Zadanie numeryczne 4

Igor Tyszer

Listopad 2021

1 Wstęp

Mamy macierz:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 8 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 8 & 1 & ... & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 10 & 8 & ... & 1 & 1 & 1 & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 10 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 & 10 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

oraz wektor $b \equiv (5, ..., 5)^T$.
Wymiar macierzy ustalamy na N = 50.
Chcemy rozwiązać równanie macierzowe $Ay = b$.

2 Algorytm

Wzór, który idealnie nada się do rozwiązania powyższego równania, jest wzór Shermana-Morrisona.
Twierdzenie: Niech $A \in \mathbb{R}^{NxN}$, $detA \neq 0$ oraz u,v $\in \mathbb{R}^N$. Niech $A_1 = A + uv^T$. Wówczas:

$A_1^{-1} = A^{-1}$ - $\frac{A^{-1}uv^TA^{-1}}{1+v^TA^{-1}u}$

Zauważmy, że ponieważ $detA \neq 0$, macierz A^{-1} istnieje.
Wzór ten będzie nam przydatny, ponieważ chcemy wyliczyć A_1^{-1}, gdzie A_1 jest pewną szczególną modyfikacją macierzy A, a odwrotność A^{-1} znamy.

3 Zastosowanie algorytmu w naszym przykładzie

Możemy zmodyfikować naszą macierz następująco:
Niech $u = v = [1, 1, 1, ..., 1, 1, 1]^T$

$$uv^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ ... \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [1, 1, ..., 1, 1] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 & 1 & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Niech teraz:

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 7 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 7 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 7 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 9 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = A + uv^T = \begin{bmatrix} 10 & 8 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 8 & 1 & ... & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 10 & 8 & ... & 1 & 1 & 1 & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 10 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 & 10 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

Otrzymaliśmy modyfikację naszej macierzy z zadania A_1. Teraz nasze równanie macierzowe, które mamy rozwiązać, wygląda następująco: $(A + uv^T)y = b$. Czyli: $y = (A + uv^T)^{-1}b$. Teraz możemy zastosować wzór Shermana-Morrisona dla naszego przypadku. Otrzymujemy:
$y = (A^{-1}$ - $\frac{A^{-1}uv^TA^{-1}}{1+v^TA^{-1}u})$ b $= A^{-1}b$ - $\frac{A^{-1}uv^TA^{-1}b}{1+v^TA^{-1}u}$
Oznaczmy: $z = A^{-1}b$ oraz $z' = A^{-1}u$.
Finalnie otrzymujemy wzór: $y = z$ - $\frac{z'(v^Tz)}{1+v^Tz'}$

Nasze niewiadome z oraz z' możemy obliczyć w następujący sposób, korzystając ze wstęgowej budowy macierzy A, która posiada tylko dwie diagonale, środkową oraz jedną nad środkową. Nie musimy dokonywać rozkładu LU, ponieważ ta macierz jest już rozłożona i jest to macierz górna trójkątna. Także z oraz z' otrzymujemy poprzez backward substitution na wzorach: $Az = b$ oraz $Az' = u$. Złożoność naszego algorytmu jest liniowa, podczas gdybyśmy mieli rozwiązać to równanie za pomocą rozkładu LU, wtedy złożoność wynosiła by $O(n^3)$.

4 Wynik

y = [0.07525844089350037, 0.07525904117533852, 0.07525826938440369, 0.07525926168703423, 0.07525798586936636, 0.07525962620636797, 0.07525751720165161, 0.07526022877914404, 0.07525674246522518, 0.07526122486883524, 0.07525546177847939, 0.07526287146607977, 0.07525334472487927, 0.07526559339213706, 0.07524984510566277, 0.07527009290255826, 0.07524406002083556, 0.07527753086876468, 0.07523449692142722, 0.07528982628228975, 0.07521868853260927, 0.07531015135362706, 0.07519255629803279, 0.07534374994093965, 0.07514935811434514, 0.07539929046282381, 0.0750779488719227, 0.07549110234593845, 0.07495990502220382, 0.07564287300986267, 0.07476477131144413, 0.0758937592094108, 0.07444220334059656, 0.07630848945764337, 0.07390897873572605, 0.07699406394961972, 0.07302752581747077, 0.0781273605588052, 0.07157043017708939, 0.08000076923929544, 0.06916176187360193, 0.08309762848663654, 0.0651800856984491, 0.08821692642611872, 0.058598131204829124, 0.09667943934648732, 0.04771775745006959, 0.11066849131689238, 0.029731833488120224, 0.13379325069654147]^T