Zadanie numeryczne 2

Igor Tyszer

Grudzień 2021

1. Wstęp

Mamy zadane macierze:

$$A_1=\begin{pmatrix} 2.40827208 & -0.36066254 & 0.80575445 & 0.46309511 & 1.20708553 \\ -0.36066254 & 1.14839502 & 0.02576113 & 0.02672584 & -1.03949556 \\ 0.80575445 & 0.02576113 & 2.45964907 & 0.13824088 & 0.0472749 \\ 0.46309511 & 0.02672584 & 0.13824088 & 2.05614464 & -0.9434493 \\ 1.20708553 & -1.03949556 & 0.0472749 & -0.9434493 & 1.92753926 \end{pmatrix}$$

$$A_2=\begin{pmatrix} 2.61370745 & -0.6334453 & 0.76061329 & 0.24938964 & 0.82783473 \\ -0.6334453 & 1.51060349 & 0.08570081 & 0.31048984 & -0.53591589 \\ 0.76061329 & 0.08570081 & 2.46956812 & 0.18519926 & 0.13060923 \\ 0.24938964 & 0.31048984 & 0.18519926 & 2.27845311 & -0.54893124 \\ 0.82783473 & -0.53591589 & 0.13060923 & -0.54893124 & 2.6276678 \end{pmatrix}$$

Oraz zdefiniowane wektory:

b $\equiv (5.40780228, 3.67008677, 3.12306266, -1.11187948, 0.54437218)^T$

b’ $\equiv b + (10^{-5}, 0, 0, 0, 0)^T$

Używając wybranego pakietu algebry komputerowej lub biblioteki numerycznej, chcemy rozwiązać równania $A_i y_i = b$ oraz $A_i y_i' = b'$ dla i = 1, 2.

Ponadto chcemy wyznaczyć $\Delta_i \equiv \|y_i - y_i'\|_2$ oraz zinterpretować różnicę wartości $\Delta_1 \ i \ \Delta_2$.

2. Rozwiązanie problemu

Do rozwiązania zadanych we wstępie problemów użyłem metod z biblioteki numerycznej NumPy. Równania $A_i y_i = b$ oraz $A_i y_i' = b'$ dla i = 1, 2 rozwiązałem za pomocą np.linalg.solve() które rozwiązuje układ równań za pomocą faktoryzacji LU, różnicę $\Delta_i \equiv \|y_i - y_i'\|_2$policzyłem za pomocą np.linalg.norm(), a współczynnik uwarunkowania macierzy kappa najpierw za pomocą np.linalg.eigvals(), by uzyskać wartości własne macierzy zadanej w argumencie, a później podstawiłem do wzoru (opisanego w kolejnym punkcie) największą i najmniejszą wartość własną.

3. Wyniki oraz ich analiza

Rozwiązanie równania $A_1 y_1 = b$:

y_1 = $[\, 3.28716602, 3.8029998, 0.25146854, -1.57875474, -0.50410395 \,]^T$

Rozwiązanie równania $A_1 y_1' = b'$:

y_1' = $[\, 16.74173332, -14.06233583, -2.70495914, -15.57494944, -25.34234556]^T$

Rozwiązanie równania $A_2 y_2 = b$:

y_2 = $[\, 3.18374857, 3.94032033, 0.27419287, -1.47117406, -0.31318674 \,]^T$

Rozwiązanie równania $A_2 y_2' = b'$:

y_2' = $[\, 3.18375389, 3.94032237, 0.27419131, -1.47117514, -0.31318814]^T$

Różnica $\Delta_1 \equiv \|y_1 - y_1'\|_2$:

Δ_1 = 36.35612431941617

Różnica $\Delta_2 \equiv \|y_2 - y_2'\|_2$:

Δ_2 = 6.166739465500467e-06

Współczynnik uwarunkowania κ dla macierzy A_1:

κ = 39295748.00603768

Współczynnik uwarunkowania κ dla macierzy A_2:

κ = 4.000000024553182

Jak można zauważyć, niewielkie zaburzenie jednej ze współrzędnych wektora b, w przypadku macierzy A_1, prowadzi do otrzymania zupełnie różniących się wyników równania $A_1 y_1 = b$ i $A_1 y_1' = b'$.

Inaczej ma się sytuacja w przypadku macierzy A_2, ponieważ niewielkie zaburzenie jednej ze współrzędnych wektora b nie skutkuje dużą rozbieżnością wyników równania $A_2 y_2 = b$ i $A_2 y_2' = b'$, wręcz przeciwnie, są one do siebie bardzo zbliżone z dokładnością do piątego miejsca po przecinku.

Dlatego wartość długości wektora różnicy pomiędzy $y_1 - y_1'$ jest znacznie większa niż w przypadku różnicy $y_2 - y_2'$.

Wnioskując z powyższych rozważań, możemy powiedzieć że bywają równania, które są mało podatne na zaburzenia danych (przypadek macierzy A_2) oraz równania, które są szalenie wrażliwe na zaburzenia danych
(przypadek macierzy A_1).

Dlatego potrzebujemy jakiejś miary uwarunkowania problemu numerycznego. Współczynnikiem uwarunkowania nazywamy liczbę $\kappa \in \mathbb{R}$, która mówi jak bardzo błąd względny wyniku obliczeń „przekracza" błąd względny samej różnicy przybliżenia i wartości dokładnej. Jeśli przybliżenie znacznie różni się od wartości dokładnej, to także wyniki obliczeń będą się znacznie różnić. W zagadnieniach numerycznie źle uwarunkowanych może się zdarzyć, że nawet niewielkie odchylenie przybliżenia od wartości dokładnej doprowadzi do znacznej różnicy wyników.

Jak obliczyć współczynnik uwarunkowania dla macierzy A_1 oraz A_2? Najpierw zauważmy, że obie macierze są macierzami rzeczywistymi, kwadratowymi, symetrycznymi.

Nasz współczynnik możemy obliczyć ze wzoru:

$$\kappa = \|A_i\| * \left\|A_i^{-1}\right\|$$

gdzie norma $\|A_i\| = \max_j |\lambda_j|$, czyli norma odwracalnej macierzy symetrycznej, rzeczywistej jest równa największemu modułowi spośród jej wartości własnych. Rozważmy teraz macierz A^{-1}. Ma ona te same wektory własne, co macierz A, natomiast jej wartości własne są odwrotnościami wartości własnej macierzy nieodwróconej. Czyli norma $\left\|A_i^{-1}\right\| = \frac{1}{\min_j |\lambda_j|}$.

Obliczając powyższy współczynnik uwarunkowania dla macierzy A_1 oraz A_2, możemy stwierdzić że macierz A_1 jest źle uwarunkowana, ponieważ ma ogromny współczynnik, a macierz A_2 jest dobrze uwarunkowana, ponieważ jej współczynnik uwarunkowania jest niski.