МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО

ОБРАЗОВАНИЯ СССР

ЧЕЛЯБИНСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ИМЕНИ ЛЕНИНСКОГО КОМСОМОЛА

№ 2271-В86.

УДК 517.43

КОРЕПАНОВ И.Г.

# ВАКУУМНЫЕ КРИВЫЕ $\mathcal{L}$ - ОПЕРАТОРОВ, СВЯЗАННЫХ С ШЕСТИВЕРШИННОЙ МОДЕЛЬЮ, И ПОСТРОЕНИЕ $\mathcal{R}$ - ОПЕРАТОРОВ

ЧЕЛЯБИНСК - 1986

## § I. Вакуумные кривые и вакуумные векторы

Пусть $S$ - конечномерное комплексное линейное пространство, $A$, $B$, $C$, $D$ - действующие в нем линейные операторы. Пусть $S^a$ - линейное пространство векторов-столбцов высоты 2, и пусть

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{I}$$

- линейный оператор, действующий в $S^a \otimes S$.

Согласно общепринятой терминологии [I], будем называть $S$ "квантовым пространством", $S^a$ - "вспомогательным пространством". Оператор вида (I) называется $\mathcal{L}$-оператором, или $\mathcal{L}$-матрицей.

Пусть $u, v \in \mathbb{C}P^1$ - комплексные числа или $\infty$. Рассмотрим для конечных $u, v$ следующий оператор, действующий в пространстве $S$:

$$F(u,v) = (1 \quad -v)\,\mathcal{L}\begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix} = uA + B - uvC - vD. \tag{2}$$

Определение I. Вакуумной кривой оператора $\mathcal{L}$ вида (I) называется замкнутая алгебраическая кривая $\Gamma_{\mathcal{L}} \subset \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$, определенная для конечных $u, v$ соотношением

$$(u, v) \in \Gamma_{\mathcal{L}} \Longleftrightarrow \det F(u,v) = 0,$$

понимаемым с учетом кратностей.

Это определение имеет смысл, если $\det F(u,v)$ не обращается в нуль тождественно.

Обозначим теперь

$$U = \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Лемма I. Если вектор $X \in S$ таков, что

$$F(u,v)X=0, \tag{3}$$

то выполнено соотношение

$$\mathcal{L}(U\otimes X)=V\otimes Y \tag{4}$$

с некоторым $Y\in S$. И обратно, из (4) следует (3).

Доказательство. Эквивалентность (3) и (4) легко устанавливается непосредственно из определения (2) оператора $F(u,v)$.

Определение 2. Если точка $z=(u,v)$ принадлежит вакуумной кривой оператора $\mathcal{L}$, то всякий вектор $X$, для которого выполнено (3), называется вакуумным вектором в точке $z$, а всякий вектор $Y$, для которого верно (4) с некоторым $X$,- ковакуумным вектором в точке $z$.

Теорема I. Вакуумная кривая $\Gamma_{\mathcal{L}}$ оператора $\mathcal{L}$ общего положения является гладкой неприводимой алгебраической кривой, заданной уравнением вида

$$P_{\mathcal{L}}(u,v)=\sum_{j,k=1}^{N} a_{jk}u^j v^k=0,$$

где обозначено $N=\dim S$. Вакуумные (ковакуумные) векторы образуют одномерное голоморфное расслоение степени $N^2-N$ на $\Gamma_{\mathcal{L}}$.

Замечание. В настоящей работе слова "объект общего положения" (или "почти любой") обозначают, что он не принадлежит некоторому множеству таких объектов комплексной коразмерности $\geqslant 1$.

Доказательство: см. теорему I работы[2]. Отметим также, что наряду с "общим" случаем теоремы I в дальнейшем будут большую роль играть операторы $\mathcal{L}$, для которых $P_{\mathcal{L}}(u,v)=[p(u,v)]^{\ell}$, $\ell=2,3,\ldots$, так что каждая точка $(u,v)\in\Gamma_{\mathcal{L}}$ имеет кратность $\ell$, а вакуумные (ковакуумные) векторы образуют

$\ell$-мерное голоморфное расслоение. Этот случай изучался в теореме I$'$ работы [2].

Лемма 2. Пусть оператор $\mathcal{L}$ разложен в прямую сумму $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$ , т.е. квантовое пространство представлено в виде $S = S_1 \oplus S_2$ ,причем $S_1$ и $S_2$ инвариантны относительно $A$ , ... $D$. Тогда вакуумная кривая оператора $\mathcal{L}$ дается уравнением $P_1(u,v)\,P_2(u,v) = 0$ , где $P_j(u,v)=0$ - уравнение вакуумной кривой оператора $\mathcal{L}_j$ , $j=1,2$ .

Доказательство сразу следует из определения I.

Пусть теперь $S = S_1 \otimes S_2$ , и пусть операторы $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ действуют в $S^a \otimes S_1$ и $S^a \otimes S_2$ , соответственно. Рассмотрим оператор $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2$ , действующий в $S^a \otimes S$ .

Замечание. Аналогично этому и в дальнейшем, рассматривая произведение $\mathcal{L}$ -операторов типа $\mathcal{L}_1 \ldots \mathcal{L}_k$ , будем считать, что все они имеют общее вспомогательное пространство, тогда как квантовое пространство произведения получается тензорным произведением квантовых пространств сомножителей (ср. конструкцию "матрицы моножромии" в обзоре [I]).

Определение 3. Композицией $\Gamma = \Gamma_1 \circ \Gamma_2$ вакуумных кривых $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$, заданных уравнениями $P_1(u,v) = 0$ и $P_2(u,v)=0$ соответственно, называется кривая $\Gamma$ , заданная уравнением $P(u,v) = 0$ , где $P(u,v)$ - результант ([3]) $P_1(w,v)$ и $P_2(u,w)$ , рассматриваемых как многочлены от переменного $w$.

Таким образом, $\Gamma$ есть множество точек $(u,v)$ , для которых существует $w$ такое, что $(u,w) \in \Gamma_2$ , $(w,v) \in \Gamma_1$ , взятых с нужными кратностями (рис. I).

Теорема 2. Вакуумная кривая $\Gamma$ оператора $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2$ является композицией вакуумных кривых $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ операторов

$\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$.

Доказательство (см. также [2]). Достаточно рассмотреть операторы $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ общего положения в смысле теоремы I. Из того, что $(u,w)\in\Gamma_2$, согласно лемме I следует, что

$$\mathcal{L}_1(U\otimes X_1)=W\otimes Y_1 \tag{5}$$

(где, конечно, $W=\begin{pmatrix} w \\ 1 \end{pmatrix}$ ) с некоторыми $X_1, Y_1\in S_1$, $X_1\neq 0$. Аналогично, из $(w,v)\in\Gamma_1$ следует

$$\mathcal{L}_2(W\otimes X_2)=V\otimes Y_2 . \tag{6}$$

Из (5) и (6) получаем

$$\mathcal{L}(U\otimes X_1\otimes X_2)=V\otimes Y_1\otimes Y_2 ,$$

т.е. действительно $(u,v)\in\Gamma$ и вакуумный вектор в этой точке имеет вид $X_1\otimes X_2$. Поэтому $\Gamma$ обязательно содержит компоненту, совпадающую с $\Gamma_1\circ\Gamma_2$.

Нетрудно, однако, установить, что степени многочленов, задающих кривые $\Gamma$ и $\Gamma_1\circ\Gamma_2$, должны совпадать (эти многочлены имеют степень $\dim S_1+\dim S_2$ по каждой из переменных $u, v$ ). Таким образом, теорема доказана.

Определение 4. Оператор $\mathcal{L}$, действующий в $S^a\otimes S$, называется эквивалентным оператору $\mathcal{M}$, действующему в $S^a\otimes\tilde{S}$, если существует оператор изоморфизма $\mathcal{R}: S\to\tilde{S}$ такой,что $\mathcal{R}\mathcal{L}=\mathcal{M}\mathcal{R}$. Аналогично, два семейства операторов $\mathcal{L}(\lambda)$ и $\mathcal{M}(\lambda)$ ( $\lambda$ - любой параметр, квантовое пространство каждого семейства не зависит от $\lambda$ ) называются эквивалентными, если существует изоморфизм $\mathcal{R}$ такой, что $\mathcal{R}\mathcal{L}(\lambda)=\mathcal{M}(\lambda)\mathcal{R}$ при каждом $\lambda$. В этих случаях будем говорить, что $\mathcal{R}$ осуществляет соответствующую эквивалентность.

Замечание. Здесь мы отождествляем оператор $\mathcal{R}$ с оператором $\mathbb{1}\otimes\mathcal{R}$ , действующим из $S^a\otimes S$ в $S^a\otimes\tilde{S}$ . Аналогично при необходимости поступаем ниже с другими операторами.

Следующая лемма играет одну из ключевых ролей в настоящей работе.

Лемма 3. Вакуумные кривые эквивалентных операторов совпадают.

Доказательство очевидно из определения вакуумной кривой.

Нас будет интересовать вопрос об эквивалентности операторов вида $\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2$ и $\mathcal{L}_2\mathcal{L}_1$ , т.е. о решениях уравнения Янга - Бакстера

$$\mathcal{R}\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2=\mathcal{L}_2\mathcal{L}_1\mathcal{R}. \tag{7}$$

Из (7), теоремы 2 и леммы 3 следует, что вакуумные кривые операторов $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ должны коммутировать в смысле следующего определения.

Определение 5. Вакуумные кривые $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ называются коммутирующими между собой, если $\Gamma_1\circ\Gamma_2$ совпадает с $\Gamma_2\circ\Gamma_1$.

## § 2. Вычисление вакуумных кривых некоторых $\mathcal{L}$ - операторов, связанных с шестивершинной моделью

В этом параграфе вычисляются вакуумные кривые операторов

$$\mathcal{L}(\lambda)=\begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda)\end{pmatrix}, \tag{8}$$

$\lambda$ - комплексное число, удовлетворяющих перестановочным соотношениям шестивершинной модели. Пользуясь обозначениями обзора [I], кроме $\mathcal{R}(\lambda,\mu)$, заменяемого нами на $R(\lambda-\mu)$, запишем эти соотношения в виде

$$R(\lambda-\mu)(\mathcal{L}(\lambda)\otimes\mathcal{L}(\mu))=(\mathcal{L}(\mu)\otimes\mathcal{L}(\lambda))R(\lambda-\mu). \qquad (9)$$

Напомним, что $\mathcal{L}(\lambda)\otimes\mathcal{L}(\mu)$ означает здесь матрицу 4×4, элементы которой - произведения соответствующих элементов матриц $\mathcal{L}(\lambda)$ и $\mathcal{L}(\mu)$, т.е. операторов, действующих в квантовом пространстве $S$ семейства $\mathcal{L}(\lambda)$. $R(\lambda-\mu)$ - числовая матрица,

$$R(\lambda-\mu)=\frac{1}{\sin(\lambda-\mu+2\eta)}\begin{pmatrix} \sin(\lambda-\mu+2\eta) & & & \\ & \sin 2\eta & \sin(\lambda-\mu) & \\ & \sin(\lambda-\mu) & \sin 2\eta & \\ & & & \sin(\lambda-\mu+2\eta) \end{pmatrix}, \qquad (10)$$

$\eta$ - постоянное число.

Определение 6 (ср. [I]). Вектор $\Omega$ из квантового пространства семейства операторов $\mathcal{L}(\lambda)$, удовлетворяющих перестановочным соотношениям шестивершинной модели, называется порождающим, если выполнены соотношения

$$A(\lambda)\Omega=a(\lambda)\Omega,\quad D(\lambda)\Omega=d(\lambda)\Omega,\quad C(\lambda)\Omega=0,$$

где $a(\lambda)$, $d(\lambda)$ - числовые функции.

Порождающий вектор не обязательно существует и не обязательно единственен.

Определение 7 ([II]). Семейство операторов $\mathcal{L}(\lambda)$, для которого существует порождающий вектор $\Omega$, назовем неприводимым, если а) в квантовом пространстве не существует общего для $A(\lambda), \ldots, D(\lambda)$ инвариантного подпространства, б) $\Omega$ не принадлежит сумме образов операторов $B(\lambda)$ с произвольными $\lambda$ .

Теорема 3. Пусть $Q$ - рациональная функция, $\eta$ не кратно $\frac{\pi}{2}$ . Тогда существует единственное с точностью до изоморфизма и умножения на функцию от $\lambda$ неприводимое семейство $\mathcal{L}(\lambda)$ такое, что

$$\frac{a(\lambda)}{d(\lambda)} = Q\,(\exp 2i\lambda).$$

Доказательство приведено в работе [II], см. теорему 3 этой работы.

Как известно, для $\mathcal{L}$ - операторов шестивершинной модели

$$\frac{a(\lambda)}{d(\lambda)} = \frac{\sin(\lambda+\eta)}{\sin(\lambda-\eta)}\,.$$

С помощью конструкции "размножения", точнее, взятия $m$ -й симметрической степени, можно получить семейство $\mathcal{L}^m(\lambda)$, для которого

$$\frac{a(\lambda)}{d(\lambda)} = \frac{\sin(\lambda+m\eta)}{\sin(\lambda-m\eta)}$$

(см. об этом [4, 5]). Семейство $\mathcal{L}^m(\lambda)$ неприводимо при почти любом $\eta$ (в частности, если $\eta/\pi$ иррационально).

Лемма 4. Вакуумная кривая оператора $\mathcal{L}^m(\lambda)$ дается уравнением

$$(v-u\exp 2im\eta)(v-u\exp 2i(m-2)\eta)\ldots(v-u\exp 2i(-m)\eta)=0 \qquad \text{(II)}$$

(и таким образом не зависит от $\lambda$ ).

Доказательство. Для $m=0$ , т.е. когда квантовое пространство одномерно, $a(\lambda)=d(\lambda)$ , $B(\lambda)=C(\lambda)=0$, утверждение леммы очевидно. Для $m=1$ лемма следует непосредственно из определения I и явного вида $\mathcal{L}$ - оператора шестивершинной модели ([I ], формула (3.2)). Далее, согласно результатам работ [4, 5, I7], произведение $\mathcal{L}^m \mathcal{L}^1$ эквивалентно прямой сумме $\mathcal{L}^{m+1} \oplus \mathcal{L}^{m-1}$. Вычисляя вакуумные кривые $\mathcal{L}^m$ и $\mathcal{L}^{m-1}$ по формуле (II) и пользуясь леммами 2 и 3 и теоремой 2, находим, что и для оператора $\mathcal{L}^{m+1}$ вакуумная кривая вычисляется по формуле (II). Лемма доказана.

Определим теперь точно класс операторов $\mathcal{L}(\lambda)$, вакуумные кривые которых будут вычислены в этом параграфе. Пусть $n$ и $\ell$ - взаимно простые числа, и положим $\eta = \frac{\ell\pi}{n}$. Квантовое пространство $S$ пусть состоит из $n$-вектор-столбцов. Зададим $\mathcal{L}(\lambda)$ следующими равенствами:

$$A(\lambda) = a_0 \begin{pmatrix} \sin(\lambda+\rho+(n-1)\eta) & & & 0 \\ & \sin(\lambda+\rho+(n-3)\eta) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sin(\lambda+\rho+(1-n)\eta) \end{pmatrix}, \quad (I2)$$

$$D(\lambda) = d_0 \begin{pmatrix} \sin(\lambda+\sigma+(1-n)\eta) & & & 0 \\ & \sin(\lambda+\sigma+(3-n)\eta) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sin(\lambda+\sigma+(n-1)\eta) \end{pmatrix}, \quad (I3)$$

$$B(\lambda) = C^T(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & & & b_{1n} \\ b_{21} & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & b_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (I4)$$

Здесь $a_0$, $d_0$, $\rho$, $\sigma$ и все элементы матриц $B(\lambda)$ и $C(\lambda)$ - постоянные, причем выполнены соотношения (сложение и вычитание в индексах понимаются $\mathrm{mod}\, n$ )

$$b^2_{k,k-1} = \Delta + \frac{a_0 d_0}{2}\cos\left(\rho - \sigma + 2\eta(n-2k)\right), \tag{15}$$

$k=1, \ldots, n$, $\Delta$ не зависит от $k$. В случае четного $n$, что мы здесь и ниже будем записывать в виде $n=2p$, дополнительно потребуем, чтобы

$$b_{k+p,\, k+p-1} = -b_{k,\, k-1}\,. \tag{16}$$

В том, что так определенные $\mathcal{L}(\lambda)$ удовлетворяют перестановочным соотношениям (9), можно убедиться прямыми вычислениями. $\mathcal{L}(\lambda)$ указанного вида изучались с разных точек зрения в работах [7, 13].

Введем следующее обозначение: если $\mathcal{L} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, то положим $\hat{\mathcal{L}} = G\begin{pmatrix} -D & C \\ B & -A \end{pmatrix} G$, где оператор $G = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$, действующий в квантовом пространстве, введен только чтобы $\hat{\mathcal{L}}$ имело такой же вид (8, 12 - 16), как и $\mathcal{L}$. Так как (см. формулу (10))

$$\left(\begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}\right) R(\lambda-\mu) \left(\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}\right) = R(\lambda-\mu),$$

находим, что из перестановочных соотношений (9) для $\mathcal{L}(\lambda)$ следуют такие же соотношения для $\hat{\mathcal{L}}(\lambda)$.

Лемма 5. Пусть $\mathcal{L}(\lambda)$ задано формулами (8, 12 - 16). Тогда в квантовом пространстве $S$ семейства $\mathcal{L}(\lambda)\hat{\mathcal{L}}(\lambda)$ существует ненулевой вектор $\Omega$ такой, что $\mathcal{C}(\lambda)\Omega = 0$ для всех $\lambda$, где мы обозначаем

$$\mathcal{L}(\lambda)\hat{\mathcal{L}}(\lambda)=\begin{pmatrix}\mathcal{A}(\lambda) & \mathcal{B}(\lambda)\\ \mathcal{C}(\lambda) & \mathcal{D}(\lambda)\end{pmatrix}. \tag{I7}$$

Доказательство. Обозначим вакуумные кривые операторов $\mathcal{L}(\lambda)$ и $\hat{\mathcal{L}}(\lambda)$ соответственно $\Gamma(\lambda)$ и $\hat{\Gamma}(\lambda)$. Из вида $\mathcal{L}(\lambda)$ и $\hat{\mathcal{L}}(\lambda)$ и определения вакуумной кривой находим, что

$$(u,v)\in\Gamma(\lambda)\Longleftrightarrow(v,u)\in\hat{\Gamma}(\lambda). \tag{I8}$$

Поэтому, в частности, точка $(\infty,\infty)$ принадлежит $\Gamma(\lambda)\circ\hat{\Gamma}(\lambda)$ при любом $\lambda$, а это значит, что для каждого $\lambda$ существует $\Omega(\lambda)\in S$, для которого $\mathcal{C}(\lambda)\Omega(\lambda)=0$ (т.к. $F(\infty,\infty)$ пропорционально $\mathcal{C}(\lambda)$, см. формулу (2)).

Однако, все операторы $\mathcal{C}(\lambda)$ коммутируют между собой ([I]). Поэтому $S$ разлагается в прямую сумму подпространств $S_f$, отвечающих различным "весам" $f(\lambda)$ в том смысле, что операторы $\mathcal{C}(\lambda)-f(\lambda)\mathbb{1}$ нильпотентны на $S_f$. Из предыдущего видно, что среди "весов"присутствует функция $f(\lambda)\equiv 0$. Поэтому в соответствующем подпространстве $S_0$ существует вектор $\Omega$ такой, что $\mathcal{C}(\lambda)\Omega\equiv 0$. Лемма доказана.

Дальнейшие рассмотрения сильно зависят от четности $n$. В леммах 6 и 7 по-прежнему $\mathcal{L}(\lambda)$ задано формулами (8, I2 - I6).

Лемма 6. Для нечетного $n$ в общем положении по параметрам $\mathcal{L}(\lambda)$ (т.е. $a_0$, $d_0$, $\rho$, $\sigma$, $\Delta$) в обозначениях леммы 5 вектор $\Omega$ единственен с точностью до умножения на число и является порождающим:

$$\mathcal{A}(\lambda)\Omega=a(\lambda)\Omega,\quad \mathcal{D}(\lambda)\Omega=d(\lambda)\Omega, \tag{I9}$$

причем

$$\frac{a(\lambda)}{d(\lambda)}=\frac{a_0 d_0 \sin(\lambda+\rho+(n-1)\eta)\sin(\lambda+\sigma+(n-1)\eta)-b_{1n}^2}{a_0 d_0 \sin(\lambda+\rho+(1-n)\eta)\sin(\lambda+\sigma+(1-n)\eta)-b_{1n}^2}. \qquad (20)$$

Семейство операторов $\mathcal{L}(\lambda)\hat{\mathcal{L}}(\lambda)$ при этом является неприводимым. Уравнение вакуумной кривой $\mathcal{L}(\lambda)\hat{\mathcal{L}}(\lambda)$ при любом $\lambda$

$$(v^n-u^n)^n=0. \qquad (21)$$

Доказательство. Положим вначале $b_{1n}=0$,

$$\Omega=\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}.$$

Справедливость соотношений (I9), (20) легко проверяется. Неприводимость семейства $\mathcal{L}(\lambda)\hat{\mathcal{L}}(\lambda)$ вместе с единственностью $\Omega$ следуют из теоремы 4 работы [II]. В самом деле, из этой теоремы нетрудно вывести, что (в общем положении по параметрам $\rho$ и $\sigma$ ) неприводимое семейство $\mathcal{L}$ -матриц, для которого выполнено (20), имеет квантовое пространство размерности $n^2$ . Так как квантовое пространство семейства $\mathcal{L}(\lambda)\hat{\mathcal{L}}(\lambda)$ как раз $n^2$ -мерно, это семейство неприводимо.

Переходя к общему случаю, заметим, что пространство векторов $\Omega$ , аннулируемых всеми $\mathcal{C}(\lambda)$, аналитически зависит от параметров операторов $\mathcal{L}(\lambda)$ , кроме множества ненулевой коразмерности этих параметров. Поэтому в общем случае размерность пространства векторов $\Omega$ не может быть больше, чем в частном, т.е. тоже равна I. После этого формулы (I9) (с неизвестными пока $a(\lambda)$ и $d(\lambda)$ ) следуют из того факта, что, согласно коммутационным соотношениям шестивершинной модели, векторы $\mathcal{A}(\lambda)\Omega$ и $\mathcal{D}(\lambda)\Omega$ должны также аннулироваться операторами $\mathcal{C}(\mu)$ при всех $\lambda$, $\mu$.

Для вычисления $a(\lambda)$ заметим, что из определения $\mathcal{A}(\lambda)$ (17) видно, что $a(\lambda)$ - тригонометрический полином с периодом $\pi$, имеющий два нуля $\operatorname{mod}\pi$. Местонахождение этих нулей определяется следующим образом. Очевидно, что из $\mathcal{A}(\lambda)\Omega=0$ вместе с $\mathcal{C}(\lambda)\Omega=0$ следует вырожденность оператора $\mathcal{L}(\lambda)\hat{\mathcal{L}}(\lambda)$, откуда в свою очередь следует вырожденность $\mathcal{L}(\lambda)$. Непосредственные вычисления (надо выразить все $b_{k,k-1}$ через $b_{1n}$ с помощью (15)) показывают, что

$$\det\mathcal{L}(\lambda)=\left[a_0 d_0 \sin(\lambda+\rho+(n-1)\eta)\sin(\lambda+\sigma+(n-1)\eta)-b_{1n}^2\right]^n,$$

так что $\det\mathcal{L}(\lambda)$ также имеет два нуля $\operatorname{mod}\pi$, но каждый кратности $n$. Так как два нуля функции $a(\lambda)$, вообще говоря, не совпадают друг с другом (достаточно рассмотреть случай $b_{1n}=0$ ), находим отсюда $a(\lambda)$ с точностью до постоянного множителя:

$$a(\lambda)=\mathrm{const}\cdot\left[a_0 d_0 \sin(\lambda+\rho+(n-1)\eta)\sin(\lambda+\sigma+(n-1)\eta)-b_{1n}^2\right].$$

Для вычисления $d(\lambda)$ введем операцию $t$ "транспонирования по вспомогательным индексам":

если $\quad \mathcal{L}=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix}$, то $\mathcal{L}^t=\begin{pmatrix} A & C \\ B & D\end{pmatrix}$. (22)

Аналогично предыдущему находим, что из $d(\lambda)=0$ следует вырожденность оператора $\left(\mathcal{L}(\lambda)\hat{\mathcal{L}}(\lambda)\right)^t$ и, тем самым, оператора $\mathcal{L}^t(\lambda)$. Вычисляем $\det\mathcal{L}^t(\lambda)$. Отметим, что

$$\det\mathcal{L}^t(\lambda)=\det\mathcal{L}(\lambda+2\eta),$$

откуда $d(\lambda)=\mathrm{const}\cdot a(\lambda+2\eta)$.

Тем самым равенство левой и правой частей (20) установлено с точностью до некоторого постоянного множителя $C$. Докажем, что $c=1$.

Обозначая нули функции $a(\lambda)$ через $\varphi_1$ и $\varphi_2$, имеем

$$\frac{a(\lambda)}{d(\lambda)}=c\cdot\frac{\sin(\lambda-\varphi_1)}{\sin(\lambda+2\eta-\varphi_1)}\cdot\frac{\sin(\lambda-\varphi_2)}{\sin(\lambda+2\eta-\varphi_2)}.$$

При почти любой разности $\varphi_1-\varphi_2$ неприводимое семейство $\mathcal{L}$ -матриц с таким отношением $a(\lambda)/d(\lambda)$ имеет квантовое пространство размерности $n^2$, поэтому семейство $\mathcal{L}(\lambda)\hat{\mathcal{L}}(\lambda)$ в общем положении неприводимо. Воспользовавшись теоремой 4 работы [11], находим, что $\mathcal{L}(\lambda)\hat{\mathcal{L}}(\lambda)$ эквивалентно произведению $\mathcal{L}_0(\lambda)\mathcal{L}_1(\lambda)\mathcal{L}_2(\lambda)$ неприводимых (семейств) $\mathcal{L}$ -матриц, причем

для $\mathcal{L}_0(\lambda)$ $\qquad \dfrac{a(\lambda)}{d(\lambda)}=c,$

для $\mathcal{L}_1(\lambda)$ $\qquad \dfrac{a(\lambda)}{d(\lambda)}=\dfrac{\sin(\lambda-\varphi_1)}{\sin(\lambda+2\eta-\varphi_1)},$

для $\mathcal{L}_2(\lambda)$ $\qquad \dfrac{a(\lambda)}{d(\lambda)}=\dfrac{\sin(\lambda-\varphi_2)}{\sin(\lambda+2\eta-\varphi_2)}.$

Находим вакуумные кривые: оператора $\mathcal{L}_0(\lambda)$

$$v-cu=0$$

и, с помощью леммы 4, операторов $\mathcal{L}_1(\lambda)$ и $\mathcal{L}_2(\lambda)$:

$$v^n-u^n=0.$$

Их композиция имеет вид

$$(v^n-(cu)^n)^n=0.$$

Однако из соотношения (I8) следует, что точка $(v,v)$ при любом $v$ должна принадледжать этой композиции, откуда находим $c^n=1$ . Из случая $b_{1n}=0$ по непрерывности находим $c=1$ . Лемма доказана.

Обратимся к случаю $n=2p$ . В этом случае операторы $A(\lambda)$, ... ,$D(\lambda)$ (I2 - I4) антикоммутируют со следующим оператором $I$ , действующим в квантовом пространстве $S$ :

$$I=\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_p \\ \mathbb{1}_p & 0 \end{pmatrix}. \qquad (23)$$

Рассмотрим разложение $S=S_+\oplus S_-$ , где $S_+$ $(S_-)$ - собственное подпространство оператора $I$ с собственным значением $1$ $(-1)$. Так как оператор $\mathcal{L}(\lambda)$ переводит $S^a\otimes S_+$ в $S^a\otimes S_-$ и наоборот, то нетрудно убедиться, что его вакуумная кривая распадается в сумму двух компонент $\Gamma_+(\lambda)$ и $\Gamma_-(\lambda)$, для которых вакуумные векторы лежат соответственно в $S_+$ и $S_-$ (а ковакуумные - наоборот).

Переходя к изучению оператора $\mathcal{L}(\lambda)\hat{\mathcal{L}}(\lambda)$ , заметим, что он переводит $S^a\otimes S_-\otimes S_-$ в $S^a\otimes S_+\otimes S_+$ и наоборот. Это позволяет изучать действие $\mathcal{L}(\lambda)\hat{\mathcal{L}}(\lambda)$ только в $S^a\otimes(S_-\otimes S_-\oplus S_+\otimes S_+)$.

Продолжаем использовать обозначения леммы 5.

Лемма 7. Для $n=2p$ в общем положении по параметрам $\mathcal{L}(\lambda)$ в пространстве $S_-\otimes S_-\oplus S_+\otimes S_+$ существуют ровно два линейно независимых вектора $\Omega=\Omega_1,\Omega_2$ , причем

$$\mathcal{A}(\lambda)\Omega_1 = a(\lambda)\Omega_1, \quad \mathcal{D}(\lambda)\Omega_1 = d(\lambda)\Omega_1, \tag{24}$$

$$\mathcal{A}(\lambda)\Omega_2 = -a(\lambda)\Omega_2, \quad \mathcal{D}(\lambda)\Omega_2 = -d(\lambda)\Omega_2, \tag{25}$$

$a(\lambda)/d(\lambda)$ задается прежней формулой (20). Каждый из векторов $\Omega_1$, $\Omega_2$ порождает пространство, в котором $\mathcal{L}(\lambda)\hat{\mathcal{L}}(\lambda)$ действует неприводимо. Уравнение каждой из вакуумных кривых $\Gamma_+(\lambda)\circ\hat{\Gamma}_+(\lambda)$ и $\Gamma_-(\lambda)\circ\hat{\Gamma}_-(\lambda)$ (которым соответствуют вакуумные векторы $\mathcal{L}(\lambda)$ $\hat{\mathcal{L}}(\lambda)$, лежащие соответственно в $S_+\otimes S_+$ и $S_-\otimes S_-$)

$$(v^p - u^p)^p = 0. \tag{26}$$

Доказательство. Положим вначале $b_{1n}=0$ (при этом также $b_{p+1,p}=0$) и

$$\Omega_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix} + I\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}\otimes I\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix},$$

$$\Omega_2 = I\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}\otimes I\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}.$$

Используя соотношения размерности, как при доказательстве леммы 6, получаем, что других векторов в $S_-\otimes S_-\oplus S_+\otimes S_+$, аннулируемых всеми $\mathcal{C}(\lambda)$, нет.

Переходя к общему случаю, заметим прежде всего, что пространство векторов $\Omega$ не менее чем двумерно. В самом деле, если есть один такой вектор $\Omega$, то, применяя к нему проекции на $S_+ \otimes S_+$ и $S_- \otimes S_-$, а также оператор $\mathcal{A}(\lambda)$, переставляющий эти пространства, можно получить и другой вектор $\Omega$, линейно независимый от первого.

То, что пространство векторов $\Omega$ не более чем двумерно, устанавливается как в доказательстве леммы 6. Обозначим это пространство $S_0$. Оно натянуто на некоторые векторы $\Omega_+ \in S_+ \otimes S_+$ и $\Omega_- \in S_- \otimes S_-$.

Из перестановочных соотношений шестивершинной модели следует, что $\mathcal{A}(\lambda)$ и $\mathcal{D}(\mu)$ коммутируют на $S_0$ при всех $\lambda$, $\mu$. Из того, что эти операторы переставляют $S_+ \otimes S_+$ и $S_- \otimes S_-$, следует, что их следы на $S_0$ равны нулю. Так устанавливаются соотношения (24, 25) с подходящими $\Omega_1$, $\Omega_2$, $a(\lambda)$, $d(\lambda)$. Формулы (20) и (26) и тот факт, что каждый из векторов $\Omega_1$, $\Omega_2$ порождает пространство, в котором $\mathcal{L}(\lambda)\hat{\mathcal{L}}(\lambda)$ действует неприводимо, доказываются как для леммы 6. Лемма доказана.

Продолжая рассматривать случай $n = 2p$, совершим в квантовом пространстве оператора $\mathcal{L}(\lambda)$ преобразование

$$A(\lambda) \to \tilde{A}(\lambda) = K A(\lambda) K^{-1}, \ldots, D(\lambda) \to \tilde{D}(\lambda) = K D(\lambda) K^{-1}, \quad (27)$$

где

$$K = \begin{pmatrix} 1\!\!1_p & 1\!\!1_p \\ 1\!\!1_p & -1\!\!1_p \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Получаем

$$\tilde{A}(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & A_-(\lambda)\\ A_+(\lambda) & 0\end{pmatrix}, \ \dots, \ \tilde{D}(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & D_-(\lambda)\\ D_+(\lambda) & 0\end{pmatrix}. \qquad (29)$$

Составим матрицы

$$\mathcal{L}_\pm(\lambda)=\begin{pmatrix}A_\pm(\lambda) & B_\pm(\lambda)\\ C_\pm(\lambda) & D_\pm(\lambda)\end{pmatrix}. \qquad (30)$$

При соответствующем выборе базисов в $S_\pm$ матрицы $\mathcal{L}_\pm(\lambda)$ задают ограничения оператора $\mathcal{L}(\lambda)$ на подпространства $S^a\otimes S_\pm$.

Замечание. В случае нечетного $p$ можно вместо (28) выбрать $K$ в виде

$$K=\begin{pmatrix}1 & & 0 & & \mathbb{1}_p\\ 0 & \ddots & & & \\ & & \ddots & & 0\\ \mathbb{1}_p & & 0 & & -1\end{pmatrix}$$

(по главной диагонали чередуются 1 и - 1). Тогда в качестве $\mathcal{L}_\pm(\lambda)$, как можно убедиться, получаются снова $\mathcal{L}$ -матрицы вида (8, 12 - 15).

Теорема 4. Уравнение вакуумной кривой $\Gamma(\lambda)$ оператора $\mathcal{L}(\lambda)$ (8, 12 - 16) в случае нечетного $n$ может быть записано в виде

$$1+\alpha(\lambda)u^n-\delta(\lambda)v^n-u^n v^n=0, \qquad (31)$$

где

$$\alpha(\lambda)=\frac{\det A(\lambda)}{\det B(\lambda)}, \quad \delta(\lambda)=\frac{\det D(\lambda)}{\det B(\lambda)}. \tag{32}$$

В случае $n=2p$ $\Gamma(\lambda)$ распадается в сумму двух компонент $\Gamma_+(\lambda)$ и $\Gamma_-(\lambda)$, соответствующих вакуумным векторам из $S_+$ и $S_-$ - собственных подпространств оператора $I$ (23). Уравнения кривых $\Gamma_\pm(\lambda)$

$$1\pm[\alpha(\lambda)u^p+\delta(\lambda)(-v)^p]+u^p(-v)^p=0, \tag{33}$$

где

$$\alpha(\lambda)=\frac{\det A_+(\lambda)}{\det B_+(\lambda)}, \quad \delta(\lambda)=\frac{\det D_+(\lambda)}{\det B_+(\lambda)}. \tag{34}$$

(см. формулы (27 - (29)).

Доказательство. Случай нечетного $n$. Докажем, что в уравнение вакуумной кривой $\Gamma(\lambda)$ $u$ и $v$ входят только в виде $u^n$, $v^n$. В самом деле, из (21) следует, что любая точка вида $(u, u\exp\frac{2\pi i m}{n})$, $m$ целое, входит в кривую $\Gamma(\lambda)\circ\hat\Gamma(\lambda)$ с кратностью $n$. Из рассмотрения случая $b_{1n}=0$ можно найти, что пути от $u$ к $u\exp\frac{2\pi i m}{n}$ проходят через $n$ различных значений $v=v_1, \ldots, v_n$, для которых $(u,v)\in\hat\Gamma(\lambda)$, $(v, u\exp\frac{2\pi i m}{n})\in\Gamma(\lambda)$ (рис. 2). Поэтому, если $(v,u)\in\Gamma(\lambda)$, то и при любом $m$ $(v, u\exp\frac{2\pi i m}{n})\in\Gamma(\lambda)$. Меняя ролями $\Gamma(\lambda)$ и $\hat\Gamma(\lambda)$, получаем аналогичное утверждение относительно замены $v\to v\exp\frac{2\pi i m}{n}$.

После этого определить коэффициенты в (32) не составляет труда.

Случай $n=2p$ рассматривается аналогично (заменяем $n$ на $p$, $\mathcal{L}(\lambda)$ на $\mathcal{L}_\pm(\lambda)$, $\Gamma(\lambda)$ на $\Gamma_\pm(\lambda)$ ).

Теорема доказана.

## § 3. Существование и общие свойства $\mathcal{R}$ - операторов

Определение 8. Семейства $\mathcal{L}$- операторов $\mathcal{L}(\lambda)$ и $\mathcal{M}(\lambda)$ называются слабо эквивалентными, если

$$\mathcal{R}_1\mathcal{L}(\lambda)=\mathcal{M}(\lambda)\mathcal{R}_2$$

для некоторых не обязательно совпадающих изоморфизмов $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$ квантовых пространств этих операторов.

Ниже продолжаем рассматривать $\mathcal{L}$ - операторы вида (8, I2 - I6).

Теорема 5. Случай нечетного $n$. Если выполнена эквивалентность

$$\mathcal{R}\mathcal{L}_1(\lambda)\mathcal{L}_2(\lambda)=\mathcal{L}_2(\lambda)\mathcal{L}_1(\lambda)\mathcal{R}, \tag{35}$$

то вакуумные кривые $\Gamma_1(\lambda)$ и $\Gamma_2(\lambda)$ операторов $\mathcal{L}_1(\lambda)$ и $\mathcal{L}_2(\lambda)$ коммутируют при каждом $\lambda$. Обратно, если $\Gamma_1(\lambda)$ и $\Gamma_2(\lambda)$ коммутируют при каждом $\lambda$, то существует оператор $\mathcal{R}$, для которого верно (35) и который в общем положении по параметрам семейств $\mathcal{L}_1(\lambda)$, $\mathcal{L}_2(\lambda)$ невырожден и определяется однозначно с точностью до постоянного множителя.

Случай $n=2p$. Если выполнены слабые эквивалентности следующего вида:

$$\mathcal{R}_-\mathcal{L}_{1+}(\lambda)\mathcal{L}_{2+}(\lambda)=\mathcal{L}_{2+}(\lambda)\mathcal{L}_{1+}(\lambda)\mathcal{R}_+, \tag{36}$$

$$\mathcal{R}_+\mathcal{L}_{1-}(\lambda)\mathcal{L}_{2-}(\lambda)=\mathcal{L}_{2-}(\lambda)\mathcal{L}_{1-}(\lambda)\mathcal{R}_- \tag{37}$$

(см. формулу (30)), то вакуумные кривые $\Gamma_{1+}(\lambda)$ и $\Gamma_{2+}(\lambda)$

операторов $\mathcal{L}_{1+}(\lambda)$ и $\mathcal{L}_{2+}(\lambda)$ коммутируют при каждом $\lambda$. То же выполнено для $\Gamma_{1-}(\lambda)$ и $\Gamma_{2-}(\lambda)$. Обратно, если указанные вакуумные кривые коммутируют при каждом $\lambda$, то существуют операторы $\mathcal{R}_+$ и $\mathcal{R}_-$, для которых верно (36, 37) и которые в общем положении невырождены и определены однозначно с точностью до постоянного множителя.

Доказательство. Случай нечетного $n$. То, что из (35) получается $\Gamma_1(\lambda)\circ\Gamma_2(\lambda)=\Gamma_2(\lambda)\circ\Gamma_1(\lambda)$, легко следует из леммы 3 и теоремы 2. Докажем обратное.

Заметим, что вакуумная кривая (2I) семейства $\mathcal{L}_2(\lambda)\hat{\mathcal{L}}_2(\lambda)$ коммутирует с любой вакуумной кривой вида (3I). Поэтому вакуумная кривая семейства

$$L(\lambda)=\mathcal{L}_1(\lambda)\mathcal{L}_2(\lambda)\hat{\mathcal{L}}_2(\lambda)\hat{\mathcal{L}}_1(\lambda) \tag{38}$$

есть композиция двух кривых вида (2I), т.е. имеет уравнение

$$(v^n-u^n)^{n^3}=0. \tag{39}$$

Рассуждая как при доказательстве леммы 6, находим, что семейство $L(\lambda)$ имеет порождающий вектор $\Omega$ с отношением

$$\frac{a(\lambda)}{d(\lambda)}=\prod_{j=1}^{4}\frac{\sin(\lambda-\varphi_j)}{\sin(\lambda+2\eta-\varphi_j)}, \tag{40}$$

причем 4 числа $\varphi_j$ не связаны между собой никакой зависимостью.

Далее, из того, что $\Gamma_1(\lambda)$ и $\Gamma_2(\lambda)$ коммутируют, следует, что семейство

$$M(\lambda)=\mathcal{L}_2(\lambda)\mathcal{L}_1(\lambda)\hat{\mathcal{L}}_2(\lambda)\hat{\mathcal{L}}_1(\lambda) \tag{4I}$$

также имеет вакуумную кривую (2I) и порождающий вектор $\tilde{\Omega}$ с тем же отношением (40). Нетрудно убедиться, что и по отдельности $a(\lambda)$ и $d(\lambda)$ для $L(\lambda)$ и $M(\lambda)$ должны совпадать. Отсюда следует существование оператора $\mathcal{R}$ , осуществляющего эквивалентность $L(\lambda)$ и $M(\lambda)$ (ср. теорему 6 работы [II]).

По тем же причинам сущетсвует оператор $\mathcal{R}'$ , осуществляющий эквивалентность семейств

$$L'(\lambda) = \hat{\mathcal{L}}_2(\lambda)\hat{\mathcal{L}}_1(\lambda)\mathcal{L}_1(\lambda)\mathcal{L}_2(\lambda)$$

и

$$M'(\lambda) = \hat{\mathcal{L}}_2(\lambda)\hat{\mathcal{L}}_1(\lambda)\mathcal{L}_2(\lambda)\mathcal{L}_1(\lambda).$$

Рассмотрим теперь семейства

$$L(\lambda)L(\lambda) = \mathcal{L}_1(\lambda)\mathcal{L}_2(\lambda)\hat{\mathcal{L}}_2(\lambda)\hat{\mathcal{L}}_1(\lambda)\mathcal{L}_1(\lambda)\mathcal{L}_2(\lambda)\hat{\mathcal{L}}_2(\lambda)\hat{\mathcal{L}}_1(\lambda) \tag{42}$$

и

$$L(\lambda)M(\lambda) = \mathcal{L}_1(\lambda)\mathcal{L}_2(\lambda)\hat{\mathcal{L}}_2(\lambda)\hat{\mathcal{L}}_1(\lambda)\mathcal{L}_2(\lambda)\mathcal{L}_1(\lambda)\hat{\mathcal{L}}_2(\lambda)\hat{\mathcal{L}}_1(\lambda) \tag{43}$$

(напомним, что разные экземпляры операторов действуют в разных экземплярах квантового пространства). Эквивалентность (42) и (43) осуществляют как оператор $\mathcal{R}$ , действующий в квантовых пространствах 5-го - 8-го слева $\mathcal{L}$ -операторов, так и $\mathcal{R}'$ , действующий в квантовых пространствах 3-го - 6-го слева $\mathcal{L}$ -операторов. Однако семейства (42) и (43) имеют порождающие векторы $\Omega\otimes\Omega$ и $\Omega\otimes\tilde{\Omega}$ соответственно с отношением $a(\lambda)/d(\lambda)$, равным квадрату отношения (40). Эквивалентность между ними почти всегда единственна (ср. теорему 5 работы [II]), поэтому $\mathcal{R}$ действует нетривиально только в произведении двух квантовых пространств, откуда и вытекают утверждения теоремы для нечетного $n$ .

Случай $n=2p$ . В одну сторону теорема также очевидна, так как из слабой эквивалентности тоже вытекает совпадение вакуумных кривых $\mathcal{L}$ -операторов.

Ограничим теперь семейства $L(\lambda)$ (38) и $M(\lambda)$ (4I) на подпространство вида $S^{a}\otimes(S_+\otimes S_+\otimes S_+\otimes S_+\oplus S_-\otimes S_-\otimes S_-\otimes S_-)$ (опускаем индексы, нумерующие квантовые пространства). Рассуждая как при доказательстве леммы 7, получаем векторы $\Omega_1$, $\Omega_2$, собственные для диагональных элементов $\mathcal{A}(\lambda)$ и $\mathcal{D}(\lambda)$ матрицы $L(\lambda)$ и порождающие каждый подпространство, на котором $L(\lambda)$ действует неприводимо, а также аналогичные векторы $\widetilde{\Omega}_1$, $\widetilde{\Omega}_2$ для $M(\lambda)$ с теми же собственными значениями $\pm a(\lambda)$, $\pm d(\lambda)$. Отсюда получаем существование даже двух линейно независимых операторов $\mathcal{R}$, осуществляющих эквивалентность

$$\mathcal{R}L(\lambda)=M(\lambda)\mathcal{R} \tag{44}$$

на указанном подпространстве.

Пусть $P_+$ - проектор на $S_+\otimes S_+\otimes S_+\otimes S_+$ вдоль $S_-\otimes S_-\otimes S_-\otimes S_-$, $P_-=\mathbb{1}-P_+$. Из (44) и из того, что

$$L(\lambda)P_\pm=P_\mp L(\lambda),\quad M(\lambda)P_\pm=P_\mp M(\lambda)$$

получаем равенства

$$P_-\mathcal{R}P_-L(\lambda)=M(\lambda)P_+\mathcal{R}P_+,$$
$$P_+\mathcal{R}P_+L(\lambda)=M(\lambda)P_-\mathcal{R}P_-,$$

которые означают, что $\mathcal{R}$ в (44) можно выбрать обладающим двумя инвариантными подпространствами $S_\pm\otimes\ldots S_\pm$. После этого, применяя такие же рассуждения, как для нечетного $n$, но рассматривая всегда в квантовом пространстве только подпространства вида $S_\pm\otimes\ldots S_\pm$, устанавливаем, что $\mathcal{R}$ нетривиально действует только в произведениях двух подпространств $S_+\otimes S_+$ и $S_-\otimes S_-$, и приходим к формулам (36, 37). Теорема доказана.

Отметим следующие общие свойства построенных $\mathcal{R}$ - операторов.

Симметричность. Выполнены соотношения $\mathcal{R}=\mathcal{R}^{T}$ для нечетного $n$ и $\mathcal{R}_{\pm}=\mathcal{R}_{\pm}^{T}$ для $n=2p$.

$\mathbb{Z}_n$ - (или $\mathbb{Z}_p$ - ) инвариантность. Выполнены соотношения

$$(g\otimes g)\mathcal{R}=\mathcal{R}(g\otimes g),$$

$$(g\otimes g)\mathcal{R}_{\pm}=\mathcal{R}_{\pm}(g\otimes g),$$

где $g$ - оператор в пространстве $S$ или $S_{\pm}$ , заданный матрицей

$$g=\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \omega & & & \\ & & \omega^2 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \omega^{-1} \end{pmatrix},\quad \omega=\exp\frac{2\pi i}{n} \text{ или } \exp\frac{2\pi i}{p}.$$

Эти два свойства, верные, конечно, при фиксированном выше выборе базисов в $S$ и $S_{\pm}$ , легко доказываются из соответствующих свойств симметрии операторов $\mathcal{L}(\lambda)$.

Регулярность ([I4]) при нечетном $n$ . Если в формуле (35) семейства $\mathcal{L}_1(\lambda)$ и $\mathcal{L}_2(\lambda)$ одинаковы (заданы одинаковыми матрицами вида (8, I2 - I5), то $\mathcal{R}$ - оператор перестановки соответствующих квантовых пространств.

В самом деле, оператор перестановки, подставленный вместо $\mathcal{R}$ в (35), делает это соотношение верным. С другой стороны, и при одинаковых $\mathcal{L}_1(\lambda)$ и $\mathcal{L}_2(\lambda)$ определяется из (35) в общем случае однозначно (с точностью до постоянного множителя).

Регулярность при $n=2p$ . Аналогично предыдущему, при одинаковых $\mathcal{L}_1(\lambda)$ и $\mathcal{L}_2(\lambda)$ $\mathcal{R}_+$ и $\mathcal{R}_-$ в формулах (36 - 37) - операторы перестановки в пространствах $S_+\otimes S_+$ и $S_-\otimes S_-$ соответственно.

Связь между $\mathcal{R}_+$ и $\mathcal{R}_-$ и переход к "обычному" уравнению Янга - Бакстера при $n=2p$ (ср. замечание перед теоремой 4). Пусть $\nu$ - такое число, что $\nu^p=-1$, и пусть

$$h=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \nu & & \\ & & \ddots & \\ & & & \nu^{p-1} \end{pmatrix}. \tag{45}$$

Непосредственное вычисление, для которого нужно знать лишь расположение ненулевых элементов матриц $A(\lambda)$ , ... , $D(\lambda)$ (I2 - I4), показывает, что

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & \\ & \nu \end{pmatrix}\otimes h\right)\mathcal{L}_\pm(\lambda)=\mathcal{L}_\mp(\lambda)\left(\begin{pmatrix} 1 & \\ & \nu \end{pmatrix}\otimes h\right).$$

Используя (36, 37), находим, что

$$(h\otimes h)\mathcal{R}_\pm=\mathcal{R}_\mp(h\otimes h),$$

и поэтому для операторов

$$\mathcal{M}_+(\lambda)=(\mathbb{1}\otimes h)\mathcal{L}_+(\lambda) \tag{46}$$

выполнено обычное уравнение Янга - Бакстера

$$\mathcal{R}_+\mathcal{M}_{1+}(\lambda)\mathcal{M}_{2+}(\lambda)=\mathcal{M}_{2+}(\lambda)\mathcal{M}_{1+}(\lambda)\mathcal{R}_+ . \tag{47}$$

Теорема 6. Рассмотрим семейства операторов $\mathcal{L}_1(\lambda)$, $\mathcal{L}_2(\lambda)$, $\mathcal{L}_3(\lambda)$, действующие соответственно в $S^a\otimes S_1$ , $S^a\otimes S_2$ , $S^a\otimes S_3$ . Если $n$ нечетно, пусть выполнены соотношения

$$\mathcal{R}_{jk}\mathcal{L}_j(\lambda)\mathcal{L}_k(\lambda)=\mathcal{L}_k(\lambda)\mathcal{L}_j(\lambda)\mathcal{R}_{jk},$$

где $\mathcal{R}_{jk}$ действует в $S_j\otimes S_k$, $1\leq j<k\leq 3$. Если $n=2p$, пусть, аналогично, выполнены соотношения

$$\mathcal{R}_{jk\mp}\mathcal{L}_{j\pm}(\lambda)\mathcal{L}_{k\pm}(\lambda)=\mathcal{L}_{k\pm}(\lambda)\mathcal{L}_{j\pm}(\lambda)\mathcal{R}_{jk\pm},$$

где $\mathcal{R}_{jk\pm}$ действуют в $S_{j\pm}\otimes S_{k\pm}$.

Тогда выполнено "уравнение треугольников":

$$\mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23}=\mathcal{R}_{23}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12} \tag{48}$$

при нечетном $n$ и

$$\mathcal{R}_{12\pm}\mathcal{R}_{13\pm}\mathcal{R}_{23\pm}=\mathcal{R}_{23\pm}\mathcal{R}_{13\pm}\mathcal{R}_{12\pm} \tag{49}$$

при $n=2p$.

Доказательство. Докажем теорему только для нечетного $n$, так как для $n=2p$ доказательство аналогично. Как левая, так и правая части (48) осуществляют эквивалентность семейств операторов $\mathcal{L}_1(\lambda)\mathcal{L}_2(\lambda)\mathcal{L}_3(\lambda)$ и $\mathcal{L}_3(\lambda)\mathcal{L}_2(\lambda)\mathcal{L}_1(\lambda)$. Домножая справа на $\hat{\mathcal{L}}_3(\lambda)\hat{\mathcal{L}}_2(\lambda)\hat{\mathcal{L}}_1(\lambda)$, получаем семейства, имеющие порождающие векторы, поэтому оператор, осуществляющий их эквивалентность, почти всегда определен однозначно с точностью до постоянного множителя; последний есть обязательно корень целой степени из I. Из случая, когда все $\mathcal{L}_j(\lambda)$ одинаковы, получаем по непрерывности, что этот множитель равен I. Теорема доказана.

## § 4. Примеры явных вычислений

Условие перестановочности вакуумных кривых

$$\Gamma_1(\lambda):\ 1+\alpha_1(\lambda)u^n-\delta_1(\lambda)v^n-u^nv^n=0$$

и

$$\Gamma_2(\lambda):\ 1+\alpha_2(\lambda)u^n-\delta_2(\lambda)v^n-u^nv^n=0,$$

соответствующих нечетному $n$ , имеет вид

$$\alpha_1(\lambda)-\delta_1(\lambda)=\alpha_2(\lambda)-\delta_2(\lambda). \tag{50}$$

Соответствующее условие для $n=2p$ имеет вид

$$\alpha_1(\lambda)+(-1)^p\delta_1(\lambda)=\alpha_2(\lambda)+(-1)^p\delta_2(\lambda) \tag{5I}$$

(ср. аналогичное условие для модели Фельдергофа в работе [2]). Отметим, что если две вакуумные кривые вида (3I) или (33) порознь коммутируют с третьей, то они коммутируют и между собой.

Далее, из формул (32), (34) находим, что $\alpha(\lambda)$ и $\delta(\lambda)$ могут быть записаны для нечетного $n$ в виде

$$\alpha(\lambda)=\alpha_0\sin n(\lambda+\rho),\quad \delta(\lambda)=\delta_0\sin n(\lambda+\sigma),$$

а для $n=2p$ - в виде

$$\alpha(\lambda)=\alpha_0\sin p(\lambda+\rho),\quad \delta(\lambda)=\delta_0\sin p(\lambda+\sigma)$$

при нечетном $p$ и

$$\alpha(\lambda)=\alpha_0\cos p(\lambda+\rho),\quad \delta(\lambda)=\delta_0\cos p(\lambda+\sigma)$$

при четном $p$ . Теперь нетрудно подсчитать, что каждое семейство операторов $\mathcal{L}(\lambda)$ входит в двухпараметрическое множество таких семейств ( $\lambda$ - не параметр), так что для любых двух элементов этого множества выполнено уравнение Янга - Бакстера (35) или (47).

### 4.I. Модель свободных фермионов

Положим $n=4$ , $\eta=\frac{\pi}{4}$ . Будем исходить из уравнения (47), положив в (45) $\nu=i$ . Чтобы привести матрицы $\mathcal{M}_+(\lambda)$ (46) к симметричному виду, произведем следующее преобразование:

$$\mathcal{M}_+(\lambda) \to \mathcal{M}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \varkappa \end{pmatrix}^a \mathcal{M}_+(\lambda) \begin{pmatrix} 1 & \\ & \varkappa^{-1} \end{pmatrix}^a ,$$

где матрицы с индексом $a$ действуют во вспомогательном пространстве, $\varkappa = \exp \frac{\pi i}{4}$ . Сохраняя обозначения §2, за исключением замен

$$\rho \to \tilde{\rho} = \rho + \frac{\pi}{4}, \quad \sigma \to \tilde{\sigma} = \sigma - \frac{3\pi}{4},$$

получаем

$$\mathcal{M}(\lambda) = \begin{pmatrix} a_0 \cos(\lambda+\tilde{\rho}) & & & \varkappa^3 b_{32} \\ & i a_0 \sin(\lambda+\tilde{\rho}) & \varkappa b_{21} & \\ & \varkappa b_{21} & d_0 \sin(\lambda+\tilde{\sigma}) & \\ \varkappa^3 b_{32} & & & i d_0 \cos(\lambda+\tilde{\sigma}) \end{pmatrix}. \quad (52)$$

Формула (52) описывает все $\mathcal{L}$ -операторы хорошо известной "модели свободных фермионов" [I6, 2, I5] (конечно, при условии (I5)). Из (5I) находим, что две матрицы вида (52) удовлетворяют уравнению Янга - Бакстера с некоторым $\mathcal{R}$ , если при всех $\lambda$ для них одинаковы величины

$$\alpha(\lambda) + \delta(\lambda) = \frac{a_0^2 \sin 2(\lambda+\tilde{\rho}) + d_0^2 \sin 2(\lambda+\tilde{\sigma})}{2i\, b_{21} b_{32}} . \quad (53)$$

Совпадение величин (53) эквивалентно условиям коммутирования двух трансфер-матриц модели свободных фермионов, найденным в работе [I5].

4.2. $\mathcal{R}$ - операторы - отражения

В этом пункте нас будут интересовать семейства $\mathcal{L}$ - операторов вида (8, I2 - I6), для которых дополнительно выполнены следующие условия:

$$a_0 = d_0 = 1; \quad \rho + \sigma = 0. \tag{54}$$

Рассмотрим оператор $F(u,v)$ , заданный формулой (2). Так как он зависит от $\lambda$ , будем обозначать его $F(u,v|\lambda)$ .

Лемма 8. При условиях (54)

$$F(u,v|\lambda) = F(v,u|-\lambda).$$

Доказательство получается непосредственно из формул (2, I2 - I4).

Чтобы не утяжелять изложение, ограничимся далее в этом пункте случаем нечетного $n$ , имея в виду приложения к вычислениям при $n=3$ . Перенесение приводимых ниже лемм 9 и I0 и теоремы 7 на случай $n=2p$ не составляет труда.

Пусть далее $\mathcal{L}_1(\lambda)$ и $\mathcal{L}_2(\lambda)$ удовлетворяют (54) и таковы, что их вакуумные кривые $\Gamma_1(\lambda)$ и $\Gamma_2(\lambda)$ коммутируют при каждом $\lambda$ . Пусть $u$ - такое число (зависящее от $\lambda$ ), что $(u,u) \in \Gamma_1(\lambda)$ . Тогда также $(u,u) \in \Gamma_2(\lambda)$ . Через $X_j(v_1,v_2|\lambda)$ будем обозначать вакуумный вектор (определенный с точностью до множителя, см. определение 2) в точке $(v_1,v_2) \in \Gamma_j(\lambda)$, $j=1,2$.

Лемма 9. В общем положении по $\lambda$ , $\rho$ , $\Delta$ (I5) для каждого из операторов $\mathcal{L}_j(\lambda)$ среди $n^2$ вакуумных векторов $X_j(v,w|\lambda)$ , где $v,w$ пробегают все такие значения, что $v^n=w^n=u^n$, нет двух пропорциональных друг другу.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $\lambda=\frac{\pi}{2}$ , тогда $u^n=1$ . Докажем сначала, что $n$ векторов, получающихся при $v=w$ , попарно не пропорциональны. В самом деле, для $v=w$ в каждой строке матрицы $F(v,w|\lambda)$ остаются только два ненулевых элемента, и отношения этих двух элементов при различных $v$ различны.

Устремим теперь $b_{1n}$ к нулю. Тогда в первой строке $F(v,w|\lambda)$ будут два ненулевых элемента при $v \neq w$ (и один при $v=w$). Отношения этих двух элементов в различных точках $(v,w)\in\Gamma_j(\lambda)$ попарно различны, за исключением совпадения $n$ таких отношений при $v=w$. Так как случай $v=w$ уже разобран, лемма доказана.

Лемма I0. При указанных перед леммой 9 условиях оператор $\mathcal{R}$, удовлетворяющий уравнению Янга - Бакстера (35), обладает свойством

$$\mathcal{R}\big(X_1(v,u|\lambda)\otimes X_2(u,v|\lambda)\big)=g(u,v|\lambda)\,X_1(u,v|\lambda)\otimes X_2(v,u|\lambda), \quad (55)$$

где $v$ - любое число, такое что $v^n=u^n$, $g(u,v|\lambda)$ - численный множитель.

Доказательство. Из того, что $\mathcal{R}$ осуществляет эквивалентность (35), следует, что для любой точки $(w_1,w_2)\in\Gamma_1(\lambda)\circ\Gamma_2(\lambda)$ при любом $\lambda$ $\mathcal{R}$ переводит линейное пространство $S(w_1,w_2|\lambda)$ вакуумных векторов оператора $\mathcal{L}_1(\lambda)\mathcal{L}_2(\lambda)$ в этой точке в линейное пространство $T(w_1,w_2|\lambda)$ вакуумных операторов оператора $\mathcal{L}_2(\lambda)\mathcal{L}_1(\lambda)$ в этой точке. Эти пространства, очевидно, $n$-мерны, они натянуты на тензорные произведения вакуумных векторов $\mathcal{L}_1(\lambda)$ и $\mathcal{L}_2(\lambda)$, соответствующие различным путям, соединяющим $w_1$ и $w_2$ на рис.3 (ср. доказательство теоремы 2 и рис.I).

Рассмотрим пространства $S(u,u|\lambda)$ и $S(v,v|-\lambda)$ (рис. 4). Пользуясь пропорциональностью вакуумных векторов $X_j(v_1,v_2|\lambda)$ и $X_j(v_2,v_1|-\lambda)$, вытекающей из леммы 8, находим, что обоим выделенным на рис.4 путям соответствуют век-

торы , пропорциональные $X_1(v,u|\lambda)\otimes X_2(u,v|\lambda)$.
Эти векторы и составляют пересечение $S(u,u|\lambda)\cap S(v,v|-\lambda)$, так как вакуумные векторы, соответствующие остальным путям левой диаграммы рис.4, согласно лемме 9, не пропорциональны вакуумным векторам правой диаграммы.

Очевидно, $\mathcal{R}$ переводит $S(u,u|\lambda)\cap S(v,v|-\lambda)$ в $T(u,u|\lambda)\cap T(v,v|-\lambda)$ . Последнее пересечение также одномерно и состоит из векторов, пропорциональных правой части (55). Лемма доказана.

Теорема 7. Описанный в лемме 10 оператор $\mathcal{R}$ является (возможно, после умножения на подходящее число) отражением с той же кратностью собственных значений $1$ и $-1$ , что и оператор перестановки квантовых пространств. Если $(u,u)\in\Gamma_1(\lambda)$, то выполнено равенство

$$\mathcal{R}\big(X_1(u,u|\lambda)\otimes X_2(u,u|\lambda)\big)=X_1(u,u|\lambda)\otimes X_2(u,u|\lambda). \qquad (56)$$

Доказательство. Используя (55), выбираем $n^2+1$ собственных векторов оператора $\mathcal{R}^2$ , имеющих вид $X_1(v,u|\lambda)\otimes X_2(u,v|\lambda)$ , так, чтобы любые $n^2$ из них были линейно независимы. Оператор, обладающий такими собственными векторами, пропорционален единичному. Остальные утверждения теоремы получаем по непрерывности из случая одинаковых $\mathcal{L}_1(\lambda)$ и $\mathcal{L}_2(\lambda)$ (формулу (56) с использованием (55)). Теорема доказана.

Перейдем к рассмотрению случая $n=3$ . Несколько изменяя обозначения §2, положим

$$\mathcal{L}_1(\lambda)=\begin{pmatrix} \sin\left(\lambda+\rho+\frac{2\pi}{3}\right) & & & & & b_2 \\ & \sin(\lambda+\rho) & & b_3 & & \\ & & \sin\left(\lambda+\rho-\frac{2\pi}{3}\right) & & b_1 & \\ & b_3 & & \sin\left(\lambda-\rho-\frac{2\pi}{3}\right) & & \\ & & b_1 & & \sin(\lambda-\rho) & \\ b_2 & & & & & \sin\left(\lambda-\rho+\frac{2\pi}{3}\right) \end{pmatrix},$$

и пусть $\mathcal{L}_2(\lambda)$ задается такой же формулой с заменой буквы $b$ на $c$ и буквы $\rho$ на $\tau$. Условие, при котором для $\mathcal{L}_1(\lambda)$ и $\mathcal{L}_2(\lambda)$ выполнено уравнение Янга - Бакстера, имеет вид

$$\frac{b_1 b_2 b_3}{\sin 3\rho}=\frac{c_1 c_2 c_3}{\sin 3\tau}.$$

Чтобы описать оператор $\mathcal{R}$, нужно указать его трехмерное собственное подпространство, соответствующее собственному значению $-1$. Из $\mathbb{Z}_3$ - инвариантности $\mathcal{R}$ (§3) находим, в частности, что подпространство $S_{11}$, натянутое на векторы

$$e_{11}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad e_{23}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\quad e_{32}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},$$

является инвариантным для $\mathcal{R}$. Покажем, как найти вектор $\Psi\in S_{11}$, для которого $\mathcal{R}\Psi=-\Psi$ (очевидно, кратность собственного значения $-1$ на $S_{11}$, как и на двух других инвариантных подпространствах, равна $1$ ).

С помощью (56) находим, что следующим векторам соответствует собственное значение $1$ :

$$X_1\left(1,1\,\middle|\,\frac{\pi}{2}\right)\otimes X_2\left(1,1\,\middle|\,\frac{\pi}{2}\right)=\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix} c_1\\ c_2\\ c_3\end{pmatrix}, \tag{57}$$

$$X_1\left(1,1\,\middle|\,\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)\otimes X_2\left(1,1\,\middle|\,\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)=$$

$$=\begin{pmatrix} b_3\sqrt{3}\sin\left(-\rho+\frac{2\pi}{3}\right)+b_1b_2\\ 3\sin\left(-\rho-\frac{2\pi}{3}\right)\sin\left(-\rho+\frac{2\pi}{3}\right)+b_2^2\\ -b_1\sqrt{3}\sin\left(-\rho-\frac{2\pi}{3}\right)+b_2b_3\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix} c_3\sqrt{3}\sin\left(-\tau+\frac{2\pi}{3}\right)+c_1c_2\\ 3\sin\left(-\tau-\frac{2\pi}{3}\right)\sin\left(-\tau+\frac{2\pi}{3}\right)+c_2^2\\ -c_1\sqrt{3}\sin\left(-\tau-\frac{2\pi}{3}\right)+c_2c_3\end{pmatrix}. \tag{58}$$

Обозначим проекции (57) и (58) на $S_{11}$ через $\Psi_1$ и $\Psi_2$. Так как $\mathcal{R}=\mathcal{R}^T$ , $\Psi$ ортогонально $\Psi_1$ и $\Psi_2$ .

В общем случае $\Psi$ выглядит весьма громоздко. Представляет интерес случай $\rho=\tau=0$ , тогда $b_1=b_3$ , $c_1=c_3$ и $\mathcal{R}$ инвариантно относительно замены "верх - низ", т.е. коммутирует с оператором

$$\begin{pmatrix} 0 & & 1\\ & 1 & \\ 1 & & 0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix} 0 & & 1\\ & 1 & \\ 1 & & 0\end{pmatrix}.$$

В этом случае вычисление дает

$$\Psi=(b_2-c_2)e_{11}-b_1e_{23}+c_1e_{32}. \tag{59}$$

Подсчитав число свободных параметров в (59), можно заключить, что почти любая матрица вида

$$
\mathcal{R} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
r_{11} & & & & & r_{21} & & r_{31} & \\
& r_{33} & & r_{32} & & & & & r_{31} \\
& & 0 & & 0 & & 1 & & \\
\hline
& r_{32} & & r_{22} & & & & & r_{21} \\
& & 0 & & 1 & & 0 & & \\
r_{21} & & & & & r_{22} & & r_{32} & \\
\hline
& & 1 & & 0 & & 0 & & \\
r_{31} & & & & & r_{32} & & r_{33} & \\
& r_{31} & & r_{21} & & & & & r_{11}
\end{array}\right)
$$

если она является отражением относительно шестимерного подпространства, удовлетворяет уравнению Янга - Бакстера (35) с соответствующими $\mathcal{L}_1(\lambda)$ и $\mathcal{L}_2(\lambda)$.

## § 5. Заключение

Подводя итоги, сформулируем еще раз результаты настоящей работы.

1. Предложен принципиально новый метод построения $\mathcal{R}$-операторов - решений уравнения Янга - Бакстера - метод вакуумных кривых.

2. Вычислены вакуумные кривые $\mathcal{L}$-операторов, соответствующих всем известным конечномерным реализациям перестановочных соотношений шестивершинной модели.

3. Получен критерий существования $\mathcal{R}$-операторов, переставляющих указанные $\mathcal{L}$-операторы. Этот критерий опирается на понятие коммутирующих вакуумных кривых.

4. Обнаружена не известная ранее связь между шестивершинной моделью при $\eta=\frac{\pi}{4}$ и наиболее общим случаем модели свободных фермионов. Из этой связи естественно вытекают известные достаточные условия перестановочности двух трансфер-матриц последней модели.

5. Показано, что построенные $\mathcal{R}$-операторы при некоторых дополнительных условиях являются отражениеми. Приведены явные вычисления при $n=3$.

6. Обнаружена связь теории уравнений Янга - Бакстера с алгебраическими кривыми рода $g>1$.

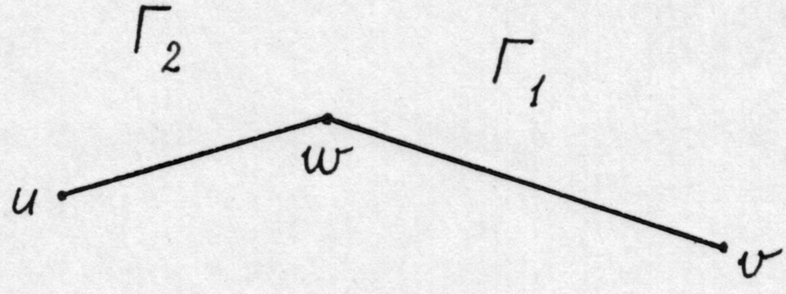
$\Gamma_2$
$\Gamma_1$
$u$
$w$
$v$

РИС. I

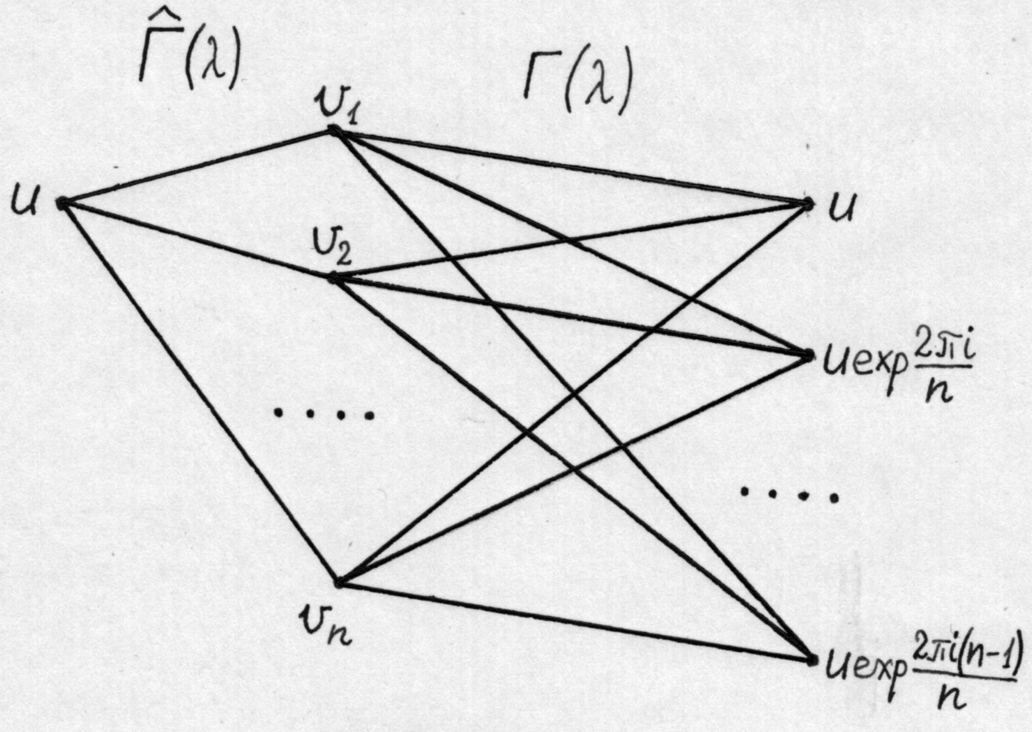
$\hat{\Gamma}(\lambda)$
$\Gamma(\lambda)$
$v_1$
$v_2$
$v_n$
$u$
$u$
$u \exp \frac{2\pi i}{n}$
$u \exp \frac{2\pi i(n-1)}{n}$

РИС. 2

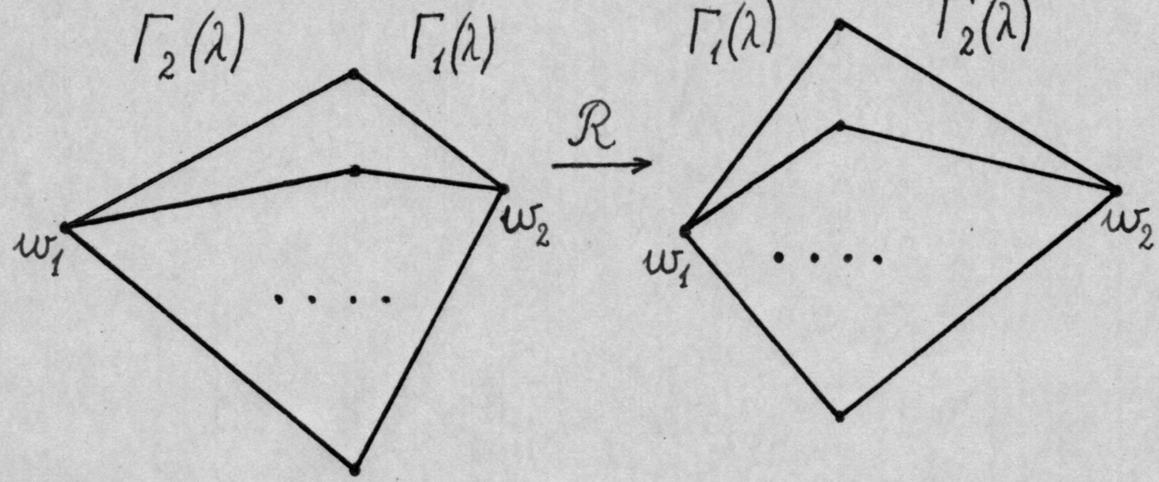
$\Gamma_2(\lambda)$
$\Gamma_1(\lambda)$
$\mathcal{R}$
$\Gamma_1(\lambda)$
$\Gamma_2(\lambda)$
$w_1$
$w_2$
$w_1$
$w_2$

РИС. 3

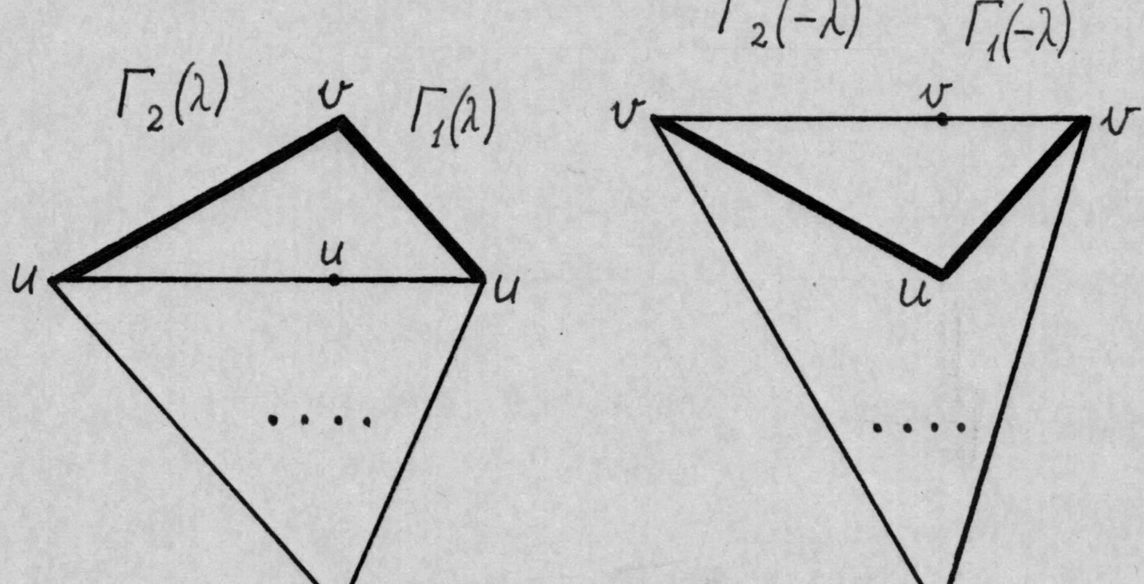
$\Gamma_2(-\lambda)$
$\Gamma_1(-\lambda)$
$\Gamma_2(\lambda)$
$v$
$\Gamma_1(\lambda)$
$v$
$v$
$v$
$u$
$u$
$u$
$u$

РИС. 4

2271-B

## ЛИТЕРАТУРА


1. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Квантовый метод обратной задачи и XYZ модель Гейзенберга. - УМН, 1979, т. 34, вып. 5 (209), с. 13 - 63.
2. Кричевер И.М. Уравнения Бакстера и алгебраическая геометрия.- Функц. анализ, 1981, т.15, вып. 2, с. 22 - 35.
3. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. М.: Наука, 1979, 624 с.,ил.
4. **Kulish P.P., Sklyanin E.K. Quantum spectral transform method. Recent developments. - Lect. Notes in Phys., 1982, v. 151, p. 61 - 119.**
5. **Kulish P.P., Reshetikhin N.Yu., Sklyanin E.K. Yang - Baxter equations and representation theory. - Lett. Math. Phys., 1981, v. 5, №5, p. 393 - 403.**
6. Корепин В.Е. Анализ билинейного соотношения шестивершинной модели. - ДАН СССР, т. 265, №6, с. 1361 - 1364.
7. **Izergin A.G., Korepin V.E. Lattice version of quantum field theory models in two dimensions. - Nucl. Phys., 1982, v. B205 [FS5], №3, p. 401 - 413.**
8. Тарасов В.О., Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Локальные гамильтонианы для интегрируемых квантовых моделей на решетке. - ТМФ, 1983, т. 57, №2, с. 163 - 181.
9. Тарасов В.О. О строении квантовых $L$-операторов для $R$-матрицы $XXZ$-модели. - ТМФ, 1984, т. 61, №2, с. 163 - 173.

10. Тарасов В.О. Локальные гамильтонианы для интегрируемых квантовых моделей на решетке. II. - ТМФ, 1984, т. 61, №3, с. 387 - 392.

11. Тарасов В.О. Неприводимые матрицы монодромии для $R$ - матрицы $XXZ$ -модели и решеточные локальные квантовые гамильтонианы. - ТМФ, 1985, т. 63, №2, с. 175 - 196.

12. Склянин Е.К. О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнением Янга - Бакстера. - Функц. анализ, 1982, т. 16, вып. 4, с. 27 - 34.

13. Склянин Е.К. О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнением Янга - Бакстера. Представления квантовой алгебры. - Функц. анализ, 1983, т. 17, вып.4, с. 34 - 48.

14. Кулиш П.П., Склянин Е.К. О решениях уравнения Янга - Бакстера. - Зап. научн. семин. ЛОМИ, 1980, т. 95, с. 129 - 160.

15. **Krinsky S. On the commutativity conditions for the transfer matrices of the free fermion model. - Phys. Lett., 1972, v. 39A, p. 169.**

16. **Felderhof B.U. Diagonalization of the transfer matrix of the free-fermion model. - Physica, 1973, v. 66, N°2, p. 279 -298.**

17. Чередник И.В. О некоторых конечномерных представлениях обобщенных алгебр Склянина. - Функц. анализ, 1985, т. 19, вып. 1, с. 89 - 90.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

41

Печатается в соответствии с решением Совета Челябинского политехнического института имени Ленинского комсомола от 24 февраля 1986 г.

В печать 19.3.86

Тир. 1 Цена 6-15 Зак. 32792

Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ
Люберцы, Октябрьский пр., 403