МАТЕМАТИКА

УДК 517.962.24

НЕКОММУТАТИВНАЯ ЦЕПОЧКА ФИБОНАЧЧИ И САМОПОДОБНАЯ БЕСКОНЕЧНАЯ МАТРИЦА

С. И. Бельков, И. Г. Корепанов e-mail: sergey_belkov@mail.ru, kig@susu.ac.ru

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Россия

Статья поступила 27 февраля 2008 г.

Введение

Рассмотрим следующую цепочку слов в алфавите $\{a, b\}$:

$$a_0 = a$$
, $a_1 = b$, $a_2 = ab$, $a_3 = bab$, $a_4 = abbab$, $a_5 = bababbab$, ... (1)

Здесь каждое слово, начиная с a_2 , получается конкатенацией (написанием подряд) двух предыдущих. В таком абстрактном виде цепочка (1) является одним из наиболее изученных объектов символической динамики. Отметим следующее ее свойство. Рассмотрим единственное бесконечное слева слово

инвариантное относительно одновременной замены каждого вхождения a на b и каждого вхождения b на ab. Тогда a_n при $n \ge 1$ получается как конечный (т. е. самый правый) отрезок слова (2) длины ϕ_{n+1} , где $\phi_n - n$ -е число Фибоначчи. Напомним, что

$$\varphi_1 = 1, \varphi_2 = 1, \varphi_3 = 2, \varphi_4 = 3, \varphi_5 = 5, \varphi_6 = 8 \text{ и т. д.}$$
 (3)

Весомым свидетельством популярности цепочки (1) является посвященная ей и другим подобным системам статья «L-system» в Википедии [1]. Из этой статьи, в частности, можно узнать, что цепочки типа (1) порождаются «L-системами» (набором правил и символов), названными в честь биолога-теоретика и ботаника А. Линденмайера, который ввел и исследовал их в 1968 году. Системы такого рода позволяют моделировать процессы роста и развития растений, морфологию многих организмов. Кроме того, L-системы могут быть использованы для генерации фрактальных объектов, начиная от канторова множества и кончая довольно правдоподобными имитациями формы живых растений.

Сказанного достаточно, чтобы стимулировать дальнейшие исследования цепочки (1) и ей подобных, но мы хотим привести еще один, несколько неожиданный математический пример из теории узлов, в котором возникает эта цепочка. Узел в трехмерной сфере называется расслоенным, если его дополнение имеет структуру расслоения поверхностей над окружностью — меридианом узла. Группа G_K такого узла K (напомним, что группа узла — это фундаментальная группа его дополнения) допускает описание в терминах образующих и соотношений, в котором одна из образующих — назовем ее t — соответствует обходу по меридиану, а соотношения показывают, как

при этом меняются другие образующие. Оказывается, если K — узел «восьмерка» (см., например, [2]), то группа G_K может быть записана как

$$G_K = \langle a, b, t | t^{-1}at = ab, t^{-1}bt = bab \rangle.$$

Иными словами, при обходе по меридиану происходят замены $a \mapsto ab$, $b \mapsto bab$, что в точности соответствует сдвигу на две позиции в (1), а итерируя эти обходы, можно получить всю последовательность (1)!

Настоящая заметка посвящена изучению цепочки (1) для случая, когда a и b — матрицы из группы SL(2,C), а дальнейшие члены цепочки понимаются как матричные произведения. В разделе 1 мы приводим сводку элементарных свойств такой последовательности; раздел 2 посвящен нашему основному результату — явным формулам, использующим миноры бесконечной самоподобной матрицы.

1. Элементарные свойства некоммутативной последовательности Фибоначчи для группы *SL*(2,*C*)

Мы будем называть цепочку (1) некоммутативной последовательностью Фибоначчи. Прежде чем считать ее члены элементами группы SL(2,C), рассмотрим одно ее свойство, выполняющееся уже на уровне слов — элементов свободной группы с образующими a и b. Это свойство — закон сохранения коммутатора соседних элементов.

Рассмотрим коммутатор c элементов a и b в смысле теории групп (его называют также коммутантом):

$$c = [a, b] \stackrel{\text{def}}{=} aba^{-1}b^{-1}.$$

Нетрудно видеть, что следующий коммутатор в цепочке есть

$$[b, ab] = c^{-1}.$$

Отсюда ясно, что и дальше коммутатор соседних элементов будет принимать по очереди только два значения c и c^{-1} , таким образом, он сохраняется при сдвиге на два шага.

Пусть теперь все элементы последовательности (1) принадлежат группе SL(2,C), т. е. это матрицы 2×2 с комплексными элементами и определителем 1. Чтобы что-то сказать об эволюции этих матриц, определяемой последовательностью (1), удобно перейти к их следам. Для следов матриц из SL(2,C) выполнена известная формула

$$tra + trbab = trb \cdot trab.$$
 (4)

Поэтому достаточно задать следы первых трех матриц, чтобы можно было итерациями вычислить все остальные.

Введем обозначение $t_n=tra_n$, и будем считать, что заданы $t_0=x,\,t_1=y,t_2=z$. Таким образом, цепочка из следов имеет вид

$$x, y, z, t_3 = yz - x, t_4 = zt_3 - y, ...$$
 (5)

Несложный расчет с использованием формулы (4) показывает, что сохранение коммутатора матриц приводит к сохранению следующей величины τ для следов (независимо от четности или нечетности номера n):

$$\tau = t_n^2 + t_{n+1}^2 + t_{n+2}^2 - t_n t_{n+1} t_{n+2} = const.$$
 (6)

Интересно также, что цепочка (5) обладает сохраняющейся 2-формой. В самом деле, продифференцируем формулу (6), временно считая константой t_{n+1} (наряду с τ). Получим

$$(2t_n - t_{n+1}t_{n+2})dt_n = (-2t_{n+2} + t_nt_{n+1})dt_{n+2},$$

или

$$(-2t_{n+3} + t_{n+1}t_{n+2})dt_n = (-2t_{n+2} + t_nt_{n+1})dt_{n+2}.$$

Если теперь перестать считать t_{n+1} константой, то отсюда следует

$$\frac{\mathrm{d}t_n \wedge \mathrm{d}t_{n+1}}{2t_{n+2} - t_n t_{n+1}} = -\frac{\mathrm{d}t_{n+1} \wedge \mathrm{d}t_{n+2}}{2t_{n+3} - t_{n+1} t_{n+2}}.$$

Поэтому форма

$$(-1)^n \frac{dt_n \wedge dt_{n+1}}{2t_{n+2} - t_n t_{n+1}} \tag{7}$$

сохраняется. Если ограничиться вещественными последовательностями (5), то это — инвариантная форма объема на каждой поверхности $\tau = \text{const.}$

Сохранение величины τ и формы (7) отнюдь не приводит к интегрируемости системы (5). Компьютерное моделирование показывает, что точки с координатами (t_n , t_{n+1} , t_{n+2}) достаточно хаотично заполняют типичную поверхность τ = const и не ложатся на какой-либо набор линий в ней. Поэтому следует искать нестандартное описание для динамики системы (5).

2. Бесконечная самоподобная матрица

Оказывается, элементы последовательности следов (5) могут быть изящно записаны в виде миноров некоторой бесконечной самоподобной матрицы **М**. Отправной точкой здесь служит наблюдение, что

$$t_3 = \begin{vmatrix} z & 1 \\ x & y \end{vmatrix}, \qquad t_4 = \begin{vmatrix} z & 1 & 1 \\ x & y & 0 \\ 1 & 0 & z \end{vmatrix},$$

и далее для любого t_n удается подобрать равный ему определитель размера $\phi_n \times \phi_n$, состоящий только из элементов 0, 1, x, y, z, причем эти определители строятся по простому закону, к описанию которого мы и переходим.

Введем матрицу

$$M^{(1)} = (y).$$

Это база рекурсии, по которой мы будем получать матрицу $\mathbf{M}^{(n+1)}$ из $\mathbf{M}^{(n)}$. Шаг рекурсии состоит из следующих двух подшагов:

- транспонируем $\mathbf{M}^{(n)}$,
- транспонированную матрицу $\left(\mathbf{M}^{(n)}\right)^T$ будем преобразовывать, делая в ней замену элементов на блоки по следующим правилам:

$$x\mapsto \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad y\mapsto z,\quad z\mapsto \begin{pmatrix}z&1\\x&y\end{pmatrix},\qquad 1\mapsto \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$$
 или $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ или $(1\quad0),$ $0\mapsto \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ или $(0\quad0)$ или $(0).$

При этом размер блока, в который переходят символы 0 и 1, определяется соответствующими диагональными элементами. Пусть рассматриваемый символ стоит на позиции (i, j) (при этом $i \neq j$, т. к. на диагонали могут стоять либо z, либо y). Если $\mathbf{M}_{i,i}^{(n)} = \mathbf{M}_{j,i}^{(n)} = z$, то этот

элемент переходит в блок размера 2×2 , если $\mathbf{M}_{i,i}^{(n)} = z$ и $\mathbf{M}_{j,j}^{(n)} = y$ — в блок размера 2×1 , если $\mathbf{M}_{i,i}^{(n)} = y$ и $\mathbf{M}_{j,j}^{(n)} = z$ — в блок размера 1×2 , а если $\mathbf{M}_{i,i}^{(n)} = \mathbf{M}_{j,j}^{(n)} = y$ — в блок размера 1×1 (такой случай возможен только для случая $\mathbf{M}_{i,j}^{(n)} = 0$, в чем легко убедиться методом «от противного»).

Заметим, что в силу алгоритма матрицы $\mathbf{M}^{(n)}$ обладают следующими свойствами:

- (1)На диагонали стоят только элементы z или y, причем y обязательно входит в состав бло- ка $\begin{pmatrix} z & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$, и вне диагонали нет ни элементов z, ни элементов y.
- (2) Элемент x может находиться только в составе блока $\begin{pmatrix} z & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$.
- (3)В строках, содержащих комбинацию $(z \ 1)$ нет других ненулевых элементов за исключением единицы в составе комбинации $(z \ 1)$.
- (4)В столбцах, содержащих комбинацию $\binom{1}{y}$ нет других ненулевых элементов.

Теорема 1. det $M^{(n)} = t_n$.

происходить следующие переходы:

Доказательство. Проведем его методом математической индукции. Для n=1 утверждение теоремы, очевидно, верно. Пусть теперь известно, что $\det \mathbf{M}^{(n-1)} = t_{n-1}$. На диагонали матрицы $\mathbf{M}^{(n)}$ стоит ϕ_{n-2} блоков вида $\begin{pmatrix} z & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$, в каждом из них выберем единицу и будем преобразовывать определитель $\det \mathbf{M}^{(n)}$. Преобразованием столбцов добьемся, что бы строке с выбранной единицей не было других элементов, отличных от нуля — для этого нужно из столбца, находящегося левее, вычесть z столбцов с единицей и, если это необходимо, из столбца, находящегося правее (если в строке присутствует комбинация $\begin{pmatrix} z & 1 & 1 \end{pmatrix}$) вычесть столбец с единицей. Тогда при разложении определителя по полученной строке появится множитель (-1), т. к. оставшаяся единица находится правее диагонального элемента. После разложения по всем ϕ_{n-2} выбранным строкам мы получим произведение $(-1)^{\phi_{n-2}}$ и определителя некоторой матрицы $\mathbf{S}^{(n-1)}$ порядка ϕ_{n-1} . При разложении определителя det $\mathbf{M}^{(n)}$ по выбранным строкам будут

$$\begin{pmatrix} z & 1 \\ x & y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x - yz & y \end{pmatrix} \mapsto (x - yz),$$

$$\begin{pmatrix} z & 1 & 1 \\ x & y & 0 \\ z & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x - yz & y & -y \\ 1 & 0 & z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - yz & -y \\ 1 & z \end{pmatrix};$$

недиагональные блоки, выделяющиеся в зависимости от соответствующих диагональных блоков, будут преобразовываться так:

 $0 \cdots x v$

Мы получим, что $\mathbf{S}^{(n-1)} = \left(\mathbf{M}^{(n-1)}(x_1, y_1, z_1)|_{x_1 = -y, y_2 = z, z_1 = x - yz}\right)^T$.

Рассмотрим вспомогательную рекуррентную последовательность w_n , задаваемую правилами $w_n=w_{n-2}w_{n-1}-w_{n-3},\,w_0=-x,\,w_1=-y,\,w_2=z.$ Очевидно, $w_k=(-1)^{\phi_{k+1}}t_k.$ По предположению индукции $\det \mathbf{M}^{(n-1)}(t_0,\ t_1,\ t_2) = \det \mathbf{M}^{(n-1)}(x,\ y,\ z) = t_{n-1},$ значит, $\det \mathbf{S}^{(n-1)} = \det \mathbf{M}^{(n-1)}(w_1,w_2,w_3) = t_{n-1}$ w_n (подстановка обеспечивает сдвиг по времени на единицу). Тогда $\det \mathbf{M}^{(n)} = \mathbf{M}^{(n)}$ $= (-1)^{\phi_{n-2}} \det \mathbf{S}^{(n-1)} = (-1)^{\phi_{n-2}} w_n = (-1)^{\phi_{n-2}} (-1)^{\phi_{n-1}} t_n = (-1)^{\phi_{n-2} + \phi_{n+1}} t_n = t_n \,, \text{ так как } \phi_{n-2} + \phi_{n+1} \text{ чет-} t_n = t_n \,, \text{ так как } \phi_{n-2} + \phi_{n+1} \text{ чет-} t_n = t_n \,.$ HO.■

Бесконечно применяя описанную выше рекурсию, получим бесконечную (вправо и вниз) самоподобную матрицу М:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} z & 1 & 1 & \cdots \\ x & y & 0 & \cdots \\ z & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Самоподобие значит, что **М** переходит под действием шага рекурсии в себя. Это ясно из следующей теоремы.

Теорема 2. Верхняя левая подматрица размера $\phi_{n-1} \times \phi_{n-1}$ матрицы $\mathbf{M}^{(n)}$ равна $\mathbf{M}^{(n-1)}$.

Доказательство. Проведем его методом математической индукции. Для n=3 утверждение теоремы верно, т.к. верхняя левая подматрица размера 1×1 есть $M^2 = z$. Пусть теперь известно, что верхняя левая подматрица матрицы $\mathbf{M}^{(n-1)}$ размера $\phi_{n-2} \times \phi_{n-2}$ равна $\mathbf{M}^{(n-2)}$. Алгоритм действует таким образом, что подматрица, о которой идет речь в теореме, однозначно определяется только элементами верхней левой подматрицы размера $\phi_{n-2} \times \phi_{n-2}$ матрицы $\mathbf{M}^{(n-1)}$. По предположению индукции указанная подматрица равна $\mathbf{M}^{(n-2)}$. Значит, она может перейти только в подматрицу, равную $\mathbf{M}^{(n-1)}$...

Замечание. Аналогично можно показать, что правая нижняя подматрица размера $\phi_{n-2} \times \phi_{n-2}$ матрицы $\mathbf{M}^{(n)}$ равна $\mathbf{M}^{(n-2)}$.

Заключение

Таким образом, мы рассмотрели алгебраическую динамическую систему с дискретным временем, состоящую из следов членов некоммутативной последовательности Фибоначчи. Впервые установлено, что эти следы могут быть получены в виде главных миноров бесконечной самоподобной матрицы, размеры которых — обычные числа Фибоначчи. Эта матрица может рассматриваться как двумерный аналог самоподобной последовательности (2).

Список литературы

- 1. L-system. In: Wikipedia, the free encyclopedia, http://en.wikipedia.org/wiki/L-system
- 2. Figure-eight knot (mathematics). In: Wikipedia, the free encyclopedia, http://en.wikipedia.org/wiki/Figure_eight_knot_%28mathematics%29.