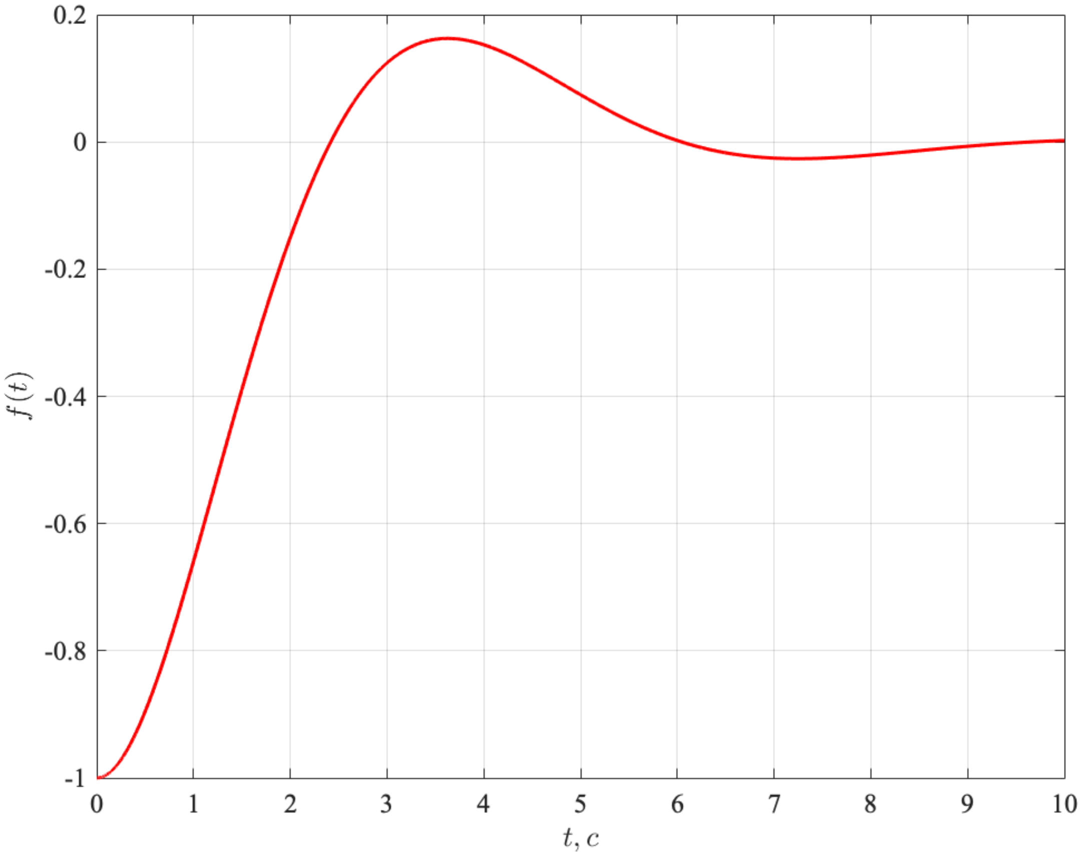

Рисунок 3 — Результат моделирования

1.1 Вывод

Как видим, регулятор справился с задачей стабилизации, система асимптотически устойчива.

2 ЗАДАЧА СТАБИЛИЗАЦИИ С РЕАЛЬНЫМ ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩИМ ЗВЕНОМ

В данном задании мы заменим идеальное дифференцирующее звено, на его аппроксимацию, заданную передаточной функцией:

$$W_{\text{р.дифф.}}(s) = \frac{s}{Ts+1}$$

Получим следующую структурную схему:

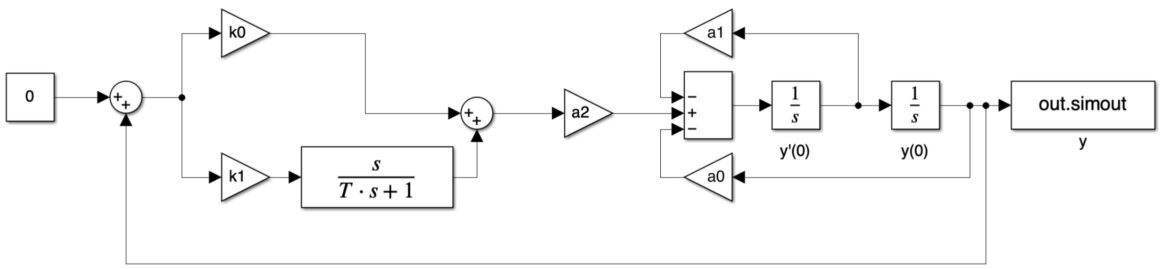

Рисунок 4 — Структурная схема

Определим критические значения параметра T, при которых система теряет устойчивость. Воспользуемся полезными свойствами преобразования Лапласа:

$$s^2Y(s) - 2sY(s) - 8Y(s) = -9Y(s) - \frac{3s}{Ts+1}Y(s)$$

Упростив выражения, получим:

$$s^3Y(s) + s^2Y(s)\frac{1-2T}{T} + sY(s)\frac{T+1}{T} + Y(s)\frac{1}{T} = 0$$

Воспользуемся критерием Гурвица:

$$\begin{cases} T > 0 \\ T + 1 > 0 \\ 1 - 2T > 0 \\ \frac{(1-2T)(T+1)}{T^2} > \frac{1}{T} \end{cases}$$

Получим, что система останется устойчивой при $T \in (0; \frac{\sqrt{3}-1}{2})$.
Проведем моделирование системы при различных T и сравним с результатом из предыдущего задания:

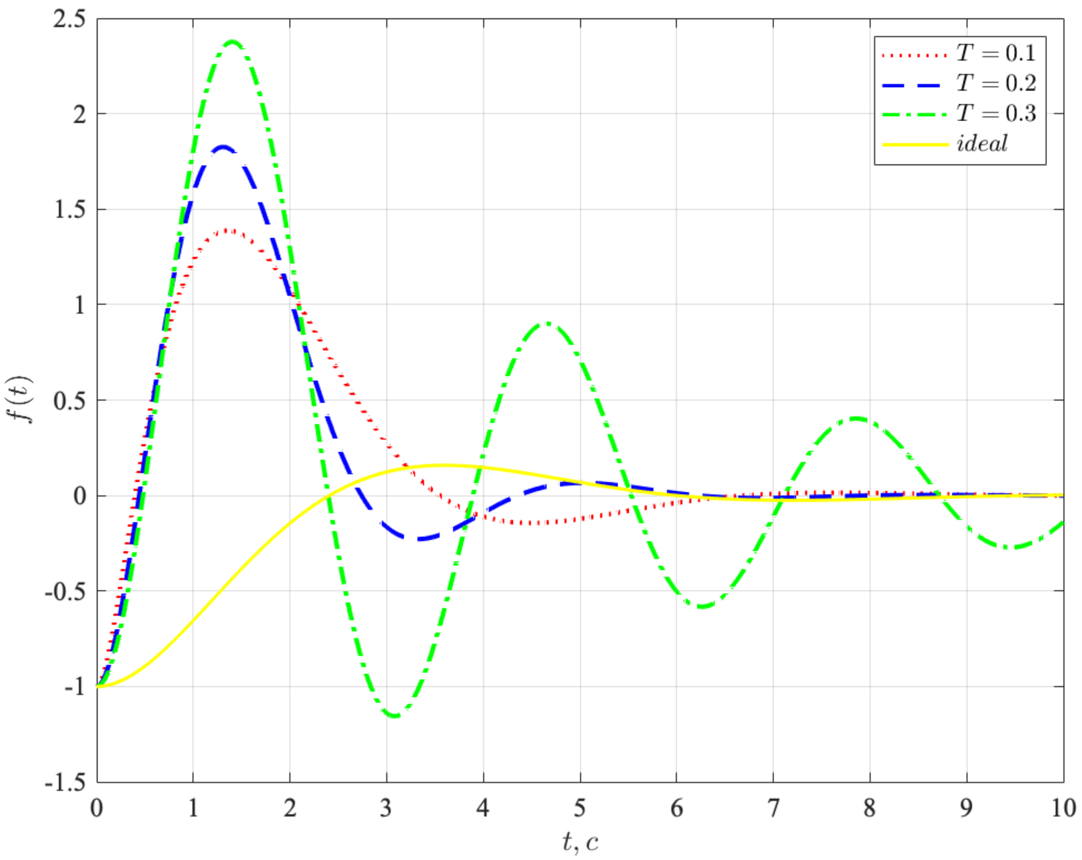

Рисунок 5 — Результаты моделирования при $T = 0.1, T = 0.2, T = 0.3$

2.1 Вывод

Как видим, регулятор по прежнему справляется с задачей стабилизации, но увеличилось время переходного процесса и перерегулирование, в сравнении с идеальным дифференцирующим звеном. Выбирая T как можно ближе к 0, мы приближаемся к результату идеального дифференцирующего звена.

3 ЗАДАЧА СЛЕЖЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ С АСТАТИЗМОМ НУЛЕВОГО ПОРЯДКА (П-РЕГУЛЯТОР)

Рассмотрим объект управления, заданный передаточной функцией:

$$W(s) = \frac{1}{0.1s^2 + 0.7s + 1}$$

В качестве регулятора будем использовать П-регулятор:

$$H(s) = k$$

Составим структурную схему замкнутой системы:

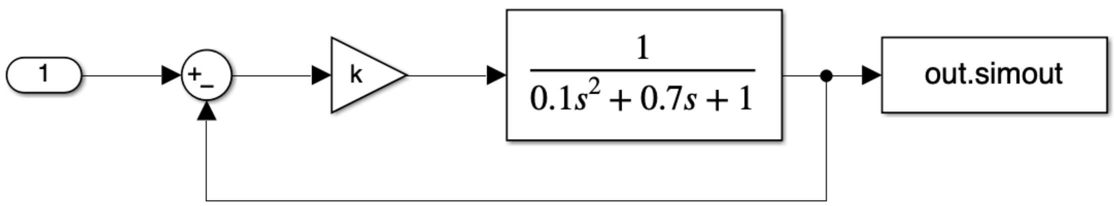

Рисунок 6 — Структурная схема

3.1 Стационарный режим работы

Задающее воздействие:

$$g(t) = 4$$

Определим предельное значение ошибки $e_{\text{уст}}$ в зависимости от k. Для этого воспользуемся теоремой о предельном значении:

$$W_{g\to e} = \frac{1}{1 + W(s)} = \frac{0.1s^2 + 0.7s + 1}{0.1s^2 + 0.7s + 1 + k}$$

$$E(s) = W_{g\to e}G(s) = \frac{4(0.1s^2 + 0.7s + 1)}{s(0.1s^2 + 0.7s + 1 + k)}$$

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{4(0.1s^2 + 0.7s + 1)}{(0.1s^2 + 0.7s + 1 + k)} = \frac{4}{1+k}$$

Выберем $k = 1, k = 3, k = 15$, тогда для них установившая ошибка будет $e = 2, e = 1, e = 0.25$ соответственно.

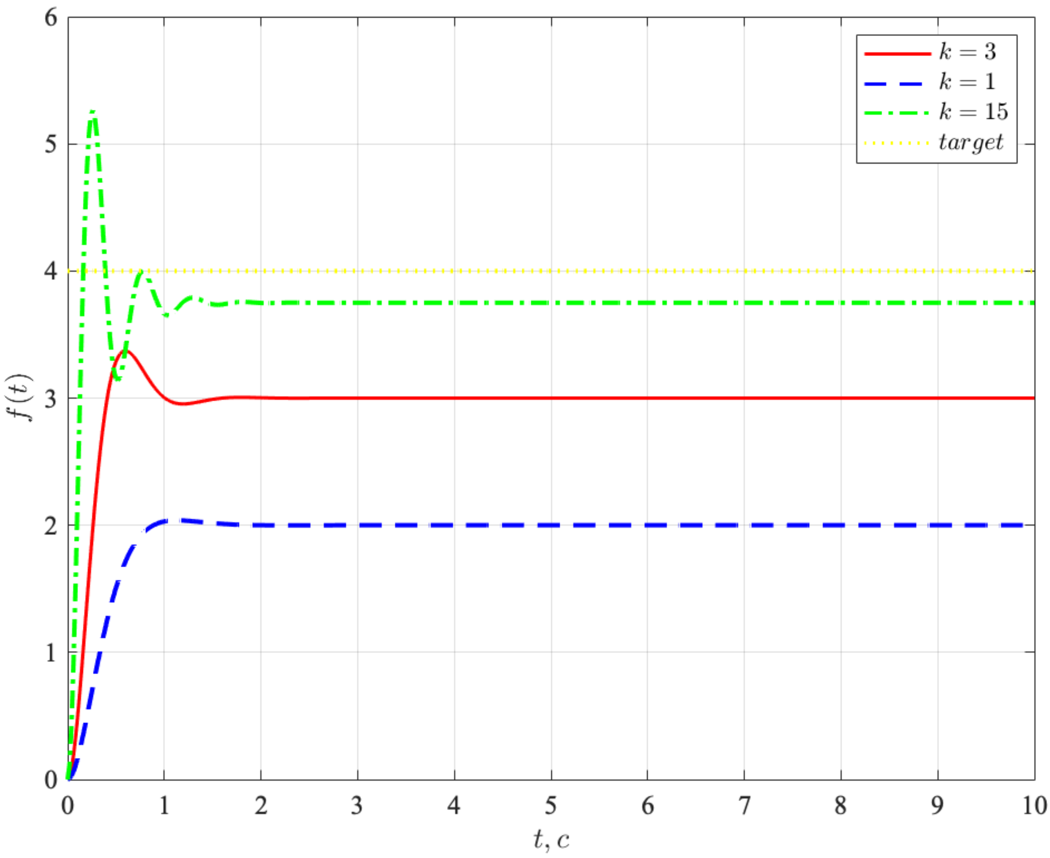

Рисунок 7 — График выходного сигнала

3.1.1 Вывод

Получили, что и ожидали: установившаяся ошибка обратно пропорциональна коэффициенту k. Также с ростом k увеличивается перерегулирование.

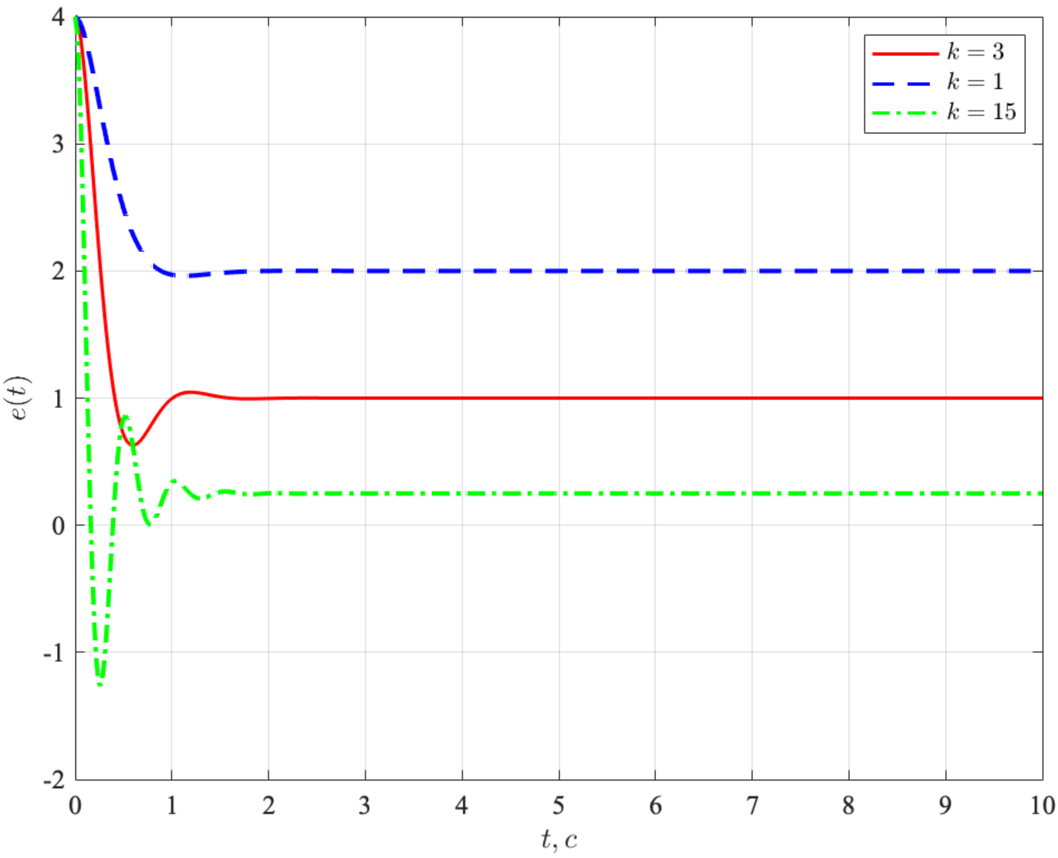

Рисунок 8 — График ошибки

3.2 Режим движения с постоянной скоростью

Теперь проведем исследование нашей системы в режиме движения с постоянной скоростью.
Задающее воздействие:

$$g(t) = 2t$$

Определим предельное значение ошибки $e_{\text{уст}}$ в зависимости от k:

$$E(s) = \frac{2(0.1s^2 + 0.7s + 1)}{s^2(0.1s^2 + 0.7s + 1 + k)}$$

В данном случае теорема о предельном значении будет неприменима, мы не можем найти установившуюся ошибку.

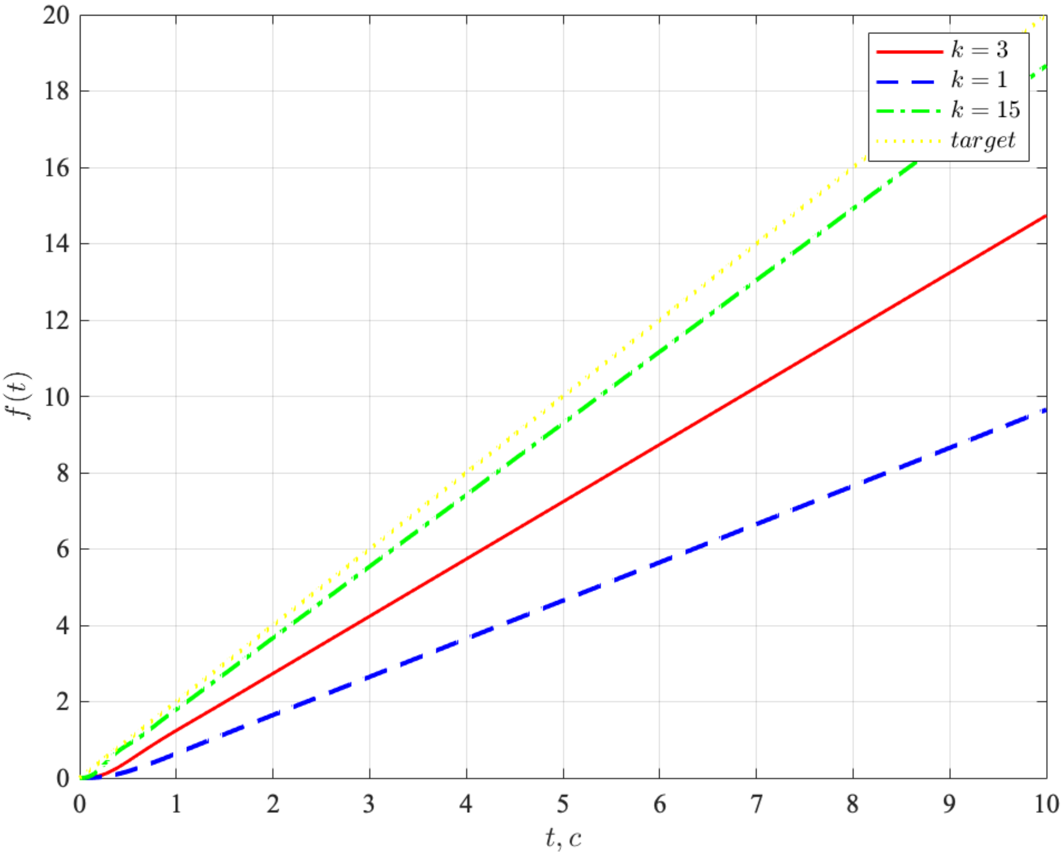

Рисунок 9 — График выходного сигнала

3.2.1 Вывод

Сделаем вывод, что П-регулятора недостаточно для задачи слежения за данным задающим воздействием.

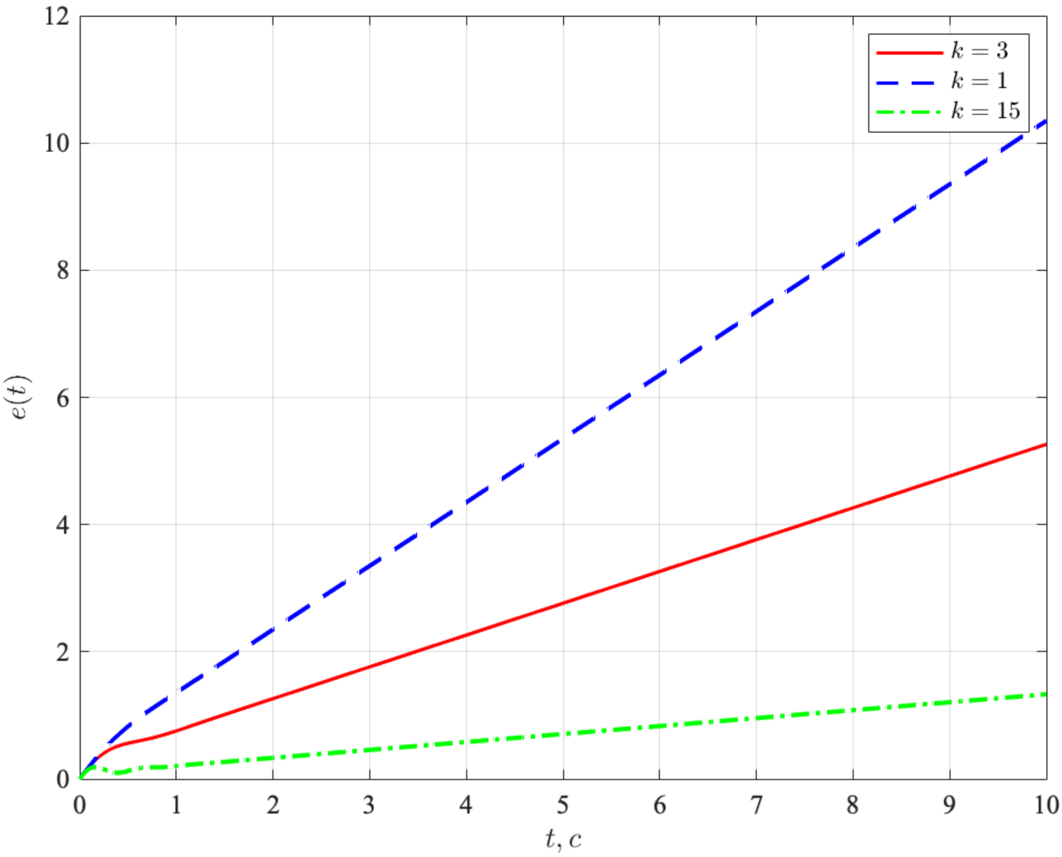

Рисунок 10 — График ошибки

4 ЗАДАЧА СЛЕЖЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ С АСТАТИЗМОМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА (И-РЕГУЛЯТОР)

Заменим П-регулятор на И-регулятор:

$$H(s) = \frac{k}{s}$$

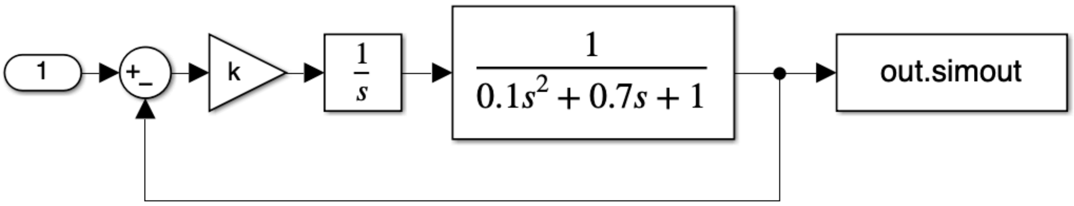

Рисунок 11 — Структурная схема

4.1 Стационарный режим работы

Задающее воздействие:

$$g(t) = 4$$

Определим предельное значение ошибки $e_{\text{уст}}$ в зависимости от k. Для этого воспользуемся теоремой о предельном значении:

$$W_{g\to e} = \frac{1}{1+W(s)} = \frac{s(0.1s^2+0.7s+1)}{s(0.1s^2+0.7s+1)+k}$$

$$E(s) = W_{g\to e}G(s) = \frac{4(0.1s^2+0.7s+1)}{s(0.1s^2+0.7s+1)+k}$$

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{4s(0.1s^2+0.7s+1)}{s(0.1s^2+0.7s+1)+k} = 0$$

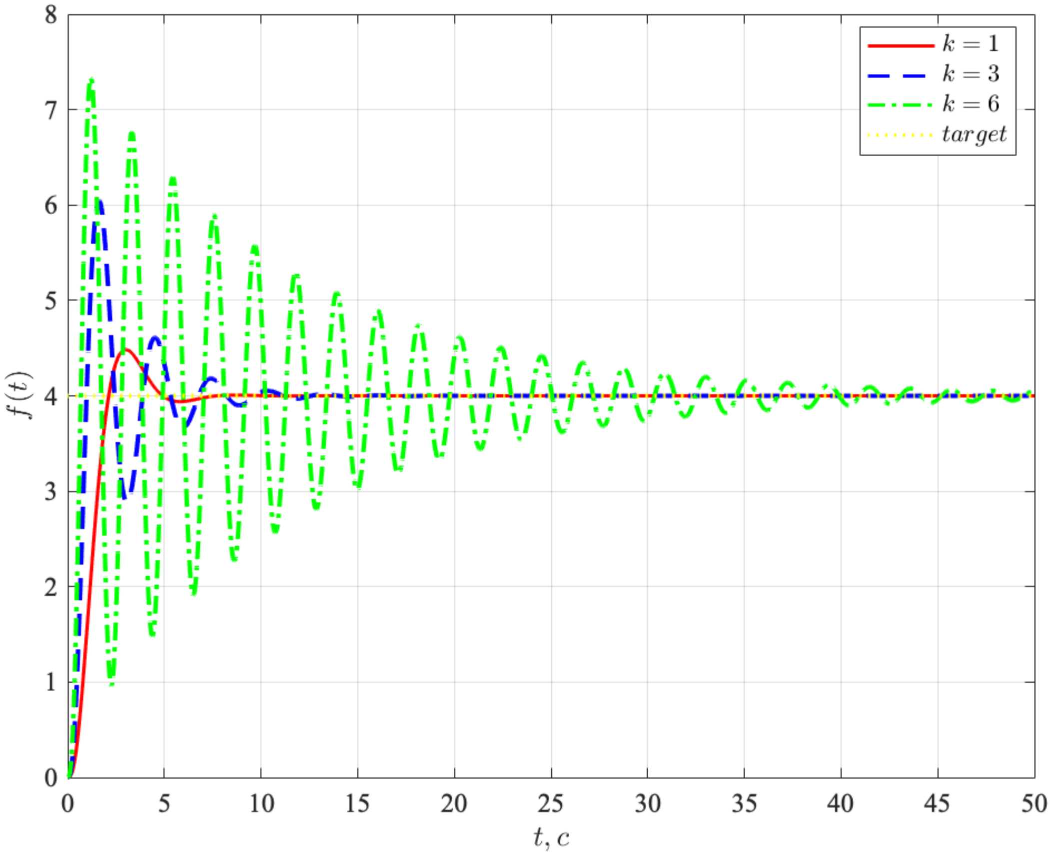

Рисунок 12 — График выходного сигнала

4.1.1 Вывод

Установившаяся ошибка будет равна нулю. Коэффициент регулятора влиет на перерегулирование и время переходного процесса. Чем больше коэффициент, тем больше перерегулирование и время переходного процесса.

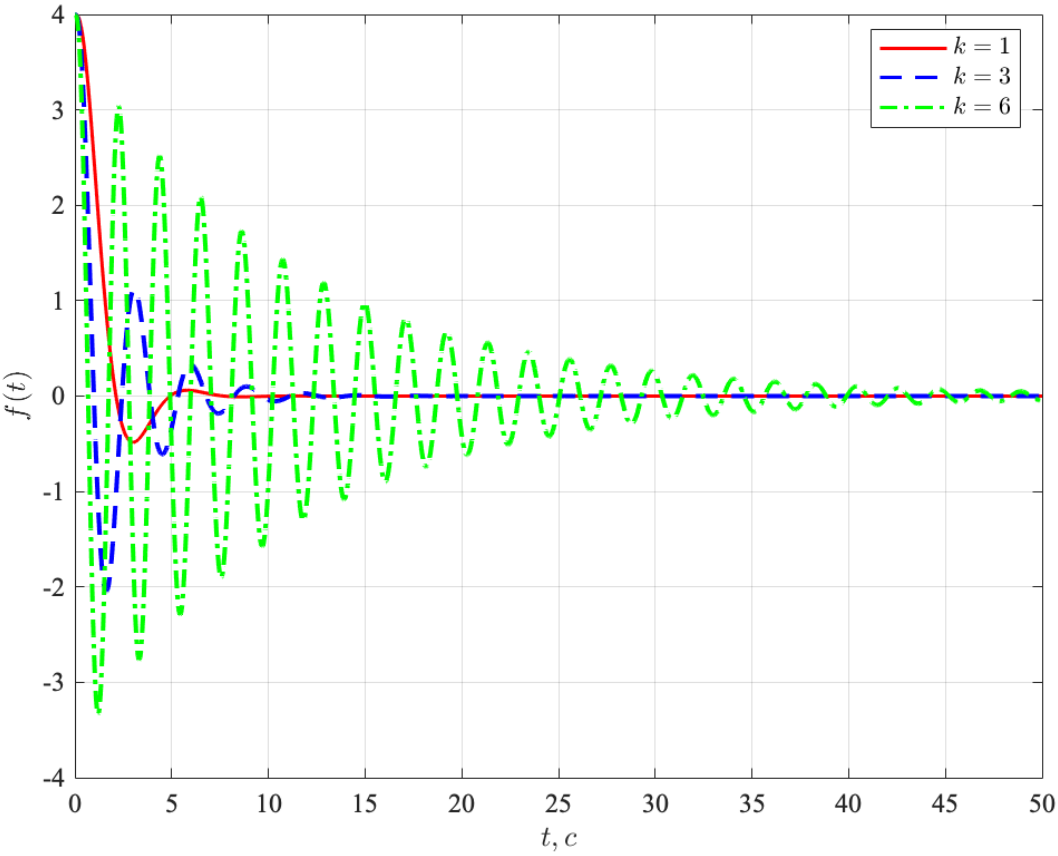

Рисунок 13 — График ошибки

4.2 Режим движения с постоянной скоростью

Задающее воздействие:

$$g(t) = 2t$$

Определим предельное значение ошибки $e_{\text{уст}}$ в зависимости от k. Для этого воспользуемся теоремой о предельном значении:

$$W_{g \to e} = \frac{1}{1 + W(s)} = \frac{s(0.1s^2 + 0.7s + 1)}{s(0.1s^2 + 0.7s + 1) + k}$$

$$E(s) = W_{g \to e} G(s) = \frac{2(0.1s^2 + 0.7s + 1)}{s(s(0.1s^2 + 0.7s + 1) + k)}$$

$$\lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} sE(s) = \lim_{s \to 0} \frac{2(0.1s^2 + 0.7s + 1)}{s(0.1s^2 + 0.7s + 1) + k} = \frac{2}{k}$$

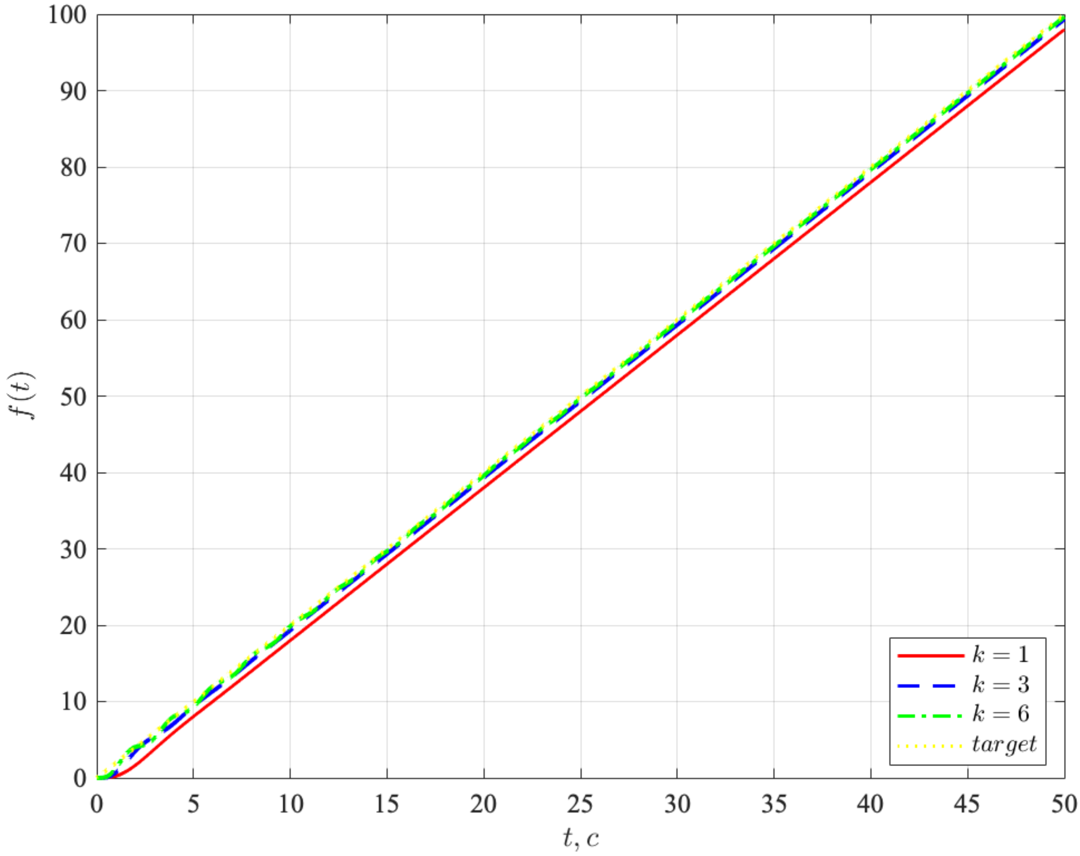

Рисунок 14 — График выходного сигнала

4.2.1 Вывод

Установшая ошибка будет обратно пропорциональна коэффициенту регулятора. Однако с ростом коэффициента увеличится время переходного процесса.

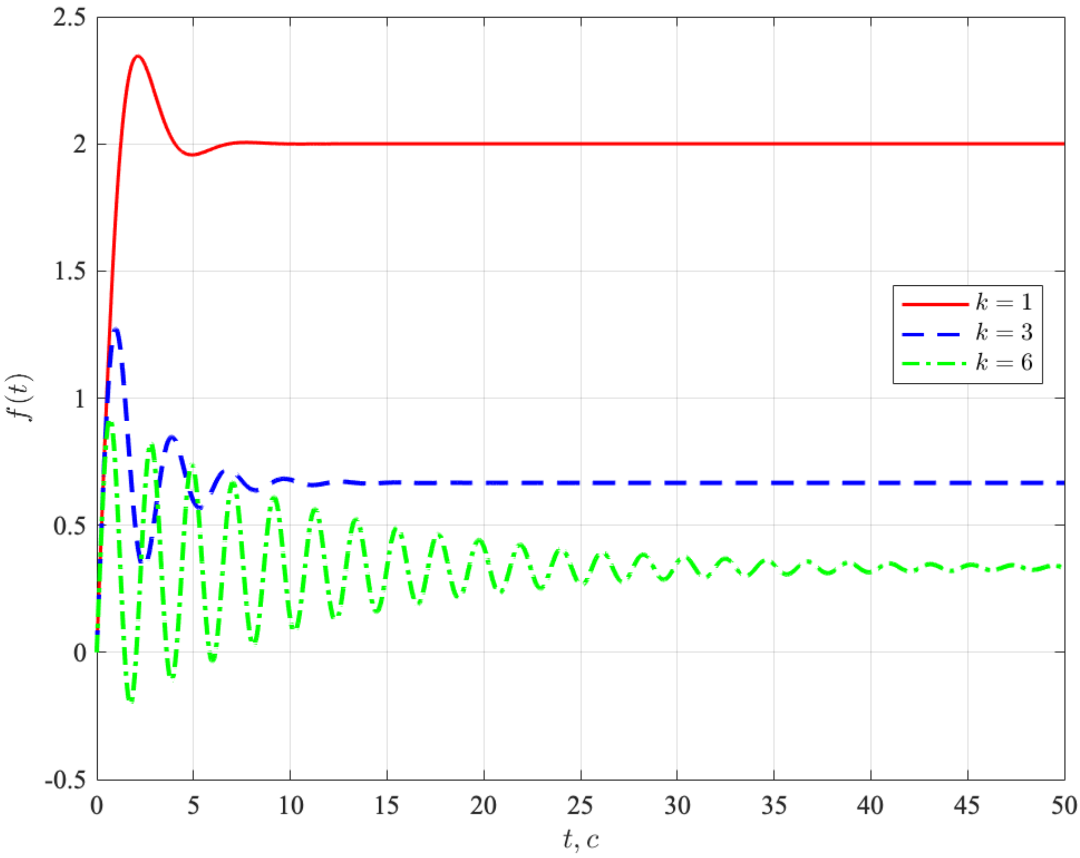

Рисунок 15 — График ошибки

4.3 Режим движения с постоянным ускорением

Задающее воздействие:

$$g(t) = 0.4t^2$$

Определим предельное значение ошибки $e_{\text{уст}}$ в зависимости от k.

$$W_{g\to e} = \frac{1}{1 + W(s)} = \frac{s(0.1s^2 + 0.7s + 1)}{s(0.1s^2 + 0.7s + 1) + k}$$

$$E(s) = W_{g\to e}G(s) = \frac{0.8(0.1s^2 + 0.7s + 1)}{s^2(s(0.1s^2 + 0.7s + 1) + k)}$$

Тут мы не можем воспользоваться теоремой о предельном значении, следовательно, не можем найти значение установившейся ошибки.

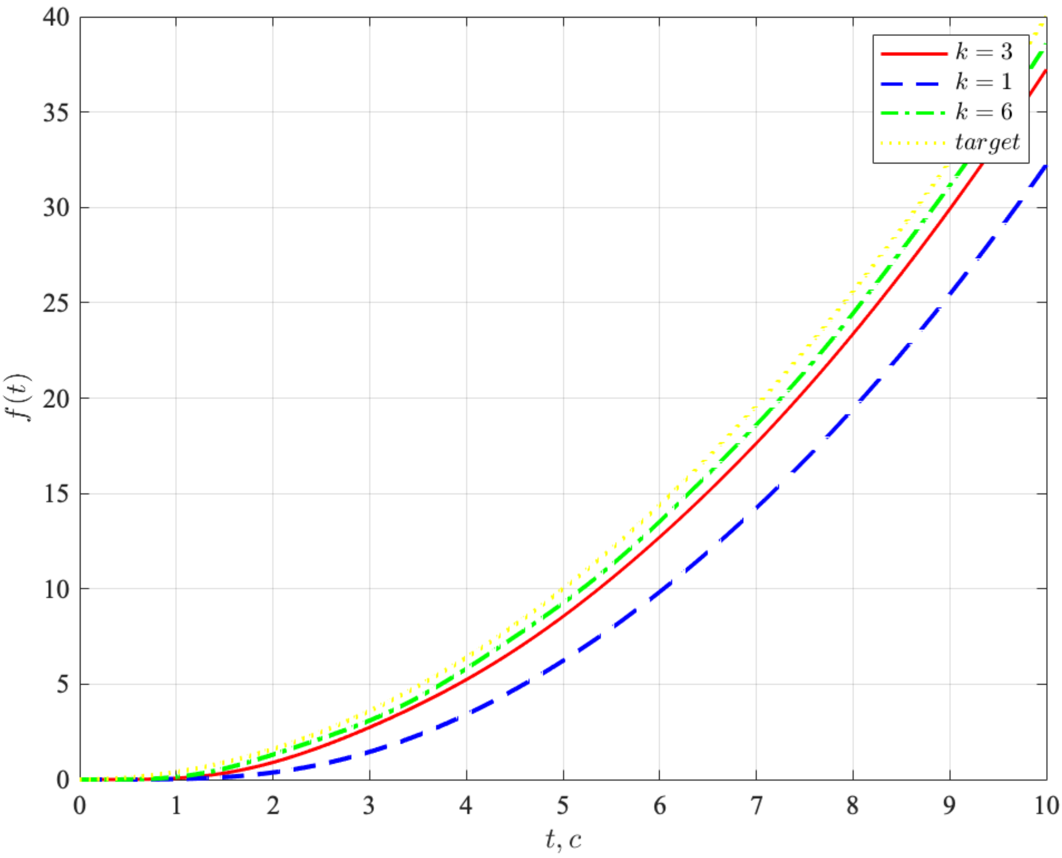

Рисунок 16 — График выходного сигнала

4.3.1 Вывод

В данном случае ошибка будет постоянно расти, но увеличение коэффициента регулятора может замедлить этот рост.

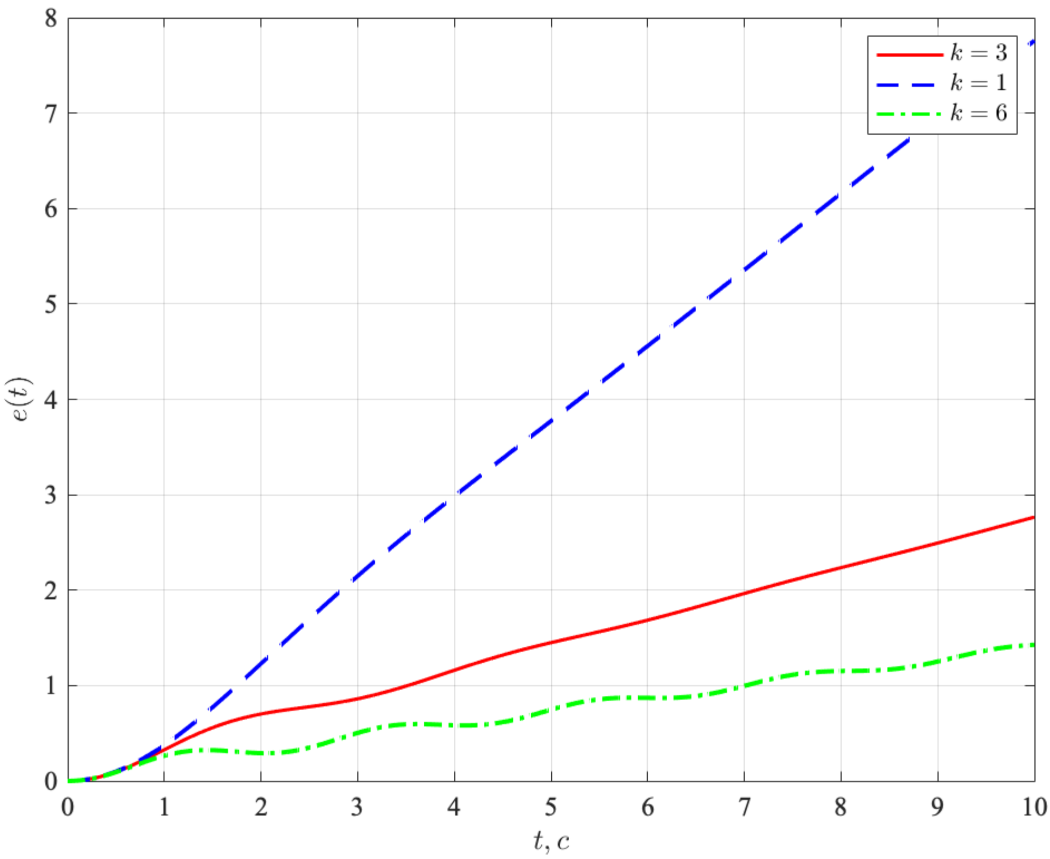

Рисунок 17 — График ошибки

5 ЗАДАЧА СЛЕЖЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ С АСТАТИЗМОМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА (ПИ-РЕГУЛЯТОР)

Теперь рассмотрим ПИ-регулятор:

$$H(s) = \frac{k_{и}}{s} + k_{п}$$

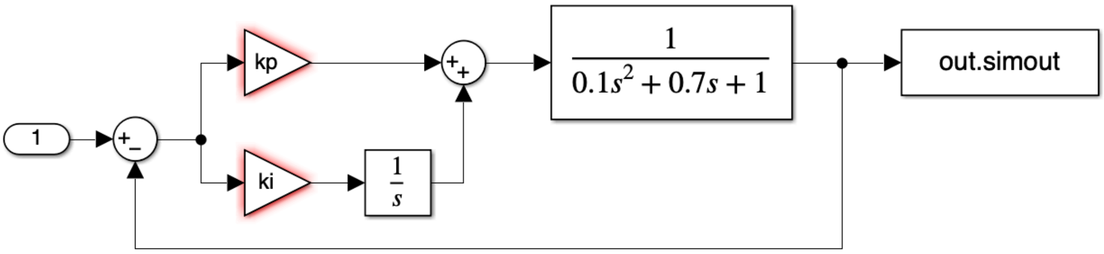

Рисунок 18 — Структурная схема

Для экспериментов выберем следующие коэффициенты регулятора:

k_i	0.5	0.5	1	2	5
k_p	1	2	1	1	5

5.1 Режим движения с постоянной скоростью

Задающее воздействие:

$$g(t) = 2t$$

Определим предельное значение ошибки $e_{уст}$ в зависимости от k. Для этого воспользуемся теоремой о предельном значении:

$$W_{g\to e} = \frac{s(0.1s^2+0.7s+1)}{s(0.1s^2+0.7s+1)+k_{и}+k_{п}s} = \frac{0.1s^3+0.7s^2+s}{0.1s^3+0.7s^2+(1+k_{п})s+k_{и}}$$

$$E(s) = W_{g\to e}G(s) = \frac{2(0.1s^3+0.7s^2+s)}{s^2(0.1s^3+0.7s^2+(1+k_{п})s+k_{и})}$$

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{2(0.1s^3 + 0.7s^2 + s)}{s(0.1s^3 + 0.7s^2 + (1 + k_{\text{п}})s + k_{\text{и}})} = \frac{2}{k_{\text{и}}}$$

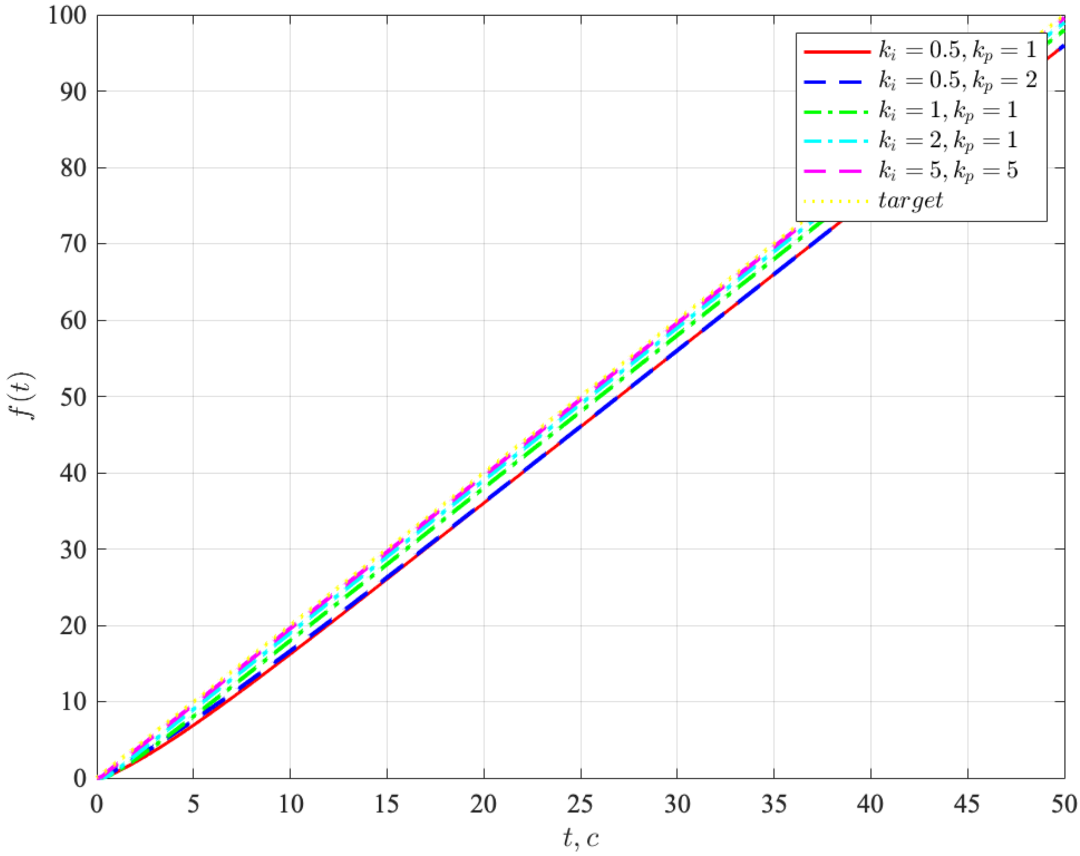

Рисунок 19 — График выходного сигнала

5.1.1 Вывод

Ошибка будет обратно пропорциональна интегральному коэффициенту регулятора. Увеличение пропорционального коэффициента может помочь уменьшить время переходного процесса, но появляется перерегулирование.

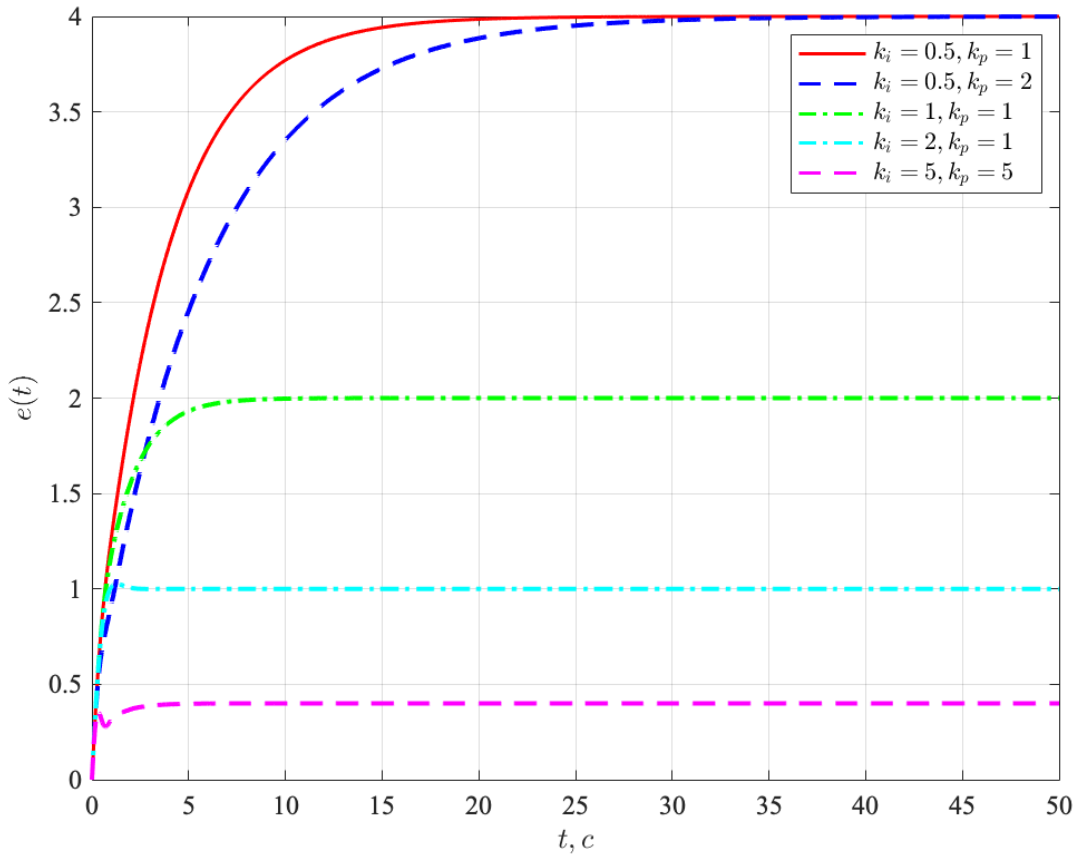

Рисунок 20 — График ошибки

5.2 Режим слежения за гармоническим сигналом

$$g(t) = 4sin(0.4t)$$

Определим предельное значение ошибки $e_{\text{уст}}$ в зависимости от k. Для этого воспользуемся теоремой о предельном значении:

$$W_{g\to e} = \frac{s(0.1s^2 + 0.7s + 1)}{s(0.1s^2 + 0.7s + 1) + k_{\text{и}} + k_{\text{п}}s} = \frac{0.1s^3 + 0.7s^2 + s}{0.1s^3 + 0.7s^2 + (1 + k_{\text{п}})s + k_{\text{и}}}$$

$$E(s) = W_{g\to e}G(s) = \frac{1.6(0.1s^3 + 0.7s^2 + s)}{(s^2 + 0.16)(0.1s^3 + 0.7s^2 + (1 + k_{\text{п}})s + k_{\text{и}})}$$

Теорема о предельном значении в данном случае не применима, так как образ ошибки будет иметь положительный полюс.

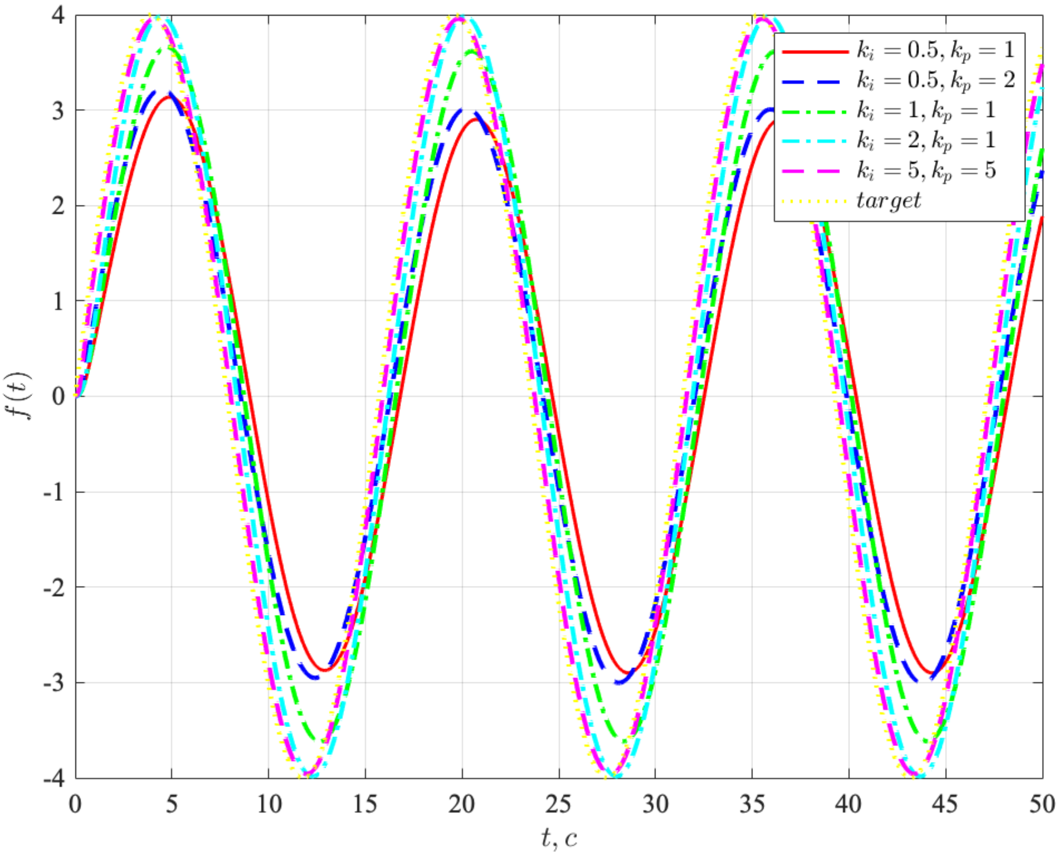

Рисунок 21 — График выходного сигнала

5.2.1 Вывод

В данном случае мы не можем говорить об установившейся ошибке. Пропорциональный и интегральный коэффициенты будут влиять на амплитуду колебаний ошибки.

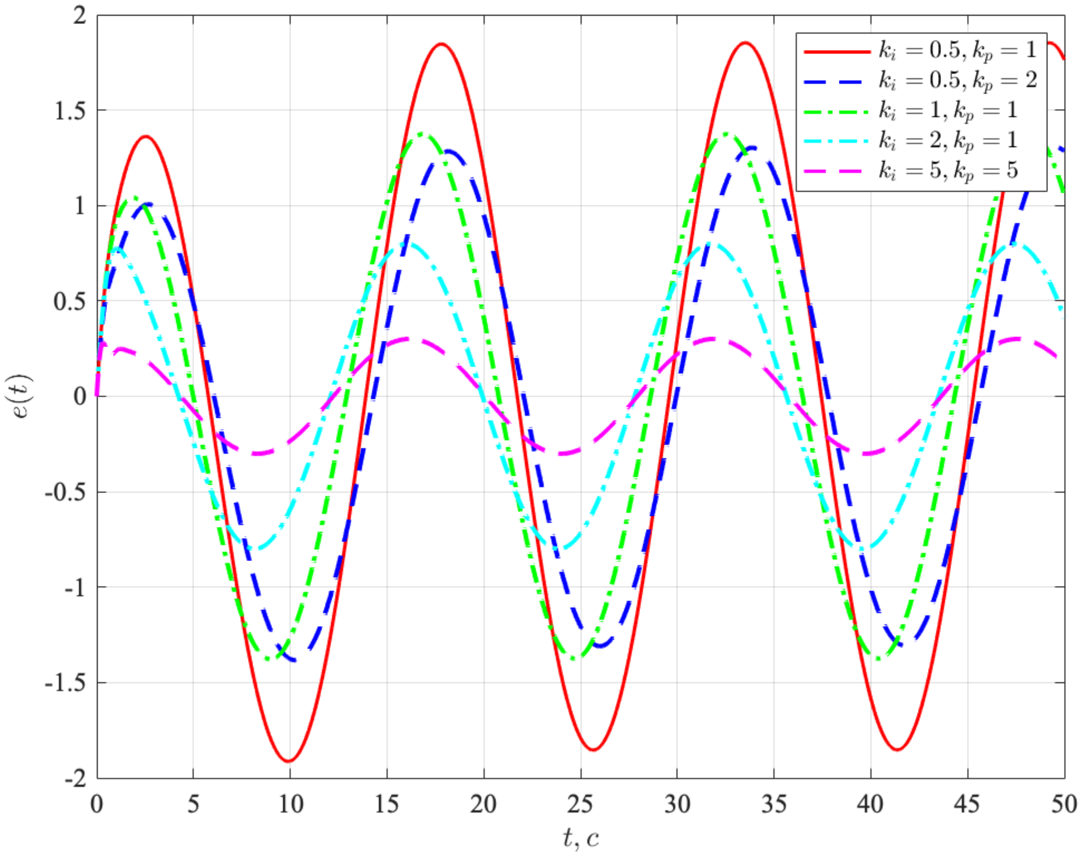

Рисунок 22 — График ошибки

6 ЗАДАЧА СЛЕЖЕНИЯ ЗА ГАРМОНИЧЕСКИМ СИГНАЛОМ (РЕГУЛЯТОВ ОБЩЕГО ВИДА)

Рассмотрим регулятор общего вида:

$$H(s) = \frac{\sum_{k=0}^{m}(b_k s^k)}{\sum_{k=0}^{m}(a_k s^k)}$$

Входное воздействие:

$$g(t) = 4sin(0.4t)$$

$$G(s) = \frac{1.6}{s^2 + 0.16}$$

Наша задача синтезировать физически реализуемый регулятор, способный обеспечить предельное значение ошибки $e_{\text{уст}} = 0$.

$$W_{\text{рег}} = \frac{R(s)}{Q(s)}$$

$$W(s) = \frac{R(s)}{Q(s)(0.1s^2 + 0.7s + 1)}$$

$$W_{g\to e} = \frac{Q(s)(0.1s^2 + 0.7s + 1)}{Q(s)(0.1s^2 + 0.7s + 1) + R(s)}$$

$$E(s) = \frac{1.6Q(s)(0.1s^2 + 0.7s + 1)}{(s^2 + 0.16)(Q(s)(0.1s^2 + 0.7s + 1) + R(s))}$$

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{1.6sQ(s)(0.1s^2 + 0.7s + 1)}{(s^2 + 0.16)(Q(s)(0.1s^2 + 0.7s + 1) + R(s))}$$

Выберем $Q(s)$ таким, чтобы скомпенсировать входное воздействие. Исходя из этого $Q(s) = s^2 + 0.16$, а $R(s)$ возьмем равным $b_2 s^2 + b_1 s + b_0$ исходя из условия физической реализуемости.

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{1.6s(0.1s^2 + 0.7s + 1)}{(s^2 + 0.16)(0.1s^2 + 0.7s + 1) + (b_2 s^2 + b_1 s + b_0)} = 0$$

Получаем, что установившаяся ошибка равна 0. Теперь нужно подобрать коэффициенты b_k таким образом, чтобы система имела только отрицательные полюса.

$$0.1s^4 + 0.7s^3 + s^2(1.016 + b_2) + s(0.112 + b_1) + (b_0 + 0.16)$$

$$
\begin{cases}
c_4 = 0.1 \\
c_3 = 0.7 \\
c_2 = 1.016 + b_2 \\
c_1 = 0.112 + b_1 \\
c_0 = 0.16 + b_0
\end{cases}
$$

Воспользуемся критерием Гурвица:

$$
\begin{cases}
c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 > 0 \\
c_1 c_2 - c_0 c_3 > 0 \\
c_1 c_2 c_3 - c_1^2 c_4 - c_0 c_3^2 > 0
\end{cases}
$$

Исходя из этих условий, выберем следующие наборы коэффициентов для нашего регулятора.

b_0	b_1	b_2
1	3	2
1	1	2
1	3	4
2	3	2

Проведем моделирование регулятора, чтобы проверить его работоспособность.

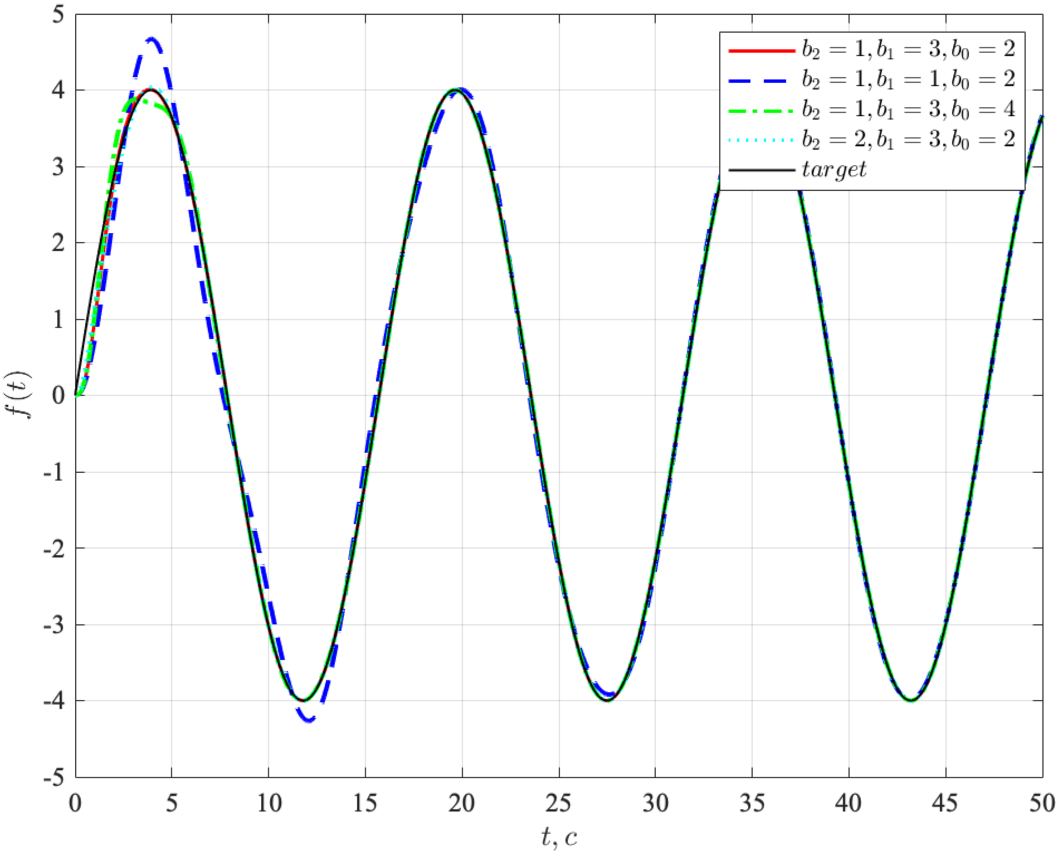

Рисунок 23 — График выходного сигнала

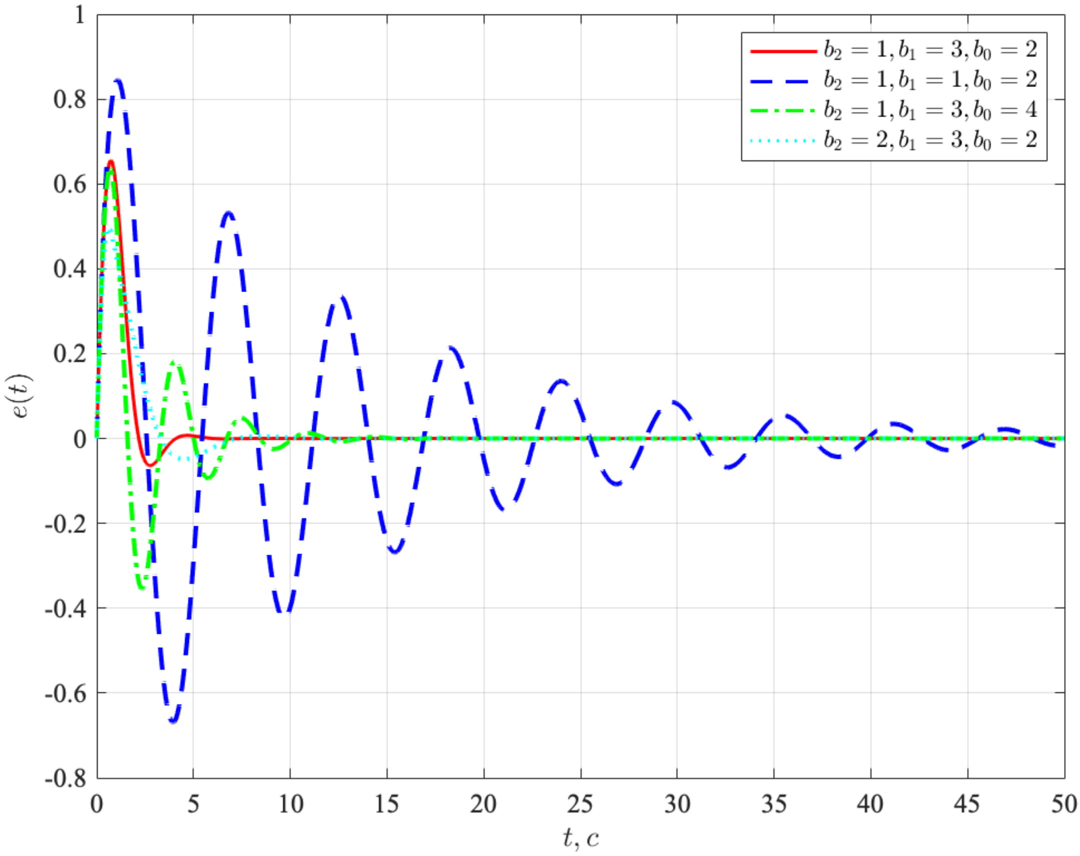

Рисунок 24 — График ошибки

6.1 Вывод

Как видим, регулятор отлично справился с задачей слежения за гармоническим сигналом, установившаяся ошибка равна 0. Из экспериментов также можно заметить сильно влияние коэффициента b_1, при его уменьшении время переходного процесса значительно увеличилось

7 ВЫВОДЫ

В данной работе мы решали задачи стабилизации и слежения, используя различные регуляторы. Было произведено моделирование для идеального и реального дифференцирующего звена. Рассмотрели задачу слежения для систем с различным порядком астатизма.