Prova 1C

Igor dos Reis Gomes　　　　RA: 231012471

1- a) $A = (a_{ij})_{3\times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, tal que $a_{ij} = \begin{cases} -i, & \text{se } i > j \\ 0, & \text{se } i \leq j \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} //$$

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, $\det A = 0 + (-2\cdot(-3)\cdot 0) + (-3\cdot 0\cdot 0) - (0\cdot 0\cdot(-3)) - (0\cdot(-3)\cdot 0) - (0\cdot 0\cdot(-2)) = 0 //$

Como $\det A = 0$, por propriedade, A não é inversível.

2- $S: \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - ky + z = -1 \\ kx - y - z = 1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x + y + z = 1 & \times(-k)\ \times(-1) \\ x - ky + z = -1 \\ kx - y - z = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -y - ky = -2 & \times(-1) \\ -ky - y - kz - z = -k + 1 \end{cases}$

$\sim \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -ky - y = -2 \\ -kz - z = -k + 3 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -y(k+1) = -2 \\ -z(k+1) = -k + 3 \end{cases} //$

· se $k = -1$, o sistema é impossível, pois a igualdade não existe $(0 = 2)$

· se $k \neq 1$, o sistema terá 3 equações e 3 incógnitas e portanto, o sistema será possível e determinado, possuindo uma única solução.

b) Para que o sistema seja possível e determinado, basta k ser diferente de 1, assim, assumindo que $k=0$:

$$S: \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -y(k+1) = -2 \\ -z(k+1) = -k+3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \quad (I) \\ -y(0+1) = -2 \rightarrow y = 2 \\ -z(0+1) = -0+3 \rightarrow z = -3 \end{cases}$$

substituindo y e z em I:

$x + 2 - 3 = 1 \rightarrow x = 1 + 3 - 2 \rightarrow x = 2$

Assim, $S = \{(2, 2, -3) \mid k = 0\}$

3- a combinação linear será: $B = aA_1 + bA_2 + cA_3$

Portanto, $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 \\ b & 2b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & c \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c & a+c \\ b+c & a+2b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 2 \quad \times(-1) \ \times(-1) \\ a + c = 5 \ + \\ b + c = -8 \\ a + 2b = 4 \ + \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} a+b+c = 2 \\ -b = 3 \\ b+c = -8 \\ b-c = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} a+b+c = 2 \rightarrow a-3-5=2 \rightarrow a=10 \\ -b = 3 \rightarrow b=-3 \\ c=-5 \\ -c = 5 \end{cases} c=-5$$

$$a = 10;\ b = -3;\ c = -5.$$

Assim, B como combinação linear de A_1, A_2 e A_3 é:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} = 10\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (-3)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + (-5)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} //$$

4- a) i) $U \cap V$:

p/ $U \cap V$ temos as seguintes condições:

$$\begin{cases} x+y=0 \rightarrow x=-y \\ z=0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

Portanto, $U \cap V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x=0, y=0 \text{ e } z=0\} \rightarrow U \cap V = \{(0,0,0)\}$

Além disso, $\{(0,0,0)\}$ é base de $U \cap V$ e $\dim U \cap V = 0$.

ii) $U+V$:

$$U+V = \{w \in \mathbb{R}^3 / w = u+v,\ u \in U \text{ e } v \in V\}$$
$$U+V = \{w = (x_1, -x_1, 0) + (x_2, 0, z_2) / x, y, z \in \mathbb{R}\}$$
$$U+V = \{w = (\underbrace{x_1+x_2}_{\in \mathbb{R}}, \underbrace{-x_1}_{\in \mathbb{R}}, \underbrace{z_2}_{\in \mathbb{R}}) / x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

$$U+W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x,y,z \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3$$

Scanned with CamScanner

$U+V = \{x(1,0,0)+y(0,1,0)+z(0,0,1) \,/\, x,y,z \in \mathbb{R}\}$

$U+V = [(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)]$

Logo, como os vetores já estão escalonados, $U+V = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é base de $U+V$ e dim $= 3$

b) Como $U \cap V$ é vetor nulo, ou seja, $\{(0,0,0)\}$, $U+W$ é soma direta. Os subespaços U e V são suplementares, pois a soma direta $(U \oplus V)$ é igual ao $\mathbb{R}^3$, que neste caso é o espaço maior.

5 - a) Para verificar se B é base de P_2, basta verificar se B é L.I e possui dimensão igual a dimensão de P_2, ou seja igual a 3.

Nota-se que dim $B = 3$, portanto basta verificar se B é LI.

$$a(3)+b(1-2x)+c(2-4x^2)=0$$

$$(3a+b+2c)+x(-2b)+x^2(-4c)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a+b+2c=0 \rightarrow 3a+0+2\cdot 0=0 \rightarrow a=0 \\ -2b=0 \rightarrow b=0 \\ -4c=0 \rightarrow c=0 \end{cases}$$

Portanto, B é LI. Assim, conclui-se que B também é base de $P_2(\mathbb{R})$.

b)

$$\text{I) } P_{A\to B} \begin{cases} 3 = a1+bx+cx^2 \quad (I) \\ 1-2x = d1+ex+fx^2 \quad (II) \\ 2-4x^2 = g1+hx+ix^2 \quad (III) \end{cases}$$

$$I \begin{cases} a = 3 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases} ; \quad II \begin{cases} d = 1 \\ e = -2 \\ f = 0 \end{cases} ; \quad III \begin{cases} g = 2 \\ h = 0 \\ i = -4 \end{cases}$$

$$P_{A\to B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}_{//}$$

$$II) \; P_{B\to A} = P_{A\to B}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$P_{A\to B}^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \div(-2) \\ \div(-4) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{array}\right) \begin{array}{l} \times(\frac{1}{3}) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ \times(-\frac{1}{3}) \\ \times(-\frac{2}{3}) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{array}\right)$$

$$\underbrace{}_{P_{A\to B}^{-1}}$$

$$P_{A\to B}^{-1} = P_{B\to A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}_{//}$$

c) $p(x)_A = P_{A\to B} \cdot p(x)_B$

$p(x)$ em relação a base A, que é canônica é:

$$p(x)_A = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sabendo $p(x)_A$ e $P_{A\to B}$, basta realizar a conta p/ determinar $p(x)_B$.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + y + 2z = 2 \quad (I) \\ -2y = -3 \rightarrow y = 3/2 \\ -4z = 1 \rightarrow z = -1/4 \end{cases}$$

$y = 3/2$ e $z = -1/4$ em I:

$$3x + 3/2 + 2(-1/4) = 2$$

$$3x = 2 - 3/2 + 1/2 \rightarrow 3x = 1 \rightarrow x = 1/3$$

Portanto, $p(x)_B = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 3/2 \\ -1/4 \end{pmatrix}$ //