CT-234

Estruturas de Dados, Análise de Algoritmos e Complexidade Estrutural

Carlos Alberto Alonso Sanches

CT-234

2) Algoritmos recursivos

Indução matemática, recursão, recorrências

Indução matemática

- Uma proposição P(X) pode ser provada por *indução matemática* (ou *indução finita*) do seguinte modo:
  - Base: Comprovamos que P é verdadeira para os casos básicos (X=0 ou X=1, por exemplo).
  - Hipótese indutiva: Supomos que P seja verdadeira para o caso genérico X=N.
  - Passo indutivo: Demonstramos que P também é verdadeira para o caso X=N+1.
- Ideia: como a proposição vale para o caso inicial e o passo é correto, então essa proposição também será válida para todos os casos subsequentes.

Uma imagem

- *Proposição*: numa sequência de peças de dominó que estejam em pé, suficientemente próximas entre si, se a primeira caiu então todas caíram.
- Prova por indução:
  - Base: A primeira peça caiu (por definição).
  - Hipótese indutiva: Supomos que a n-ésima tenha caído.
  - Passo indutivo: Como a n-ésima peça caiu e ela está suficientemente perto da seguinte, então a (n+1)-ésima peça também terá caído.

Um exemplo

- Demonstre que, para todos os números naturais positivos x e n, x^n-1 é divisível por x-1.
- Prova por indução (em n):
  - Base: Para n=1, x^1-1 é divisível por x-1.
  - Hipótese indutiva: Para um valor qualquer n>1, supomos que x^n-1 seja divisível por x-1, para todo x>0 natural.
  - Passo indutivo:
    - Sabemos que $x^{n+1}-1 = x^{n+1}-x+x-1 = x(x^n-1) + (x-1)$.
    - Pela hipótese de indução, a primeira parcela é divisível por x-1.
    - Como sabemos que a segunda também é, o passo está provado.

Exercícios

- Demonstre por indução matemática:
  - $n^3 + 2n$ é divisível por 3, para $n \geq 0$.
  - $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$, para $n \geq 0$.
  - $2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \ldots + 2^{-n} < 1$, para $n > 0$.
  - $n^2 < 2^n$, para $n > 4$.
  - A representação binária de um número $n>0$ tem $\lfloor \lg n \rfloor + 1$ *bits*. *Dica:* considere separadamente os casos em que n é ou não uma potência de 2.

Definições recursivas ou indutivas

- Em uma *definição recursiva*, uma classe de objetos relacionados é definida em termos desses próprios objetos.
- Uma definição recursiva envolve:
  - Uma base, onde um ou mais objetos elementares são definidos.
  - Um passo indutivo, onde objetos subsequentes são definidos em termos de objetos já conhecidos.

Um exemplo

- Definição recursiva dos números naturais:
  - Base: o número 0 está em **N**.
  - Passo indutivo: se n está em **N**, então n + 1 também está.

- O conjunto dos números naturais é o menor conjunto que satisfaz as condições acima.

Outro exemplo

- As expressões numéricas são comumente definidas de forma recursiva:
  - Base: Todos os operandos atômicos (números, variáveis, etc.) são expressões numéricas.
  - Passo indutivo: Se E1 e E2 são expressões numéricas então (E1 + E2), (E1 – E2), (E1 • E2), (E1 / E2) e (-E1) também são.

Algoritmos recursivos

- *Recursão* (ou *recursividade*) é um método de programação no qual um procedimento (função, método, etc.) pode chamar a si mesmo.

- Algoritmos recursivos possuem uma clara analogia com o método indutivo:
  - Base: Uma entrada elementar, que pode ser resolvida diretamente.
  - Parte indutiva: Chamadas a si mesmo, mas com entradas mais simples.

- A ideia é aproveitar a solução de um ou mais subproblemas para resolver todo o problema.

Um exemplo clássico

- Algoritmo recursivo para o cálculo de fatorial:

$$0! = 1! = 1$$

$$n! = n.(n-1)!$$

```
int fat(int n) {
   if (n==0 || n==1) return 1;
   return n*fat(n-1);
}
```

- Execução de `fat(4)`:

```
call ↓
  fat(4)
  call ↓
    fat(3)
    call ↓
      fat(2)
      call ↓
        fat(1)
```

```
return 24 ↑
  fat(4)
return 6 ↑
  fat(3)
return 2 ↑
  fat(2)
return 1 ↑
```

Análise da complexidade de tempo

- Seja $T(n)$ o tempo de pior caso de **`fat(n)`**:
  - Base: $T(0) = T(1) = a$
  - Parte indutiva: $T(n) = T(n-1) + b, n>1$
- Cálculos:
  - $T(2) = T(1) + b = a + b$
  - $T(3) = T(2) + b = a + 2b$
  - $T(4) = T(3) + b = a + 3b$
  - Generalizando: $T(n) = a + (n-1)b$
  - Portanto: $T(n) = \Theta(n)$

Mecanismo da recursão

- Durante a execução de um programa, quando um procedimento é chamado, é preciso guardar o contexto atual de processamento (valores de parâmetros e variáveis locais, endereço de retorno, etc.) para que depois seja possível recomeçar de onde se parou.
- Deseja-se que o último procedimento interrompido seja o primeiro a recomeçar a sua execução. Por isso, o sistema operacional utiliza uma *pilha de execução*, alocada na memória.
- Portanto, os algoritmos recursivos poderiam ser escritos de uma forma iterativa: basta utilizar uma pilha explícita, que simule o gerenciamento realizado pelo sistema operacional.

Um algoritmo iterativo equivalente

- Costuma-se calcular o fatorial de um número natural n da seguinte maneira:

```
int fat(int n) {
   int f = 1;
   while (n > 0)
      f *= n--;
   return f;
}
```

- É fácil constatar que o tempo de pior caso desse algoritmo iterativo é também $\Theta(n)$, ou seja, tem a mesma complexidade que a sua versão recursiva.
- No entanto, é mais rápido... Por quê?
- E com relação às complexidades de espaço?

Exercício

- O programa recursivo abaixo calcula a soma dos números naturais entre 1 e n, onde n>0:

```
int sum(int n) {
    if (n == 1) return 1;
    return n + sum(n-1);
}
```

- Simule a sua execução para a entrada n = 5, mostrando a pilha de chamadas.

Outro exemplo clássico

- Algoritmo recursivo para encontrar o n-ésimo número de Fibonacci:

$$F_0 = F_1 = 1$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

```
int Fib(int n) {
  if (n==0 || n==1) return 1;
  return Fib(n-1) + Fib(n-2);
}
```

- Equivalente iterativo:

```
int Fib(int n) {
    if (n==0 || n==1) return 1;
    int f1=1, f2=1, f3;
    for (int i=2; i<=n; i++) {
        f3 = f1 + f2;
        f1 = f2;
        f2 = f3;
    }
    return f3;
}
```

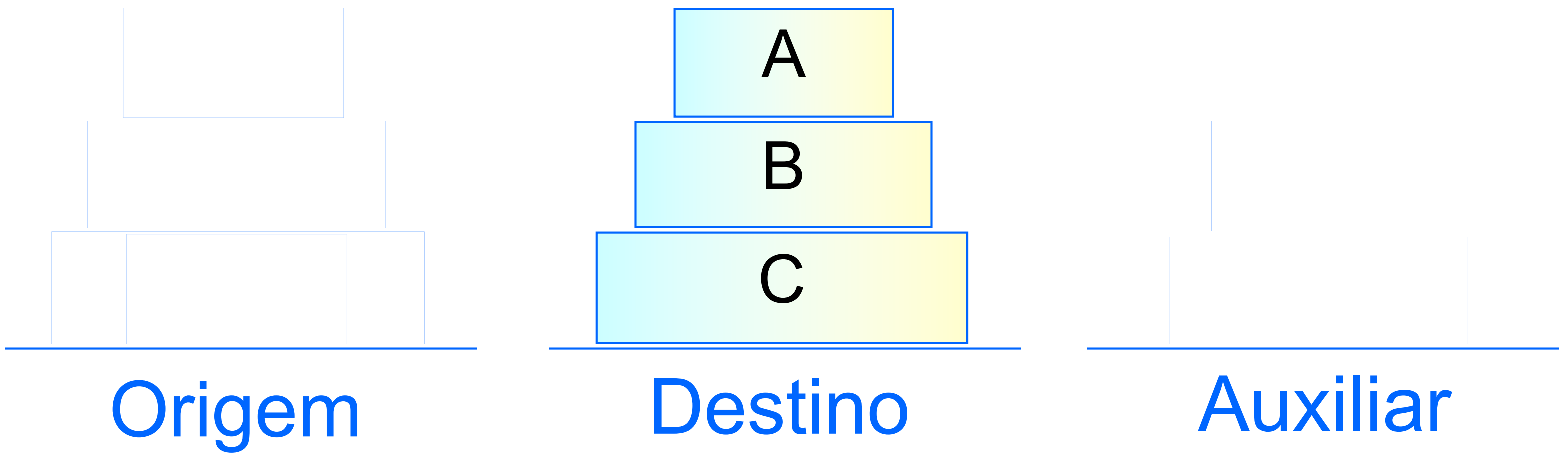
Será que têm a mesma complexidade de tempo?

Análise da complexidade de tempo

- É fácil constatar que o algoritmo iterativo gasta tempo $\Theta(n)$.
- Seja $T(n)$ o tempo de pior caso do algoritmo recursivo:
  - Base: $T(1) = a$
  - Parte indutiva: $T(n) = T(n-1) + T(n-2) + b$, $n>1$
- Como $T(n-1) > T(n-2)$, sabemos que $T(n) > 2T(n-2)$
- Repetindo:
  - $T(n) > 2T(n-2) > 2(2T(n-2-2)) = 4T(n-4)$
  - $T(n) > 4T(n-4) > 4(2T(n-4-2)) = 8T(n-6)$
  - Generalizando: $T(n) > 2^iT(n-2i)$, para $i>0$
  - Consideremos o caso $n-2i=1$, ou seja, $i=(n-1)/2$:
    - $T(n) > 2^{(n-1)/2}T(1)$
    - $T(n) = \Omega(2^{n/2})$

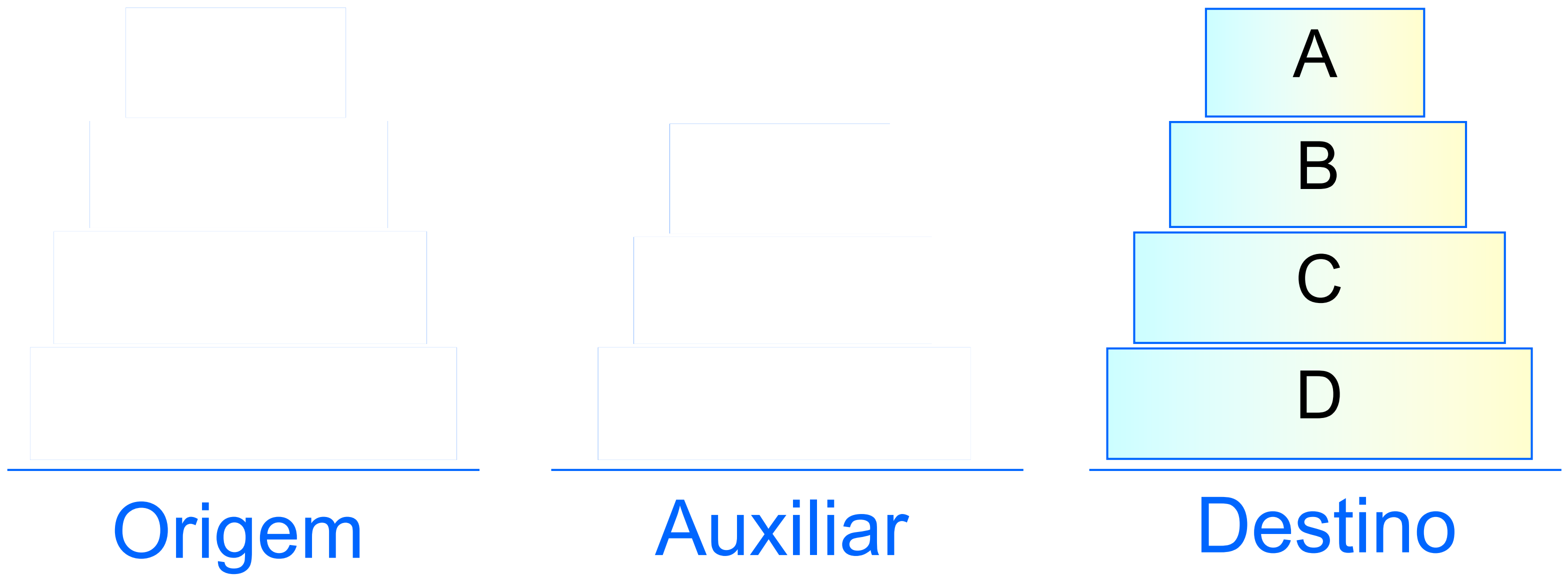
Torres de Hanoi

- É um exemplo clássico da aplicabilidade da recursão.
- Deseja-se mover n discos, um de cada vez, de uma torre de origem para outra de destino, usando uma terceira auxiliar, sem nunca colocar um disco maior sobre outro menor.
- Exemplo para 3 discos:



Torres de Hanoi

- E se, ao invés de 3 discos, fossem 4?
- Vamos usar o que já sabemos fazer, ou seja, mover 3 discos seguindo as regras do jogo.
- Em seguida, o restante fica fácil...



Solução recursiva

- Mova os n-1 discos de cima de *Origem* para *Auxiliar* (recursivamente)
- Mova o maior disco de *Origem* para *Destino*
- Mova os n-1 discos de *Auxiliar* para *Destino* (recursivamente)

Solução

- Mover n discos da torre *org* para a torre *dest*, utilizando *aux* como auxiliar:

```
void hanoi(int n, org, dest, aux) {
  if (n==1)
       print("Mova de ", org, "para ", dest);
  else {
       hanoi(n-1, org, aux, dest);
       print("Mova de ", org, "para ", dest);
       hanoi(n-1, aux, dest, org);
  }
}
```

- Complexidade de tempo:
  - $T(1) = a$
  - $T(n) = 2T(n-1) + a, n>1$

Complexidade de tempo

- Desenvolvendo $T(n) = 2T(n-1) + a$:
  - $T(n) = 2(2T(n-2) + a) + a = 2^2T(n-2) + 2^1a + a$
  - $T(n) = 2^3T(n-3) + 2^2a + 2^1a + a$
  - $T(n) = 2^4T(n-4) + 2^3a + 2^2a + 2^1a + a$
- Generalizando: $T(n) = 2^iT(n-i) + 2^{i-1}a + \ldots + 2^0a$, $i>0$
- Para $n-i=1$, ou seja, $i=n-1$:
  - $T(n) = 2^{n-1}a + 2^{n-2}a + \ldots + 2^0a$
  - $T(n) = (2^n-1)a = \Theta(2^n)$

Vantagens *versus* desvantagens

- A recursão deve ser utilizada com critério: não há regras gerais.
- Usualmente, é menos eficiente que o seu equivalente iterativo (devido ao *overhead* da pilha de execução), mas essa diferença nem sempre é decisiva.
  - Em determinados compiladores, há implementações otimizadas para chamadas recursivas no final do código da função (*tail recursion*). Neste caso, é possível evitar o crescimento da pilha de execução.
- A sua transformação em uma versão iterativa nem sempre é trivial.
- Muitas vezes, é vantajosa em clareza, legibilidade e simplicidade de código.

Exercícios

- Resolva com algoritmos recursivos:
  - Imprimir os n primeiros números naturais em ordem crescente.
  - Idem, mas em ordem decrescente.
  - Encontrar o valor máximo presente em um vetor.
  - Verificar se um determinado valor está ou não presente em um vetor.
  - Calcular a soma dos valores armazenados em um vetor.
  - Inverter a ordem dos valores armazenados em um vetor.

Outros exercícios

- Dado um número natural, imprimir recursivamente a sua representação binária.
- (*Busca binária*) Dado um vetor ordenado de tamanho n, verificar se um determinado elemento está ou não presente.
- (*Gray code*) Gerar recursivamente todas as representações de n *bits*, de tal modo que, entre duas sucessivas, haja um único *bit* distinto.
- Torres de Saigon: idem a Hanoi, mas com 2 torres auxiliares.
- Pesquisar *análise sintática recursiva.*

Recorrências

- Recorrência é uma equação ou desigualdade que descreve uma função em termos de si mesma, mas com entradas menores.
- Como a complexidade de tempo de um algoritmo recursivo é expressa através de uma recorrência, é preciso determiná-la efetivamente.
- "Resolvemos" uma recorrência quando conseguimos eliminar as referências a si mesma.
- Melhores técnicas: uso de árvore de recorrência, iterações e substituição de variáveis.

Exemplo 1

$T(1) = 1$

$T(n) = T(n-1) + 3n + 2$, $n>1$

$$\begin{tikzcd}
T(n) \arrow[r] \arrow[dr] & 3n + 2 & 3n + 2 & 3n + 2 & & 3n + 2 \\
& T(n-1) \arrow[r] \arrow[dr] & 3(n-1) + 2 & 3(n-1) + 2 & & 3(n-1) + 2 \\
& & T(n-2) \arrow[r] \arrow[dr] & 3(n-2) + 2 & \dots & 3(n-2) + 2 \\
& & & T(n-3) & & 3(n-3) + 2 \\
& & & & & \dots \\
& & & & {} \arrow[r] \arrow[dr] & 3.2 + 2 \\
& & & & & T(1)
\end{tikzcd}$$

- $T(n) = (3n+2) + (3(n-1)+2) + (3(n-2)+2) + \dots + (3.2 + 2) + T(1)$
- $T(n) = 3(n + n-1 + n-2 + \dots + 2) + 2(n-1) + 1$
- $T(n) = 3(n+2)(n-1)/2 + 2n - 1$
- $T(n) = 3n^2/2 + 7n/2 - 4$

Exemplo 2.a

$G(1) = 1$

$G(n) = 2G(n/2) + 7n + 2$, onde $n=2,4,\dots,2^i,\dots$

Com $n = 2^k$:

$7n + 2$ → $7n + 2$

$7n/2 + 2 \quad 7n/2 + 2$ → $7n + 4$

$7n/4 + 2 \quad 7n/4 + 2 \quad 7n/4 + 2 \quad 7n/4 + 2$ → $7n + 8$

...

$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$ → $7n + 2^k$

...

$G(1) \quad G(1) \quad \dots \quad \dots \quad G(1) \quad G(1)$ → $2^k G(1)$

Exemplo 2.a (continuação)

- $G(n) = (7n+2) + (7n+4) + \ldots + (7n+2^k) + 2^k$, onde $k = \lg n$
- $G(n) = 7nk + (2+4+\ldots+2^k) + 2^k$
- $G(n) = 7n.\lg n + (2^{k+1} - 2) + 2^k$
- $G(n) = 7n.\lg n + 3n - 2$

Exemplo 2.b

- Novamente, $G(1) = 1$ e $G(n) = 2G(n/2) + 7n + 2$
- Por indução, pode-se demonstrar que $G(n) \leq 9n.\lg n$ para $n = 2,4,\ldots,2^i$:
  - Base: Para $n=2$, $G(2) = 2G(1) + 7.2 + 2 = 2 + 14 + 2 = 18$. Portanto, $G(2) \leq 9.2.\lg 2$.
  - Passo indutivo:
    - $G(n) = 2G(n/2) + 7n + 2$
    - $G(n) \leq 2.9(n/2).\lg (n/2) + 7n + 2$ (h.i. vale porque $2 \leq n/2 < n$)
    - $G(n) \leq 9n(\lg n - 1) + 7n + 2$
    - $G(n) \leq 9n.\lg n - 2n + 2$
    - $G(n) < 9n.\lg n$, pois $n > 2$.

Exemplo 2.c

- Caso se deseje apenas a ordem, basta considerar $G(1) = 1$ e $G(n) = 2G(n/2) + \Theta(n)$ e iterar substituições:
  - $G(n) = 2(2G(n/4) + \Theta(n/2)) + \Theta(n) = 4G(n/4) + 2\Theta(n)$
  - $G(n) = 4(2G(n/8) + \Theta(n/4)) + 2\Theta(n) = 8G(n/8) + 3\Theta(n)$
  - Generalizando: $G(n) = 2^k G(n/2^k) + k\Theta(n)$
    - Para $n = 2^k$, ou seja, $k = \lg n$:
    - $G(n) = nG(1) + \lg n.\ \Theta(n)$
    - $G(n) = \Theta(n.\log n)$

Exemplo 3

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = 2T(\lfloor n^{1/2} \rfloor) + \lg n,\ n>1$$

- Vamos considerar apenas o caso em que n é potência de 2
- Troca de variáveis: $n = 2^m$, ou seja, $m = \lg n$
- $T(2^m) = 2T(2^{m/2}) + m$
- Seja $S(m) = T(2^m)$
- $S(m) = 2S(m/2) + m$
- Pelo exemplo 2, sabemos que $S(m) = \Theta(m.\log m)$ quando $m = 2^k$
- Portanto, $T(n) = T(2^m) = S(m) = \Theta(m.\log m) = \Theta(\log n.(\log \log n))$

Exercícios

- Resolva as recorrências:
  - $T(1) = 1$ e $T(n) = T(n-1) + 1, n>1$.
  - $T(1) = 1$ e $T(n) = T(n-1) + n, n>1$.
  - $T(0) = 0$, $T(1) = 1$ e $T(n) = T(n-2) + 2n + 1, n>1$.
  - $T(1) = 1$ e $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + n, n>1$.
  - $T(1) = 1$ e $T(n) = T(\lfloor n/3 \rfloor) + T(\lfloor n/4 \rfloor) + kn, n>1$.