Synthèse mathématiques

Igor et Jean

28 décembre 2021

Table des matières

1 Étude de fonction

1.1 Introduction

Une fonction prend une valeur x en *fonction* de laquelle elle retourne une valeur y. On peut alors faire un graphique de la fonction avec, en ordonnée, la valeur retournée et, en abscisse, la valeur insérée.

Exemple d'une fonction

$$f(x) = ax + b \tag{1}$$

1.2 Premier degré

La fonction 1 est du premier degré. On le remarque par son équation dont l'élément le plus élevé est du premier degré. Ainsi, on dit d'une fonction qu'elle est du degré de son élément le plus élevé.

La *pente* caractérise l'inclinaison de la droite ; la différence dans le changement de x et y. Un changement égale produit un angle de 45° et une pente de 1.

$$pente = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \tag{2}$$

Deux droites sont perpendiculaires si leurs pentes sont inverses et opposées et son parrallèles si leurs pentes sont identiques.

Pour trouver l'équation de la droite qui passe par deux points, il faut trouver la pente de la droite à l'aide de l'équation 2 puis, pour trouver b, mettre un des deux points dans l'équation.

Pour trouver le point d'intersection de deux fonctions, il faut fusionner leurs équations en une, et résoudre pour trouver x. Celui-ci, correspondant à la valeur en abscisse du point, on peut trouver y en l'implémentant (x) dans l'équation.

1.3 Deuxième degré (à une inconnue)

Une fonction du deuxième degrés peut toujours s'écrire sous la forme

$$f(x) = ax^2 + bx + c \tag{3}$$

Vu que x est la seule inconnue, a, b et c sont définis.

On peut trouver la/les valeures de x qui font en sorte que la fonction retourne 0 grâce à l'équation suivante.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{4}$$

Ces valeurs sont appelées <u>racines</u>. Il peut y en avoir aucune, une ou deux.

La partie dans la racine carrée est appelée le <u>delta</u> (Δ).

Comme toutes les fonctions, on peut les représenter graphiquement ; une parabole pour celle du deuxième degré.

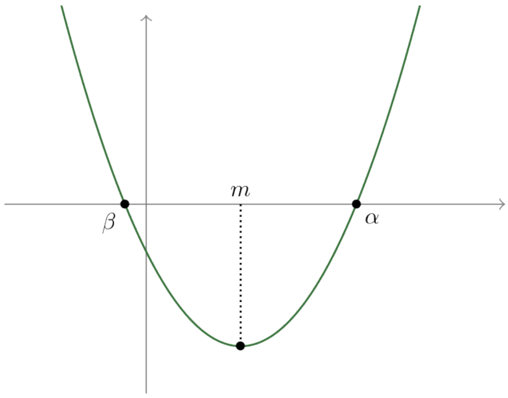

FIGURE 1 – Graphique d'une fonction du deuxième degré

Une fonction du deuxième degré n'a besoin que de trois paramètres pour être définie. Celles-ci sont illustrée sur la figure 1 par α, β et m

α et β, sont les valeurs qui touchent l'axe des abscisse ; qui retournent 0. Ce sont, comme on la vu ci-dessus, les racines et peuvent être calculée par le biais de l'équation 4.

Quand la fonction n'a pas de racine, dans le cas où delta (Δ) est negatif, la parabole ne touche pas l'axe des abscisses. Quand la fonction n'a qu'une racine, le delta égale 0 et la courbe ne touche l'axe qu'une fois. Dans le cas où le delta est positif, la fonction a deux racine et touche deux fois l'axe comme dans la figure 1 ci-dessus.

m est le sommet de la fonction. Celle-ci peut-être calculée avec grâce à l'équation

$$m = \frac{-b}{2a} \tag{5}$$

Une fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ dont les racines sont α et β peut être factorisée en

$$a(x - \alpha)(x - \beta) \tag{6}$$

car ses racines et son sommet, les seuls paramètres définissant, seront les mêmes.

Rajouter trouver forme grâce à a, b avec en outre.

1.4 Troisième, quatrième degré, etc

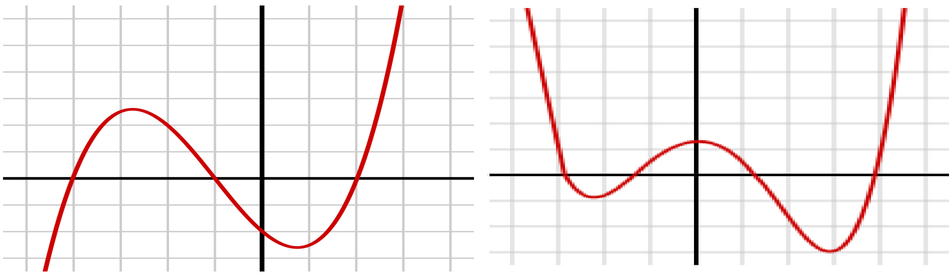

FIGURE 2 – Courbe du 3ème et 4ème degré

Les fonctions qui ont un degré supérieur à 1 sont représentée par des courbes ayant au maximum un sommet et toujours deux changements de concavité en moins que le degré.

Les courbes de degrés pairs ont les deux extrêmes pointant dans la même direction (haut si a est positif, bas dans le cas contraire). Les fonctions de degrés impairs ont les deux extrêmes qui pointes dans des directions opposées (si a est positif, la gauche pointe vers le bas, sinon inverse).

1.5 dérivées

La dérivée d'une fonction est une autre fonction (courbe ou droite) qui représente sa pente pour chaque point donné (en x). La pente, comme vu dans la partie 1.2, est l'ampleur du changement de la proportion, entre la valeur retournée (y) et la valeur d'entrée (x).

La dérivée est une fonction d'un degré en moins. Ainsi, la pente d'une fonction du deuxième degré varie linéairement, celle d'une fonction du troisième degré varie selon un parabole et ainsi de suite.

Quand la dérivée (pente) est positive, la courbe monte. Quand elle est négative, la courbe descend. Quand elle est à 0, qu'elle change de signe, on se trouve à un sommet.

Pour trouver la pente d'une courbe, il faut comparer deux points infinement proches, car au plus les points sont proches, au plus la courbe semble linéaire et le pente est précise.

La pente en un point x est de

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} \tag{7}$$

Car la pente est la variation de y par rapport à x, et ici, x correspond à δ. En levant la limite, on peut trouver l'équation de la dérivée.

A partir de cette règle, on peut trouver que pour dériver $f(x)$, il faut appliquer la règle suivante sur chaqu'un de ses éléments

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1} \tag{8}$$

Ici, x^n représetente un élément de la fonction, x étant l'inconnu *et* son facteur (ainsi, le facteur est aussi multiplié par n).

L'élément élevé au premier degré se transforme en 1, donc on ne garde que son facteur.

L'élément c (voire dans l'équation 3) n'est, à première vue, pas associé à x. Pour l'implémenter dans l'équation, on peut se le représenter comme $c \cdot x^0$. Donc, il sera toujours égal à 0.

Voici d'autres formules sur l'algèbre des dérivée.

$$(\lambda \cdot f(x))' = \lambda \cdot f(x)' \quad (9)$$
$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) \quad (10)$$
$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x) \quad (11)$$
$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad (12)$$
$$(f^n(x))' = n \cdot f'(x) \cdot f^{n-1}(x) \quad (13)$$
$$(\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \quad (14)$$

Celle-ci donne une idée de la vitesse à laquelle la pente évolue et dans qu'elle direction ; si elle accèlère ou freine.

Ainsi, elle nous donne une idée de la concavité de la courbe alors que la dérivée première ne nous donne que la direction.

1.6 Domaines et asymptotes

Dans une fonction, pour chaque entrée, on n'a qu'une seule valeur correspondante. L'image d'une fonction regroupe toutes les valeurs qu'elle peut retourner ; qu'elle sait atteindre.

À l'inverse, le domaine regroupe tous les nombres (entrées) pour lesquels une valeure existe. Pour voir comment on définis un ensemble de nombres, aller à la partie 4.1.

Le domaine d'une fonction correspond généralement à tous les nombres réels. Toutefois, si celle-ci contient une inconnue dans une racine carrée ou au dénominateur, le domaine peut varier.

1.7 Analyse et tableau de signe

1.8 Exemple d'une étude

2 Nombres complexes

3 Les groupes

Un groupe est un ensemble E auquel est associé une opération (binaire) $\star$ vérifiant les lois 15, 16, 17 et 18.

$$\forall\ a, b \in E,\ \ a \star b \in E \quad (15)$$
$$(a \star b) \star c = a \star (b \star c) \quad (16)$$
$$\exists\ e \in E : a \star e = e \star a = a \quad \forall a \in E \quad (17)$$
$$\forall a \in E, \exists a^{-1} \in E : a \star a^{-1} = a^{-1} \star a = e \quad (18)$$

Ci dessus, la loi 15 est la loi de composition interne. Elle indique que l'opération éffectuée deux nombres quelconques de l'ensemble retourne toujours un autre nombre de l'ensemble.

La loi 16 est celle de l'associativité et indique que l'opération binaire peut être faite dans n'importe qu'elle ordre.

La loi 17 exprime la présence d'un neutre. Le neutre est un élément appartenant à l'ensemble qui laisse les éléments composés avec lui inchangés. Par exemple, le neutre de l'addition est 0 car $a + 0 = a$. Le neutre de la multiplication est 1 car $a \cdot 1 = a$

Finalement, la loi 18 énonce la présence d'inverses, appartenant à l'ensemble, pour chaque élément de l'ensemble. Par definition, la composition d'un nombre et de son inverse retourne le neutre. Par exemple, dans le cas de l'addition, l'inverse de $a = -a$ car $a + (-a) = 0$ qui est le neutre. Pour la multiplication, l'inverse de $a = \frac{1}{a}$ car $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{a}{a} = 1$ étant le neutre.

Les nombres entiers $\mathbb{Z}$ munis de l'addition $(+)$ forment un groupe. L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ et la multiplication ne forme pas un groupe car il n'obéit pas à la règle 18 si $a = 0$. Il n'existe pas de nombre rationnel qui transforme un 0 en neutre (1).

Quelques autres exemples :
- $\mathbb{N}, +$ n'est pas un groupe car il n'y a pas d'inverse.
- $\mathbb{Z}, \cdot$ n'est pas un groupe.
- $\mathbb{Q}, +$ est un groupe.
- $\mathbb{R}, +$ est un groupe.
- $\mathbb{R}, \cdot$ n'est pas un groupe.
- $\mathbb{R}_0, \cdot$ est un groupe.

On dit d'un groupe qu'il est commutatif/abélien s'il répond à la loi

$$\forall a, b \in E : \quad a \star b = b \star a \tag{19}$$

Les symétries d'un objet correspond aux actions qui, opérées sur celle-ci, la laissent indissociable de sa disposition de base.

Les groupes possèdent un lien étroit avec la notion de symétrie. Un groupe de symétrie d'un objet consiste en l'ensemble des transformations qui laissent l'objet inchangé (un ensemble des symétries) ainsi que l'opération de combiner celles-ci les unes après les autres. Ces transformation peuvent être, soit une rotation d'un nombre de degrés, soit une rotation autour d'un axe de symétrie. A ceux-ci vient s'ajouter la transformation I, le neutre, qui est à une rotation de 0° ; nulle.

Cette opération est généralement notée $\circ$ et applique la transformation à sa droite, puis celle à sa gauche. Un groupe de symétrie n'est pas commutatif.

Dans un groupe, la combinaison de deux éléments correspond à un autre élément. Par exemple $5 + 5 = 10$.

On peut ainsi créer un tableau (comme le tableau de multiplication) avec chaque combinaison, et à chaque fois l'élément auquel elle correspond.

	R_0	R_{90}	R_{180}	R_{270}	H	V	D_1	D_2
R_0	R_0	R_{90}	R_{180}	R_{270}	H	V	D_1	D_2
R_{90}	R_{90}	R_{180}	R_{270}	R_0	D_1	D_2	V	H
R_{180}	R_{180}	R_{270}	R_0	R_{90}	V	H	D_2	D_1
R_{270}	R_{270}	R_0	R_{90}	R_{180}	D_2	D_1	H	V
H	H	D_2	V	D_1	R_0	R_{180}	R_{270}	R_{90}
V	V	D_1	H	D_2	R_{180}	R_0	R_{90}	R_{270}
D_1	D_1	H	D_2	V	R_{90}	R_{270}	R_0	R_{180}
D_2	D_2	V	D_1	H	R_{270}	R_{90}	R_{180}	R_0

FIGURE 3 – Tableau du groupe $\left\{_{I/r_0,R_90,R_180,R_270,H,V,D_1,D_2}\right\},\circ$ représentant les relations entre les symétries du carré.

4 Divers

4.1 Emsembles

4.2 Rappel division écrite

La multiplication de deux facteurs a et b donne un nombre dans lequel a rentre b fois (et inversément). Elle peut être vue comme une *addition* répétée, la somme de a nombre b.

La division d'un nominateur a et d'un dénominateur b donne le nombre de fois que b rentre dans a. Elle peut être vue comme une *soustraction* répétée ; combien de fois on peut soustraire b à a.

On remarque tout de suite que ces deux opérations sont l'inverses l'une de l'autre. La multiplication additionne, la division soustrait. La multiplication donne le numérateur de la division à partir du dénominateur et du quotien.

Ainsi, multiplier par x revient à diviser par x^{-1} (et inversément) et multiplier par x puis divisé par x reviens à ne rien faire.

$$a \cdot b = c$$
$$\frac{c}{b} = a$$
$$\frac{c}{a} = b$$

4.3 Division polynomiale

4.4 Lever la limite

4.5 Produits remarquables

4.6 Un nombre est divisible par x si...

4.7 Exposants et racines

4.8 Autres propriétés algébriques