Atividade 3 - Álgebra Linear

Igor dos Reis Gomes RA: 231012471

1- a) $V = \mathbb{R}^3$ e $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x \leq y \leq z\}$

i) $(0,0,0) \in U$ pois $x \leq y \leq z = 0 \leq 0 \leq 0$

ii) sejam $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$ em U

então: $x_1 \leq y_1 \leq z_1$ e $x_2 \leq y_2 \leq z_2$

logo, $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in U$ pois:

$x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2 \leq z_1 + z_2$

iii) Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u = (x, y, z) \in U$

então, $x \leq y \leq z$

logo, $\alpha u = (\alpha x, \alpha y, \alpha z) \notin U$ pois:

$(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = \alpha(x, y, z) = \alpha u$

Portanto, $\alpha u \notin U$ pois $\alpha u = \alpha(x, y, z)$ e assim, se $\alpha < 0$, $x \geq y \geq z$, não satisfazendo a condição de $x \leq y \leq z$

Logo $U \underset{se}{\not\subset} V$.

b) $V = M_2(\mathbb{R})$ e $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) / a+2b = c-d = 0 \right\}$

i) $0_2 \in U$ pois $0+2\cdot 0 = 0-0 = 0$.

ii) sejam $A_2 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ e $B_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ em U

então: $a_1 + 2b_1 = c_1 - d_1 = 0$ e $a_2 + 2b_2 = c_2 - d_2 = 0$

logo: $A+B = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{pmatrix} \in U$ pois:

$$(a_1+a_2) + 2(b_1+b_2) = (c_1+c_2) - (d_1+d_2) = 0.$$

iii) sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U$

por hipótese, $a+2b = c-d = 0$

logo, $\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix} \in U$ pois

$$\alpha a + 2\alpha b = \alpha c - \alpha d = 0 \overset{\text{Hip}}{=} \alpha(a+2b) = \alpha(c-d) = 0$$

Logo, $U \underset{se}{\subset} M_2(\mathbb{R})$.

2- a) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y\}$ e $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y = z\}$

i) $V \cap W$

$$\begin{cases} x = y \\ x = y = z \end{cases}$$

Logo, $(x, y, z) \in V \cap W$ se $x = y = z$

Assim, $V \cap W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y = z\} = W$

ii) $V + W$

$$V + W = \{ (\overbrace{x_1, x_1}^{x=y}, z_1) + (\overbrace{x_2, x_2, x_2}^{x=y=z}) / x, z \in \mathbb{R}\}$$

$$V + W = \{ (\underset{\in \mathbb{R}}{x_1 + x_2}, \underset{\in \mathbb{R}}{x_1 + x_2}, \underset{\in \mathbb{R}}{z_1 + x_2}) / x_1 + x_2, z_1 + x_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$V + W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y\} = V$$

b) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = -x - 3y\}$ e $W = \{(0, 0, z) / z \in \mathbb{R}\}$

i) $V \cap W$

$$\begin{cases} z = -x - 3y \rightarrow z = -0 - 3 \cdot 0 = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Portanto, $V \cap W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y = z = 0\} = \{0\}$

iii) V+W

$V+W = \{(x_1, y_1, z_1) + (0,0,z_2) \,/\, z_1 = -x-3y\}$

$V+W = \{(x_1, y_1, -x_1-3y_1) + (0,0,z_2) \,/\, x, y, z \in \mathbb{R}\}$

$V+W = \{(\underbrace{x_1}_{\mathbb{R}}, \underbrace{y_1}_{\mathbb{R}}, \underbrace{(-x_1-3y_1)+z_2}_{\mathbb{R}} \,/\, x, y, z \in \mathbb{R}\}$

$V+W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \mathbb{R}^3$

A soma direta é da alternativa b, visto que $V \cap W = \{0\}$, fazendo V+W ser soma direta. Os únicos espaços suplementares são V e W da alternativa b, pois $V \oplus W = \mathbb{R}^3$.

3- $u = (1,-3,2)$ e $v = (2,4,-1) \in \mathbb{R}^3$

$K = ?$, $w = (-1, K, -7)$

$$(-1, K, -7) = a_1(1,-3,2) + a_2(2,4,-1) \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 2a_2 = -1 & \times 3 \quad \times(-2) \\ -3a_1 + 4a_2 = K \\ 2a_1 - a_2 = -7 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} a_1 + 2a_2 = -1 \\ 10a_2 = K-3 \\ -5a_2 = -5 \end{cases} \sim \begin{cases} a_1 + 2a_2 = -1 \\ -5a_2 = -5 & \times 2 \\ 10a_2 = K-3 \end{cases} \sim \begin{cases} a_1 + 2a_2 = -1 \\ -5a_2 = -5 \\ 0 = K-13 \end{cases}$$

$\hookrightarrow K = 13$

Portanto, K deve ser igual a 13 para que w seja combinação linear de u e v.

Scanned with CamScanner