

## Задача о рюкзаке с премиями

И.А. Бобров

СУНЦ НГУ

В работе рассматривается следующая задача. Есть  $n$  работ, каждая из которых требует некоторого дефицитного ресурса. Работы могут быть выполнены частично, но за полное выполнение работы выплачивается премия.

Математическая формулировка:

Пусть  $c_i$  - стоимость выполнения  $i$ -ой работы,  $\tilde{c}_i$  - премия за выполнение  $i$ -ой работы,  $p_i$  - потребность  $i$ -ой работы в дефицитном ресурсе,  $W$  - кол-во дефицитного ресурса,  $f$  - доход от выполнения выбранных работ. Введём следующие переменные:  $y_i$  —равная доле работы  $i$ , выполненной работником;  $x_i$  равная 1, если  $i$ -ая работа выполнена полностью, и 0 в противном случае. Математическая модель может быть записана следующим образом.

$$\left\{ \begin{array}{l} f = \sum_{i=1}^n c_i y_i + \sum_{i=1}^n \tilde{c}_i x_i \rightarrow \max \\ \sum_{i=1}^n p_i y_i \leq W \\ x_i \leq y_i \\ x_i \in \{0; 1\} \\ y_i \in [0; 1] \end{array} \right.$$

Если все  $\tilde{c}_i = 0$ , то задача сводится к полиномиально разрешимой задаче о вещественном рюкзаке. Если все  $c_i = 0$ , то получается NP-трудная задача о булевом рюкзаке, которая решается методом динамического программирования. При этом получается ступенчатая функция зависимости дохода от количества дефицитного ресурса, содержащая не более  $2^n$  точек разрыва.

Для дальнейшего решения потребуется следующая лемма.

**Лемма.**

Существует оптимальное решение, в котором не более одной не целочисленной переменной.

Предлагается следующий алгоритм решения.

Выбрать не целочисленную переменную  $y_i$ . Для оставшихся переменных решить задачу о булевом рюкзаке. В каждой точке разрыва дополнить полученное решения до  $W$  с помощью не целочисленной переменной  $y_i$ , и выбрать максимальное значение. Выбрать наилучшее значение по всем переменным.

Данная задача может быть использована в оптимизации распределения времени для получения максимальной прибыли рабочим или других подобных ситуациях.

Научный руководитель — к.ф.-м.н., доцент кафедры математики СУНЦ НГУ М.Г. Пащенко

## Литература:

1. Кормен, Томас Х., Лейзерсон, Чарльз И., Ривест, Рональд Л., Штайн, Клиффорд, Алгоритмы: построение и анализ, 2-е издание. : Пер. с англ. — М. : Издательский дом “Вильямс”, 2011. — 1296 с.



