

# Zusammenfassung & Wiederholung Numerik 0 Klausur WS 22/23

**Disclaimer:** Nicht volstaendig, viele Schreib-/Deutschfehler

## Format

- **Frage 1:** Kleine Verstaendnissfragen  $10 \times 2p = 20p$
- **4 laengere Fragen:**  $\times 10p = 40p$  (*besten 3 zaehlen*)

## Stoff

- Gesamte Skript ausser Kapitel:
  - 4.4
  - 5.2.2
  - 5.3
  - 5.4.3
  - 6.3 *Kommt in der 2ten Klausur:*
  - 6.4 *Kommt in der 2ten Klausur:*
- Alle Uebungsblaetter
- Keine Programmieraufgaben aber algorithmische Fragen schon
- Alle Definitionen & alle Saetze (*nicht nur die Aussage aber auch die Voraussetzungen*)
- **Nicht erwartet:** Komplizierte Formel auswendig kennen. (*wenn Gegenstand einer Frage dann angegeben + herleiten oder als Hinweis gegeben*)
- **Hintergrundwissen:** LA & Analysis

## Zusammenfassung

### 2 - Konditionierung & Stabilitaet

- Definition einer numerischen Aufgabe - absolute/relativer Fehler
- Relative Konditionszahl (Fehlerdaempfung, -verstaerkung) *Only general understanding of these concepts is expected*

### 2.3 & 2.4 Zahlendarstellung & Rundungsfehler

- Maschinenzahlen/ -operationen
- Fließkommagitter, IEEE double precision
- Groesste, kleinste darstellbare Zahl (positive/negative)
- (natuerliche) Rundung - absolute/relative Rundungsfehler
- Maschinengenauigkeit  $\epsilon$  → Vorwaertsfehleranalyse

$$x \oplus y = (x + y)(1 + \epsilon) \quad |\epsilon| < \epsilon$$

*solche Rechnungen koennen an der Klausur drankommen*

### 3 - Interpolation & Bestapproximation

- Was ist Interpolation/ Best Approximation?
- 2 Wichtige Saetze:
  - Fehler Darstellung (**Satz 3.5**)

- Existenz und Eindeutigkeit der Lösung (**Satz 3.8**)
- Lagrange Darstellung
- Newton Darstellung (**Herleitung mittels dividierenden Differenzen - Satz 3.10**)
- Neville & Horner Schema fuer Polynomauswertung
- Allgemeine Interpolationsfehler (**Satz 3.12**)
  - Abschaetzung in  $\|\cdot\|_\infty$
- Richardson Extrapolation zum Limes (**Satz 3.16**)
  - Anwendung bei numerischen Differentiation
- Stueckweise Polynominterpolation (z.B. *Stueckweise Linear*)
- Kubische Splineinterpolation
  - Def & Existenz (**Satz 3.21**)
  - Minimale Kruemmung
- Approximationsfehler (**Satz 3.23 ohne Beweis**)
- Trigonometrische Interpolation (*Beweis nicht so wichtig fuer die Klausur*)
  - 2 wichtige Punkte:
    - \* Gibbs Phaenomen
    - \* FFT (*keine Details, nur Ideen*)
- Best Approximation
  - $\mathcal{L}^2$  – Skalarprodukt &  $\mathcal{L}^2$  – Norm  $\rightsquigarrow$  Gaussapproximation
  - Orthogonalitaet des Bestapproximationsfehlers  $\rightsquigarrow$  Gauss-Legendre Polynome (*Formel muessen nicht auswendig gelernt werden*)
  - Allgemeine Gaussapproximation (**Satz 3.31**)
    - \* Garantierter Fehlerkontrolle
    - \* Haar-Wavelettes Definitionen:
      - Mother Wavelette
      - Erhalten von Kinder Wavelettes durch Skalierungen/Verschiebungen
    - \* Eigenschaften (**Lemma 3.34 - wichtigste Teil dieses Unterkapitels**)
    - \* Transformationssatz (*ohne Beweis*)
    - \* Greedy Algorithmus um adaptiv eine Basis zu finden

#### 4 - Quadratur (Numerische Integration)

- Quadraturformeln
- Fehlerdarstellung (**Satz 4.2**)
- **Sehr wichtig:** Genauigkeitsgrad
- **Newton-Cotes Formeln** (aequidistante Punkte) (**Trapez, Simpsonsregeln auswendig kennen sehr wichtig**)
  - Fehler Darstellung fuer Newton-Cotes (**Lemma 4.11 & Satz 4.12**)
- Summierte Newton-Cotes Fehler (**Korollar 4.12**)
- Adaptive Summierte Simpsonsregel (*Nur algorithmische Idee*)
- **Gausquadratur** (nicht Aequidistante Stuetzstellen)  $\rightsquigarrow$  Maximale Genauigkeitsgrad (**Lemma 4.21 & Bedingungen im Lemma 4.22**)
  - Beispiele mit 1 Punkt & 2 Punkte (*wichtig die Bedingungen zu kennen - Legendre Polynome*)
  - Allgemeine Gaussquadraturformel  $\rightsquigarrow$  Nullstellen der Legendrepolynome (**Satz 4.26**)
  - Konvergenzsatz (nur Idee) (**Satz 4.30 - nicht notwendig fuer die Klausur**)

#### 5 - Lineare Gleichungssysteme - Direkte Verfahren

- Loesung von  $Ax = b$  mit  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $m < n$ ,  $m = n$ ,  $m > n$
- Loesbarkeit fuer  $m = n$
- **Matrixnormen (sehr wichtig)**
  - Normaequivalenz in  $\mathbb{R}^m$  (**Satz 5.5**)
  - Eigenschaften von Matrixnormen (**sehr wichtig**):

- \* Vertraeglich
- \* Submultiplikativ
- \* natuerliche Matrixnorm
- Zeilen- & Spaltensummennormen (**wichtigsten Matrix normen - Lemma 5.8**)
- Eigenwerten/-vektoren
  - \*  $\forall \lambda, \|\cdot\|$  natuerlich:  $|\lambda| \leq \|A\|$  d.h. *Spektrum sind durch Matrixnormen beschraenkt*
- Symmetrische, transponierte, orthogonale, positiv-definite Matrix
- Eigenschaften von symmetrischen Matrizen im Bezug auf Spektrum
  - \* Spektralnrm  $\|\cdot\|_2$  ist die natuerliche Norm zu Euklidischem Vektornorm
- Fehleranalyse: Konditionszahl (**Def 5.15**)
  - \* Stoerungssatz (**Satz 5.17, Lemma 5.16**)
- Gausseliminationsverfahren: Verfahren, Matrixschreibweise
  - \* LR Zerlegung
  - \* Pivotierung
  - \* Vorwaerts/-Rueckwertseinsetzung
  - \* Komplexitaet des Gaussverfahrens und der LR Zerlegung (**Lemma 5.24**)
  - \* Rueckwertsstabilitaet der LR-Zerlegung mit Spaltenpivotierung (**Nur Idee von Lemma 5.30, Satz 5.31 & 5.35 ohne Beweis**)
  - \* Anwendung des Stoerungssatzes
  - \* Aequilibrierung (**Rest von LR & Cholesky nicht in der Klausur**)
  - \* Falls  $m \neq n$ : Least-square3s Loesung  $\iff$  Loesung der Normalgleichung,  $\exists$  (**Satz 5.40 !!!**)
  - \* QR-Zerlegung:
    - Householder Transformation (**Def 5.4**)
    - Eigenschaften Householderverfahren (**Lemma 5.42 - nur Ideen**)
    - Eigenschaften der QR-Zerlegung  $\rightsquigarrow$  Loesungsverfahren fuer  $\text{rang}(A) = \min(m, n)$  (!!!)
    - Anwendung in der Gausschen Ausgleichsrechnung (!!!)

## 6 - Iterative Verfahren

- $F(x) = 0, \quad F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n,$
- Iterationsfunktion, Fixpunktiteration
- Lipschitzstetigkeit, Kontraktion (beides bzgl einer Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}^n$ , *Definition 6.1*)
- Banachsche Fixpunktsatz (**Satz 6.2**)
- Wie definieren wir Konvergenzordnung/-faktor (**Definition 6.3**)
- Newtonverfahren (**auswendig kennen fuer die Klausur !**)
  - Herleitung ueber Taylor, geometrische Interpretation
- Jacobi-matrix
  - Invertierbarkeit der Jacobimatrix (**Lemma 6.7**)  $\rightsquigarrow$  **quadratische Konvergenz (Satz 6.9 - ohne Beweis via Lemma 6.8)**
- *Kommt nur in der Wiederholungsklausur:*
  - 6.3: Jacobi, GS...
  - 6.4: Numerische Loesung von Diffgleichungen