

А. А. Гайфуллин, А. В. Пенской, С. В. Смирнов



ЗАДАЧИ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ И ГЕОМЕТРИИ

А. А. Гайфуллин, А. В. Пенской, С. В. Смирнов

Задачи по линейной алгебре и геометрии

Электронное издание

*Допущено УМО по классическому университетскому образованию
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных
заведений, обучающихся по направлениям 01.03.01 «Математика»,
01.03.03 «Механика и математическое моделирование»,
специальности 01.05.01 «Фундаментальная математика и механика»*

Москва
Издательство МЦНМО
2014

УДК 512.64

ББК 22.143

Г14

Гайфуллин А. А., Пенской А. В., Смирнов С. В.

Задачи по линейной алгебре и геометрии.

М.: МЦНМО, 2014.

150 с.

ISBN 978-5-4439-2200-3

Данное пособие содержит подробные решения типовых задач курса линейной алгебры и геометрии, читаемого на мехмате МГУ им. М. В. Ломоносова.

Для студентов естественнонаучных специальностей, в первую очередь физико-математических.

Подготовлено на основе книги:

А. А. Гайфуллин, А. В. Пенской, С. В. Смирнов. Задачи по линейной алгебре и геометрии. — М.: МЦНМО, 2014.

Издательство Московского центра

непрерывного математического образования

119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-74-83.

<http://www.mcsme.ru>

© А. А. Гайфуллин,
А. В. Пенской,
С. В. Смирнов, 2014
© МЦНМО, 2014

ISBN 978-5-4439-2200-3

Оглавление

Предисловие	6
Глава 1. Линейные пространства	
1.1. Определение линейного пространства	8
1.2. Линейная зависимость	11
1.3. Базис, размерность, координаты	14
1.4. Линейные подпространства	18
1.5. Сумма и пересечение подпространств	25
1.6. Линейные функции и отображения	30
1.7. Аффинные пространства	32
Глава 2. Линейные операторы	
2.1. Матрица линейного оператора	40
2.2. Ядро и образ линейного оператора	43
2.3. Собственные значения и собственные векторы	44
2.4. Жорданова форма	46
2.5. Функции от матриц	57
2.6. Инвариантные подпространства	59
Глава 3. Билинейные и квадратичные функции	
3.1. Элементарные свойства билинейных и квадратичных функций	64
3.2. Приведение квадратичной формы к нормальному виду невырожденными преобразованиями	65
3.3. Кососимметрические билинейные и эрмитовы полуторалинейные функции	71
Глава 4. Евклидовы и эрмитовы пространства	
4.1. Элементарные свойства скалярного произведения	75
4.2. Ортогональные системы векторов	77
4.3. Матрица Грама и n -мерный объём	85
4.4. Ортогональные проекции, расстояния и углы	88

4.5. Геометрия аффинных евклидовых пространств	93
4.6. Симплексы	100
4.7. Метод наименьших квадратов и интерполяция функций	102
Глава 5. Линейные операторы в евклидовых и эрмитовых пространствах	
5.1. Сопряжённые операторы	108
5.2. Самосопряжённые операторы	110
5.3. Ортогональные и унитарные операторы	115
5.4. Кососимметрические операторы	125
5.5. Полярное разложение	129
Глава 6. Квадратичные формы в евклидовом пространстве	
6.1. Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональными преобразованиями	132
6.2. Приведение пары квадратичных форм к каноническому виду	135
Глава 7. Тензоры	
7.1. Основные свойства тензоров	140
7.2. Операции над тензорами	144
Литература	149

*Посвящается светлой памяти
Евгения Григорьевича Складенко*

Предисловие

Читающийся первокурсникам в весеннем семестре курс линейной алгебры и геометрии является, без сомнения, одним из самых важных курсов в программе механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова. В самом деле, трудно найти такую область математики или других естественных наук, в которой не использовались бы понятия и методы из линейной алгебры и геометрии.

Некоторым пробелом в имеющейся учебно-методической литературе по данному курсу до сих пор являлось отсутствие качественного пособия, где бы подробно разбирались решения стандартных задач. Восполнить этот пробел и призвано данное издание.

Особую актуальность выпуск данного пособия приобрёл в последние годы, когда всё больше приходящих на мехмат МГУ выпускников учреждений среднего образования имеет недостаточные навыки усвоения материала лекций и семинаров: всё реже наблюдается умение качественно конспектировать лекции или делать записи разбираемых на семинарах задач. Как результат, к сессии первокурсники всё чаще приходят без читаемых конспектов и внятных записей семинарских занятий, что приводит к катастрофическим последствиям на зачётах и экзаменах.

Авторы надеются, что данное пособие, содержащее решения основных типовых задач курса линейной алгебры и геометрии, поможет до какой-то степени изменить ситуацию к лучшему. В то же время читающим его первокурсникам, безусловно, не стоит ждать чуда, так как, с одной стороны, все задачи к типовым не сводятся, а с другой стороны, представленный материал довольно обширен и за последнюю ночь перед зачётом усвоить материал пособия невозможно.

При написании данного пособия авторы, в первую очередь, ориентировались на программу курса «Линейная алгебра и геометрия» механико-математического факультета МГУ и на сборник задач [7] под редакцией Ю. М. Смирнова, который обычно используется на семинарских занятиях по этому курсу. Но поскольку представленные в пособии задачи в основном являются типовыми, оно будет полез-

ным не только для студентов мехмата МГУ, но и для всех студентов физико-математических и инженерных специальностей или для тех, кто обучается по специальности «Прикладная математика».

Авторы глубоко признательны коллегам по кафедре высшей геометрии и топологии мехмата МГУ под руководством академика РАН С. П. Новикова. При составлении этого пособия был использован многолетний опыт наших коллег. Особой благодарности заслуживает доцент Е. А. Морозова, которая была инициатором и вдохновителем работ над данным изданием.

Многие годы лекции по линейной алгебре и геометрии на мехмате МГУ читал безвременно ушедший из жизни профессор Е. Г. Складенко, который очень много сделал для становления и развития данного курса. Его светлой памяти посвящается данное пособие.

Москва,
январь 2013 г.

ГЛАВА 1

Линейные пространства

1.1. Определение линейного пространства

Задача 1. В каких из следующих случаев указанные операции на множестве X определены и задают структуру линейного пространства над полем \mathbb{K} :

- 1) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, X — полуплоскость $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$, операции сложения и умножения на числа стандартные (то есть покоординатные);
- 2) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, X — множество векторов в трёхмерном пространстве, выходящих из начала координат, концы которых лежат на заданной плоскости; операции стандартные;
- 3) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, X — множество векторов на плоскости \mathbb{R}^2 , все координаты которых по модулю не превосходят единицы; операции стандартные;
- 4) $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $X = \mathbb{R}$; операции стандартные;
- 5) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $X = (0, +\infty)$, операции сложения $\hat{+}$ и умножения на числа $\hat{\cdot}$ заданы формулами
$$u \hat{+} v = uv, \quad \lambda \hat{\cdot} u = u^\lambda; \tag{1.1}$$
- 6) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, X — множество ненулевых комплексных чисел; операции стандартные;
- 7) \mathbb{K} произвольное, X — множество многочленов от одной переменной над \mathbb{K} степени n , где $n \in \mathbb{N}$ — некоторое фиксированное число; операции стандартные;
- 8) \mathbb{K} произвольное, X — множество многочленов от одной переменной над \mathbb{K} степени не выше некоторого фиксированного $n \in \mathbb{N}$; операции стандартные;
- 9) \mathbb{K} произвольное, X — множество всех многочленов от одной переменной над \mathbb{K} ; операции стандартные;
- 10) \mathbb{K} произвольное, X — множество всех матриц размера $n \times m$ с элементами из \mathbb{K} ; операции стандартные;

- 11) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, X — множество всех непрерывных функций на некотором заданном отрезке; операции стандартные;
- 12) $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $X = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, операции стандартные?

Решение. 1) Полуплоскость X не является линейным пространством относительно стандартных операций, поскольку не является даже абелевой группой по сложению: если ненулевой вектор v , не лежащий на оси ординат, содержится в X , то обратный к нему вектор $-v$ не содержится в X .

2) Если плоскость X не проходит через начало координат, то она не содержит начала координат, которое является тривиальным элементом относительно покоординатно определённого сложения, и потому не является линейным пространством. Пусть теперь плоскость X проходит через начало координат; тогда она задаётся уравнением вида

$$Ax + By + Cz = 0, \quad (1.2)$$

где коэффициенты A , B и C одновременно не обращаются в нуль. Если точка $P = (x_0, y_0, z_0)$ удовлетворяет уравнению (1.2), то и обратная ей относительно сложения точка $(-x_0, -y_0, -z_0)$ тоже удовлетворяет уравнению (1.2). В силу линейности сумма любых двух решений этого уравнения тоже является его решением. Ассоциативность и коммутативность сложения вытекают из ассоциативности и коммутативности сложения действительных чисел. Поэтому X является абелевой группой относительно покоординатного сложения. Свойства ассоциативности и унитарности умножения на числа и дистрибутивность также вытекают из свойств действительных чисел, поскольку операции в X определены покоординатно. Таким образом, если плоскость X проходит через начало координат, стандартные операции превращают её в линейное пространство.

3) Множество векторов на плоскости, все координаты которых по модулю не превосходят единицы, не является линейным пространством, поскольку операция покоординатного сложения выводит за его пределы: например, $(1, 1) + (0, 1) = (1, 2)$.

4) Множество \mathbb{R} является линейным пространством над полем \mathbb{R} со стандартными операциями; поэтому оно является линейным пространством и над любым его подполем (в частности, над \mathbb{Q}). Действительно, операция сложения на X не использует свойств поля, а если свойства ассоциативности и дистрибутивности выполнены для всех элементов поля, то они выполнены и для всех элементов любого его подполя.

5) Рассмотрим теперь множество $X = (0, +\infty)$ с операциями, определёнными формулами (1.1). Поскольку произведение двух положи-

тельных чисел положительно и произвольная степень любого положительного числа также положительна, операции определены корректно. В силу коммутативности и ассоциативности умножения действительных чисел, операция $\hat{+}$ коммутативна и ассоциативна, а тривиальным элементом для неё является $1 \in \mathbb{R}$. Таким образом, множество X является абелевой группой относительно $\hat{+}$. Выберем произвольные $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ и произвольный элемент $u \in X$; тогда

$$\lambda \hat{\cdot} (\mu \hat{\cdot} u) = \lambda \hat{\cdot} u^\mu = (u^\mu)^\lambda = u^{\lambda\mu} = (\lambda\mu) \hat{\cdot} u,$$

то есть умножение на числа ассоциативно. Унитарность этой операции очевидна: $1 \hat{\cdot} u = u^1 = u$. Осталось проверить дистрибутивность: пусть λ, μ — произвольные скаляры, а u, v — произвольные точки множества X . Тогда

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \hat{\cdot} u &= u^{\lambda+\mu} = u^\lambda u^\mu = u^\lambda \hat{\cdot} u^\mu = \lambda \hat{\cdot} u \hat{\cdot} \mu \hat{\cdot} u, \\ \lambda \hat{\cdot} (u \hat{+} v) &= (uv)^\lambda = u^\lambda v^\lambda = \lambda \hat{\cdot} u \hat{\cdot} \lambda \hat{\cdot} v. \end{aligned}$$

Таким образом, множество X является линейным пространством над полем \mathbb{R} относительно операций (1.1).

6) Множество ненулевых комплексных чисел не является линейным пространством над полем \mathbb{C} , поскольку не содержит тривиального элемента относительно сложения (то есть нуля).

7) Множество многочленов фиксированной (ненулевой) степени тоже не является линейным пространством относительно стандартных операций, поскольку, например, не содержит нуля.

8) Пусть $\mathbb{K}_n[t]$ — множество всех многочленов с коэффициентами из поля \mathbb{K} степени не выше n . Тривиальным элементом относительно сложения является многочлен 0, обратным — многочлен с противоположными по знаку коэффициентами. Коммутативность, ассоциативность и дистрибутивность стандартных операций следуют из аналогичных свойств для элементов основного поля \mathbb{K} . Таким образом, $\mathbb{K}_n[t]$ является линейным пространством относительно стандартных операций.

9) Множество $\mathbb{K}[t]$ всех многочленов с коэффициентами из поля \mathbb{K} тоже является линейным пространством относительно стандартных операций.

10) Множество $\text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{K})$ всех матриц размера $n \times m$ с элементами из поля \mathbb{K} тоже является линейным пространством относительно стандартных операций, поскольку сложение матриц и умножение матриц на скаляры поэлементно, тривиальным элементом по сложению

является матрица, состоящая только из нулей, а обратным к матрице A является матрица $-A$.

11) Рассмотрим теперь множество $C[a, b]$ всех вещественнозначных функций, непрерывных на некотором отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Операции сложения функций и умножения их на число определены корректно, так как сумма непрерывных функций и произведение непрерывной функции на число непрерывны. Поскольку эти операции определены поточечно, выполнение свойств ассоциативности, коммутативности и дистрибутивности очевидно. Тривиальным элементом по сложению является тождественный нуль, то есть функция, принимающая лишь нулевые значения, а обратным элементом к функции f является функция $-f$, принимающая в каждой точке противоположное по знаку значение. Таким образом, $C[a, b]$ является линейным пространством относительно стандартных операций.

12) Легко видеть, что множество X замкнуто относительно операции сложения и относительно операции умножения на рациональное число. Поскольку это множество является подмножеством множества действительных чисел, а введённые на нем операции — стандартные, свойства ассоциативности, коммутативности и дистрибутивности выполнены автоматически. Тривиальным элементом по сложению является $0 + 0 \cdot \sqrt{2}$, а обратным к элементу $a + b\sqrt{2}$ является элемент $-a - b\sqrt{2}$. \square

1.2. Линейная зависимость

Задача 2. Каким условиям должен удовлетворять скаляр x , чтобы векторы $(0, x, -1)$, $(x, 0, 1)$ и $(1, -1, x)$ из \mathbb{R}^3 были линейно зависимы? Каким будет ответ на этот же вопрос при замене \mathbb{R}^3 на \mathbb{Q}^3 ?

Решение. Запишем координаты трёх заданных векторов по строкам в матрицу. Поскольку строки матрицы линейно зависимы тогда и только тогда, когда она вырождена, достаточно вычислить её определитель:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & x & -1 \\ x & 0 & 1 \\ 1 & -1 & x \end{pmatrix} = -x^3 + 2x = x(2 - x^2).$$

Таким образом, заданные векторы линейно зависимы тогда и только тогда, когда $x = 0$ или $x = \pm\sqrt{2}$.

Однако если заменить линейное пространство \mathbb{R}^3 на \mathbb{Q}^3 , ответ изменится. Действительно, в этом случае нас интересуют лишь векторы с рациональными координатами, а при $x = \pm\sqrt{2}$ ни один из трёх

Но, как известно, линейная однородная система имеет ненулевое решение, лишь если определитель соответствующей матрицы коэффициентов равен нулю. Таким образом,

$$0 = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e & e^2 & \dots & e^n \\ 1 & e^2 & e^4 & \dots & e^{2n} \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & e^n & e^{2n} & \dots & e^{n^2} \end{pmatrix} = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (e^{in} - e^{jn}),$$

поскольку этот определитель является частным случаем определителя Вандермонда (см. [1, стр. 84]). Легко видеть, что в подобном произведении все скобки отличны от нуля, то есть наш определитель не равен нулю и система (1.3) не имеет нетривиальных решений. Таким образом, рассматриваемая система функций линейно независима.

3) Рассмотрим теперь систему функций $1, \ln x, \ln 2x, \dots, \ln nx$. Поскольку

$$\ln nx = \ln n + \ln x = \ln n \cdot 1 + \ln x$$

при любом $n > 1$, последняя из функций линейно выражается через первые две. Это означает, что вся система функций содержит линейно зависимую подсистему и потому линейно зависима. Если $n = 1$, то рассматриваемая система линейно независима: функция 1 постоянна, а функция $\ln x$ не постоянна и, следовательно, ни одна из них не может линейно выражаться через другую. \square

Задача 4. Найти ранг и какую-нибудь базу следующей системы векторов:

$$v_1 = (1, 2, -1, 5), \quad v_2 = (2, 1, 1, 1),$$

$$v_3 = (0, 1, -1, 3), \quad v_4 = (1, 1, 0, 2).$$

Решение. Для нахождения базы системы векторов необходимо выбрать какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему заданной системы векторов, то есть линейно независимые векторы именно из числа заданных. Для этого достаточно записать их координаты в матрицу по столбцам и привести полученную матрицу к ступенчатому виду элементарными преобразованиями ее строк. Свободные столбцы после этого будут линейно выражаться через главные. Но при элементарных преобразованиях *строк* матрицы сохраняются линейные соотношения между её *столбцами*. Таким образом, столбцы исходной матрицы будут связаны теми же соотношениями, что и столбцы приведённой. Значит, в качестве базы можно взять столбцы исходной матрицы, стоящие на местах главных столбцов приведённой матрицы.

Запишем координаты заданных векторов в матрицу по столбцам и приведём её к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -9 & 3 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

первый и второй столбцы e_1, e_2 полученной матрицы являются главными. Значит, ранг исходной системы векторов равен 2, а в качестве базы можно выбрать, например, векторы $v_1 = (1, 2, -1, 5)$ и $v_2 = (2, 1, 1, 1)$. \square

1.3. Базис, размерность, координаты

Задача 5. Проверить, что система векторов

$$e_1 = (1, 0, 3), \quad e_2 = (-5, 3, 1), \quad e_3 = (-1, 1, 2)$$

является базисом в пространстве \mathbb{R}^3 , и найти координаты вектора $v = (1, -1, 2)$ в этом базисе.

Решение. Для того чтобы проверить, что система векторов является базисом пространства \mathbb{R}^n , достаточно показать, что она имеет максимальный ранг, то есть что матрица, составленная из координат этих векторов, невырождена. Но поскольку наша задача состоит не только в этом, мы будем действовать по-другому, а линейную независимость проверим в ходе решения. Предположим, что вектор v представляется в виде линейной комбинации векторов e_1, e_2 и e_3 :

$$v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3.$$

Это означает, что имеет место следующее равенство:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

которое в матричном виде может быть переписано следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Находя обратную матрицу C^{-1} , получаем:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -9 & 2 \\ -3 & -5 & 1 \\ 9 & 16 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -13 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что невырожденность матрицы C говорит о линейной независимости заданных векторов, поскольку по её столбцам записаны координаты этих векторов. Это означает, что векторы e_1, e_2, e_3 действительно образуют базис в \mathbb{R}^3 . А найденные нами координаты $(8, 4, -13)$ являются координатами вектора v в этом базисе. \square

Задача 6. Доказать, что многочлены $1, t-1, (t-1)^2, (t-1)^3$ образуют базис в пространстве многочленов $\mathbb{R}_3[t]$, и найти координаты многочлена $p(t) = t^3 - 2t^2 + 5t - 1$ в этом базисе.

Решение. Покажем, что заданные многочлены линейно независимы. Предположим противное, то есть что существуют такие числа a_0, a_1, a_2, a_3 , среди которых есть ненулевые, что

$$a_0 + a_1(t-1) + a_2(t-1)^2 + a_3(t-1)^3 = 0$$

(где в правой части стоит нулевой многочлен). Делая замену $s = t - 1$, получаем равенство

$$a_0 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 = 0,$$

которое должно быть выполнено при всех $s \in \mathbb{R}$, но многочлен тождественно равен нулю, лишь если все его коэффициенты нулевые. Поэтому $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$, то есть заданные многочлены линейно независимы. Они образуют базис, поскольку согласно формуле Тейлора любой многочлен степени не выше 3 можно представить в виде их линейной комбинации. Пользуясь формулой Тейлора, получаем:

$$\begin{aligned} p(t) &= p(1) + p'(1)(t-1) + \frac{p''(1)}{2}(t-1)^2 + \frac{p'''(1)}{6}(t-1)^3 = \\ &= 3 + 4(t-1) + (t-1)^2 + (t-1)^3, \end{aligned}$$

то есть в базисе $\{1, t-1, (t-1)^2, (t-1)^3\}$ многочлен $p(t)$ имеет координаты $(3, 4, 1, 1)$. \square

Задача 7. Доказать, что матрицы

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

образуют базис в пространстве $\text{Mat}_2(\mathbb{R})$ вещественных квадратных матриц порядка 2, и найти координаты матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

в этом базисе.

Решение. Матрицы E_{ij} , где $1 \leq i, j \leq 2$, у которых на (i, j) -м месте стоит единица, а остальные элементы — нули, образуют базис в пространстве $\text{Mat}_2(\mathbb{R})$. В этом базисе (расположим базисные векторы, например, в таком порядке: $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$) матрицы M, N, P, Q и A имеют координаты

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

соответственно. Как и при решении задачи 5, мы не будем отдельно доказывать, что заданный набор матриц образует базис в пространстве $\text{Mat}_2(\mathbb{R})$, а получим это попутно, убедившись в невырожденности соответствующей матрицы. Записывая наборы координат матриц M, N, P и Q по столбцам, приходим к линейной системе

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 & 7 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

где x_1, x_2, x_3, x_4 — искомые координаты матрицы A в базисе $\{M, N, P, Q\}$. Приведем соответствующую расширенную матрицу к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 8 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 5 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 8 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 18 & 11 & 23 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right).$$

Теперь нетрудно найти решение: $x_1 = 6, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = -3$. \square

Задача 8. Найти матрицу перехода от базиса $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ к базису $\{e''_1, e''_2, e''_3\}$ в пространстве \mathbb{R}^3 , если векторы обоих базисов заданы своими координатами в некотором базисе:

$$\begin{aligned} e'_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, & e'_2 &= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, & e'_3 &= \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ e''_1 &= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, & e''_2 &= \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, & e''_3 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Решение. Чтобы найти матрицу перехода от «старого» базиса $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ к «новому» базису $\{e''_1, e''_2, e''_3\}$, необходимо определить координаты векторов нового базиса в старом. Пусть C' и C'' — матрицы перехода от стандартного базиса $\{e_1, e_2, e_3\}$ (то есть базиса, в котором заданы координаты векторов) к базисам $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ и $\{e''_1, e''_2, e''_3\}$

соответственно. Тогда переход от старого базиса к новому является композицией перехода от старого базиса к стандартному и перехода от стандартного базиса к новому. Старые координаты записываются через стандартные координаты с помощью матрицы $(C')^{-1}$, а координаты в стандартном базисе через новые координаты — с помощью C'' :

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = (C')^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C'' \begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ x''_3 \end{pmatrix}.$$

Поэтому старые координаты связаны с новыми с помощью матрицы $(C')^{-1}C''$. Записывая матрицы C' и C'' и производя арифметические операции над ними, получаем искомую матрицу перехода:

$$(C')^{-1}C'' = \begin{pmatrix} -18 & 7 & 5 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Замечание. Отметим, что вычислительная часть приведенного выше решения может быть несколько упрощена. На самом деле, при вычислении произведения $(C')^{-1}C''$ нет необходимости отдельно находить обратную матрицу, а потом умножать ее на матрицу C'' . Ответ можно получить сразу, записав матрицы C' и C'' рядом и применив элементарные преобразования, приводящие матрицу C' к единичной, к матрице C'' :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & | & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & | & 4 & 1 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & | & 5 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 4 & 12 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -27 & -71 & -41 \\ 0 & 1 & 0 & | & 9 & 20 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & | & 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}.$$

Задача 9. В пространстве многочленов степени не выше 3 найти матрицу перехода от базиса

$$\{1 - t + t^3, t + t^2 + t^3, 1 + t^2 + t^3, -1 + t - t^2\}$$

к базису

$$\{t + t^2 - t^3, 1 - t^2 + t^3, -1 + t - t^2, 1 + t - t^3\}.$$

Решение. В стандартном базисе $\{1, t, t^2, t^3\}$ пространства многочленов $\mathbb{R}_3[t]$ векторы двух данных базисов имеют координаты

$$\begin{array}{llll} (1, -1, 0, 1), & (0, 1, 1, 1), & (1, 0, 1, 1), & (-1, 1, -1, 0), \\ (0, 1, 1, -1), & (1, 0, -1, 1), & (-1, 1, -1, 0), & (1, 1, 0, -1) \end{array}$$

соответственно. Записывая их по столбцам, получаем матрицы перехода C' и C'' от стандартного базиса к заданным базисам:

$$C' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C'' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично решению задачи 8, искомой будет матрица

$$\begin{aligned} (C')^{-1}C'' &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & 0 & -4 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad \square \end{aligned}$$

1.4. Линейные подпространства

Задача 10. Является ли линейным подпространством в пространстве $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$ матриц порядка n подмножество, образованное следующими элементами:

- 1) матрицами с нулевой первой строкой;
- 2) нижнетреугольными матрицами;
- 3) невырожденными матрицами;
- 4) трёхдиагональными матрицами;
- 5) матрицами с нулевым следом.

Решение. 1) Поскольку сумма любых двух матриц с нулевой первой строкой и произведение любой такой матрицы на произвольное число тоже будет иметь такой вид, подмножество всех матриц с нулевой первой строкой замкнуто относительно матричного сложения и относительно умножения на числа, то есть образует линейное подпространство в пространстве $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$.

2) Множество всех нижнетреугольных матриц тоже, очевидно, замкнуто относительно операций сложения матриц и умножения матрицы на число и потому тоже является линейным подпространством в $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$.

3) Множество всех невырожденных матриц не является линейным подпространством, поскольку, например, не содержит нулевой матрицы.

4) Множество всех трёхдиагональных матриц является линейным подпространством в $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$ поскольку сложение матриц и умножение на числа происходит поэлементно и потому сохраняет вид матриц.

5) Рассмотрим произвольные матрицы A и B с нулевым следом и произвольное число $\lambda \in \mathbb{R}$. Поскольку

$$\text{tr}(A + B) = \text{tr } A + \text{tr } B = 0 \quad \text{и} \quad \text{tr}(\lambda A) = \lambda \text{tr } A = 0,$$

множество всех бесследных матриц замкнуто относительно операций в линейном пространстве $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$ и, следовательно, является его подпространством. \square

Задача 11. В линейном пространстве $\mathbb{R}_n[t]$ многочленов степени не выше n заданы подмножества, состоящие из многочленов $p(t)$, удовлетворяющих условию:

- 1) $p(1) = 0$;
- 2) $p(1) = 1$;
- 3) $3p(0) = 2p(1)$;
- 4) $p(1-t) = p(1+t)$ для всех $t \in \mathbb{R}$;
- 5) $p(t) \geq 0$ при $t \geq 2$;
- 6) $p'(1) = 3p''(2)$.

Является ли каждое из этих подмножеств линейным подпространством в $\mathbb{R}_n[t]$? Если да, то найти его размерность и какой-нибудь базис.

Решение. 1) Легко заметить, что условие обращения в нуль многочлена в произвольной точке (и, в частности, в точке $t = 1$) линейно и поэтому сохраняется при сложении многочленов и при умножении многочленов на скаляры. Таким образом, подмножество всех многочленов, имеющих корень в точке $t = 1$, является линейным подпространством в пространстве многочленов $\mathbb{R}_n[t]$. Система многочленов

$$1, t-1, (t-1)^2, \dots, (t-1)^n$$

является базисом в $\mathbb{R}_n[t]$. Все эти многочлены, кроме первого, удовлетворяют условию $p(1) = 0$. Поэтому рассматриваемое подпространство имеет размерность n и в качестве его базиса можно выбрать многочлены $t-1, (t-1)^2, \dots, (t-1)^n$.

2) Подмножество в пространстве $\mathbb{R}_n[t]$, задаваемое условием $p(1) = 1$, не замкнуто относительно сложения многочленов (то есть сумма двух многочленов, удовлетворяющих этому условию, не будет ему удовлетворять) и потому не выделяет никакого линейного подпространства.

3) Очевидно, что если два многочлена удовлетворяют условию $3p(0) = 2p(1)$, то и их сумма — тоже. Аналогично, и произведение любого из этих многочленов на число удовлетворяет этому условию. Таким образом, подмножество, выделяемое данным условием, является линейным подпространством. Найдем теперь размерность и базис этого подпространства. Запишем произвольный многочлен $p(t)$ в виде

$$p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n.$$

Тогда условие $3p(0) = 2p(1)$ принимает вид

$$3a_0 = 2(a_0 + a_1 + \dots + a_n) \iff -a_0 + 2a_1 + \dots + 2a_n = 0, \quad (1.4)$$

то есть представляет собой линейную однородную систему на неизвестные коэффициенты a_0, a_1, \dots, a_n , состоящую из одного уравнения. Построим фундаментальную систему решений системы (1.4). Она состоит, например, из следующих векторов:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Это означает, что в качестве базиса нашего подпространства в $\mathbb{R}_n[t]$ можно взять следующий набор многочленов:

$$2 + t, \quad 2 + t^2, \quad 2 + t^3, \quad \dots, \quad 2 + t^n.$$

При этом размерность данного подпространства равна n .

4) Легко заметить, что условие $p(1-t) = p(1+t)$ означает симметричность многочлена относительно точки $t = 1$. Такое условие (как и симметричность относительно любой другой точки) сохраняется при сложении многочленов и при умножении их на скаляры. Поэтому подмножество в пространстве $\mathbb{R}_n[t]$, выделяемое таким условием, является линейным подпространством. Согласно формуле Тейлора, любой многочлен можно разложить по степеням $t - 1$; это означает, что система многочленов

$$1, \quad t - 1, \quad (t - 1)^2, \quad \dots, \quad (t - 1)^n$$

образует базис в пространстве $\mathbb{R}_n[t]$. Среди векторов этого базиса нашему условию удовлетворяют те и только те многочлены вида $(t - 1)^k$, у которых k чётно. Покажем, что они образуют базис рассматриваемого подпространства. Действительно, если некоторый многочлен $p(t)$

удовлетворяет условию

$$p(1-t) = p(t+1),$$

то его первая производная (и все производные нечётного порядка) удовлетворяет условию

$$p'(1-t) = -p'(1+t).$$

А это означает, что $p^{(k)}(1) = 0$ при всех нечётных k , то есть в силу формулы Тейлора коэффициенты разложения по нечётным степеням $t-1$ будут нулевыми. Таким образом, произвольный многочлен, симметричный относительно точки $t=1$, линейно выражается через многочлены вида $(t-1)^k$, где k чётно, то есть они действительно образуют базис в нашем пространстве. Размерность этого подпространства равна целой части числа $(n+2)/2$.

5) Подмножество многочленов, выделяемое условием $p(t) \geq 0$ при $t \geq 2$, не является линейным подпространством, поскольку это условие не сохраняется при умножении многочленов на отрицательные числа.

6) Легко видеть, что если условие $p'(1) = 3p''(2)$ выполнено для двух многочленов, то оно выполнено для их суммы и для произведения любого из них на произвольный скаляр, то есть подмножество, выделяемое этим условием, является линейным подпространством. Для нахождения базиса этого подпространства заметим, что, как и в пункте 3, условие $p'(1) = 3p''(2)$ эквивалентно линейной однородной системе, состоящей из единственного уравнения:

$$\begin{aligned} na_n + (n-1)a_{n-1} + \dots + a_1 &= \\ &= 3(n(n-1)2^{n-2}a_n + (n-1)(n-2)2^{n-3}a_{n-1} + \dots + 2a_2). \end{aligned}$$

Поскольку система состоит из одного уравнения, размерность соответствующего подпространства равна n , а в качестве его базиса, строя фундаментальную систему решений, можно выбрать следующий набор многочленов:

$$1, \quad t^k + k(3(k-1) \cdot 2^{k-2} - 1)t, \quad \text{где } k = 2, 3, \dots, n. \quad \square$$

Задача 12. Найти базис линейной оболочки системы векторов

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Запишем координаты заданных векторов по строкам матрицы. Приводя полученную матрицу к ступенчатому виду элемен-

тарными преобразованиями строк

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

делаем вывод, что ранг исходной системы векторов равен 3. В качестве базиса можно взять, например, ненулевые вектор-строки ступенчатого вида: $(1, 0, 0, -1)$, $(0, 1, 1, 2)$, $(0, 0, 1, 1)$. \square

Замечание. Задача нахождения базиса линейной оболочки системы векторов отличается от задачи нахождения базы системы векторов тем, что в первом случае не требуется предъявлять векторы именно из числа данных v_1, v_2, \dots, v_n . Часто в качестве базисных бывает удобнее брать не исходные векторы, а строки ступенчатого вида, поскольку они, как правило, проще.

Задача 13. Найти размерность и базис векторного пространства решений однородной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 0, \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Запишем матрицу этой линейной системы и приведём её к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & 4 \\ 6 & -4 & 4 & 3 \\ 9 & -6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Неизвестные x_2 и x_4 являются свободными. Присваивая им значения $x_2 = 3$ и $x_4 = 0$, а затем выражая через них главные неизвестные, получаем первый вектор из базиса в пространстве решений. Положив $x_2 = 0$ и $x_4 = 6$, аналогично находим второй вектор из базиса пространства решений (умножив полученный вектор на 3, мы сделали все его координаты целыми). Таким образом, пространство решений рассматриваемой линейной системы двумерно, и векторы $(2, 3, 0, 0)$, $(1, 0, -15, 18)$ образуют базис в пространстве её решений. \square

Замечание. При построении базиса в пространстве решений линейной системы для упрощения вычислений удобно, чтобы координаты базисных векторов получались целыми. Этим обусловлен на первый взгляд странный выбор значений свободных неизвестных в разо-

бранной выше задаче — если не удаётся выбрать главные неизвестные так, чтобы коэффициенты при них были равными единице, удобно полагать свободные кратными этим коэффициентам.

Прежде чем переходить к разбору следующей задачи, докажем простую теорему. Задачу 14 можно решать разными способами, но наиболее удобным нам представляется тот, который использует эту теорему.

Теорема 1. Пусть матрица B состоит из вектор-столбцов, образующих базис в пространстве решений линейной системы $Ax = 0$ (где x — вектор). Тогда линейная система $B^T y = 0$ задаёт линейную оболочку строк матрицы A .

Доказательство. Поскольку каждый столбец матрицы B является решением линейной системы $Ax = 0$, имеет место матричное равенство $AB = 0$, которое эквивалентно равенству $B^T A^T = 0$. Таким образом, если матрицу B^T интерпретировать как матрицу коэффициентов некоторой линейной системы, все столбцы матрицы A^T , то есть строки матрицы A , будут ей удовлетворять. Осталось показать, что вектор-столбец, не принадлежащий линейной оболочке столбцов матрицы A^T , не может удовлетворять системе $B^T y = 0$. Пусть n — длина вектора x , то есть количество неизвестных в исходной системе уравнений, а $r = \text{rk } A$. Тогда $\text{rk } B^T = \text{rk } B = n - r$, то есть система $B^T y = 0$ имеет ровно $n - (n - r) = r$ линейно независимых решений. А поскольку $\text{rk } A = r$, это означает, что системе $B^T y = 0$ удовлетворяет лишь линейная оболочка вектор-строк матрицы A . Теорема доказана. \square

Задача 14. Составить систему линейных уравнений, задающую линейную оболочку системы векторов

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Способ I. Записывая данные векторы строками матрицы и приводя эту матрицу к ступенчатому виду элементарными преобразованиями строк, обнаруживаем, что ранг исходной системы векторов равен двум:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Легко видеть, что в приведенной матрице третья и четвертая строки пропорциональны второй, а эта вторая строка является разностью первых двух строк исходной матрицы. Поэтому первые две строки исходной матрицы являются базисными, то есть в качестве базиса интересующей нас линейной оболочки можно взять $\{v_1, v_2\}$. Это означает, что произвольный вектор $x \in \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ имеет вид

$$x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2,$$

где $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ обозначает линейную оболочку векторов v_1, v_2, v_3, v_4 . Пусть $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ — его координаты в стандартном базисе, тогда, приравнявая соответствующие координаты, имеем:

$$x_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \quad x_2 = \alpha_2 - \alpha_1, \quad x_3 = \alpha_1, \quad x_4 = -\alpha_1, \quad x_5 = \alpha_1 + 3\alpha_2.$$

Теперь, исключая неизвестные α_1 и α_2 , получаем искомую линейную систему на координаты произвольного вектора x из $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$:

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 + x_2, \\ x_4 = -x_3, \\ x_5 = 3x_2 + 4x_3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_2 + 4x_3 - x_5 = 0. \end{cases} \quad (1.6)$$

Заметим, что, вообще говоря, ответ не единственен. Выбрав другой базис, мы могли бы получить другую (эквивалентную) систему линейных уравнений.

Способ II. Запишем по столбцам матрицы базисные векторы заданного подпространства и в качестве дополнительного столбца расширенной матрицы возьмём столбец из неизвестных (x_1, x_2, \dots, x_n) . В нашем случае получаем матрицу

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ -1 & 1 & x_2 \\ 1 & 0 & x_3 \\ -1 & 0 & x_4 \\ 1 & 3 & x_5 \end{array} \right).$$

После приведения такой матрицы к ступенчатому виду в случае, когда данное подпространство не совпадает со всем объемлющим пространством, получим некоторое количество нулевых строк в расширенной матрице. Поэтому в силу теоремы Кронекера — Капелли (см. [1, стр. 63]) вектор (x_1, x_2, \dots, x_n) принадлежит рассматриваемому подпространству, если и только если в этих строках за чертой также стоят нули. Это и даёт искомую линейную систему на коэффи-

циенты вектора (x_1, x_2, \dots, x_n) . В нашем случае это выглядит так:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 2 & x_1 + x_2 \\ \hline 0 & 0 & 2x_3 - x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & x_3 + x_4 \\ 0 & 0 & x_5 - 3x_2 - 4x_3 \end{array} \right),$$

то есть искомая система имеет следующий вид:

$$\begin{cases} 2x_3 - x_1 + x_2 = 0, \\ x_3 + x_4 = 0, \\ x_5 - 3x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Способ III. Покажем теперь, как теорема 1 может быть использована для решения нашей задачи. Запишем координаты данных векторов по строкам в матрицу A и приведём её к ступенчатому виду, см. (1.5). Тогда фундаментальная система решений для линейной системы $Ax = 0$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в силу теоремы 1 искомая система уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_4 = 0, \\ -2x_1 - x_2 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Заметим, что полученная система эквивалентна системе (1.6). \square

1.5. Сумма и пересечение подпространств

Задача 15. Найти размерности и базисы суммы и пересечения подпространств V_1 и V_2 :

$$V_1 = \langle (1, 2, 1), (1, 1, -1), (1, 3, 3) \rangle,$$

$$V_2 = \langle (2, 3, -1), (1, 2, 2), (1, 1, -3) \rangle.$$

Решение. Запишем координаты всех шести векторов в матрицу по строкам и приведём её к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку ранг этой матрицы равен трём, то есть размерности объёмлющего пространства, то сумма $V_1 + V_2$ совпадает со всем пространством \mathbb{R}^3 и в качестве ее базиса можно взять любые три линейно независимых вектора, например, векторы $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ и $(0, 0, 1)$.

Для определения базиса в пересечении V_1 и V_2 зададим эти подпространства системами линейных уравнений. Составим матрицу A_1 из координат векторов, порождающих подпространство V_1 , и приведём её к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку вектор $(3, -2, 1)$ образует базис в пространстве решений соответствующей линейной системы, согласно теореме 1 подпространство V_1 задаётся уравнением

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0.$$

Аналогично подпространство V_2 задаётся уравнением

$$8x_1 - 5x_2 + x_3 = 0.$$

Пересечение заданных подпространств удовлетворяет сразу двум полученным уравнениям, то есть системе

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 8x_1 - 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, находим базис в пространстве её решений, то есть в пересечении подпространств V_1 и V_2 , который состоит из одного вектора: $V_1 \cap V_2 = \langle (3, 5, 1) \rangle$. \square

Замечание. Отметим, что задача нахождения базиса суммы двух подпространств сводится к выбору максимальной линейно независимой подсистемы объединения базисов этих подпространств, а задача нахождения базиса пересечения двух подпространств сводится к нахождению максимальной линейно независимой подсистемы объединения систем уравнений, задающих эти подпространства. В обозначениях теоремы 1 эту двойственность можно описать так: с каждым

из двух подпространств V_i можно связать свои матрицы A_i и B_i , где $i = 1, 2$. При нахождении базиса суммы мы находим базис в объединении систем строк матриц A_1 и A_2 , а при нахождении системы уравнений, задающей $V_1 \cap V_2$, мы находим базис в объединении столбцов матриц B_1 и B_2 .

Задача 16. Найти размерности и базисы суммы и пересечения подпространств V_1 и V_2 :

$$V_1 = \langle (1, 0, 3, 2, -1), (0, -4, 7, 4, -4), (2, 4, -1, 0, 2) \rangle,$$

$$V_2 : \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 6x_2 - 7x_3 - 10x_4 + 7x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

Решение. Запишем координаты векторов из V_1 в матрицу по строкам и приведём её к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 7 & 4 & -4 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -7 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, векторы

$$v_1 = (1, 0, 3, 2, -1) \quad \text{и} \quad v_2 = (0, 4, -7, -4, 4)$$

образуют базис в пространстве V_1 . Для нахождения пересечения двух подпространств запишем произвольный вектор подпространства V_1 в виде $\alpha v_1 + \beta v_2$ и подставим его координаты в систему уравнений, задающую подпространство V_2 . В результате получим три уравнения на неизвестные α и β , которые пропорциональны уравнению $\alpha - 3\beta = 0$. Таким образом, пересечение двух данных подпространств одномерно и является линейной оболочкой вектора $3v_1 + v_2 = (3, 4, 2, 2, 1)$. Найдём теперь базис в подпространстве V_2 :

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & -7 & -10 & 7 \\ 1 & 1 & -2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 5 & -5 & -7 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

Из фундаментальной системы решений получаем базис пространства V_2 :

$$V_2 = \langle (1, 1, 1, 0, 0), (8, 7, 0, 5, 0), (11, 4, 0, 0, -5) \rangle.$$

Для нахождения базиса суммы запишем координаты базисных векторов обоих подпространств по строкам в матрицу и приведём её

к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -7 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 7 & 0 & 5 & 0 \\ 11 & 4 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 43 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, сумма подпространств $V_1 + V_2$ четырёхмерна, и в качестве её базиса можно выбрать векторы

$$(1, 1, 1, 0, 0), \quad (0, 1, -2, -2, 1), \quad (0, 0, 1, 4, 0), \quad (0, 0, 0, 43, 1). \quad \square$$

Задача 17. В линейном пространстве $\mathbb{R}_7[t]$ многочленов степени не выше 7 заданы два подпространства:

$$V_1 = \{p(t) \in \mathbb{R}_7[t] \mid p(-1) = p'(-1) = p''(-1) = 0\},$$

$$V_2 = \{p(t) \in \mathbb{R}_7[t] \mid p(2) = p'(2) = p''(2) = 0\}.$$

Найти базисы суммы и пересечения этих подпространств.

Решение. Подпространство V_1 состоит из тех многочленов, которые имеют в точке $t = -1$ корень кратности не менее чем 3, а подпространство V_2 — из многочленов, имеющих в точке $t = 2$ корень кратности не менее чем 3. Это означает, что $V_1 \cap V_2$ состоит из всех многочленов степени не более 7, имеющих по крайней мере трёхкратные корни в точках $t = -1$ и $t = 2$, то есть из многочленов, делящихся на $(t+1)^3(t-2)^3$. Поскольку степень такого многочлена должна быть не выше семи, базис в $V_1 \cap V_2$ образуют многочлены

$$(t+1)^3(t-2)^3, \quad t(t+1)^3(t-2)^3.$$

Как известно (см. [1, стр. 189]), размерности суммы и пересечения связаны соотношением

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2).$$

В нашем случае, поскольку каждое из заданных подпространств пятимерно, это означает, что $\dim(V_1 + V_2) = 8$, то есть что сумма этих подпространств совпадает со всем пространством $\mathbb{R}_7[t]$. Поэтому в качестве базиса в $V_1 + V_2$ можно взять многочлены $1, t, t^2, \dots, t^7$. \square

Задача 18. Пусть заданы два подпространства в \mathbb{R}^4 :

$$U = \langle (1, 1, 1, 1), (-1, -2, 0, 1) \rangle,$$

$$V = \langle (-1, -1, 1, -1), (2, 2, 0, 1) \rangle.$$

Показать, что имеет место разложение $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$, и найти проекцию вектора $w = (4, 2, 4, 4)$ на подпространство U параллельно подпространству V .

Решение. Для проверки того, что подпространства U и V в прямой сумме дают все объемлющее пространство, нужно составить матрицу из базисных векторов этих подпространств, привести её к ступенчатому виду и убедиться, что она имеет максимальный ранг. Этого достаточно, поскольку в данном случае сумма размерностей заданных подпространств совпадает с размерностью \mathbb{R}^4 , откуда будет следовать, что пересечение U и V тривиально. Проделаем это:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$.

Найдём теперь проекцию вектора w на подпространство U параллельно V . Для этого достаточно составить систему уравнений, задающую подпространство U , записать разложение неизвестного вектора v по базису подпространства V (то есть линейную комбинацию с неопределёнными коэффициентами) и найти эти коэффициенты из условия, что разность $w - v$ удовлетворяет системе, задающей подпространство U . Тогда вектор $w - v$ будет искомым.

Пусть (x_1, x_2, x_3, x_4) — произвольный вектор подпространства U . Разложим его по базису этого пространства:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha - \beta, \\ x_2 = \alpha - 2\beta, \\ x_3 = \alpha, \\ x_4 = \alpha + \beta. \end{cases}$$

Исключая неизвестные α и β , приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 2x_3, \\ x_2 + 2x_4 = 3x_3, \end{cases} \quad (1.7)$$

задающей подпространство U . Произвольный вектор подпространства V имеет вид

$$v = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Подставляя координаты вектора $w - v$ в систему уравнений (1.7), получаем, что $\lambda = 3$, $\mu = 4$. Таким образом, $w - v = (-1, -3, 1, 3)$ является искомым вектором. \square

1.6. Линейные функции и отображения

Задача 19. Какие из следующих отображений пространства $\mathbb{R}_n[t]$ многочленов степени не выше n в себя являются линейными:

- 1) $p(t) \mapsto p(0) \cdot t$;
- 2) $p(t) \mapsto p''(t)$;
- 3) $p(t) \mapsto \left(\int_0^1 p(u) du\right) \cdot t^3$, $n \geq 3$;
- 4) $p(t) \mapsto p(1)p(2) \cdot 1$;
- 5) $p(t) \mapsto t^n p\left(\frac{1}{t}\right)$?

Решение. 1) Рассмотрим произвольные многочлены $p_1(t), p_2(t) \in \mathbb{R}_n[t]$ и произвольные скаляры α, β . Тогда

$$\alpha p_1(t) + \beta p_2(t) \mapsto (\alpha p_1(0) + \beta p_2(0)) \cdot t = \alpha p_1(0) \cdot t + \beta p_2(0) \cdot t,$$

то есть заданное отображение является линейным.

2) Отображение $p(t) \mapsto p''(t)$ является линейным в силу свойства линейности операции дифференцирования.

3) Пусть $p_1(t)$ и $p_2(t)$ — произвольные многочлены, тогда для любых скаляров α и β имеем:

$$\begin{aligned} \alpha p_1(t) + \beta p_2(t) &= \left(\int_0^1 (\alpha p_1(u) + \beta p_2(u)) du \right) \cdot t^3 = \\ &= \alpha \left(\int_0^1 p_1(u) du \right) \cdot t^3 + \beta \left(\int_0^1 p_2(u) du \right) \cdot t^3, \end{aligned}$$

то есть рассматриваемое отображение линейно. Условие $n \geq 3$ необходимо, поскольку в противном случае многочлен t^3 не принадлежит линейному подпространству $\mathbb{R}_n[t]$.

4) Отображение $p(t) \mapsto p(1)p(2) \cdot 1$ не является линейным ни при каком n , поскольку, например, $1 \mapsto 1$, $2 \mapsto 4$, а $1 + 2 \mapsto 9$ (поскольку эти многочлены имеют нулевую степень, они содержатся в рассматриваемом подпространстве при любом n).

5) Рассмотрим произвольные многочлены

$$p_1(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n, \quad p_2(t) = b_0 + b_1t + \dots + b_nt^n$$

и произвольные скаляры α, β . Тогда

$$\alpha p_1(t) + \beta p_2(t) \mapsto t^n \sum_{k=0}^n \left(\alpha \frac{a_k}{t^k} + \beta \frac{b_k}{t^k} \right) = \alpha t^n \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{t^k} + \beta t^n \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{t^k},$$

то есть свойство линейности выполнено. \square

Задача 20. В линейном пространстве $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$ вещественных матриц порядка n заданы функции следа tr и определителя \det матрицы. Являются ли они линейными?

Решение. Сложение матриц и умножение матрицы на число происходит поэлементно, поэтому если $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, то для произвольных чисел α и β имеем:

$$\text{tr}(\alpha A + \beta B) = \sum_{i=1}^n (\alpha a_{ii} + \beta b_{ii}) = \alpha \sum_{i=1}^n a_{ii} + \beta \sum_{i=1}^n b_{ii} = \alpha \text{tr } A + \beta \text{tr } B,$$

то есть отображение взятия следа матрицы линейно.

Если $n > 1$, то, например, для единичной матрицы E функция взятия определителя не удовлетворяет свойству линейности:

$$\det(\alpha E + \beta E) = (\alpha + \beta)^n \neq \alpha + \beta = \alpha \cdot \det E + \beta \cdot \det E$$

(достаточно положить $\alpha = \beta = 1$). При $n = 1$ линейность очевидна, поскольку определитель матрицы порядка 1 — это единственный элемент этой матрицы. \square

Задача 21. Найти базис в ядре линейного функционала

$$\varphi = 2x^1 - 3x^2 + x^4,$$

где $x^k: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ — функционал взятия k -й координаты вектора в стандартном базисе.

Решение. Ядро линейного функционала φ состоит из тех и только тех векторов $v \in \mathbb{R}^4$, для которых $\varphi(v) = 0$, то есть

$$2x^1 - 3x^2 + x^4 = 0.$$

Таким образом, достаточно построить какой-нибудь базис в пространстве решений этой линейной системы, состоящей из одного уравнения. Составляя фундаментальную систему решений, получаем следующую

систему векторов:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Задача 22. В пространстве $\mathbb{R}_n[t]$ многочленов степени не выше n линейные функции l^i , где $i=0, 1, \dots, n$, заданы формулой $l^i(p) = p^{(i)}(t_0)$ для всех многочленов $p \in \mathbb{R}_n[t]$, где t_0 — произвольная заданная точка числовой прямой. Доказать, что эти функции образуют базис в сопряжённом пространстве $(\mathbb{R}_n[t])^*$, и найти двойственный базис пространства $\mathbb{R}_n[t]$.

Решение. Вместо того, чтобы непосредственно доказывать, что система функций l^0, l^1, \dots, l^n образует базис в пространстве $(\mathbb{R}_n[t])^*$, предъявим двойственную ей систему многочленов и покажем, что она является базисом пространства $\mathbb{R}_n[t]$. Рассмотрим многочлены p_0, p_1, \dots, p_n , где

$$p_i(t) = \frac{(t-t_0)^i}{i!}.$$

Легко видеть, что при $k < i$

$$l^k(p_i) = \left(i(i-1) \cdot \dots \cdot (i-k+1) \frac{(t-t_0)^{i-k}}{i!} \right) \Big|_{t=t_0} = \left(\frac{(t-t_0)^{i-k}}{(i-k)!} \right) \Big|_{t=t_0} = 0.$$

При $k > i$ степень многочлена меньше порядка дифференцирования, и потому $l^k(p_i) = 0$, а $p_i^{(i)}(t) \equiv 1$. Таким образом, построенная система многочленов двойственна к исходной системе линейных функций. Отсюда следует, что она линейно независима, а поскольку количество элементов в ней совпадает с размерностью пространства $\mathbb{R}_n[t]$, она является базисом $\mathbb{R}_n[t]$. \square

1.7. Аффинные пространства

Задача 23. Определить, является ли Y аффинным подпространством аффинного пространства X , и если является, найти линейное подпространство V , с которым Y ассоциировано, в каждом из перечисленных ниже случаев:

- 1) X — произвольное вещественное аффинное пространство, а Y — конечный набор точек из X ;
- 2) X — плоскость \mathbb{R}^2 , а Y — некоторая её полуплоскость вида

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by \geq 0\};$$

- 3) X — плоскость \mathbb{R}^2 , а Y — произвольная прямая на этой плоскости;
- 4) X — пространство $\mathbb{R}[t]$ всех многочленов от одной переменной, а Y — подмножество многочленов $p(t)$, удовлетворяющих условию $p(1) + p(2) = 3$;
- 5) X — пространство $\mathbb{R}[t]$ всех многочленов от одной переменной, а Y — подмножество всех многочленов $p(t)$, удовлетворяющих условию $p(1)p(2) = 3$.

Решение. 1) Всякое вещественное линейное пространство состоит из бесконечного количества элементов, если только оно не нульмерно (в этом случае оно состоит только из нулевого вектора). Поэтому конечный набор точек Y аффинного пространства X можно представить в виде $A + V$, где $A \in X$, V — некоторое линейное пространство, лишь если Y состоит из единственной точки (то есть точки A), а V — нульмерное линейное пространство.

2) Допустим, что Y является аффинным подпространством в X и что существует такое линейное подпространство V в линейном пространстве \mathbb{R}^2 , что Y с ним ассоциировано. Заметим, что $O \in Y$, где O — начало координат, тогда для произвольной точки $A = (x_1, y_1) \in Y$ такой, что $ax_1 + by_1 > 0$, найдётся такой вектор $v \in V$, что $O + v = A$. Тогда точка B , определяемая равенством $B = O + (-v)$, тоже должна содержаться в Y . В силу правила треугольника $B = (-x_1, -y_1)$ и

$$a(-x_1) + b(-y_1) = -(ax_1 + by_1) < 0.$$

Значит, B не принадлежит Y , что противоречит нашему предположению. Таким образом, полуплоскость Y не является аффинным подпространством в аффинном пространстве \mathbb{R}^2 .

3) Пусть v — направляющий вектор прямой Y , а V — его линейная оболочка. Тогда для любых двух точек $A, B \in Y$ имеет место равенство $B = A + \overrightarrow{AB}$, причем $\overrightarrow{AB} \in V$. Таким образом, Y является аффинным подпространством в X , ассоциированным с линейным подпространством V .

4) Для любых двух многочленов p и q , принадлежащих Y , их разность $s = p - q$ удовлетворяет условию $s(1) + s(2) = 0$, задающему линейное подпространство в пространстве всех многочленов от одной переменной. Поэтому любой многочлен $p \in Y$ можно представить в виде $p = q + s$, где $q(t) \equiv \frac{3}{2}$, а s удовлетворяет условию $s(1) + s(2) = 0$. Таким образом, множество Y является аффинным подпространством в X , ассоциированным с линейным подпространством всех многочленов, удовлетворяющих условию $s(1) + s(2) = 0$.

5) Рассмотрим многочлены $p(t) \equiv \sqrt{3}$ и $q(t) = 2t - 1$, принадлежащие Y , и рассмотрим их разность $s = q - p$. Если предположить, что подмножество Y является аффинным подпространством в X , то, например, многочлен $r = p + 2s$ должен содержаться в Y . Однако это не так: $r(1) = 2 - \sqrt{3}$ и $r(2) = 6 - \sqrt{3}$. Таким образом, Y не является аффинным подпространством в X . \square

Задача 24. Составить параметрическое уравнение плоскости

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 6x_4 + x_5 = 4, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$$

Решение. Фактически эта задача эквивалентна задаче построения фундаментальной системы решений для неоднородной системы линейных уравнений. Действительно, запишем расширенную матрицу этой системы и приведём её к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -2 & 4 & -6 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -11 & 1 & 3 & -5 & 1 \end{array} \right).$$

Частное решение $(0, 0, 1, 0, 0)$ получается, если приравнять все свободные неизвестные к нулю: $x_2 = x_4 = x_5 = 0$. Фундаментальная система решений соответствующей однородной системы состоит из векторов

$$(-14, 1, 11, 0, 0), \quad (6, 0, -3, 1, 0), \quad (-7, 0, 5, 0, 1).$$

На языке аффинных подпространств это означает, что плоскость решений исходной системы трёхмерна и параметрически задаётся следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -14 \\ 1 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Задача 25. Составить параметрическое уравнение двумерной плоскости, проходящей через три точки

$$A_1(-3, 1, 2, -2, -4), \quad A_2(-1, 5, 4, 1, -4), \quad A_3(3, 5, -5, 5, -1).$$

Найти систему линейных уравнений, задающую эту плоскость.

Решение. Для составления параметрических уравнений заданной плоскости достаточно взять любую из данных точек в качестве базовой, а векторы, идущие из неё в две другие точки, в качестве базиса

соответствующего линейного подпространства:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -7 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Найдём теперь систему линейных уравнений, задающую эту двумерную плоскость. Сначала построим однородную систему, которой будут удовлетворять векторы A_1A_2 и A_1A_3 . Для этого запишем координаты этих векторов в матрицу по строкам и приведём её к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 3 & 0 \\ 6 & 4 & -7 & 7 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & -13 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

В качестве фундаментальной системы решений данной системы можно взять следующий набор векторов:

$$(18, -13, 8, 0, 0), \quad (4, 1, 0, -4, 0), \quad (6, -3, 0, 0, -8).$$

Координаты этих векторов являются коэффициентами искомой линейной системы:

$$\begin{cases} 18x_1 - 13x_2 + 8x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 4x_4 = 0, \\ 6x_1 - 3x_2 - 8x_5 = 0. \end{cases}$$

Теперь подставим в эту однородную систему любую из данных точек (например, точку A_1) и вычислим коэффициенты в правой части:

$$\begin{cases} 18x_1 - 13x_2 + 8x_3 = -51, \\ 4x_1 + x_2 - 4x_4 = -3, \\ 6x_1 - 3x_2 - 8x_5 = 11. \end{cases} \quad \square$$

Задача 26. Найти аффинную оболочку системы точек

$$(-1, 1, 0, 1), \quad (0, 0, 2, 0), \quad (-3, -1, 5, 4), \quad (2, 2, -3, -3).$$

Решение. Найдём линейную однородную систему, задающую соответствующее линейное подпространство, а затем подставим в неё любую из данных точек. В качестве базовой выберем вторую точку и будем искать однородную систему, задающую линейную оболочку векторов

$$v_1 = (-1, 1, -2, 1), \quad v_2 = (-3, -1, 3, 4), \quad v_3 = (2, 2, -5, -3),$$

соединяющих эту точку с тремя оставшимися. Запишем произвольный вектор (x_1, x_2, x_3, x_4) их линейной оболочки в виде $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$. Приводя расширенную матрицу полученной системы к ступенчатому виду, получаем:

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 & | & x_1 \\ 1 & -1 & 2 & | & x_2 \\ -2 & 3 & -5 & | & x_3 \\ 1 & 4 & -3 & | & x_4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & | & x_2 \\ 0 & 1 & -1 & | & x_1 + x_4 \\ 0 & -4 & 4 & | & x_1 + x_2 \\ 0 & 1 & -1 & | & 2x_2 + x_3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & | & x_2 \\ 0 & 1 & -1 & | & x_1 + x_4 \\ 0 & 0 & 0 & | & x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 \\ 0 & 0 & 0 & | & 5x_1 + x_2 + 4x_4 \end{pmatrix}.$$

Поэтому соответствующая однородная система имеет вид

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_1 + x_2 + 4x_4 = 0. \end{cases} \quad (1.8)$$

Поскольку неоднородная система, задающая аффинное подпространство, отличается от однородной системы, задающей ассоциированное с ним линейное подпространство, лишь столбцом свободных членов, для нахождения этого столбца свободных членов достаточно подставить координаты произвольной точки аффинного подпространства в систему, задающую соответствующее линейное подпространство. Выберем самую простую из данных точек $(0, 0, 2, 0)$ и, подставляя ее координаты в систему (1.8), получим следующую неоднородную систему:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -2, \\ 5x_1 + x_2 + 4x_4 = 0. \end{cases} \quad \square$$

Задача 27. Найти аффинную оболочку объединения двух аффинных подпространств:

$$\Pi_1 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 3 \\ 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\Pi_2 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Рассмотрим вектор $\left(\frac{19}{3}, 1, 3, 6, 5\right)$, соединяющий точки $\left(\frac{1}{3}, 3, 5, 4, 2\right)$ и $(-6, 2, 2, -2, -3)$ двух данных аффинных подпространств, и базисные вектор-столбцы, задающие эти подпространства. Запишем их по столбцам в матрицу

$$\begin{pmatrix} \frac{19}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 7 \\ 6 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

и убедимся в том, что ранг полученной матрицы равен 4. Это означает, что соответствующие векторы линейно независимы, и уравнение искомой аффинной оболочки имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 3 \\ 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} \frac{19}{3} \\ 1 \\ 3 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t_4 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Задача 28. Исследовать взаимное расположение двух трёхмерных плоскостей в пространстве \mathbb{R}^n при $n \geq 6$.

Решение. Рассмотрим трёхмерные аффинные плоскости $P_1 + V_1$ и $P_2 + V_2$, где P_1 и P_2 — некоторые точки из \mathbb{R}^n , а V_1 и V_2 — трёхмерные линейные подпространства. Поскольку оба эти линейные подпространства трёхмерны, они могут пересекаться по линейному пространству, размерность которого равна 3, 2, 1 или 0. Исследуем возможные случаи.

1. Если $V_1 = V_2$ и $\overrightarrow{P_1 P_2} \in V_1$, то плоскости совпадают.
2. Если $V_1 = V_2$, а $\overrightarrow{P_1 P_2} \notin V_1$, то плоскости параллельны.
3. Если $\dim V_1 \cap V_2 = 2$ и $\overrightarrow{P_1 P_2} \in V_1 + V_2$, то плоскости пересекаются по двумерной плоскости.
4. Если $\dim V_1 \cap V_2 = 2$, а $\overrightarrow{P_1 P_2} \notin V_1 + V_2$, то говорят, что такие плоскости скрещиваются по двумерной плоскости.
5. Если $\dim V_1 \cap V_2 = 1$ и $\overrightarrow{P_1 P_2} \in V_1 + V_2$, то говорят, что такие плоскости пересекаются по прямой.
6. Если $\dim V_1 \cap V_2 = 1$, а $\overrightarrow{P_1 P_2} \notin V_1 + V_2$, то говорят, что такие плоскости скрещиваются по прямой.
7. Если $\dim V_1 \cap V_2 = 0$ и $\overrightarrow{P_1 P_2} \in V_1 + V_2$, то плоскости пересекаются по точке.

8. Если $\dim V_1 \cap V_2 = 0$ и $\overrightarrow{P_1 P_2} \notin V_1 + V_2$, то плоскости скрещиваются по точке, что возможно лишь если $n > 6$, поскольку $\dim(V_1 + V_2) = 6$. \square

Задача 29. Определить взаимное расположение двух плоскостей:

$$\Pi_1 : (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, -1, 2, 1, 0) + \langle (2, 3, -1, 0, 4), (3, -2, 1, 0, 1) \rangle,$$

$$\Pi_2 : (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 1, -1, 0, 1) + \langle (4, -1, -4, 0, 7), (7, 5, 8, 0, 1) \rangle.$$

Решение. Рассмотрим линейные подпространства V_1 и V_2 , соответствующие заданным аффинным плоскостям. Запишем матрицу, состоящую из координат базисных векторов подпространств, и добавим в неё столбец координат вектора, соединяющего заданные точки плоскостей Π_1 и Π_2 :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 7 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & -4 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 7 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что ранг всей матрицы равен 4, а ранг матрицы, состоящей из её первых четырёх столбцов, равен 3, то есть добавление вектора, соединяющего точки двух плоскостей, к системе, состоящей из базисных векторов соответствующих линейных подпространств, увеличивает её ранг. Значит, плоскости Π_1 и Π_2 не пересекаются. Поскольку подпространство $V_1 + V_2$ трёхмерно, а каждая из данных плоскостей двумерна, эти плоскости скрещиваются по прямой. Для нахождения направляющего вектора этой прямой необходимо найти пересечение подпространств V_1 и V_2 . Для этого построим линейные системы, задающие эти подпространства. Они задаются линейными системами

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 - x_5 = 0, \\ 5x_2 + 11x_3 - x_5 = 0, \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 4x_1 - 5x_2 - 3x_5 = 0, \\ 4x_1 - 20x_2 + 9x_3 = 0, \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

соответственно. Тогда их пересечение задаётся линейной системой

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 - x_5 = 0, \\ 5x_2 + 11x_3 - x_5 = 0, \\ 4x_1 - 5x_2 - 3x_5 = 0, \\ 4x_1 - 20x_2 + 9x_3 = 0, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Приводя соответствующую матрицу к ступенчатому виду, замечаем, что фундаментальная система решений этой системы состоит из вектора $(5, 1, 0, 0, 5)$. Значит, заданные плоскости скрещиваются по вектору $(5, 1, 0, 0, 5)$ (то есть аффинные подпространства Π_1 и Π_2 не имеют общих точек, а ассоциированные с ними линейные подпространства пересекаются по одномерному подпространству). \square

ГЛАВА 2

Линейные операторы

2.1. Матрица линейного оператора

Задача 30. Найти матрицы линейного оператора в трёхмерном пространстве \mathbb{R}^3 (со стандартным скалярным произведением), заданного формулой $x \mapsto (x, a)a$, где $a = (3, 2, 1)$, в стандартном базисе в \mathbb{R}^3 и в базисе $b_1 = (1, 1, 1)$, $b_2 = (0, 1, 1)$, $b_3 = (0, 0, -1)$.

Решение. Поскольку по столбцам матрицы линейного оператора стоят координаты образов базисных векторов, найдём, куда переходят векторы стандартного базиса e_1, e_2, e_3 под действием заданного оператора:

$$e_1 \mapsto 3a, \quad e_2 \mapsto 2a, \quad e_3 \mapsto a.$$

Поэтому в стандартном базисе матрица данного оператора имеет вид

$$\begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично, рассматривая базис b_1, b_2, b_3 , получаем, что

$$b_1 \mapsto 6a, \quad b_2 \mapsto 3a, \quad b_3 \mapsto -a.$$

Однако нам необходимо записать координаты образов базисных векторов именно в базисе b_1, b_2, b_3 , для чего придётся разложить вектор a по этому базису. В данном случае разложение очевидно:

$$a = 3b_1 - b_2 + b_3.$$

Поэтому искомая матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 18 & 9 & -3 \\ -6 & -3 & 1 \\ 6 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

□

Задача 31. В пространстве многочленов $\mathbb{R}_5[x]$ степени не выше пятой найти матрицы оператора дифференцирования $\frac{d}{dx}$ и оператора сдвига $T: p(x) \mapsto p(x+1)$ в базисе $1, x, x^2, x^3, x^4, x^5$.

Решение. Записывая координаты образов базисных векторов, получаем матрицу оператора дифференцирования:

$$A_{\frac{d}{dx}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для получения матрицы оператора сдвига необходимо воспользоваться биномом Ньютона для выражений вида $(x+1)^k$:

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Задача 32. Линейный оператор в некотором базисе e_1, e_2, e_3 имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Найти его матрицу в базисе

$$\tilde{e}_1 = e_1 + 2e_2 + e_3, \quad \tilde{e}_2 = -7e_1 + 4e_2 - 2e_3, \quad \tilde{e}_3 = 3e_1 - e_2 + e_3.$$

Решение. Составим матрицу перехода, записав по столбцам координаты векторов нового базиса в старом:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда обратная матрица имеет вид

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & -7 \\ 8 & 5 & -18 \end{pmatrix},$$

а искомая матрица выражается по формуле

$$B = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 17 & -9 & 9 \\ -22 & 20 & -15 \\ -54 & 44 & -35 \end{pmatrix}.$$

□

Задача 33. Линейный оператор f в базисе

$$a_1 = (2, 3, 5), \quad a_2 = (-1, 0, 1), \quad a_3 = (3, 1, -1)$$

имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 11 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найти его матрицу в базисе $b_1 = (1, 0, 2)$, $b_2 = (3, -1, 5)$, $b_3 = (-2, 4, -1)$.

Решение. Запишем матрицы перехода C_1 и C_2 от стандартного базиса в \mathbb{R}^3 к базисам a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3 соответственно:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица $C = C_1^{-1}C_2$ является матрицей перехода от базиса a_1, a_2, a_3 к базису b_1, b_2, b_3 . Поскольку элементарным преобразованиям строк матрицы соответствует умножение её на матрицы элементарных преобразований слева, нет необходимости отдельно находить матрицу C_1^{-1} , а затем умножать её на C_2 ; достаточно записать матрицы C_1 и C_2 рядом и применить к ним элементарные преобразования строк так, чтобы привести C_1 к единичной:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 3 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & 5 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 10 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & -22 & -76 & 91 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & -31 & 37 \end{array} \right).$$

Таким образом,

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 10 & -11 \\ -22 & -76 & 91 \\ -9 & -31 & 37 \end{pmatrix}.$$

Теперь осталось, зная матрицу перехода, записать матрицу оператора f в другом базисе:

$$\begin{aligned} C^{-1}AC &= \begin{pmatrix} -9 & 29 & -74 \\ 5 & -12 & 31 \\ 2 & -3 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 11 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 10 & -11 \\ -22 & -76 & 91 \\ -9 & -31 & 37 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 72 & 115 & 182 \\ -61 & -156 & 56 \\ -36 & -111 & 101 \end{pmatrix}. \quad \square \end{aligned}$$

Задача 34. Доказать, что существует единственное линейное преобразование трёхмерного пространства, переводящее векторы a_1, a_2 и a_3 в векторы b_1, b_2 и b_3 соответственно. Найти матрицу этого преобразования в том же базисе, в котором заданы координаты векторов:

$$\begin{aligned} a_1 &= (4, 1, -1), & a_2 &= (-1, 4, 5), & a_3 &= (-2, 0, 1), \\ b_1 &= (2, 3, 1), & b_2 &= (1, 1, -1), & b_3 &= (-1, 0, 1). \end{aligned}$$

Решение. Запишем координаты данных векторов в матрицы A и B по столбцам. Если такое линейное преобразование f существует и задаётся матрицей C в том же базисе, в котором заданы координаты данных векторов, то для каждого $i = 1, 2, 3$ выполнено равенство $Ca_i^T = b_i^T$. Это означает, что имеет место матричное равенство $CA = B$, то есть $C = BA^{-1}$, если матрица A обратима. В нашем случае матрицы A и B имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

причем матрица A — невырожденная. Поэтому искомое линейное преобразование существует, единственно и задаётся матрицей

$$C = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 9 & -8 \\ 1 & -2 & 2 \\ -9 & 19 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -11 & 25 & -22 \\ -14 & 30 & -27 \end{pmatrix}. \quad \square$$

2.2. Ядро и образ линейного оператора

Задача 35. Найти ядро и образ линейного оператора f , заданного своей матрицей в некотором базисе:

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 9 & 5 & 10 \\ 3 & 1 & 7 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Приведём матрицу оператора к ступенчатому виду элементарными преобразованиями строк:

$$\begin{aligned} A_f &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & -7 & -7 & 1 & -6 \\ 0 & 5 & 5 & 4 & 9 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & -8 & -8 & -2 & -10 \end{pmatrix} \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 22 & 22 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Поскольку элементарные преобразования строк матрицы не нарушают линейных соотношений между её столбцами, первый, второй и четвёртый столбцы исходной матрицы A_f , то есть векторы

$$(1, 2, -1, 4, 3), \quad (3, -1, 2, 1, 1), \quad (0, 1, 4, 5, -2)$$

образуют базис в образе оператора f .

Для нахождения ядра этого оператора достаточно построить фундаментальную систему решений линейной системы $A_f x = 0$. Легко видеть, что в данном случае она состоит из двух векторов:

$$v_1 = (-2, -1, 1, 0, 0), \quad v_2 = (-1, -1, 0, -1, 1).$$

Таким образом,

$$\text{Ker } f = \langle v_1, v_2 \rangle. \quad \square$$

Задача 36. Найти ядро и образ следующих операторов, действующих в пространстве $\mathbb{R}_n[x]$ многочленов степени не выше n :

- 1) $T: p(x) \mapsto p(x+1)$;
- 2) $R: p(x) \mapsto p(-x)$;
- 3) $D: p(x) \mapsto x^2 p''(x)$;
- 4) $P: p(x) \mapsto p(0)x$.

Решение. 1) Поскольку оператор сдвига обратим,

$$T^{-1}p(x) = p(x-1),$$

его образом является все пространство $\mathbb{R}_n[x]$, а ядро — нулевое.

2) Оператор R является инволюцией: $R^2 = \text{id}$; поэтому его образ составляет все пространство $\mathbb{R}_n[x]$, а ядро — нулевое.

3) Легко видеть, что образ оператора D состоит из всех многочленов, делящихся на x^2 , а ядро состоит из всех линейных многочленов.

4) Образ оператора R состоит из всех многочленов, пропорциональных многочлену x , то есть $\text{Image } P = \langle x \rangle$, а ядро состоит из всех многочленов, обращающихся в нуль при $x = 0$, то есть делящихся на x . \square

2.3. Собственные значения и собственные векторы

Задача 37. Рассмотрим векторное пространство $V = V_1 \oplus V_2$. Найти собственные значения и собственные векторы оператора P проектирования на подпространство V_1 параллельно подпространству V_2 и оператора R отражения относительно V_1 параллельно V_2 .

Решение. Пространство V по условию разложено в прямую сумму двух подпространств: $V = V_1 \oplus V_2$, то есть произвольный вектор $v \in V$ единственным образом представляется в виде $v = v_1 + v_2$, где $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$. Поэтому для произвольного вектора $v \in V$ имеем:

$$P(v) = v_1, \quad R(v) = v_1 - v_2.$$

Это означает, что подпространство V_1 является собственным, соответствующим собственному значению $\lambda = 1$, сразу для обоих операторов, а подпространство V_2 является собственным, соответствующим собственному значению $\lambda = 0$ для оператора P и соответствующим собственному значению $\lambda = -1$ для оператора R . \square

Задача 38. Найти собственные значения, их кратности и собственные подпространства линейного оператора f , заданного в некотором базисе матрицей

$$A_f = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 8 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Найдём характеристический многочлен данного оператора:

$$\begin{aligned} \chi_f(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & -2 & 0 \\ 4 & -1-\lambda & 0 \\ 8 & -4 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \\ &= (1-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & -2 \\ 4 & -1-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda-3). \end{aligned}$$

Таким образом, $\lambda = 1$ и $\lambda = 3$ являются собственными значениями оператора f кратности 2 и 1 соответственно. Найдём теперь соответствующие собственные подпространства:

$$A_f - E = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 8 & -4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

значит, собственное подпространство V_1 , соответствующее $\lambda = 1$, двумерно: $V_1 = \langle (1, 2, 0), (0, 0, 1) \rangle$. Для другого собственного значения $\lambda = 3$ аналогично имеем:

$$A_f - 3E = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ 8 & -4 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

значит, $V_3 = \langle (1, 1, 2) \rangle$. \square

Задача 39. Найти собственные значения, их кратности и собственные подпространства линейного оператора f , заданного в некотором

базисе матрицей

$$A_f = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрица оператора f блочно-диагональна, поэтому её характеристический многочлен имеет вид

$$\chi_f(\lambda) = ((3 - \lambda)(1 - \lambda) + 1)((5 - \lambda)(-1 - \lambda) + 9) = (\lambda - 2)^4,$$

то есть $\lambda = 2$ является единственным собственным значением кратности 4. Приведём матрицу $A_f - 2E$ к ступенчатому виду (в данном случае удобнее, чтобы ступеньки шли в другую сторону):

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что собственное пространство V_2 двумерно:

$$V_2 = \langle (1, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1) \rangle.$$

□

Замечание. В задаче 38 сумма размерностей собственных подпространств была равна размерности всего пространства, т. е. все пространство раскладывалось в прямую сумму собственных подпространств. Однако так бывает не всегда: в задаче 39 алгебраическая кратность собственного значения $\lambda = 2$ равна 4, в то время как $\dim V_2 = 2$.

2.4. Жорданова форма

Задача 40. Найти собственные значения и корневые подпространства линейного оператора, заданного матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Характеристический многочлен матрицы A имеет вид

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 4\lambda^2 = \lambda^2(\lambda - 2)^2.$$

Поскольку оба собственных значения $\lambda = 0$ и $\lambda = 2$ двукратны, соответствующие корневые пространства R_0 и R_2 двумерны.

Рассмотрим сперва $\lambda = 0$. Соответствующий собственный вектор имеет вид $(0, 1, 0, 1)$. Возведём исходную матрицу в квадрат:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что корневой вектор высоты 2 имеет вид $(1, 0, 0, 0)$. Таким образом, поскольку алгебраическая кратность корня $\lambda = 0$ равна двум, корневое подпространство R_0 двумерно и имеет вид

$$R_0 = \langle (0, 1, 0, 1), (1, 0, 0, 0) \rangle.$$

Рассмотрим теперь другое собственное значение $\lambda = 2$. Соответствующий ему собственный вектор имеет вид $(1, 0, 0, 1)$. Поскольку

$$(A - 2E)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 & -4 \\ -4 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix},$$

корневой вектор высоты 2 имеет вид $(1, 0, 1, 0)$. Таким образом,

$$R_2 = \langle (1, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 0) \rangle. \quad \square$$

Прежде чем разбирать задачи на нахождение жордановой формы и жорданова базиса матриц линейных операторов, опишем кратко общий алгоритм. Пусть линейный оператор $f: V \rightarrow V$ в n -мерном пространстве задан в некотором базисе матрицей A_f . Прежде всего необходимо найти его характеристический многочлен $\chi_f(\lambda)$. Рассмотрим последовательно несколько случаев.

А. Нильпотентный оператор

Если $\chi_f(\lambda) = \pm \lambda^n$, то линейный оператор f нильпотентен. Это означает, что найдётся такое натуральное $k \leq n$, что $f^k = 0$. Без ограничения общности можно считать, что k — минимальная степень, в которой оператор f обращается в нуль. Это означает, что k — это максимальный размер жордановой клетки в жордановой форме оператора f . Предположим, что жорданов базис для оператора f уже найден. Тогда, если записать матрицу оператора f в этом базисе, мы получим блочно-диагональную матрицу с нулями на главной диагонали. Легко видеть, что её ранг равен $n - r$, где n — размерность матрицы, а r — количество клеток в жордановой форме. Поскольку ранг матрицы оператора не зависит от выбора базиса, это соотношение справедливо

$$r_1 + r_2 + \dots + r_k = n - \text{rk } A_f.$$
$$r_1 + 2(r_2 + r_3 + \dots + r_k) = n - \text{rk } A_f^2.$$
$$r_1 + 2r_2 + 3(r_3 + \dots + r_k) = n - \text{rk } A_f^3.$$
[illegible]

[illegible]

Поскольку матрица последней линейной системы верхнетреугольна, её определитель отличен от нуля и соответствующая система имеет единственное решение. Таким образом, *в теории* подобная процедура позволяет найти жорданову форму произвольного нильпотентного линейного оператора. Однако *на практике*, как станет понятно при

разборе примеров, в каждом конкретном случае нет необходимости выписывать и решать такую систему уравнений целиком, поскольку при достаточно небольшом размере матрицы вся информация о количестве клеток того или иного размера быстрее получается путём рассмотрения первых двух-трёх уравнений этой системы и перебора различных вариантов разбиения числа $n - \text{rk } A_f$ в сумму $r_1 + r_2 + \dots + r_k$. Отметим, что в случае нильпотентного оператора последнее уравнение в системах (2.1) немного упрощается, поскольку $\text{rk } A_f^k = 0$; в том виде, в котором эти системы приведены, они справедливы и в более общем случае (см. ниже).

Теперь обсудим процесс построения жорданова базиса. Для начала необходимо взять какую-нибудь максимальную систему векторов $e_1^{(k)}, e_2^{(k)}, \dots, e_{r_k}^{(k)}$ из подпространства $\text{Ker } f^k$ (которое в данном случае совпадает со всем пространством V), линейно независимую относительно подпространства $\text{Ker } f^{k-1} \subset \text{Ker } f^k$. Это означает, что никакая нетривиальная линейная комбинация этих векторов не должна принадлежать подпространству $\text{Ker } f^{k-1}$ (иными словами, достаточно выбрать любой базис в факторпространстве $\text{Ker } f^k / \text{Ker } f^{k-1}$ и рассмотреть произвольные прообразы выбранных векторов в $\text{Ker } f^k$ при естественной проекции $\pi: \text{Ker } f^k \rightarrow \text{Ker } f^k / \text{Ker } f^{k-1}$). Построенные векторы являются старшими корневыми векторами и соответствуют жордановым клеткам размера k ; поэтому их количество совпадает с количеством жордановых клеток максимальной размерности. Далее применим оператор f к уже построенным векторам и получим векторы

$$e_1^{(k-1)}, e_2^{(k-1)}, \dots, e_{r_k}^{(k-1)}, \quad (2.2)$$

где $e_j^{(k-1)} = f(e_j^{(k)})$ для всех $j = 1, 2, \dots, r_k$, принадлежащие подпространству $\text{Ker } f^{k-1}$. Дополним их векторами $e_{r_k+1}^{(k-1)}, \dots, e_{s_{k-1}}^{(k-1)}$, где $s_{k-1} = r_k + r_{k-1}$, так, чтобы вся система

$$e_1^{(k-1)}, e_2^{(k-1)}, \dots, e_{s_{k-1}}^{(k-1)}$$

была линейно независима относительно подпространства $\text{Ker } f^{k-2}$. Векторы, которыми мы дополнили систему (2.2), являются корневыми высоты $k-1$ и соответствуют жордановым клеткам размера $k-1$. Продолжим процесс: допустим, уже построены корневые векторы

$$e_1^{(j)}, e_2^{(j)}, \dots, e_{s_j}^{(j)} \quad (2.3)$$

высоты j , где $s_j = r_k + r_{k-1} + \dots + r_j$. Тогда, дополняя их образы под действием оператора f так, чтобы полученная система была линейно

независима относительно подпространства $\text{Ker } f^{j-2}$, мы построим корневые векторы высоты $j - 1$. Описанный процесс закончится, когда мы дойдем до корневых векторов высоты 1, то есть до собственных векторов. Искомый жорданов базис является объединением систем векторов (2.3), построенных на всех шагах этого процесса.

$\text{Ker } f^k$	$e_1^{(k)}$	$e_2^{(k)}$	\dots	$e_{r_k}^{(k)}$			
$\text{Ker } f^{k-1}$	$\downarrow f$ $e_1^{(k-1)}$	$\downarrow f$ $e_2^{(k-1)}$	$\downarrow f$ \dots	$\downarrow f$ $e_{r_k}^{(k-1)}$	$e_{r_k+1}^{(k-1)}$	$e_{r_k+2}^{(k-1)}$	\dots $e_{s_{k-1}}^{(k-1)}$
	$\downarrow f$	$\downarrow f$	$\downarrow f$	$\downarrow f$	$\downarrow f$	$\downarrow f$	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
$\text{Ker } f$	$\downarrow f$ $e_1^{(1)}$	$\downarrow f$ $e_2^{(1)}$	$\downarrow f$ \dots	$\downarrow f$ $e_{r_k}^{(1)}$	$\downarrow f$ $e_{r_k+1}^{(1)}$	$\downarrow f$ $e_{r_k+2}^{(1)}$	\dots $e_{s_1}^{(1)}$

Жорданова форма линейного оператора определена однозначно с точностью до порядка жордановых клеток, который мы можем выбирать произвольно. Однако при построении жорданова базиса порядок векторов в нем должен соответствовать выбранному порядку жордановых клеток. В приведённой выше таблице каждый вертикальный столбец соответствует одной жордановой клетке, причем нумерация векторов в этом столбце (в соответствии с которой они входят в жорданов базис) идёт снизу вверх, так как сперва должен идти собственный вектор, затем — корневой высоты 2, и так далее. Таким образом, если векторы из этой таблицы упорядочиваются в жорданов базис снизу вверх в каждом столбце, а столбцы берутся, например, слева направо, то жордановы клетки в соответствующей жордановой форме будут упорядочены по убыванию.

В. Оператор с единственным собственным значением

Если $\chi_f(\lambda) = \pm(\lambda - \lambda_0)^n$, то линейный оператор $g = f - \lambda_0 \text{id}$ нильпотентен. Произвольный жорданов базис для оператора g будет искомым, а жорданова форма оператора f будет отличаться от жордановой формы оператора g тем, что в ней на диагонали вместо нулей будет стоять λ_0 . Таким образом, этот случай сводится к случаю нильпотентного оператора заменой f на $f - \lambda_0 \text{id}$.

С. Общий случай

В общем случае, то есть когда характеристический многочлен $\chi_f(\lambda) = \pm(\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1} \dots (\lambda - \lambda_q)^{\alpha_q}$ имеет по крайней мере два различ-

ных корня, линейное пространство V раскладывается в прямую сумму корневых подпространств R_i для оператора f , соответствующих собственным значениям λ_i . При этом каждое из подпространств R_i инвариантно относительно f . Поэтому для каждого $i = 1, 2, \dots, q$ корректно определено ограничение $f|_{V_i}$ на корневое подпространство V_i , причем это ограничение является оператором с единственным собственным значением λ_i . Поэтому нахождение жордановой формы и жорданова базиса в общем случае сводится к нахождению жордановой формы и соответствующего базиса для операторов $f|_{V_i}$. На практике это означает, что для нахождения жордановой формы и жорданова базиса необходимо последовательно рассматривать все собственные значения λ_i и для каждого из них изучать вырожденный оператор $f - \lambda_i \text{id}$. Фиксируем некоторое $i = 1, 2, \dots, q$; в силу вырожденности оператора $f - \lambda_i \text{id}$ найдётся такое k , что

$$\text{rk}(A_f - \lambda_i \text{id})^{k+1} = \text{rk}(A_f - \lambda_i \text{id})^k.$$

Без ограничения общности можно считать, что k — наименьшее из чисел, обладающих этим свойством. Легко видеть, что $0 < k < n$, поскольку λ_i — не единственное собственное значение (в случае нильпотентного оператора мы искали такую минимальную степень, что оператор в этой степени обратится в ноль; в общем случае мы должны найти такую минимальную степень k , в при возведении в которую ранг матрицы $(A_f - \lambda_i \text{id})^k$ стабилизируется). Тогда размеры и количество жордановых клеток, соответствующих собственному значению λ_i , определяются из системы (2.1), где вместо оператора f подставлен оператор $f - \lambda_i \text{id}$. Та часть жорданова базиса, которая содержится в подпространстве V_i , строится по описанной выше схеме: необходимо взять произвольную максимальную систему векторов в $\text{Ker}(f - \lambda_i \text{id})^k$, векторы которой независимы относительно подпространства $\text{Ker}(f - \lambda_i \text{id})^{k-1}$, рассмотреть их образы под действием оператора $f - \lambda_i \text{id}$, дополнить до максимальной системы, линейно независимой относительно подпространства $\text{Ker}(f - \lambda_i \text{id})^{k-2}$, и так далее. Единственная разница по сравнению со случаем оператора с одним собственным значением состоит в том, что в случае единственного собственного значения подпространство $\text{Ker}(f - \lambda_i \text{id})^k$ совпадает со всем пространством V , что не так, когда у оператора есть по крайней мере два различных собственных значения.

Задача 41. Найти жорданову форму и жорданов базис оператора $\frac{d^3}{dx^3}$ трёхкратного дифференцирования в пространстве $\mathbb{R}_{12}[x]$ многочленов степени не выше 12.

Решение. Легко видеть, что оператор трёхкратного дифференцирования в любом конечномерном подпространстве линейного пространства всех многочленов нильпотентен. Таким образом, $\lambda = 0$ является его единственным собственным значением. Поскольку ядро оператора $\frac{d^3}{dx^3}$ трёхмерно (оно состоит из всех многочленов степени не выше чем 2), его жорданова форма состоит из трёх клеток. Ядро оператора $\left(\frac{d^3}{dx^3}\right)^2 = \frac{d^6}{dx^6}$ шестимерно, то есть ранг этого оператора на 3 меньше, чем ранг оператора $\frac{d^3}{dx^3}$; это означает, что размерность всех жордановых клеток больше единицы. Далее, поскольку

$$\dim \operatorname{Ker} \left(\frac{d^3}{dx^3} \right)^3 = 9 \quad \text{и} \quad \dim \operatorname{Ker} \left(\frac{d^3}{dx^3} \right)^4 = 12,$$

жорданова форма рассматриваемого оператора не имеет клеток размера 2 и 3. Таким образом, поскольку $\dim \mathbb{R}_{12}[x] = 13$, жорданова форма оператора трёхкратного дифференцирования в этом пространстве имеет вид

$$J_{\frac{d^3}{dx^3}} = \begin{pmatrix} J_4(0) & & \\ & J_4(0) & \\ & & J_5(0) \end{pmatrix}.$$

Перейдём теперь к построению жорданова базиса e_1, e_2, \dots, e_{13} . В качестве старшего корневого вектора e_{13} можно взять любой вектор из ядра оператора $\left(\frac{d^3}{dx^3}\right)^5$ (то есть любой многочлен из $\mathbb{R}_{12}[x]$), не лежащий в ядре $\left(\frac{d^3}{dx^3}\right)^4$. Положим $e_{13} = \frac{x^{12}}{12!}$. Найдём теперь корневые векторы высоты 4, один из которых получается автоматически:

$$e_{12} = \frac{d^3}{dx^3} e_{13} = \frac{x^9}{9!};$$

необходимо дополнить его до базиса пространства

$$\operatorname{Ker} \left(\frac{d^3}{dx^3} \right)^4 = \mathbb{R}_{11}[x]$$

относительно подпространства

$$\operatorname{Ker} \left(\frac{d^3}{dx^3} \right)^3 = \mathbb{R}_8[x],$$

то есть найти такие векторы e_4 и e_8 из $\operatorname{Ker} \left(\frac{d^3}{dx^3} \right)^4$, что они вместе с вектором e_{12} и произвольным базисом подпространства $\operatorname{Ker} \left(\frac{d^3}{dx^3} \right)^3$ дадут базис $\operatorname{Ker} \left(\frac{d^3}{dx^3} \right)^4$. Легко видеть, что векторы

$$e_4 = \frac{x^{11}}{11!} \quad \text{и} \quad e_8 = \frac{x^{10}}{10!}$$

удовлетворяют этому требованию, поскольку все три построенных корневых вектора высоты 4 суть многочлены различных степеней, больших, чем 8. Остальные векторы жорданова базиса получаются автоматически: корневые векторы высоты 3 имеют вид

$$e_3 = \frac{d^3}{dx^3} e_4 = \frac{x^8}{8!}, \quad e_7 = \frac{d^3}{dx^3} e_8 = \frac{x^7}{7!}, \quad e_{11} = \frac{d^3}{dx^3} e_{12} = \frac{x^6}{6!}.$$

Аналогично получаем корневые векторы высоты 2

$$e_2 = \frac{d^3}{dx^3} e_3 = \frac{x^5}{5!}, \quad e_6 = \frac{d^3}{dx^3} e_7 = \frac{x^4}{4!}, \quad e_{10} = \frac{d^3}{dx^3} e_{11} = \frac{x^3}{3!}$$

и корневые векторы высоты 1 (то есть собственные векторы)

$$e_1 = \frac{d^3}{dx^3} e_2 = \frac{x^2}{2!}, \quad e_5 = \frac{d^3}{dx^3} e_6 = \frac{x}{1!}, \quad e_9 = \frac{d^3}{dx^3} e_{10} = 1. \quad \square$$

Задача 42. Найти жорданову форму, жорданов базис и минимальный многочлен для линейного оператора

$$A_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Данная матрица имеет блочную структуру, причем её левый нижний (3×3) -блок состоит лишь из нулей. Это означает, что её характеристический многочлен является произведением характеристических многочленов диагональных блоков и поэтому может быть легко вычислен:

$$\begin{aligned} \det(A_f - \lambda E) &= \\ &= \det \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2-\lambda & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -\lambda \end{array} \right) = \\ &= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^6. \end{aligned}$$

Это означает, что характеристический многочлен оператора имеет единственный корень $\lambda = 1$ кратности 6. Запишем матрицу $A_f - E$

и приведём её к ступенчатому виду:

$$A_f - E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\text{rk}(A_f - E) = 3$ и собственное подпространство, соответствующее единственному собственному значению $\lambda = 1$, задаётся линейной системой

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_4 + x_6 = 0, \\ x_5 + x_6 = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Поскольку собственное подпространство, соответствующее $\lambda = 1$, трёхмерно, жорданова форма матрицы A_f состоит из трёх клеток. Для нахождения размеров этих клеток найдём ранг матрицы $(A_f - E)^2$:

$$(A_f - E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что $\text{rk}(A_f - E)^2 = 1$ и подпространство корневых векторов высоты не более 2 задаётся единственным уравнением $x_4 + x_6 = 0$. Поскольку ранг матрицы $(A_f - E)^2$ на два меньше, чем ранг матрицы $A_f - E$, жорданова форма содержит две клетки размера больше 1, а так как матрица имеет размер 6×6 , единственная возможность — это три клетки размеров 1, 2 и 3. Таким образом, жорданова форма имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} J_3(1) & & \\ & J_2(1) & \\ & & J_1(1) \end{pmatrix}.$$

Построим теперь жорданов базис e_1, e_2, \dots, e_6 , соответствующий найденной жордановой форме. Поскольку $(A_f - E)^3 = 0$, все векторы являются корневыми высоты не более 3. Это означает, что в качестве e_3 можно взять произвольный вектор высоты 3, то есть достаточно выбрать любой вектор, не удовлетворяющий условию $x_4 + x_6 = 0$. Для простоты дальнейших вычислений положим $e_3 = (0, 0, 0, 0, 0, 1)$. Тогда

$$e_2 = (f - \text{id})e_3 = (0, 0, 1, 1, 1, -1),$$

$$e_1 = (f - \text{id})e_2 = (2, 2, -2, 0, 0, 0).$$

Теперь в качестве e_5 можно выбрать любой корневой вектор высоты 2, который линейно независим с вектором e_2 относительно собственного подпространства, то есть достаточно подобрать такое решение e_5 уравнения $x_4 + x_6 = 0$, которое линейно независимо с e_2 , и такое, что никакая нетривиальная линейная комбинация векторов e_2 и e_5 не является собственным вектором. Положим $e_5 = (0, 0, 0, -1, 0, 1)$; поскольку вектор e_5 не является собственным, достаточно проверить, что вектор $e_2 + \alpha e_5$ не удовлетворяет системе (2.4) ни при каком $\alpha \neq 0$. Действительно, подставляя координаты этого вектора в последнее уравнение системы (2.4), немедленно получаем, что $\alpha = 0$. Тогда вектор $e_4 = (f - \text{id})e_5 = (-1, 0, 1, 0, 0, 0)$ линейно независим с уже построенным вектором e_1 той же высоты 1. Таким образом, вся система e_1, \dots, e_5 линейно независима. Последний базисный вектор должен быть собственным (то есть должен удовлетворять системе (2.4)) и должен быть линейно независим с векторами e_1 и e_4 . Легко видеть, что вектор $e_6 = (1, 0, 0, -1, -1, 1)$ удовлетворяет этим требованиям. Таким образом, векторы e_1, \dots, e_6 образуют жорданов базис.

Поскольку характеристический многочлен оператора f имеет единственный корень $\lambda = 1$, а максимальная жорданова клетка имеет размер 3, минимальный многочлен $m_f(\lambda)$ имеет вид $m_f(\lambda) = (\lambda - 1)^3$. \square

Задача 43. Найти жорданову форму, жорданов базис и минимальный многочлен для линейного оператора

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 & 2 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & -2 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -1 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -3 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Поскольку данная матрица верхнетреугольна, её характеристический многочлен $\chi_f(\lambda)$ имеет два четырёхкратных корня: $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$. Нетрудно проверить, что

$$A_f^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & -1 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 7 & 1 & 34 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -6 & -4 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -4 & -4 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы A_f равен 6, а ранг матрицы A_f^2 равен 4; это означает, что жорданова форма оператора f содержит две двумерные клетки, соответствующие собственному значению $\lambda = 0$. Легко заметить, что матрица $A_f - E$ имеет ранг 7; это означает, что собственному значению $\lambda = 1$ соответствует только одна жорданова клетка. Таким образом, искомая жорданова форма имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} J_2(0) & & \\ & J_2(0) & \\ & & J_4(1) \end{pmatrix},$$

где $J_n(\lambda)$ обозначает жорданову клетку размера $n \times n$ с собственным числом λ , а минимальный многочлен оператора f имеет шестую степень:

$$m_f(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 1)^4.$$

Построим теперь соответствующий жорданов базис. В качестве векторов e_2 и e_4 (то есть корневых векторов высоты 2) можно взять, например, второй и четвёртый векторы стандартного базиса в \mathbb{R}^8 соответственно. Действительно, в этом случае векторы

$$e_1 = f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = f(e_4) = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

линейно независимы и образуют базис в корневом пространстве, соответствующем собственному значению $\lambda = 0$.

Для построения базиса во втором корневом пространстве необходимо найти какой-нибудь корневой вектор высоты 4, то есть вектор, аннулирующий матрицу $(A_f - E)^4$, но не аннулирующий матрицу $(A_f - E)^3$. Поскольку

$$(A_f - E)^3 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 & -6 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -6 & -3 & -11 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$(A_f - E)^4 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 & 8 & 1 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & 5 & 15 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 & -6 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

можно положить $e_8 = (1, 5, -2, 0, 0, 0, 0, 1)$; тогда остальные векторы жорданова базиса находятся автоматически:

$$e_7 = (f - \text{id})(e_8) = (8, 11, -12, -9, 2, 3, 1, 0),$$

$$e_6 = (f - \text{id})(e_7) = (6, 7, -6, -4, 2, 1, 0, 0),$$

$$e_5 = (f - \text{id})(e_6) = (3, 3, -2, -1, 1, 0, 0, 0). \quad \square$$

2.5. Функции от матриц

Задача 44. Вычислить A^{50} , где $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. Поскольку непосредственное возведение матрицы в большую степень не представляется разумным, приведём данную матрицу к жордановой форме. Нетрудно проверить, что матрица A имеет единственное собственное значение $\lambda = 2$; поскольку $\text{rk}(A - 2E) = 1$, жорданова форма J матрицы A состоит из единственной жордановой клетки ранга 2. В качестве корневого вектора возьмём вектор $e_2 = (1, 0)$ (можно взять любой вектор, не являющийся собственным); тогда собственный вектор

$$e_1 = (A - 2E)e_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

дополняет вектор e_1 до жорданова базиса. Матрица перехода к жорданову базису имеет следующий вид:

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Имеет место матричное равенство $J = C^{-1}AC$, откуда $A = CJC^{-1}$; поэтому

$$A^{50} = (CJC^{-1})^{50} = CJC^{-1} \cdot CJC^{-1} \cdot \dots \cdot CJC^{-1} = CJ^{50}C^{-1}.$$

Легко заметить, что

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{50} = \begin{pmatrix} 2^{50} & 50 \cdot 2^{49} \\ 0 & 2^{50} \end{pmatrix};$$

поэтому

$$A^{50} = CJ^{50}C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{50} & 50 \cdot 2^{49} \\ 0 & 2^{50} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2^{50} \begin{pmatrix} -24 & 25 \\ -25 & 26 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Задача 45. Вычислить $\cos A$, где $A = \begin{pmatrix} \pi + 3 & -8 & 3 \\ 1 & \pi - 3 & 1 \\ 0 & -1 & \pi \end{pmatrix}$.

Решение. Приведём сперва данную матрицу к жорданову виду. Нетрудно проверить, что её характеристический многочлен имеет вид $\chi_A(\lambda) = -(\lambda - \pi)^3$. Это означает, что $\lambda = \pi$ является единственным собственным значением матрицы A . Поскольку матрица

$$(A - \pi \operatorname{id})^2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

имеет ранг 1, жорданова форма исходной матрицы состоит из единственной трёхмерной клетки:

$$J = \begin{pmatrix} \pi & 1 & 0 \\ 0 & \pi & 1 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}.$$

Для нахождения соответствующего жорданова базиса найдём корневой вектор высоты 3: поскольку $\lambda = \pi$ является единственным собственным значением, в качестве корневого вектора высоты 3 можно взять любой вектор, не аннулирующий матрицу $(A - \pi \operatorname{id})^2$. Положим $e_3 = (1, 0, 0)$; тогда

$$e_2 = (A - \pi \operatorname{id})e_3 = (3, 1, 0),$$

$$e_1 = (A - \pi \operatorname{id})e_2 = (1, 0, -1).$$

Таким образом, матрица перехода к жорданову базису и обратная ей имеют вид

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

соответственно.

Требуется найти косинус исходной матрицы; поскольку

$$\cos' x = -\sin x \quad \text{и} \quad \cos'' x = -\cos x,$$

согласно общей формуле

$$\cos J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\cos A = C \cdot \cos J \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}. \quad \square$$

Задача 46. Вычислить $\exp A$, где $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. Найдём экспоненту от данной матрицы методом неопределённых коэффициентов. Для любой матрицы A второго порядка $\exp A = \alpha E + \beta A$ для некоторых скаляров α, β , причем многочлен $\alpha + \beta t$ должен совпадать с функцией e^t на спектре матрицы A . Легко заметить, что собственными значениями матрицы A являются $\lambda = \pm 2i$. Таким образом, неопределённые коэффициенты α и β должны удовлетворять следующей системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} \alpha + 2i\beta = e^{2i}, \\ \alpha - 2i\beta = e^{-2i}. \end{cases}$$

Решая эту систему и пользуясь формулой Эйлера

$$e^{2i} = \cos 2 + i \sin 2,$$

получаем, что $\alpha = \cos 2$, $\beta = \frac{1}{2} \sin 2$. Таким образом,

$$\exp A = \begin{pmatrix} \cos 2 & \sin 2 \\ -\sin 2 & \cos 2 \end{pmatrix}. \quad \square$$

2.6. Инвариантные подпространства

Задача 47. Найти все нетривиальные инвариантные подпространства для линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей

$$A_f = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 4 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Одномерные инвариантные подпространства суть линейные оболочки собственных векторов линейного оператора. Характеристический многочлен данного оператора f имеет вид

$$\chi_f(\lambda) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 15\lambda - 9 = -(\lambda - 1)(\lambda - 3)^2.$$

Нетрудно проверить, что собственное пространство, соответствующее $\lambda = 1$, одномерно и является линейной оболочкой вектора $e_1 = (2, 2, -1)$,

а собственное подпространство, соответствующее $\lambda = 3$, является линейной оболочкой векторов $e_2 = (1, 1, 0)$ и $e_3 = (-1, 0, 1)$. Таким образом, одномерные инвариантные подпространства оператора f — это прямая ℓ с направляющим вектором e_1 , исходящая из начала координат, и все прямые, проходящие через начало координат и лежащие в плоскости $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ (то есть прямые, содержащиеся в собственном подпространстве).

Опишем теперь двумерные инвариантные подпространства оператора f . Пусть W — некоторое двумерное инвариантное подпространство. Если оно не является собственным подпространством, то в нем можно выбрать базис $\{u, v\}$ вида

$$u = e_1 + ae_2 + be_3, \quad v = ce_2 + de_3,$$

где a, b, c, d — некоторые скаляры. Подпространство W является инвариантным для f тогда и только тогда, когда существуют такие коэффициенты x_1, x_2, y_1, y_2 , что выполнены равенства

$$f(u) = x_1u + x_2v, \quad f(v) = y_1u + y_2v.$$

Второе из этих равенств тривиально, поскольку вектор v по построению принадлежит собственному подпространству с собственным значением $\lambda = 3$ и соответственно для него $y_1 = 0, y_2 = 3$. Далее, переписывая первое векторное равенство в координатах, получаем линейную систему:

$$\begin{cases} 1 = x_1, \\ 3a = ax_1 + cx_2, \\ 3b = bx_1 + dx_2. \end{cases}$$

Для нахождения необходимых и достаточных условий существования решений этой системы воспользуемся леммой Кронекера — Капелли. Расширенная матрица этой системы имеет вид

$$B = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ a & c & 3a \\ b & d & 3b \end{array} \right).$$

Легко заметить, что поскольку первые 2 столбца матрицы B линейно независимы, условием существования решения является вырожденность этой матрицы. Поскольку $\det B = 2(ad - bc)$, необходимое и достаточное условие существования решения — пропорциональность строк (a, b) и (c, d) . А это означает, что вместо базиса $\{u, v\}$ в пространстве W можно выбрать базис $\{e_1, v\}$, то есть в качестве W можно взять любую плоскость, проходящую через прямую ℓ . Таким образом,

все двумерные инвариантные подпространства для оператора f описываются следующим образом: либо это собственное подпространство $\langle e_2, e_3 \rangle$, либо произвольная двумерная плоскость, содержащая прямую ℓ . \square

Задача 48. Найти все инвариантные подпространства оператора дифференцирования $\frac{d}{dx}$ в пространстве $\mathbb{R}_n[x]$ многочленов степени не выше n с вещественными коэффициентами.

Решение. Рассмотрим произвольный многочлен $p \in \mathbb{R}_n[x]$ степени $k \leq n$ и предположим, что он содержится в некотором инвариантном подпространстве U . Тогда

$$\frac{d}{dx}(p), \frac{d^2}{dx^2}(p), \dots, \frac{d^k}{dx^k}(p) \in U,$$

причем степень многочлена $\frac{d^m}{dx^m}(p)$ равна $k - m$. Это означает, что

$$\left\langle p, \frac{d}{dx}(p), \frac{d^2}{dx^2}(p), \dots, \frac{d^k}{dx^k}(p) \right\rangle = \langle 1, x, x^2, \dots, x^k \rangle.$$

Таким образом, если в качестве многочлена p взять произвольный многочлен максимальной степени из U , мы получим, что $U = \langle 1, x, x^2, \dots, x^k \rangle$, то есть все инвариантные подпространства для $\frac{d}{dx}$ исчерпываются подпространствами такого вида. \square

Пример задачи 47 показывает, что нахождение всех инвариантных подпространств линейного оператора, вообще говоря, требует рассмотрения подпространства общего вида. Однако изучение сопряжённого оператора даёт простой способ нахождения $(n - 1)$ -мерных инвариантных подпространств, где n — размерность пространства. Пусть $f: V \rightarrow V$ — некоторый линейный оператор; *сопряжённым оператором* называется линейный оператор $f^*: V^* \rightarrow V^*$, действующий на сопряжённом пространстве и определяемый равенством

$$f^*(l)(v) = l(f(v))$$

для произвольных $l \in V^*$, $v \in V$. Нам потребуется следующая

Лемма 1. Пусть линейный оператор $f: V \rightarrow V$ имеет матрицу A_f в некотором базисе $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ пространства V . Тогда сопряжённый оператор f^* в двойственном базисе $\{e^1, e^2, \dots, e^n\}$ имеет матрицу A_f^T .

Доказательство. Пусть $A_f = (a_{ij})$, а $B = (b_{ij})$ — матрица оператора f^* в двойственном базисе. Тогда для любых $i, j = 1, \dots, n$ имеем:

$$f^*(e^j)(e_i) = \sum_{k=1}^n b_{kj} e^k(e_i) = \sum_{k=1}^n b_{kj} \delta_i^k = b_{ij};$$

с другой стороны, по определению сопряжённого оператора

$$f^*(e^j)(e_i) = e^j(f(e_i)) = e^j\left(\sum_{k=1}^n a_{ki}e_k\right) = \sum_{k=1}^n a_{ki}\delta_k^j = a_{ji}.$$

Значит, $B = A_f^T$. □

Для нахождения $(n - 1)$ -мерных инвариантных подпространств мы будем использовать следующую теорему.

Теорема 2. Пусть V — линейное пространство размерности n , а $f: V \rightarrow V$ — некоторый линейный оператор. Тогда все $(n - 1)$ -мерные инвариантные подпространства для f имеют вид $\text{Ker } l$ для некоторого собственного вектора l оператора f^* . Любое подпространство вида $\text{Ker } l$, где l — некоторый собственный вектор оператора f^* , инвариантно относительно f .

Доказательство. Пусть U — произвольное $(n - 1)$ -мерное инвариантное подпространство для оператора f . Тогда оно задаётся линейным уравнением $l = 0$ для некоторого ненулевого линейного функционала $l \in V^*$. Возьмём произвольный вектор $v \in U$, тогда в силу инвариантности U имеем: $f(v) \in U$. Это означает, что

$$f^*(l)(v) = l(f(v)) = 0,$$

поскольку U задаётся уравнением $l = 0$. Таким образом, в силу произвольности вектора v ядра линейных функционалов l и $f^*(l)$ совпадают, что означает, что эти функционалы пропорциональны, то есть существует такой скаляр λ , что $f^*(l) = \lambda l$. Значит, l — собственный вектор оператора f^* .

Пусть теперь l — произвольный собственный вектор оператора f^* с собственным значением λ . Рассмотрим $(n - 1)$ -мерное подпространство U , задаваемое уравнением $l = 0$. Тогда для любого $v \in U$ имеем:

$$l(f(v)) = f^*(l)(v) = \lambda l(v) = 0,$$

то есть $f(v) \in U$. Таким образом, подпространство U инвариантно относительно f . □

Задача 49. Найти все $(n - 1)$ -мерные инвариантные подпространства для вещественного линейного оператора, заданного в некотором базисе $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ матрицей

$$A_f = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Найдём собственные векторы матрицы A_f^T сопряжённого оператора в двойственном базисе, соответствующие действительным собственным значениям. Характеристический многочлен $\chi_f(\lambda)$ оператора f имеет вид

$$\chi_f(\lambda) = \lambda^4 + 4\lambda^3 - 2\lambda^2 - 12\lambda - 16 = (\lambda - 2)(\lambda + 4)(\lambda^2 + 2\lambda + 2),$$

то есть у оператора f^* есть два действительных собственных значения $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = -4$. Поскольку векторы $(1, 1, 1, 1)$ и $(1, -1, 1, -1)$ являются собственными, соответствующими этим собственным значениям, линейные функционалы $l_1 = e^1 + e^2 + e^3 + e^4$ и $l_2 = e^1 - e^2 + e^3 - e^4$ являются собственными векторами для сопряжённого оператора f^* . Таким образом, линейный оператор f имеет два трёхмерных инвариантных подпространства, задаваемых уравнениями

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \quad \text{и} \quad x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0.$$

□

ГЛАВА 3

Билинейные и квадратичные функции

3.1. Элементарные свойства билинейных и квадратичных функций

Задача 50. Найти базисы левого и правого ядер билинейной функции

$$\varphi(x, y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_1y_3 - 2x_2y_1 + 3x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - 5x_3y_2 - 3x_3y_3.$$

Решение. Матрица билинейной функции φ имеет вид

$$B_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & -3 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Имеем

$$\varphi(x, y) = X^T B_\varphi Y,$$

где X и Y — столбцы координат векторов x и y соответственно.

Правое ядро R_φ билинейной функции φ состоит из всех векторов y таких, что $\varphi(x, y) = 0$ для всех x . Значит, оно состоит из всех векторов y , столбцы координат которых удовлетворяют уравнению $B_\varphi Y = 0$. Таким образом, для того чтобы найти базис подпространства R_φ , нам нужно решить систему однородных линейных уравнений с матрицей B_φ . Решаем её:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & -7 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Фундаментальная система решений этой системы, а значит, и базис правого ядра R_φ состоят из одного вектора $(4, 5, -7)$.

Левое ядро L_φ билинейной функции φ состоит из всех векторов x таких, что $\varphi(x, y) = 0$ для всех y . Значит, оно состоит из всех векторов x , столбцы координат которых удовлетворяют уравнению $X^T B_\varphi = 0$ или, что эквивалентно, уравнению $B_\varphi^T X = 0$. Таким образом,

для того чтобы найти базис подпространства L_φ , нам нужно решить систему однородных линейных уравнений с матрицей B_φ^T . Решаем её:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 7 & -7 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Фундаментальная система решений этой системы, а значит, и базис левого ядра L_φ состоит из одного вектора $(1, 1, 1)$. \square

Задача 51. Найти все значения параметра α , при которых квадратичная функция $Q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2\alpha x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ положительно определена.

Решение. Согласно критерию Сильвестра, квадратичная функция положительно определена тогда и только тогда, когда все угловые миноры её матрицы положительны. Выпишем матрицу квадратичной функции Q и вычислим её угловые миноры:

$$B_Q = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -1 \\ \alpha & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\Delta_1 = 1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 2 \end{vmatrix} = 2 - \alpha^2, \quad \Delta_3 = |B_Q| = -4\alpha - 3\alpha^2.$$

Таким образом, условия $\Delta_2 > 0$ и $\Delta_3 > 0$ записываются в виде системы неравенств

$$\begin{cases} 2 - \alpha^2 > 0, \\ -4\alpha - 3\alpha^2 > 0. \end{cases}$$

Решением первого неравенства является интервал $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, решением второго — интервал $(-\frac{4}{3}, 0)$. Так как второй интервал содержится в первом, он и является решением системы. Таким образом, квадратичная функция Q положительно определена тогда и только тогда, когда $-\frac{4}{3} < \alpha < 0$. \square

3.2. Приведение квадратичной формы к нормальному виду невырожденными преобразованиями

Задача 52 (по мотивам № 1175 из [6]). Найти нормальный вид квадратичной формы $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ и соответствующую замену координат

- над полем вещественных чисел,
- над полем комплексных чисел.

Решение. Применим метод Лагранжа — метод выделения полных квадратов.

Посмотрим сначала на все члены, содержащие x_1 , и дополним их до полного квадрата:

$$x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 = (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 4x_2^2 - x_3^2 - 4x_2x_3.$$

Получаем, что наша исходная квадратичная форма равна

$$(x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 3x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_2x_3.$$

Выпишем теперь все члены, не вошедшие в первую скобку и содержащие x_2 , и дополним их до полного квадрата:

$$-3x_2^2 - 2x_2x_3 = -\left(\sqrt{3}x_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_3\right)^2 + \frac{1}{3}x_3^2.$$

В результате получаем, что исходная квадратичная форма равна

$$(x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - \left(\sqrt{3}x_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_3\right)^2 + \frac{7}{3}x_3^2.$$

Таким образом, линейная невырожденная замена координат

$$\tilde{x}_1 = x_1 + 2x_2 + x_3, \quad \tilde{x}_2 = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}x_3, \quad \tilde{x}_3 = \sqrt{3}x_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_3$$

приводит исходную квадратичную форму к виду

$$\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 - \tilde{x}_3^2.$$

Над полем вещественных чисел это и есть искомый нормальный вид.

Над полем комплексных чисел нужно сделать дополнительную замену

$$\hat{x}_1 = \tilde{x}_1, \quad \hat{x}_2 = \tilde{x}_2, \quad \hat{x}_3 = i\tilde{x}_3.$$

Получаем нормальный вид

$$\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2 + \hat{x}_3^2.$$

□

Замечание. Применяя метод Лагранжа, мы естественным образом получаем выражение *новых* координат через *старые*. Однако часто более удобным является выражение *старых* координат через *новые*. В частности, именно матрица C , выражающая *старые* координаты через *новые*, входит в стандартную формулу $\tilde{B} = C^T B C$ преобразования матрицы квадратичной функции. В нашем случае (над полем вещественных чисел) имеем

$$x_1 = \tilde{x}_1 - \frac{1}{\sqrt{21}}\tilde{x}_2 - \frac{2}{\sqrt{3}}\tilde{x}_3, \quad x_2 = -\frac{1}{\sqrt{21}}\tilde{x}_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{x}_3, \quad x_3 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\tilde{x}_2,$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{21}} & -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{21}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 53 (по мотивам № 1182 из [6]). Найти нормальный вид над полем вещественных чисел и невырожденное линейное преобразование, приводящее к этому виду, для квадратичной формы

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3.$$

Решение. Если мы попробуем использовать то же метод, что и в задаче 52, то наткнёмся на препятствие: члена с x_1^2 нет, и неясно, как можно выделить полный квадрат. Так как у нас есть слагаемое x_1x_2 , сделаем невырожденную линейную замену координат

$$x_1 = \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2, \quad x_2 = \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2, \quad x_3 = \tilde{x}_3$$

и получим квадратичную форму

$$\tilde{x}_1^2 - \tilde{x}_2^2 + 2\tilde{x}_1\tilde{x}_3.$$

Как и в задаче 52, выделим последовательно полные квадраты:

$$\tilde{x}_1^2 - \tilde{x}_2^2 + 2\tilde{x}_1\tilde{x}_3 = (\tilde{x}_1 + \tilde{x}_3)^2 - \tilde{x}_2^2 - \tilde{x}_3^2.$$

Тогда линейная замена координат

$$\hat{x}_1 = \tilde{x}_1 + \tilde{x}_3, \quad \hat{x}_2 = \tilde{x}_2, \quad \hat{x}_3 = \tilde{x}_3 \quad (3.4)$$

переводит исходную квадратичную форму в нормальный вид

$$\hat{x}_1^2 - \hat{x}_2^2 - \hat{x}_3^2.$$

Остаётся выразить конечные координаты через исходные. Подставляя

$$\tilde{x}_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2, \quad \tilde{x}_2 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2, \quad \tilde{x}_3 = x_3$$

в (3.4), получаем замену

$$\hat{x}_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3, \quad \hat{x}_2 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2, \quad \hat{x}_3 = x_3. \quad \square$$

Задача 54 (№ 1257 из [7]). Для квадратичных функций φ и ψ выяснить, существует ли линейное преобразование, переводящее функцию φ в функцию ψ :

$$1) \quad \varphi = 2x_1^2 + 9x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 10x_2x_3, \\ \psi = 5y_1^2 + 6y_2^2 + 12y_1y_2;$$

$$2) \quad \varphi = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 6x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3, \\ \psi = 4y_1^2 + y_2^2 + 9y_3^2 - 12y_1y_2.$$

Решение. Приведём указанные квадратичные функции к нормальному виду. Мы уже обсуждали, как это делать, в задачах 52 и 53. В результате мы получим, что

$$1) \quad \varphi = \tilde{x}_1^2 - \tilde{x}_2^2, \text{ где, например, } \tilde{x}_1 = \sqrt{2}x_1 + 2\sqrt{2}x_2 - \sqrt{2}x_3, \tilde{x}_2 = x_2 - x_3; \\ \psi = \tilde{y}_1^2 - \tilde{y}_2^2, \text{ где, например, } \tilde{y}_1 = \sqrt{6}y_1 + \sqrt{6}y_2, \tilde{y}_2 = y_1;$$

$$2) \quad \varphi = \tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2, \text{ где, например, } \tilde{x}_1 = \sqrt{2}x_1 - \sqrt{2}x_2 - \sqrt{2}x_3, \tilde{x}_2 = x_2 + 2x_3; \\ \psi = \tilde{y}_1^2 + \tilde{y}_2^2 - \tilde{y}_3^2, \text{ где, например, } \tilde{y}_1 = 2y_1 - 3y_2, \tilde{y}_2 = 3y_3, \tilde{y}_3 = \sqrt{8}y_2.$$

Так как нормальный вид квадратичной функции единственен, в случае 2) квадратичные функции φ и ψ не могут быть переведены друг в друга линейным преобразованием, потому что их нормальные виды разные. То же самое можно сказать по-другому: φ и ψ имеют разные индексы инерции, а потому не могут быть переведены друг в друга.

В случае 1) квадратичные функции имеют одинаковый нормальный вид, а это значит, что φ можно перевести линейным преобразованием в ψ . То же самое можно сказать по-другому: φ и ψ имеют одинаковые индексы инерции, а потому могут быть переведены друг в друга.

В самом деле, пусть f обозначает линейное преобразование, переводящее квадратичную функцию φ к нормальному виду, а g обозначает линейное преобразование, переводящее квадратичную функцию ψ к нормальному виду. Так как у φ и ψ нормальный вид одинаков, линейное преобразование $g^{-1} \circ f$ переводит квадратичную функцию φ в ψ . \square

Задача 55. Существует ли линейное преобразование, переводящее квадратичную функцию φ в квадратичную функцию ψ , где

$$\varphi = x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 - x_4^2, \\ \psi = x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_1x_4 + 4x_2x_3 + 4x_2x_4?$$

Решение. Способ I. Квадратичную функцию φ можно перевести линейным преобразованием в квадратичную функцию ψ тогда и только тогда, когда у функций φ и ψ совпадают положительные и отрицательные индексы инерции, то есть количества положительных и отрицательных коэффициентов при квадратах в их нормальных

видах. Найдём нормальные виды квадратичных функций φ и ψ при помощи метода Лагранжа и сравним их индексы инерции.

Вначале находим нормальный вид функции φ :

$$\begin{aligned}\varphi &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 - x_4^2 = \\ &= (x_1 + x_2)^2 + (x_3 - x_2)^2 - 3x_2^2 - x_4^2 = \tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 - \tilde{x}_3^2 - \tilde{x}_4^2,\end{aligned}$$

где сделана замена

$$\tilde{x}_1 = x_1 + x_2, \quad \tilde{x}_2 = x_3 - x_2, \quad \tilde{x}_3 = \sqrt{3} x_2, \quad \tilde{x}_4 = x_4.$$

Значит, и положительный, и отрицательный индексы инерции квадратичной функции φ равны 2.

Так как у ψ коэффициенты при всех квадратах координат нулевые, прежде всего сделаем замену

$$x_1 = x'_1 + x'_2, \quad x_2 = x'_1 - x'_2, \quad x_3 = x'_3, \quad x_4 = x'_4.$$

Далее применяем метод Лагранжа:

$$\begin{aligned}\psi &= x_1'^2 + 6x'_1x'_3 + 10x'_1x'_4 - x_2'^2 - 2x'_2x'_3 + 2x'_2x'_4 = \\ &= x_1'^2 + 2x'_1(3x'_3 + 5x'_4) - x_2'^2 - 2x'_2x'_3 + 2x'_2x'_4 = \\ &= (x_1'^2 + 2x'_1(3x'_3 + 5x'_4) + (3x'_3 + 5x'_4)^2) - \\ &\quad - (3x'_3 + 5x'_4)^2 - x_2'^2 - 2x'_2x'_3 + 2x'_2x'_4 = \\ &= (x'_1 + 3x'_3 + 5x'_4)^2 - x_2'^2 - 2x'_2x'_3 + 2x'_2x'_4 - 9x_3'^2 - 30x'_3x'_4 - 25x_4'^2 = \\ &= x_1''^2 - (x_2''^2 + 2x_2''(x_3'' - x_4'') + (x_3'' - x_4'')^2) + (x_3'' - x_4'')^2 - \\ &\quad - 9x_3''^2 - 30x_3''x_4'' - 25x_4''^2 = x_1''^2 - x_2''^2 - 8x_3''^2 - 32x_3''x_4'' - 24x_4''^2 = \\ &= x_1''^2 - x_2''^2 - (8x_3''^2 + 32x_3''x_4'' + 32x_4''^2) + 8x_4''^2 = y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 + y_4^2,\end{aligned}$$

где сделаны замены

$$\begin{cases} x_1'' = x'_1 + 3x'_3 + 5x'_4, \\ x_2'' = x'_2, \\ x_3'' = x'_3, \\ x_4'' = x'_4, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1''' = x_1'', \\ x_2''' = x_2'' + x_3'' - x_4'', \\ x_3''' = x_3'', \\ x_4''' = x_4'', \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = x_1''', \\ y_2 = x_2''', \\ y_3 = 2\sqrt{2}x_3''' + 4\sqrt{2}x_4''', \\ y_4 = 2\sqrt{2}x_4'''. \end{cases}$$

Таким образом, и положительный, и отрицательный индексы инерции квадратичной функции ψ равны 2, то есть такие же, как у квадратичной функции φ . Следовательно, существует линейное преобразование, переводящее квадратичную функцию φ в квадратичную функцию ψ .

Способ II. Так же, как в предыдущем способе, мы выясним, совпадают ли положительные и отрицательные индексы инерции функций φ и ψ , но сделаем это по-другому, воспользовавшись теоремой Якоби.

Матрицы квадратичных функций φ и ψ равны

$$B_{\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_{\psi} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислим их угловые главные миноры, $\Delta_1, \dots, \Delta_4$ для матрицы B_{φ} и $\Delta'_1, \dots, \Delta'_4$ для матрицы B_{ψ} :

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 1, & \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2, \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3, & \Delta_4 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3, \\ \Delta'_1 &= 0, & \Delta'_2 &= \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}, \\ \Delta'_3 &= \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2, & \Delta'_4 &= \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 16. \end{aligned}$$

Так как ни одна из последовательностей $1, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ и $1, \Delta'_1, \Delta'_2, \Delta'_3, \Delta'_4$ не содержит двух нулей подряд, мы можем применить теорему Якоби, утверждающую, что отрицательный индекс инерции квадратичной функции равен количеству перемен знака в последовательности угловых миноров её матрицы. В нашем случае последовательности угловых миноров $1, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ и $1, \Delta'_1, \Delta'_2, \Delta'_3, \Delta'_4$ имеют вид $1, 1, -2, -3, 3$ и $1, 0, -\frac{1}{4}, 2, 16$. Количество перемен знака в каждой

из них равно 2. Значит, отрицательные индексы инерции квадратичных функций φ и ψ равны 2. Теперь из того, что $\Delta_4 \neq 0$ и $\Delta'_4 \neq 0$, следует, что квадратичные функции φ и ψ невырождены. Значит, для каждой из них сумма положительного и отрицательного индексов инерции равна 4. Следовательно, положительные индексы инерции квадратичных функций φ и ψ также равны 2. Поэтому квадратичная функция φ может быть переведена в квадратичную функцию ψ при помощи некоторого линейного преобразования. \square

3.3. Кососимметрические билинейные и эрмитовы полуторалинейные функции

Задача 56. Привести кососимметрическую билинейную форму

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = & x^1 y^2 - x^2 y^1 + 2x^1 y^3 - 2x^3 y^1 + 2x^1 y^4 - 2x^4 y^1 + \\ & + x^2 y^3 - x^3 y^2 + x^3 y^4 - x^4 y^3 \end{aligned}$$

к каноническому виду аффинной заменой координат. Найти эту замену координат.

Замечание. В этой задаче нам будет удобно пользоваться тензорными обозначениями, то есть писать индексы у координат векторов сверху.

Решение. Пусть V — линейное пространство с базисом e_1, e_2, \dots, e_n . Напомним, что двойственное пространство V^* есть пространство линейных функций на V . Двойственный базис e^1, e^2, \dots, e^n пространства V^* состоит из функций e^i таких, что $e^i(x) = x^i$, где x^1, \dots, x^n — координаты вектора x в базисе e_1, \dots, e_n . Для любых двух линейных функций $\xi, \eta \in V^*$ определено их *внешнее произведение* $\xi \wedge \eta$, являющееся кососимметрической билинейной функцией на V :

$$(\xi \wedge \eta)(x, y) = \xi(x)\eta(y) - \eta(x)\xi(y).$$

Очевидно, что $\eta \wedge \xi = -\xi \wedge \eta$ и $\xi \wedge \xi = 0$. Базис в пространстве всех кососимметрических билинейных функций на V состоит из функций $e^i \wedge e^j$, $i < j$. При этом

$$(e^i \wedge e^j)(x, y) = x^i y^j - x^j y^i.$$

В нашем случае

$$\varphi = e^1 \wedge e^2 + 2e^1 \wedge e^3 + 2e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3 + e^3 \wedge e^4.$$

Приведение этой функции к каноническому виду осуществляется следующим образом. На первом шаге мы сгруппируем все слагаемые,

содержащие e^1 :

$$\varphi = e^1 \wedge (e^2 + 2e^3 + 2e^4) + e^2 \wedge e^3 + e^3 \wedge e^4.$$

Сделаем замену базиса

$$\begin{cases} \tilde{e}^1 = e^1, \\ \tilde{e}^2 = e^2 + 2e^3 + 2e^4, \\ \tilde{e}^3 = e^3, \\ \tilde{e}^4 = e^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^1 = \tilde{e}^1, \\ e^2 = \tilde{e}^2 - 2\tilde{e}^3 - 2\tilde{e}^4, \\ e^3 = \tilde{e}^3, \\ e^4 = \tilde{e}^4. \end{cases}$$

Отметим, что так как $e^i(x) = x^i$, замена базиса в пространстве V^* есть замена координат в пространстве V . Переписывая φ в новой системе координат, в силу кососимметричности операции \wedge получаем

$$\varphi = \tilde{e}^1 \wedge \tilde{e}^2 + (\tilde{e}^2 - 2\tilde{e}^3 - 2\tilde{e}^4) \wedge \tilde{e}^3 + \tilde{e}^3 \wedge \tilde{e}^4 = \tilde{e}^1 \wedge \tilde{e}^2 + \tilde{e}^2 \wedge \tilde{e}^3 + 3\tilde{e}^3 \wedge \tilde{e}^4.$$

Теперь сгруппируем вместе все слагаемые, содержащие \tilde{e}^2 :

$$\varphi = (\tilde{e}^1 - \tilde{e}^3) \wedge \tilde{e}^2 + 3\tilde{e}^3 \wedge \tilde{e}^4$$

и сделаем замену базиса

$$\begin{cases} \hat{e}^1 = \tilde{e}^1 - \tilde{e}^3, \\ \hat{e}^2 = \tilde{e}^2, \\ \hat{e}^3 = \tilde{e}^3, \\ \hat{e}^4 = \tilde{e}^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{e}^1 = \hat{e}^1 + \hat{e}^3, \\ \tilde{e}^2 = \hat{e}^2, \\ \tilde{e}^3 = \hat{e}^3, \\ \tilde{e}^4 = \hat{e}^4. \end{cases}$$

Получим

$$\varphi = \hat{e}^1 \wedge \hat{e}^2 + 3\hat{e}^3 \wedge \hat{e}^4.$$

Таким образом, мы добились того, что выражение для φ содержит слагаемое $\hat{e}^1 \wedge \hat{e}^2$, а остальные слагаемые не содержат ни \hat{e}^1 , ни \hat{e}^2 . В общем случае далее применяется тот же метод к оставшейся части выражения для φ . В нашем случае для получения канонического вида достаточно сделать простую замену

$$\hat{e}^1 = \check{e}^1, \quad \hat{e}^2 = \check{e}^2, \quad \hat{e}^3 = \check{e}^3, \quad \hat{e}^4 = \frac{1}{3}\check{e}^4.$$

Получим

$$\varphi = \check{e}^1 \wedge \check{e}^2 + \check{e}^3 \wedge \check{e}^4,$$

откуда

$$\varphi(x, y) = \check{x}^1 \check{y}^2 - \check{x}^2 \check{y}^1 + \check{x}^3 \check{y}^4 - \check{x}^4 \check{y}^3.$$

Собирая вместе все сделанные замены базисов, получим

$$\begin{cases} e^1 = \check{e}^1 + \check{e}^3, \\ e^2 = \check{e}^2 - 2\check{e}^3 - \frac{2}{3}\check{e}^4, \\ e^3 = \check{e}^3, \\ e^4 = \frac{1}{3}\check{e}^4. \end{cases}$$

Вспомним теперь, что линейные функции e^i и \check{e}^i сопоставляют каждому вектору x его координаты x^i и \check{x}^i соответственно. Следовательно, искомая замена координат имеет вид

$$\begin{cases} x^1 = \check{x}^1 + \check{x}^3, \\ x^2 = \check{x}^2 - 2\check{x}^3 - \frac{2}{3}\check{x}^4, \\ x^3 = \check{x}^3, \\ x^4 = \frac{1}{3}\check{x}^4. \end{cases}$$

□

Задача 57. Привести к нормальному виду эрмитову полуторалинейную функцию с нахождением соответствующей замены координат:

$$\varphi(x, y) = \bar{x}_1 y_1 + i\bar{x}_1 y_2 - i\bar{x}_2 y_1 + 2\bar{x}_1 y_3 + 2\bar{x}_3 y_1 + 2\bar{x}_2 y_2 - \bar{x}_3 y_3.$$

Решение. Метод приведения к нормальному виду эрмитовой полуторалинейной функции очень похож на метод Лагранжа. Мы выделяем все слагаемые, содержащие x_1 и y_1 , и дополняем их до произведения вида $\overline{l(x)} l(y)$, где l — линейная функция:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \bar{x}_1 y_1 + \bar{x}_1 (iy_2 + 2y_3) + \overline{(ix_2 + 2x_3)} y_1 + 2\bar{x}_2 y_2 - \bar{x}_3 y_3 = \\ &= \overline{(x_1 + ix_2 + 2x_3)} (y_1 + iy_2 + 2y_3) - \overline{(ix_2 + 2x_3)} (iy_2 + 2y_3) + 2\bar{x}_2 y_2 - \bar{x}_3 y_3 = \\ &= \overline{(x_1 + ix_2 + 2x_3)} (y_1 + iy_2 + 2y_3) + \bar{x}_2 y_2 + 2i\bar{x}_2 y_3 - 2i\bar{x}_3 y_2 - 5\bar{x}_3 y_3. \end{aligned}$$

Делаем замену

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 + ix_2 + 2x_3, \\ x'_2 = x_2, \\ x'_3 = x_3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = x'_1 - ix'_2 - 2x'_3, \\ x_2 = x'_2, \\ x_3 = x'_3. \end{cases}$$

Обратите внимание, что, конечно же, координаты вектора y преобразуются по тем же формулам, что и координаты вектора x . Получаем

$$\varphi(x, y) = \bar{x}'_1 y'_1 + \bar{x}'_2 y'_2 + 2i\bar{x}'_2 y'_3 - 2i\bar{x}'_3 y'_2 - 5\bar{x}'_3 y'_3.$$

Таким образом, мы выделили слагаемое $\bar{x}'_1 y'_1$ так, что остальные слагаемые не содержат ни x'_1 , ни y'_1 . Повторяя ту же процедуру для оставшихся слагаемых, получаем

$$\varphi(x, y) = \bar{x}'_1 y'_1 + \overline{(x'_2 + 2ix'_3)}(y'_2 + 2iy'_3) - \overline{(3x'_3)}(3y'_3).$$

После замены

$$\begin{cases} x''_1 = x'_1, \\ x''_2 = x'_2 + 2ix'_3, \\ x''_3 = 3x'_3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x'_1 = x''_1, \\ x'_2 = x''_2 - \frac{2i}{3} x''_3, \\ x'_3 = \frac{1}{3} x''_3 \end{cases}$$

получаем нормальный вид эрмитовой полуторалинейной функции φ :

$$\varphi(x, y) = \bar{x}''_1 y''_1 + \bar{x}''_2 y''_2 - \bar{x}''_3 y''_3.$$

Чтобы получить замену координат, приводящую функцию φ к этому виду, выразим координаты x_1, x_2, x_3 через координаты x''_1, x''_2, x''_3 :

$$\begin{cases} x_1 = x''_1 - ix''_2 - \frac{4}{3} x''_3, \\ x_2 = x''_2 - \frac{2i}{3} x''_3, \\ x_3 = \frac{1}{3} x''_3. \end{cases}$$

□

ГЛАВА 4

Евклидовы и эрмитовы пространства

Мы используем следующее соглашение: эрмитово скалярное произведение антилинейно по первому аргументу и линейно по второму.

4.1. Элементарные свойства скалярного произведения

Задача 58. Показать, что функция φ от векторов x и y действительной плоскости, заданная формулой

$$\varphi(x, y) = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

определяет евклидово скалярное произведение на плоскости. Найти длины векторов $(1, 0)$ и $(0, 1)$ и угол между ними по отношению к этому скалярному произведению.

Решение. Очевидно, что функция φ , определённая по указанной формуле, является билинейной и симметрической. Значит, нам достаточно доказать, что $\varphi(x, x) > 0$ для любого ненулевого вектора x . Ясно, что

$$\varphi(x, x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 = (x_1 + 2x_2)^2 + x_2^2 \geq 0;$$

при этом равенство $\varphi(x, x) = 0$ может выполняться, только если одновременно $x_1 + 2x_2 = 0$ и $x_2 = 0$, то есть только при $x = 0$. Следовательно, φ — евклидово скалярное произведение.

Вычислим теперь длины векторов $x = (1, 0)$, $y = (0, 1)$ и угол α между ними относительно этого скалярного произведения. Имеем

$$\varphi(x, x) = (1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1,$$

$$\varphi(x, y) = (1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2,$$

$$\varphi(y, y) = (0 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 5.$$

Значит,

$$|x| = \sqrt{\varphi(x, x)} = 1, \quad |y| = \sqrt{\varphi(y, y)} = \sqrt{5}, \quad \cos \alpha = \frac{\varphi(x, y)}{|x| \cdot |y|} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Таким образом, $\alpha = \arccos \frac{2}{\sqrt{5}}$. □

Задача 59. Показать, что функция $(A, B) = \operatorname{tr}(A^T B)$ является евклидовым скалярным произведением в пространстве $\operatorname{Mat}_2(\mathbb{R})$ вещественных квадратных матриц порядка 2. Вычислить длины матриц $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и угол α между ними.

Решение. Очевидно, что функция (A, B) является билинейной. Её симметричность следует из того, что след матрицы не изменяется при её транспонировании:

$$(A, B) = \operatorname{tr}(A^T B) = \operatorname{tr}(A^T B)^T = \operatorname{tr}(B^T A) = (B, A).$$

Нам нужно проверить, что $(A, A) > 0$ для любой ненулевой матрицы A . Пусть $A = (a_{ij})$. Тогда

$$A^T A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{21}^2 & a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} & a_{12}^2 + a_{22}^2 \end{pmatrix}.$$

Значит, $\operatorname{tr}(A^T A) = a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \geq 0$, причём равенство $\operatorname{tr}(A^T A) = 0$ достигается только при $A = 0$. Следовательно, $(A, B) = \operatorname{tr}(A^T B)$ задаёт евклидово скалярное произведение.

Вычислим скалярные произведения (A_1, A_1) , (A_1, A_2) и (A_2, A_2) :

$$(A_1, A_1) = \operatorname{tr} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2,$$

$$(A_1, A_2) = \operatorname{tr} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 3,$$

$$(A_2, A_2) = \operatorname{tr} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = 6.$$

Таким образом,

$$\|A_1\| = \sqrt{(A_1, A_1)} = \sqrt{2}, \quad \|A_2\| = \sqrt{(A_2, A_2)} = \sqrt{6},$$

$$\cos \alpha = \frac{(A_1, A_2)}{\|A_1\| \cdot \|A_2\|} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Из этого следует, что $\alpha = \frac{\pi}{6}$. □

Замечание. В этом решении длина матрицы A обозначается через $\|A\|$, а не через $|A|$, так как обозначение $|A|$ зарезервировано для определителя матрицы A .

4.2. Ортогональные системы векторов

Прежде чем переходить к решению конкретных задач, напомним, как выглядит процесс ортогонализации Грама — Шмидта. Пусть a_1, \dots, a_l — система векторов евклидова или эрмитова пространства V и L — линейная оболочка этой системы векторов.

Предположим вначале, что система векторов a_1, \dots, a_l линейно независима. Будем последовательно строить ортогональные базисы подпространств $L_k = \langle a_1, \dots, a_k \rangle$, $k = 1, \dots, l$. При $k = 1$ возьмём базис подпространства L_1 , состоящий из одного вектора $b_1 = a_1$.

Пусть мы уже нашли ортогональный базис b_1, \dots, b_{k-1} подпространства L_{k-1} . Так как векторы a_1, \dots, a_k линейно независимы, мы получаем, что $\dim L_k = k$, $\dim L_{k-1} = k - 1$, причём вектор a_k лежит в подпространстве L_k и не лежит в подпространстве L_{k-1} . Поэтому в качестве вектора b_k , дополняющего ортогональный базис b_1, \dots, b_{k-1} подпространства L_{k-1} до ортогонального базиса подпространства L_k , можно взять ортогональную составляющую вектора a_k по отношению к подпространству L_{k-1} . Так как векторы b_1, \dots, b_{k-1} образуют базис подпространства L_{k-1} , ортогональная составляющая вектора a_k по отношению к этому подпространству имеет вид

$$b_k = a_k + \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_{k-1} b_{k-1},$$

где коэффициенты λ_i могут быть найдены из условий $(b_i, b_k) = 0$, $i = 1, \dots, k - 1$. Так как система векторов b_1, \dots, b_{k-1} ортогональна, имеем

$$0 = (b_i, b_k) = (b_i, a_k) + \lambda_i (b_i, b_i), \quad \text{откуда} \quad \lambda_i = -\frac{(b_i, a_k)}{(b_i, b_i)}.$$

Таким образом, ортогональный базис подпространства L может быть найден при помощи следующих формул:

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1, \\ b_2 &= a_2 - \frac{(b_1, a_2)}{(b_1, b_1)} b_1, \\ b_3 &= a_3 - \frac{(b_1, a_3)}{(b_1, b_1)} b_1 - \frac{(b_2, a_3)}{(b_2, b_2)} b_2, \\ &\dots\dots\dots \\ b_k &= a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(b_i, a_k)}{(b_i, b_i)} b_i, \quad k = 2, 3, \dots, l. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Такой процесс нахождения ортогонального базиса носит название *процесса ортогонализации Грама — Шмидта*. Слово «процесс» озна-

чает, что векторы b_1, \dots, b_l обязательно должны вычисляться последовательно, так как при вычислении вектора b_k используются векторы b_1, \dots, b_{k-1} .

Так как векторы a_1, \dots, a_l линейно независимы, для каждого k ортогональная составляющая вектора a_k по отношению к подпространству L_{k-1} ненулевая, то есть $b_k \neq 0$. Следовательно, знаменатели всех дробей в правых частях формул (4.1) не равны нулю и процесс Грама — Шмидта корректно определён. Отметим, что из формул (4.1) сразу следует, что матрица перехода от базиса b_1, \dots, b_l к базису a_1, \dots, a_l , а значит, и обратная к ней матрица перехода от базиса a_1, \dots, a_l к базису b_1, \dots, b_l являются верхнетреугольными матрицами с единицами на диагонали.

Выясним теперь, что происходит в случае линейно зависимой системы векторов a_1, \dots, a_l . Пусть k — наименьшее число такое, что система векторов a_1, \dots, a_k линейно зависима. Тогда система векторов a_1, \dots, a_{k-1} линейно независима и вектор a_k линейно выражается через векторы a_1, \dots, a_{k-1} . Значит, первые $k - 1$ шагов процесса Грама — Шмидта дадут нам базис b_1, \dots, b_{k-1} подпространства $L_{k-1} = \langle a_1, \dots, a_{k-1} \rangle$. На k -м шаге процесс Грама — Шмидта даст нам вектор b_k , являющийся ортогональной составляющей вектора a_k по отношению к подпространству L_{k-1} . Однако $a_k \in L_{k-1}$, значит, $b_k = 0$. Таким образом, мы можем сделать следующий вывод.

Процесс Грама — Шмидта приводит к нулевому вектору b_k тогда и только тогда, когда исходная система векторов a_1, \dots, a_l линейно зависима. При этом номер возникшего нулевого вектора равен наименьшему числу k такому, что векторы a_1, \dots, a_k линейно зависимы.

Задача 60. Методом ортогонализации Грама — Шмидта построить ортогональный базис подпространства, порождённого векторами $(1, 2, 0, 1)$, $(-2, -7, 1, -2)$, $(-4, 11, 1, -6)$ и $(1, 1, 4, 0)$.

Решение. Обозначим данные векторы через a_1, a_2, a_3 и a_4 соответственно. Положим $b_1 = a_1 = (1, 2, 0, 1)$.

Вычисляем

$$(b_1, a_2) = -18, \quad (b_1, b_1) = 6,$$

значит,

$$b_2 = a_2 - \frac{(b_1, a_2)}{(b_1, b_1)} b_1 = (-2, -7, 1, -2) + 3 \cdot (1, 2, 0, 1) = (1, -1, 1, 1).$$

Далее вычисляем

$$(b_1, a_3) = 12, \quad (b_2, a_3) = -20, \quad (b_2, b_2) = 4.$$

Отметим, что скалярное произведение (b_1, b_1) вычислять не нужно, так как оно уже было посчитано раньше. Получаем

$$\begin{aligned} b_3 &= a_3 - \frac{(b_1, a_3)}{(b_1, b_1)} b_1 - \frac{(b_2, a_3)}{(b_2, b_2)} b_2 = \\ &= (-4, 11, 1, -6) - 2 \cdot (1, 2, 0, 1) + 5 \cdot (1, -1, 1, 1) = (-1, 2, 6, -3). \end{aligned}$$

Наконец, вычисляем

$$(b_1, a_4) = 3, \quad (b_2, a_4) = 4, \quad (b_3, a_4) = 25, \quad (b_3, b_3) = 50$$

и получаем

$$\begin{aligned} b_4 &= a_4 - \frac{(b_1, a_4)}{(b_1, b_1)} b_1 - \frac{(b_2, a_4)}{(b_2, b_2)} b_2 - \frac{(b_3, a_4)}{(b_3, b_3)} b_3 = \\ &= (1, 1, 4, 0) - \frac{1}{2} \cdot (1, 2, 0, 1) - (1, -1, 1, 1) - \frac{1}{2}(-1, 2, 6, -3) = 0. \end{aligned}$$

Так как вектор b_4 получился нулевым, мы делаем вывод, что векторы a_1, a_2, a_3 и a_4 были линейно зависимы и, следовательно, векторы $b_1 = (1, 2, 0, 1)$, $b_2 = (1, -1, 1, 1)$ и $b_3 = (-1, 2, 6, -3)$ образуют ортогональный базис данного подпространства. \square

Задача 61. Дополнить векторы e_1 и e_2 до ортонормированного базиса пространства \mathbb{R}^3 , где $e_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, -1)$.

Решение. Непосредственное вычисление показывает, что векторы e_1 и e_2 единичные и ортогональны друг другу. В качестве вектора, дополняющего их до ортонормированного базиса пространства \mathbb{R}^3 , можно взять их векторное произведение

$$[e_1, e_2] = \frac{1}{3\sqrt{2}} \left(\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right).$$

Вместо вектора $[e_1, e_2]$ можно было бы взять $-[e_1, e_2]$, других вариантов нет, так как с точностью до знака вектор, дополняющий e_1 и e_2 до ортонормированного базиса пространства \mathbb{R}^3 , определён однозначно. \square

Задача 62. Дополнить векторы

$$e_1 = \frac{1}{4}(1, 2, -1, 3, 1), \quad e_2 = \frac{1}{2}(-1, 0, 1, 1, -1)$$

до ортонормированного базиса пространства \mathbb{R}^5 .

Решение. Непосредственное вычисление показывает, что векторы e_1 и e_2 единичные и ортогональны друг другу. Обозначим через U

подпространство, натянутое на векторы e_1 и e_2 . Набор векторов, дополняющий векторы e_1 и e_2 до ортонормированного базиса пространства \mathbb{R}^5 , — это ортонормированный базис подпространства U^\perp . Найдём сначала какой-нибудь базис подпространства U^\perp . Поскольку подпространство U^\perp состоит из всех векторов, которые ортогональны векторам e_1 и e_2 , оно задаётся двумя линейными уравнениями, коэффициентами которых являются координаты векторов e_1 и e_2 соответственно. Приведём матрицу этой системы из двух уравнений к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

В качестве главных переменных можно выбрать переменные x_1 и x_2 , а в качестве свободных — переменные x_3 , x_4 и x_5 . Получаем фундаментальную систему решений $a_1 = (1, 0, 1, 0, 0)$, $a_2 = (1, -2, 0, 1, 0)$, $a_3 = (-1, 0, 0, 0, 1)$. Эти векторы образуют базис подпространства U^\perp . Ортогонализуем их при помощи метода Грама — Шмидта. Положим $b_1 = a_1$. Второй вектор вычисляется по формуле

$$b_2 = a_2 - \frac{(b_1, a_2)}{(b_1, b_1)} b_1.$$

Имеем $(b_1, b_1) = 2$, $(b_1, a_2) = 1$, откуда

$$b_2 = a_2 - \frac{1}{2} b_1 = \left(\frac{1}{2}, -2, -\frac{1}{2}, 1, 0 \right).$$

Прямым вычислением получаем

$$(b_1, a_3) = -1, \quad (b_2, a_3) = -\frac{1}{2}, \quad (b_2, b_2) = \frac{11}{2},$$

поэтому

$$b_3 = a_3 - \frac{(b_1, a_3)}{(b_1, b_1)} b_1 - \frac{(b_2, a_3)}{(b_2, b_2)} b_2 = a_3 + \frac{1}{2} b_1 + \frac{1}{11} b_2 = \frac{1}{11} (-5, -2, 5, 1, 11).$$

Векторы b_1 , b_2 и b_3 образуют ортогональный, но не ортонормированный базис подпространства U^\perp . Нормируем его. Мы уже вычислили скалярные квадраты (b_1, b_1) и (b_2, b_2) , откуда

$$|b_1| = \sqrt{2}, \quad |b_2| = \sqrt{\frac{11}{2}}.$$

Непосредственное вычисление даёт

$$|b_3| = \frac{4}{\sqrt{11}}.$$

Таким образом, в качестве векторов, дополняющих e_1 и e_2 до ортонормированного базиса пространства \mathbb{R}^5 , можно взять

$$e_3 = \frac{b_1}{|b_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1, 0, 0),$$

$$e_4 = \frac{b_2}{|b_2|} = \frac{1}{\sqrt{22}}(1, -4, -1, 2, 0),$$

$$e_5 = \frac{b_3}{|b_3|} = \frac{1}{4\sqrt{11}}(-5, -2, 5, 1, 11).$$

□

Задача 63. Дополнить векторы

$$e_1 = (i, i, 1, -1), \quad e_2 = (1+i, 1-i, 1+i, 1-i)$$

до ортогонального базиса эрмитова пространства \mathbb{C}^4 .

Решение. Прежде всего проверим, что векторы e_1 и e_2 ортогональны:

$$(e_1, e_2) = \bar{i}(1+i) + \bar{i}(1-i) + (1+i) - (1-i) = 0.$$

Обозначим через U подпространство, натянутое на векторы e_1 и e_2 . Так как скалярное произведение эрмитово, подпространство U^\perp задаётся двумя уравнениями, коэффициенты которых сопряжены координатам векторов e_1 и e_2 соответственно. Таким образом, подпространство U^\perp задаётся системой уравнений

$$\begin{cases} -iz_1 - iz_2 + z_3 - z_4 = 0, \\ (1-i)z_1 + (1+i)z_2 + (1-i)z_3 + (1+i)z_4 = 0. \end{cases}$$

Производя элементарные преобразования со строками матрицы этой системы, приведём её к ступенчатому виду (удобно, чтобы ступенька была справа):

$$\begin{pmatrix} -i & -i & 1 & -1 \\ 1-i & 1+i & 1-i & 1+i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} i & i & -1 & 1 \\ 1-i & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Мы умножили первую строку на -1 , после этого вычли из второй строки первую, умноженную на $1+i$, и разделили получившуюся вторую строку на 2.) Удобно выбрать переменные z_2 и z_4 в качестве главных, а переменные z_1 и z_3 в качестве свободных. Получим фундаментальную систему решений, то есть базис подпространства U^\perp : $a_1 = (1, i-1, 0, 1)$, $a_2 = (0, -1, 1, 1+i)$. Применим к этому базису процесс ортогонализации Грама — Шмидта (относительно эрмитова скалярного произведения):

$$b_1 = a_1, \quad b_2 = a_2 - \frac{(b_1, a_2)}{(b_1, b_1)} b_1 = a_2 - \frac{2+2i}{4} a_1 = \frac{1}{2}(-1-i, 0, 2, 1+i).$$

В качестве векторов, дополняющих e_1 и e_2 до ортогонального базиса пространства \mathbb{C}^4 , можно взять b_1 и b_2 . \square

Замечание. Отметим, что так как скалярное произведение эрмитово, а не евклидово, в формуле для вектора b_2 важно, в каком порядке мы берём скалярное произведение векторов b_1 и a_2 . Так как мы используем соглашение, по которому эрмитово скалярное произведение антилинейно по первому аргументу и линейно по второму, то нужно писать именно (b_1, a_2) , а не (a_2, b_1) ; иначе мы получили бы неверный результат. Однако если бы мы использовали другое соглашение, по которому эрмитово скалярное произведение линейно по первому аргументу и антилинейно по второму (что тоже часто встречается в литературе), то как раз правильно было бы писать (a_2, b_1) , а не (b_1, a_2) .

Задача 64. В пространстве $\mathbb{R}_2[t]$ многочленов степени не выше 2 задано скалярное произведение

$$(p, q) = \int_0^1 p(t)q(t) dt.$$

Дополнить многочлен t^2 до ортогонального базиса пространства $\mathbb{R}_2[t]$.

Решение. Дополним сначала многочлен $p_1(x) = t^2$ до какого-нибудь базиса пространства $\mathbb{R}_2[x]$. Можно взять, например, многочлены $p_2(x) = x$, $p_3(x) = 1$. Теперь ортогонализуем базис (p_1, p_2, p_3) при помощи процесса Грама — Шмидта:

$$\begin{aligned} q_1 &= p_1, \\ q_2 &= p_2 - \frac{(q_1, p_2)}{(q_1, q_1)} q_1, \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$q_3 = p_3 - \frac{(q_1, p_3)}{(q_1, q_1)} q_1 - \frac{(q_2, p_3)}{(q_2, q_2)} q_2. \tag{4.3}$$

Вычислим входящие в эти формулы скалярные произведения:

$$(q_1, p_2) = \int_0^1 t^2 \cdot t dt = \int_0^1 t^3 dt = \frac{1}{4},$$

$$(q_1, q_1) = \int_0^1 t^2 \cdot t^2 dt = \int_0^1 t^4 dt = \frac{1}{5}.$$

Подставляя эти значения в формулу (4.2), находим

$$q_2(t) = p_2(t) - \frac{5}{4}q_1(t) = -\frac{5}{4}t^2 + t.$$

Продолжим вычисление скалярных произведений:

$$(q_1, p_3) = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3},$$

$$(q_2, p_3) = \int_0^1 \left(-\frac{5}{4}t^2 + t\right) dt = \left(-\frac{5}{12}t^3 + \frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{12},$$

$$\begin{aligned}(q_2, q_2) &= \int_0^1 \left(-\frac{5}{4}t^2 + t\right)^2 dt = \int_0^1 \left(\frac{25}{16}t^4 - \frac{5}{2}t^3 + t^2\right) dt = \\ &= \left(\frac{5}{16}t^5 - \frac{5}{8}t^4 + \frac{1}{3}t^3\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{48}.\end{aligned}$$

Подставляя эти значения в формулу (4.3), находим

$$q_3(t) = p_3(t) - \frac{5}{3}q_1(t) - 4q_2(t) = 1 - \frac{5}{3}t^2 - 4\left(-\frac{5}{4}t^2 + t\right) = \frac{10}{3}t^2 - 4t + 1.$$

Итак, многочлен $p_1(t) = q_1(t) = t^2$ дополняется до ортогонального базиса пространства $\mathbb{R}_2[t]$ при помощи многочленов

$$q_2(t) = -\frac{5}{4}t^2 + t \quad \text{и} \quad q_3(t) = \frac{10}{3}t^2 - 4t + 1.$$

Отметим, что процесс Грама — Шмидта даёт только один из возможных способов дополнить многочлен t^2 до ортогонального базиса. Всего таких способов бесконечно много. \square

Задача 65. Представить невырожденную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

в виде произведения ортогональной матрицы U на верхнетреугольную матрицу R с положительными числами на диагонали.

Решение. План решения этой задачи таков. Так как матрица A невырождена, её можно интерпретировать как матрицу перехода от стандартного (ортонормированного) базиса e_1, e_2, e_3 в \mathbb{R}^3 к некоторому другому (неортонормированному) базису, а именно к базису

a_1, a_2, a_3 столбцов матрицы A . Ортогонализовав этот базис при помощи метода Грама — Шмидта и нормировав полученные векторы, мы получим ещё один ортонормированный базис b_1, b_2, b_3 . Матрица перехода от ортонормированного базиса e_1, e_2, e_3 к ортонормированному базису b_1, b_2, b_3 ортогональна, а полученная при помощи метода Грама — Шмидта матрица перехода от базиса b_1, b_2, b_3 к базису a_1, a_2, a_3 верхнетреугольна. Таким образом, мы получаем искомое представление матрицы A в виде произведения этих двух матриц.

Теперь реализуем этот план. Столбцы матрицы A — это векторы $a_1 = (2, 2, -1)^T$, $a_2 = (0, 4, 2)^T$, $a_3 = (1, -1, 3)^T$. Применяем процесс Грама — Шмидта, нормируя получаемые векторы:

$$b_1 = \frac{a_1}{|a_1|} = \frac{1}{3}a_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

На втором шаге процесс Грама — Шмидта даёт вектор

$$\tilde{b}_2 = a_2 - (b_1, a_2)b_1 = a_2 - 2b_1 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{8}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}.$$

Нормируя вектор \tilde{b}_2 , получим вектор

$$b_2 = \frac{1}{4}\tilde{b}_2 = \frac{1}{4}a_2 - \frac{1}{2}b_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Третий шаг процесса Грама — Шмидта полностью аналогичен:

$$\begin{aligned} \tilde{b}_3 &= a_3 - (b_1, a_3)b_1 - (b_2, a_3)b_2 = a_3 + b_1 - b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \\ b_3 &= \frac{1}{3}\tilde{b}_3 = \frac{1}{3}a_3 + \frac{1}{3}b_1 - \frac{1}{3}b_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Выражая векторы a_1 , a_2 и a_3 из равенств (4.4), (4.5) и (4.6) соответственно, получим

$$a_1 = 3b_1, \quad a_2 = 2b_1 + 4b_2, \quad a_3 = -b_1 + b_2 + 3b_3.$$

В матричном виде эти равенства записываются так:

$$(a_1, a_2, a_3) = (b_1, b_2, b_3) \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

В этом равенстве слева стоит матрица A , а справа — произведение двух матриц, первая из которых ортогональна, так как её столбцы образуют ортонормированный базис \mathbb{R}^3 , а вторая — верхнетреугольная с положительными числами на диагонали. Таким образом, это — искомое разложение матрицы A . Подставляя вычисленные выше векторы b_1 , b_2 и b_3 , окончательно получаем $A = UR$, где

$$U = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \quad \square$$

4.3. Матрица Грама и n -мерный объём

Задача 66. Найти объём трёхмерного параллелепипеда, натянутого на векторы $a_1 = (1, 0, 1, 0)$, $a_2 = (1, 2, 0, -1)$, $a_3 = (-3, 2, 4, -1)$.

Решение. Способ I. Объём параллелепипеда, натянутого на векторы a_1 , a_2 и a_3 , равен квадратному корню из определителя матрицы Грама этих векторов. Вычислим их матрицу Грама:

$$\begin{aligned} (a_1, a_1) &= 2, & (a_1, a_2) &= 1, & (a_1, a_3) &= 1, \\ (a_2, a_2) &= 6, & (a_2, a_3) &= 2, & (a_3, a_3) &= 30. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 30 \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы не изменяется при прибавлении к одной из её строк другой строки, умноженной на произвольное число. Значит,

$$|G| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 30 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -11 & -3 \\ 1 & 6 & 2 \\ 0 & -4 & 28 \end{vmatrix} = 11 \cdot 28 + 3 \cdot 4 = 320.$$

Следовательно, искомый объём есть $V = \sqrt{320} = 8\sqrt{5}$.

Способ II. Объём параллелепипеда, натянутого на систему векторов, не изменяется при применении к этой системе векторов процесса ортогонализации Грама — Шмидта. Применим этот процесс к данным векторам:

$$b_1 = a_1 = (1, 0, 1, 0),$$

$$b_2 = a_2 - \frac{(b_1, a_2)}{(b_1, b_1)} b_1 = (1, 2, 0, -1) - \frac{1}{2}(1, 0, 1, 0) = \left(\frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{2}, -1\right),$$

$$b_3 = a_3 - \frac{(b_1, a_3)}{(b_1, b_1)} b_1 - \frac{(b_2, a_3)}{(b_2, b_2)} b_2 = (-3, 2, 4, -1) - \frac{1}{2}(1, 0, 1, 0) - \frac{3}{11}\left(\frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{2}, -1\right) = \frac{8}{11}(-5, 2, 5, -1).$$

Векторы b_1, b_2, b_3 попарно ортогональны, поэтому объём натянутого на них параллелепипеда равен произведению их длин:

$$V = |b_1| \cdot |b_2| \cdot |b_3| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{11}{2}} \cdot \frac{8\sqrt{5}}{\sqrt{11}} = 8\sqrt{5}. \quad \square$$

Задача 67. В пространстве $\mathbb{R}_3[t]$ многочленов степени не выше 3 задано скалярное произведение

$$(p, q) = \int_{-1}^1 p(t)q(t) dt.$$

Найти базис, взаимный к базису $1, t, t^2, t^3$.

Решение. Обозначим многочлены $1, t, t^2, t^3$ через e_0, e_1, e_2, e_3 соответственно (нам удобно начинать нумерацию с нуля, а не с единицы). Напомним, что базисом, взаимным к базису e_0, e_1, e_2, e_3 , называется такой базис e^0, e^1, e^2, e^3 , что $(e^i, e_j) = \delta_j^i$, где δ_j^i есть символ Кронекера. Пусть $C = (c^{ij})$ — матрица перехода от базиса e_0, e_1, e_2, e_3 к базису e^0, e^1, e^2, e^3 , то есть такая матрица, что $e^j = c^{ij}e_i$. Здесь и далее подразумевается суммирование по повторяющимся индексам, в данном случае по индексу i . Удобно оба индекса у матрицы перехода c^{ij} писать сверху, так как номера векторов e^j пишутся сверху. Докажем, что $C = G^{-1}$, где $G = (g_{ij})$ — матрица Грама базиса e_0, e_1, e_2, e_3 . Действительно, согласно определению взаимного базиса имеет место равенство

$$\delta_k^j = (e^j, e_k) = (c^{ij}e_i, e_k) = c^{ij}(e_i, e_k) = c^{ij}g_{ik}.$$

Из этого равенства следует, что $C = (G^T)^{-1}$, но матрица G симметрична, поэтому $C = G^{-1}$.

Найдём теперь матрицу G . Вычисляем скалярные произведения:

$$(x^m, x^n) = \int_{-1}^1 x^m \cdot x^n dx = \int_{-1}^1 x^{m+n} dx,$$

что равно $\frac{2}{m+n+1}$, если $m+n$ чётно, и 0, если $m+n$ нечётно. Из этого следует, что

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{7} \end{pmatrix}.$$

Нам нужно найти матрицу $C = G^{-1}$. Матрица G по сути является блочно-диагональной: она становится блочно-диагональной с двумя блоками 2×2 , если одновременно поменять местами второй и третий столбцы и вторую и третью строки. Таким образом, обращение матрицы G сводится к обращению двух матриц 2×2 :

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 9 & -15 \\ -15 & 45 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 75 & -105 \\ -105 & 175 \end{pmatrix},$$

$$C = G^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 9 & 0 & -15 & 0 \\ 0 & 75 & 0 & -105 \\ -15 & 0 & 45 & 0 \\ 0 & -105 & 0 & 175 \end{pmatrix}.$$

Столбцы матрицы C суть столбцы координат векторов e^i в базисе e_0, e_1, e_2, e_3 . Таким образом,

$$\begin{aligned} e^0(t) &= \frac{9}{8} - \frac{15}{8}t^2, & e^1(t) &= \frac{75}{8}t - \frac{105}{8}t^3, \\ e^2(t) &= -\frac{15}{8} + \frac{45}{8}t^2, & e^3(t) &= -\frac{105}{8}t + \frac{175}{8}t^3. \end{aligned}$$

□

Замечание. Можно было сразу заметить, что подпространства чётных и нечётных многочленов ортогональны друг другу относительно указанного скалярного произведения. Поэтому многочлены e^0 и e^2 составляют базис пространства чётных многочленов, дуальный базису

$1, t^2$, а многочлены e^1 и e^3 — базис в пространстве нечётных многочленов, дуальный базису t, t^3 . После этого нужно отдельно найти каждый из этих двух дуальных базисов.

4.4. Ортогональные проекции, расстояния и углы

Задача 68. Найти ортогональную проекцию x^\parallel и ортогональную составляющую x^\perp вектора $x = (2, -5, 4, -3)$ при проекции на подпространство $U = \langle (1, 2, 1, 0), (2, 1, 4, -5) \rangle$.

Решение. Мы приведём 3 способа решения этой задачи. Первые два способа отличаются практически только по форме изложения, а по своему математическому содержанию совпадают, третий способ основан на принципиально другой идее.

Способ I. Введём обозначения $a_1 = (1, 2, 1, 0)$, $a_2 = (2, 1, 4, -5)$. Вектор x^\parallel лежит в подпространстве U , поэтому он имеет вид

$$x^\parallel = \lambda a_1 + \mu a_2$$

для некоторых вещественных λ и μ . Тогда

$$\begin{aligned} x^\perp &= x - x^\parallel = x - \lambda a_1 - \mu a_2 = \\ &= (2 - \lambda - 2\mu, -5 - 2\lambda - \mu, 4 - \lambda - 4\mu, -3 + 5\mu). \end{aligned}$$

Коэффициенты λ и μ находятся из условия перпендикулярности вектора x^\perp подпространству U . Это значит, что x^\perp имеет нулевые скалярные произведения с векторами a_1 и a_2 . Прямое вычисление даёт

$$\begin{aligned} (x^\perp, a_1) &= (2 - \lambda - 2\mu) + 2(-5 - 2\lambda - \mu) + (4 - \lambda - 4\mu) = -6\lambda - 8\mu - 4, \\ (x^\perp, a_2) &= 2(2 - \lambda - 2\mu) + (-5 - 2\lambda - \mu) + 4(4 - \lambda - 4\mu) - \\ &\quad - 5(-3 + 5\mu) = -8\lambda - 46\mu + 30. \end{aligned}$$

Получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 6\lambda + 8\mu + 4 = 0, \\ 8\lambda + 46\mu - 30 = 0, \end{cases} \quad (4.7)$$

которая имеет единственное решение $\lambda = -2$, $\mu = 1$. Из этого следует, что

$$\begin{aligned} x^\parallel &= -2a_1 + a_2 = (0, -3, 2, -5), \\ x^\perp &= x - x^\parallel = (2, -2, 2, 2). \end{aligned}$$

Способ II. Так же как в предыдущем способе решения, мы ищем векторы x^{\parallel} и x^{\perp} в виде

$$x^{\parallel} = \lambda a_1 + \mu a_2, \quad x^{\perp} = x - \lambda a_1 - \mu a_2$$

и коэффициенты λ и μ находятся из условий $(x^{\perp}, a_1) = (x^{\perp}, a_2) = 0$. Имеем

$$(x^{\perp}, a_i) = (x, a_i) - \lambda(a_1, a_i) - \mu(a_2, a_i), \quad i = 1, 2.$$

Таким образом, система уравнений на λ и μ имеет вид

$$\begin{cases} (a_1, a_1)\lambda + (a_1, a_2)\mu = (x, a_1), \\ (a_2, a_1)\lambda + (a_2, a_2)\mu = (x, a_2), \end{cases} \quad (4.8)$$

то есть

$$G \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x, a_1) \\ (x, a_2) \end{pmatrix},$$

где G — матрица Грама системы векторов a_1, a_2 . Имеем

$$(a_1, a_1) = 6, \quad (a_1, a_2) = 8, \quad (a_2, a_2) = 46, \quad (x, a_1) = -4, \quad (x, a_2) = 30.$$

Таким образом, система уравнений (4.8) совпадает с системой уравнений (4.7). Далее всё делается точно так же, как в первом способе решения.

Способ III. Векторы $a_1 = (1, 2, 1, 0)$ и $a_2 = (2, 1, 4, -5)$ линейно независимы, поэтому они образуют базис подпространства U . Этот базис не является ортогональным. Найдём ортогональный базис подпространства U при помощи процесса ортогонализации Грама — Шмидта. Первый вектор остаётся без изменений, $b_1 = a_1 = (1, 2, 1, 0)$, второй вектор находится по формуле

$$b_2 = a_2 - \frac{(b_1, a_2)}{(b_1, b_1)} b_1 = a_2 - \frac{4}{3} b_1 = \frac{1}{3} (2, -5, 8, -15).$$

Так как b_1 и b_2 образуют ортогональный базис подпространства U , ортогональная проекция вектора x на это подпространство находится по формуле

$$x^{\parallel} = \frac{(b_1, x)}{(b_1, b_1)} b_1 + \frac{(b_2, x)}{(b_2, b_2)} b_2.$$

Имеем

$$(b_1, b_1) = 6, \quad (b_1, x) = -4, \quad (b_2, b_2) = \frac{106}{3}, \quad (b_2, x) = \frac{106}{3},$$

откуда

$$x^{\parallel} = -\frac{2}{3} b_1 + b_2 = (0, -3, 2, -5),$$

$$x^{\perp} = x - x^{\parallel} = (2, -2, 2, 2).$$

□

Задача 69. Найти ортогональную проекцию x^{\parallel} и ортогональную составляющую x^{\perp} вектора $x = (1, 5, 2, 5)$ при проектировании на подпространство

$$U = \langle (1, 1, 2, -1), (1, 3, -1, -13), (2, -1, 0, -1), (1, -3, 1, 9) \rangle.$$

Решение. Выясним сначала, какую размерность имеет подпространство U . Для этого запишем координаты порождающих его векторов в матрицу по строкам и приведём эту матрицу к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & -13 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -12 \\ 0 & -3 & -4 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Таким образом, подпространство U имеет размерность 3, что больше, чем половина размерности всего пространства. Поэтому нам будет удобнее искать ортогональную проекцию (и ортогональную составляющую) не на U , а на ортогональное дополнение U^{\perp} . При этом ортогональная проекция вектора x на подпространство U совпадает с ортогональной составляющей вектора x при проекции на подпространство U^{\perp} , и наоборот.

Подпространство U имеет базис, состоящий из трёх векторов, координаты которых записаны по строкам матрицы (4.9) выше горизонтальной черты. Поэтому подпространство U^{\perp} задаётся системой однородных линейных уравнений с матрицей (4.9). Эта система линейных уравнений имеет единственное с точностью до пропорциональности решение $a = (2, 3, -2, 1)$, которое и порождает одномерное подпространство U^{\perp} . Ортогональная проекция вектора x на одномерное подпространство, порождённое вектором a , находится по формуле

$$x_{U^{\perp}}^{\parallel} = \frac{(a, x)}{(a, a)} a = a = (2, 3, -2, 1).$$

Ортогональная проекция вектора x на подпространство U^{\perp} есть ортогональная составляющая вектора x при проектировании на подпространство U . Таким образом,

$$x^{\perp} = x_{U^{\perp}}^{\parallel} = (2, 3, -2, 1), \quad x^{\parallel} = x - x^{\perp} = (-1, 2, 4, 4). \quad \square$$

Задача 70. В пространстве $\text{Mat}_2(\mathbb{R})$ вещественных матриц размера 2×2 задано скалярное произведение $(A, B) = \text{tr}(A^T B)$. Найти ортогональную проекцию X^{\parallel} и ортогональную составляющую X^{\perp} матрицы

$X = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ при проекции на подпространство U , заданное системой линейных уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tr} A = 0, \\ \operatorname{tr}(JA) = 0, \end{cases} \quad \text{где } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Тогда система уравнений, задающая подпространство U , переписывается в виде

$$\begin{cases} a_{11} + a_{22} = 0, \\ a_{21} - a_{12} = 0. \end{cases}$$

Значит, U — двумерное подпространство с базисом

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что матрицы A_1 и A_2 ортогональны относительно заданного скалярного произведения. Ортогональная проекция матрицы X на подпространство U вычисляется по формуле

$$X^{\parallel} = \frac{(A_1, X)}{(A_1, A_1)} A_1 + \frac{(A_2, X)}{(A_2, A_2)} A_2.$$

Вычисляем скалярные произведения:

$$(A_1, A_1) = \operatorname{tr}(A_1^T A_1) = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2,$$

$$(A_1, X) = \operatorname{tr}(A_1^T X) = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = -2,$$

$$(A_2, A_2) = \operatorname{tr}(A_2^T A_2) = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2,$$

$$(A_2, X) = \operatorname{tr}(A_2^T X) = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 2.$$

Из этого следует, что

$$X^{\parallel} = -A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X^{\perp} = X - X^{\parallel} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Задача 71. Найти расстояние от вектора $v = (1, 1, 3, 1)$ до линейного подпространства $U = \langle (1, 0, 1, -2), (1, 1, 1, 3) \rangle$.

Решение. Способ I. Пусть $e_1 = (1, 0, 1, -2)$ и $e_2 = (1, 1, 1, 3)$. Эти векторы образуют базис подпространства U . Расстояние h от вектора v до подпространства U равно длине высоты параллелепипеда, натянутого на векторы v , e_1 и e_2 , опущенной на его грань, натянутую на векторы e_1 и e_2 . Значит, расстояние h равно отношению

трёхмерного объёма параллелепипеда, натянутого на векторы v , e_1 и e_2 , к двумерному объёму (площади) параллелограмма, натянутого на векторы e_1 и e_2 . Объём параллелепипеда, натянутого на систему векторов, равен квадратному корню из определителя матрицы Грама этой системы векторов, то есть

$$h = \sqrt{\frac{g_3(v, e_1, e_2)}{g_2(e_1, e_2)}},$$

где $g_3(v, e_1, e_2)$ и $g_2(e_1, e_2)$ — определители матриц Грама систем векторов v, e_1, e_2 и e_1, e_2 соответственно. Имеем

$$\begin{aligned} (v, v) &= 12, & (v, e_1) &= 2, & (v, e_2) &= 8, \\ (e_1, e_1) &= 6, & (e_1, e_2) &= -4, & (e_2, e_2) &= 12, \end{aligned}$$

откуда

$$g_3(v, e_1, e_2) = \begin{vmatrix} 12 & 2 & 8 \\ 2 & 6 & -4 \\ 8 & -4 & 12 \end{vmatrix} = 112, \quad g_2(e_1, e_2) = \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} = 56.$$

Следовательно,

$$h = \sqrt{\frac{g_3(v, e_1, e_2)}{g_2(e_1, e_2)}} = \sqrt{2}.$$

Способ II. Найдём ортогональную проекцию вектора v на подпространство U . Так как векторы $e_1 = (1, 0, 1, -2)$ и $e_2 = (1, 1, 1, 3)$ образуют базис подпространства U , эта ортогональная проекция имеет вид

$$v^{\parallel} = \lambda e_1 + \mu e_2 = (\lambda + \mu, \mu, \lambda + \mu, -2\lambda + 3\mu)$$

для некоторых λ и μ . Тогда ортогональная составляющая вектора v по отношению к подпространству U равна

$$v^{\perp} = v - v^{\parallel} = (1 - \lambda - \mu, 1 - \mu, 3 - \lambda - \mu, 1 + 2\lambda - 3\mu).$$

Запишем условия того, что вектор v^{\perp} ортогонален векторам e_1 и e_2 :

$$\begin{aligned} (v^{\perp}, e_1) &= 2 - 6\lambda + 4\mu = 0, \\ (v^{\perp}, e_2) &= 8 + 4\lambda - 12\mu = 0. \end{aligned}$$

Эта система линейных уравнений имеет единственное решение $\lambda = 1$, $\mu = 1$. Подставляя эти значения в выражения для вектора v^{\perp} , получаем $v^{\perp} = (-1, 0, 1, 0)$. Таким образом, расстояние от вектора v до подпространства U равно $|v^{\perp}| = \sqrt{2}$. \square

Задача 72. Найти угол между вектором $v = (1, 0, 1, 0)$ и линейным подпространством U , задаваемым системой уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Косинус искомого угла α вычисляется по формуле

$$\cos \alpha = \frac{|v^{\parallel}|}{|v|},$$

где v^{\parallel} — ортогональная проекция вектора v на подпространство U . Длина вектора v^{\parallel} равна расстоянию h от вектора v до линейного подпространства U^{\perp} . Подпространство U^{\perp} порождено векторами, координаты которых суть коэффициенты линейных уравнений, задающих подпространство U , то есть векторами $e_1 = (1, -2, -2, 1)$ и $e_2 = (2, -1, -3, 2)$. Значит, квадрат расстояния от вектора v до подпространства U^{\perp} равен отношению определителей $g_3(v, e_1, e_2)$ и $g_2(e_1, e_2)$ матриц Грама систем векторов v, e_1, e_2 и e_1, e_2 соответственно. Имеем

$$\begin{aligned} (v, v) &= 2, & (v, e_1) &= -1, & (v, e_2) &= -1, \\ (e_1, e_1) &= 10, & (e_1, e_2) &= 12, & (e_2, e_2) &= 18, \end{aligned}$$

откуда

$$g_3(v, e_1, e_2) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 10 & 12 \\ -1 & 12 & 18 \end{vmatrix} = 68, \quad g_2(e_1, e_2) = \begin{vmatrix} 10 & 12 \\ 12 & 18 \end{vmatrix} = 36.$$

Следовательно,

$$h = \sqrt{\frac{g_3(v, e_1, e_2)}{g_2(e_1, e_2)}} = \frac{\sqrt{17}}{3}.$$

Таким образом,

$$\alpha = \arccos \frac{h}{|v|} = \arccos \frac{\sqrt{17}}{3\sqrt{2}}.$$

□

4.5. Геометрия аффинных евклидовых пространств

Задача 73. Найти длину и основание перпендикуляра, опущенного из точки $M(-6, 1, 2, -4, -1)$ на двумерную плоскость, проходящую через три точки $A(4, -2, 3, 6, 0)$, $B(6, 0, 1, 3, 3)$, $C(8, -4, 3, 4, 0)$.

Решение. В качестве базиса линейного подпространства, с которым ассоциирована плоскость Π , проходящая через точки A , B и C , можно взять, например, векторы $a_1 = \overrightarrow{AB} = (2, 2, -2, -3, 3)$, $a_2 = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = (2, -1, 0, -1, 0)$. Поэтому параметрическое уравнение плоскости Π имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = 4 + 2s + 2t, \\ x_2 = -2 + 2s - t, \\ x_3 = 3 - 2s, \\ x_4 = 6 - 3s - t, \\ x_5 = 3s. \end{cases}$$

Выясним, каким значениям параметров s и t соответствует основание N перпендикуляра, опущенного на плоскость Π из точки M . Вектор \overrightarrow{MN} перпендикулярен векторам a_1 и a_2 . Так как

$$\overrightarrow{MN} = (10 + 2s + 2t, -3 + 2s - t, 1 - 2s, 10 - 3s - t, 1 + 3s),$$

условия $(\overrightarrow{MN}, a_1) = 0$ и $(\overrightarrow{MN}, a_2) = 0$, где (\cdot, \cdot) — стандартное скалярное преобразование в \mathbb{R}^5 , переписываются в виде системы линейных уравнений

$$\begin{cases} -15 + 30s + 5t = 0, \\ 13 + 5s + 6t = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему линейных уравнений, получаем $s = 1$, $t = -3$. Координаты точки N — искомого основания перпендикуляра — получаются подстановкой этих значений s и t в параметрическое уравнение плоскости Π , откуда $N = (0, 3, 1, 6, 3)$. Длина перпендикуляра равна

$$|MN| = \sqrt{6^2 + 2^2 + (-1)^2 + 10^2 + 4^2} = \sqrt{157}. \quad \square$$

Задача 74. Найти угол между прямой

$$\frac{x_1 - 5}{1} = \frac{x_2 + 6}{-1} = \frac{x_3 - 1}{2} = \frac{x_4 + 2}{0}$$

и двумерной плоскостью, проходящей через точки $A(3, 2, 1, 4)$, $B(5, 1, -2, 6)$ и $C(4, 3, 0, 5)$.

Решение. Угол между прямой и плоскостью равен углу между направляющим вектором прямой и линейным подпространством, с которым ассоциирована плоскость. Направляющий вектор данной прямой равен $a = (1, -1, 2, 0)$, а линейное подпространство U , с которым ассоциирована данная плоскость, натянуто на векторы

$$e_1 = \overrightarrow{AB} = (2, -1, -3, 2), \quad e_2 = \overrightarrow{AC} = (1, 1, -1, 1).$$

Квадрат расстояния от вектора a до линейного подпространства U вычисляется по формуле

$$h^2 = \frac{g_3(a, e_1, e_2)}{g_2(e_1, e_2)},$$

где $g_3(a, e_1, e_2)$ и $g_2(e_1, e_2)$ — определители матриц Грама систем векторов a, e_1, e_2 и e_1, e_2 соответственно. Имеем

$$g_3(a, e_1, e_2) = \begin{vmatrix} 6 & -3 & -2 \\ -3 & 18 & 6 \\ -2 & 6 & 4 \end{vmatrix} = 180, \quad g_2(e_1, e_2) = \begin{vmatrix} 18 & 6 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 36,$$

откуда $h = \sqrt{5}$. Синус искомого угла между вектором a и подпространством U вычисляется по формуле

$$\sin \alpha = \frac{h}{|a|} = \sqrt{\frac{5}{6}},$$

откуда $\alpha = \arcsin \sqrt{\frac{5}{6}}$, поскольку $\alpha < \frac{\pi}{2}$. □

Задача 75. Найти расстояние между прямой ℓ , проходящей через две точки $A(1, 4, -2, 4)$ и $B(2, 1, -1, 5)$, и двумерной плоскостью Π , проходящей через три точки $C(-4, 2, 0, 1)$, $D(-4, 1, -1, 1)$, $E(-4, 1, 1, 2)$.

Решение. В качестве направляющего вектора прямой ℓ можно выбрать $\overrightarrow{AB} = (1, -3, 1, 1)$. Базис ассоциированного линейного подпространства для плоскости Π составляют векторы $\overrightarrow{CD} = (0, -1, -1, 0)$ и $\overrightarrow{CE} = (0, -1, 1, 1)$. Расстояние ρ от прямой ℓ до плоскости Π равно длине ортогональной составляющей вектора $\overrightarrow{AC} = (-5, -2, 2, -3)$ по отношению к линейному подпространству L , порождённому векторами \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{CD} и \overrightarrow{CE} . Вместо ортогональной составляющей вектора \overrightarrow{AC} по отношению к подпространству L удобнее искать равную ей ортогональную проекцию вектора \overrightarrow{AC} на ортогональное дополнение L^\perp .

Подпространство L^\perp задаётся системой однородных линейных уравнений, коэффициентами которых являются координаты векторов \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{CD} и \overrightarrow{CE} соответственно:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ -x_2 - x_3 = 0, \\ -x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное с точностью до пропорциональности решение $(2, 1, -1, 2)$, значит, подпространство L^\perp одномерно и порождается вектором $a = (2, 1, -1, 2)$. Итак, искомое расстояние ρ равно длине ортогональной проекции вектора $\overrightarrow{AC} = (-5, -2, 2, -3)$

на направление вектора $a = (2, 1, -1, 2)$, значит,

$$\rho = \frac{|\overrightarrow{AC}, a|}{|a|} = \frac{20}{\sqrt{10}} = 2\sqrt{10}. \quad \square$$

Задача 76. Найти расстояние между прямой ℓ и плоскостью Π , где

$$\ell = (5, 0, -2, 4) + \langle (0, 1, 3, 2) \rangle,$$

$$\Pi : \begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 3, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 5. \end{cases}$$

Решение. На прямой ℓ лежит точка $A = (5, 0, -2, 4)$. В качестве точки, лежащей в плоскости Π , можно взять, например, точку $B = (9, 0, 2, 0)$. Имеем $\overrightarrow{AB} = (4, 0, 4, -4)$. Пусть U и V — линейные подпространства, с которыми ассоциированы прямая ℓ и плоскость Π соответственно. Тогда расстояние от прямой ℓ до плоскости Π равно длине ортогональной составляющей вектора \overrightarrow{AB} по отношению к подпространству $U + V$, то есть длине ортогональной проекции вектора \overrightarrow{AB} на подпространство $(U + V)^\perp$.

Найдём базис подпространства $(U + V)^\perp = U^\perp \cap V^\perp$. Подпространство V^\perp натянуто на векторы, составленные из коэффициентов линейных уравнений, задающих плоскость Π , то есть на векторы $v_1 = (1, -2, -3, 4)$ и $v_2 = (1, -4, -2, 4)$. Значит, произвольный вектор подпространства V^\perp имеет вид

$$v = \lambda v_1 + \mu v_2 = (\lambda + \mu, -2\lambda - 4\mu, -3\lambda - 2\mu, 4\lambda + 4\mu).$$

Выясним, какие v лежат в подпространстве U^\perp , то есть перпендикулярны вектору $a = (0, 1, 3, 2)$:

$$0 = (v, a) = -2\lambda - 4\mu + 3(-3\lambda - 2\mu) + 2(4\lambda + 4\mu) = -3\lambda - 2\mu.$$

Это уравнение имеет с точностью до пропорциональности единственное решение $\lambda = -2, \mu = 3$. Значит, подпространство $(U + V)^\perp$ порождено вектором $v = -2v_1 + 3v_2 = (1, -8, 0, 4)$. Таким образом, расстояние от прямой ℓ до плоскости Π равно длине ортогональной проекции вектора \overrightarrow{AB} на направление вектора v :

$$\rho = \frac{|\overrightarrow{AB}, v|}{|v|} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}. \quad \square$$

Задача 77. Прямая ℓ проходит через две точки $A(3, 1, 2, 4)$ и $B(4, 2, 3, 6)$, а двумерная плоскость Π — через точки $C(2, 1, 3, -1)$, $D(6, 1, 0, 2)$ и $E(3, 0, 2, 0)$. Написать уравнение общего перпендикуляра к прямой ℓ и плоскости Π и найти его длину.

Решение. В качестве направляющего вектора прямой ℓ можно взять вектор $a = \overrightarrow{AB} = (1, 1, 1, 2)$. Базис линейного подпространства, с которым ассоциирована плоскость Π , составляют векторы $b_1 = \overrightarrow{CD} = (4, 0, -3, 3)$ и $b_2 = \overrightarrow{CE} = (1, -1, -1, 1)$. Значит, прямая ℓ и плоскость Π задаются следующими параметрическими уравнениями:

$$\ell: \begin{cases} x_1 = 3 + r, \\ x_2 = 1 + r, \\ x_3 = 2 + r, \\ x_4 = 4 + 2r, \end{cases} \quad \Pi: \begin{cases} x_1 = 2 + 4s + t, \\ x_2 = 1 - t, \\ x_3 = 3 - 3s - t, \\ x_4 = -1 + 3s + t. \end{cases}$$

Следовательно, вектор \overrightarrow{MN} для точек $M \in \ell$ и $N \in \Pi$, отвечающих значениям параметров r, s и t соответственно, равен

$$\overrightarrow{MN} = (-1 - r + 4s + t, -r - t, 1 - r - 3s - t, -5 - 2r + 3s + t).$$

Точки M и N являются основаниями общего перпендикуляра к прямой ℓ и плоскости Π тогда и только тогда, когда вектор \overrightarrow{MN} перпендикулярен векторам a, b_1 и b_2 . Это условие даёт систему линейных уравнений

$$\begin{cases} -7r + 7s + t = 10, \\ -7r + 34s + 10t = 22, \\ -r + 10s + 4t = 7, \end{cases}$$

которая имеет единственное решение $r = -\frac{4}{3}, s = -\frac{1}{6}, t = \frac{11}{6}$. Значит, основания общего перпендикуляра к прямой ℓ и плоскости Π суть точка $M \in \ell$, отвечающая значению параметра $r = -\frac{4}{3}$, и точка $N \in \Pi$, отвечающая значениям параметров $s = -\frac{1}{6}, t = \frac{11}{6}$. Таким образом,

$$M = \left(\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right), \quad N = \left(\frac{19}{6}, -\frac{5}{6}, \frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad \overrightarrow{MN} = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1, -1\right).$$

Уравнение искомого общего перпендикуляра — прямой MN — имеет вид

$$\frac{x_1 - \frac{5}{3}}{3} = \frac{x_2 + \frac{1}{3}}{-1} = \frac{x_3 - \frac{2}{3}}{2} = \frac{x_4 - \frac{4}{3}}{-2},$$

а длина общего перпендикуляра равна

$$MN = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{1}{4} + 1 + 1} = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

□

Задача 78. Найти расстояние между двумерной плоскостью, проходящей через точки $A_1(-2, 4, 5, 1)$, $B_1(-1, 6, 6, 2)$ и $C_1(2, 9, 4, 3)$, и двумерной плоскостью, проходящей через точки $A_2(8, 4, 20, -10)$, $B_2(7, 5, 28, -11)$ и $C_2(13, 4, 19, -17)$.

Решение. Пусть Π_1 и Π_2 — две данные плоскости, U_1 и U_2 — линейные подпространства, с которыми эти плоскости ассоциированы. Тогда искомое расстояние ρ между плоскостями Π_1 и Π_2 равно длине ортогональной составляющей вектора $\overrightarrow{A_1A_2} = (10, 0, 15, -11)$ по отношению к линейному подпространству $U = U_1 + U_2$. Подпространство U порождается векторами $\overrightarrow{A_1B_1} = (1, 2, 1, 1)$, $\overrightarrow{A_1C_1} = (4, 5, -1, 2)$, $\overrightarrow{A_2B_2} = (-1, 1, 8, -1)$ и $\overrightarrow{A_2C_2} = (5, 0, -1, -7)$. Найдём базис подпространства U :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 8 & -1 \\ 5 & 0 & -1 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -5 & -2 \\ 0 & 3 & 9 & 0 \\ 0 & -10 & -6 & -12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Таким образом, подпространство U трёхмерно и его базис составляют векторы $(1, 2, 1, 1)$, $(0, 1, 3, 0)$ и $(0, 0, 2, -1)$. Ортогональная составляющая вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$ по отношению к подпространству L совпадает с ортогональной проекцией вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$ на одномерное подпространство U^\perp . Подпространство U^\perp задаётся системой однородных линейных уравнений с матрицей (4.10), по строкам которой выписаны координаты векторов базиса подпространства U . Единственным с точностью до пропорциональности решением этой системы линейных уравнений является вектор $n = (3, -3, 1, 2)$. Таким образом, U^\perp — линейное подпространство, порождённое вектором n . Следовательно, искомое расстояние ρ между плоскостями Π_1 и Π_2 равно длине ортогональной проекции вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$ на направление вектора n , откуда

$$\rho = \frac{|\overrightarrow{(A_1A_2, n)}|}{|n|} = \frac{23}{\sqrt{23}} = \sqrt{23}. \quad \square$$

Задача 79. В пространстве $\mathbb{R}_3[t]$ задано скалярное произведение

$$(p, q) = \int_{-1}^1 p(t)q(t) dt.$$

Найти расстояние между прямой ℓ , состоящей из всех многочленов вида $t^3 + at + a$, и двумерной плоскостью Π , состоящей из всех многочленов вида $bt^2 + 2t + c$.

Решение. Многочлены вида $at + a$ образуют одномерное линейное подпространство, базис которого образует вектор $t + 1$. Множество, состоящее из всех многочленов вида $t^3 + at + a$, получается из этого линейного подпространства сдвигом на вектор t^3 и, значит, является ассоциированным с ним одномерным аффинным подпространством.

ством, то есть прямой. Аналогично, множество всех многочленов вида $bt^2 + c$ образует двумерное линейное подпространство с базисом 1 и t^2 . Следовательно, множество всех многочленов вида $bt^2 + 2t + c$ является двумерной плоскостью, ассоциированной с этим линейным подпространством и проходящей через точку $2t$.

Расстояние между двумя плоскостями равно ортогональной составляющей вектора, соединяющего какие-нибудь две точки этих плоскостей, по отношению к сумме линейных подпространств, с которыми ассоциированы эти плоскости. В нашем случае искомое расстояние ρ от прямой ℓ до плоскости Π равно длине ортогональной составляющей многочлена $t^3 - 2t$ по отношению к линейному подпространству U , натянутому на многочлены $1 + t$, 1 и t^2 . Заметим, что U — подпространство всех многочленов степени не выше 2. В частности, многочлен $2t$ лежит в подпространстве U , следовательно, ортогональная составляющая многочлена $t^3 - 2t$ по отношению к U совпадает с ортогональной составляющей многочлена t^3 по отношению к U . Заметим теперь, что подпространства чётных и нечётных многочленов ортогональны относительно заданного скалярного произведения. Поэтому ортогональная составляющая многочлена t^3 по отношению к подпространству $U = \langle 1, t, t^2 \rangle$ совпадает с ортогональной составляющей многочлена t^3 по отношению к одномерному подпространству $\langle t \rangle$. Эта ортогональная составляющая f может быть найдена при помощи процесса ортогонализации Грама — Шмидта для пары векторов t, t^3 :

$$f(t) = t^3 - \lambda t, \quad \text{где } \lambda = \frac{(t, t^3)}{(t, t)}.$$

Имеем

$$(t, t^3) = \int_{-1}^1 t^4 dt = \frac{2}{5}, \quad (t, t) = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3},$$

откуда

$$f(t) = t^3 - \frac{3}{5}t.$$

Прямое вычисление даёт

$$(f, f) = \int_{-1}^1 \left(t^3 - \frac{3}{5}t\right)^2 dt = \int_{-1}^1 \left(t^6 - \frac{6}{5}t^4 + \frac{9}{25}t^2\right) dt = \frac{2}{7} - \frac{6}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{9}{25} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{7 \cdot 25}.$$

Таким образом,

$$\rho = \sqrt{(f, f)} = \frac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{7}}.$$

□

4.6. Симплексы

Задача 80. Для правильного n -мерного симплекса с ребром 1 найти радиус R_n описанной около него сферы, радиус r_n вписанной в него сферы и двугранный угол α_n между двумя его $(n-1)$ -мерными гранями.

Решение. Правильный n -мерный симплекс удобно реализовать в пространстве \mathbb{R}^{n+1} с вершинами

$$A_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \quad A_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad A_{n+1} = (0, 0, 0, \dots, 1).$$

Правда, ребро полученного таким образом правильного симплекса Δ^n равно не 1, а $\sqrt{2}$. Поэтому величина двугранного угла для него будет совпадать с искомой (она не меняется при преобразовании подобия), а радиусы вписанной и описанной сфер надо будет потом разделить на $\sqrt{2}$.

Напомним, что центром масс точек X_1, X_2, \dots, X_k с массами m_1, m_2, \dots, m_k соответственно (такими, что суммарная масса $m_1 + m_2 + \dots + m_k \neq 0$) называется точка X с радиус-вектором

$$\overrightarrow{OX} = \frac{m_1 \overrightarrow{OX_1} + m_2 \overrightarrow{OX_2} + \dots + m_k \overrightarrow{OX_k}}{m_1 + m_2 + \dots + m_k}.$$

Эта точка не зависит от выбора начала координат O .

Центр I симплекса Δ^n есть центр масс его вершин (с одинаковыми массами), поэтому радиус-вектор точки I вычисляется по формуле

$$\overrightarrow{OI} = \frac{\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_{n+1}}}{n+1} = \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1} \right).$$

В качестве O мы берём стандартное начало координат в пространстве \mathbb{R}^{n+1} .

Радиус сферы, описанной около симплекса Δ^n , равен расстоянию от его центра I до любой из его вершин, например, до A_1 . Имеем

$$\begin{aligned} \overrightarrow{IA_1} &= \overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OI} = \left(\frac{n}{n+1}, -\frac{1}{n+1}, \dots, -\frac{1}{n+1} \right), \\ |\overrightarrow{IA_1}|^2 &= \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 + \underbrace{\frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2}}_{n \text{ слагаемых}} = \frac{n^2 + n}{(n+1)^2} = \frac{n}{n+1}. \end{aligned}$$

Значит, радиус сферы, описанной около симплекса Δ^n , равен $\sqrt{\frac{n}{n+1}}$. Чтобы получить радиус сферы, описанной около правильного n -мерного симплекса с ребром 1, это число нужно разделить на $\sqrt{2}$, таким образом,

$$R_n = \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}.$$

Количество гиперграней (граней размерности $n-1$) симплекса Δ^n равно $n+1$. Каждая из гиперграней есть правильный $(n-1)$ -мерный симплекс, вершинами которого являются все точки A_1, \dots, A_{n+1} , кроме какой-нибудь одной A_i . Центр I_i гиперграней, противоположной вершине A_i , является центром масс всех точек A_1, \dots, A_{n+1} , кроме точки A_i , поэтому

$$\overrightarrow{OI_i} = \frac{1}{n} \left(\sum_{j \neq i} \overrightarrow{OA_j} \right) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}, 0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right),$$

где 0 стоит на i -м месте. Тогда

$$\overrightarrow{II_i} = \overrightarrow{OI_i} - \overrightarrow{OI} = \frac{1}{n(n+1)} (1, 1, \dots, 1, -n, 1, \dots, 1).$$

Радиус вписанной сферы симплекса Δ^n равен длине отрезка II_i . Имеем

$$|II_i| = \frac{\sqrt{n+n^2}}{n(n+1)} = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}},$$

откуда следует, что радиус вписанной сферы правильного n -мерного симплекса с ребром 1 равен

$$r_n = \frac{1}{\sqrt{2n(n+1)}}.$$

Вектор $\overrightarrow{II_i}$ является вектором внешней нормали к гиперграней F_i симплекса Δ^n , противоположной вершине A_i . Поэтому двугранный угол α_n между двумя гипергранями F_i и F_j равен $\pi - \beta$, где β — угол между векторами $\overrightarrow{II_i}$ и $\overrightarrow{II_j}$. Вычисляя скалярное произведение векторов $\overrightarrow{II_i}$ и $\overrightarrow{II_j}$, мы получаем сумму $n+1$ слагаемых, из которых $n-1$ слагаемых равны $\frac{1}{n^2(n+1)^2}$, а два слагаемых — i -е и j -е — равны $-\frac{1}{n(n+1)^2}$, откуда

$$(\overrightarrow{II_i}, \overrightarrow{II_j}) = \frac{n-1}{n^2(n+1)^2} - \frac{2}{n(n+1)^2} = -\frac{1}{n^2(n+1)}.$$

Следовательно,

$$\cos \beta = \frac{(\overrightarrow{II_i}, \overrightarrow{II_j})}{|\overrightarrow{II_i}| \cdot |\overrightarrow{II_j}|} = -\frac{1}{n}.$$

Таким образом, мы получаем ответ

$$\alpha_n = \pi - \beta = \arccos \frac{1}{n}.$$

□

4.7. Метод наименьших квадратов и интерполяция функций

Задача 81. Методом наименьших квадратов найти псевдорешение несовместной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 = -1, \\ -x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$$

Решение. Данная система линейных уравнений имеет вид $Ax = b$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Напомним, что *псевдорешением* несовместной системы $Ax = b$ называется вектор $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, для которого квадрат длины $|Ay - b|^2$ принимает наименьшее возможное значение. Значит, Ay есть ортогональная проекция b^\parallel вектора b на линейное подпространство $V \subset \mathbb{R}^5$, состоящее из всех векторов Ax , $x \in \mathbb{R}^3$. Очевидно, что $Ax = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3$, где a_1, a_2 и a_3 — столбцы матрицы A :

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, V — линейное подпространство, порождённое векторами a_1, a_2 и a_3 . (Отметим также, что V — образ линейного отображения $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^5$, задаваемого матрицей A в стандартных базисах.) Имеем

$$y_1 a_1 + y_2 a_2 + y_3 a_3 = Ay = b^\parallel.$$

Умножая скалярно обе части этого равенства на векторы a_1, a_2 и a_3 и учитывая, что $(a_i, b^\parallel) = (a_i, b)$, $i = 1, 2, 3$, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} (a_1, a_1)y_1 + (a_1, a_2)y_2 + (a_1, a_3)y_3 = (a_1, b), \\ (a_2, a_1)y_1 + (a_2, a_2)y_2 + (a_2, a_3)y_3 = (a_2, b), \\ (a_3, a_1)y_1 + (a_3, a_2)y_2 + (a_3, a_3)y_3 = (a_3, b), \end{cases}$$

то есть $Gy = A^T b$, где G — матрица Грама векторов a_1, a_2 и a_3 . Прямое вычисление даёт

$$G = A^T A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^T b = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Решаем систему линейных уравнений $Gy = A^T b$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & | & 3 \\ 1 & 4 & 3 & | & -2 \\ 0 & 3 & 4 & | & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & | & -2 \\ 0 & -11 & -9 & | & 9 \\ 0 & 3 & 4 & | & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & | & -2 \\ 0 & 1 & 7 & | & 5 \\ 0 & 3 & 4 & | & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & | & -2 \\ 0 & 1 & 7 & | & 5 \\ 0 & 0 & 17 & | & 16 \end{pmatrix}.$$

Значит,

$$y_3 = \frac{16}{17}, \quad y_2 = 5 - 7y_3 = -\frac{27}{17}, \quad y_1 = -2 - 4y_2 - 3y_3 = \frac{26}{17}.$$

Искомым псевдорешением является вектор $y = \left(\frac{26}{17}, -\frac{27}{17}, \frac{16}{17}\right)$. \square

Задача 82. Методом наименьших квадратов найти приближение функции f , заданной значениями $f(-1)=3, f(0)=2, f(1)=3, f(2)=10$:

- 1) линейным многочленом $L_1^f(t) = b_1 t + b_0$;
- 2) квадратичным многочленом $L_2^f(t) = b_2 t^2 + b_1 t + b_0$;
- 3) кубическим многочленом $L_3^f(t) = b_3 t^3 + b_2 t^2 + b_1 t + b_0$.

В каждом из этих случаев найти квадратичное отклонение многочлена L_k^f от функции f .

Решение. Для каждого из значений $k = 1, 2$ и 3 нам нужно найти наилучшее среднеекватричное приближение функции f по системе функций $1, t, \dots, t^k$, то есть многочлен $L_k^f(t) = b_k t^k + \dots + b_0$ степени не выше чем k , с наименьшим квадратичным отклонением

$$\|L_k^f - f\|_4^2 = (L_k^f(-1) - f(-1))^2 + (L_k^f(0) - f(0))^2 +$$

$$+ (L_k^f(1) - f(1))^2 + (L_k^f(2) - f(2))^2. \quad (4.11)$$

Чтобы не усложнять обозначения, мы в каждом из трёх интересующих нас случаев $k = 1, 2$ и 3 обозначаем коэффициенты многочлена L_k^f через b_i . Это, конечно же, ни в коем случае не означает, что при разных k они равны друг другу.

Рассмотрим 4-мерное линейное пространство V вещественнозначных функций на конечном множестве $\{-1, 0, 1, 2\}$ со скалярным произведением

$$(g, h) = g(-1)h(-1) + g(0)h(0) + g(1)h(1) + g(2)h(2).$$

Будем обозначать функции из пространства V , получающиеся ограничением функций t^i и неизвестной нам функции f на множество $\{-1, 0, 1, 2\}$, так же, как и сами эти функции, то есть снова через t^i и f соответственно. Тогда искомым многочлен L_k^f является ортогональной проекцией функции $f \in V$ на подпространство, порождённое функциями $1, t, \dots, t^k$, где $k = 1, 2$ или 3 в первом, втором и третьем случаях соответственно. Следовательно, $(t^i, L_k^f) = (t^i, f)$ при $i = 0, \dots, k$. Вспоминая, что $L_k^f(t) = b_k t^k + \dots + b_0$, получаем систему уравнений

$$(t^i, 1)b_0 + (t^i, t)b_1 + \dots + (t^i, t^k)b_k = (t^i, f), \quad i = 0, \dots, k. \quad (4.12)$$

Матрица этой системы есть матрица Грама G_k системы функций $1, t, \dots, t^k$ относительно введённого скалярного произведения. Непосредственное вычисление даёт

$$G_4 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 8 & 18 \\ 6 & 8 & 18 & 32 \\ 8 & 18 & 32 & 66 \end{pmatrix},$$

матрицы G_2 и G_3 совпадают с верхними левыми минорами матрицы G_4 размеров 2×2 и 3×3 соответственно. Вычислим теперь правые части системы (4.12):

$$(1, f) = 18, \quad (t, f) = 20, \quad (t^2, f) = 46, \quad (t^3, f) = 80.$$

Найдём наилучшее среднеекватричное приближение функции f линейным многочленом $L_1^f(t) = b_1 t + b_0$. Система (4.12) при $k = 1$ принимает вид

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Решая эту систему, находим $b_0 = \frac{17}{5}$, $b_1 = \frac{11}{5}$, значит,

$$L_1^f(t) = \frac{11}{5}t + \frac{17}{5}.$$

Для того чтобы найти наилучшее среднеекватричное приближение функции f квадратным многочленом $L_2^f(t) = b_2 t^2 + b_1 t + b_0$, запишем систему (4.12) при $k = 2$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 20 \\ 46 \end{pmatrix}.$$

Решая эту систему, находим $b_0 = \frac{7}{5}$, $b_1 = \frac{1}{5}$, $b_2 = 2$, значит,

$$L_2^f(t) = 2t^2 + \frac{1}{5}t + \frac{7}{5}.$$

Теперь запишем систему (4.12) при $k = 3$ и найдём наилучшее среднеквадратичное приближение функции f кубическим многочленом $L_3^f(t) = b_3 t^3 + b_2 t^2 + b_1 t + b_0$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 8 & 18 \\ 6 & 8 & 18 & 32 \\ 8 & 18 & 32 & 66 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 20 \\ 46 \\ 80 \end{pmatrix}.$$

Решая эту систему, получаем $b_0 = 2$, $b_1 = -\frac{2}{3}$, $b_2 = 1$, $b_3 = \frac{2}{3}$, значит,

$$L_3^f(t) = \frac{2}{3}t^3 + t^2 - \frac{2}{3}t + 2.$$

Чтобы вычислить среднеквадратичные отклонения многочленов L_1^f и L_2^f от функции f , вычислим значения этих многочленов в точках $-1, 0, 1, 2$:

$$\begin{aligned} L_1^f(-1) &= \frac{6}{5}, & L_1^f(0) &= \frac{17}{5}, & L_1^f(1) &= \frac{28}{5}, & L_1^f(2) &= \frac{39}{5}, \\ L_2^f(-1) &= \frac{16}{5}, & L_2^f(0) &= \frac{7}{5}, & L_2^f(1) &= \frac{18}{5}, & L_2^f(2) &= \frac{49}{5}, \\ L_3^f(-1) &= 3, & L_3^f(0) &= 2, & L_3^f(1) &= 3, & L_3^f(2) &= 10. \end{aligned}$$

Теперь при помощи формулы (4.11) непосредственно получаем

$$\|L_1^f - f\|_4^2 = \frac{84}{5}, \quad \|L_2^f - f\|_4^2 = \frac{4}{5}, \quad \|L_3^f - f\|_4^2 = 0.$$

То, что последнее из среднеквадратичных отклонений оказалось равным нулю, не случайно. На самом деле можно было сразу сообщить, что имеется кубический многочлен, принимающий в данных четырех точках $-1, 0, 1$ и 2 данные значения $3, 2, 3$ и 10 соответственно. Это — интерполяционный многочлен Лагранжа. Он будет иметь нулевое среднеквадратичное отклонение от функции f , а значит, и будет искомым многочленом L_3^f . Таким образом, многочлен L_3^f можно было бы вычислить без рассуждений, описанных выше, при помощи интерполяционной формулы Лагранжа:

$$\begin{aligned} L_3^f(t) &= 3 \cdot \frac{t(t-1)(t-2)}{(-1) \cdot (-1-1) \cdot (-1-2)} + 2 \cdot \frac{(t+1)(t-1)(t-2)}{1 \cdot (-1) \cdot (-2)} + \\ &+ 3 \cdot \frac{(t+1)t(t-2)}{(1+1) \cdot 1 \cdot (1-2)} + 10 \cdot \frac{(t+1)t(t-1)}{(2+1) \cdot 2 \cdot (2-1)} = \frac{2}{3}t^3 + t^2 - \frac{2}{3}t + 2. \quad \square \end{aligned}$$

Задача 83. Методом наименьших квадратов найти в евклидовом пространстве непрерывных функций на отрезке $[-1, 1]$ со скалярным

произведением

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt$$

аппроксимацию (наилучшее среднеквадратичное приближение) функции e^t при помощи системы функций $\varphi_1(t) = 1$, $\varphi_2(t) = t$, $\varphi_3(t) = t^3$.

Решение. Приближение для функции $f(t) = e^t$ имеет вид

$$L(t) = a_1\varphi_1(t) + a_2\varphi_2(t) + a_3\varphi_3(t) = a_1 + a_2t + a_3t^3 \quad (4.13)$$

для некоторых a_1 , a_2 и a_3 . Коэффициенты a_1 , a_2 и a_3 находятся из условий $(L - f, \varphi_i) = 0$, $i = 1, 2, 3$. Из равенства (4.13) получаем, что

$$(L, \varphi_i) = a_1(\varphi_1, \varphi_i) + a_2(\varphi_2, \varphi_i) + a_3(\varphi_3, \varphi_i).$$

Поэтому условия $(L - f, \varphi_i) = 0$ переписываются в виде системы линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} (\varphi_1, \varphi_1) & (\varphi_1, \varphi_2) & (\varphi_1, \varphi_3) \\ (\varphi_2, \varphi_1) & (\varphi_2, \varphi_2) & (\varphi_2, \varphi_3) \\ (\varphi_3, \varphi_1) & (\varphi_3, \varphi_2) & (\varphi_3, \varphi_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f, \varphi_1) \\ (f, \varphi_2) \\ (f, \varphi_3) \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

Для $k, l \geq 0$ получаем

$$(t^k, t^l) = \int_{-1}^1 t^{k+l} dt = \begin{cases} \frac{2}{k+l+1}, & \text{если } k+l \text{ чётно,} \\ 0, & \text{если } k+l \text{ нечётно.} \end{cases}$$

Таким образом, матрица Грама системы функций $1, t, t^3$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}.$$

Вычислим теперь скалярные произведения функции e^t с функциями 1 , t и t^3 :

$$(e^t, 1) = \int_{-1}^1 e^t dt = e - e^{-1},$$

$$(e^t, t) = \int_{-1}^1 te^t dt = (te^t) \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 e^t dt = (e + e^{-1}) - (e - e^{-1}) = 2e^{-1},$$

$$\begin{aligned}
 (e^t, t^3) &= \int_{-1}^1 t^3 e^t dt = (t^3 e^t) \Big|_{-1}^1 - 3 \int_{-1}^1 t^2 e^t dt = \\
 &= (e + e^{-1}) - 3(t^2 e^t) \Big|_{-1}^1 + 6 \int_{-1}^1 t e^t dt = \\
 &= (e + e^{-1}) - 3(e - e^{-1}) + 12e^{-1} = -2e + 16e^{-1}.
 \end{aligned}$$

Система (4.14) переписывается в виде

$$\begin{cases} 2a_1 = e - e^{-1}, \\ \frac{2}{3}a_2 + \frac{2}{5}a_3 = 2e^{-1}, \\ \frac{2}{5}a_2 + \frac{2}{7}a_3 = -2e + 16e^{-1}. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим

$$a_1 = \frac{e - e^{-1}}{2}, \quad a_2 = \frac{105e - 765e^{-1}}{4}, \quad a_3 = \frac{1295e^{-1} - 175e}{4}.$$

Таким образом, искомое приближение равно

$$L(t) = \frac{e - e^{-1}}{2} + \frac{105e - 765e^{-1}}{4} t + \frac{1295e^{-1} - 175e}{4} t^3.$$

□

ГЛАВА 5

Линейные операторы в евклидовых и эрмитовых пространствах

5.1. Сопряжённые операторы

Задача 84. Оператор f имеет в ортонормированном базисе e_1, e_2 двумерного евклидова пространства матрицу

$$A_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу A_{f^*} сопряжённого оператора f^* в том же базисе.

Решение. Как известно, операторы f и f^* связаны соотношением

$$(fv, w) = (v, f^*w), \quad (5.1)$$

где (\cdot, \cdot) — евклидово скалярное произведение, а v и w — произвольные векторы. Запишем это соотношение в координатах, определённых ортонормированным базисом e_1, e_2 . Пусть вектор v имеет координаты (v_1, v_2) , а вектор w имеет координаты (w_1, w_2) , тогда евклидово скалярное произведение в координатах имеет вид

$$(v, w) = v_1 w_1 + v_2 w_2 = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}.$$

Соотношение (5.1) принимает тогда вид

$$\left[A_f \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right]^T \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}^T A_{f^*} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix},$$

что эквивалентно соотношению

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}^T A_f^T \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}^T A_{f^*} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Так как векторы v и w произвольны, соотношение (5.2) эквивалентно соотношению $A_{f^*} = A_f^T$. Таким образом,

$$A_{f^*} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Задача 85. Пусть в некотором ортонормированном базисе трёхмерного евклидова пространства заданы векторы

$$e_1 = (0, 1, 1), \quad e_2 = (-1, 1, 1), \quad e_3 = (1, 0, 1).$$

Пусть оператор f задан матрицей

$$A_f = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ -3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

в базисе e_1, e_2, e_3 . Найти матрицу A_{f^*} сопряжённого оператора f^* в том же базисе.

Решение. Как и в задаче 84, операторы f и f^* связаны соотношением (5.1), но теперь у нас дана матрица A_f оператора f в базисе e_1, e_2, e_3 , который не является ортонормированным.

Пусть G — матрица Грама этого базиса, то есть

$$G = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & (e_1, e_3) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) & (e_2, e_3) \\ (e_3, e_1) & (e_3, e_2) & (e_3, e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Пусть координаты векторов v и w в базисе e_1, e_2, e_3 , имеют вид (v_1, v_2, v_3) и (w_1, w_2, w_3) . Тогда скалярное произведение в координатах принимает вид

$$(v, w) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}^T G \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix},$$

и соотношение (5.1) принимает в матричной форме вид

$$\left[A_f \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right]^T G \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}^T G A_{f^*} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix},$$

что эквивалентно соотношению

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}^T A_f^T G \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}^T G A_{f^*} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Векторы v и w произвольны, поэтому равенство (5.3) эквивалентно равенству $GA_{f^*} = A_f^T G$, откуда получаем формулу

$$A_{f^*} = G^{-1} A_f^T G.$$

Остаётся найти ответ прямым вычислением по этой формуле:

$$A_{f^*} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ -3 & 2 & 7 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -53 & -20 & -83 \\ 40 & 19 & 57 \\ 31 & 11 & 49 \end{pmatrix}. \quad \square$$

5.2. Самосопряжённые операторы

Задача 86 (по мотивам № 1585 из [6]). Найти канонический вид и соответствующий канонический базис для линейного оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе e_1, e_2, e_3 матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Заметим, что оператор, заданный матрицей A , является самосопряжённым, поскольку матрица A симметрична, а базис e_1, e_2, e_3 ортонормированный. Поэтому ортогональным преобразованием оператор может быть диагонализирован, то есть существует базис из собственных векторов, и в этом базисе матрица оператора диагональна.

Начнём с поиска собственных чисел матрицы A . Характеристический многочлен равен

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 11-\lambda & 2 & -8 \\ 2 & 2-\lambda & 10 \\ -8 & 10 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 18\lambda^2 + 81\lambda - 1458.$$

Как известно, если у $\chi(\lambda)$ есть рациональный корень, то он должен быть делителем числа 1458. Заметим, что $1458 = 2 \cdot 3^6$. Перебирая делители, находим, например, что 9 является корнем $\chi(\lambda)$. Разделив $\chi(\lambda)$ столбиком на $\lambda - 9$, получаем

$$\chi(\lambda) = (\lambda - 9)(-\lambda^2 + 9\lambda + 162).$$

Корни квадратного многочлена $-\lambda^2 + 9\lambda + 162$ суть -9 и 18 . Таким образом, собственными числами матрицы A являются $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = -9$ и $\lambda_3 = 18$. Нумерация собственных чисел выбрана нами произвольно, но этой нумерации, раз выбранной, следует придерживаться в дальнейшем.

Найдём теперь базис из собственных векторов. К счастью, в данном случае *все собственные числа матрицы различны*, и это сильно облегчает работу. Случай, когда среди собственных чисел есть совпадающие, рассмотрен в задаче 87.

Пусть через e'_1, e'_2 и e'_3 обозначаются искомые собственные векторы. Если вектор e'_1 имеет координаты (x_1, x_2, x_3) в базисе e_1, e_2, e_3 , то имеет место соотношение

$$(A - \lambda_1 E) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Так как $\lambda_1 = 9$, это соотношение принимает вид

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -8 \\ 2 & -7 & 10 \\ -8 & 10 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Это система однородных линейных уравнений, которую легко решить. Общее решение имеет вид $x_1 = 2x_3$, $x_2 = 2x_3$, $x_3 = x_3$, то есть в базисе e_1, e_2, e_3 вектор e'_1 имеет координаты $(2x_3, 2x_3, x_3)$. Так как мы ищем ортонормированный базис, этот вектор должен иметь единичную длину, поэтому

$$\sqrt{(2x_3)^2 + (2x_3)^2 + x_3^2} = 1,$$

откуда $x_3 = \pm \frac{1}{3}$. Знак можно выбрать произвольным образом. Выбрав, например, $x_3 = \frac{1}{3}$, получаем, что вектор e'_1 имеет в базисе e_1, e_2, e_3 координаты $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$. Так как мы используем только координаты в базисе e_1, e_2, e_3 , будем записывать это просто как

$$e'_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Аналогично мы находим, что

$$e'_2 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \quad e'_3 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

В базисе e'_1, e'_2, e'_3 наш линейный оператор будет иметь диагональную матрицу B , у которой на диагонали стоят собственные числа в том порядке, в котором мы их занумеровали:

$$B = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}.$$

Мы нашли искомым ортонормированный базис e'_1, e'_2, e'_3 из собственных векторов и матрицу B оператора в данном базисе. Теперь дополнительно найдём матрицу перехода от ортонормированного базиса e_1, e_2, e_3 к ортонормированному базису e'_1, e'_2, e'_3 .

Составим из координат векторов e'_1, e'_2, e'_3 матрицу C следующим образом: в первый столбец запишем координаты вектора e'_1 в базисе e_1, e_2, e_3 , во второй столбец запишем координаты вектора e'_2 в том же базисе, а в третий столбец — координаты вектора e'_3 в том же базисе:

$$C = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Тогда C и есть ортогональная матрица перехода от ортонормированного базиса e_1, e_2, e_3 к ортонормированному базису e'_1, e'_2, e'_3 , и имеет место равенство

$$B = C^{-1}AC = C^TAC.$$

Заметим, что $\det C = -1$, то есть эта замена координат меняет ориентацию. Если бы мы хотели, чтобы замена координат сохраняла ориентацию, то мы изменили бы знак у одного из базисных векторов: например, мы могли бы взять

$$e'_3 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

Соответственно, в матрице C поменялся бы знак у чисел из третьего столбца. \square

Задача 87 (по мотивам № 1586 из [6]). Найти канонический вид и соответствующий канонический базис для линейного оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе e_1, e_2, e_3 матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}.$$

Решение. Оператор, заданный матрицей A , является самосопряжённым, поэтому существует базис из собственных векторов, и в этом базисе матрица оператора диагональна.

Как и в задаче 86, начнём с поиска собственных чисел матрицы A . Характеристический многочлен равен

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 17-\lambda & -8 & 4 \\ -8 & 17-\lambda & -4 \\ 4 & -4 & 11-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 45\lambda^2 - 567\lambda + 2187.$$

Чтобы найти корни характеристического многочлена, сначала подбираем один корень, подставляя делители свободного коэффициента $2187 = 3^7$. Например, можно обнаружить, что корнем является 9. Разделив столбиком $\chi(\lambda)$ на $\lambda - 9$, получаем

$$\chi(\lambda) = (\lambda - 9)(-\lambda^2 + 36\lambda - 243).$$

Корни квадратного многочлена $-\lambda^2 + 36\lambda - 243$ найти уже легко: это 9 и 27.

В результате мы видим, что собственные числа матрицы A суть $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 9$ и $\lambda_3 = 27$. Отсюда следует канонический вид оператора

$$B = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}.$$

В отличие от задачи 86 среди собственных чисел есть кратные, что усложняет решение.

Начнём с собственного числа $\lambda_3 = 27$ кратности 1. Тут всё как в задаче 86. Если вектор e'_3 имеет координаты (x_1, x_2, x_3) в базисе e_1, e_2, e_3 , то имеет место соотношение

$$(A - \lambda_3 E) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

то есть

$$\begin{pmatrix} -10 & -8 & 4 \\ -8 & -10 & -4 \\ 4 & -4 & -16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Общее решение этой системы линейных уравнений имеет вид $x_1 = 2x_3$, $x_2 = -2x_3$, $x_3 = x_3$, то есть в базисе e_1, e_2, e_3 вектор e'_3 имеет вид $(2x_3, -2x_3, x_3)$. Так как нам нужен вектор единичной длины, надо взять $x_3 = \pm \frac{1}{3}$. Выбрав, например, $x_3 = \frac{1}{3}$, получаем

$$e'_3 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right).$$

Рассмотрим теперь собственные значения $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$. Матрица

$$A - 9E = \begin{pmatrix} 8 & -8 & 4 \\ -8 & 8 & -4 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

не просто вырождена, а имеет ранг 1, что видно из того, что все её строки пропорциональны. Поэтому система линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} 8 & -8 & 4 \\ -8 & 8 & -4 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \tag{5.4}$$

имеет двумерное пространство решений. В качестве e'_1 и e'_2 нам нужны два таких решения, что соответствующие векторы имеют длину 1 и ортогональны друг другу. Чтобы этого добиться, поступим таким образом. Сначала возьмём произвольное ненулевое решение линейной системы (5.4), например $(1, 1, 0)$. Так как нам нужен вектор единичной длины, нормируем $(1, 1, 0)$ и возьмём полученный вектор в качестве e'_1 , то есть

$$e'_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right).$$

Есть разные способы нахождения e'_2 . Разберём два из них.

Первый способ основан на том, что в данной задаче мы работаем в трёхмерном пространстве, поэтому если мы знаем два базисных

вектора e'_1 и e'_3 из ортонормированного базиса, то оставшийся вектор можно найти через векторное произведение:

$$e'_2 = [e'_3, e'_1] = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{4}{3\sqrt{2}}\right).$$

Второй способ не использует трёхмерность пространства (а потому годится в случае произвольной размерности) и основан на том, что в качестве e'_2 можно выбрать решение системы линейных уравнений (5.4), ортогональное вектору e'_1 . Это условие ортогональности тоже является линейным уравнением, и мы получаем систему линейных уравнений (из трёх пропорциональных уравнений в (5.4) мы оставили только третье)

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Общее решение этой системы имеет вид $\left(-\frac{1}{4}x_3, \frac{1}{4}x_3, x_3\right)$. Условие единичной длины даёт нам $x_3 = \pm \frac{4}{3\sqrt{2}}$. Выбрав, например, $x_3 = \frac{4}{3\sqrt{2}}$, получаем

$$e'_2 = \left(-\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{4}{3\sqrt{2}}\right),$$

что совпадает с ответом, полученным предыдущим способом. Если бы мы выбрали другой знак у x_3 , то ответы отличались бы знаком.

Заметим, что вычисления иногда несколько упрощаются, если сперва найти ортогональный базис, состоящий из собственных векторов оператора f , а только потом нормировать его векторы.

Итак, мы нашли ортонормированный базис e'_1, e'_2, e'_3 из собственных векторов и матрицу B оператора в данном базисе. Теперь можно, как и в решении задачи 86, дополнительно построить ортогональную матрицу C перехода от ортонормированного базиса e_1, e_2, e_3 к ортонормированному базису e'_1, e'_2, e'_3 , записав по столбцам координаты векторов e'_1, e'_2, e'_3 :

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Тогда имеет место равенство

$$B = C^{-1}AC = C^TAC = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix},$$

как и должно быть.

Заметим, что $\det C = 1$, то есть это ортогональное преобразование, сохраняющее ориентацию. Если бы требовалось преобразование, меняющее ориентацию, то достаточно было бы умножить на -1 один из базисных векторов. \square

5.3. Ортогональные и унитарные операторы

Задача 88 (по мотивам № 1578 из [6]). Найти канонический вид и соответствующий канонический базис для унитарного оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе e_1, e_2, e_3 матрицей

$$A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4+3i & 4i & -6-2i \\ -4i & 4-3i & -2-6i \\ 6+2i & -2-6i & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Решение. Как известно, для любого унитарного оператора существует такой ортонормированный базис, что матрица оператора в этом базисе имеет канонический вид, то есть она диагональна и на диагонали стоят числа, по модулю равные единице. Поэтому решение похоже на решение задач диагонализации самосопряжённых операторов, см. задачи 86 и 87.

Начнём с поиска собственных чисел. Характеристический многочлен матрицы A равен (не забудем про множитель $\frac{1}{9}$ перед матрицей в формуле (5.5))

$$\chi(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} \frac{4+3i}{9} - \lambda & \frac{4i}{9} & \frac{-6-2i}{9} \\ \frac{-4i}{9} & \frac{4-3i}{9} - \lambda & \frac{-2-6i}{9} \\ \frac{6+2i}{9} & \frac{-2-6i}{9} & \frac{1}{9} - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1.$$

Нам пришлось проделать сложные вычисления, чтобы найти характеристический многочлен, но мы вознаграждены за труды: сам характеристический многочлен $\chi(\lambda)$ достаточно прост. Сразу видно, что у него один из корней равен 1. Разделив столбиком $\chi(\lambda)$ на $\lambda - 1$, получим

$$\chi(\lambda) = (\lambda - 1)(-\lambda^2 - 1).$$

Очевидно, что корнями многочлена $-\lambda^2 - 1$ являются i и $-i$. Таким образом, собственные числа матрицы A суть $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = i$ и $\lambda_3 = -i$. Выбранная нами нумерация собственных чисел произвольна, но, раз выбрав её, мы должны придерживаться её до конца решения задачи.

Заметим, что все собственные числа получились по модулю равными единице, как и должно быть. Если бы это было не так, то это значило бы, что мы ошиблись в предыдущих вычислениях.

Нам повезло в том, что все собственные числа разные, это упрощает дальнейшую работу. Если бы были кратные собственные числа, то мы бы в дальнейшем поступали аналогично задаче 87. Найдём теперь ортонормированный базис из собственных векторов e'_1, e'_2, e'_3 , в котором матрица оператора будет диагональной.

Если вектор e'_1 имеет координаты (x_1, x_2, x_3) , то имеет место соотношение

$$(A - \lambda_1 E) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

то есть

$$\begin{pmatrix} \frac{4+3i}{9} - 1 & \frac{4i}{9} & \frac{-6-2i}{9} \\ \frac{-4i}{9} & \frac{4-3i}{9} - 1 & \frac{-2-6i}{9} \\ \frac{6+2i}{9} & \frac{-2-6i}{9} & \frac{1}{9} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Общее решение имеет вид $(-2ix_3, -2x_3, x_3)$. Нам нужно решение единичной длины, причём у нас не евклидово, а эрмитово скалярное произведение! Поэтому получаем условие

$$\sqrt{(-2ix_3)(-2ix_3) + (-2x_3)(-2x_3) + \bar{x}_3 x_3} = 1,$$

то есть

$$|x_3| \sqrt{4 + 4 + 1} = 1,$$

откуда $x_3 = \frac{1}{3}e^{i\varphi}$, где φ — произвольное вещественное число. Возьмём, например, значение $x_3 = \frac{1}{3}$, откуда получаем

$$e'_1 = \left(-\frac{2}{3}i, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Аналогичными вычислениями получим (ответы могут отличаться умножением на любое комплексное число, по модулю равное 1)

$$e'_2 = \left(\frac{2}{3}i, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \quad e'_3 = \left(-\frac{1}{3}i, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Запишем матрицу C перехода от исходного базиса к базису e'_1, e'_2, e'_3 :

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}i & \frac{2}{3}i & -\frac{1}{3}i \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Решение задачи на этом закончено, но можно сделать дополнительную проверку правильности полученного ответа. Непосредственным вычислением можно убедиться, что $C\overline{C}^T = E$, то есть это и в самом деле унитарная матрица. Также непосредственным вычислением можно проверить, что искомым канонический вид B дан формулой

$$B = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix},$$

то есть B — диагональная матрица, на диагонали которой стоят собственные числа в том порядке, в котором мы их занумеровали. \square

Задача 89 (по мотивам № 1571 из [6]). Найти канонический вид и соответствующий канонический базис для ортогонального оператора f , заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Решение. Начнём с поиска собственных чисел матрицы A . Характеристический многочлен имеет вид

$$\chi(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} - \lambda & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} - \lambda & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1.$$

Сразу видно, что 1 является корнем $\chi(\lambda)$. Разделив $\chi(\lambda)$ столбиком на $\lambda - 1$, получаем

$$\chi(\lambda) = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 1).$$

Корнями квадратного многочлена $-\lambda^2 + 1$ являются 1 и -1 . В результате мы видим, что собственные числа суть $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ и $\lambda_3 = -1$.

Выбранная нами нумерация собственных чисел произвольна, но, выбрав её, мы должны придерживаться её до конца решения задачи.

К счастью, все собственные числа вещественные, что упрощает нашу задачу. В данном случае искомым ортонормированный базис e'_1, e'_2, e'_3 будет состоять из собственных векторов, а каноническим видом будет диагональная матрица с собственными числами на диагонали. Случай, когда среди собственных чисел есть комплексные, рассмотрен в задаче 90.

Проще всего найти базисный вектор e'_3 , отвечающий собственному значению $\lambda_3 = -1$ кратности 1. Если вектор e'_3 имеет координаты (x_1, x_2, x_3) , то имеет место соотношение

$$(A - \lambda_3 E) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

то есть

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Общим решением данной системы линейных уравнений является $(x_3, -2x_3, x_3)$. Так как нам нужно решение единичной длины, надо взять $x_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$. Выбрав, например, $x_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}$, получаем

$$e'_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right).$$

Сложнее обстоит дело с собственными векторами e'_1 и e'_2 , отвечающими собственному значению $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ кратности 2. Соответствующая система линейных уравнений имеет вид

$$(A - 1E) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

то есть

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0, \quad (5.6)$$

и пространство её решений двумерно (это легко видеть — все строки матрицы пропорциональны). Общее решение этой системы линей-

ных уравнений имеет вид $(2x_2 - x_3, x_2, x_3)$. Выберем произвольное ненулевое решение, например $(-1, 0, 1)$. Нормируем его так, чтобы получившийся вектор имел единичную длину, и возьмём его в качестве e'_1 :

$$e'_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Далее, как в задаче 87, есть два способа найти вектор e'_2 . Первый способ заключается в том, что мы используем трёхмерность задачи и ищем вектор e'_2 , который должен дополнять ортогональные векторы e'_1 и e'_3 до ортонормированного базиса, с помощью векторного произведения:

$$e'_2 = [e'_3, e'_1] = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Второй способ чуть сложнее, но зато не использует трёхмерность и работает в общей ситуации. Мы знаем, что e'_2 должен быть решением системы (5.6), ортогональным вектору e'_1 , откуда получаем систему уравнений (мы оставили только первое уравнение в системе (5.6), так как все уравнения в (5.6) пропорциональны)

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Общее решение этой системы имеет вид (x_3, x_3, x_3) . Нормировав его, получаем

$$e'_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Заметим, что вычисления иногда несколько упрощаются, если сперва найти ортогональный базис, состоящий из собственных векторов оператора f , а только потом нормировать его векторы.

В найденном нами базисе оператор f имеет матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

так как в этом базисе матрица должна быть диагональной с собственными числами на диагонали (в порядке нумерации).

При желании можно дополнительно выписать ортогональную матрицу C перехода к базису e'_1, e'_2, e'_3 , записав в столбцах этой матрицы

координаты соответствующих базисных векторов,

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

и непосредственным вычислением убедиться, что $B = C^{-1}AC$. \square

Задача 90 (по мотивам № 1574 из [6]). Найти канонический вид и соответствующий канонический базис для ортогонального оператора f , заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Решение. В трёхмерном случае существует два принципиально различных способа решения данной задачи: один способ гораздо проще с вычислительной точки зрения, но он существенно использует трёхмерность пространства, т. е. его можно использовать для нахождения канонического вида и канонического базиса для ортогонального оператора лишь в трёхмерном пространстве. Другой способ более универсален — его можно применять к ортогональному оператору в пространстве любой размерности, но с вычислительной точки зрения он намного сложнее, поскольку требует нахождения комплексных собственных значений и соответствующих собственных векторов. Опишем оба способа решения.

Способ I. В трёхмерном случае канонический вид ортогонального оператора выглядит следующим образом:

$$B = \left(\begin{array}{c|cc} \pm 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{array} \right), \quad (5.7)$$

где $\varphi \in \mathbb{R}$ — некоторое число. Как известно, определитель матрицы линейного оператора не зависит от выбора базиса. Легко заметить, что определитель блочно-диагональной матрицы (5.7) равен ± 1 в зависимости от выбора знака в ее левом верхнем углу. Поэтому, вычисляя определитель исходной матрицы, мы определим этот знак в каноническом виде. В данном случае $\det A = 1$, значит, в левом верхнем

углу матрицы (5.7) стоит 1. Кроме того, след матрицы линейного оператора тоже не зависит от выбора базиса. Поэтому, вычисляя его в разных базисах, можем найти φ :

$$2 = \operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B = 1 + 2 \cos \varphi,$$

откуда $\cos \varphi = \frac{1}{2}$. Отсюда следует, что $\sin \varphi = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, причем любой выбор знака годится, поскольку канонический вид ортогонального оператора определен с точностью до этого выбора. Будем для определенности считать, например, что $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Найдем теперь канонический базис, соответствующий найденному каноническому виду. Поскольку в левом верхнем углу матрицы B стоит единица, она является собственным значением. Найдем соответствующий собственный вектор, а затем нормируем его. Полученный вектор и будет первым вектором канонического базиса. Поскольку

$$A - E = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad (5.8)$$

нетрудно заметить, что $e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T$. Далее, поскольку наш ортогональный оператор осуществляет поворот вокруг вектора e_1 на угол φ , для нахождения двух оставшихся векторов канонического базиса нам достаточно выбрать произвольный ортонормированный базис в плоскости, перпендикулярной вектору e_1 . Обычно такую пару векторов легко подобрать (канонический базис определен неоднозначно), а уже затем найденные векторы можно нормировать. В данном случае подойдут векторы

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, -1)^T, \quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1)^T.$$

Однако наш выбор ориентации базиса e_2, e_3 в плоскости, перпендикулярной вектору e_1 , должен быть согласован с выбором знака $\sin \varphi$ (поворот может происходить или по часовой стрелке, или против нее). Поскольку и то и другое мы выбирали произвольным образом, нам, возможно, придется поменять порядок векторов e_2 и e_3 (или изменить знак $\sin \varphi$). Если выбор оказался согласованным, то векторы Ae_2 и $\cos \varphi \cdot e_2 + \sin \varphi \cdot e_3$ должны совпадать. Проверим это:

$$Ae_2 = \frac{1}{3\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix},$$

$$\cos \varphi \cdot e_2 + \sin \varphi \cdot e_3 = \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что полученные векторы совпадают, т. е. выбор оказался согласованным. Таким образом, мы нашли канонический вид заданного ортогонального оператора и соответствующий канонический базис. Матрица перехода к этому базису получается выписыванием координат векторов канонического базиса по столбцам:

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Способ II. Как и в задаче 89, мы начнём с нахождения собственных чисел матрицы A . Характеристический многочлен равен

$$\chi(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} - \lambda & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} - \lambda & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 1.$$

Легко проверить непосредственной подстановкой, что 1 является корнем $\chi(\lambda)$. Разделив $\chi(\lambda)$ столбиком на $\lambda - 1$, получаем

$$\chi(\lambda) = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + \lambda - 1).$$

Корнями квадратного многочлена $-\lambda^2 + \lambda - 1$ являются

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

В результате мы видим, что собственные числа суть

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{и} \quad \lambda_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Выбранная нами нумерация собственных чисел произвольна, но, выбрав её, мы должны придерживаться её до конца решения задачи.

В отличие от задачи 89, здесь *есть комплексные собственные числа*, и это усложняет решение задачи. Построение ортогонального базиса, в котором матрица исследуемого оператора будет иметь канонический вид, начнём с нахождения e'_1 — собственного вектора единичной длины матрицы A с собственным числом $\lambda_1 = 1$. Если вектор e'_1 имеет координаты (x_1, x_2, x_3) , то имеет место соотношение

$$(A - \lambda_1 E) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

то есть

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Общим решением данной системы линейных уравнений является (x_3, x_3, x_3) . Поскольку e'_1 должен быть единичной длины, надо взять $x_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$. Выбрав, например, $x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, получаем

$$e'_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^T.$$

Найдём теперь комплексный собственный вектор v , отвечающий комплексному собственному числу

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Если этот вектор имеет координаты (x_1, x_2, x_3) , то имеет место соотношение

$$(A - \lambda_2 E) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

то есть

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}i & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}i & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\left(\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) x_3, \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) x_3, x_3 \right).$$

Как мы видим, какое бы значение x_3 мы ни взяли, результат не будет вещественным. Что же делать? Давайте возьмём $x_3 = 1$, тогда

$$v = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, 1 \right)^T.$$

Применив комплексное сопряжение к равенству $Av = \lambda_2 v$, мы получим $\bar{A}\bar{v} = \bar{\lambda}_2 \bar{v}$. Так как матрица A вещественна, а $\bar{\lambda}_2 = \lambda_3$, мы получаем

$$A\bar{v} = \lambda_3 \bar{v},$$

то есть \bar{v} является собственным вектором с собственным числом λ_3 . Это тоже комплексный вектор.

Заметим теперь, что векторы

$$\operatorname{Re} v = \frac{1}{2}(v + \bar{v}) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)^T$$

и

$$\operatorname{Im} v = \frac{1}{2i}(v - \bar{v}) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)^T$$

являются вещественным базисом в подпространстве, порождённом собственными векторами, отвечающим λ_2 и λ_3 . Эти векторы уже ортогональны, нам осталось только нормировать их и взять в качестве e'_2 и e'_3 :

$$e'_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)^T, \quad e'_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T.$$

Найдём теперь матрицу C перехода к базису e'_1, e'_2, e'_3 , записав координаты этих векторов в соответствующие столбцы:

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$B = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

а это и есть искомый канонический вид матрицы оператора f в базисе e'_1, e'_2, e'_3 .

Заметим, что ответ, полученный вторым способом, отличается от ответа, полученного первым способом. Это не должно удивлять: искомым базисов бесконечно много, а канонических форм для изучаемой матрицы A две, они отличаются знаком двух элементов, мы получили обе канонические формы.

Отметим также, что (2×2) -клетка

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

в матрице B вовсе не случайна — она, как и должно быть, состоит из вещественной и мнимой частей собственных чисел $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. \square

Замечание. Наблюдательный читатель мог заметить, что при решении некоторых задач мы записываем координаты векторов в строку, а при решении других — в столбец. Эта несогласованность вызвана причинами полиграфического, а не математического характера. Поскольку мы применяем операторы к векторам, правильнее записывать координаты вектора в столбец, так как при применении оператора к вектору матрица оператора в некотором базисе умножается справа на *столбец* его координат в этом базисе (иначе умножить справа нельзя). Однако запись координат всех векторов в столбец требует существенно больше места. Поэтому в тех задачах, где нет умножения матриц на векторы, мы записываем координаты векторов в строку, а пользуемся «правильной» записью в столбец лишь там, где это существенно.

5.4. Кососимметрические операторы

Задача 91. Найти канонический вид и соответствующий ортонормированный базис кососимметрического оператора, заданного (в некотором ортонормированном базисе) матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -2 \\ -6 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Как известно, если A — кососимметрическая матрица, то её квадрат A^2 является неположительно определённой симметрической матрицей. В самом деле,

$$(A^2)^T = (AA)^T = A^T A^T = (-A)(-A) = A^2$$

и

$$(A^2 v, v) = (Av, A^T v) = -(Av, Av) \leq 0.$$

Из этого немедленно следует, что собственные числа кососимметрической матрицы либо нулевые, либо чисто мнимые, так как если $Av = \lambda v$, то $A^2 v = \lambda^2 v$, то есть λ^2 является собственным числом неположительно определённой симметрической матрицы A^2 , а потому $\lambda^2 \leq 0$. Кроме того, из $A^T = -A$ немедленно следует, что если λ является собственным числом кососимметрической матрицы A , то и $-\lambda$ тоже является собственным числом.

Таким образом, собственные числа кососимметрической матрицы A имеют вид $\pm i\lambda_1, \dots, \pm i\lambda_n$, где λ_i вещественны, и, возможно, ещё

есть нулевое собственное значение, которое может быть кратным. Собственные числа матрицы A^2 тогда имеют вид $\hat{\lambda}_1 = \hat{\lambda}_2 = -\lambda_1^2, \dots, \hat{\lambda}_{2n-1} = \hat{\lambda}_{2n} = -\lambda_n^2$ и, возможно, ещё нулевое собственное значение.

В данной задаче легко найти характеристический многочлен матрицы A :

$$\chi(\lambda) = -\lambda^3 - 49\lambda,$$

откуда легко видеть, что собственными числами кососимметрической матрицы A являются $\pm 7i$ и 0 .

Тогда собственными числами для неположительно определённой симметрической матрицы

$$A^2 = \begin{pmatrix} -40 & -6 & -18 \\ -6 & -45 & 12 \\ -18 & 12 & -13 \end{pmatrix}$$

являются $\hat{\lambda}_1 = \hat{\lambda}_2 = -49$ и $\hat{\lambda}_3 = 0$.

Построим теперь для симметрической матрицы A^2 ортонормированный базис e'_1, e'_2, e'_3 из собственных векторов, отвечающих собственным числам $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2$ и $\hat{\lambda}_3$, как это описано в решениях задач 86 и 87. Этот базис определён неоднозначно, так как есть кратные собственные значения. Мы получим, например, базис

$$e'_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}} \right), \quad e'_2 = \left(\frac{2}{7\sqrt{5}}, \frac{15}{7\sqrt{5}}, -\frac{4}{7\sqrt{5}} \right), \quad e'_3 = \left(-\frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{6}{7} \right).$$

Опишем сначала общий алгоритм построения канонического базиса для кососимметрического оператора, заданного матрицей A . Для каждого собственного числа $\hat{\lambda} = -\lambda^2$ матрицы A^2 надо рассмотреть соответствующее собственное подпространство $V_{\hat{\lambda}}$. Если $\hat{\lambda} = 0$, то надо взять любой ортонормированный базис в V_0 . Если же $\hat{\lambda} \neq 0$, то в качестве e_1 выберем произвольный вектор из $V_{\hat{\lambda}}$ единичной длины и положим

$$e_2 = \frac{1}{\lambda} A e_1.$$

Тогда e_1 и e_2 ортогональны, так как

$$(e_1, e_2) = \frac{1}{\lambda} (e_1, A e_1) = 0$$

в силу кососимметричности A , и e_2 имеет единичную длину:

$$(e_2, e_2) = \frac{1}{\lambda^2} (A e_1, A e_1) = \frac{1}{\lambda^2} (e_1, A^2 e_1) = (e_1, e_1) = 1.$$

При этом

$$A e_1 = \lambda e_2, \quad A e_2 = \frac{1}{\lambda} A^2 e_1 = \frac{1}{\lambda} \hat{\lambda} e_1 = -\frac{\lambda^2}{\lambda} e_1 = -\lambda e_1,$$

то есть ограничение заданного матрицей A оператора на подпространство, порождённое векторами e_1 и e_2 , будет иметь в базисе e_1, e_2 матрицу $\begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$.

Если e_1 и e_2 порождают всё собственное подпространство V_λ , то следует переходить к следующему собственному подпространству, а если нет, то надо в V_λ выбрать произвольный вектор e_3 единичной длины, ортогональный e_1 и e_2 . По вектору e_3 строится уже известным образом вектор

$$e_4 = \frac{1}{\lambda} A e_3.$$

В силу уже описанных выше причин, e_4 имеет единичную длину и ортогонален e_3 . Более того, e_4 ортогонален и e_1 , и e_2 . Докажем, например, что e_4 ортогонален e_1 :

$$(e_1, e_4) = \frac{1}{\lambda} (e_1, A e_3) = -\frac{1}{\lambda} (A e_1, e_3) = -(e_2, e_3) = 0,$$

так как e_3 был выбран ортогональным к e_1 и e_2 . Поэтому ограничение заданного матрицей A оператора на подпространство, порождённое e_1, e_2, e_3 и e_4 , будет иметь в базисе e_1, e_2, e_3, e_4 матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

Если e_1, e_2, e_3 и e_4 порождают всё собственное подпространство V_λ , то следует переходить к следующему собственному подпространству, а если нет, то надо, как и раньше, выбрать в V_λ произвольный вектор e_5 единичной длины, ортогональный e_1, e_2, e_3 и e_4 , и снова повторять ту же конструкцию.

Изложив общий алгоритм, применим его к нашей задаче. Заметим, что e'_1 и e'_2 образуют базис в собственном подпространстве V_{-49} , соответствующем собственному числу $\hat{\lambda}_1 = \hat{\lambda}_2 = -49$ кратности 2. Поэтому в качестве e_1 возьмём e'_1 ,

$$e_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}} \right)^T,$$

а в качестве e_2 , следуя вышеописанному алгоритму, возьмём

$$e_2 = \frac{1}{7} A e_1 = \left(-\frac{2}{7\sqrt{5}}, -\frac{15}{7\sqrt{5}}, \frac{4}{7\sqrt{5}} \right)^T.$$

Так как собственное подпространство V_{-49} двумерно, можно переходить к следующему собственному подпространству V_0 . Заметим только,

что $e_2 = -e'_2$ не случайно: так как V_{-49} двумерно, $e_1 = e'_1$, вектор e'_2 ортогонален e'_1 , а вектор e_2 ортогонален e_1 , то неизбежно $e_2 = \pm e'_2$. В то же время, если размерность собственного подпространства больше двух, то базис e_i может существенно отличаться от базиса e'_i .

У нас есть ещё собственное число $\hat{\lambda}_3 = 0$. Соответствующий базисный вектор e'_3 надо просто взять в качестве базисного вектора e_3 :

$$e_3 = \left(-\frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{6}{7}\right)^T.$$

В результате получаем ортонормированный базис

$$e_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^T, \quad e_2 = \left(-\frac{2}{7\sqrt{5}}, -\frac{15}{7\sqrt{5}}, \frac{4}{7\sqrt{5}}\right)^T, \quad e_3 = \left(-\frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{6}{7}\right)^T$$

и каноническую форму исследуемого кососимметрического оператора:

$$\begin{pmatrix} 0 & -7 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение задачи на этом закончено, но при желании теперь результат несложно проверить прямым вычислением. Матрицей перехода к новому ортонормированному базису тогда будет матрица из координат базисных векторов e_1, e_2, e_3 , записанных по столбцам,

$$C = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{7\sqrt{5}} & -\frac{3}{7} \\ 0 & -\frac{15}{7\sqrt{5}} & \frac{2}{7} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{7\sqrt{5}} & \frac{6}{7} \end{pmatrix},$$

а канонической формой — матрица изучаемого кососимметрического оператора в базисе e_1, e_2, e_3 , равная

$$\begin{aligned} C^{-1}AC &= \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{7\sqrt{5}} & -\frac{3}{7} \\ 0 & -\frac{15}{7\sqrt{5}} & \frac{2}{7} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{7\sqrt{5}} & \frac{6}{7} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 6 & -2 \\ -6 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{7\sqrt{5}} & -\frac{3}{7} \\ 0 & -\frac{15}{7\sqrt{5}} & \frac{2}{7} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{7\sqrt{5}} & \frac{6}{7} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -7 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

5.5. Полярное разложение

Задача 92 (№ 1600 из [6]). Матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

представить в виде произведения симметрической матрицы с положительными собственными числами на ортогональную матрицу.

Решение. Допустим, что мы нашли искомое разложение

$$A = \Sigma \Omega,$$

где Σ — симметрическая матрица с положительными собственными числами, а Ω — ортогональная матрица. Тогда

$$AA^T = \Sigma \Omega \Omega^T \Sigma^T = \Sigma E \Sigma = \Sigma^2.$$

Таким образом, Σ является корнем квадратным из AA^T . Наоборот, пусть Σ является некоторым корнем квадратным из AA^T , то есть пусть Σ удовлетворяет соотношению

$$AA^T = \Sigma^2.$$

Определим матрицу Ω формулой

$$\Omega = \Sigma^{-1}A.$$

Тогда

$$\Omega \Omega^T = \Sigma^{-1} A A^T \Sigma^{-1} = \Sigma^{-1} \Sigma^2 \Sigma^{-1} = E,$$

то есть матрица Ω ортогональна. Таким образом, мы получим искомые Σ и Ω . Остается проделать эти вычисления.

Прямое вычисление даёт

$$AA^T = \begin{pmatrix} 24 & 6 & -12 \\ 6 & 33 & 6 \\ -12 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица симметрична, а потому может быть представлена в виде $CBCT$, где C — подходящая ортогональная матрица, а B — диагональная матрица. Как искать такое представление, показано в задачах [86](#) и [87](#). Найдём это представление. Характеристический многочлен матрицы AA^T равен

$$\chi(\lambda) = \det(AA^T - \lambda E) = -\lambda^3 + 81\lambda^2 - 1944\lambda + 11664.$$

Перебирая делители числа $11664 = 2^4 \cdot 3^6$, находим корень 9. Разделив $\chi(\lambda)$ столбиком на $\lambda - 9$, получим

$$\chi(\lambda) = (\lambda - 9)(-\lambda^2 + 72\lambda - 1296).$$

У квадратного многочлена $-\lambda^2 + 72\lambda - 1296$ имеется корень 36 кратности 2. Таким образом, собственные числа матрицы AA^T суть $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 36$.

Так как у нас есть собственные числа кратности большей чем 1, ищем ортонормированный базис из собственных векторов как в задаче 86. В результате получим, например, базис (данный базис не единственный)

$$e'_1 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \quad e'_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right), \quad e'_3 = \left(-\frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}}\right).$$

Записывая координаты векторов e'_1, e'_2, e'_3 по столбцам, получаем матрицу C перехода к ортонормированному базису e'_1, e'_2, e'_3 :

$$C = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4\sqrt{5}}{15} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2\sqrt{5}}{15} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5\sqrt{5}}{15} \end{pmatrix}.$$

Тогда верно равенство $B = C^T AA^T C$, где B — диагональная матрица с собственными числами на диагонали:

$$B = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{pmatrix}.$$

Так как $AA^T = CBC^T$, легко извлечь квадратный корень из AA^T . Пусть \sqrt{B} — положительный квадратный корень из B :

$$\sqrt{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\Sigma = C\sqrt{B}C^T$ — квадратный корень из AA^T . В самом деле,

$$\Sigma^2 = C\sqrt{B}C^T C\sqrt{B}C^T = C\sqrt{B}\sqrt{B}C^T = CBC^T = AA^T.$$

Прямое вычисление даёт

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \frac{14}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{17}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{14}{3} \end{pmatrix}.$$

Это симметрическая матрица с положительными собственными числами 3, 6 и 6.

Тогда мы знаем и искомую ортогональную матрицу

$$\Omega = \Sigma^{-1}A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что можно вычислять Σ^{-1} не напрямую, обращая матрицу Σ , а используя формулу $\Sigma^{-1} = C(\sqrt{B})^{-1}C^T$.

В результате получаем искомое разложение матрицы A в произведение симметрической положительно определённой и ортогональной матриц:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{14}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{17}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{14}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}. \quad \square$$

Замечания. 1. Наряду с описанным выше полярным разложением можно рассматривать и полярное разложение в обратном порядке, т. е. представлять невырожденную матрицу A в виде

$$A = \Omega \Sigma,$$

где Ω — ортогональная, а Σ — симметрическая с положительными собственными числами. Решается эта задача совершенно аналогично разобранный выше, но с одной лишь разницей: для нахождения матрицы Σ надо извлекать положительный квадратный корень из матрицы $A^T A$, а ортогональную матрицу Ω определять следующим образом:

$$\Omega = A \Sigma^{-1}.$$

2. Иногда задача о полярном разложении формулируется в терминах операторов: представить невырожденный оператор, заданный матрицей в некотором базисе, в виде композиции положительного самосопряженного и ортогонального.

ГЛАВА 6

Квадратичные формы в евклидовом пространстве

6.1. Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональными преобразованиями

Задача 93 (№ 1243 из [6]). Найти канонический вид, к которому приводится квадратичная форма

$$3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3 \quad (6.1)$$

посредством ортогонального преобразования, не находя самого этого преобразования.

Решение. Запишем сначала матрицу, соответствующую рассматриваемой нами квадратичной форме:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Как известно, ортогональные преобразования одинаковым образом преобразуют матрицы операторов и квадратичных форм. Поэтому задача сводится к задаче диагонализации самосопряжённого оператора, см. задачи 86 и 87. Нам не нужно само преобразование, а только итоговая матрица. Мы уже знаем, что у оператора после диагонализации в получившейся матрице на диагонали стоят собственные числа. Найдём их в нашем случае.

Характеристический многочлен матрицы B равен

$$\chi(\lambda) = \det(B - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 3 - \lambda & -1 \\ 2 & -1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 32.$$

Перебирая делители свободного члена $32 = 2^5$, находим корень -2 характеристического многочлена. Разделив $\chi(\lambda)$ столбиком на $\lambda + 2$, получаем равенство

$$\chi(\lambda) = (\lambda + 2)(-\lambda^2 + 8\lambda - 16).$$

У квадратного многочлена $-\lambda^2 + 8\lambda - 16$ имеется корень 4 кратности 2. В результате собственными числами матрицы B оказываются $\lambda_1 = -2$ и $\lambda_2 = \lambda_3 = 4$. Поэтому в ортонормированном базисе из собственных векторов матрица квадратичной формы (6.1) будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

откуда получаем канонический вид $-2\tilde{x}_1^2 + 4\tilde{x}_2^2 + 4\tilde{x}_3^2$, или, расположив сначала положительные собственные числа, а потом отрицательные, $4\bar{x}_1^2 + 4\bar{x}_2^2 - 2\bar{x}_3^2$. \square

Задача 94 (№ 1248 из [6]). Найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму

$$6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 \quad (6.2)$$

к каноническому виду, и найти этот канонический вид.

Решение. Запишем сперва матрицу, соответствующую рассматриваемой нами квадратичной форме:

$$B = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Как мы уже отмечали в решении задачи 93, ортогональные преобразования одинаковым образом преобразуют матрицы операторов и квадратичных форм. Поэтому задача сводится к задаче диагонализации самосопряжённого оператора, см. задачи 86 и 87.

Характеристический многочлен матрицы B равен

$$\chi(\lambda) = \det(B - \lambda E) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 5-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 18\lambda^2 - 99\lambda + 162.$$

Перебирая делители свободного члена $162 = 2 \cdot 3^4$, находим корень 3. Разделив $\chi(\lambda)$ столбиком на $\lambda - 3$, получаем равенство

$$\chi(\lambda) = (\lambda - 3)(-\lambda^2 + 15\lambda - 54).$$

Корнями квадратного многочлена $-\lambda^2 + 15\lambda - 54$ являются 6 и 9. В результате собственными числами матрицы B оказываются $\lambda_1 = 3$

и $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 9$. Поэтому в ортонормированном базисе из собственных векторов матрица квадратичной формы (6.2) будет иметь вид

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix},$$

откуда получаем канонический вид

$$3\tilde{x}_1^2 + 6\tilde{x}_2^2 + 9\tilde{x}_3^2. \quad (6.3)$$

Однако нам в данной задаче надо найти и ортогональное линейное преобразование, переводящее квадратичную форму (6.2) в канонический вид (6.3). Для этого надо найти ортонормированный базис e'_1, e'_2, e'_3 из собственных векторов симметрической матрицы B . Мы это делали уже в задачах 86 и 87, поэтому приводить все детали не будем.

Собственные числа у нас все разные, как в задаче 86. Если вектор e'_1 имеет координаты (x_1, x_2, x_3) , то имеет место соотношение

$$(B - \lambda_1 E) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Так как $\lambda_1 = 3$, это соотношение принимает вид

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Это система однородных линейных уравнений, которую легко решить. Общее решение имеет вид $(-2x_3, -2x_3, x_3)$. Так как мы ищем ортонормированный базис, этот вектор должен иметь единичную длину, поэтому $x_3 = \pm \frac{1}{3}$. Знак можно выбрать произвольно. Выберем $x_3 = \frac{1}{3}$, тогда получаем

$$e'_1 = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Рассуждая аналогичным образом, мы получаем

$$e'_2 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \quad e'_3 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Матрица C перехода от исходного базиса к базису e'_1, e'_2, e'_3 состоит из координат векторов e'_1, e'_2, e'_3 , записанных в соответствующих столбцах:

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Можно проверить, что

$$\tilde{B} = C^T B C.$$

Записать замену координат в терминах x_i и \tilde{x}_i тоже просто:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix},$$

то есть

$$x_1 = -\frac{2}{3}\tilde{x}_1 - \frac{1}{3}\tilde{x}_2 + \frac{2}{3}\tilde{x}_3,$$

$$x_2 = -\frac{2}{3}\tilde{x}_1 + \frac{2}{3}\tilde{x}_2 - \frac{1}{3}\tilde{x}_3,$$

$$x_3 = \frac{1}{3}\tilde{x}_1 + \frac{2}{3}\tilde{x}_2 + \frac{2}{3}\tilde{x}_3.$$

Решение задачи на этом закончено, но в качестве проверки можно непосредственной подстановкой убедиться, что эта ортогональная замена координат переводит квадратичную форму (6.2) в квадратичную форму (6.3). \square

6.2. Приведение пары квадратичных форм к каноническому виду

Задача 95 (№ 1226 из [6]). Проверить, что в паре квадратичных форм

$$\varphi = 8x_1^2 - 28x_2^2 + 14x_3^2 + 16x_1x_2 + 14x_1x_3 + 32x_2x_3,$$

$$\psi = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3$$

по крайней мере одна форма является положительно определённой. Найти невырожденное линейное преобразование, приводящее эту форму к нормальному, а другую форму той же пары к каноническому виду, и найти этот канонический вид.

Решение. Начнём с того, что запишем матрицы, отвечающие нашим квадратичным формам. Квадратичной форме φ отвечает матрица

$$\Phi = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 7 \\ 8 & -28 & 16 \\ 7 & 16 & 14 \end{pmatrix},$$

квадратичной форме ψ отвечает матрица

$$\Psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Как мы знаем из критерия Сильвестра, квадратичная форма является положительно определённой тогда и только тогда, когда все главные миноры положительны. Квадратичная форма φ не является положительно определённой, так как

$$\begin{vmatrix} 8 & 8 \\ 8 & -28 \end{vmatrix} = -288 < 0.$$

А квадратичная форма ψ является положительно определённой, так как

$$1 > 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 > 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0.$$

Найдём тогда совместные собственные числа пары матриц Φ и Ψ , то есть корни многочлена

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) = \det(\Phi - \lambda\Psi) &= \begin{vmatrix} 8-\lambda & 8 & 7-\lambda \\ 8 & -28-4\lambda & 16 \\ 7-\lambda & 16 & 14-2\lambda \end{vmatrix} = \\ &= -4\lambda^3 + 36\lambda^2 + 324\lambda - 2916 = 4(-\lambda^3 + 9\lambda^2 + 81\lambda - 729). \end{aligned}$$

Перебирая делители числа $729 = 3^6$, найдём, например, корень 9. Разделив $\chi(\lambda)$ столбиком на $\lambda - 9$, получаем равенство

$$\chi(\lambda) = 4(\lambda - 9)(-\lambda^2 + 81).$$

Корнями квадратного многочлена $-\lambda^2 + 81$ являются 9 и -9 . В результате совместными собственными числами матриц Φ и Ψ являются $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = -9$.

Теперь нам надо найти базис e'_1, e'_2, e'_3 , обладающий следующими свойствами.

1. Верно равенство $(\Phi - \lambda_i\Psi)e'_i = 0$.
2. Векторы e'_1, e'_2, e'_3 образуют ортонормированный базис относительно скалярного произведения, заданного симметрической матрицей Ψ .

При этом если $\lambda_i \neq \lambda_j$, то заведомо решения e'_i и e'_j уравнений

$$(\Phi - \lambda_i\Psi)e'_i = 0 \quad \text{и} \quad (\Phi - \lambda_j\Psi)e'_j = 0$$

всегда ортогональны друг другу относительно скалярного произведения, заданного симметрической матрицей Ψ .

Рассмотрим для начала собственное значение $\lambda_3 = -9$ кратности 1. Если вектор e'_3 имеет координаты (x_1, x_2, x_3) , то имеет место соотно-

шение

$$(\Phi - \lambda_3 \Psi) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Так как $\lambda_3 = -9$, это соотношение принимает вид

$$\begin{pmatrix} 17 & 8 & 16 \\ 8 & 8 & 16 \\ 16 & 16 & 32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Общее решение данной системы линейных уравнений имеет вид $(0, -2x_3, x_3)$. Условие того, что этот вектор имеет длину 1 относительно скалярного произведения, заданного симметрической матрицей Ψ , имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & -2x_3 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = 1.$$

Преобразуя, получаем

$$18x_3^2 = 1,$$

откуда $x_3 = \pm \frac{1}{3\sqrt{2}}$. Выбрав, например, $x_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}}$, получаем

$$e'_3 = \left(0, -\frac{2}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\right).$$

Случай собственных чисел $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$ кратности 2 более сложен. Мы имеем

$$\Phi - 9\Psi = \begin{pmatrix} -1 & 8 & -2 \\ 8 & -64 & 16 \\ -2 & 16 & -4 \end{pmatrix}.$$

Все строки пропорциональны, поэтому координаты векторов e'_1 и e'_2 удовлетворяют уравнению

$$-x_1 + 8x_2 - 2x_3 = 0. \quad (6.4)$$

Выберем любое решение этого уравнения, например $(-2, 0, 1)$. Квадрат длины этого вектора относительно скалярного произведения, заданного симметрической матрицей Ψ , равен

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2.$$

Чтобы получить вектор длины 1, разделим $(-2, 0, 1)$ на $\sqrt{2}$:

$$e'_1 = \left(-\sqrt{2}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Координаты вектора e'_2 должны удовлетворять уравнению (6.4), но также и условию ортогональности вектору e'_1 относительно скалярного произведения, заданного симметрической матрицей Ψ , а это линейное уравнение

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

то есть

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 = 0. \quad (6.5)$$

В результате мы имеем систему линейных уравнений (6.4) и (6.5). Общее решение этой системы имеет вид $(0, \frac{1}{4}x_3, x_3)$. Условие того, что этот вектор имеет длину 1 относительно скалярного произведения, заданного симметрической матрицей Ψ , имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4}x_3 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = 1.$$

Преобразовав, получаем уравнение

$$\frac{9}{4}x_3^2 = 1,$$

откуда $x_3 = \pm \frac{2}{3}$. Выбирая, например, $x_3 = \frac{2}{3}$, получаем

$$e'_2 = \left(0, \frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right).$$

Заметим, что полученный базис не является единственным, возможны и другие ответы.

Матрица C перехода к базису e'_1, e'_2, e'_3 состоит из координат этих векторов, записанных по столбцам:

$$C = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{2}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Для решения задачи это не нужно, но для проверки можно непосредственным вычислением удостовериться, что

$$C^T \Phi C = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}, \quad C^T \Psi C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Записать замену координат в терминах x_i и новых координат \tilde{x}_i тоже просто:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix},$$

то есть

$$\begin{aligned} x_1 &= -\sqrt{2}\tilde{x}_1, \\ x_2 &= \frac{1}{6}\tilde{x}_2 - \frac{2}{3\sqrt{2}}\tilde{x}_3, \\ x_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{x}_1 + \frac{2}{3}\tilde{x}_2 + \frac{1}{3\sqrt{2}}\tilde{x}_3. \end{aligned}$$

Так как совместными собственными числами матриц Φ и Ψ являются $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$ и $\lambda_3 = -9$ и мы выше занумеровали их именно в таком порядке, следовательно,

$$\varphi = 9\tilde{x}_1^2 + 9\tilde{x}_2^2 - 9\tilde{x}_3, \quad \psi = \tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 + \tilde{x}_3^2,$$

в чём, в качестве дополнительной проверки, можно убедиться с помощью непосредственного вычисления. \square

Замечание. В случае, когда обе формы положительно определены, можно выбрать любую из них и привести ее к нормальному виду, а другую — к каноническому.

ГЛАВА 7

Тензоры

7.1. Основные свойства тензоров

Существует три различных подхода к тензорам — их можно определять как полилинейные функции, как наборы коэффициентов, преобразующиеся по определенному закону при переходе к другому базису, или как элементы тензорных произведений линейных пространств. Поскольку эти подходы эквивалентны, мы не будем вводить загромождающих обозначений и всюду в дальнейшем будем одним и тем же символом обозначать набор коэффициентов тензора, элемент тензорного произведения и соответствующую полилинейную функцию.

Задача 96. Пусть $[\cdot, \cdot]: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ — векторное произведение в ориентированном трёхмерном пространстве, а e_1, e_2, e_3 — произвольный базис в \mathbb{R}^3 . Доказать, что набор коэффициентов a_{ij}^k , определенных равенствами $[e_i, e_j] = a_{ij}^k e_k$, образует тензор.

Решение. Пусть $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$ — другой базис в пространстве \mathbb{R}^3 и $\tilde{a}_{\alpha\beta}^\gamma$ — коэффициенты разложения векторных произведений в этом базисе. Пусть $C = (c_\alpha^i)$ — матрица перехода от базиса e_1, e_2, e_3 к базису $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$, а $D = C^{-1} = (d_i^\alpha)$ — матрица обратного перехода. Тогда имеют место следующие равенства:

$$[\tilde{e}_\alpha, \tilde{e}_\beta] = [c_\alpha^i e_i, c_\beta^j e_j] = c_\alpha^i c_\beta^j [e_i, e_j] = c_\alpha^i c_\beta^j a_{ij}^k e_k = c_\alpha^i c_\beta^j a_{ij}^k d_k^\gamma \tilde{e}_\gamma.$$

С другой стороны,

$$[\tilde{e}_\alpha, \tilde{e}_\beta] = \tilde{a}_{\alpha\beta}^\gamma \tilde{e}_\gamma.$$

Таким образом,

$$\tilde{a}_{\alpha\beta}^\gamma = c_\alpha^i c_\beta^j d_k^\gamma a_{ij}^k,$$

то есть рассматриваемый набор коэффициентов преобразуется по тензорному закону и представляет собой тензор из пространства $T_2^1(\mathbb{R}^3)$. \square

Задача 97. Каждому базису в \mathbb{R}^n сопоставлен один и тот же набор чисел

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} = \begin{cases} 0, & \text{если среди индексов } i_1, i_2, \dots, i_n \text{ есть повторы,} \\ \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}, & \text{если все индексы } i_1, i_2, \dots, i_n \text{ различны.} \end{cases}$$

Доказать, что $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}$ не является тензором.

Решение. Для того, чтобы показать, что некоторый набор чисел не образует тензор, достаточно предъявить такую замену базиса, при которой тензорный закон преобразования координат нарушается. Рассмотрим, например, два базиса $\{e_1, e_1, \dots, e_n\}$ и $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$, которые связаны следующим образом:

$$\tilde{e}_1 = 2e_1, \quad \tilde{e}_2 = e_2, \quad \dots, \quad \tilde{e}_n = e_n.$$

Тогда соответствующая матрица перехода $C = (c_j^i)$ диагональна, причем $c_1^1 = 2$ и $c_i^i = 1$ при $i > 1$. Если предположить, что набор чисел $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}$ образует тензор, то тогда, в частности, должно быть выполнено равенство

$$\tilde{\varepsilon}_{12 \dots n} = c_1^1 c_2^2 \dots c_n^n \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} = 2\varepsilon_{12 \dots n}.$$

Однако по определению $\tilde{\varepsilon}_{12 \dots n} = \varepsilon_{12 \dots n} = 1$. Противоречие. Таким образом, набор чисел $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}$ не образует тензор. \square

Задача 98. Пусть e_1, e_2, e_3 — базис в линейном пространстве V . Найти разложение тензора

$$T = (e_1 + e_2 - 3e_3) \otimes (2e_1 - e_2 + e_3) - (3e_1 - 2e_2 + e_3) \otimes (e_1 - e_2 - e_3)$$

по базису $\{e_i \otimes e_j\}$ в пространстве тензоров $T_0^2(V)$.

Решение. Раскрывая скобки и пользуясь линейностью тензорного произведения, получаем:

$$\begin{aligned} T &= 2e_1 \otimes e_1 - e_1 \otimes e_2 + e_1 \otimes e_3 + 2e_2 \otimes e_1 - e_2 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_3 - 6e_3 \otimes e_1 + \\ &+ 3e_3 \otimes e_2 - 3e_3 \otimes e_3 - 3e_1 \otimes e_1 + 3e_1 \otimes e_2 + 3e_1 \otimes e_3 + 2e_2 \otimes e_1 - 2e_2 \otimes e_2 - \\ &- 2e_2 \otimes e_3 - e_3 \otimes e_1 + e_3 \otimes e_2 + e_3 \otimes e_3 = -e_1 \otimes e_1 + 2e_1 \otimes e_2 + 4e_1 \otimes e_3 + \\ &+ 4e_2 \otimes e_1 - 3e_2 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_3 - 7e_3 \otimes e_1 + 4e_3 \otimes e_2 - 2e_3 \otimes e_3. \end{aligned} \quad \square$$

Задача 99. Пусть $u, v \in V$ — векторы, а $\xi, \eta \in V^*$ — ковекторы. Пусть полилинейная функция T определена равенством

$$T(u, v, \xi, \eta) = \det \begin{pmatrix} \xi(u) & \eta(u) \\ \xi(v) & \eta(v) \end{pmatrix}.$$

Найти разложение тензора T по базису $\{e^i \otimes e^j \otimes e_k \otimes e_l\}$ в пространстве тензоров $T_2^2(V)$.

Решение. Поскольку $T = T_{ij}^{kl} e^i \otimes e^j \otimes e_k \otimes e_l$, где $T_{ij}^{kl} = T(e_i, e_j, e^k, e^l)$ для всех i, j, k, l , для разложения по базису достаточно найти значения полилинейной функции T на всевозможных наборах базисных векторов и ковекторов. Имеем:

$$T_{ij}^{kl} = T(e_i, e_j, e^k, e^l) = \det \begin{pmatrix} e^k(e_i) & e^l(e_i) \\ e^k(e_j) & e^l(e_j) \end{pmatrix} = \delta_i^k \delta_j^l - \delta_i^l \delta_j^k,$$

где δ_j^i — символ Кронекера. Таким образом,

$$T = (\delta_i^k \delta_j^l - \delta_i^l \delta_j^k) e^i \otimes e^j \otimes e_k \otimes e_l = e^i \otimes e^j \otimes e_i \otimes e_j - e^i \otimes e^j \otimes e_j \otimes e_i. \quad \square$$

Задача 100. Пусть в базисе e_1, e_2, e_3 линейного пространства V компоненты тензора $T \in T_2^3(V)$ имеют вид $T_{lm}^{ijk} = 3m$. Найти компоненты \tilde{T}_{31}^{123} этого тензора в базисе $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$, где

$$\tilde{e}_1 = e_1 + 3e_2 - 2e_3, \quad \tilde{e}_2 = e_2 + 4e_3, \quad \tilde{e}_3 = -e_3.$$

Решение. Запишем матрицу перехода C от базиса e_1, e_2, e_3 к базису $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix};$$

обратная матрица $D = C^{-1}$ имеет следующий вид:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -14 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Запишем тензорный закон преобразования для интересующей нас компоненты тензора T :

$$\tilde{T}_{31}^{123} = T_{lm}^{ijk} c_3^l c_1^m d_i^1 d_j^2 d_k^3, \quad (7.1)$$

где $C = (c_j^i)$, $D = (d_j^i)$. Заметим, что поскольку матрицы C и D нижнетреугольные, ненулевые слагаемые в формуле (7.1) получаются лишь при $i = 1$ и $l = 3$. Аналогично, индекс j может принимать лишь значения 1 и 2. Таким образом, пользуясь определением тензора T , получаем:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{31}^{123} &= c_3^3 d_1^1 T_{3m}^{1jk} c_1^m d_j^2 d_k^3 = \\ &= -T_{3m}^{111} c_1^m (d_1^2 d_1^3 + d_2^2 d_1^3 + d_1^2 d_2^3 + d_2^2 d_2^3 + d_1^2 d_3^3 + d_2^2 d_3^3) = \\ &= -3(c_1^1 + 2c_1^2 + 3c_1^3)(d_1^2 + d_2^2)(d_1^3 + d_2^3 + d_3^3) = -66. \end{aligned} \quad \square$$

Задача 101. Найти общий вид ненулевого тензора валентности 2, инвариантного относительно произвольной замены координат.

Решение. Покажем сперва, что тензор валентности 2, инвариантный относительно произвольной замены координат, должен иметь по одному верхнему и нижнему индексу. Предположим противное: пусть, например, инвариантный тензор T имеет два нижних индекса. Тогда в силу его инвариантности тензорный закон преобразования принимает вид

$$T_{kl} = c_k^i c_l^j T_{ij},$$

где $C = (c_k^i)$ — матрица перехода. Рассмотрим, например, преобразование гомотетии с коэффициентом 2; матрица C при этом скалярна, то есть тензорный закон преобразования принимает вид:

$$T_{kl} = c_k^k c_l^l T_{kl} = 4T_{kl}.$$

Отметим, что в последней формуле нет суммирования по повторяющимся индексам. Таким образом, $T_{kl} = 0$, то есть в силу произвольности выбора индексов тензор T нулевой. Аналогично доказывается, что инвариантный тензор не может иметь два верхних индекса.

Пусть теперь $T \in T_1^1(V)$. Фиксируем произвольное $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ и сделаем замену

$$\tilde{e}_k = 2e_k, \quad \tilde{e}_l = e_l \quad \text{при } l \neq k.$$

Пусть $D = (d_j^i) = C^{-1}$, где C — соответствующая матрица перехода. Тогда из тензорного закона преобразования получаем:

$$T_l^k = c_l^j d_i^k T_j^i = c_l^l d_k^k T_l^k = \frac{1}{2} T_l^k \quad \text{при } l \neq k,$$

где опять-таки нет суммирования по индексам k и l . Таким образом, $T_l^k = 0$ при $l \neq k$.

Далее, для произвольных $k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$ сделаем замену

$$\tilde{e}_k = e_l, \quad \tilde{e}_l = e_k, \quad \tilde{e}_j = e_j \quad \text{при } j \neq k, l.$$

Из тензорного закона получаем

$$T_k^k = c_k^l d_l^k T_l^l = T_l^l$$

для соответствующих матриц C и $D = C^{-1}$. Это означает, что тензор T пропорционален символу Кронекера δ_j^i , а все тензоры такого вида, очевидно, инвариантны относительно всевозможных замен координат. Таким образом, тензор T имеет вид:

$$T_j^i = c \cdot \delta_j^i,$$

где $c = \text{const}$. □

7.2. Операции над тензорами

Задача 102. Пусть e_1, e_2, e_3 — базис в пространстве V , а e^1, e^2, e^3 — двойственный ему базис в пространстве V^* . Рассмотрим тензор

$$T = e^1 \otimes e_3 - 2e^2 \otimes e_1 + e^3 \otimes e_2$$

и определим трилинейное отображение F равенством

$$F(v_1, v_2, v_3) = \det(v_j^i),$$

где v_j^i — i -я координата вектора v_j в базисе e_1, e_2, e_3 . Найти $(T \otimes F)_{3212}^1$ и $(F \otimes T)_{3212}^1$.

Решение. Согласно определению тензорного произведения

$$(T \otimes F)_{3212}^1 = T(e_3 \otimes e^1) \cdot F(e_2, e_1, e_2) = 0 \cdot 0 = 0,$$

поскольку функция F обращается в нуль на наборе из линейно зависимых векторов. Аналогично имеем

$$(F \otimes T)_{3212}^1 = F(e_3, e_2, e_1) \cdot T(e_2 \otimes e^1) = (-1) \cdot (-2) = 2. \quad \square$$

Замечание. Эта задача, в частности, демонстрирует некоммутативность операции тензорного произведения: при изменении порядка сомножителей тензоры применяются к различным наборам векторов или ковекторов.

Задача 103. Пусть e_1, e_2, e_3 — базис в пространстве V , а e^1, e^2, e^3 — двойственный ему базис в пространстве V^* . Найти значение внешней формы

$$\omega = (e^1 - 2e^2 + 5e^3) \wedge (4e^2 - 2e^3) \wedge (e^3 - 7e^2) \quad (7.2)$$

на векторах v_1, v_2, v_3 , заданных в базисе e_1, e_2, e_3 :

$$v_1 = (1, -2, 4), \quad v_2 = (0, 1, 3), \quad v_3 = (-1, 2, 1).$$

Решение. Можно было бы, воспользовавшись линейностью операции внешнего умножения, раскрыть скобки в правой части равенства (7.2), а затем привести подобные члены. Однако разумнее не выписывать явно все 12 слагаемых, а заметить, что в силу кососимметричности операции \wedge отличны от нуля лишь те слагаемые, которые одновременно содержат e^1 , e^2 и e^3 . Поэтому, учитывая, что e^1 есть лишь в первом сомножителе, нетрудно заметить, что остается лишь два ненулевых слагаемых:

$$\omega = 4e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 + 14e^1 \wedge e^3 \wedge e^2 = -10e^1 \wedge e^2 \wedge e^3.$$

Поскольку

$$(e^1 \wedge e^2 \wedge e^3)(v_1, v_2, v_3) = \det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 5,$$

получаем ответ: $\omega(v_1, v_2, v_3) = -50$. \square

Задача 104. Пусть в некотором базисе e_1, e_2, e_3 линейного пространства V тензор T задан условием $T_{ijk} = i - 3j + 2k$, а скалярное произведение задано матрицей Грама

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \\ -3 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найти R_{23}^1 , где тензор R получается из T поднятием первого индекса.

Решение. По определению операции поднятия индекса, $R_{ij}^k = g^{ks} T_{sij}$, где (g^{ks}) — матрица, обратная матрице Грама. Поскольку

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ 7 & 2 & 6 \end{pmatrix},$$

интересующая нас компонента тензора R находится следующим образом:

$$R_{23}^1 = g^{11} T_{123} + g^{12} T_{223} + g^{13} T_{323} = 9 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 7 \cdot 3 = 34. \quad \square$$

Задача 105. Пусть V — двумерное линейное пространство и тензоры $T \in T_0^2(V)$ и $R \in T_4^0(V)$ имеют следующие координаты:

$$\begin{aligned} T^{11} &= 1, & T^{12} &= 2, & T^{21} &= 1, & T^{22} &= 3, \\ R_{1121} &= 1, & R_{1222} &= -1, & R_{2211} &= 2, & R_{2111} &= -2 \end{aligned}$$

(остальные координаты тензора R нулевые). Найти компоненты свертки тензора $R \otimes T$ по двум парам индексов сразу: по первым верхнему и нижнему индексам и по вторым верхнему и нижнему индексам.

Решение. Пусть $S \in T_0^2(V)$ — искомый тензор. Тогда

$$S_{kl} = R_{11kl} T^{11} + R_{21kl} T^{21} + R_{12kl} T^{12} + R_{22kl} T^{22}$$

для всех k, l . Подставляя теперь координаты тензоров R и T , получаем:

$$S_{11} = -2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 4, \quad S_{12} = 0,$$

$$S_{21} = 1 \cdot 1 = 1, \quad S_{22} = -1 \cdot 2 = -2. \quad \square$$

Задача 106. Пусть e_1, e_2, e_3 — базис в пространстве V , а e^1, e^2, e^3 — двойственный ему базис в пространстве V^* . Найти свертку тензора

$$T = (e^1 - 2e^2 + e^3) \otimes (2e_1 + e_2 - 3e_3) - (4e^1 + e^2 + e^3) \otimes (e_1 - e_2 - e_3).$$

Решение. Поскольку тензор T имеет по одному верхнему и нижнему индексу, его свертка $s(T)$ — полная, то есть является числом, равным $T_1^1 + T_2^2 + T_3^3$. Вычисляя соответствующие коэффициенты по формуле $T_j^i = T(e_j, e^i)$, получаем:

$$T_1^1 = 2 - 4 = -2, \quad T_2^2 = -2 + 1 = -1, \quad T_3^3 = -3 + 1 = -2.$$

Таким образом, $s(T) = -5$. □

Задача 107. Пусть $u, v \in V$ — векторы, $\xi, \eta \in V^*$ — ковекторы, полилинейная функция T определена равенством

$$T(u, v, \xi, \eta) = \det \begin{pmatrix} \xi(u) & \eta(u) \\ \xi(v) & \eta(v) \end{pmatrix}$$

и размерность пространства V равна n . Найти полную свертку тензора T .

Решение. Рассматриваемый тензор принадлежит пространству $T_2^2(V)$, поэтому его полная свертка — это свертка по двум парам индексов одновременно. Но такие пары можно выбрать двумя способами, поэтому в данном случае есть две полные свертки: 1) по первым верхнему и нижнему индексам и по вторым верхнему и нижнему индексам, $s(T) = T_{ij}^{ij}$; 2) по первому верхнему и второму нижнему индексам и наоборот: $\hat{s}(T) = T_{ij}^{ji}$. При решении задачи 99 мы уже сталкивались с этим тензором и выяснили, что

$$T_{ij}^{kl} = T(e_i, e_j, e^k, e^l) = \delta_i^k \delta_j^l - \delta_i^l \delta_j^k,$$

поэтому $T_{ij}^{ij} = \delta_i^i \delta_j^j - \delta_i^j \delta_j^i$. Легко видеть, что $T_{ij}^{ij} = 1$ при $i \neq j$ и что $T_{ii}^{ii} = 0$ (в двух последних равенствах нет суммирования по повторяющимся индексам). Это означает, что свертка $s(T)$ равна количеству упорядоченных пар индексов (i, j) , где $i \neq j$. Таким образом, $s(T) = n^2 - n$. Аналогично $T_{ij}^{ji} = \delta_i^j \delta_j^i - \delta_i^i \delta_j^j$, откуда получаем, что $T_{ij}^{ji} = -1$ при $i \neq j$ и что $T_{ii}^{ii} = 0$. Поэтому $\hat{s}(T) = -n^2 + n$. □

Задача 108. Пусть линейные операторы f и g заданы матрицами

$$A_f = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_g = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу оператора $f \otimes g$ в базисе $e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2$.

Решение. Легко видеть, что имеют место следующие соотношения:

$$f(e_1) = 2e_1 + 3e_2, \quad f(e_2) = -e_1 + e_2,$$

$$g(e_1) = e_1 + 5e_2, \quad g(e_2) = 4e_1 - 2e_2.$$

Согласно определению тензорного произведения линейных операторов имеем:

$$\begin{aligned}
 (f \otimes g)(e_1 \otimes e_1) &= (2e_1 + 3e_2) \otimes (e_1 + 5e_2) = \\
 &= 2e_1 \otimes e_1 + 10e_1 \otimes e_2 + 3e_2 \otimes e_1 + 15e_2 \otimes e_2, \\
 (f \otimes g)(e_1 \otimes e_2) &= (2e_1 + 3e_2) \otimes (4e_1 - 2e_2) = \\
 &= 8e_1 \otimes e_1 - 4e_1 \otimes e_2 + 12e_2 \otimes e_1 - 6e_2 \otimes e_2, \\
 (f \otimes g)(e_2 \otimes e_1) &= (-e_1 + e_2) \otimes (e_1 + 5e_2) = \\
 &= -e_1 \otimes e_1 - 5e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 + 5e_2 \otimes e_2, \\
 (f \otimes g)(e_2 \otimes e_2) &= (-e_1 + e_2) \otimes (4e_1 - 2e_2) = \\
 &= -4e_1 \otimes e_1 + 2e_1 \otimes e_2 + 4e_2 \otimes e_1 - 2e_2 \otimes e_2.
 \end{aligned}$$

Записывая теперь координаты образов по столбцам, получаем матрицу оператора $f \otimes g$:

$$A_{f \otimes g} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -1 & -4 \\ 10 & -4 & -5 & 2 \\ 3 & 12 & 1 & 4 \\ 15 & -6 & 5 & -2 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Задача 109. Найти жорданову форму тензорного произведения двух линейных операторов f и g , имеющих следующие жордановы формы:

$$J_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad J_g = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Пусть e_1, e_2 и $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$ — жордановы базисы для этих операторов, соответствующие заданным жордановым формам. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 f(e_1) &= 2e_1, & f(e_2) &= e_1 + 2e_2, \\
 g(\tilde{e}_1) &= 3\tilde{e}_1, & g(\tilde{e}_2) &= \tilde{e}_1 + 3\tilde{e}_2, & g(\tilde{e}_3) &= 4\tilde{e}_3.
 \end{aligned}$$

Поэтому в базисе

$$e_1 \otimes \tilde{e}_1, e_1 \otimes \tilde{e}_2, e_1 \otimes \tilde{e}_3, e_2 \otimes \tilde{e}_1, e_2 \otimes \tilde{e}_2, e_2 \otimes \tilde{e}_3$$

матрица оператора $f \otimes g$ имеет следующий вид:

$$A_{f \otimes g} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Поскольку полученная матрица верхнетреугольна, легко найти ее собственные значения: $\lambda_1 = 6$ кратности 4 и $\lambda_2 = 8$ кратности 2. Легко видеть, что $\text{rk}(A_{f \otimes g} - 6E) = 4$ и $\text{rk}(A_{f \otimes g} - 6E)^2 = 3$. Поэтому собственному значению $\lambda_1 = 6$ соответствуют две жордановы клетки размеров 3×3 и 1×1 . Кроме того, $\text{rk}(A_{f \otimes g} - 8E) = 5$. Поэтому собственному значению $\lambda_1 = 6$ соответствует единственная жорданова клетка размера 2×2 . Таким образом, оператор $f \otimes g$ имеет следующую жорданову форму:

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

□

Литература

- [1] *Винберг Э. Б.* Курс алгебры. М.: МЦНМО, 2011.
- [2] *Гельфанд И. М.* Лекции по линейной алгебре. 8-е изд. М.: Университет, 2009.
- [3] Сборник задач по алгебре / Под ред. А. И. Кострикина. Т. 1. 4-е изд. М.: Физматлит, 2006.
- [4] *Кострикин А. И., Манин Ю. И.* Линейная алгебра и геометрия. 4-е изд. СПб.: Лань, 2008.
- [5] *Прасолов В. В.* Задачи и теоремы линейной алгебры. М.: Наука, 1996.
- [6] *Проскуряков И. В.* Сборник задач по линейной алгебре. 13-е изд. СПб.: Лань, 2010.
- [7] Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре / Под ред. Ю. М. Смирнова. 2-е изд. М.: Логос, 2005.

Сведения об авторах

А. А. Гайфуллин, доктор физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник отдела геометрии и топологии Математического института им. В. А. Стеклова РАН, профессор кафедры высшей геометрии и топологии механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова, старший научный сотрудник Института проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН.

А. В. Пенской, доктор физ.-мат. наук, Ph. D., доцент кафедры высшей геометрии и топологии механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова, доцент факультета математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ).

С. В. Смирнов, кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей геометрии и топологии механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова.