

Задача о рюкзаке с премиями

И.А. Бобров

СУНЦ НГУ

В работе рассматривается следующая задача. Есть n работ, каждая из которых требует некоторого дефицитного ресурса. Работы могут быть выполнены частично, но за полное выполнение работы выплачивается премия.

Математическая формулировка:

Пусть c_i - стоимость выполнения i -ой работы, \tilde{c}_i - премия за выполнение i -ой работы, p_i - потребность i -ой работы в дефицитном ресурсе, W - кол-во дефицитного ресурса, f - доход от выполнения выбранных работ. Введём следующие переменные: y_i —равная доле работы i , выполненной работником; x_i равная 1, если i -ая работа выполнена полностью, и 0 в противном случае. Математическая модель может быть записана следующим образом.

$$\left\{ \begin{array}{l} f = \sum_{i=1}^n c_i y_i + \sum_{i=1}^n \tilde{c}_i x_i \rightarrow \max \\ \sum_{i=1}^n p_i y_i \leq W \\ x_i \leq y_i \\ x_i \in \{0; 1\} \\ y_i \in [0; 1] \end{array} \right.$$

Если все $\tilde{c}_i = 0$, то задача сводится к полиномиально разрешимой задаче о вещественном рюкзаке. Если все $c_i = 0$, то получается NP-трудная задача о булевом рюкзаке, которая решается методом динамического программирования. При этом получается ступенчатая функция зависимости дохода от количества дефицитного ресурса, содержащая не более 2^n точек разрыва.

Для дальнейшего решения потребуется следующая лемма.

Лемма.

Существует оптимальное решение, в котором не более одной не целочисленной переменной.

Предлагается следующий алгоритм решения.

Выбрать не целочисленную переменную y_i . Для оставшихся переменных решить булеву задачу о булевом рюкзаке. В каждой точке разрыва дополнить полученное решения до W с помощью не целочисленной переменной y_i , и выбрать максимальное значение. Выбрать наилучшее значение по всем переменным.

Данная задача играет роль в оптимизации распределения времени для получения максимальной прибыли рабочим или других подобных ситуациях.

Научный руководитель — к.ф.-м.н., доцент кафедры математики СУНЦ НГУ М.Г. Пашенко

Литература:

1. Кормен, Томас Х., Лейзерсон, Чарльз И., Ривест, Рональд Л., Штайн, Клиффорд, Алгоритмы: построение и анализ, 2-е издание. : Пер. с англ. — М. : Издательский дом “Вильямс”, 2011. — 1296 с.

