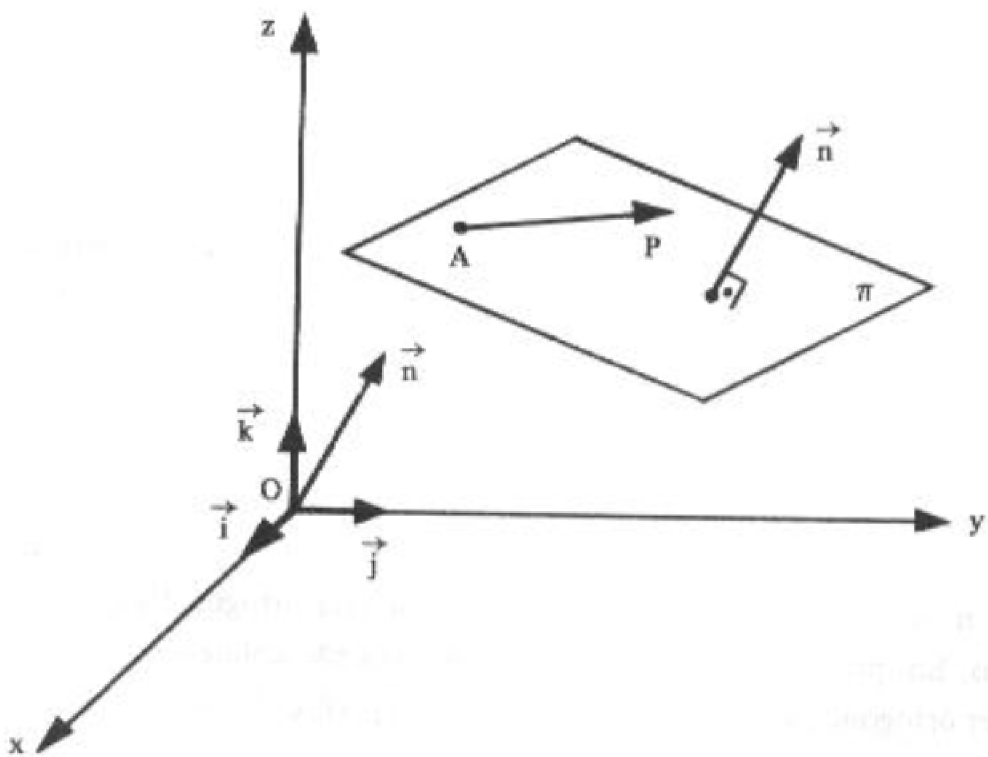
Planos

Equação Geral do Plano

Seja $A(x_1, y_1, z_1)$ um ponto pertencente a um plano π e $\vec{n} = (a, b, c)$, $\vec{n} \neq \vec{0}$ um vetor normal (ortogonal) ao plano. O plano π pode ser definido como sendo o conjunto de todos os pontos $P(x, y, z)$ do espaço tais que o vetor $\overrightarrow{AP}$ é ortogonal a $\vec{n}$. O ponto P pertence a π se, e somente se, $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$.



Como $\vec{n} = (a, b, c)$ e $\overrightarrow{AP} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ a equação:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \Longrightarrow (a, b, c) \cdot (x - x_1, y - y_1, z - z_1) = 0 \Longrightarrow a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0.$$

ou ainda

$$ax + by + cz - ax_1 - by_1 - cz_1 = 0.$$

Fazendo:

$$-ax_1 - bx_1 - cz_1 = d \qquad \text{e} \qquad ax + by + cz + d = 0.$$

Esta é a equação geral ou cartesiana do plano π.

É importante observar que os três coeficientes a, b e c da equação geral

$$ax + by + cz + d = 0$$

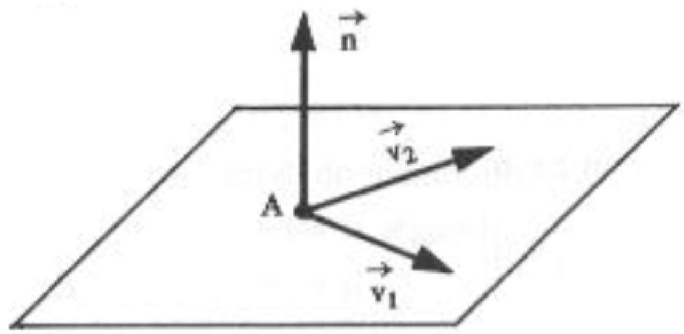
representam as componentes de um vetor normal ao plano. Por exemplo, se um plano π é dado por $\pi : 3x + 2y - 4z + 5 = 0$, um de seus vetores normais é: $\vec{n} = (3, 2, -4)$.

Exemplo 1: Determinar a equação geral do plano π que passa pelo ponto $A(2, -1, 3)$, sendo $\vec{n} = (3, 2, -4)$ um vetor normal a π.

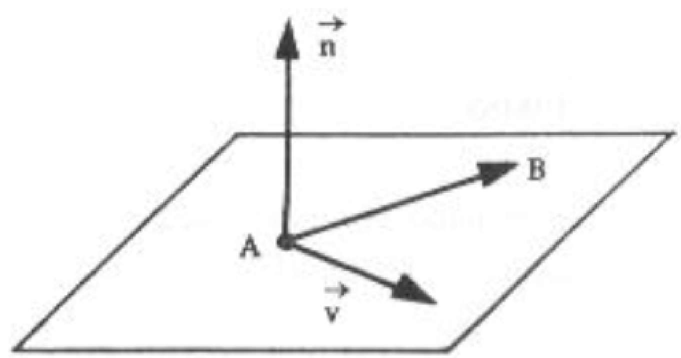
Exemplo 2: Escrever a equação cartesiana do plano π que passa pelo ponto $A = (3, 1, -4)$ e é paralelo ao plano $\pi_1 : 2x - 3y + z - 6 = 0$.

Determinação de um Plano

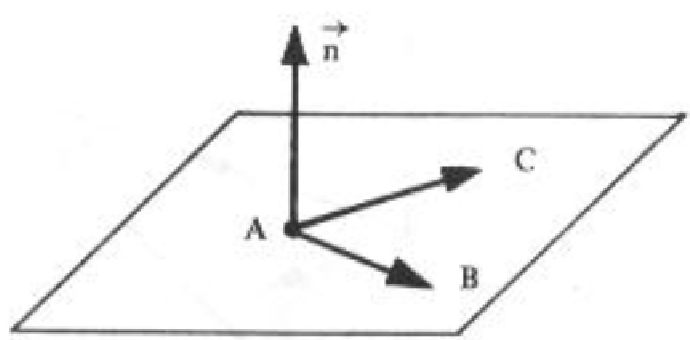
(I) Existe apenas um plano que passa por um ponto A e é paralelo a dois vetores $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ não colineares. Neste caso $\vec{n} = \vec{v_1} \times \vec{v_2}$.



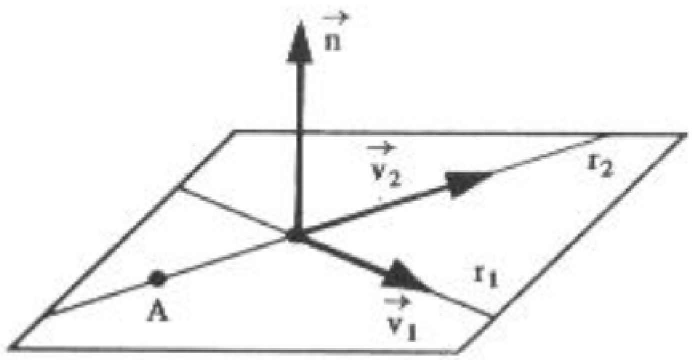
(II) Existe apenas um plano que passa por dois pontos A e B e é paralelo a um vetor $\vec{v}$ não colinear ao vetor $\overrightarrow{AB}$. Neste caso, $\vec{n} = \vec{v} \times \overrightarrow{AB}$.



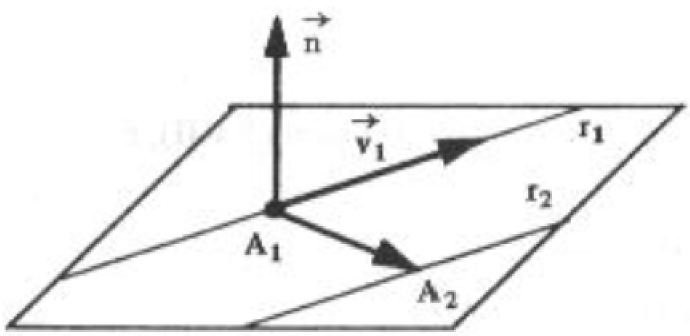
(III) Existe apenas um plano que passa por três pontos A, B e C não em linha reta. Neste caso, $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.



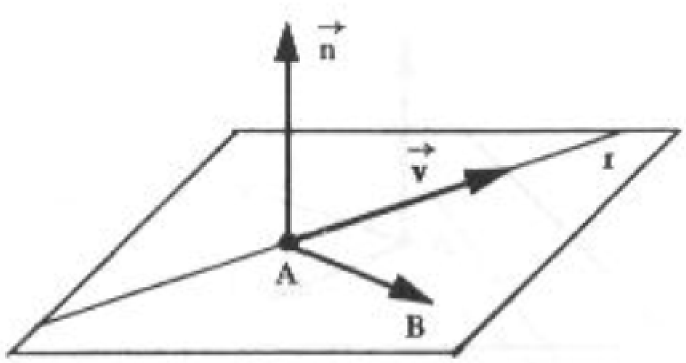
(IV) Existe apenas um plano que contém duas retas concorrentes. Neste caso, $\vec{n} = \vec{v_1} \times \vec{v_2}$, sendo $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ vetores diretores das retas r_1 e r_2.



(V) Existe apenas um plano que contém duas retas r_1 e r_2 paralelas. concorrentes. Neste caso, $\vec{n} = \vec{v_1} \times \overrightarrow{A_1A_2}$, sendo $\vec{v_1}$ um vetor diretor de r_1 (ou de r_2) e $A_1 \in r_1$ e $A_2 \in r_2$.



(VI) Existe apenas um plano que contém uma reta r e um ponto $B \notin r$. Neste caso $\vec{n} = \vec{v} \times \overrightarrow{AB}$, sendo $\vec{v}$ um vetor diretor de r e $A \in r$.



Exemplo 3: Determinar a equação geral do plano que passa pelo ponto $A(1,-3,4)$ e é paralelo aos vetores $\vec{v_1} = (3,1,-2)$ e $\vec{v_2} = (1,-1,1)$.

Exemplo 4: Estabelecer a equação geral do plano determinado pelos pontos $A(2, 1, -1)$, $B(0, -1, 1)$ e $C(1, 2, 1)$.

Exemplo 5: Determine a equação cartesiana do plano que contém a reta

$$r : \begin{cases} x & = & 4 \\ y & = & 3 \\ z & = & 1t \end{cases} \qquad \text{e o ponto} \qquad B(-3, 2, 1)$$

Exemplo 6: Determinar a equação geral do plano que contém as retas

$$r_1 : \begin{cases} y = 2x + 1 \\ z = -3x - 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 4t \\ z = 3 - 6t \end{cases}$$

Observações:

A equação $ax + by + cy + d = 0$ na qual a, b e c não são todos nulos, é a equação de um plano π sendo $\vec{n} = (a, b, c)$ um vetor normal a π. Quando uma ou duas das componentes de $\vec{n}$ são nulas, ou quando $d = 0$, temos casos particulares:

Caso 1: Plano que Passa na Origem

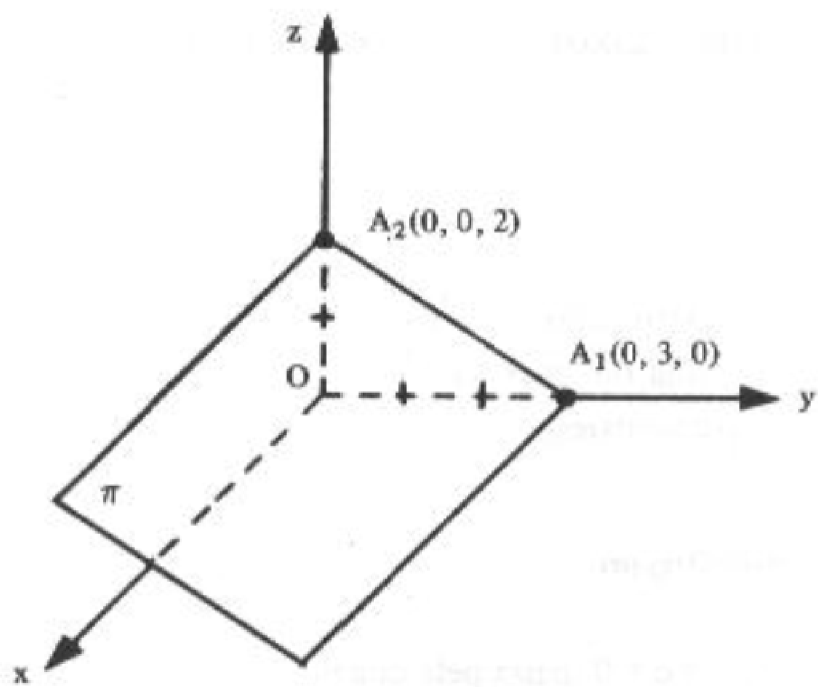
Se o plano $ax + by + cz + d = 0$ passa pela origem então $a.0 + b.0 + c.0 + d = 0$ o que implica que $d = 0$. Assim a equação $ax + by + cz = 0$ representa a equação de um plano que passa pela origem.

Caso 2: Planos Paralelos aos Eixos Coordenados

Se apenas uma das coordenadas das componentes do vetor $\vec{n} = (a, b, c)$ é nula, o vetor é ortogonal a um dos eixos coordenados, e, portanto, o plano π é paralelo ao mesmo eixo:

(I) se $a = 0$, $\vec{n} = (a, b, c) \perp Ox$, portanto, $\pi // Ox$ e a equação geral dos planos paralelos ao eixo Ox é $by + cz + d = 0$.

A equação $2y + 3z - 6 = 0$ mostra o plano



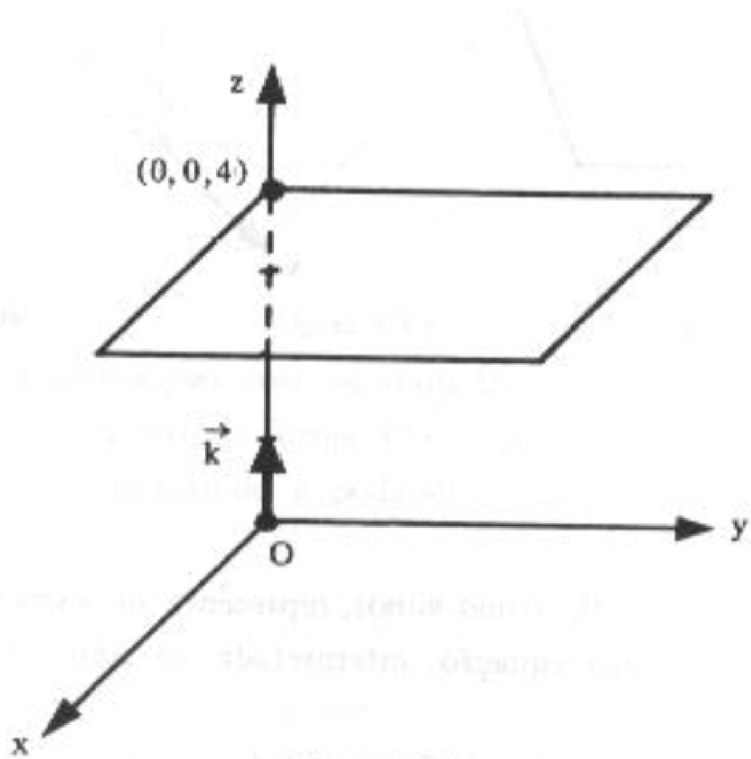
Observemos que suas intersecções com os eixos Oy e Oz são $A_1(0, 3, 0)$ e $A_2(0, 0, 2)$, respectivamente, e que nenhum ponto da forma $P(x, 0, 0)$ satisfaz a equação. Um vetor normal ao plano é $\vec{n} = (0, 2, 3)$.

Caso 3: Planos Paralelos aos Planos Coordenados

Se duas componentes do vetor normal $\vec{n} = (a, b, c)$ são nulas, $\vec{n}$ é colinear a um dos vetores $(1, 0, 0)$ ou $(0, 1, 0)$ ou $(0, 0, 1)$, e, portanto, o plano π é paralelo ao plano dos outros dois vetores:

(I) se $a = b = 0$, $\vec{n} = (0, 0, c) = c(0, 0, 1)$ logo $\pi // xOy$ e a equação geral dos planos paralelos ao plano xOy é $cz + d = 0$ ou seja, $z = -\dfrac{c}{d}$.

Ou seja, os planos cujas equações são da forma $z = k$ são paralelos ao plano xOy.

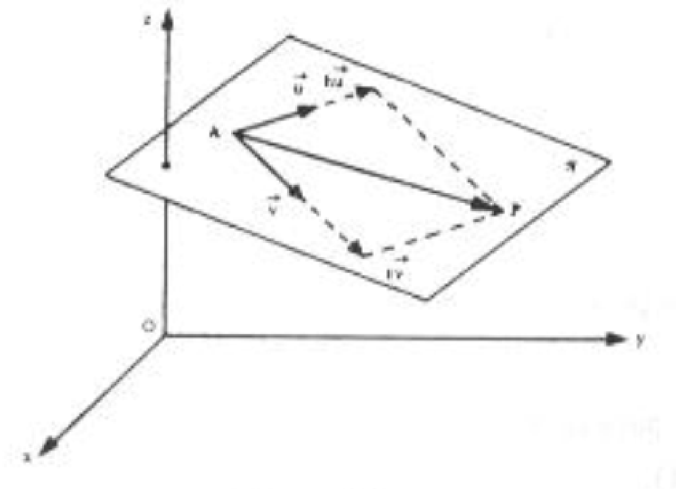


Na figura acima temos o plano $z = 4$ que também pode ser representado pela foram $0.x + 0.y + z - 4 = 0$ na qual vemos que qualquer ponto do tipo $A(x, y, 4)$ satisfaz esta equação e que o vetor $\vec{k} = (0, 0, 1)$ é um vetor normal ao plano.

Assim, o plano paralelo ao plano xOy e que passa pelo ponto $A(x_1, y_1, z_1)$ tem por equação $z = z_1$.

Equações Paramétricas do Plano Seja $A(x_0, y_0, z_0)$ um ponto de um plano π e $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ dois vetores não colineares. Um ponto $P(x, y, z)$ pertence ao plano π que passa por A e é paralelo aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ se, e somente se, existem números reais s e t tais que

$$\overrightarrow{AP} = s\vec{u} + t\vec{v}.$$



Reescrevendo a equação acima temos:

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = s(a_1, b_1, c_1) + t(a_2, b_2, c_2),$$

Daí:

$$\begin{cases} x &= x_0 + a_1 s + a_2 t \\ y &= y_0 + b_1 s + b_2 t \\ z &= z_0 + c_1 s + c_2 t \end{cases}$$

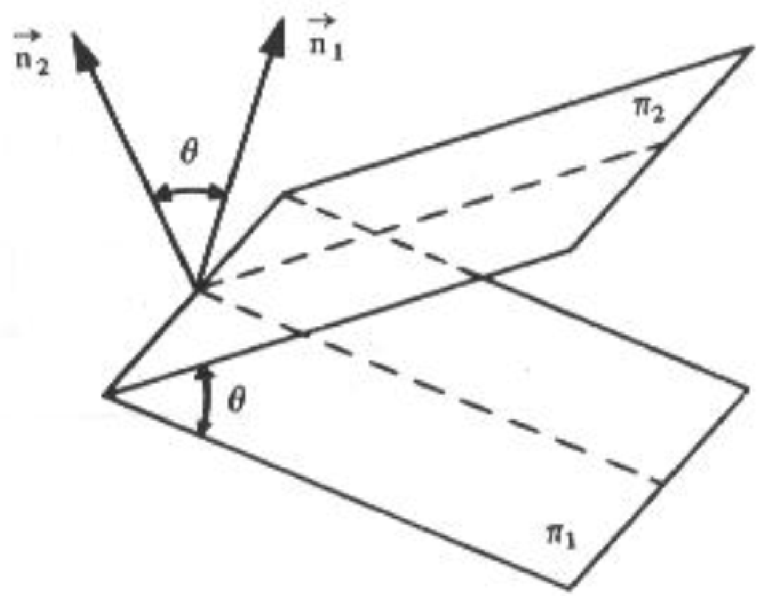
Estas são as equações paramétricas do plano.

Exemplo 7: Determine as equações paramétricas do plano que passa pelo ponto $A(2, 1, 3)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u} = (-3, -3, 1)$ e $\vec{v} = (2, 1, -2)$.

Exemplo 8: Escrever as equações paramétricas do plano determinado pelos pontos $A(5, 7, -2)$, $B(8, 2, -3)$ e $C(1, 2, 4)$.

Ângulo entre dois planos

Sejam os planos $a_1x+b_1y+c_1z+d_1 = 0$ e $a_2x+b_2y+c_2z+d_2 = 0$. Então, $\vec{n_1} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{n_2} = (a_2, b_2, c_2)$ são vetores normais aos planos π_1 e π_2, respectivamente.



Chama-se ângulo de dois plano π_1 e π_2 o menor ângulo que um vetor normal de π_1 forma com um vetor normal de π_2. Seja θ este ângulo, tem-se

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}|.|\vec{n_2}|}, \quad \text{com } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

ou em coordenadas,

$$\cos\theta = \frac{|a_1.a_2 + b_1.b_2 + c_1.c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

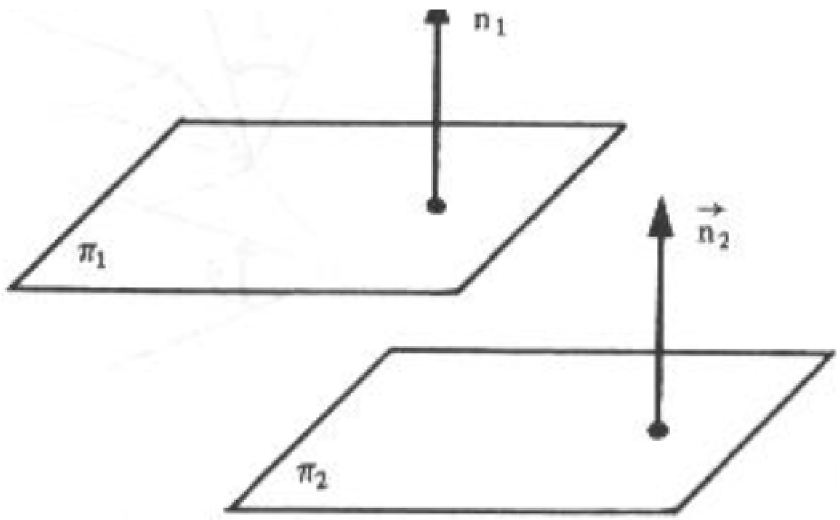
Exemplo 1: Determinar o ângulo entre os planos $\pi_1 : 2x - 3y + 5z - 8 = 0$ e $\pi_2 : 3x + 2y + 5z - 4 = 0$.

Condições de Paralelismo e Perpendicularismo de Dois Planos

Sejam os planos $\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e $a_2x + b_2y + c_2z + d = 0$. Então, $\vec{v_1} = (a_1, b_1, c_1) \perp \pi_1$ e $\vec{v_2} = (a_2, b_2, c_2) \perp \pi_2$.

As condições de paralelismo e perpendicularismo de dois planos são as mesmas de seus respectivos vetores normais, isto é,

(I) Se $\pi_1 // \pi_2,\ \vec{n_1} // \vec{n_2}$



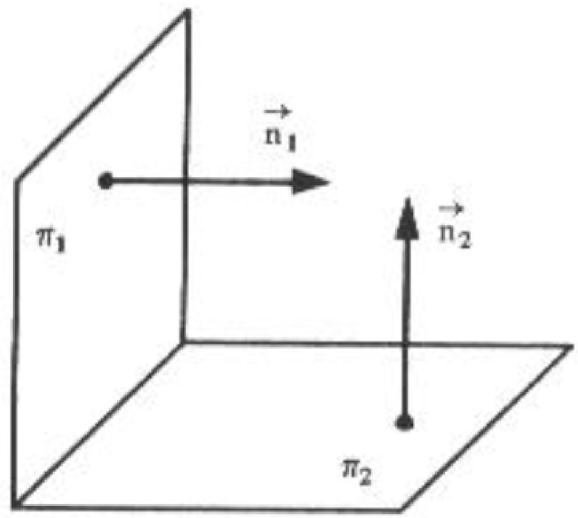
Logo, $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$.

Observe que se além das igualdades anteriores se tivermos também:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \frac{d_1}{d_2}.$$

os planos π_1 e π_2 serão coincidentes porque, nesse caso, a equação de π_2 é obtida de π_1 mediante a multiplicação por um número, o que não altera a equação de π_1.

Em particular, se $a_1 = a_2,\ b_1 = b_2,\ c_1 = c_2$ e $d_1 \neq d_2$, os planos π_1 e π_2 também são paralelos.
(II) Se $\pi_1 \perp \pi_2,\ \vec{n_1} \perp \vec{n_2}$, portanto $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

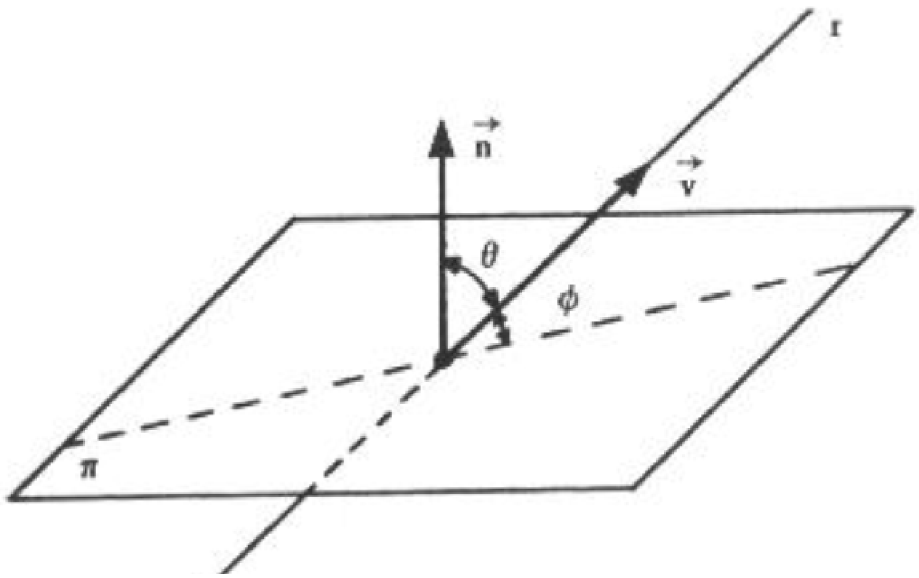


Exemplo 2: Determinar o valor de a e b de modo que os planos $\pi_1 : ax + by + 4z - 1 = 0$ e $\pi_2 : 3x - 5y - 2z + 5 = 0$, sejam paralelos.

Exemplo 3: Determinar o valor de m para que os planos $\pi_1 : 2mx+2y-z=0$ e $\pi_2 : 3x-my+2z-1=0$ sejam perpendiculares.

Ângulo de uma Reta com um Plano

Seja uma reta r com a direção do vetor $\vec{v}$ e um plano π, sendo $\vec{n}$ o vetor normal a um plano π.



O ângulo ϕ da reta r com o plano π é o complemento do ângulo θ que a reta r forma com uma reta normal ao plano.

Tendo em vista que $\theta + \phi = \dfrac{\pi}{2}$, e portanto, $\cos\theta = \text{sen}\theta$, vem, de acordo com a fórmula do cosseno:

$$\text{sen}\phi = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}||\vec{n}|},\ 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$$

Exemplo 4: Determinar o ângulo que a reta

$$r : \begin{cases} x &= 1 - 2t \\ y &= -t \\ z &= 3 + t \end{cases}$$

forma com o plano $\pi : x + y - 5 = 0$.

Intersecções entre Reta e Plano

Exemplo 5: Determine o ponto de intersecção da reta

$$r : \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 2x+3 \\ z & = & 3x-4 \end{array} \right.$$

com o plano $\pi : 3x + 5y - 2z - 9 = 0$.

Exemplo 6: Obtenha a intersecção da reta r com o plano π, onde

$$r : \begin{cases} x &= 0 + 2t \\ y &= 1 + 1t \\ z &= 1 - 3t \end{cases}$$

e o plano

$$\pi : \begin{cases} x &= 1 + 1s \\ y &= 0 + 1\lambda \\ z &= 0 + 1\lambda \end{cases}$$

Intersecção entre Planos

Exemplo 7: Determine a intersecção dos planos π_1 e π_2, onde $\pi_1 : x+2y+3z-1 = 0$ e $\pi_2 : x-y+2z = 0$.

Exemplo 8: Determinar a intersecção dos planos $\pi_1 : 5x - y + z - 5 = 0$ e $\pi_2 : x + y + 2z - 7 = 0$.

Exercício 1: Determinar o ângulo formado pela reta

$$r : \begin{cases} y &= -2x \\ z &= 2x + 1 \end{cases}$$

e o plano

$$\pi : x - y + 5 = 0.$$

Exercício 2: Determine o valor de m para que seja de 30^o o ângulo entre os planos $\pi_1 : x+my+2z-7=0$ e $\pi_2 : 4x+5y+3z-2=0$.

Exercícios para Entregar

Exercício 1: Determinar o ângulo formado pela reta

$$r : \left\{ \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-4} = \frac{z+1}{5} \right.$$

forma com o plano

$$\pi : 2x - y + 7z - 1 = 0.$$

Exercício 2: Determine o ângulo entre os planos $\pi_1 : 2x + y - z + 3 = 0$ e $\pi_2 : x + y - 4 = 0$.