Vetores no Espaço

Definimos, anteriormente, um vetor como sendo um par ordenado de números reais. Esta definição foi motivada pelo fato de que a cada par (x, y) podemos fazer corresponder uma seta. No espaço, faremos como no plano, a cada terna (x, y, z) faremos corresponder uma seta. Como, por exemplo, na figura abaixo, a terna (x, y, z) podemos fazer corresponder a seta de O a P.

Definimos um vetor no espaço como sendo uma terna ordenada de números reais (x, y, z) e interpretamos a seta OP como sendo sua representação gráfica. Indicaremos o conjunto dos vetores do espaço por $\mathbb{R}^3$.

O vetor $0 = (0, 0, 0)$ é o vetor nulo do espaço. Sua representação gráfica é a origem do sistema de coordenadas. Algumas vezes será conveniente indicar um vetor por uma seta que não parte necessariamente da origem. Por exemplo, o vetor

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

definido pelos pontos $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$ cuja representação mais natural é a indicada por:

Podemos reescrever o vetor $\overrightarrow{AB}$ da seguinte maneira:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

As componentes do vetor $\vec{v}$ que tem um representante com ponto inicial $P = (5/2, 1, 2)$ e ponto final $Q = (0, 5/2, 5/2)$ são dadas por :

O número $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ é chamado o módulo do vetor $v = (x, y, z)$ e é indicado por $||v||$. Observe que o módulo de um vetor é igual ao comprimento da seta que o representa.

Sejam $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$ vetores e k um número real. Então:

$$u + v, \;\; k \cdot u, \;\; u \cdot v$$

respectivamente, a soma de vetores, o produto de um número por um vetor e o produto escalar de dois vetores, são definidos como segue:

$$u + v = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

$$k \cdot u = k \cdot (x_1, y_1, z_1) = (k \cdot x_1, k \cdot y_1, k \cdot z_1)$$

$$u \cdot v = (x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2.$$

Definição: A multiplicação de um vetor $\vec{v}$ por um escalar α, $\alpha \cdot \vec{v}$ é determinada pelo vetor que possui as seguintes características:

(a) é o vetor nulo, se $\alpha = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$;

(b) se $\alpha \neq 0$, então $\alpha \cdot \vec{v}$ tem o comprimento $|\alpha|$ vezes o comprimento de $\vec{v}$;

(c) A direção é a mesma de $\vec{v}$ (neste caso, dizemos qeu eles são paralelos). Se $\alpha > 0$ dizemos que $\vec{v}$ e $\alpha \cdot \vec{v}$ são parelelos e têm o mesmo sentido. Se $\alpha < 0$ dizemos que $\vec{v}$ e $\alpha \cdot \vec{v}$ são parelelos e têm sentidos opostos.

Proposição: Dois vetores não nulos são paralelos (ou colineares) se, e somente se, um é múltiplo escalar do outro.

Exercício: Determine as coordenadas da extremidade do segmento orientado que representa o vetor $\vec{v} = (3, 0, -3)$, sabendo-se que sua origem está no ponto $P = (2, 3, -5)$.

Exercício: Quais são as coordenadas do ponto P', simétrico do ponto $P = (1, 0, 3)$ em relação ao ponto $M = (1, 2, -1)$? (Sugestão: o ponto P' é tal que o vetor $\overrightarrow{MP'} = -\overrightarrow{MP}$.)

Exercício: Quais dos seguintes vetores são paralelos: $\vec{u} = (6, -4, -2)$, $\vec{v} = (-9, 6, 3)$ e $\vec{w} = (15, -10, 5)$.

Exercício: Dados os pontos $P(1, 2, 4)$, $Q(2, 3, 2)$ e $R(2, 1, -1)$, determinar as coordenadas de um ponto S tal que P, Q, R e S sejam vértices de um paralelogramo.

Exercício: Determinar os valores de m e n para que sejam paralelos os vetores $\vec{u} = (m + 1, 3, 1)$ e $\vec{v} = (4, 2, 2n - 1)$.

Definição: Sejam u e v vetores não nulos do espaço, o único ângulo θ (medido em radianos) tal que

(i) $0 \leq \theta \leq \pi$

(ii) $\cos\theta = \dfrac{u \cdot v}{||u||||v||}$

é chamado de ângulo entre os vetores u e v.

Essas definições são análogas às suas correspondentes para vetores no plano.

Observação: Se o ângulo entre os vetores u e v for $\frac{\pi}{2}$ radianos, dizemos que u e v são perpendiculares entre si. Da fórmula,

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{||u||||v||}$$

temos que u e v são perpendiculares se, e somente se, $u \cdot v = 0$.

Exercício: Calcular o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (1, 1, 4)$ e $\vec{v} = (-1, 2, 2)$.

Exercício: Sabendo que o vetor $\vec{v} = (2, 1, -1)$ forma um ângulo de 60^o com o vetor $\overrightarrow{AB}$ determinado pelos pontos $A = (3, 1, -2)$ e $B = (4, 0, m)$, calcular m.

Operações com vetores Sejam os vetores $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$ e $k \in \mathbb{R}$. Definimos:

(M) Multiplicação por escalar: $k \cdot \vec{u} = k \cdot (x_1, y_1, z_1) = (k \cdot x_1, k \cdot y_1, k \cdot z_1)$.

A adição de vetores satisfaz:

(A1) $\vec{u} + \vec{v} = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1, z_2 + z_1) = (x_2, y_2, z_2) + (x_1, y_1, z_1) = \vec{v} + \vec{u}$.

(A2) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (x_1, y_1, z_1) + [(x_2, y_2, z_2) + (x_3, y_3, z_3)] = (x_1, y_1, z_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3, z_2 + z_3) = (x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3), z_1 + (z_2 + z_3)) = ((x_1 + x_2) + x_3, (y_1 + y_2) + y_3, (z_1 + z_2) + z_3) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) + (x_3, y_3, z_3) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$.

(A3) $\vec{u} + 0 = \vec{u}$, onde $0 = (0, 0)$ é o vetor nulo. De fato, $\vec{u} + \vec{0} = (x_1, y_1, z_1 + (0, 0, 0) = (x_1 + 0, y_1 + 0, z_1 + 0) = (x_1, y_1, z_1)$.

E a multiplicação de um escolar por vetores satisfaz:
(M1) $k_1 \cdot (u + v) = k_1 \cdot u + k_1 \cdot v$. De fato, pois

$$k_1 \cdot (u+v) = k_1 \cdot [(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)] = k \cdot (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = (k \cdot (x_1 + x_2), k \cdot (y_1 + y_2), k \cdot (z_1 + z_2))$$

$$= (k \cdot x_1 + k \cdot x_2, k \cdot y_1 + k \cdot y_2, k \cdot z_1 + k \cdot z_2) = (k \cdot x_1, k \cdot y_1, k \cdot z_1) + (k \cdot x_2, k \cdot y_2, k \cdot z_2) = k \cdot \vec{u} + k \cdot \vec{v}.$$

(M2) $(k_1 + k_2) \cdot u = k_1 \cdot u + k_2 \cdot u$. De fato,

$$(k_1 + k_2) \cdot u = (k_1 + k_2) \cdot (x_1, y_1, z_1) =$$

(M3) $k_1 \cdot (k_2 \cdot u) = (k_1 \cdot k_2)u$

(M4) $1 \cdot u = u$ e $0 \cdot u = 0$.

Definição: Dados os vetores $\vec{v_1},\ \vec{v_2},\ \ldots, \vec{v_n}$ no espaço, dizemos que o vetor $\vec{v}$ é combinação linear desses vetores se existem escalares $a_1,\ a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\vec{v} = a_1 \cdot \vec{v_1} + a_2 \cdot \vec{v_2} + \ldots + a_n \cdot \vec{v_n}.$$

Exemplo: O vetor $(8, 2, 2)$ é combinação linear dos vetores $(1, 2, 1)$ e $(3, 0, 3)$, pois

$$(8, 2, 2) = -1 \cdot (1, -2, 1) + 3 \cdot (3, 0, 1).$$

Exercício: O vetor $\vec{v} = (7, 8, 9) \in \mathbb{R}^3$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores $\vec{v_1} = (2, 1, 4)$, $\vec{v_2} = (1, -1, 3)$ e $\vec{v_3} = (3, 2, 5)$?

Dependência Linear:

Fixemos a seguinte linguagem:

Um vetor, não nulo, $\vec{u}$, diz-se paralelo a uma reta r, para quaisquer pontos A e B de r, $A \neq B$, se tivermos o ângulo entre $\overrightarrow{AB}$ e $\vec{u}$ igual a 0 ou a π radianos.

O vetor nulo, diz-se paralelo a qualquer reta.

Definição: Seja $\{v_1,\ v_2, \ldots, v_n\}$ um conjunto de vetores no espaço. Dizemos que este conjunto de vetores é linearmente independente (ou L.I.) se dados $a_1,\ a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ a combinação linear:

$$a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \ldots + a_n \cdot v_n = \vec{0} \Longleftrightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0.$$

Caso contrário, os vetores são Linearmente Dependentes (L.D.).

Exemplo: Verifique se o conjunto formado pelos vetores $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (4, 5, 6)$ e $\vec{w} = (7, 8, 9)$ são L.I. ou L.D.?

Exemplo: Verifique se o conjunto formado pelos vetores $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $\vec{v} = (1, 2, 1)$ e $\vec{w} = (3, 2, -1)$ são L.I. ou L.D.?

1. Mostre que o triângulo de vértices $A(2,3,1)$ e $B(2,1,-1)$ e $C(2,2,-2)$ é um triângulo retângulo.

2. Sabendo que o vetor $\vec{v} = (2,1,-1)$ forma um ângulo de 60^o com o vetor $\overrightarrow{AB}$ determinado pelso pontos $A(3,1,-2)$ e $B(4,0,m)$, calcule o valor de m.

3. Verifique se os vetores $\vec{u_1} = (1,0,1)$, $\vec{v_2} = (1,1,0)$, $\vec{v_3} = (1,1,1)$, $\vec{v_4} = (-1,2,1)$ são linearmente independentes ou linearmente dependentes.

Produto Vetorial

Como fazer para que o vetor $\vec{w} = (x, y, z)$ seja simultaneamente perpendicular a dois vetores dados $\vec{u} = (a, b, c)$ e $\vec{v} = (a_1, b_1, c_1)$.

Devemos ter $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$ e $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$, o que nos dá:

$$\begin{cases} ax + by + cz &= 0 \\ a_1x + b_1y + c_1z &= 0 \end{cases}$$

Este sistema admite uma infinidade de soluções. Uma delas é

$$\begin{cases} x &= bc_1 - b_1c \\ y &= a_1c - ac_1 \\ z &= ab_1 - a_1b. \end{cases}$$

(a qual pode ser verificada por sustituição).

Portanto, o vetor

$$\vec{w} = (bc_1 - b_1c, a_1c - ac_1, ab_1 - a_1b)$$

é simultaneamente perpendicular a $\vec{u} = (a, b, c)$ e $\vec{v} = (a_1, b_1, c_1)$.

O vetor $\vec{w}$ é chamado produto vetorial de $\vec{u}$ po $\vec{v}$ e indicado por $\vec{u} \times \vec{v}$.

Agora daremos um método para calcular o produto vetorial de $\vec{u} = (a, b, c)$ por $\vec{v} = (a_1, b_1, c_1)$ sem ter que decorar a fórmula.

Primeiro, se $i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$ e $k = (0, 0, 1)$. Então:

$$(x, y, z) = xi + yj + zk.$$

Consideremos

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}$$

um determinante de ordem 3 sobre o conjunto dos números reais.

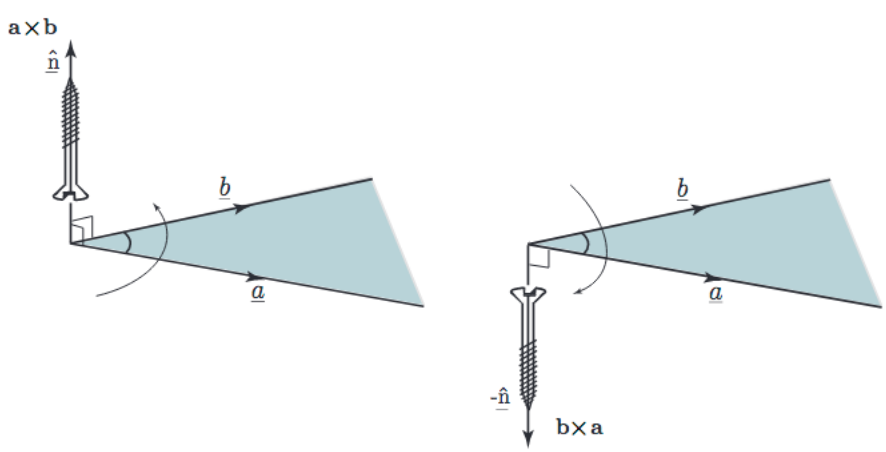
Resolvendo este determinante temos

Exemplo: Se $\vec{u} = (-1, 2, 4)$ e $\vec{v} = (1, 3, 5)$, usando o método acima determine $\vec{u} \times \vec{v}$.

Observação: Tanto o vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ quanto o vetor $\vec{v} \times \vec{u}$ são, simultaneamente, perpendiculares a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$.

Proposição: O produto vetorial não é comutativo.

Identificamos o sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$ como sendo aquele que um saca-rolhas avança quando sua extremidade é colocada na origem comum de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e ele é girado no sentido de $\vec{u}$ para $\vec{v}$.



Propriedade: Dados os vetores do espaço $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{v}$. Valem as seguintes propriedades:

(a) $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$;

(b) $\vec{w} \times (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \times \vec{u} + \vec{w} \times \vec{v}$;

(c) $(k\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (k\vec{v}) = k(\vec{u} \times \vec{v}), \forall k \in \mathbb{R}$.

Observação 1: $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) \neq (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$.

Observação 2: Temos $||\vec{u} \times \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2||\vec{v}||^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$

Proposição: Quaisquer que sejam os vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$ temos

$$||\vec{u} \times \vec{v}|| = ||\vec{u}||||\vec{v}||\text{sen}\theta$$

onde θ é o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Exemplo: Determinar um vetor unitário simultaneamente ortogonal aos vetores $\vec{u} = (2, -6, 3)$ e $\vec{v} = (4, 3, 1)$.

Na figura abaixo representamos o paralelogramo definido pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, isto é, o paralelogramo cujos lados são as setas que representam $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

A área deste paralelogramo é dada por:

$$A = Base.altura$$

No caso a base é $||\vec{u}||$ e a altura é $h = ||\vec{v}||\text{sen}\theta$.

Logo, a área A é

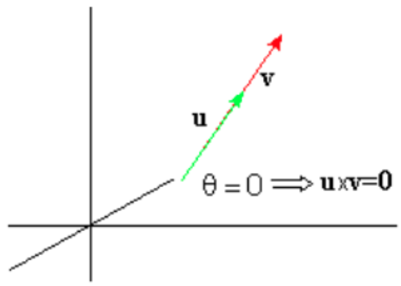
$$A = ||\vec{u}||||\vec{v}||\text{sen}\theta = ||\vec{u} \times \vec{v}||.$$

Assim, o vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ é tal que seu módulo é numericamente igual à área do paralelogramo definido por $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Exemplo: Calcule a área do triângulo cujos vértices são $A(3,2,1)$, $B(0,-2,4)$ e $C(4,1,2)$.

Exemplo: Sejam os vetores $\vec{u} = (3,1,-1)$ e $\vec{v} = (a,0,2)$. Calcular o valor de a para que a área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ seja igual a $2\sqrt{6}$.

Proposição: Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos se, e somente se, $|\vec{u} \times \vec{v}| = 0$ (isto é, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são múltiplos escalares um do outro).



Exemplo: Verifique se os vetores $\vec{u} = (1, 3, -2)$ e $\vec{v} = (-2, 3, 1)$ são paralelos.

Produto Misto O número $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}$, onde $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ pertencem ao $\mathbb{R}^3$, é chamado de **produto misto** dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Se $\vec{u}=(a_1,b_1,c_1)$, $\vec{v}=(a_2,b_2,c_2)$ e $\vec{w}=(a_3,b_3,c_3)$, o produto misto de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é dado por

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Observação: Outra notação para produto misto é: $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

Várias propriedades do produto misto podem ser deduzidas a partir das propriedades de determinantes.

Por exemplo, fazendo-se duas permutações, o determinante não se altera e, portanto, temos

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}$$

Desta igualdade deduzimos a seguinte propriedade do produto misto

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u}).$$

Como o produto escalar é comutativo podemos permutar os sinais $\cdot$ e $\times$:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u}$$

Propriedade: $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$ se um dos vetores é nulo, se dois deles são colineares, ou se os três são coplanares.

Exemplo: Verificar se são coplanares os seguintes vetores $\vec{u} = (3, -1, 4)$, $\vec{v} = (1, 0, -1)$ e $\vec{w} = (2, -1, 0)$

Exemplo: Qual deve ser o valor de m para que os vetores $\vec{a} = (m, 2, -1)$, $\vec{b} = (1, -1, 3)$ e $\vec{c} = (0, -2, 4)$ sejam coplanares?

Aplicação do Produto Misto

Suponha que queiramos encontrar o volume V de um paralelepípedo como o da figura

Sabemos que este volume é igual ao produto da área de uma base pela altura correspondente.

Sendo $\vec{u} = \overrightarrow{AB},\ \vec{v} = \overrightarrow{AD},\ \vec{w} = \overrightarrow{AE},\ \theta$ a medida do ângulo entre $\vec{u} \times \vec{v}$ e $\vec{w},\ h$ a altura relativa à base $ABCD$ e S a área da base de $ABCD$, temos

$$V = S.h = ||\vec{u} \times \vec{v}||.h = ||\vec{u} \times \vec{v}||.||\vec{w}||.|\cos\theta|$$

ou seja,

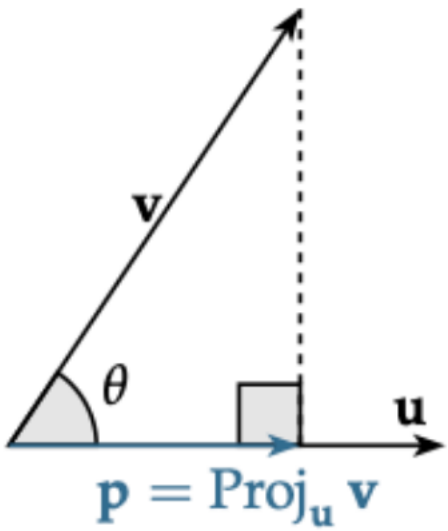
$$V = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}.$$

Note que, $h = ||\vec{w}|| \cos\theta$ resulta da observação de que o triângulo AME é retângulo em M. O módulo em $\cos\theta$ é necessário, pois $\dfrac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$.

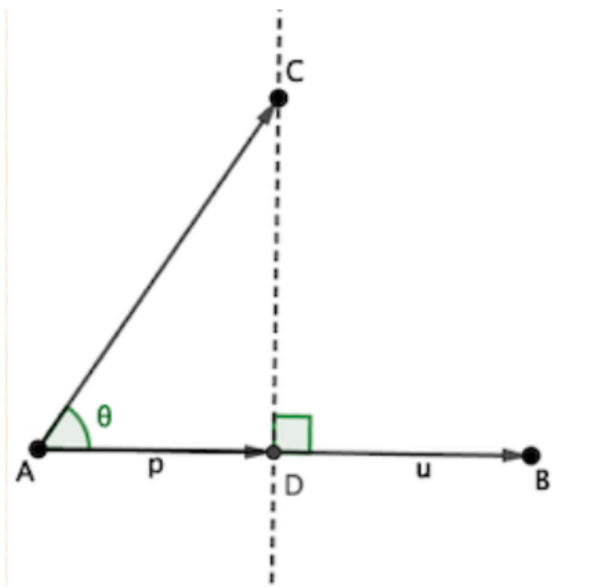
Exemplo: Dados os vetores $\vec{u} = (x, 5, 0),\ \vec{v} = (3, -2, 1)$ e $\vec{w} = (1, 1, -1)$, calcular o valor de x para que o volume do paralelepípedo determinado por $\vec{u},\ \vec{v}$ e $\vec{w}$ seja 24 unidades de volume.

Exemplo: Calcule o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{u} = (3, 5, 7)$, $\vec{v} = (2, 0, -1)$ e $\vec{w} = (0, 1, 3)$.

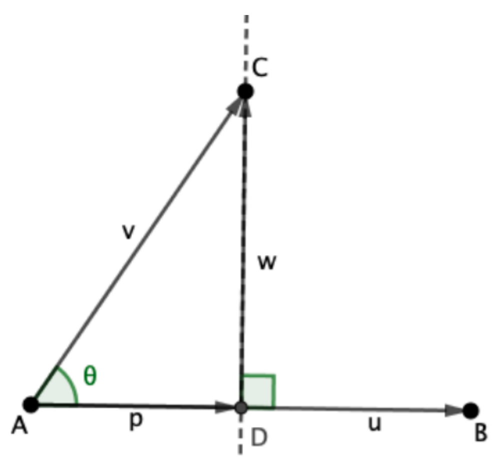
Projeção Ortogonal Dados dois vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ queremos determinar um vetor $\vec{p}$ que é a projeção do vetor $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$. Observe que o vetor $\vec{p}$ é paralelo ao vetor $\vec{u}$, isto é, $\vec{p}//\vec{u}$ e $(\vec{v}-\vec{p}) \perp \vec{u}$



Temos que $\vec{p}$ é múltiplo de $\vec{u} \Longleftrightarrow \vec{p} = \lambda\vec{u}$. (1)



Além disso, seja $\vec{w} = \vec{v} - \vec{p}$ e $\vec{w} \perp \vec{u} \Longleftrightarrow \vec{w} \cdot \vec{u} = 0 \Longleftrightarrow (\vec{v} - \vec{p} \cdot \vec{u}) = 0$. (2)



Desenvolvendo o produto escalar de (2) temos:

$$\begin{array}{rcl}
(\vec{v} - \vec{p} \cdot \vec{u}) & = & 0 \\
(\vec{v} \cdot \vec{u}) - (\vec{p} \cdot \vec{u}) & = & 0 \\
(\vec{v} \cdot \vec{u}) - (\lambda \vec{u} \cdot \vec{u}) & = & 0 \\
(\vec{v} \cdot \vec{u}) - \lambda(\vec{u} \cdot \vec{u}) & = & 0 \\
(\vec{v} \cdot \vec{u}) & = & \lambda(\vec{u} \cdot \vec{u})
\end{array}$$

Daí segue que

$$\lambda = \frac{(\vec{v} \cdot \vec{u})}{(\vec{u} \cdot \vec{u})} = \frac{(\vec{v} \cdot \vec{u})}{||\vec{u}||^2}.$$

Substituindo em (1) temos

$$\vec{p} = \left(\frac{(\vec{v} \cdot \vec{u})}{||\vec{u}||^2} \right) \vec{u} = proj_{\vec{u}} \vec{v}.$$

Exemplo: Determine a projeção ortogonal do vetor $\vec{v} = (2, 3, 4)$ sobre o vetor $\vec{u} = (1, -1, 0)$.

Exemplo: Decomponha o vetor $\vec{u} = (-1, -3, 2)$ como a soma de dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ com $\vec{v}$ paralelo ao vetor $t = (0, 1, 3)$ e $\vec{w}$ ortogonal a este último.

Exemplo: Sejam os vetores $\vec{u} = (6, 3, 2)$ e $\vec{v} = (1, -2, -2)$. Determine a projeção ortogonal do vetor $\vec{u}$ sobre o vetor $\vec{v}$.

Exemplo: Sejam $\vec{u} = (2, -2, 1)$ e $\vec{v} = (3, -6, 0)$.

(a) Obtenha a projeção ortogonal, isto é, o vetor $\vec{p}$, de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$;

(b) Determine $\vec{p}$ e $\vec{q}$ tais que $\vec{v} = \vec{p} + \vec{q}$, sendo $\vec{p}$ paralelo a $\vec{u}$ e $\vec{q}$ perpendicular a $\vec{u}$.