Министерство высшего и среднего специального
образования СССР

Челябинский политехнический институт
имени Ленинского комсомола

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Тематический сборник научных трудов

Под редакцией В.И. Заляпина

Челябинск
1986

УДК 517.5

Прикладные задачи математического анализа: Тематический сборник научных трудов /Под ред. В.И.Заляпина.- Челябинск: ЧПИ, 1986. - III с.

В статьях сборника, подготовленного сотрудниками кафедры математики ЧПИ, рассмотрены вопросы теории функций и функционального анализа, а также примыкающие к ним вопросы алгебры, топологии и их приложения к решению конкретных задач, в том числе к решению нелинейных уравнений, задач стабилизации управляемых систем, некоторых задач теории суммируемости. Часть работ посвящена вероятностным методам исследования специальных функций, вопросам регуляризуемости некорректных задач, исследованию уравнений Янга-Бакстера и др.

Ил. I, список лит. - 89 назв.

Рецензенты: Пинчук С.И., Павленко В.Н.

СОДЕРЖАНИЕ

Ясно, что и подмножество

$$A^{-1}=\{g^{-1}\in\Gamma^{-1}/g^{-1}\Gamma^{-1}\subset\Gamma^{-1}\}$$

является инвариантной полугруппой, лежащей в Γ^{-1}.

Теорема 5. Если Γ не является циклической полугруппой, то для того, чтобы $G=\Gamma\Gamma\cup 1$, необходимо и достаточно, чтобы $A^{-1}=\emptyset$.

Доказательство. Достаточность. Пусть $A^{-1}=\emptyset$. Это значит, что для каждого элемента $g^{-1}\in\Gamma^{-1}$ найдется такой элемент $f^{-1}\in\Gamma^{-1}$, что $g^{-1}f^{-1}\notin\Gamma^{-1}$. Пусть $g^{-1}f^{-1}=b$, тогда $b\in\Gamma$ и $g^{-1}=bf$, т.е. $g^{-1}\in\Gamma\Gamma$, и из произвольности $g^{-1}\in\Gamma^{-1}$ следует, что $\Gamma^{-1}\subset\Gamma\Gamma$. Так как Γ не является циклической полугруппой, то $\Gamma\subset\Gamma\Gamma$ [illegible] и, значит, $G=\Gamma\cup\Gamma^{-1}\cup 1\subset\Gamma\Gamma\cup 1$, т.е. $G=\Gamma\Gamma\cup 1$.

Необходимость. Пусть $G=\Gamma\Gamma\cup 1$. Допустим, что $A^{-1}\neq\emptyset$. Тогда согласно лемме 4 $A^{-1}\cup 1$ является инвариантной полугруппой, лежащей в $\Gamma^{-1}\cup 1$, и по теореме 2 $A^{-1}\cup 1$ принадлежит центру группы G. Если $x^{-1}\in A^{-1}$, то из $G=\Gamma\Gamma\cup 1$ следует: $x^{-1}=fg$, $g\in\Gamma$, $f\in\Gamma$. Из $x^{-1}\in Z(G)$ следует, что $gf=fg$. В силу определения Γ существуют такие натуральные числа k, l, m и n, что $g^k=a^l$, $f^m=a^n$ и, значит, $(x^{-1})^{km}=(gf)^{km}=g^{km}f^{km}=a^{lm+kn}$, т.е. $x^{-1}\in\Gamma$. Так как $\Gamma\cap\Gamma^{-1}=\emptyset$, то пришли к противоречию с допущением, что $A^{-1}\neq\emptyset$.

Замечание. Согласно доказанной теореме равенство $G=\Gamma\Gamma\cup 1$ возможно тогда и только тогда, когда $Z(G)=1$. Поэтому возникает вопрос, существует ли НП-группа без центра. Также остаются открытыми вопросы, существуют ли простые НП-группы и существует ли НП-группа G со свойством $G=\Gamma\Gamma\cup 1$, не являющаяся простой.

ЛИТЕРАТУРА

I. Коуровская тетрадь. Нерешенные задачи теории групп. - Новосибирск, Изд. ин-та математики СО АН СССР, 1965.

2. Адян С.И. О некоторых группах без кручения. - Изв. АН СССР, Сер. математика, 1971, т. 35, № 3, с. 459-468.

3. Кацман А.Д., Ерин Ф.Ш. О некоторых свойствах групп без кручения с нетривиальным пересечением любых двух циклических подгрупп. Деп. в ВИНИТИ, 1984, № 552.

4. Санов И.Н. Решение проблемы Бернсайда для показателей 4. Уч. зап. ЛГУ.-Л., 1940. Т. 55, с. 168-170.

5. Черников С.И. О строении групп с конечными классами сопряженных элементов. - ДАН СССР, 1957, т. 115, № 1.

6. Биркгоф Г. Теория структур.-М.: ИЛ, 1962.

УДК 512.772

И.Г.Корепанов

МЕТОД ВАКУУМНЫХ ВЕКТОРОВ В ТЕОРИИ УРАВНЕНИЯ ЯНГА-БАКСТЕРА

В настоящей статье изучаются свойства решений уравнения Янга-Бакстера, связанные с существованием так называемых вакуумных векторов этих решений. В § 1 приводятся общие определения и теоремы, касающиеся вакуумных векторов и их связи с уравнением Янга-Бакстера. В § 2 и 3 с использованием этих определений и теорем решается задача о существовании некоторых новых решений уравнений Янга-Бакстера. Эти решения тесно связаны с хорошо известной "шестивершинной моделью" и в то же время обладают замечательными новыми свойствами, рассмотренными в § 4.

§ 1. Вакуумные векторы и вакуумные кривые

Пусть S^Q и S^A - два конечномерных комплексных линейных пространства (S^Q называется "квантовым пространством", S^A - "вспомогательным", [1]); L - линейный оператор, действующий в $S^Q\otimes S^A$. Буквами U, V, ... будем обозначать векторы из S^Q, X, Y, ... - векторы из S^A. Пусть выполнено соотношение

$$L(U\otimes X)=V\otimes Y. \tag{1}$$

Определение 1. Вакуумным многообразием Γ_L оператора L называется множество пар (U, V), $U\neq 0$, $V\neq 0$, для которых выполнено соотношение (1) при некоторых X и Y; $X\neq 0$, факторизованное по отношению эквивалентности $(U,V)\sim(t_1U,t_2V)$; t_1, t_2 - ненулевые числа. Всякий (в том числе нулевой) вектор X, соответствующий согласно выражению (1) данной точке $z\in\Gamma_L$, называется вакуумным, а всякий вектор Y - ковакуумным вектором в точке z. Вакуумное многообразие является алгебраическим многообразием, причем следует считать, что точка z присутствует в нем с кратностью, равной размерности пространства вакуумных векторов в ней.

О п р е д е л е н и е 2. Оператор L, действующий в $S^a \otimes S^A$ называется эквивалентным оператору M, действующему в $S^a \otimes S^B$, если существует оператор изоморфизма $R: S^A \to S^B$, такой, что $RL = MR$. Аналогично два семейства операторов $L(\lambda)$ и $M(\lambda)$ (λ – любой параметр) – называются эквивалентными, если существует изоморфизм R, такой, что $RL(\lambda) = M(\lambda)R$ при каждом λ. В этих случаях будем говорить, что R осуществляет соответствующую эквивалентность.

З а м е ч а н и е. Здесь мы отождествляем оператор R с оператором $1 \otimes R$, действующим из $S^a \otimes S^A$ в $S^a \otimes S^B$. Аналогично при необходимости поступаем с другими операторами.

Следующая лемма, несмотря на ее очевидность, играет в дальнейшем фундаментальную роль.

Л е м м а I. Вакуумные многообразия эквивалентных операторов совпадают.

В дальнейшем мы рассматриваем только случай $\dim S^a = 2$. В формуле (I) можно тогда считать $U = \binom{u}{1}$, $V = \binom{v}{1}$; u, v – комплексные числа или ∞. Введем обозначение: $\dim S^A = N$

Т е о р е м а I [2]. Вакуумная кривая Γ_L оператора L общего положения является гладкой неприводимой алгебраической кривой, заданной уравнением вида

$$P_L(u,v) = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\, u^i v^j = 0. \qquad (2)$$

Вакуумные (ковакуумные) векторы образуют одномерное голоморфное расслоение степени $N^2 - N$ на Γ_L.

Важны также вырожденные случаи, например $P_L(u,v) = [p(u,v)]^\ell$. В этом случае вакуумные (ковакуумные) векторы образуют ℓ-мерное голоморфное расслоение на кривой, задаваемой полиномом $p(u,v)$ [2

Введем теперь в рассмотрение два вспомогательных пространства S_1^A и S_2^A, пусть $S^A = S_1^A \otimes S_2^A$. Рассмотрим операторы L_1 и L_2, действующие соответственно в $S^a \otimes S_1^A$ и $S^a \otimes S_2^A$ и оператор $L_1 L_2$, действующий в $S^a \otimes S^A$.

О п р е д е л е н и е 3. Композицией вакуумных кривых Γ_1 и Γ_2, заданных уравнениями $P_1(u,v) = 0$ и $P_2(u,v) = 0$ вида (2), называется кривая Γ, заданная уравнением $P(u,v) = 0$, где $P(u,v)$

результант [3] $P_1(\omega,v)$ и $P_2(u,\omega)$, рассматриваемых как многочлены от переменного ω.

Таким образом, Γ есть множество точек (u,v), для которых существует ω такое, что $(u,\omega) \in \Gamma_2$, $(\omega,v) \in \Gamma_1$, взятых с нужными кратностями.

Т е о р е м а 2 [2]. Вакуумная кривая Γ оператора $L_1 L_2$ является композицией вакуумных кривых Γ_1 и Γ_2 операторов L_1 и L_2.

Нас будет интересовать вопрос об эквивалентности операторов вида $L_1 L_2$ и $L_2 L_1$, т.е. о решениях уравнения Янга-Бакстера $R L_1 L_2 = L_2 L_1 R$. Этим в свете леммы I и теоремы 2 мотивировано следующее

О п р е д е л е н и е 4. Вакуумные кривые Γ_1 и Γ_2 называются коммутирующими между собой, если композиция Γ_1 и Γ_2 совпадает с композицией Γ_2 и Γ_1.

§ 2. Формулировка основной теоремы

Напомним, что $\dim S^a = 2$, и пусть $\dim S_1^a = \dim S_2^a = 3$. Рассмотрим два однопараметрических семейства операторов:

$$L_i(\lambda) = \begin{pmatrix} A_i(\lambda) & B_i(\lambda) \\ C_i(\lambda) & D_i(\lambda) \end{pmatrix} \qquad (3)$$

($i = 1,2$), где $A_i(\lambda), \dots, D_i(\lambda)$ действуют в пространствах S_i^A, реализуют два представления перестановочных соотношений шестивершинной модели [1, 4-7] с параметром $\eta = \frac{\pi}{3}$ и в соответствующих базисах выражаются формулами:

$$A_i(\lambda) = a_i \begin{pmatrix} \sin(\lambda+\rho_i) & & \\ & \sin(\lambda+\rho_i-\frac{2\pi}{3}) & \\ & & \sin(\lambda+\rho_i-\frac{4\pi}{3}) \end{pmatrix}, \qquad (4)$$

$$D_i(\lambda) = d_i \begin{pmatrix} \sin(\lambda+\sigma_i-\frac{4\pi}{3}) & & \\ & \sin(\lambda+\sigma_i-\frac{2\pi}{3}) & \\ & & \sin(\lambda+\sigma_i) \end{pmatrix}, \qquad (5)$$

$$B_i(\lambda)=C_i^T(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & & b^{(i)}_{13}\\ b^{(i)}_{21} & 0 & \\ & b^{(i)}_{32} & 0\end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$\left(b^{(i)}_{k+1,k}\right)^2-\left(b^{(i)}_{k,k-1}\right)^2=a_i d_i \sin\frac{2\pi}{3}\sin\left(\rho_i-\sigma_i-\frac{2+4k}{3}\pi\right). \tag{7}$$

Здесь ρ , σ – постоянные числа; k = I,...,3; сложение индексо
понимается по модулю 3.

Метод вычисления вакуумных кривых изложен в работе [2]. В р
зультате непосредственных вычислений получаем для вакуумной кри
оператора $L_i(\lambda)$ уравнение

$$1+\alpha_i(\lambda)u^3-\delta_i(\lambda)v^3-u^3v^3=0, \tag{8}$$

где $\alpha_i(\lambda)=-\dfrac{a_i^3\sin 3(\lambda+\rho_i)}{4b^{(i)}_{21}b^{(i)}_{32}b^{(i)}_{13}}$; $\quad\delta_i(\lambda)=-\dfrac{d_i^3\sin 3(\lambda+\sigma_i)}{4b^{(i)}_{21}b^{(i)}_{32}b^{(i)}_{13}}$. (9)

Л е м м а 2. Две вакуумные кривые, заданные уравнениями

$$1+\alpha u^3-\delta v^3-u^3v^3=0 \tag{10}$$

и

$$1+\alpha' u^3-\delta' v^3-u^3v^3=0,$$

коммутируют тогда и только тогда, когда $\alpha-\delta=\alpha'-\delta'$.

Доказательство проводится непосредственным вычислением.

Т е о р е м а 3. Чтобы два семейства операторов $L(\lambda)=L_1(\lambda)L_2(\lambda)$ и $M(\lambda)=L_2(\lambda)L_1(\lambda)$, где $L_1(\lambda)$ и $L_2(\lambda)$ заданы формулами (3 – 7), были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы вакуумные кривые операторов $L_1(\lambda)$ и $L_2(\lambda)$ коммутировали при каждом λ.

§ 3. Доказательство теоремы 3

Необходимость условия теоремы 3 очевидна из леммы I. Доказательству достаточности посвящен остаток параграфа.

Нам понадобятся следующие обозначения. Произведение операторов типа $\mathcal{L}=L_1\ldots L_k$ всегда будем понимать в том смысле, что эти операторы имеют общее квантовое пространство S^Q и различные вспомогательные пространства $S_1^A,\ldots,S_k^A$, так что $\mathcal{L}$

действует в $S^Q\otimes S_1^A\otimes\ldots\otimes S_k^A$. Аналогично (3), будем записывать $\mathcal{L}$ в виде $\mathcal{L}=\begin{pmatrix}\mathcal{A} & \mathcal{B}\\ \mathcal{C} & \mathcal{D}\end{pmatrix}$. Далее, если $L_i(\lambda)$ – оператор вида (3 – 7), то через $L_i^+(\lambda)$ обозначим оператор такого же вида, задаваемый формулой

$$L_i^+(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0 & & 1\\ & 1 & \\ 1 & & 0\end{pmatrix}\cdot L_i(\lambda)\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0 & & 1\\ & 1 & \\ 1 & & 0\end{pmatrix}.$$

Если $L_i(\lambda)$ и $L_i^+(\lambda)$ входят в одно произведение операторов, будем считать, что они действуют в разных экземплярах вспомогательного пространства.

Л е м м а 3. Если вакуумная кривая оператора $L_i(\lambda)$ имеет вид (8), то вакуумная кривая оператора $L_i^+(\lambda)$ описывается уравнением

$$1-\delta_i(\lambda)u^3+\alpha_i(\lambda)v^3-u^3v^3=0.$$

Композиция вакуумных кривых операторов $L_i(\lambda)$ и $L_i^+(\lambda)$ имеет вид

$$(v^3-u^3)^3=0. \tag{11}$$

Доказательство проводится непосредственными вычислениями.

Введем операцию $\wedge$ "транспонирования по квантовым индексам": если $L=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$, то $\hat{L}=\begin{pmatrix}A & C\\ B & D\end{pmatrix}$.

Л е м м а 4. Если оператор $L_i(\lambda)$ задан формулами (3 – 7), то

$$\det L_i(\lambda)=\left[a_i d_i \sin^2\lambda-\left(b^{(i)}_{13}\right)^2\right]^3,$$

$$\det\hat{L}_i(\lambda)=\det L_i\left(\lambda+\frac{2\pi}{3}\right).$$

Доказательство леммы проводится непосредстванным вычислением.

Таким образом, все нули функций $\det L_i(\lambda)$ и $\det\hat{L}_i(\lambda)$ имеют порядок 3.

Т е о р е м а 4. Пусть операторы $L_1(\lambda)$ и $L_2(\lambda)$ заданы формулами (3 – 7). Тогда для оператора

$$\mathcal{L}(\lambda)=\begin{pmatrix}\mathcal{A}(\lambda) & \mathcal{B}(\lambda)\\ \mathcal{C}(\lambda) & \mathcal{D}(\lambda)\end{pmatrix}=L_1(\lambda)L_2(\lambda)L_2^+(\lambda)L_1^+(\lambda)$$

в общем положении по параметрам операторов $L_1(\lambda)$ и $L_2(\lambda)$ существуют единственный вектор Ω из вспомогательного пространства, такой, что $\mathcal{B}(\lambda)\Omega = 0$ при всех λ. Вектор Ω является собственным для операторов $\mathcal{A}(\lambda)$ и $\mathcal{D}(\lambda)$ с собственными значениями $a(\lambda)$ и $d(\lambda)$, причем функция $d(\lambda)$ (функция $a(\lambda)$) имеет нули первого порядка в тех и только тех точках, в которых $\det L_1 \ \det L_2 = 0$ (соответственно $\det \hat{L}_1 \cdot \det \hat{L}_2 = 0$). Вакуумная кривая оператора $\mathcal{L}(\lambda)$ имеет вид $(\sigma^3 - u^3)^{27} = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 3 вакуумная кривая оператора $L_2(\lambda) L_2^{\dagger}(\lambda)$ имеет вид (II). Нетрудно убедиться в том, что кривая вида (II) коммутирует с любой кривой вида (8). Поэтому вакуумная кривая $\mathcal{L}(\lambda)$ совпадает с вакуумной кривой оператора $L_1(\lambda) L_1^{\dagger}(\lambda) L_2(\lambda) L_2^{\dagger}(\lambda)$, т.е. с композицией двух кривых вида (II). Эта композиция и дает кривую $(\sigma^3 - u^3)^{27} = 0$.

Из того, что точка $(u, \sigma) = (0, 0)$ при любом λ принадлежит вакуумной кривой $\mathcal{L}(\lambda)$, непосредственно следует существование для каждого λ такого вектора $\Omega(\lambda)$, что $\mathcal{B}(\lambda)\Omega(\lambda) = 0$. Известно, однако, что все операторы $\mathcal{B}(\lambda)$ коммутируют между собой [I]. Поэтому пространство S^A, в котором действуют операторы $\mathcal{B}(\lambda)$, разлагается в прямую сумму подпространств S_f^A, соответствующих различным "весам" $f(\lambda)$ в том смысле, что операторы $\mathcal{B}(\lambda) - f(\lambda)\cdot \mathbb{1}$ нильпотентны на S_f^A. Из предыдущего видно, что среди "весов" обязательно находится функция $f(\lambda) \equiv 0$. В соответствующем подпространстве S_0^A все $\mathcal{B}(\lambda)$ нильпотентны и поэтому существует вектор $\Omega \in S_0^A$, такой, что $\mathcal{B}(\lambda)\Omega = 0$.

Докажем, что в общем положении пространство таких векторов Ω не более чем одномерно. Если $b_{13}^{(1)} = b_{13}^{(2)} = 0$ (формула (6)), а другие параметры находятся в общем положении, то обязательно

$$\Omega = \mathrm{const}\cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Пространство векторов Ω не может в частном случае иметь размерность меньше, чем в общем.

То, что Ω является собственным вектором для $\mathcal{A}(\lambda)$ и $\mathcal{D}(\lambda)$, следует теперь из перестановочных соотношений шестивершинной модели

Очевидно, условие $\mathcal{D}(\lambda)\Omega = 0$ вместе с $\mathcal{B}(\lambda)\Omega = 0$ означает вырожденность оператора $\mathcal{L}(\lambda)$; это может достигаться лишь в тех точках, где $\det L_1 \cdot \det L_2 = 0$. Снова рассматривая случай $b_{13}^{(1)} = b_{13}^{(2)} = 0$, видим, что во всех таких точках функция $d(\lambda)$ имеет нули первого порядка. На общий случай это утверждение переносится по непрерывности с учетом того, что общее число нулей функции $d(\lambda)$ не должно изменяться [4 - 7].

Аналогичное рассуждение, примененное к оператору $\hat{\mathcal{L}}(\lambda) = \hat{L}_1^{\dagger}(\lambda)\hat{L}_2^{\dagger}(\lambda)\hat{L}_2(\lambda)\hat{L}_1(\lambda)$, дает утверждение теоремы относительно функции $a(\lambda)$. Теорема доказана.

Т е о р е м а 5. Пусть в дополнение к условиям теоремы 4 вакуумные кривые операторов $L_1(\lambda)$ и $L_2(\lambda)$ коммутируют при всех λ. Тогда оператор $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda) = \begin{pmatrix}\tilde{\mathcal{A}}(\lambda) & \tilde{\mathcal{B}}(\lambda)\\ \tilde{C}(\lambda) & \tilde{\mathcal{D}}(\lambda)\end{pmatrix} = L_2(\lambda) L_1(\lambda) L_2^{\dagger}(\lambda) L_1^{\dagger}(\lambda)$

в общем положении также обладает единственным вектором $\tilde{\Omega}$, таким, что $\tilde{\mathcal{B}}(\lambda)\tilde{\Omega} = 0$, $\tilde{\mathcal{A}}(\lambda)\tilde{\Omega} = \tilde{a}(\lambda)\tilde{\Omega}$, $\tilde{\mathcal{D}}(\lambda)\tilde{\Omega} = \tilde{d}(\lambda)\Omega$,

причем нули $\tilde{a}(\lambda)$ и $\tilde{d}(\lambda)$ совпадают с нулями соответственно $a(\lambda)$ и $d(\lambda)$. Вакуумные кривые $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ и $\mathcal{L}(\lambda)$ совпадают.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вакуумные кривые операторов $L_1(\lambda)$ и $L_2(\lambda)$ коммутируют, следовательно, вакуумная кривая $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ совпадает с вакуумной кривой $\mathcal{L}(\lambda)$. Дальнейшие рассуждения совершенно аналогичны доказательству теоремы 4. Теорема доказана.

Из формул (3 - 7) очевидно, что $a(\lambda)$, $d(\lambda)$, $\tilde{a}(\lambda)$ и $\tilde{d}(\lambda)$ должны быть тригонометрическими полиномами. Из совпадения нулей, утверждаемого теоремой 5, следует, что $\tilde{a}(\lambda) = a_0 a(\lambda)$, $\tilde{d}(\lambda) = d_0 d(\lambda)$, a_0, d_0 - постоянные. Из этого и из теории коммутационных соотношений шестивершинной модели следует, что однопараметрическое семейство операторов $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ эквивалентно семейству

$$\mathcal{M}(\lambda) = \begin{pmatrix} a_0 \mathcal{A}(\lambda) & \sqrt{a_0 d_0}\, \mathcal{B}(\lambda) \\ \sqrt{a_0 d_0}\, C(\lambda) & d_0 \mathcal{D}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

В то же время уравнение вакуумной кривой оператора $\mathcal{L} = \begin{pmatrix}\mathcal{A} & \mathcal{B}\\ C & \mathcal{D}\end{pmatrix}$ имеет вид [2]

$$\det\left[(1, -\sigma)\begin{pmatrix}\mathcal{A} & \mathcal{B}\\ C & \mathcal{D}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\1\end{pmatrix}\right] = 0 \qquad (12)$$

(здесь в квадратных скобках стоит оператор, действующий во вспомогательном пространстве). Поэтому если вакуумная кривая оператора $\mathcal{L}(\lambda)$ задана уравнением $\mathcal{P}(u,v)=0$, то вакуумная кривая оператора $\mathcal{M}(\lambda)$, как нетрудно убедиться, должна иметь вид $\mathcal{P}\left(\sqrt{\frac{a_0}{d_0}}\,u,\sqrt{\frac{d_0}{a_0}}\,v\right)=0$

По теоремам 4 и 5 обе эти кривые описываются уравнением $(v^3-u^3)^{27}=0$. Отсюда $a_0=d_0$, значит, семейство операторов $\mathcal{L}(\lambda)$ эквивалентно семейству $a_0\mathcal{L}(\lambda)$. Рассматривая случай $L_2(\lambda)=L_1(\lambda)$, видим, что $a_0\equiv 1$ (поскольку a_0 как функция параметров семейств $L_1(\lambda)$ и $L_2(\lambda)$ не может иметь скачков). Таким образом, доказана следующая

Т е о р е м а 6. Если вакуумные кривые операторов $L_1(\lambda)$ и $L_2(\lambda)$, заданных формулами (3 - 7), коммутируют при всех λ, то семейство операторов $L_1(\lambda)L_2(\lambda)L_2^{+}(\lambda)L_1^{+}(\lambda)$ эквивалентно семейству $L_2(\lambda)L_1(\lambda)L_2^{+}(\lambda)L_1^{+}(\lambda)$.

З а м е ч а н и е. Аналогично теореме 6 доказывается также, что семейство операторов $L_2^{+}(\lambda)L_1^{+}(\lambda)L_1(\lambda)L_2(\lambda)$ эквивалентно семейству $L_2^{+}(\lambda)L_1^{+}(\lambda)L_2(\lambda)L_1(\lambda)$.

Рассмотрим теперь следующие два семейства операторов:

$$\mathcal{L}(\lambda)\mathcal{L}(\lambda)=L_1(\lambda)L_2(\lambda)L_2^{+}(\lambda)L_1^{+}(\lambda)L_1(\lambda)L_2(\lambda)L_2^{+}(\lambda)L_1^{+}(\lambda), \qquad (13)$$

$$\mathcal{L}(\lambda)\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)=L_1(\lambda)L_2(\lambda)L_2^{+}(\lambda)L_1^{+}(\lambda)L_2(\lambda)L_1(\lambda)L_2^{+}(\lambda)L_1^{+}(\lambda) \qquad (14)$$

(напомним, что разные экземпляры операторов действуют в разных вспомогательных пространствах). Семейства (13) и (14) имеют "порождающие векторы" $\Omega\otimes\Omega$ и $\Omega\otimes\Omega$ соответственно, и поэтому из теории коммутационных соотношений шестивершинной модели следует, что если эти семейства эквивалентны, то оператор R, осуществляющий эту эквивалентность, определен однозначно с точностью до числового множителя (в общем положении). В то же время из теоремы 6 и замечания к ней получаем два оператора R, действующих в разных вспомогательных пространствах (и домножаемых на $\mathbb{1}$ в остальных, см. замечание после определения 2). Поэтому в действительности R нетривиально действует только в тензорном произведении вспомогательных пространств операторов $L_1(\lambda)$ и $L_2(\lambda)$, расположенных в формулах (13) и (14) справа; таким образом, теорема 3 доказана.

§ 4. Обсуждение результатов

Формулы (8) и (9) свидетельствуют о том, что оператор R, осуществляющий эквивалентность

$$R L_1(\lambda)L_2(\lambda)=L_2(\lambda)L_1(\lambda)R \qquad (15)$$

семейств операторов, заданных формулами (3 - 7), существует если и только если при всех λ справедливо равенство

$$\frac{a_1^3\sin 3(\lambda+\rho_1)-d_1^3\sin 3(\lambda-\sigma_1)}{b_{21}^{(1)}b_{32}^{(1)}b_{13}^{(1)}}=\frac{a_2^3\sin 3(\lambda-\rho_2)-d_2^3\sin 3(\lambda+\sigma_2)}{b_{21}^{(2)}b_{32}^{(2)}b_{13}^{(2)}}. \qquad (16)$$

Вместе с тем если верна эквивалентность (15), то вакуумные кривые семейств операторов $L_1(\mu+\lambda)$ и $L_2(\lambda)$, $\mu=\mathrm{const}$ уже не будут коммутировать (за исключением некоторых специальных случаев). Поэтому в силу леммы 1 для этих семейств эквивалентность, аналогичная (15), не имеет места. Это значит, что во множестве всех операторов R, осуществляющих эквивалентности рассматриваемого в этой статье типа, невозможно ввести параметр μ, аналогичный параметру λ для $L_i(\lambda)$. Вопросы параметризации и дальнейшие свойства операторов R автор надеется изучить в дальнейшем. Здесь отметим еще два факта.

Т е о р е м а 7. Пусть имеется три семейства операторов $L_i(\lambda)$, i = 1,2,3, заданных формулами (3 - 7) и имеющих при каждом λ попарно коммутирующие вакуумные кривые. Пусть операторы R_{ij}, i,j = 1,2,3, $i<j$, осуществляют эквивалентности $R_{ij}L_i(\lambda)L_j(\lambda)=L_j(\lambda)L_i(\lambda)R_{ij}$. Тогда выполнено равенство ("уравнение треугольников")

$$R_{12}R_{13}R_{23}=R_{23}R_{13}R_{12}. \qquad (17)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Левая и правая части уравнения (17) осуществляют эквивалентность семейств операторов $L_1(\lambda)L_2(\lambda)L_3(\lambda)$ и $L_3(\lambda)L_2(\lambda)L_1(\lambda)$. Введем в рассмотрение еще три оператора и вспомогательных пространства, тогда можно сказать, что обе части уравнения (17) осуществляют эквивалентность семейств $L_1^{+}(\lambda)L_2^{+}(\lambda)L_3^{+}(\lambda)L_1(\lambda)L_2(\lambda)L_3(\lambda)$ и $L_1^{+}(\lambda)L_2^{+}(\lambda)L_3^{+}(\lambda)L_3(\lambda)L_2(\lambda)L_1(\lambda)$. Аналогично доказательствам теорем 4 и 5 устанавливается, что два последних семейства имеют "порождающие векторы" и поэтому согласно теории перестановочных соотношений шестивершинной модели оператор, осуществляющий их эквивалентность, в общем положении определяется этим свойством однозначно (с точностью до постоянного множителя). Теорема доказана.

Представляет интерес также тот факт, что вакуумные кривые вида (10) обнаруживают очевидную аналогию с вакуумными кривыми L - операторов хорошо известной модели Фельдергофа, изучавшимися впервые в работе [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Тахтаджян Л.А., Фадеев Л.Д. Квантовый метод обратной задачи и XYZ модель Гейзенберга. - УМН, 1979, т. 34, вып. 5(209), с. 13-63.
2. Кричевер И.М. Уравнения Янга-Бакстера и алгебраическая геометрия. - Функциональный анализ, 1981, т. 15, вып. 2, с. 22-35.
3. Варден Б.Л. Ван Дер. Алгебра.- М.: Наука, 1979.
4. Корепин В.Е. Анализ билинейного соотношения шестивершинной модели. - ДАН СССР, 1982, т. 265, № 6, с. 1361-1364.
5. Тарасов В.О. О строении квантовых L -операторов для R - матрицы XYZ - модели. - ТМФ, 1984, т. 61, № 2, с. 163-173.
6. Тарасов В.О. Локальные гамильтонианы для интегрируемых квантовых моделей на решетке. II. - ТМФ, 1984, т. 61, № 3, с. 387-392.
7. Izergin A.G., Korepin V.E. Lattice versions of quantum field theory models in two dimensions.- Nucl. Phys., 1982, v B 205 [FS5], №3, p. 401-413.

УДК 517.98

А.С.Макаров

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ БАНАХОВЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Пусть (T, Σ, μ) - пространство с σ -конечной полной неатомической мерой, $S(T, \Sigma, \mu)$ - пространство измеримых почти всюду конечных функций, заданных на T. Равенство функций из $S(T, \Sigma, \mu)$ понимается обычно как равенство почти всюду.

Определим на $S(T, \Sigma, \mu)$ функционал $\|x\| = \||x|\|$, $0 \le \|x\| \le \infty$, удовлетворяющий следующим условиям:

I. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $\|x_1 + x_2\| \le \|x_1\| + \|x_2\|$; $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;

II. Если $0 \le x_n \in S(T, \Sigma, \mu)$ и $x_n \nearrow x$, то $\|x_n\| \nearrow \|x\|$;

III. Существует последовательность множеств $T_n \in \Sigma$, $\mu T_n < \infty$, $T_n \nearrow T$, таких, что $\|\chi_{T_n}\| < \infty$ (χ_E - характеристическая функция множества E).

Пространство

$$L = \{x \in S(T, \Sigma, \mu) : \|x\| < \infty\}$$

является банаховым пространством с нормой $\|\cdot\|_L$. Это пространство уже изучалось [1, 2]. В классе идеальных пространств оно рассматривается в работе [3]. Двойственное к L пространство

$$L^* = \{y \in S(T, \Sigma, \mu) : (x, y) = \int_T xy\,d\mu < \infty, \forall x \in L\}$$

тоже является банаховым с двойственной нормой

$$\|y\|_{L^*} = \sup_{\|y\|_L \le 1} |(x, y)|,$$

причем $L = L^{**}$ и $\|x\|_L = \|x\|_{L^{**}}$.

Предположим, что функционал $\|\cdot\|$, определяемый свойствами I-III, удовлетворяет еще свойству

IV. $\|x\| = \sup_{\mu E < 1} \|P_E x\|$ $\quad (P_E x(t) = x(t) \chi_E(t))$.

Банахово пространство функций с нормой, удовлетворяющей свойствам I-IV, обозначим через $\hat{L}$,

$$\hat{L} = \{x \in S(T, \Sigma, \mu) : \|x\|_{\hat{L}} < \infty\}.$$

К классу пространств $\hat{L}$ относится, в частности, известное пространство Гульда $\hat{L}_1$ ([4], [5]) с нормой

$$\|x\|_{\hat{L}} = \sup \|P_E x\|_{L_1}.$$

Поэтому пространство $\hat{L}$ назовем пространством типа Гульда. Один подкласс класса пространств типа Гульда рассматривался в работе [6], откуда нам понадобится один результат, сформулированный для пространства $\hat{L}_1$.

Л е м м а. Справедливы равенства:

а) $\hat{L}_1 = \{x \in S(T, \Sigma, \mu) : P_E x \in L_1 \ \forall E \in \Sigma, \mu E < \infty\}$;

б) $\hat{L}_1 = L_1 + L_\infty$.

УДК 512.545

Кацман А.Д., Брин Ф.Ш. Некоторые свойства группы без кручения, любые две циклические подгруппы которой имеют нетривиальное пересечение. – В кн.: Прикладные задачи математического анализа: Тематический сборник научных трудов /Под ред. В.И.Заляпина. Челябинск: ЧПИ, 1986, с. 33–39.

В статье устанавливаются некоторые свойства указанной группы, которая называется НП-группой. В частности, всякий абелев нормальный делитель НП-группы содержится в ее центре, получено структурное разложение НП-группы в виде

$$G = \Gamma \cup \Gamma^{-1} \cup 1$$

где Г – линейное чисто инвариантное множество. Установлено, что всякая инвариантная полугруппа, лежащая в Г, абелева. Получено необходимое и достаточное условие представимости НП-группы в указанном виде.

Список лит. – 6 назв.

УДК 512.772

Корепанов И.Г. Метод вакуумных векторов в теории уравнения Янга-Бакстера. – В кн.: Прикладные задачи математического анализа: Тематический сборник научных трудов /Под ред. В.И.Заляпина. Челябинск: ЧПИ, 1986, с. 39–48.

Вакуумные векторы L-оператора образуют голоморфное расслоение над вакуумной кривой этого оператора. Данные понятия, а также теория перестановочных соотношений шестивершинной модели используются в работе для построения решений уравнения Янга-Бакстера, не обладающих спектральным параметром традиционного вида.

Список лит. – 7 назв.

УДК 517.98

Макаров А.С. Об одном классе банаховых функциональных пространств. – В кн.: Прикладные задачи математического анализа: Тематический сборник научных трудов /Под ред. В.И.Заляпина. Челябинск: ЧПИ, 1986, с. 48–55.

Рассматривается банахово в смысле Люксембурга пространство функций, определенных на пространстве с σ-конечной полной мерой (T, Σ, μ), норма на котором удовлетворяет соотношению

$$\|x\| = \sup \|P_E x\|, \qquad \mu(E) = 1,$$

где оператор P_E является оператором умножения на характеристическую функцию множества E.

Список лит. – 6 назв.

УДК 517.546

Марков Г.В. О кривых, описываемых изображающими векторами трехфазных систем. – В кн.: Прикладные задачи математического анализа: Тематический сборник научных трудов /Под ред. В.И.Заляпина. Челябинск: ЧПИ, 1986, с. 55–61.

Исследуются условия, при которых непрерывно-дифференцируемая кривая является простой и звездообразной относительно начала координат. С помощью полученных результатов решается вопрос о том, при каких условиях трехфазная электрическая периодическая система является почти синусоидальной.

Список лит. – 6 назв.

УДК 517.925

Медведева Н.Б. Первая фокусная величина сложной монодромной особой точки. – В кн.: Прикладные задачи математического анализа: Тематический сборник научных трудов /Под ред. В.И.Заляпина. Челябинск: ЧПИ, 1986, с. 61–65.

В статье в явном виде формулируется достаточное условие наличия фокуса для ростков векторных полей, принадлежащих некоторому подмножеству коразмерности 13 в пространстве J° ростков бесконечно гладких векторных полей с особой точкой $(0,0) \in \mathbb{R}^2$.

Список лит. – 5 назв.

УДК 515.128

Медведев С.В. Об одном классе метрических h-однородных пространств. – В кн.: Прикладные задачи математического анализа: Тематический сборник научных трудов /Под ред. В.И.Заляпина. Челябинск: ЧПИ: 1986, с. 65–83.

Тем. план 1986 г., п. I

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Тематический сборник научных трудов

Под редакцией В.И. Заляпина

Редактор Е.М. Голубчина
Техн. редактор А.В. Миних

Редакционно-издательский отдел
Челябинского политехнического института
имени Ленинского комсомола

Подписано к печати 22.I2.86. ФБ 03465. Формат 60Х90 I/I6.
Печ. л. 7. Уч.-изд. л. 7. Тираж 300 экз. Заказ 67/I42.
Цена I р. 20 к.

УОП ЧПИ. 454044, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76.