

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО  
Факультет программной инженерии и компьютерной техники  
Дисциплина «Дискретная математика»

**Курсовая работа**  
**Часть 2**  
**Вариант 71**

Студент  
КучерявыЙ Игорь Дмитриевич  
Р3109

Преподаватель  
Поляков Владимир Иванович

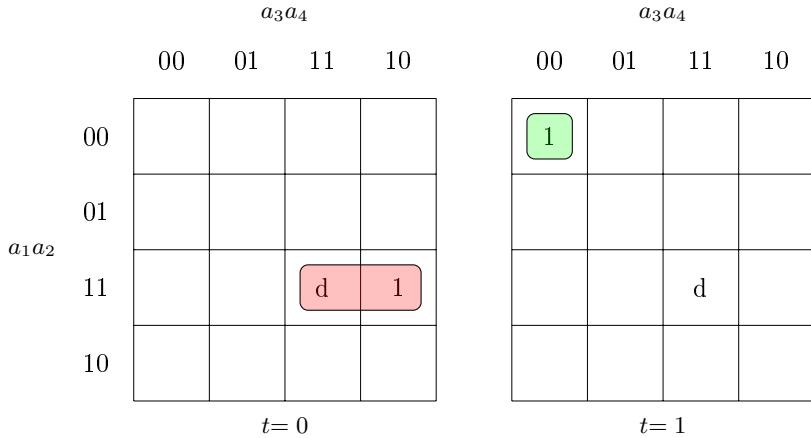
## Задание

Построить комбинационную схему, реализующую двоичный счетчик  $C = (A \pm 1) \bmod 15$ . При  $t = 0$  счетчик работает в суммирующем режиме, при  $t = 1$  — в вычитающем. При переносе/заеме устанавливается бит  $e$ .

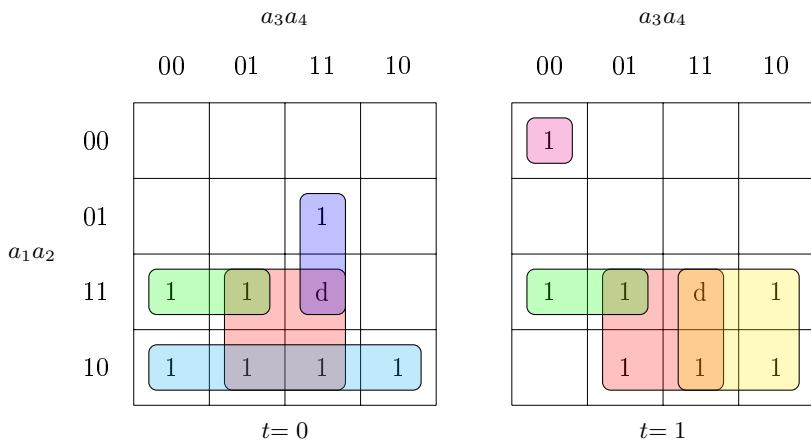
## Таблица истинности

№	$t$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$e$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
2	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1
3	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0
4	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1
5	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0
6	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1
7	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0
8	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1
9	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0
10	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1
11	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0
12	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1
13	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
14	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0
15	0	1	1	1	1	d	d	d	d	d
16	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0
17	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
18	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1
19	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0
20	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1
21	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0
22	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1
23	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0
24	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1
25	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0
26	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1
27	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0
28	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1
29	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0
30	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1
31	1	1	1	1	1	d	d	d	d	d

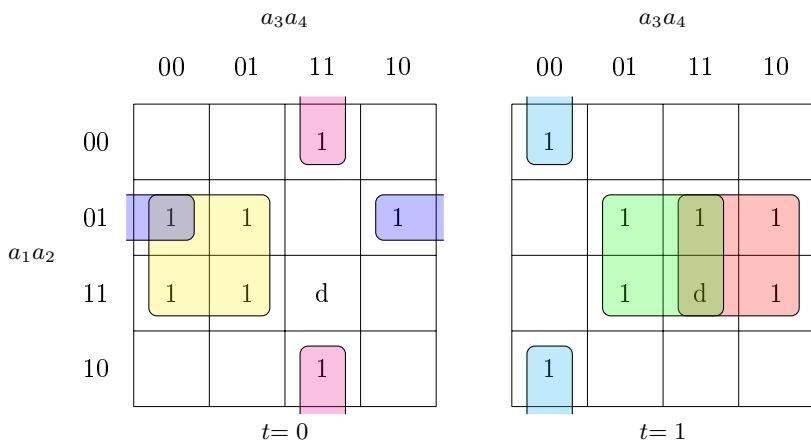
## Минимизация булевых функций на картах Карно



$$e = a_1 a_2 a_3 \bar{t} \vee \bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 \bar{a}_4 t \quad (S_Q = 11)$$



$$c_1 = a_1 a_4 \vee a_1 a_2 \bar{a}_3 \vee a_1 a_3 t \vee a_1 \bar{a}_2 \bar{t} \vee a_2 a_3 a_4 \bar{t} \vee \bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 \bar{a}_4 t \quad (S_Q = 26)$$



$$c_2 = a_2 a_3 t \vee a_2 a_4 t \vee a_2 \bar{a}_3 \bar{t} \vee \bar{a}_2 \bar{a}_3 \bar{a}_4 t \vee \bar{a}_1 a_2 \bar{a}_4 \bar{t} \vee \bar{a}_2 a_3 a_4 \bar{t} \quad (S_Q = 27)$$

		$a_3 a_4$						$a_3 a_4$					
		00	01	11	10			00	01	11	10		
		00	1				00			1			
$a_1 a_2$	01	1					01			1			
	11	1		d			11			d			
	10	1					10			1			
						$t = 0$						$t = 1$	

$$c_3 = a_3 a_4 t \vee \overline{a_3} \overline{a_4} t \vee \overline{a_3} a_4 \bar{t} \vee \overline{a_1} a_3 \overline{a_4} \bar{t} \vee \overline{a_2} a_3 \overline{a_4} \bar{t} \quad (S_Q = 22)$$

		$a_3 a_4$						$a_3 a_4$					
		00	01	11	10			00	01	11	10		
$a_1 a_2$	01	1					01				1		
	11		1				11				1		
	10			d			10				1		
						$t = 0$						$t = 1$	

$$c_4 = a_1 \overline{a_2} \overline{a_4} \vee a_2 \overline{a_3} \overline{a_4} \vee a_3 \overline{a_4} t \vee \overline{a_1} \overline{a_2} \overline{a_4} \bar{t} \quad (S_Q = 16)$$

## Преобразование системы булевых функций

$$\begin{cases} e = a_1 a_2 a_3 \bar{t} \vee \overline{a_1} \overline{a_2} \overline{a_3} \overline{a_4} t & (S_Q^e = 11) \\ c_1 = a_1 a_4 \vee a_1 a_2 \overline{a_3} \vee a_1 a_3 t \vee a_1 \overline{a_2} \bar{t} \vee a_2 a_3 a_4 \bar{t} \vee \overline{a_1} \overline{a_2} \overline{a_3} \overline{a_4} t & (S_Q^{c_1} = 26) \\ c_2 = a_2 a_3 t \vee a_2 a_4 t \vee a_2 \overline{a_3} \bar{t} \vee \overline{a_2} \overline{a_3} \overline{a_4} t \vee \overline{a_1} a_2 \overline{a_4} \bar{t} \vee \overline{a_2} a_3 a_4 \bar{t} & (S_Q^{c_2} = 27) \\ c_3 = a_3 a_4 t \vee \overline{a_3} \overline{a_4} t \vee \overline{a_3} a_4 \bar{t} \vee \overline{a_1} a_3 \overline{a_4} \bar{t} \vee \overline{a_2} a_3 \overline{a_4} \bar{t} & (S_Q^{c_3} = 22) \\ c_4 = a_1 \overline{a_2} \overline{a_4} \vee a_2 \overline{a_3} \overline{a_4} \vee a_3 \overline{a_4} t \vee \overline{a_1} \overline{a_4} \bar{t} & (S_Q^{c_4} = 16) \end{cases} \quad (S_Q = 102)$$

Проведем совместную декомпозицию системы.

$$\varphi_0 = \overline{a_2} \overline{a_3} \overline{a_4} t$$

$$\begin{cases} \varphi_0 = \overline{a_2} \overline{a_3} \overline{a_4} t & (S_Q^{\varphi_0} = 4) \\ e = \varphi_0 \overline{a_1} \vee a_1 a_2 a_3 \bar{t} & (S_Q^e = 8) \\ c_1 = \varphi_0 \overline{a_1} \vee a_1 a_4 \vee a_1 a_2 \overline{a_3} \vee a_1 a_3 t \vee a_1 \overline{a_2} \bar{t} \vee a_2 a_3 a_4 \bar{t} & (S_Q^{c_1} = 23) \\ c_2 = \varphi_0 \vee a_2 a_3 t \vee a_2 a_4 t \vee a_2 \overline{a_3} \bar{t} \vee \overline{a_1} a_2 \overline{a_4} \bar{t} \vee \overline{a_2} a_3 a_4 \bar{t} & (S_Q^{c_2} = 23) \\ c_3 = a_3 a_4 t \vee \overline{a_3} a_4 \bar{t} \vee \overline{a_3} \overline{a_4} t \vee \overline{a_1} a_3 \overline{a_4} \bar{t} \vee \overline{a_2} a_3 \overline{a_4} \bar{t} & (S_Q^{c_3} = 22) \\ c_4 = a_1 \overline{a_2} \overline{a_4} \vee a_2 \overline{a_3} \overline{a_4} \vee a_3 \overline{a_4} t \vee \overline{a_1} \overline{a_4} \bar{t} & (S_Q^{c_4} = 16) \end{cases} \quad (S_Q = 96)$$

Проведем раздельную факторизацию системы.

$$\begin{cases} \varphi_0 = \bar{a}_2 \bar{a}_3 \bar{a}_4 t & (S_Q^{\varphi_0} = 4) \\ e = \varphi_0 \bar{a}_1 \vee a_1 a_2 a_3 \bar{t} & (S_Q^e = 8) \\ c_1 = \varphi_0 \bar{a}_1 \vee a_1 (a_4 \vee a_2 \bar{a}_3 \vee a_3 t \vee \bar{a}_2 \bar{t}) \vee a_2 a_3 a_4 \bar{t} & (S_Q^{c_1} = 21) \\ c_2 = \varphi_0 \vee a_2 \bar{t} (\bar{a}_3 \vee \bar{a}_1 \bar{a}_4) \vee a_2 t (a_3 \vee a_4) \vee \bar{a}_2 a_3 a_4 \bar{t} & (S_Q^{c_2} = 20) \\ c_3 = a_3 \bar{a}_4 \bar{t} (\bar{a}_1 \vee \bar{a}_2) \vee a_3 a_4 t \vee \bar{a}_3 a_4 \bar{t} \vee \bar{a}_3 \bar{a}_4 t & (S_Q^{c_3} = 19) \\ c_4 = \bar{a}_4 (a_1 \bar{a}_2 \vee a_2 \bar{a}_3 \vee a_3 t \vee \bar{a}_1 \bar{t}) & (S_Q^{c_4} = 14) \\ (S_Q = 86) \end{cases}$$

Проведем совместную декомпозицию системы.

$$\begin{cases} \varphi_1 = a_2 \bar{a}_3 \vee a_3 t & (S_Q^{\varphi_1} = 6) \\ \varphi_0 = \bar{a}_2 \bar{a}_3 \bar{a}_4 t & (S_Q^{\varphi_0} = 4) \\ e = \varphi_0 \bar{a}_1 \vee a_1 a_2 a_3 \bar{t} & (S_Q^e = 8) \\ c_1 = \varphi_0 \bar{a}_1 \vee a_1 (\varphi_1 \vee a_4 \vee \bar{a}_2 \bar{t}) \vee a_2 a_3 a_4 \bar{t} & (S_Q^{c_1} = 16) \\ c_2 = \varphi_0 \vee a_2 t (a_3 \vee a_4) \vee a_2 \bar{t} (\bar{a}_3 \vee \bar{a}_1 \bar{a}_4) \vee \bar{a}_2 a_3 a_4 \bar{t} & (S_Q^{c_2} = 20) \\ c_3 = a_3 a_4 t \vee \bar{a}_3 a_4 \bar{t} \vee \bar{a}_3 \bar{a}_4 t \vee a_3 \bar{a}_4 \bar{t} (\bar{a}_1 \vee \bar{a}_2) & (S_Q^{c_3} = 19) \\ c_4 = \bar{a}_4 (\varphi_1 \vee a_1 \bar{a}_2 \vee \bar{a}_1 \bar{t}) & (S_Q^{c_4} = 9) \\ (S_Q = 82) \end{cases}$$

Проведем совместную декомпозицию системы.

$$\begin{cases} \varphi_2 = \bar{a}_3 \bar{a}_4 t & (S_Q^{\varphi_2} = 3) \\ \varphi_1 = a_2 \bar{a}_3 \vee a_3 t & (S_Q^{\varphi_1} = 6) \\ \varphi_0 = \varphi_2 \bar{a}_2 & (S_Q^{\varphi_0} = 2) \\ e = \varphi_0 \bar{a}_1 \vee a_1 a_2 a_3 \bar{t} & (S_Q^e = 8) \\ c_1 = \varphi_0 \bar{a}_1 \vee a_1 (\varphi_1 \vee a_4 \vee \bar{a}_2 \bar{t}) \vee a_2 a_3 a_4 \bar{t} & (S_Q^{c_1} = 16) \\ c_2 = \varphi_0 \vee a_2 t (a_3 \vee a_4) \vee a_2 \bar{t} (\bar{a}_3 \vee \bar{a}_1 \bar{a}_4) \vee \bar{a}_2 a_3 a_4 \bar{t} & (S_Q^{c_2} = 20) \\ c_3 = \varphi_2 \vee a_3 a_4 t \vee \bar{a}_3 a_4 \bar{t} \vee a_3 \bar{a}_4 \bar{t} (\bar{a}_1 \vee \bar{a}_2) & (S_Q^{c_3} = 16) \\ c_4 = \bar{a}_4 (\varphi_1 \vee a_1 \bar{a}_2 \vee \bar{a}_1 \bar{t}) & (S_Q^{c_4} = 9) \\ (S_Q = 80) \end{cases}$$

Проведем совместную декомпозицию системы.

$$\begin{cases} \varphi_3 = a_3 \bar{t} & (S_Q^{\varphi_3} = 2) \\ \varphi_2 = \bar{a}_3 \bar{a}_4 t & (S_Q^{\varphi_2} = 3) \\ \varphi_1 = a_2 \bar{a}_3 \vee a_3 t & (S_Q^{\varphi_1} = 6) \\ \varphi_0 = \varphi_2 \bar{a}_2 & (S_Q^{\varphi_0} = 2) \\ e = \varphi_0 \bar{a}_1 \vee \varphi_3 a_1 a_2 & (S_Q^e = 7) \\ c_1 = \varphi_0 \bar{a}_1 \vee a_1 (\varphi_1 \vee a_4 \vee \bar{a}_2 \bar{t}) \vee \varphi_3 a_2 a_4 & (S_Q^{c_1} = 15) \\ c_2 = \varphi_0 \vee \varphi_3 \bar{a}_2 a_4 \vee a_2 t (a_3 \vee a_4) \vee a_2 \bar{t} (\bar{a}_3 \vee \bar{a}_1 \bar{a}_4) & (S_Q^{c_2} = 19) \\ c_3 = \varphi_2 \vee \varphi_3 \bar{a}_4 (\bar{a}_1 \vee \bar{a}_2) \vee a_3 a_4 t \vee \bar{a}_3 a_4 \bar{t} & (S_Q^{c_3} = 15) \\ c_4 = \bar{a}_4 (\varphi_1 \vee a_1 \bar{a}_2 \vee \bar{a}_1 \bar{t}) & (S_Q^{c_4} = 9) \\ (S_Q = 78) \end{cases}$$

Проведем совместную декомпозицию системы.

$$\varphi_4 = \varphi_0 \overline{a_1}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi_3 = a_3 \bar{t} & (S_Q^{\varphi_3} = 2) \\ \varphi_2 = \overline{a_3} \overline{a_4} t & (S_Q^{\varphi_2} = 3) \\ \varphi_1 = a_2 \overline{a_3} \vee a_3 t & (S_Q^{\varphi_1} = 6) \\ \varphi_0 = \varphi_2 \overline{a_2} & (S_Q^{\varphi_0} = 2) \\ c_2 = \varphi_0 \vee \varphi_3 \overline{a_2} a_4 \vee a_2 t (a_3 \vee a_4) \vee a_2 \bar{t} (\overline{a_3} \vee \overline{a_1} \overline{a_4}) & (S_Q^{c_2} = 19) \\ c_3 = \varphi_2 \vee \varphi_3 \overline{a_4} (\overline{a_1} \vee \overline{a_2}) \vee a_3 a_4 t \vee \overline{a_3} a_4 \bar{t} & (S_Q^{c_3} = 15) \\ c_4 = \overline{a_4} (\varphi_1 \vee a_1 \overline{a_2} \vee \overline{a_1} \bar{t}) & (S_Q^{c_4} = 9) \\ \varphi_4 = \varphi_0 \overline{a_1} & (S_Q^{\varphi_4} = 2) \\ e = \varphi_4 \vee \varphi_3 a_1 a_2 & (S_Q^e = 5) \\ c_1 = \varphi_4 \vee a_1 (\varphi_1 \vee a_4 \vee \overline{a_2} \bar{t}) \vee \varphi_3 a_2 a_4 & (S_Q^{c_1} = 13) \\ (S_Q = 76) \end{array} \right.$$

Проведем совместную декомпозицию системы.

$$\varphi_5 = a_3 t$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi_5 = a_3 t & (S_Q^{\varphi_5} = 2) \\ \varphi_3 = a_3 \bar{t} & (S_Q^{\varphi_3} = 2) \\ \varphi_2 = \overline{a_3} \overline{a_4} t & (S_Q^{\varphi_2} = 3) \\ \varphi_1 = \varphi_5 \vee a_2 \overline{a_3} & (S_Q^{\varphi_1} = 4) \\ \varphi_0 = \varphi_2 \overline{a_2} & (S_Q^{\varphi_0} = 2) \\ c_2 = \varphi_0 \vee \varphi_3 \overline{a_2} a_4 \vee a_2 t (a_3 \vee a_4) \vee a_2 \bar{t} (\overline{a_3} \vee \overline{a_1} \overline{a_4}) & (S_Q^{c_2} = 19) \\ c_3 = \varphi_2 \vee \varphi_5 a_4 \vee \varphi_3 \overline{a_4} (\overline{a_1} \vee \overline{a_2}) \vee \overline{a_3} a_4 \bar{t} & (S_Q^{c_3} = 14) \\ c_4 = \overline{a_4} (\varphi_1 \vee a_1 \overline{a_2} \vee \overline{a_1} \bar{t}) & (S_Q^{c_4} = 9) \\ \varphi_4 = \varphi_0 \overline{a_1} & (S_Q^{\varphi_4} = 2) \\ e = \varphi_4 \vee \varphi_3 a_1 a_2 & (S_Q^e = 5) \\ c_1 = \varphi_4 \vee a_1 (\varphi_1 \vee a_4 \vee \overline{a_2} \bar{t}) \vee \varphi_3 a_2 a_4 & (S_Q^{c_1} = 13) \\ (S_Q = 75) \end{array} \right.$$

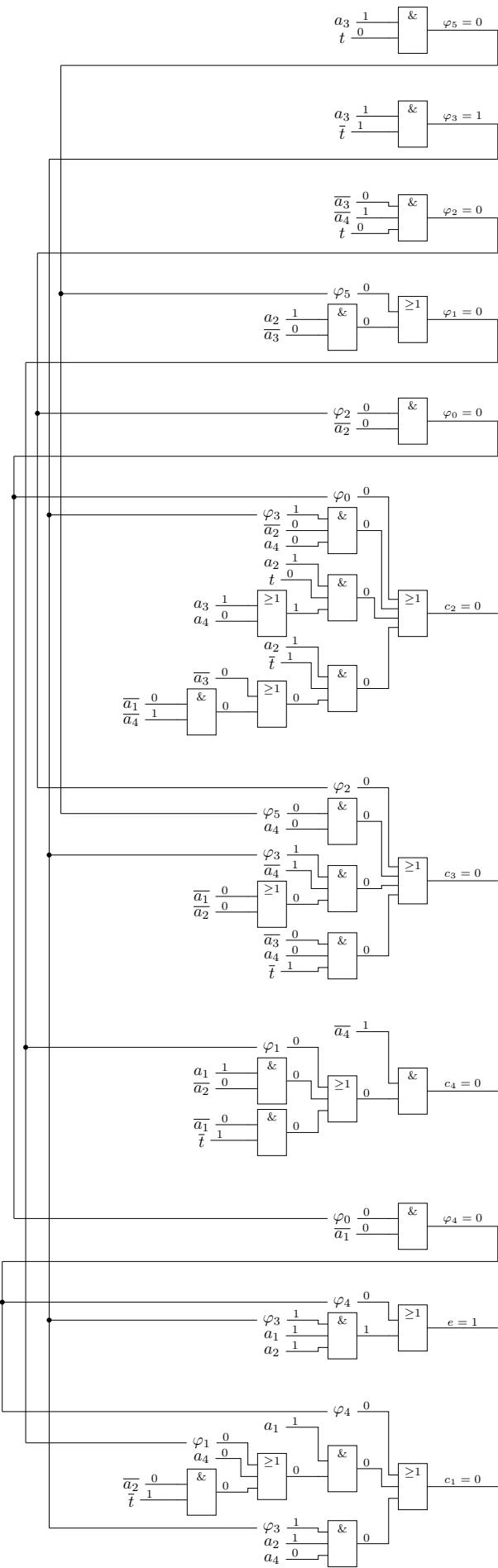
## Синтез комбинационной схемы в булевом базисе

Будем анализировать схему на следующем наборе аргументов:

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 0, t = 0$$

Выходы схемы из таблицы истинности:

$$e = 1, c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 0, c_4 = 0$$



Цена схемы:  $S_Q = 75$ . Задержка схемы:  $T = 5\tau$ .