МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
СССР

ЧЕЛЯБИНСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. ЛЕНИНСКОГО
КОМСОМОЛА

УДК 517.43

И.Г.Корепанов

СКРЫТЫЕ СИММЕТРИИ ШЕСТИВЕРШИННОЙ МОДЕЛИ

Челябинск - 1987

I. Рассмотрим уравнение Янга - Бакстера

$$R(\lambda-\mu)\mathcal{L}(\lambda)\mathcal{L}(\mu)=\mathcal{L}(\mu)\mathcal{L}(\lambda)R(\lambda-\mu), \qquad (\mathrm{I})$$

где $R(\lambda-\mu)$ - R -матрица шестивершинной модели двумерной статистической физики [I]. Решением уравнения (I) служит, в первую очередь, $\mathcal{L}$ -оператор вида

$$\mathcal{L}(\lambda)=\begin{pmatrix} \sin(\lambda+\eta) & & & \\ & \sin(\lambda-\eta) & \sin 2\eta & \\ & \sin 2\eta & \sin(\lambda-\eta) & \\ & & & \sin(\lambda+\eta) \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Серию других решений (I) позволяет построить операция размножения [2, 3]. Имеются также "тривиальные"решения (I) - постоянные $\mathcal{L}$ -операторы с одномерным квантовым пространством

$$\mathcal{L}(\lambda)=\begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ 0 & d_0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathcal{L}(\lambda)=\begin{pmatrix} 0 & b_0 \\ c_0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

В случае произвольного η все известные конечномерные решения (I) получаются из перечисленных с помощью двух операций: построения неоднородных матриц монодромии

$$\mathcal{L}(\lambda)=\prod_{i=1}^{\curvearrowleft M}\mathcal{L}^{(i)}(\lambda_i+\lambda), \qquad (4)$$

где $\mathcal{L}^{(i)}(\lambda)$ - произвольные решения (I), λ_i - постоянные числа, а также взятием прямой суммы по квантовым пространствам (при общем вспомогательном)

$$\mathcal{L}(\lambda) = \bigoplus_{i=1}^{K} \mathcal{L}^{(i)}(\lambda_i + \lambda). \tag{5}$$

Гораздо интереснее ситуация, если параметр η в (2) соизмерим с π. Пусть

$$\frac{\eta}{\pi} = \frac{m}{n},$$

m и n - взаимно произвольные числа. Тогда к решениям уравнения (I) следует добавить $\mathcal{L}$-матрицы

$$\mathcal{L}(\lambda) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}(\lambda) & \mathcal{B}(\lambda) \\ \mathcal{C}(\lambda) & \mathcal{D}(\lambda) \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где $\mathcal{A}(\lambda), \dots, \mathcal{D}(\lambda)$ размера $n \times n$ имеют вид

$$\mathcal{A}(\lambda) = a \begin{pmatrix} \sin(\lambda+\rho+(n-1)\eta) & & & & 0 \\ & \sin(\lambda+\rho+(n-3)\eta) & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ 0 & & & & \sin(\lambda+\rho+(1-n)\eta) \end{pmatrix}, \tag{7}$$

$$\mathcal{B}(\lambda)=\begin{pmatrix} 0 & & & & b_{1n} \\ b_{21} & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & b_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}, \qquad (8)$$

$$\mathcal{C}(\lambda)=\begin{pmatrix} 0 & c_{12} & & & \\ & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & c_{n-1,n} \\ c_{n1} & & & & 0 \end{pmatrix}, \qquad (9)$$

$$\mathcal{D}(\lambda)=d\begin{pmatrix} \sin(\lambda+\sigma+(1-n)\eta) & & & \text{\huge 0} \\ & \sin(\lambda+\sigma+(3-n)\eta) & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & \sin(\lambda+\sigma+(n-1)\eta) \end{pmatrix}. \qquad (10)$$

Здесь a, d, ρ, σ и все элементы матриц $\mathcal{B}(\lambda)$ и $\mathcal{C}(\lambda)$ - постоянные, причем выполнены соотношения (вычитание в индексах понимается $\operatorname{mod} n$)

$$b_{k,k-1}\, c_{k,k-1} = \Delta + \frac{ad}{2}\cos\bigl(\rho - \sigma + 2\eta(n-2k)\bigr), \tag{II}$$

$k = 1, \dots, n$; Δ - также постоянная.

$\mathcal{L}$-матрицы вида (6 - II) интересны тем (см. [4]), что не имеют в квантовом пространстве "порождающего вектора", аннулируемого операторами $\mathcal{C}(\lambda)$ при каждом λ. Аналогом такого вектора оказывается для них "вакуумные векторы" в смысле работы [5]. В связи с этим важную роль при изучении оператора $\mathcal{L}(\lambda)$ начинает играть его вакуумная кривая [5] $\Gamma_{\mathcal{L}}(\lambda)$ - алгебраическая кривая в $\mathbb{C}^2$, заданная уравнением

$$\det\bigl(u\mathcal{A}(\lambda) + \mathcal{B}(\lambda) - uv\mathcal{C}(\lambda) - v\mathcal{D}(\lambda)\bigr) = 0.$$

Явный вид $\Gamma_{\mathcal{L}}(\lambda)$ для всех интересующих нас случаев вычислен в работе [6]. (Все интересующие нас результаты работы [6] легко переносятся на общий случай, несмотря на имеющееся в [6] дополнительное ограничение $\mathcal{C}(\lambda) = \mathcal{B}(\lambda)^T$ на операторы (6 - II)). Наиболее простым оказывается случай нечетного n, которым мы вплоть до п. 5 и ограничимся.

Теорема I ([6]). Вакуумная кривая $\Gamma_{\mathcal{L}}(\lambda)$ $\mathcal{L}$-оператора вида (6 - II) задается уравнением

$$v^n = \frac{\alpha(\lambda)u^n + \beta(\lambda)}{\gamma(\lambda)u^n + \delta(\lambda)}, \tag{I2}$$

где $\alpha(\lambda) = \det \mathcal{A}(\lambda), \dots, \delta(\lambda) = \det \mathcal{D}(\lambda)$.

Сопоставим $\mathcal{L}$ -матрице вида (6 - II) матрицу

$$M_{\mathcal{L}}(\lambda)=\begin{pmatrix}\alpha(\lambda) & \beta(\lambda)\\ \gamma(\lambda) & \delta(\lambda)\end{pmatrix}. \tag{I3}$$

Естественно считать $M_{\mathcal{L}}(\lambda)$ определенной с точностью до мероморфного скалярного множителя $g(\lambda)$. Далее в этой статье мы считаем всегда выполненным условие $\det M_{\mathcal{L}}(\lambda)\neq 0$.

Теорема 2. Вакуумная кривая $\Gamma_{\mathcal{L}}(\lambda)$ матрицы монодромии (4), составленной из $\mathcal{L}$ -матриц вида (6 - II), имеет вид

$$\left(v^n-\frac{\alpha(\lambda)u^n+\beta(\lambda)}{\gamma(\lambda)u^n+\delta(\lambda)}\right)^K=0,$$

где K - натуральное число, а

$$\begin{pmatrix}\alpha(\lambda) & \beta(\lambda)\\ \gamma(\lambda) & \delta(\lambda)\end{pmatrix}=\prod_{i=1}^{\overset{\curvearrowleft}{M}} M_{\mathcal{L}^{(i)}}(\lambda_i+\lambda). \tag{I4}$$

Доказательство легко следует из результатов работ [5, 6].

Теорема 2 подсказывает сопоставить и матрице монодромии $\mathcal{L}(\lambda)$ матрицу коэффициентов (I4) ее вакуумной кривой. При этом выполнено условие

$$(u,v)\in\Gamma_{\mathcal{L}}(\lambda)\Rightarrow v^n=\frac{\alpha(\lambda)u^n+\beta(\lambda)}{\gamma(\lambda)u^n+\delta(\lambda)}, \tag{I5}$$

а тем, что $\Gamma_{\mathcal{L}}$ может состоять из нескольких одинаковых компонент, мы пренебрегаем. Поставим, далее, в соответствие $\mathcal{L}$ - матрице шестивершинной модели (2) и ее размноженным вариантам единичную матрицу $M_{\mathcal{L}}(\lambda)$, а левой и правой матрицам (3) - соответственно

$$M_{\mathcal{L}}(\lambda)=\begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ 0 & d_0 \end{pmatrix} \quad и \quad M_{\mathcal{L}}(\lambda)=\begin{pmatrix} 0 & b_0 \\ c_0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Разрешим включать теперь в матрицу монодромии (4) наряду с $\mathcal{L}$ -матрицами вида (6 - II) и перечисленные в этом абзаце $\mathcal{L}$ -матрицы. Используя результаты работы [6], находим, что такой матрице монодромии по-прежнему соответствует в смысле соотношения (I5) матрица $\begin{pmatrix} \alpha(\lambda) & \beta(\lambda) \\ \gamma(\lambda) & \delta(\lambda) \end{pmatrix}$, получаемая из соотношения (I4).

2. В работе [6] была введена инволютивная операция $\mathcal{L}(\lambda) \mapsto \hat{\mathcal{L}}(\lambda)$, сопоставляющая $\mathcal{L}$ -матрице вида (6 - II) матрицу $\hat{\mathcal{L}}(\lambda)$ такую, что вакуумная кривая матрицы монодромии $\mathcal{L}(\lambda)\hat{\mathcal{L}}(\lambda)$ имела единичную матрицу коэффициентов $M_{\mathcal{L}\hat{\mathcal{L}}}(\lambda)$. Распространим эту операцию на другие $\mathcal{L}(\lambda)$, положив

если $\mathcal{L}(\lambda)=\begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ 0 & d_0 \end{pmatrix}$, то $\hat{\mathcal{L}}(\lambda)=\begin{pmatrix} d_0 & 0 \\ 0 & a_0 \end{pmatrix}$, если $\mathcal{L}(\lambda)=\begin{pmatrix} 0 & b_0 \\ c_0 & 0 \end{pmatrix}$, то $\hat{\mathcal{L}}(\lambda)=\begin{pmatrix} 0 & b_0 \\ c_0 & 0 \end{pmatrix}$,

если $\mathcal{L}(\lambda)$ - $\mathcal{L}$-матрица шестивершинной модели (2) или размноженная такая матрица, то $\hat{\mathcal{L}}(\lambda)=\mathcal{L}(\lambda)$,
если $\mathcal{L}(\lambda)$ - матрица монодромии вида (4), то

$$\hat{\mathcal{L}}(\lambda)=\prod_{i=1}^{M}\hat{\mathcal{L}}^{(i)}(\lambda_i+\lambda)$$

(произведение в противоположном порядке!).

3. Поменяем теперь местами квантовое и вспомогательное пространства у введенных в конце п. I матриц монодромии $\mathcal{L}(\lambda)$ и рассмотрим для данной $\mathcal{L}(\lambda)$ неоднородную трансферматрицу

$$T(\lambda)=\mathrm{Tr}\prod_{i=1}^{\overleftarrow{N}}\mathcal{L}(\mu_i+\lambda), \tag{I6}$$

μ_i - фиксированные числа, действующую в пространстве H размерности 2^N - тензорном произведении вспомогательных, с точки зрения соотношения (I), пространств. В работе [6] показано, что если матрице $\mathcal{L}(\lambda)$ соответствует в смысле (I5) единичная матрица $M_{\mathcal{L}}(\lambda)$, то $T(\lambda)$ коммутирует с аналогичной трансфер-матрицей для любой другой матрицы $\mathcal{L}(\lambda)$.

Исходя из этого, изучим действие трансфер-матриц вида (I6) в подпространстве $H_w \subset H$, собственном одновременно для всех трансфер-матриц, построенных по $\mathcal{L}(\lambda)$ с единичной матрицей $M_{\mathcal{L}}(\lambda) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Теорема 3. Пусть матрицы монодромии $\mathcal{L}_1(\lambda)$ и $\mathcal{L}_2(\lambda)$ имеют одну и ту же вакуумную кривую $\Gamma(\lambda)$. Пусть ограничения соответствующих им по формуле (I6) трансфер-матриц на H_w невырождены при $\lambda = 0$:

$$\det T_1(0)\big|_{H_w} \neq 0, \qquad \det T_2(0)\big|_{H_w} \neq 0.$$

Пусть, наконец, существует матрица монодромии $\mathcal{L}_3(\lambda)$ такая, что $\mathcal{L}_1(\lambda)\mathcal{L}_3(\lambda)$ имеет единичную матрицу коэффициентов вакуумной кривой, причем для трансфер-матрицы, построенной по $\mathcal{L}_3(\lambda)$, также

$$\det T_3(0)\big|_{H_w} \neq 0.$$

Тогда выполнено равенство

$$T_1(0)\big|_{H_w} = h\, T_2(0)\big|_{H_w}, \tag{I7}$$

h - числовой множитель.

Доказательство. В соответствии с определением H_w и условиями теоремы имеем

$$T_1(\lambda)T_3(\lambda)\Big|_{H_w} = h_1(\lambda), \quad T_2(\lambda)T_3(\lambda)\Big|_{H_w} = h_2(\lambda),$$

где $h_1(\lambda)$, $h_2(\lambda)$ - ненулевые скалярные функции, $h_1(0)\neq 0$, $h_2(0)\neq 0$. Полагая $h=\dfrac{h_2(0)}{h_1(0)}$, приходим к (I7).

Теорема доказана.

4. Введенные в п.I матрицы $M_{\mathcal{L}}(\lambda)$ коэффициентов вакуумных кривых матриц монодромии $\mathcal{L}(\lambda)$, определенные с точностью до эквивалентности

$$M_{\mathcal{L}}(\lambda)\sim g(\lambda)M_{\mathcal{L}}(\lambda), \quad g(\lambda)\not\equiv 0,$$

образуют группу, которую мы обозначим $\mathcal{Y}$. Закон композиции в этой группе согласован с композицией $\mathcal{L}$ -матриц (в смысле построения матриц монодромии, см. (4)), а обратным элементом для $M_{\mathcal{L}}(\lambda)$ может служить $M_{\tilde{\mathcal{L}}}(\lambda)$ (п. 2).

Определим теперь для введенного в п. 3 подпространства $H_w\subset H$ подгруппу $\mathcal{Y}_w\subset\mathcal{Y}$, которая естественным образом проективно действует в H_w . Именно, $\mathcal{Y}_w$ состоит из матриц $M_{\mathcal{L}}(\lambda)$ для таких $\mathcal{L}(\lambda)$, для которых

$$\det T(0)\Big|_{H_w}\neq 0$$ и, как в теореме 3, существует

$\mathcal{L}_3(\lambda)$ такое, что $M_{\mathcal{L}\mathcal{L}_3}(\lambda)\equiv\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ и $\det T_3(0)\neq 0$.

Действие подгруппы $\mathcal{Y}$ определяется тогда формулой

$$M_{\mathcal{L}}(\lambda) \longmapsto T(0)\big|_{H_\omega}, \tag{I8}$$

корректной в силу теоремы 3.

5. Перенос изложенных в статье конструкций на случай четного $n=2p$ может быть осуществлен с использований идей работы [6]. В частности, при построении "матриц монодромии" (4) вместо $\mathcal{L}$-матриц вида (6 - II) следует использовать введенные в [6] матрицы $\mathcal{L}_+(\lambda)$.

6. По аналогии с частным случаем $n=4$ (модель "свободных фермионов") естественно предположить, что кратности вырождения собственных значений трансфер-матрицы шестивершинной модели при $\eta = \frac{m}{n}\pi$ принимают значения

$$\dim H_\omega = 2^{K_\omega} \quad , \quad K_\omega \text{ - целые числа}$$

Это предположение оказывается верным. Точную формулировку и доказательство автор намерен привести в дальнейших работах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Квантовый метод обратной задачи и XYZ модель Гейзенберга// УМН. - 1979. - Т.34, вып. 5 (209). - С. I3 - 63.

2. Kulish P.P., Sklyanin E.K. Quantum spectral transform method. Recent developments. // Lect. Notes in Phys. — 1982. — V. 151. — P. 61 — 119.

3. Kulish P.P., Reshetikhin N.Yu., Sklyanin E.K. Yang—Baxter equation and representation theory. // Lett. Math. Phys. — 1981. — V. 5. — N°5. — P. 393—403.

4. Izergin A.G., Korepin V.E. Lattice versions of quantum field theory models in two dimensions. // Nucl. Phys. B. — 1982. — V. B205 [FS 5]. — N° 3. — P. 401—413.

5. Кричевер И.М. Уравнения Бакстера и алгебраическая геометрия // Функц. анализ. - I98I. - Т. I5, вып. 2. - С. 22 - 35.

6. Корепанов И.Г. Вакуумные кривые $\mathcal{L}$-операторов, связанных с шестивершинной моделью, и построение $\mathcal{R}$-операторов /

Челяб. политехн. ин-т. - Челябинск, I986. - 40 с.: илл. - Библиогр.: I7 назв. - Деп. в ВИНИТИ 2.04.86, № 227I - В 86.

1472-87

13

Печатается в соответствии с решением Ученого Совета Челябинского политехнического института имени Ленинского комсомола от 29 декабря 1986 года.

1472-87

В печать 11.02.87.

Тир. 1 Цена 1-95 Зак. 32792

Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ

Люберцы, Октябрьский пр., 403