Repaso: Teoría de autómatas

Conceptos previos:

- **Alfabeto** Σ: un conjunto de de símbolos finito y no vació.
- **Cadena de caracteres**: una secuencia finita de símbolos seleccionados de algún alfabeto.
- **Cadena vacía** ϵ: cadena que presenta cero apariciones de símbolos.
- **Longitud de una cadena**: el número de posiciones ocupadas por símbolos dentro de la cadena.

- **Potencias de un alfabeto** Σ^k: el conjunto de todas las cadenas de una determinada longitud de dicho alfabeto utilizando una notación exponencia.
$$\Sigma^* = \{\epsilon\} \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \cdots$$
- **Concatenación de cadenas xy**: la cadena formada por una copia de x seguida de una copia de y.
- **Lenguaje** L: todo subconjunto de Σ^*
- **Notación**: Se suele escribir un lenguaje como: $L = \{w \in \Sigma^* | p(w)\}$ donde $p(w)$ es una proposición abierta.

Ejemplo

Considere el alfabeto binario $\Sigma = \{0, 1\}$, son lenguajes:

- El conjunto de todas las cadenas que constan de n ceros seguidos de n unos.
- El conjunto de cadenas formadas por el mismo número de ceros que de uno.
- El conjunto de números binarios cuyo valor es un número primo.

Autómata finito determinista ADF

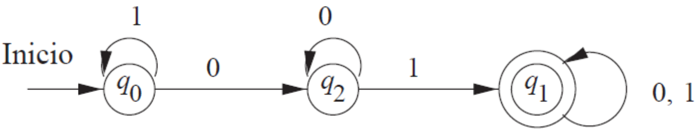
- Es una quíntupla $A = \{Q, \Sigma, \delta, q_0, F\}$, donde
  - Q: conjunto finito de estados.
  - Σ: conjunto finito de símbolos de entrada.
  - δ: función de transición.
  - q_0: estado inicial.
  - F: conjunto de estado finales.
- El lenguaje $L(A)$ de un autómata finito determinista A es el conjunto:

$$L(A) = \{w \mid \delta(q_0, w) \in F\}$$

- Si un lenguaje es generado por un ADF se dice que este es regular.

Ejemplo

Considere el AFD que acepte únicamente todas las cadenas de ceros y unos que contengan la secuencia 01 en cualquier posición de la cadena.

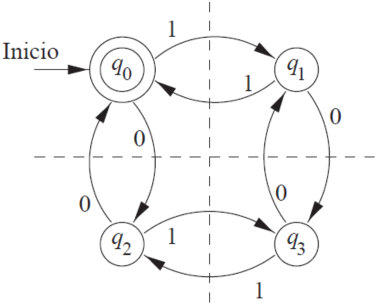


	0	1
$\rightarrow q_0$	q_2	q_0
$*q_1$	q_1	q_1
q_2	q_2	q_1

Ejemplo

Considere el AFD que genere el lenguaje

$$L = \{w \mid w \text{ tiene una cantidad par de unos y un cantidad par de ceros}\}$$



	0	1
$* \rightarrow q_0$	q_2	q_1
q_1	q_3	q_0
q_2	q_0	q_3
q_3	q_1	q_2

Autómata finito no determinista AFN

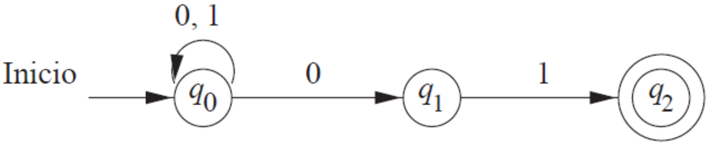
- Es una quíntupla $A = \{Q, \Sigma, \delta, q_0, F\}$, donde
  - Q: conjunto finito de estados.
  - Σ: conjunto finito de símbolos de entrada.
  - δ: es una función que toma como argumentos un estado de Q y un símbolo de entrada de Σ y devuelve un subconjunto de Q.
  - q_0: estado inicial.
  - F: conjunto de estado finales.
- El lenguaje $L(A)$ de un autómata finito no determinista A es el conjunto

$$L(A) = \{w \mid \delta(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}$$

UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA

Ejemplo

Considere el AFN que acepte todas las cadenas que terminan en 01.



	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*q_2$	$\emptyset$	$\emptyset$

Propiedades

Proposición

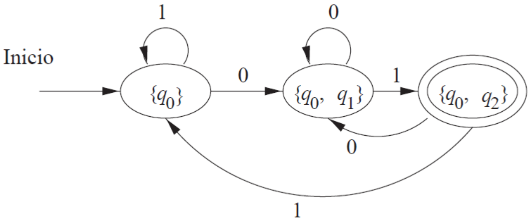
Todo lenguaje que puede describirse mediante algún AFN también puede ser descrito mediante algún AFD.

Proposición

Un lenguaje L es aceptado por algún AFD si y sólo si L es aceptado por algún AFN.

Ejemplo

Convierta en AFD el AFN que acepte todas las cadenas que terminan en 01.



	0	1
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*\{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$*\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$*\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$

Autómatas AFN$-\epsilon$

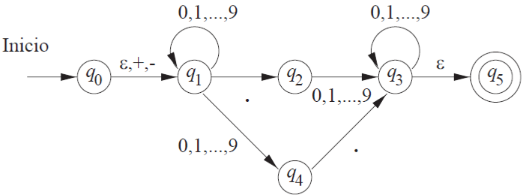
Es una quíntupla $A = \{Q, \Sigma, \delta, q_0, F\}$, donde δ toma como argumentos a:

- Un estado de Q
- Un elemento de $\Sigma \cup \{\epsilon\}$

donde ϵ es la cadena vacía.

Ejemplo

Considere el AFN-ϵ que acepte los números decimales, considere que estos pueden tener signo(opcional), parte entera, punto decimal y parte decimal.



	ε	$+,-$	$.$	$0,1,\ldots,9$
q_0	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
q_1	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2\}$	$\{q_1,q_4\}$
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_5\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3\}$
q_4	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
q_5	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Operaciones sobre lenguajes

Dados dos lenguajes L y M , se definen las operaciones:

- Unión: $L \cup M$ es el conjunto de cadenas que pertenecen a L, a M o a ambos.
- Concatenación LM: es el conjunto de cadenas que se puede formar tomando cualquier cadena de L y concatenándola con cualquier cadena de M.
- Clausura L^*: es el conjunto de cadenas que se pueden formar tomando cualquier número de cadenas de L.

Observación: La precedencia de operadores es: Clausura, concatenación y unión; respectivamente.

Expresiones regulares

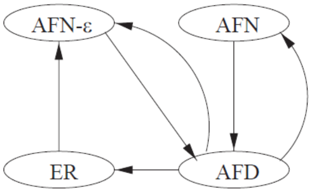
- Una expresión regular básica constituida por un solo carácter a, donde cr proviene de un alfabeto Σ de caracteres legales; el metacaracter ϵ; o el metacarácter $\emptyset$.
- Una expresión de la forma $r|s$, $r + s$, donde r y s son expresiones regulares. En este caso, $L(r|S) = L(r) \cup L(s)$.
- Una expresión de la forma rs, donde r y s son expresiones regulares. En este caso, $L(rs) = L(r)L(s)$.
- Una expresión de la forma $r*$, donde r es una expresión regular. En este caso, $L(r^*) = L(r)^*$.
- Una expresión de la forma (r), donde r es una expresión regular. En este caso, $L((r)) = L(r)$. Los paréntesis no cambian el lenguaje, sólo se utilizan para ajustar la precedencia de las operaciones.

Ejemplo

- $01^* + 10^*$ representa el lenguaje que consta de todas las cadenas que comienzan con un 0 seguido de cualquier número de 1's o que comienzan por un 1 seguido de cualquier número de 0's.
- $(01)^* + (10)^* + 0(10)^* + 1(01)^*$, $(\epsilon + 1)(01)^*(\epsilon + 0)$ representan el conjunto de cadenas que constan de 0's y 1's alternos.
- $(a|c)^*b(a|c)^*$ representa el conjunto de todas las cadenas en este alfabeto que contengan exactamente una b en el alfabeto $\Sigma = \{a, b, c\}$.

Autómatas finitos y expresiones regulares

- Todo lenguaje definido mediante un autómata también se define mediante una expresión regular.
- Todo lenguaje definido mediante una expresión regular también puede definirse mediante un autómata finito.



Autómatas finitos y expresiones regulares

Convertir la expresión regular $(0+1)^*1(0+1)$ en un AFN-ϵ.