Cálculo III - Atividade 5

Nome: Igor dos Reis Gomes RA: 241025265

1- a)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2+2x}{y^2-2x} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \text{em } P(0,0)$$

• $(0,0)$ tal que $(x,y) \neq (0,0)$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{y^2+2x}{y^2-2x}$$

• caminho $y=0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x}{-2x} = \lim_{x\to 0} -1 = -1$$

• caminho $x=0$:

$$\lim_{y\to 0} \frac{y^2}{y^2} = \lim_{y\to 0} 1 = 1$$

Portanto, $\nexists \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$ no ponto $(0,0)$. Logo a função não é contínua.

b)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2\sqrt{y}}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \text{em } P(0,0)$$

• $(0,0)$ tal que $(x,y) \neq (0,0)$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2\sqrt{y}}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2\sqrt{y(x^2+y^2)}}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\cancel{x^2}(\sqrt{y(x^2+y^2)})}{\cancel{x^2}(1+y^2/x^2)}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sqrt{y(x^2+y^2)}}{1+y^2/x^2} = \frac{0}{1} = 0$$

• $f(x,y)$ no ponto $(0,0) \rightarrow f(0,0) = 1$

• como $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2\sqrt{y}}{\sqrt{x^2+y^2}} \neq f(0,0)$, a função não é contínua.

2- Qual o valor de a para que a função seja contínua no ponto $(0,0)$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{\sqrt{y^2+1}-1} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ a-4 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

• Para que a função seja contínua, $f(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$

- no ponto $(0,0)$ tal que $(x,y) \neq (0,0)$ temos:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y^2}{\sqrt{y^2+1}-1} \cdot \frac{\sqrt{y^2+1}+1}{\sqrt{y^2+1}+1} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y^2(\sqrt{y^2+1}+1)}{y^2+1-1} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2\cancel{y^2}(\sqrt{y^2+1}+1)}{\cancel{y^2}}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x^2(\sqrt{y^2+1}+1) = 0^2(\sqrt{0^2+1}+1) = 0 \,//$$

• função no ponto $(0,0)$: $a-4$. Para que a função seja contínua, a função deve ser igual a zero. Logo:

$$a-4=0 \rightarrow a=4 \,//$$