

## Zadanie numeryczne 3

Igor Tyszer  
Grudzień 2021

### 1. Wstęp

Chcemy wyznaczyć  $y = A^{-1}x$  dla

$$A = \begin{pmatrix} 1.2 & \frac{0.1}{1} & \frac{0.4}{1^2} & & & & & & \\ 0.2 & 1.2 & \frac{0.1}{2} & \frac{0.4}{2^2} & & & & & \\ & 0.2 & 1.2 & \frac{0.1}{3} & \frac{0.4}{3^2} & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & & & 0.2 & 1.2 & \frac{0.1}{N-2} & \frac{0.4}{(N-2)^2} & \\ & & & & & 0.2 & 1.2 & \frac{0.1}{N-1} & \\ & & & & & & 0.2 & 1.2 \end{pmatrix}$$

oraz  $x = (1, 2, \dots, N)^T$  dla ustalonego  $N = 100$ . Należy również obliczyć wyznacznik powyższej macierzy  $A$ .

### 2. Algorytm do rozwiązania naszego równania

Bardzo istotną rzeczą w naszej macierzy  $A$  jest jej rzadka struktura. Składa się ona z czterech niezerowych diagonal (środkowej, jednej pod środkową i dwiema nad środkową). Reszta to elementy zerowe. Dlatego korzystając z algorytmu Doolittle'a możemy znaleźć cztery równania, każde opisujące odpowiadającą mu diagonalę. Dokonamy w ten sposób faktoryzacji LU naszej macierzy.

Oto równania, które otrzymałem rozkładając na LU uproszczoną macierz pomocniczą, również o takiej samej strukturze.

$$U_{ii} = a_{ii} - L_{i,i-1}U_{i-1,i}$$

$$U_{i,i+1} = a_{i,i+1} - L_{i,i-1}U_{i-1,i+1}$$

$$U_{i,i+2} = a_{i,i+2}$$

$$L_{i+1,i} = \frac{a_{i+1,i}}{U_{ii}}$$

Następnie, gdy już dokonaliśmy faktoryzacji, mamy naszą macierz w postaci  $A = LU$ , gdzie  $U$  to macierz trójkątna górna, a  $L$  to macierz trójkątna dolna (oczywiście uwzględniamy rzadką strukturę naszej macierzy). Aby dostać rozwiązanie naszego równania  $y$ , pozostaje nam rozwiązać dwa poniższe równania.

$$Lz = x$$

$$Uy = z$$

Pierwsze z nich rozwiązujemy za pomocą forward substitution, a drugie za pomocą back substitution.

Wyznacznik naszej macierzy obliczymy wykorzystując naszą macierz  $U$  oraz to że  $\det(A) = \det(U)$ . Czyli mnożymy wszystkie elementy na diagonalu macierzy  $U$  (w naszym przypadku wszystkie elementy listy środkowej diagonalu  $U$ ) i otrzymujemy wyznacznik macierzy  $A$ .

### 3. Wyniki

Wynik uzyskany za pomocą naszego algorytmu:

3.2871334860413902e-02	1.3396227980963753e+00	2.0664802958946642e+00
2.8255436051753362e+00	3.5575717155288831e+00	4.2844928688976447e+00
5.0072101845199901e+00	5.7276640027545183e+00	6.4466155827488087e+00
7.1645544009952760e+00	7.8817738782420257e+00	8.5984658683718784e+00
9.3147597999078435e+00	1.0030746230199034e+01	1.0746490321152770e+01
1.1462040127963592e+01	1.2177431844626687e+01	1.2892693237901542e+01
1.3607845956842080e+01	1.4322907124390252e+01	1.5037890457946190e+01

1.5752807073551210e+01	1.6467666073000725e+01	1.7182474979167374e+01
1.7897240063340146e+01	1.8611966594532937e+01	1.9326659031596780e+01
2.0041321172855753e+01	2.0755956273816832e+01	2.1470567140615682e+01
2.2185156204831525e+01	2.2899725583859315e+01	2.3614277129986348e+01
2.4328812470561147e+01	2.5043333041083297e+01	2.5757840112626393e+01
2.6472334814693667e+01	2.7186818154368854e+01	2.7901291032443737e+01
2.8615754257064278e+01	2.9330208555329332e+01	3.0044654583191171e+01
3.0759092933940650e+01	3.1473524145507586e+01	3.2187948706764509e+01
3.2902367062989086e+01	3.3616779620613272e+01	3.4331186751365145e+01
3.5045588795892542e+01	3.5759986066942112e+01	3.6474378852156377e+01
3.7188767416541133e+01	3.7903152004647609e+01	3.8617532842507245e+01
3.9331910139350974e+01	4.0046284089140670e+01	4.0760654871936097e+01
4.1475022655117748e+01	4.2189387594482916e+01	4.2903749835230023e+01
4.3618109512844299e+01	4.4332466753896213e+01	4.5046821676762427e+01
4.5761174392277908e+01	4.6475525004326812e+01	4.7189873610378676e+01
4.7904220301975755e+01	4.8618565165176619e+01	4.9332908280960552e+01
5.0047249725596565e+01	5.0761589570980924e+01	5.1475927884945889e+01
5.2190264731542747e+01	5.2904600171301595e+01	5.3618934261469811e+01
5.4333267056231648e+01	5.5047598606910192e+01	5.5761928962153874e+01
5.6476258168108181e+01	5.7190586268574648e+01	5.7904913305157791e+01
5.8619239317400961e+01	5.9333564342912588e+01	6.0047888417482852e+01
6.0762211575192332e+01	6.1476533848512879e+01	6.2190855268401300e+01
6.2905175864386699e+01	6.3619495664651929e+01	6.4333814696109258e+01
6.5048132984471266e+01	6.5762450554316942e+01	6.6476767429153355e+01
6.7191083631473546e+01	6.7905399182813397e+01	6.8619714104010058e+01
6.9334028332577844e+01	7.0048337944187921e+01	7.0765058863800306e+01
7.1539156856033287e+01]		

## Wynik uzyskany za pomocą biblioteki numerycznej:

[3.2871334860413950e-02	1.3396227980963753e+00	2.0664802958946642e+00
2.8255436051753366e+00	3.5575717155288831e+00	4.2844928688976447e+00
5.0072101845199901e+00	5.7276640027545183e+00	6.4466155827488087e+00
7.1645544009952760e+00	7.8817738782420257e+00	8.5984658683718784e+00
9.3147597999078418e+00	1.0030746230199036e+01	1.0746490321152770e+01
1.1462040127963592e+01	1.2177431844626687e+01	1.2892693237901542e+01
1.3607845956842080e+01	1.4322907124390252e+01	1.5037890457946187e+01
1.5752807073551210e+01	1.6467666073000725e+01	1.7182474979167374e+01
1.7897240063340146e+01	1.8611966594532937e+01	1.9326659031596780e+01
2.0041321172855753e+01	2.0755956273816835e+01	2.1470567140615678e+01
2.2185156204831525e+01	2.2899725583859315e+01	2.3614277129986348e+01
2.4328812470561147e+01	2.5043333041083301e+01	2.5757840112626393e+01
2.6472334814693667e+01	2.7186818154368854e+01	2.7901291032443737e+01
2.8615754257064278e+01	2.9330208555329332e+01	3.0044654583191171e+01
3.0759092933940650e+01	3.1473524145507586e+01	3.2187948706764502e+01
3.2902367062989093e+01	3.3616779620613265e+01	3.4331186751365145e+01
3.5045588795892542e+01	3.5759986066942112e+01	3.6474378852156377e+01
3.7188767416541133e+01	3.7903152004647609e+01	3.8617532842507245e+01
3.9331910139350974e+01	4.0046284089140670e+01	4.0760654871936097e+01
4.1475022655117748e+01	4.2189387594482916e+01	4.2903749835230023e+01
4.3618109512844299e+01	4.4332466753896213e+01	4.5046821676762427e+01
4.5761174392277908e+01	4.6475525004326812e+01	4.7189873610378669e+01
4.7904220301975755e+01	4.8618565165176626e+01	4.9332908280960552e+01

5.0047249725596565e+01	5.0761589570980924e+01	5.1475927884945889e+01
5.2190264731542747e+01	5.2904600171301595e+01	5.3618934261469811e+01
5.4333267056231648e+01	5.5047598606910192e+01	5.5761928962153874e+01
5.6476258168108167e+01	5.7190586268574648e+01	5.7904913305157791e+01
5.8619239317400961e+01	5.9333564342912588e+01	6.0047888417482852e+01
6.0762211575192332e+01	6.1476533848512879e+01	6.2190855268401300e+01
6.2905175864386699e+01	6.3619495664651929e+01	6.4333814696109258e+01
6.5048132984471266e+01	6.5762450554316942e+01	6.6476767429153355e+01
6.7191083631473546e+01	6.7905399182813397e+01	6.8619714104010058e+01
6.9334028332577844e+01	7.0048337944187921e+01	7.0765058863800306e+01
7.1539156856033287e+01]		

Wyznacznik macierzy A obliczony za pomocą przemnożenia wszystkich elementów listy środkowej diagonali U:

Wyznacznik macierzy A: 78240161.00959387

Wyznacznik macierzy A obliczony za pomocą biblioteki numerycznej:  
78240161.0095941

Jak widać, wszystkie powyższe wyniki otrzymane za pomocą algorytmu zgadzają się z tymi, otrzymanymi za pomocą gotowych bibliotek numerycznych (pomijając błędy zaokrągleń podczas obliczeń).

Ponieważ wykorzystujemy rzadką strukturę naszej macierzy, liczba niezerowych w niej elementów skaluje się jak  $O(4N)$ , ponieważ mamy cztery diagonale. Czyli faktoryzacji LU dokonujemy w czasie liniowym  $O(N)$ .