CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO E AUTOMAÇÃO

Disciplina: Projeto e Engenharia de Software
Professor: Eduardo de Lucena Falcão
Tópico: Complexidade de Algoritmos Recursivos

1. Resolva as seguintes equações de recorrências (iteração ou árvore):
   a. $T(n) = T(n-1) + c,$ $\quad c\ constante,\ n \geq 1$
      i. $T(0) = 1$
      ii. Resp: $O(n)$

   Resposta:

   $T(n) = T(n-1) + c$

   $T(n-1) = T((n-1)-1) + c = T(n-2) + c$

   $T(n) = T(n-2) + c + c = T(n-2) + 2c$

   $T(n-2) = T((n-1)-2) + c = T(n-3) + c$

   $T(n) = T(n-3) + c + 2c = T(n-3) + 3c$

   $T(n-3) = T((n-1)-3) + c = T(n-4) + c$

   $T(n) = T(n-4) + c + 3c = T(n-4) + 4c$

   $\Rightarrow T(n) = T(n-1) + c$

   $\Rightarrow T(n) = T(n-2) + 2c$

   $\Rightarrow T(n) = T(n-3) + 3c$

   $\Rightarrow T(n) = T(n-4) + 4c$

   $\Rightarrow \ldots$

   $\Rightarrow$ No nível i: $T(n) = T(n-i) + ic$

   onde: $n - i = 0 \Rightarrow i = n$

   $\Rightarrow T(n) = T(n-n) + nc = T(0) + nc = nc + 1$

   $\Rightarrow T(n) \in O(n)$

   b. $T(n) = T(n-1) + 2^n,$ $\quad n \geq 1$
      i. $T(0) = 1$
      ii. Resp: $O(2^n)$

   $\Rightarrow T(n) = T(n-1) + 2^n$

   $T(n-1) = T((n-1)-1) + 2^{n-1} = T(n-2) + 2^{n-1}$

   $\Rightarrow T(n) = T(n-2) + 2^{n-1} + 2^n$

   $T(n-2) = T(n-3) + 2^{n-2}$

   $\Rightarrow T(n) = T(n-3) + 2^{n-2} + 2^{n-1} + 2^n$

   $\Rightarrow T(n) = T(n-4) + 2^{n-3} + 2^{n-2} + 2^{n-1} + 2^n$

   $\Rightarrow \ldots$

   $\Rightarrow$ *No nível i:* $T(n) = T(n-i) + \sum_{x=0}^{i-1} 2^{n-x}$

⇒ *No nível* $i = n$*:* $T(n) = T(n - n) + \sum_{x=0}^{n-1} 2^{n-x} = T(0) + \sum_{x=0}^{n-1} 2^{n-x}$

⇒ $T(n) = 1 + 2^n + 2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2$

⇒ $T(n) \in O(2^n)$

c. $T(n) = cT(n - 1) + k,$ c *e* k *constantes*, $n > 0$

i. $T(0) = k$

ii. Resp: $O(kc^n)$para $T(n) = cT(n - 1) + k$

Resposta:

⇒ $T(n) = cT(n - 1) + k$

$T(n - 1) = cT(n - 2) + k$

⇒ $T(n) = c(cT(n - 2) + k) + k = c^2T(n - 2) + ck + k$

$T(n - 2) = cT(n - 3) + k$

⇒ $T(n) = c^2(cT(n - 3) + k) + ck + k = c^3T(n - 3) + c^2k + ck + k$

⇒ $T(n) = c^3(cT(n - 4) + k) + c^2k + ck + k = c^4T(n - 4) + c^3k + c^2k + ck + k$

⇒ *No nível* i*:* $T(n) = c^iT(n - i) + \sum_{x=0}^{i-1} c^xk$

⇒ *No nível* $i = n$*:* $T(n) = c^nT(n - n) + \sum_{x=0}^{n-1} c^xk$

⇒ $T(n) = c^nk + c^{n-1}k + c^{n-2}k + \ldots + ck + k$

⇒ $T(n) \in O(c^n)$

d. $T(n) = 3T(n/2) + n,$ $n > 1$

i. $T(1) = 1$

ii. Resp: $O(n^{1.58})$

Resposta:

⇒ $T(n) = 3T(n/2) + n$

$T(n/2) = 3T(n/4) + n/2$

⇒ $T(n) = 3(3T(n/4) + n/2) + n = 9T(n/4) + 3n/2 + n$

$T(n/4) = 3T(n/8) + n/4$

⇒ $T(n) = 9(3T(n/8) + n/4) + 3n/2 + n = 27T(n/8) + 9n/4 + 3n/2 + n$

$T(n/8) = 3T(n/16) + n/8$

⇒ $T(n) = 27(3T(n/16) + n/8) + 9n/4 + 3n/2 + n$

⇒ $T(n) = 81T(n/16) + 27n/8 + 9n/4 + 3n/2 + n$

⇒ *No nível* i*:* $T(n) = 3^iT(n/2^i) + \sum_{x=0}^{i-1} 3^x(n/2^x)$

⇒ *No nível* $i = log_2n$*:* $T(n) = 3^{log_2n}T(n/2^{log_2n}) + \sum_{x=0}^{log_2n-1} 3^x(n/2^x)$

$\Rightarrow T(n) = 3^{log_2 n} + 3^{log_2 n - 1}(n/2^{log_2 n - 1}) + ... + 3(n/2) + n$

e. $T(n) = 2T(n/2) + 2n \cdot log_2(n), \quad n > 1$
   i. $T(2) = 4$
   ii. Resp: $O(n \cdot (log_2(n))^2)$

Resposta:

$\Rightarrow T(n) = 2T(n/2) + 2n \cdot log_2(n)$

$T(n/2) = 2T(n/4) + 2(n/2) \cdot log_2(n/2)$

$T(n/2) = 2T(n/4) + n \cdot (log_2(n) - 1)$

$T(n/2) = 2T(n/4) + n \cdot log_2(n) - n$

$\Rightarrow T(n) = 2(2T(n/4) + n \cdot log_2(n) - n) + 2n \cdot log_2(n)$

$= 4T(n/4) + 2n \cdot log_2(n) - 2n + 2n \cdot log_2(n)$

$= 4T(n/4) + 4n \cdot log_2(n) - 2n$

$T(n/4) = 2T(n/8) + 2(n/4) \cdot log_2(n/4)$

$T(n/4) = 2T(n/8) + (n/2) \cdot (log_2(n) - 2)$

$T(n/4) = 2T(n/8) + (n/2) \cdot log_2(n) - 2(n/2)$

$T(n/4) = 2T(n/8) + (n/2) \cdot log_2(n) - n$

$\Rightarrow T(n) = 4(2T(n/8) + (n/2) \cdot log_2(n) - n) + 4n \cdot log_2(n) - 2n$

$= 8T(n/8) + 4(n/2) \cdot log_2(n) - 4n + 4n \cdot log_2(n) - 2n$

$= 8T(n/8) + 6n \cdot log_2(n) - 6n$

$T(n/8) = 2T(n/16) + 2(n/8) \cdot log_2(n/8)$

$T(n/8) = 2T(n/16) + (n/4) \cdot (log_2(n) - 3)$

$T(n/8) = 2T(n/16) + (n/4) \cdot log_2(n) - (3n/4))$

$\Rightarrow T(n) = 8(2T(n/16) + (n/4) \cdot log_2(n) - (3n/4))) + 6n \cdot log_2(n) - 6n$

$= 16T(n/16) + 2n \cdot log_2(n) - 6n + 6n \cdot log_2(n) - 6n$

$= 16T(n/16) + 8n \cdot log_2(n) - 12n$

$\Rightarrow T(n) = 2T(n/2) + 2n \cdot log_2(n)$

$\Rightarrow T(n) = 4T(n/4) + 4n \cdot log_2(n) - 2n$

$\Rightarrow T(n) = 8T(n/8) + 6n \cdot log_2(n) - 6n$

$\Rightarrow T(n) = 16T(n/16) + 8n \cdot log_2(n) - 12n$

$\Rightarrow$ *No nível i:* $T(n) = 2^i T(n/2^i) + (i2n) \cdot log_2(n) - (2i)n$

$\Rightarrow$ *No nível* $i = log_2(n)$: $T(n) = 2^{log_2(n)}T(n/2^{log_2(n)}) + (2nlog_2(n)) \cdot log_2(n)$

$= nT(1) + 2n(log_2(n))^2$

$= 4n + 2n(log_2(n))^2$

$\Rightarrow T(n) \in n \cdot (log_2(n))^2$

2. Caracterize cada uma das seguintes equações de recorrências usando o teorema mestre (assumindo que $T(n) = c$ para $n > d$, para $c > 0$ e $d \geq 1$ constantes).
   a. $T(n) = 2T(n/2) + log_2(n)$
      i. $\Theta(n)$

Resposta:

$a = 2;\ b = 2;\ f(n) = log_2(n)$

$n^{log_b a} = n^{log_2 2} = n^1$

$\Rightarrow log_2(n) = O(n^{1-\varepsilon})$, $para\ \epsilon = 0.4 \Rightarrow log_2(n) = O(n^{0.6}) \Rightarrow T(n) = \Theta(n)$

   b. $T(n) = 4T(n/2) + n^2$
      i. $\Theta(n^2 \cdot log_2(n))$

Resposta:

$a = 4;\ b = 2;\ f(n) = n^2$

$n^{log_b a} = n^{log_2 4} = n^{log_2 2^2} = n^2$

$\Rightarrow f(n) = \Theta(n^2) \Rightarrow T(n) = \Theta(n^2 \cdot log_2(n))$

   c. $T(n) = 16T(n/2) + (n \cdot log_2(n))^4$
      i. Dica

Resposta:

$a = 16;\ b = 2;\ f(n) = (n \cdot log_2(n))^4$

$n^{log_b a} = n^{log_2 16} = n^{log_2 2^4} = n^4$

$f(n) = (n \cdot log_2(n))^4 = O(n^{4-\epsilon})$, $para\ \epsilon = 0.5 \Rightarrow (n \cdot log_2(n))^4 = O(n^{3.5})$

$\Rightarrow T(n) = \Theta(n^4)$

   d. $T(n) = 7T(n/3) + n$
      i. $\Theta(n^{1.77})$

Resposta:

$a = 7;\ b = 3;\ f(n) = n$

$n^{log_b a} = n^{log_3 7} = n^{1.77}$

$f(n) = n = O(n^{1.77-\epsilon})$, $para\ \epsilon = 0.75 \Rightarrow n = O(n^{1.02}) \Rightarrow T(n) = \Theta(n^{1.77})$

   e. $T(n) = 9T(n/3) + n^3 \cdot log_2(n)$
      i. $\Theta(n^3 \cdot log_2(n))$

Resposta:

$a = 9;\ b = 3;\ f(n) = n^3 \cdot log_2(n)$

$n^{log_b a} = n^{log_3 9} = n^{log_3 3^2} = n^2$

$f(n) = n^3 \cdot log_2(n) = \Omega(n^{2+\varepsilon}),\ para\ \varepsilon = 1 \Rightarrow n^3 \cdot log_2(n) = \Omega(n^3)$

Condição de regularidade: deve existir $c < 1$ *tal que:*

$9n^3 \cdot log_2(n) \leq cn^3 \cdot log_2(n) \Rightarrow 9 \leq c \Rightarrow \exists\, c < 1$

Portanto: $T(n) = \Theta(n^3 \cdot log_2(n))$