Государственный комитет СССР по народному образованию
Челябинский политехнический институт
имени Ленинского комсомола

№ 1751 - В89

УДК 517.43

И.Г.Корепанов

НОВЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕТРАЭДРОВ

Челябинск 1989

I. ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть V_1, V_2, V_3, V_4 - двумерные комплексные линейные пространства с фиксированными базисами, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ - комплексные числа. Рассмотрим операторы

$$R^0_{ij}(\lambda_i, \lambda_j) = \begin{pmatrix} a & & & d \\ & b & c & \\ & c & b & \\ d & & & a \end{pmatrix},$$

$$R^1_{ij}(\lambda_i, \lambda_j) = \begin{pmatrix} -a' & & & d' \\ & -b' & c' & \\ & -c' & b' & \\ -d' & & & a' \end{pmatrix},$$

действующие в $V_i \otimes V_j$, $1 \le i < j \le 4$. Здесь

$$a = cn(\lambda_i - \lambda_j),\ b = sn(\lambda_i - \lambda_j)\, dn(\lambda_i - \lambda_j),$$
$$c = dn(\lambda_i - \lambda_j),\ d = k\, sn(\lambda_i - \lambda_j)\, cn(\lambda_i - \lambda_j),$$
$$a' = cn(\lambda_i + \lambda_j),\ b' = sn(\lambda_i + \lambda_j)\, dn(\lambda_i + \lambda_j),$$
$$c' = dn(\lambda_i + \lambda_j),\ d' = k\, sn(\lambda_i + \lambda_j)\, cn(\lambda_i + \lambda_j);$$

1757-89

© ВИНИТИ, 1989 г.

все эллиптические функции - модуля k.

Как показывается в разделе 2, существуют матрицы S_{123}, S_{124}, S_{134}, S_{234} размера 8x8, компоненты которых будут обозначаться, например, так: $\left(S_{123}\right)^{abc}_{def}$, $a, \ldots, f=0$ или 1, такие, что выполнены соотношения тетраэдральной алгебры Замолодчикова [I]:

$$R^{a}_{12} R^{b}_{13} R^{c}_{23} = \sum_{d,e,f=0}^{1} \left(S_{123}\right)^{abc}_{def} R^{f}_{23} R^{e}_{13} R^{d}_{12} \qquad \text{(I)}$$

1757-89

и аналогично для остальных S-матриц. В формуле (I) опущены аргументы λ_i; понятно также, что S_{123} зависит от $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и т. д.

В отличие от специального случая $k=0$ работы [I], в общем случае S-матрицы определены однозначно (устремив k к нулю, получаем единственные матрицы и для $k=0$).
Введем двумерные пространства $E_{12}, E_{13}, E_{14}, E_{23}, E_{24}$, E_{34} и рассмотрим S_{123} как оператор в $E_{12} \otimes E_{13} \otimes E_{23}$, S_{124} как оператор в $E_{12} \otimes E_{14} \otimes E_{24}$ и т.д. Выполняется ли уравнение тетраэдров

$$S_{123} S_{124} S_{134} S_{234} = S_{234} S_{134} S_{124} S_{123} \quad ?$$

Автор провел непосредственные вычисления при $k=0$, и они дали положительный ответ. Приведем явный вид матрицы S_{123}, которую выразим через величины $\tau_i = tg\,\lambda_i$ (очевидными заменами индексов получаются остальные S-матрицы).

Введем функцию

$$f(\rho,\sigma)=\frac{1+\rho\sigma}{\rho+\sigma}$$

Итак, все элементы матрицы S_{123} равны нулю, кроме следующих:

$$S^{000}_{000}=S^{011}_{011}=S^{101}_{101}=S^{110}_{110}=1,$$

$$S^{001}_{010}=f(\tau_1,\tau_3)\,f(\tau_2^{-1},\tau_3),$$

$$S^{001}_{100}=f(\tau_1,-\tau_2^{-1})\,f(\tau_2^{-1},\tau_3),$$

$$S^{001}_{111}=f(\tau_1,-\tau_2^{-1})\,f(\tau_1,\tau_3),$$

$$S^{010}_{001}=f(\tau_2^{-1},-\tau_3)\,f(\tau_1,-\tau_3),$$

$$S^{010}_{100}=f(\tau_1,-\tau_2^{-1})\,f(\tau_1,-\tau_3),$$

$$S^{010}_{111}=f(\tau_1,-\tau_2^{-1})\,f(\tau_2^{-1},-\tau_3),$$

$$S^{100}_{001} = -f(\tau_2^{-1}, -\tau_3)\, f(\tau_1, \tau_2^{-1}),$$

$$S^{100}_{010} = f(\tau_1, \tau_3)\, f(\tau_1, \tau_2^{-1}),$$

$$S^{100}_{111} = -f(\tau_1, \tau_3)\, f(\tau_2^{-1}, -\tau_3),$$

$$S^{111}_{001} = f(\tau_1, \tau_2^{-1})\, f(\tau_1, -\tau_3),$$

$$S^{111}_{010} = -f(\tau_1, \tau_2^{-1})\, f(\tau_2^{-1}, \tau_3),$$

$$S^{111}_{100} = -f(\tau_1, -\tau_3)\, f(\tau_2^{-1}, \tau_3).$$

1757-89

Напомним, что в работе [I] построена модель на двух двумерных слоях, "больцмановские веса" которой могут быть сделаны положительными, связанная с построенными здесь S -матрицами.

2. ВОЗМОЖНЫЕ ОБОБЩЕНИЯ

Рассмотрим уравнение Янга - Бакстера

$$R_{12} L_{01} M_{02} = M_{02} L_{01} R_{12} ,$$

где нижние индексы указывают номера двумерных пространств, в тензорном произведении которых действует данный оператор. Пусть L_{01} и M_{02} - L-матрицы типа Фельдергофа [2]. В частности они симметричны относительно транспонирования ^{T}. Тогда, как известно (см. например, [3]), кроме симметричной матрицы $R_{12} = R^0_{12}$, существует еще R^1_{12} , несимметричная, для которой

$$\left(R^1_{12}\right)^T L_{01} M_{02} = M_{02} L_{01} R^1_{12} .$$

Развивая идеи работы [3], можно показать, что пространство операторов $\mathcal{R}_{123}$, осуществляющих следующую перестановку L-матриц:

$$\left(\mathcal{R}_{123}\right)^T L_{01} M_{02} N_{03} = N_{03} M_{02} L_{01} \mathcal{R}_{123} ,$$

восьмимерно. Подробнее автор надеется разъяснить это в другой статье. Как раз 8 таких операторов $\mathcal{R}_{123}$ получаются, с одной стороны, в виде

$$R^a_{12} R^b_{13} R^c_{23} ,$$

а с другой - в виде

1751-89

$$R^{f}_{23} R^{e}_{13} R^{d}_{12} ,$$

что и приводит к линейным зависимостям типа (I). Однако проверка выполнения уравнения тетраэдров для получающихся S-матриц крайне трудна и пока не проделана.

1757-85

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Корепанов И.Г. Тетраэдральный аналог алгебры Замолодчикова и двуслойная модель двумерной статистической физики / Челяб. политехн. ин-т.- Челябинск, 1988. - 9с. - Деп. в ВИНИТИ 06.06.88, №4433-В88.

2. Felderhof B.U. Diagonalization of the transfer matrix of the free fermion model// Physica.-1973.-V.66, №2.-P.279-298.

3. Кричевер И.М. Уравнения Бакстера и алгебраическая геометрия// Функцион. анализ и его приложения. - 1981. - Т.15, №2. - С.22-35.

1751-89

9

1751-89

Печатается в соответствии с решением Ученого Совета Челябинского политехнического института имени Ленинского комсомола от 26 декабря 1988 года.

В печать 6.3.89

Тир. 1 Цена 1=35 Зак. 32792

Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ
Люберцы, Октябрьский пр., 403