### **МАТЕМАТИКА**

УДК 517.962.24

# МОДИФИКАЦИЯ НЕКОММУТАТИВНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ФИБОНАЧЧИ

С. И. Бельков, И. Г. Корепанов\* e-mail: kig@susu.ac.ru

Южно-Уральский государственный университет, пр. им. Ленина 76, г. Челябинск, 454080, Россия

Статья поступила 17 февраля 2009 г.

#### Введение

Рассмотрим последовательность

$$a_0 = a$$
,  $a_1 = b$ ,  $a_2 = abb$ ,  $a_3 = babbabb$ ,  $a_4 = abbbabbabbabbabbabb$ , ..., (1)

слов в алфавите  $\{a,b\}$ . Здесь каждое слово, начиная с  $a_2$ , получается следующей конкатенацией:  $a_n = a_{n-2}a_{n-1}a_{n-1}$ . В таком абстрактном виде цепочка (1) является интересным объектом для символической динамики, обладающим важным свойством. Рассмотрим единственное бесконечное слева слово

инвариантное относительно одновременной замены  $(a,b) \rightarrow (b,abb)$ . Каждое из слов  $a_n$  есть  $\Psi_n + \Psi_{n-1}$  правых символов этого бесконечного слова, где числа  $\Psi_n$  образуют последовательность чисел Фибоначчи типа (1,2), задаваемую рекуррентно по следующему закону:

$$\Psi_0 = 0$$
,  $\Psi_1 = 1$ ,  $\Psi_n = \Psi_{n-2} + 2\Psi_{n-1}$ .

Аналогичная, но более простая система, получаемая по правилу  $a_n = a_{n-2}a_{n-1}$ , рассматривалась нами в работе [1]. Напомним, что в указанной работе в качестве a и b мы брали матрицы из группы SL(2,C). Следы последовательности матриц вычислялись как определители некоторых матриц, размеры которых были равны числам Фибоначчи («обычным», т. е. типа (1, 1)) и которые являлись подматрицами бесконечной самоподобной матрицы.

В настоящей работе мы показываем, что и система (1) обладает свойствами, аналогичными свойствам системы из работы [1], если в качестве a и b снова взять матрицы из SL(2,C).

Содержание следующих разделов статьи таково. В разделе 1 мы описываем алгоритм построения матриц  $A^n$ , определители которых равны следам членов последовательности (1). Здесь, как и в работе [1], верхний индекс n обозначает не степень, а момент дискретного времени, которому соответствует матрица. В разделе 2 формулируется и доказывается теоре-

<sup>\*</sup> Корепанов Игорь Германович, доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой дифференциальных уравнений и динамических систем, kig@susu.ac.ru, тел. 8-912-315-88-38.

Бельков Сергей Игоревич, аспирант кафедры дифференциальных уравнений и динамических систем, sergey\_belkov@mail.ru, тел. 8-904-301-39-67.

ма об определителе матрицы  $A^n$ , а в разделе 3 описываются свойства матрицы бесконечной самоподобной матрицы  $A^{\infty}$ , подматрицами которой являются все  $A^n$ .

## 1. Определение и построение последовательности матриц $A^n$

Последовательность (1), в которой на символы a и b не накладывается никаких условий типа коммутативности, будем называть некоммутативной последовательностью Фибоначчи типа (1,2).

$$a_0 = a$$
,  $a_1 = b$ ,  $a_2 = a_0 a_1^2 = ab^2$ ,  $a_3 = a_1 a_2 = b(ab^2)^2$ ,  
 $a_4 = a_2 a_3^2 = ab^2 (b(ab^2)^2)^2$ , ...,  $a_n = a_{n-2} a_{n-1}^2$ , ...

Введя также в рассмотрение символы  $a^{-1}$  и  $b^{-1}$  с естественным образом определенными операциями над ними (в частности, определено обратное к любому слову), нетрудно обнаружить, что имеет место сохранение коммутатора соседних членов последовательности с точностью до обращения:  $[a_n, a_{n+1}] = [a, b]^{(-1)^n}$ , где по определению  $[u, v] = u v u^{-1} v^{-1}$ .

Пусть теперь a и b — матрицы из группы SL(2,C). Обозначив через x, y и z следы матриц a, b и ab, в силу того, что tr(cd) = tr(dc) для любых матриц c и d, получим

$$tr(a_2) = tr(a_1)tr(a_0a_1) - tr(a_0) = yz - x,$$

$$tr(a_3) = tr(a_2)tr(a_1a_2) - tr(a_1) = (yz - x)(y(yz - x) - z) - y = y^3z^2 - 2zy^2x + zx - yz^2 + x^2y - y, \dots,$$

$$tr(a_n) = tr(a_{n-1})tr(a_{n-2}a_{n-1}) - tr(a_{n-2}), \dots.$$

Оказывается, для некоммутативной последовательности Фибоначчи типа (1, 2) существует алгоритм представления следа  $a_n$  в виде определителя матрицы  $A^n$  специального (блочного) вида и размера  $\Psi_n \times \Psi_n$ , состоящей только из элементов 0, 1, x, y, z.

Построение матрицы  $A^n$  происходит с помощью рекуррентного алгоритма:

- возьмем  $A^1 = (y)$  это база рекурсии.
- транспонируем  $A^n$
- транспонированную матрицу  $(A^n)^T$  будем преобразовывать, делая в ней замену по следующим правилам:

$$x \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad y \to \begin{pmatrix} z & 1 \\ x & y \end{pmatrix}, \quad z \to \begin{pmatrix} z & 1 & 0 \\ x & y & 1 \\ 0 & 1 & y \end{pmatrix};$$
$$1 \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \lor \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \lor \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$
$$0 \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \lor \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \lor \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом чтобы определить все элементы матрицы  $A^{n+1}$ , размер блока, в который переходят символы 0 и 1, будем определять соответствующими диагональными элементами. Пусть рассматриваемый символ стоит на позиции (i, j) (при этом  $i \neq j$ , т. к. на диагонали могут стоять

либо z, либо y). Если  $A_{i,i}^n = A_{j,j}^n = z$ , то этот элемент переходит в блок размера  $3 \times 3$ , если  $A_{i,i}^n = z$  и  $A_{j,j}^n = y$  — в блок размера  $3 \times 2$ , если  $A_{i,i}^n = y$  и  $M_{j,j}^n = z$  — в блок размера  $2 \times 3$ , а если  $A_{i,i}^n = A_{j,j}^n = y$  — в блок размера  $2 \times 2$  (такой случай возможен только для случая  $A_{i,j}^n = 0$ , в чем легко убедиться методом «от противного»).

Рассмотрим теперь свойства полученных матриц:

- 1. Элементы z и y заполняют главную диагональ и не могут находиться вне ее.
- 2. Элемент x может находиться только в комбинации  $\begin{pmatrix} z & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$ , которая может быть частью блока  $3 \times 3$ .
- 3. В строках, содержащих элемент z находится только два ненулевых элемента комбинация (z 1); таких строк  $\Psi_{n-1}$ .
- 4. В строках, содержащих комбинацию  $(x \ y \ 1 \ 1)$  нет других ненулевых элементов; таких строк  $\Psi_{n-2}$ .
- 5. В столбцах, содержащих  $\begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$  (таких столбцов  $\Psi_{n-1}$ ) или  $\begin{pmatrix} 1 \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$  (таких столбцов  $\Psi_{n-2}$ ) нет других ненулевых элементов.

# 2. Теорема об определителе матрицы $A^n$

Теорема 1.

$$|A^n| = \operatorname{tr}(a_n).$$

Доказательство. Будем действовать методом математической индукции.

- 1) База индукции. Для n=1 утверждение теоремы верно, т. к.  $\left|A^{1}\right|=\operatorname{tr}(a_{1})=y$ .
- 2) Предположение индукции. Пусть  $\left|A^{n-1}\right|=\operatorname{tr}(m_{n-1})$
- 3) Шаг индукции.

На диагонали матрицы  $A^n$  стоит  $\Psi_{n-2}$  блока  $3\times 3$  вида  $\begin{pmatrix} z & 1 & 0 \\ x & y & 1 \\ 0 & 1 & y \end{pmatrix}$  и  $\Psi_{n-3} + \Psi_{n-2}$  блоков

 $2 \times 2 \ \begin{pmatrix} z & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$ . Для каждого блока  $\begin{pmatrix} z & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$  (даже если он является частью блока  $3 \times 3$ ) продела-

ем следующее преобразование: вычтем из столбца, содержащего  $\begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix}$  столбец, содержащий

 $\binom{1}{y}$ , умножив его предварительо на z — в силу последнего свойства при этом образуется

 $\Psi_{n-1}$  строк, в которых только один ненулевой элемент, а именно единица, стоящая правее диагонального элемента. Теперь из каждой строки, содержащей y (вне блока  $2\times 2$ ) вычтем стоящую над ней строку, умноженную на y. Мы получили  $\Psi_{n-2}$  столбца, в которых над диагональным элементом находится единица, а на всех остальных позициях — нули. Разложим определитель по полученным строкам и столбцам, содержащим по одному ненулевому элементу, при этом появится множитель  $(-1)^{\Psi_{n-1}+\Psi_{n-2}}=-1$ , т. к. число  $(\Psi_{n-1}+\Psi_{n-2})$  — нечетно. Проследим как трансформируются различные блоки при заданных преобразованиях:

Другие варианты недиагональных блоков невозможны в силу свойств матриц  $A^n$ . Ясно, что если мы будем рассматривать матрицы  $A^n$  как функции трех аргументов резултат проделанных преобразований можно описать следующим образом:

$$\left|A^{n}(x,y,z)\right| = -\left(\left|A^{n-1}(-y,x-yz,y(yz-x)-z)\right|\right)^{T}.$$

Заметим, что если в качестве первых двух членов последовательности взять матрицы (-a) и (-b), то их следы будут равны (-x) и (-y), след их произведения будет равен  $\operatorname{tr}((-a)(-b)) = \operatorname{tr}(ab) = z$ , а следы всех последующих членов такой последовательности поменяют знак, т. е.  $\left|A^n(x,y,z)\right| = -\left|A^n(-x,-y,z)\right|$ . Значит,

$$\left|A^{n}(x,y,z)\right| = \left(\left|A^{n-1}(y,yz-x,y(yz-x)-z)\right|\right)^{T}$$

и в силу того, что  $\operatorname{tr}(a_1) = y$ ,  $\operatorname{tr}(a_2) = yz - x$ ,  $\operatorname{tr}(a_1a_2) = y(yz - x) - z$  и предположения индукции мы получаем  $\left|A^n\right| = \operatorname{tr}(A_n)$ .  $\square$ 

## 3. Построение и свойства матрицы $A^{\infty}$

Бесконечно применяя описанный выше алгоритм раздутия, мы получим объект, который можно представить как бесконечную матрицу. Назовем ее  $A^{\infty}$ .

$$A^{\infty} = \begin{pmatrix} z & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ x & y & 1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & y & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & z & 1 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & x & y & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Эта матрица самоподобна, т. е. переходит в себя при действии алгоритма раздутия. Чтобы убедиться в справедливости этого факта достаточно показать, что верхняя левая подматрица размера  $\Psi_{n-1} \times \Psi_{n-1}$  матрицы  $A^n$  равна  $A^{n-1}$ .

Доказательство проведем методом математической индукции.

- 1) База индукции. Для n=3 утверждение теоремы верно, т. к. верхняя левая подматрица размера  $2\times 2$  есть  $A^2=\begin{pmatrix} z & 1 \\ x & v \end{pmatrix}$ .
- 2) Предположение индукции. Пусть верхняя левая подматрица размера  $\Psi_{n-2} \times \Psi_{n-2}$  матрицы  $A^{n-1}$  равна  $A^{n-2}$ .
  - 3) Шаг индукции.

Алгоритм действует таким образом, что эта подматрица однозначно определяется только элементами верхней левой подматрицы размера  $\Psi_{n-2} \times \Psi_{n-2}$  матрицы  $A^{n-1}$ . По предположению индукции указанная подматрица равна  $A^{n-2}$ . Значит, она может перейти только в подматрицу, равную  $A^{n-1}$   $\square$ 

Замечание 1. Аналогично можно показать, что правая нижняя подматрица размера  $\Psi_{n-1} \times \Phi_{n-1}$  матрицы  $A^n$  равна  $A^{n-1}$ .

Замечание 2. Аналогично можно показать, что подматрица  $(a_{i,j})_{i,j=\Psi_{n-1}+1,\cdots,\Psi_{n-1}+\Psi_{n-2}}$  размера  $\Psi_{n-2}\times\Phi_{n-2}$  матрицы  $A^n$  равна  $A^{n-2}$ ..

#### Заключение

Таким образом, мы нашли рекуррентный алгоритм построения матриц  $A^n$ , определители которых равны следам членов последовательности (1) для случая  $a,b \in SL(2,C)$ . Этот алгоритм аналогичен алгоритму для более простой системы из работы [1]. Можно предположить, что существует целый класс систем, обобщающий системы из обеих работ.

#### Литература

Бельков С. И., Корепанов И. Г. Некоммутативная цепочка Фибоначчи и самоподобная бесконечная матрица // Изв. Челяб. науч. центра. — 2008. — Вып. 1(39). — С. 3–8. http://csc.ac.ru/ej/file/4381