МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР

ЧЕЛЯБИНСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. ЛЕНИНСКОГО КОМСОМОЛА

УДК 517.43

И.Г.Корепанов

О СПЕКТРЕ ТРАНСФЕР-МАТРИЦЫ ШЕСТИВЕРШИННОЙ МОДЕЛИ

Челябинск - 1987

I. В настоящей статье автор продолжает изучение свойств шестивершинной модели, начатое в работах [I, 2].

Пусть $\eta = \ell\pi/n$, где ℓ и n - взаимно простые целые числа. Ввиду выявленной в [I] разницы между случаями четного и нечетного n будем вплоть до п.8 считать, что n нечетно. Введем обозначение

$$\mathcal{L}_0(\lambda) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_0(\lambda) & \mathcal{B}_0(\lambda) \\ \mathcal{C}_0(\lambda) & \mathcal{D}_0(\lambda) \end{pmatrix}$$

для $(n-1)$-й симметрической степени $\mathcal{L}$-оператора шестивершинной модели. Более точно, $\mathcal{L}_0(\lambda)$ - это такой $\mathcal{L}$-оператор, что $\mathcal{A}_0(\lambda), \ldots, \mathcal{D}_0(\lambda)$ действуют в пространстве размерности n и обладают порождающим вектором Ω со свойствами

$$\mathcal{C}_0(\lambda)\Omega \equiv 0, \quad \mathcal{A}_0(\lambda)\Omega = \sin\lambda\cdot\Omega, \quad \mathcal{D}_0(\lambda)\Omega = \sin(\lambda+2\eta)\cdot\Omega.$$

Пусть

$$T_0(\lambda) = \mathrm{Tr}\prod_{i=1}^{\overset{\curvearrowleft}{N}} \mathcal{L}_0(\mu_i + \lambda)$$

- неоднородная трансфер-матрица, действующая в пространстве H - тензорном произведении N двумерных пространств (как в [2], п.3).

Напомним [2], что через H_w обозначается общее собственное подпространство всех трансфер-матриц

$$T(\lambda) = Tr \prod_{i=1}^{\overleftarrow{N}} \mathcal{L}(\mu_i + \lambda) \qquad \text{(I)}$$

с единичной матрицей коэффициентов вакуумной кривой

$$M_{\mathcal{L}}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

в частности, трансфер-матрицы $T_0(\lambda)$. Цель настоящей работы доказательство **следующей теоремы.**

Теорема I. Пусть $w_0(\lambda)$ - собственное значение трансфер-матрицы $T_0(\lambda)$ на H_w. Если среди нулей функции $w_0(\lambda)$ имеется K_w попарно различных $\mathrm{mod}\,\frac{\pi}{n}$ однократных нулей $\lambda = \nu_1$, ..., ν_{K_w}, то $\dim H_w$ делится на 2^{K_w}.

2. Пусть

$$\mathcal{L}(\lambda) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}(\lambda) & \mathcal{B}(\lambda) \\ \mathcal{C}(\lambda) & \mathcal{D}(\lambda) \end{pmatrix} \qquad (2)$$

- оператор, описываемый формулами (6 - II) работы [2], т.е. $\mathcal{A}(\lambda)$, ..., $\mathcal{D}(\lambda)$ действуют в n-мерном пространстве, но порождающий вектор Ω не обязан существовать. Пусть $T(\lambda)$ задается формулой (I), а $\widehat{T}(\lambda)$ таким же образом строится по $\mathcal{L}$-оператору

$$\widehat{\mathcal{L}}(\lambda) = \begin{pmatrix} \mathcal{D}(\lambda)^T & -\mathcal{B}(\lambda)^T \\ -\mathcal{C}(\lambda)^T & \mathcal{A}(\lambda)^T \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Лемма I. В обозначениях предыдущего абзаца

$$T(\lambda)\,\hat{T}(\lambda)=\mathrm{const}\cdot T_0(\lambda-\varphi_1)\,T_0(\lambda-\varphi_2), \qquad (4)$$

где φ_1 и φ_2 являются нулями функции $\det M_{\mathcal{L}}(\lambda)$ - определителя матрицы коэффициентов вакуумной кривой оператора $\mathcal{L}(\lambda)$ [2].

Доказательство. Утверждение, что верна формула (4) с некоторыми φ_1 и φ_2, является переформулировкой лемм 5 и 6 работы [I], причем, согласно доказательству второй из этих лемм, числа φ_1 и φ_2 являются (n-кратными) нулями функции $\det \mathcal{L}(\lambda)$. То, что φ_1 и φ_2 являются нулями $\det M_{\mathcal{L}}(\lambda)$ (в общем случае однократными), легко следует из явного вида $\mathcal{L}(\lambda)$ и определения матрицы $M_{\mathcal{L}}(\lambda)$ (см. теорему I и формулу (I3) работы [2]).
Лемма доказана.

3. Уточним определение введенной в [I, 2] операции $\mathcal{L}(\lambda)\mapsto\hat{\mathcal{L}}(\lambda)$ следующим образом: для любого $\mathcal{L}$-оператора вида (2), где от $\mathcal{A}(\lambda), \dots, \mathcal{D}(\lambda)$ требуется только, чтобы они удовлетворяли коммутационным соотношениям шестивершинной модели, введем $\hat{\mathcal{L}}(\lambda)$ формулой (3).

4, Пусть кроме упомянутых в теореме I нулей $\lambda=\nu_1$, ..., ν_{K_ω} трансфер-матрица $T_0(\lambda)$ имеет на H_ω нули кратности $\geqslant 2$ $\lambda=\nu_{K_\omega+1},\dots,\nu_{M_\omega} \pmod{\pi}$.

Пусть $T(\lambda)$ - трансфер-матрица, соответствующая по формуле (I) такому оператору $\mathcal{L}(\lambda)$, для которого матрица коэффициентов вакуумной кривой $M_{\mathcal{L}}(\lambda)$ вырождена в точках $\lambda=\varphi_1, \ldots, \varphi_q (\mathrm{mod}\, \pi/n)$: $\det M_{\mathcal{L}}(\varphi_i)=0,\ 1\leq i\leq q$.

Напомним, что $M_{\mathcal{L}}(\lambda)$ определена с точностью до мероморфного скалярного множителя $g(\lambda)$. Это позволяет считать, что в каждой точке φ_i элементы матрицы $M_{\mathcal{L}}$ конечны и не все равны нулю. То, что нули $\det M_{\mathcal{L}}(\lambda)$ располагаются с периодом $\frac{\pi}{n}$, следует из явного вида $M_{\mathcal{L}}(\lambda)$.

Лемма 2. Если описанные выше $\mathcal{L}(\lambda)$ и $T(\lambda)$ таковы, что для всех $i, j,\ 1\leq i\leq q,\ 1\leq j\leq M_{w}$,

$$\varphi_i+\nu_j\neq 0 \quad \left(\mathrm{mod}\, \frac{\pi}{n}\right), \tag{5}$$

то существует $\mathcal{L}$-оператор $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ с той же вакуумной кривой

$$M_{\tilde{\mathcal{L}}}(\lambda)=M_{\mathcal{L}}(\lambda)$$

такой, что соответствующая ему по формуле (I) трансфер-матрица $\tilde{T}(\lambda)$ невырождена на H_{w} при $\lambda=0$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{L}_1(\lambda)$ - $\mathcal{L}$-оператор такого типа, как описано в начале п.2, причем выберем его так, чтобы нули $\det M_{\mathcal{L}_1}(\lambda)$ находились ровно в точках φ_1 и φ_2 и чтобы

$$\mathrm{Ker}\, M_{\mathcal{L}_1}(\varphi_i)=\mathrm{Ker}\, M_{\mathcal{L}}(\varphi_i),\ i=1,2 \tag{6}$$

(это всегда можно сделать, при необходимости поменяв нумерацию точек φ_i, $1\le i\le q$). Из (6) следует, что имеет место разложение

$$M_{\mathcal{L}}(\lambda)=M_{\mathcal{L}'}(\lambda)\,M_{\mathcal{L}_1}(\lambda),$$

где $\det M_{\mathcal{L}'}(\lambda)$ имеет на 2 нуля меньше, чем $\det M_{\mathcal{L}}(\lambda)$.

Продолжая аналогично, получим

$$M_{\mathcal{L}}(\lambda)=M_0\,M_{\mathcal{L}_{q/2}}(\lambda)\ldots M_{\mathcal{L}_1}(\lambda),$$

где M_0 - постоянная матрица, а именно $M_0=\begin{pmatrix} a_0 & 0\\ 0 & d_0\end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} 0 & b_0\\ c_0 & 0\end{pmatrix}$, а $\mathcal{L}_2(\lambda)$, ..., $\mathcal{L}_{q/2}(\lambda)$ - $\mathcal{L}$ -операторы такого же типа, как $\mathcal{L}_1(\lambda)$ (общее число нулей φ_i, взятых с учетом кратностей, конечно, всегда четное).

Из леммы I следует, что трансфер-матрицы $T_1(\lambda)$, ..., $T_{q/2}(\lambda)$, построенные по операторам $\mathcal{L}_1(\lambda)$, ..., $\mathcal{L}_{q/2}(\lambda)$, могут быть вырожденными при $\lambda=0$ только при нарушении условия (5). То же относится поэтому и к $T(\lambda)$. Лемма 2 доказана.

5. Пусть теперь $T'(\lambda)$ и $T''(\lambda)$ - две трансфер-матрицы, построенные согласно формуле (I) по операторам $\mathcal{L}'(\lambda)$ и $\mathcal{L}''(\lambda)$ таким, что $\det M_{\mathcal{L}'}(\lambda)=0$ в точках φ_1', ..., $\varphi_{q'}'$, $\det M_{\mathcal{L}''}(\lambda)=0$ в точках φ_1'', ..., $\varphi_{q''}''$.

Пусть условия

$$\varphi_i' + \nu_j \neq 0 \pmod{\frac{\pi}{n}},$$

$$\varphi_i'' + \nu_j \neq 0 \pmod{\frac{\pi}{n}},$$

где по-прежнему ν_j, $1 \leq j \leq M_\omega$ — нули $T_0(\lambda)\big|_{H_\omega}$, выполнены для всех i, j кроме $i = j = 1$, т.е.

$$\varphi_1' + \nu_1 = 0,$$
$$\varphi_1' = \varphi_1''.$$

Лемма 3. Если операторы $\mathcal{L}'(\lambda)$ и $\mathcal{L}''(\lambda)$, описанные в предыдущем абзаце, таковы, что

$$\operatorname{Ker} M_{\mathcal{L}'}(-\nu_1) = \operatorname{Ker} M_{\mathcal{L}''}(-\nu_1), \tag{7}$$

то

$$\operatorname{Ker} T'(0)\big|_{H_\omega} = \operatorname{Ker} T''(0)\big|_{H_\omega}. \tag{8}$$

Доказательство. Аналогично доказательству леммы I можно найти, что

$$T'(\lambda)\hat{T}'(\lambda) = \mathrm{const} \cdot \prod_{i=1}^{q'} T_0(\lambda - \varphi_i').$$

Поэтому $T'(\lambda)\hat{T}'(\lambda)\big|_{H_\omega}$ является скалярным оператором, имеющим однократный ноль при $\lambda = 0$, откуда

$$\operatorname{Ker} T'(0)\big|_{H_\omega} = \operatorname{Im} T'(0)\big|_{H_\omega}. \tag{9}$$

Из (7) и из того, что $M_{\hat{\mathcal{L}}'}(\lambda)$ пропорциональна $(M_{\mathcal{L}'}(\lambda))^{-1}$, следует, что $M_{\mathcal{L}''}(\lambda)M_{\hat{\mathcal{L}}'}(\lambda)$ при $\lambda=-\nu_1$ невырождена (с точностью до скалярного множителя!).

Поэтому $\mathcal{L}(\lambda)=\mathcal{L}''(\lambda)\hat{\mathcal{L}}'(\lambda)$ удовлетворяет условиям леммы 2, откуда следует, что при $\lambda\to 0$ $T''(\lambda)\hat{T}'(\lambda)\big|_{H_w}$ пропорционально невырожденномуоператору. Поэтому

$$\operatorname{Ker} T''(0)\big|_{H_w} = \operatorname{Im} T'(0)\big|_{H_w}. \tag{I0}$$

Сравнивая (9) и (I0), приходим к (8), что и требовалось доказать.

6. В этом пункте пусть оператор

$$\mathcal{L}(\lambda)=\begin{pmatrix}\mathcal{A}(\lambda) & \mathcal{B}(\lambda)\\ \mathcal{C}(\lambda) & \mathcal{D}(\lambda)\end{pmatrix}$$

и построенная по формуле (I) трансфер-матрица $T(\lambda)$ обладают следующими свойствами:

а) $\mathcal{A}(\lambda)$, ..., $\mathcal{D}(\lambda)$ действуют в n-мерном пространстве, причем порождающего вектора Ω со свойством $\mathcal{C}(\lambda)\Omega\equiv 0$ не существует;

б) матрица коэффициентов вакуумной кривой имеет вид

$$M_{\mathcal{L}}(\lambda)=\begin{pmatrix}\alpha(\lambda) & \beta(\lambda)\\ \beta(\lambda) & \alpha(\lambda)\end{pmatrix};$$

3268-87

в) $$T(\lambda)\hat{T}(\lambda)=\mathrm{const}\cdot T_0(\lambda-\varphi_1)T_0(\lambda-\varphi_2),$$

причем все суммы

$$\varphi_i+\nu_j\,,\quad i=1,\,2;\quad 1\leq j\leq M_w$$

попарно различны (напомним, что ν_j -это нули скалярного оператора $T_0(\lambda)\big|_{H_w}$, причем первые из них - однократные).

$\mathcal{L}(\lambda)$ со свойствами а) - в) всегда существует. Из свойства б) следует, что при любых λ,μ $M_{\mathcal{L}}(\lambda)$ и $M_{\mathcal{L}}(\mu)$ коммутируют, и аналогичное свойство поэтому верно для $T(\lambda)$ и $T(\mu)$, а также для $T(\lambda)$ и $\hat{T}(\mu)$.

Лемма 4. Для $1\leq j\leq K_w$ имеет место разложение

$$H_w=\mathrm{Ker}\,T(\varphi_1+\nu_j)\big|_{H_w}\oplus\mathrm{Ker}\,\hat{T}(\varphi_1+\nu_j)\big|_{H_w}.$$

Доказательство. Скалярный оператор $\left(T(\varphi_1+\nu_j+\lambda)\hat{T}(\varphi_1+\nu_j+\lambda)\right)\big|_{H_w}$ имеет однократный нуль при $\lambda=0$, что можно записать в виде

$$\left(T(\varphi_1+\nu_j)\hat{T}(\varphi_1+\nu_j)+\lambda\,\frac{dT(\varphi_1+\nu_j+\lambda)}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0}\hat{T}(\varphi_1+\nu_j)+\right.$$

$$+\lambda T(\varphi_1+\nu_j)\left.\frac{d\hat{T}(\varphi_1+\nu_j+\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=0}\Big)\Big\|_{H_\omega} = \mathrm{const}\cdot\lambda + o(\lambda).$$

Из членов нулевого порядка по λ получаем, что

$$\dim \operatorname{Ker} T(\varphi_1+\nu_j)\big|_{H_\omega} + \dim \operatorname{Ker} \hat{T}(\varphi_1+\nu_j)\big|_{H_\omega} \geqslant \dim H_\omega. \tag{II}$$

Из членов первого порядка по λ с учетом коммутативности T и $\frac{d\hat{T}}{d\lambda}$, вытекающей, как объяснено выше, из условия б) настоящего пункта, видно, что не может существовать ненулевого вектора $\Phi \in H_\omega$ со свойствами $T(\varphi_1+\nu_j)\Phi = 0$ и $\hat{T}(\varphi_1+\nu_j)\Phi = 0$, т.е.

$$\operatorname{Ker} T(\varphi_1+\nu_j)\big|_{H_\omega} \cap \operatorname{Ker} \hat{T}(\varphi_1+\nu_j)\big|_{H_\omega} = 0. \tag{I2}$$

Сопоставлением (II) и (I2) лемма доказана.

Для каждого подмножества $A \subset \{1, \ldots, K_\omega\}$ множества целых чисел от 1 до K_ω введем подпространство $H(A) \subset H_\omega$:

$$H(A) = \bigcap_{i\in A} \operatorname{Ker} T(\varphi_1+\nu_i)\big|_{H_\omega} \bigcap_{\substack{j=1\\ j\notin A}}^{K_\omega} \operatorname{Ker} T(\varphi_1+\nu_j)\big|_{H_\omega}.$$

Лемма 5. Размерности подпространств $H(A)$ для всех A одинаковы ; имеет место разложение

$$H_{\omega} = \bigoplus_{A} H(A). \tag{I3}$$

Доказательство. Разложение (I3) легко следует из леммы 4 и коммутативности $T(\lambda)$, $T(\mu)$, $\hat{T}(\lambda')$, $\hat{T}(\mu')$ при всех λ, μ, λ', μ'. Для доказательства равенства размерностей $H(A)$ достаточно показать, что существует невырожденный оператор F, переводящий $H(A_1)$ в $H(A_2)$ для любых A_1, A_2. Пусть, например, $A_1 = \{1, \dots, K_{\omega}\}$, $A_2 = \{2, \dots, K_{\omega}\}$. Построим оператор F со свойствами

$$F \operatorname{Ker} T(\varphi_1 + \nu_1)\big|_{H_{\omega}} = \operatorname{Ker} \hat{T}(\varphi_1 + \nu_1)\big|_{H_{\omega}},$$

$$F \operatorname{Ker} T(\varphi_1 + \nu_2)\big|_{H_{\omega}} = \operatorname{Ker} T(\varphi_1 + \nu_2)\big|_{H_{\omega}},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$F \operatorname{Ker} T(\varphi_1 + \nu_{K_{\omega}})\big|_{H_{\omega}} = \operatorname{Ker} T(\varphi_1 + \nu_{K_{\omega}})\big|_{H_{\omega}}.$$

Применяя лемму 3, находим, что можно положить

$$F = \tilde{T}(0)\big|_{H_{\omega}},$$

где $\tilde{T}(\lambda)$ - трансфер-матрица, построенная по оператору $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$, обладающему свойствами

$$
\left.
\begin{aligned}
&M_{\tilde{\mathcal{L}}}(-\nu_1)\operatorname{Ker} M_{\mathcal{L}}(\varphi_1) = \operatorname{Ker} M_{\tilde{\mathcal{L}}}(\varphi_1),\\
&M_{\tilde{\mathcal{L}}}(-\nu_2)\operatorname{Ker} M_{\mathcal{L}}(\varphi_1) = \operatorname{Ker} M_{\mathcal{L}}(\varphi_1),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&M_{\tilde{\mathcal{L}}}(-\nu_{k_\omega})\operatorname{Ker} M_{\mathcal{L}}(\varphi_1) = \operatorname{Ker} M_{\mathcal{L}}(\varphi_1).
\end{aligned}
\right\}
\qquad (14)
$$

Напомним, что $M_{\tilde{\mathcal{L}}}(\lambda)$ состоит из тригонометрических полиномов, степень которых зависит от $\tilde{\mathcal{L}}$. Выбрав эту степень достаточно большой, можно удовлетворить всем условиям (I4), причем так, что $\tilde{T}(0)|_{H_\omega}$ будет невырожденным оператором. Лемма доказана.

Доказательство теоремы I завершается теперь замечанием, что количество подпространств $H(A)$ равно 2^{k_ω}.

7. Приложим полученные результаты к вычислению кратности вырождения собственного значения трансфер-матрицы шестивершинной модели, соответствующего "голому вакууму" - собственному вектору вида

$$
\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \ldots \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.
$$

Будем считать, что длина цепочки N делит n. Простое вычисление показывает, что в этом случае $K_w = N/n$. Значит, кратность вырождения делится на $2^{N/n}$.

8. В случае четного $n = 2p$ можно провести все аналогичные рассуждения. Необходимые усложнения вытекают из работы [I]. В частности, трансфер-матрицы нужно строить, используя вместо $\mathcal{L}(\lambda)$ оператор $\mathcal{L}_+(\lambda)$ ([I], формула (30)). Теорема I остается верной для $n = 2p$, если заменить в ее формулировке $\mathrm{mod}\,\frac{\pi}{n}$ на $\mathrm{mod}\,\frac{\pi}{p}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. Корепанов И.Г. Вакуумные кривые $\mathcal{L}$-операторов, связанных с шестивершинной моделью, и построение $\mathcal{R}$-операторов / Челяб. политехн. ин-т. - Челябинск, I986. - 40 с.: ил. - Библиогр.: I7 назв. - Деп. в ВИНИТИ 2.04.86, № 227I - В 86.

2. Корепанов И.Г. Скрытые симметрии шестивершинной модели / Челяб. политехн. ин-т. - Челябинск, I987. - I2 с. - Библиогр.: 6 назв. - Деп. в ВИНИТИ 27.02.87, № I472 - В 87.

Печатается в соответствии с решением Ученого Совета Челябинского политехнического института имени Ленинского комсомола от 29 декабря 1986 года.

3268-87

В печать от 15.4.87.
Тир. 1 Цена 2=25 Зак. 32792
Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ
Люберцы, Октябрьский пр., 403