$\boxed{\boxed{\text{Retas}}}$

Equações Paramétricas da Reta

Seja $\vec{v} = (a, b, c)$ um vetor não nulo no espaço e $A(x_0, y_0, z_0)$ um ponto do plano. Da Geometria Euclidiana sabemos que existe uma única reta r com a direção de $\vec{v}$ e que contém o ponto A. Dizer que r tem a mesma direção de $\vec{v}$ significa que dois pontos quaisquer de r determinam um vetor com a mesma direção de $\vec{v}$.

Assim, um ponto $P(x, y, z)$ pertence à reta r se, e somente se,

$$\overrightarrow{AP} = t.\vec{v},$$

onde t é um número real.

Ou, usando coordenadas,

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t.(a, b, c).$$

Esta equação equivale ao sistema de equações:

$$\begin{cases} x = x_0 + a.t \\ y = y_0 + b.t \\ z = z_0 + c.t \end{cases}$$

Exemplos: 1) As equações:

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2.t \\ y &= 2 - 3t.t \\ z &= 4 + 1.t \end{aligned}$$

são equações paramétricas da reta r que passa pelo ponto $P(1, 2, 4)$ e tem a direção do vetor $(2, -3, 1)$. Isto significa que para cada valor do parâmetro t, o ponto $(1 + 2t, 2 - 3t, 4 + 1.t)$ pertence à reta r e também que todo ponto de r é da forma $(1 + 2t, 2 - 3t, 4 + 1.t)$, para algum valor de t.

(3) Dado o ponto $A(2, 3, -4)$ e o vetor $\vec{v} = (1, -2, 3)$, pede-se:

(a) Escrever equações paramétricas da reta r que passa por A e tem direção de $\vec{v}$.

(b) Encontrar os dois pontos B e C de r de parâmetros $t = 1$ e $t = 4$, respectivamente.

(c) Determinar o ponto de r cuja abscissa é 4.

(d) Verificar se os pontos $D(4, -1, 2)$ e $E(5, -4, 3)$ pertencem a r.

(e) Determinar para quais valores de m e n o ponto $F(m, 5, n)$ pertence a r.

Equações Simétricas da Reta: Das equações ($\star$) supondo $abc \neq 0$, temos:

$$\begin{aligned} t &= \frac{x - x_0}{a} \\ t &= \frac{y - y_0}{b} \\ t &= \frac{z - z_0}{c} \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Estas equações são chamadas equações simétricas ou normais de uma reta que passa por um ponto $A(x_0, y_0, z_0)$ e tem direção do vetor $\vec{v} = (a, b, c,)$.

Observações: Se a reta é determinada pelos pontos $A(x_0, y_0, z_0)$ e $B(x_1, y_1, z_1)$, então as equações simétricas são:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

pois um vetor diretor é:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0),$$

com $x_1 - x_0 \neq 0$, $y_1 - y_0 \neq 0$ e $z_1 - z_0 \neq 0$.

Exemplo: Escreva as equações simétricas da reta que passam por $A(2, 1, -3)$ e $B(4, 0, -2)$.

Condição para que três pontos estejam em linha reta A condição para que três pontos $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ e $C(x_3, y_3, z_3)$ estejam em linha reta é que os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ sejam colineares, isto é:

$$\overrightarrow{AB} = m\overrightarrow{AC}, \text{ para algum m } \in \mathbb{R},$$

ou,

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$$

Exercício: Os pontos $A(5, 2, -6)$, $B(-1, -4, -3)$ e $C(7, 4, -7)$ estão em linha reta?

Equações Reduzidas da Reta

Sejam as equações simétricas da reta:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Pode-se dar outra forma, isolando as variáveis y e z e expressando-as em função de x.

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{y - y_0}{b} &= \frac{x - x_0}{a} \Longleftrightarrow \\ y - y_0 &= \frac{b}{a}(x - x_0) \Longleftrightarrow \\ y - y_0 &= \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}x_0 \Longleftrightarrow \\ y &= \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}x_0 + y_0. \end{aligned}$$

Fazendo $\frac{b}{a} = m$ e $-\frac{b}{a}x_0 + y_0 = n$, temos:

$$y = mx + n.$$

Ou podemos fazer

$$\begin{aligned} \frac{z-z_0}{c} &= \frac{x-x_0}{a} \Longleftrightarrow \\ z-z_0 &= \frac{c}{a}(x-x_0) \Longleftrightarrow \\ z-z_0 &= \frac{c}{a}x - \frac{c}{a}x_0 \Longleftrightarrow \\ z &= \frac{c}{a}x - \frac{c}{a}x_0 + z_0. \end{aligned}$$

Fazendo $\frac{c}{a} = p$ e $-\frac{c}{a}x_0 + z_0 = q$, temos:

$$z = px + q.$$

Estas equações são chamadas de equações reduzidas da reta.

Exercício: Estabelecer as equações reduzidas da reta r que passa pelos pontos $A(2,1,-3)$ e $B(4,0,-2)$.

Observações: 1) Nas equações reduzidas:

$$\begin{cases} y &= mx+n \\ z &= px+q \end{cases}$$

a variável x figura como variável independente. Se expressarmos as equações de forma que a variável independente seja y ou z, ainda assim as equações são chamadas de equações reduzidas.

(2) Vimos que as equações:

$$\begin{cases} x &= x_0 + a.t \\ y &= y_0 + b.t \\ z &= z_0 + c.t \end{cases}$$

ou as equações:

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

representam uma reta r determinada por um ponto $A(x_0,y_0,z_0)$ e por um vetor diretor $\vec{v} = (a,b,c)$.

Equação Vetorial da Reta Sejam $\vec{u}$ um vetor diretor de uma reta r e A um ponto de r. Um ponto X pertence a r se, e somente se, existe um número real λ tal que $\overrightarrow{AX} = \lambda\vec{u}$. Isto equivale a,

$$X = A + \lambda.\vec{u}.$$

A equação acima é chamada equação vetorial da reta.

Exemplo: Determine a equação vetorial da reta que passa pelos pontos $A(1, 0, 0)$ e $B(0, 1, 1)$.

Exercícios

Exercício 1: Seja r a reta determinada pelos pontos $A(1,0,1)$ e $B=(3,-2,3)$.

(a) Obtenha equações de r nas formas paramétrica, simétrica e reduzida.

(b) Verifique se o ponto $P=(-9,10,9)$ pertence a r.

(c) Obtenha dois vetores diretores de r e dois pontos de r, distintos de A e B.

Exercício 2: Determinar, caso seja possível, a forma simétrica da equação da reta r que passa pelos pontos dados.

(a) $A(1,2,3)$ e $B(2,3,4)$

(b) $A(1,0,1)$ e $B(1,2,3)$

Exercício 3: Escreva as equações paramétricas da reta que passa por A e pelo médio do segmento, sendo $A(1,0,3),\ B(1,7,8)$ e $C(1,-7,2)$.

Exercício 4: Escreva as equações paramétricas da reta que passa por $A=(1,5,4)$ e é paralela à reta de equação paramétrica:

$$r:\left\{\begin{array}{rcc} x & = & 1-t \\ y & = & 20+2.t \\ z & = & t \end{array}\right.$$

Exercício 5: Dadas as retas r e s, verifique se elas são ortogonais.

$$r:\left\{\begin{array}{rcc} x & = & 2-t \\ y & = & t \\ z & = & 1+3.t \end{array}\right. \qquad s:\left\{\begin{array}{rcc} x & = & -2t \\ y & = & t \\ z & = & 10+\dfrac{1}{3}.t \end{array}\right.$$

Exercício 6: Determine m de modo que sejam ortogonais as retas r e s:

$$r:\frac{2.x-1}{2}=3-y=2-z \text{ e } s:\left\{\begin{array}{rcc} x & = & m.t \\ y & = & 3 \\ z & = & 1-t \end{array}\right.$$

Exercício 7: Determine a equação reduzida da reta abaixo:

$$\frac{2x-1}{3}=\frac{1-y}{2}=z+1.$$

Posições Relativas entre as Retas

Vamos neste tópico fazer relações entre os sistemas lineares e as posições entre as retas.

Condição de Paralelismo de Duas Retas

A condição de paralelismo das retas r_1 e r_2 é a mesma dos vetores $\vec{v_1} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v_2} = (a_2, b_2, c_2)$, que definem as direções dessas retas, isto é,

$$\vec{v_1} = m.\vec{v_2} \qquad \text{ou} \qquad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Exemplo 1: Verifique se a reta r_1 que passa pelos pontos $A_1 = (-3, 4, 2)$ e $B_1 = (5, -2, 4)$ e a reta r_2 que passa pelos pontos $A_2 = (-1, 2, -3)$ e $B_2 = (-5, 5, -4)$ são paralelas.

Condição de Ortogonalidade de Duas Retas A condição de ortogonalidade das retas r_1 e r_2 é a mesma dos vetores $\vec{v_1} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v_2} = (a_2, b_2, c_2)$ que definem as direções dessas retas, isto é,

$$\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = 0 \qquad \text{ou} \qquad a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0.$$

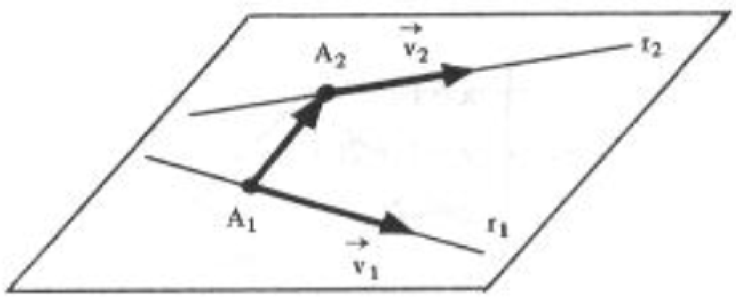
Exemplo 2: As retas

$$r : \left\{ \begin{array}{ccc} y & = & 3 \\ \dfrac{x-3}{8} & = & \dfrac{z+1}{-6} \end{array} \right. \qquad \text{e} \qquad s : \frac{x}{3} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-3}{4}$$

são ortogonais ?

Condição de Coplanaridade de Duas Retas A reta r_1, que passa pelo ponto $A_1(x_1, y_1, z_1)$ e tem direção de um vetor $\vec{v_1} = (a_1, b_1, c_1)$, e a reta r_2, que passa pelo ponto $A_2(x_2, y_2, z_2)$ e tem a direção de um vetor $\vec{v_2} = (a_2, b_2, c_2)$, são coplanares se os vetores $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ e $\overrightarrow{A_1A_2}$ forem coplanares, isto é, se for nulo o produto misto $(\vec{v_1},\ \vec{v_2},\ \overrightarrow{A_1A_2})$. Isto é

$$(\vec{v_1},\ \vec{v_2},\ \overrightarrow{A_1A_2}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$



Exemplo 3: Verifique se as retas abaixo são coplanares:

$$r_1 : \{\frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-5}{4} \qquad r_2 : \{\frac{x+5}{-1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-6}{3}$$

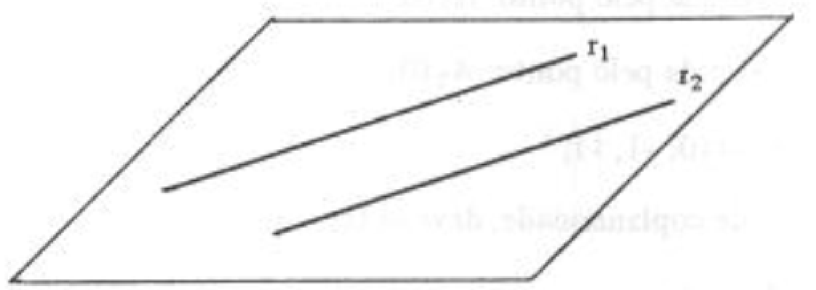
Posições Relativas de Duas Retas

Duas retas r_1 e r_2, no espaço, podem ser:

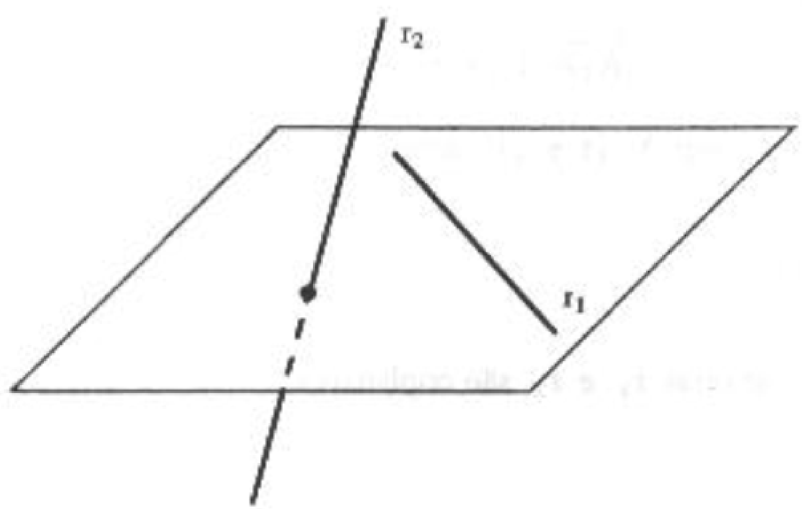
(a) Coplanares, isto é, situadas no mesmo plano. Nesse caso, as retas podem ser:

(i) concorrentes: $r_1 \cap r_2 = \{P\}$, onde P é o ponto de intersecção entre as retas r_1 e r_2.

(ii) paralelas: $r_1 \cap r_2 = \emptyset$



(b) Reversas, isto é, não situadas no mesmo plano. Nesse caso: $r_1 \cap r_2 = \emptyset$.



Observações: A condição $(\vec{v_1},\ \vec{v_2}, \overrightarrow{A_1A_2}) = 0$ é a condição de coplanaridade de duas retas r_1 e r_2 que passam, respectivamente, pelos pontos A_1 e A_2, e têm por vetores diretores os vetores $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$:

(a) se r_1 e r_2 forem paralelas, serão coplanares, isto é, $(\vec{v_1},\ \vec{v_2}, \overrightarrow{A_1A_2}) = 0$, pois duas linhas do determinante utilizado para calcular $(\vec{v_1},\ \vec{v_2}, \overrightarrow{A_1A_2})$ apresentam elementos proporcionais $(\vec{v_1} = k\vec{v_2})$.

(b) Se r_1 e r_2 não forem paralelas, a igualdade $(\vec{v_1},\ \vec{v_2}, \overrightarrow{A_1A_2}) = 0$ exprime a condição de concorrência dessas retas.

(c) se o determinante utilizado para calcular $(\vec{v_1},\ \vec{v_2}, \overrightarrow{A_1A_2})$ for diferente de zero, as retas r_1 e r_2 são reversas.

Exemplo 4: Estudar a posição relativa das retas:

$$r_1 : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = z \qquad \text{e} \qquad r_2 : \begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = 2t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

Exemplo 5: Estudar a posição relativa das retas:

$$r_1 : \frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-5}{4} \qquad \text{e} \qquad r_2 : \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2 - t \\ z = 7 - 2t \end{cases}$$

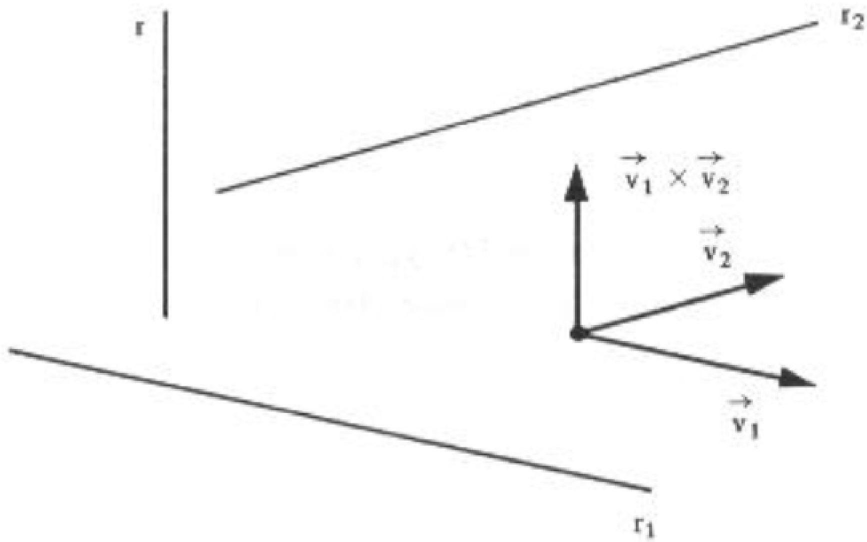
Exemplo 6: Estudar a posição relativa das retas:

$$r_1 : x = y = z \quad \text{e} \quad r_2 : \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 3 \\ z & = & 2x \end{array} \right.$$

Intersecção de Duas Retas - Exemplo 7: Duas retas r_1 e r_2 coplanares e não paralelas são concorrentes. Consideremos as retas:

$$r_1 : \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & -3x + 2 \\ z & = & 3x - 1 \end{array} \right. \quad \text{e} \quad r_2 : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -t \\ y & = & 1 + 2t \\ z & = & -2t \end{array} \right.$$

Reta Ortogonal a Duas Retas: Sejam as retas r_1 e r_2, não paralelas, com as direções dos vetores $\vec{v_1} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v_2} = (a_2, b_2, c_2)$, respectivamente. Qualquer reta r, simultaneamente ortogonal às retas r_1 e r_2, terá um vetor diretor paralelo ou igual ao vetor $\vec{v_1} \times \vec{v_2}$.

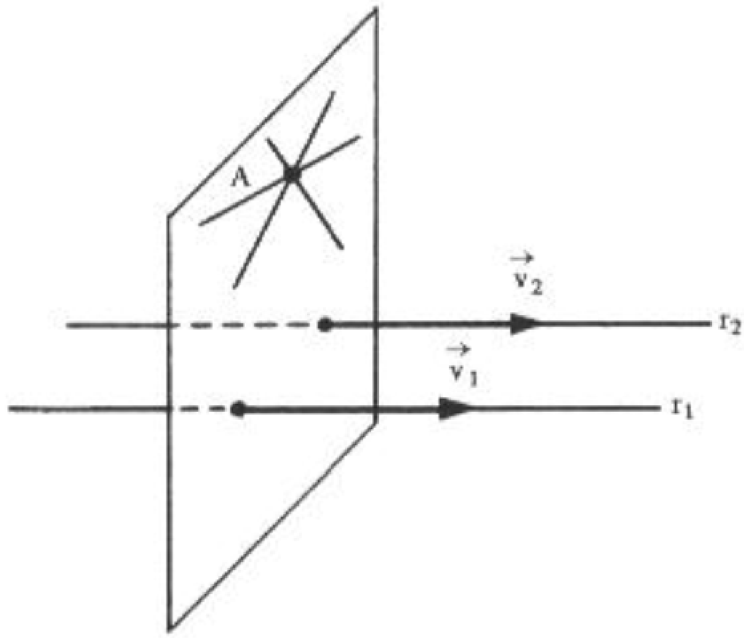


Nas condições dadas, uma reta r estará bem definida quando se conhece um de seus pontos.

Exemplo 8: Determinar as equações da reta r que passa pelo ponto $A(-2, 1, 3)$ e é ortogonal comum às retas:

$$r_1 : \frac{x-1}{-3} = \frac{z}{-1}, \ y = 2 \qquad \text{e} \qquad r_2 : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = -3t \end{cases}$$

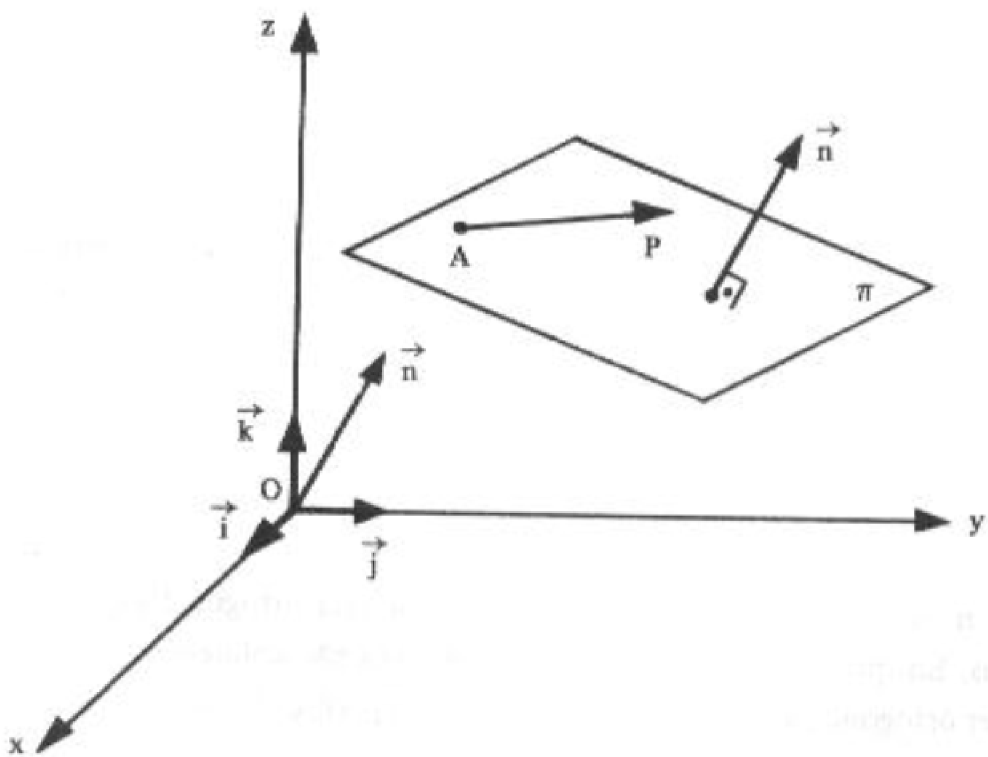
Observação: Se as retas r_1 e r_2 são paralelas, existem infinitas retas que passam por um ponto A e são ortogonais ao mesmo tempo a elas.



$\boxed{\boxed{\text{Planos}}}$

Equação Geral do Plano

Seja $A(x_1, y_1, z_1)$ um ponto pertencente a um plano π e $\vec{n} = (a, b, c)$, $\vec{n} \neq \vec{0}$ um vetor normal (ortogonal) ao plano. O plano π pode ser definido como sendo o conjunto de todos os pontos $P(x, y, z)$ do espaço tais que o vetor $\overrightarrow{AP}$ é ortogonal a $\vec{n}$. O ponto P pertence a π se, e somente se, $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$.



Como $\vec{n} = (a, b, c)$ e $\overrightarrow{AP} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ a equação:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \Longrightarrow (a, b, c) \cdot (x - x_1, y - y_1, z - z_1) = 0 \Longrightarrow a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0.$$

ou ainda

$$ax + by + cz - ax_1 - by_1 - cz_1 = 0.$$

Fazendo:

$$-ax_1 - bx_1 - cz_1 = d \qquad \text{e} \qquad ax + by + cz + d = 0.$$

Esta é a equação geral ou cartesiana do plano π.

É importante observar que os três coeficientes a, b e c da equação geral

$$ax + by + cz + d = 0$$

representam as componentes de um vetor normal ao plano. Por exemplo, se um plano π é dado por $\pi : 3x + 2y - 4z + 5 = 0$, um de seus vetores normais é: $\vec{n} = (3, 2, -4)$.

Exemplo: Determinar a equação geral do plano π que passa pelo ponto $A(2, -1, 3)$, sendo $\vec{n} = (3, 2, -4)$ um vetor normal a π.