CT-234

Estruturas de Dados, Análise de Algoritmos e Complexidade Estrutural

Carlos Alberto Alonso Sanches

CT-234

5) Ordenação

Resoluções simples, *Lower bound*, *MergeSort*, *RadixSort*

Alguns algoritmos de ordenação

- A ordenação é o problema mais clássico da computação.
- Inicialmente, veremos algumas das suas resoluções mais simples:
  - Ordenação pelo <u>método da bolha</u> (*BubbleSort*)
  - Ordenação por <u>seleção</u> (*SelectionSort*)
  - Ordenação por <u>inserção</u> (*InsertionSort*)
- Consideraremos sempre a ordenação de um vetor v de índices [1..n].

Método da bolha (*BubbleSort*)

- É um dos algoritmos mais simples e conhecidos.
- Princípio:
  - Os elementos vizinhos são comparados e, caso estejam fora de ordem, são trocados.
  - A propagação dessas comparações permite isolar o maior (ou o menor) elemento do vetor.
  - Repetindo-se esse processo com as demais posições do vetor, é possível ordená-lo completamente.
  - Este método recebe o nome de bolha, pois os elementos 'sobem' até a sua posição final, de modo semelhante a uma bolha em um tubo com água.

Exemplo para n=8

No esquema abaixo, a bolha "desce"
(como se o tubo estivesse de ponta-cabeça)

1	44	44	12	12	12	12	6	6
2	55	12	42	42	18	6	12	12
3	12	42	44	18	6	18	18	18
4	42	55	18	6	42	42	42	42
5	94	18	6	44	44	44	44	44
6	18	6	55	55	55	55	55	55
7	6	67	67	67	67	67	67	67
8	67	94	94	94	94	94	94	94

Algoritmo

```
BubbleSort(){
     for (i=1; i<n; i++)
          for (j=1; j<=n-i; j++)
               if (v[j] > v[j+1]) {
                     x = v[j];
                     v[j] = v[j+1];
                     v[j+1] = x;
               }
}
```

- É lento, pois só faz comparações entre posições adjacentes.
- Pode ser melhorado com testes intermediários para verificar se o vetor já está ordenado.
- Mesmo assim, o tempo de pior caso é $\Theta(n^2)$.

Ordenação por seleção (*SelectionSort*)

- Procedimento:
  - Selecione o menor elemento do vetor e troque-o com o que está na posição 1.
  - Desconsiderando a primeira posição do vetor, repita essa operação com as restantes.

Exemplo com n=6

Vetor inicial:

1	2	3	4	5	6
5	6	2	3	4	1
1	6	2	3	4	**5**
1	**2**	**6**	3	4	5
1	2	**3**	**6**	4	5
1	2	3	**4**	**6**	5
1	2	3	4	**5**	**6**

Algoritmo

```
SelectionSort() {
    for (i=1; i<n; i++) {
         min = i;
         for (j=i+1; j<=n; j++)
              if (v[j] < v[min])
                   min = j;
         x = v[min];
         v[min] = v[i];
         v[i] = x;
}
```

Sempre gasta tempo $\Theta(n^2)$

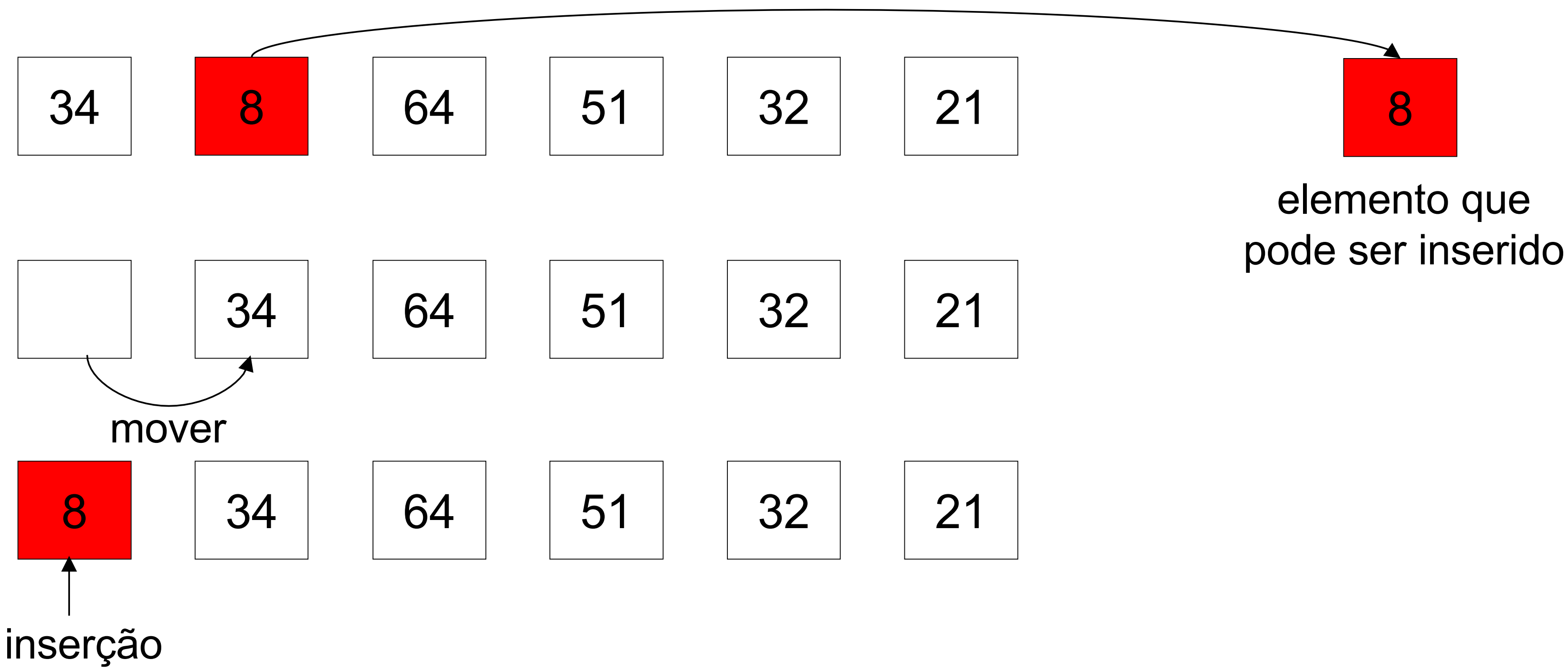
Ordenação por inserção (*InsertionSort*)

- Semelhante ao método de ordenação das cartas de um baralho.
- Procedimento:
  - Verifica-se se o valor da posição 2 do vetor poderia ser colocado na posição 1.
  - Repete-se este processo para as posições subsequentes, verificando-se o local adequado da inserção.
- A inserção de um elemento na sua nova posição exige a movimentação de vários outros.

Exemplo com n=6

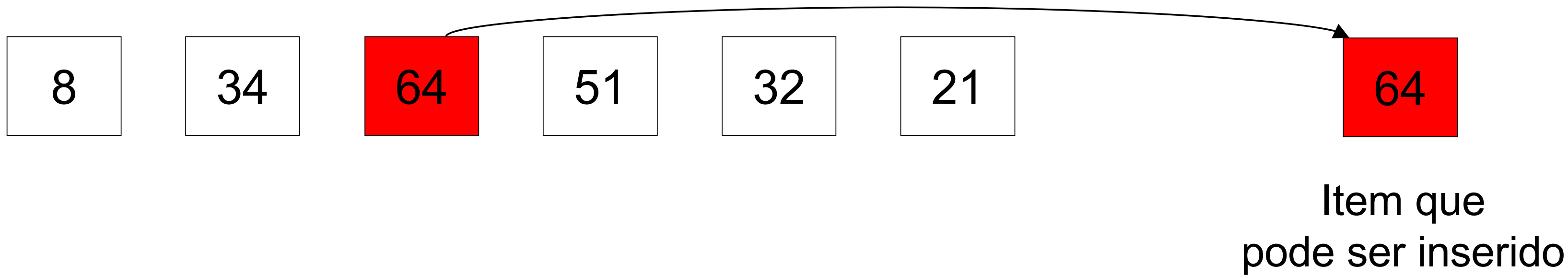
34	8	64	51	32	21

Passo 1



Exemplo com n=6

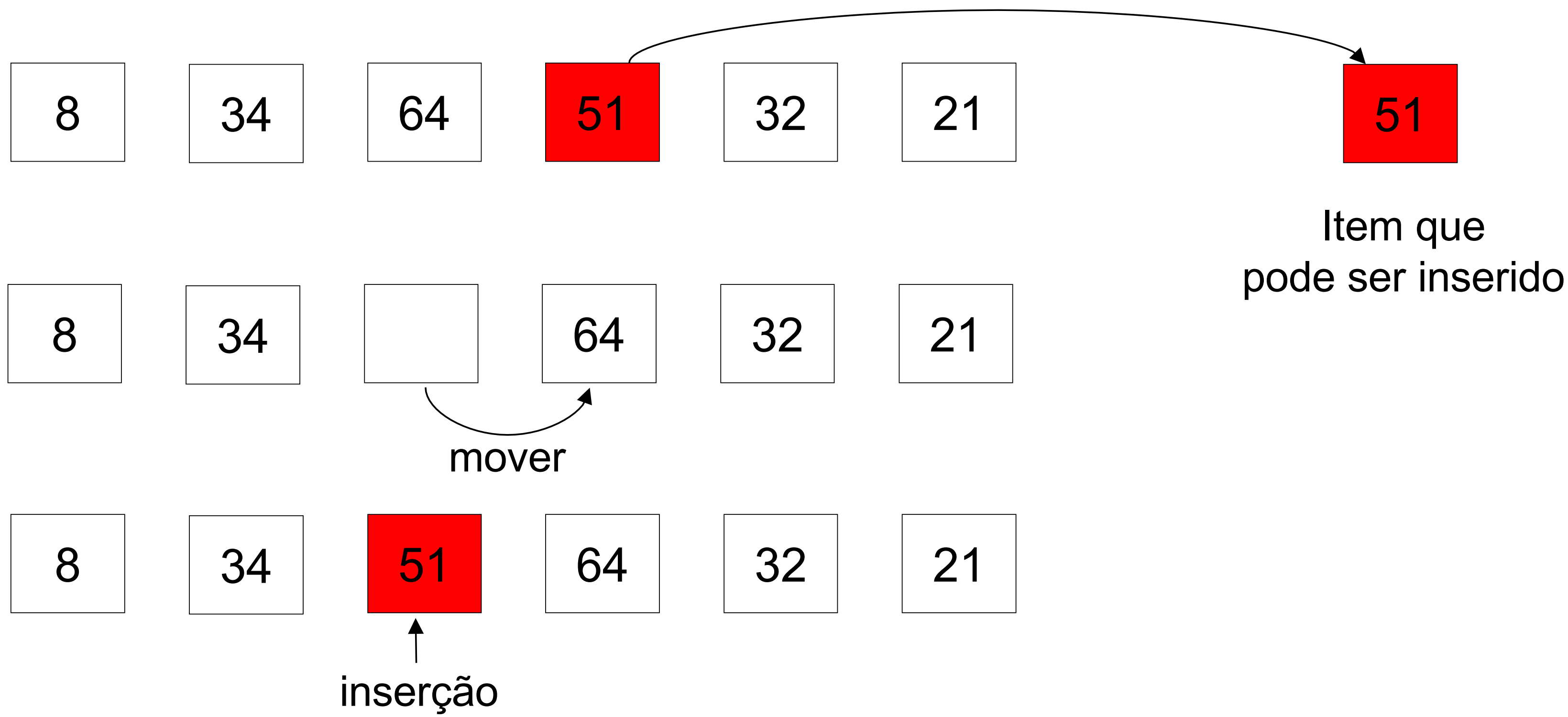
Passo 2



Não ocorre inserção, pois esse elemento já está no seu lugar

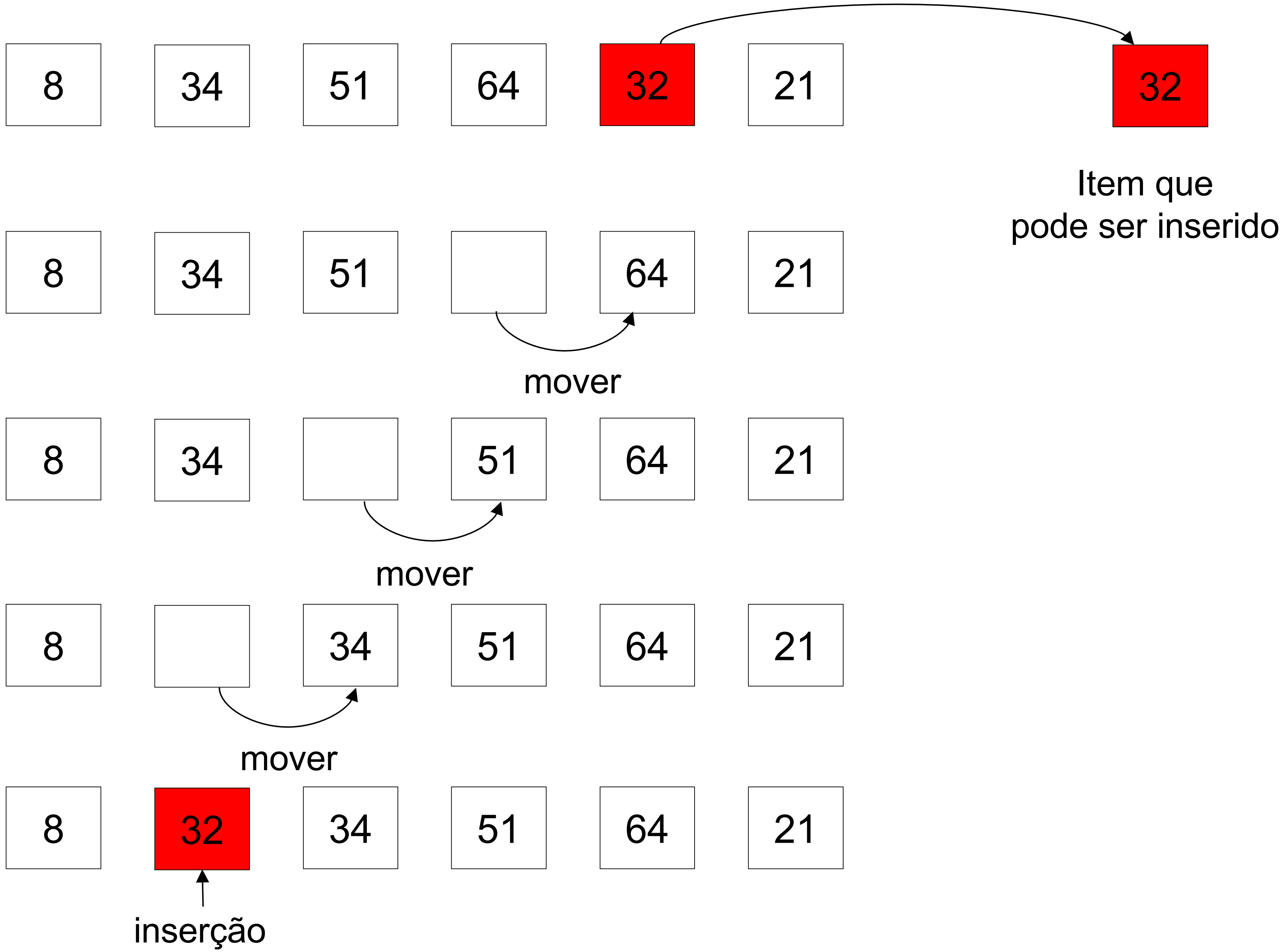
Exemplo com n=6

Passo 3



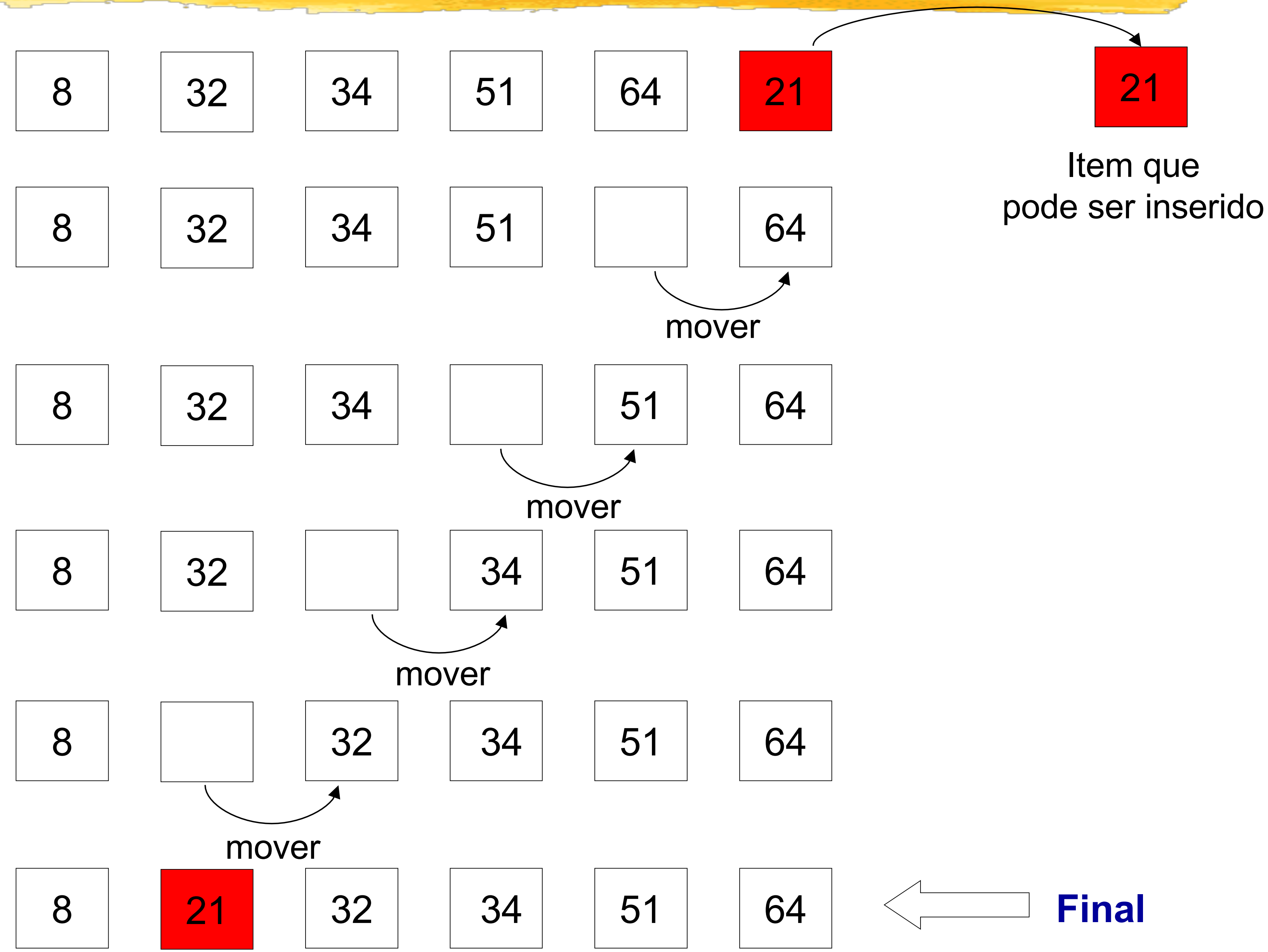
Exemplo com n=6

Passo 4



Exemplo com n=6

Passo 5



Algoritmo

```
InsertionSort() {
    for (i=2; i<=n; i++) {
        x = v[i];
        for (j=i; j>1 && x<v[j-1]; j--)
            v[j] = v[j-1];
        v[j] = x;
    }
}
```

- Quando o vetor está ordenado, gasta tempo $\Theta(n)$.
- No entanto, seu tempo de pior caso é $\Theta(n^2)$.

Lower bound para a ordenação

- Até agora, apresentamos algoritmos que ordenam n números em tempo de pior caso $\Theta(n^2)$. Por enquanto, esse é o nosso *upper bound* para o problema da ordenação baseado em comparações.

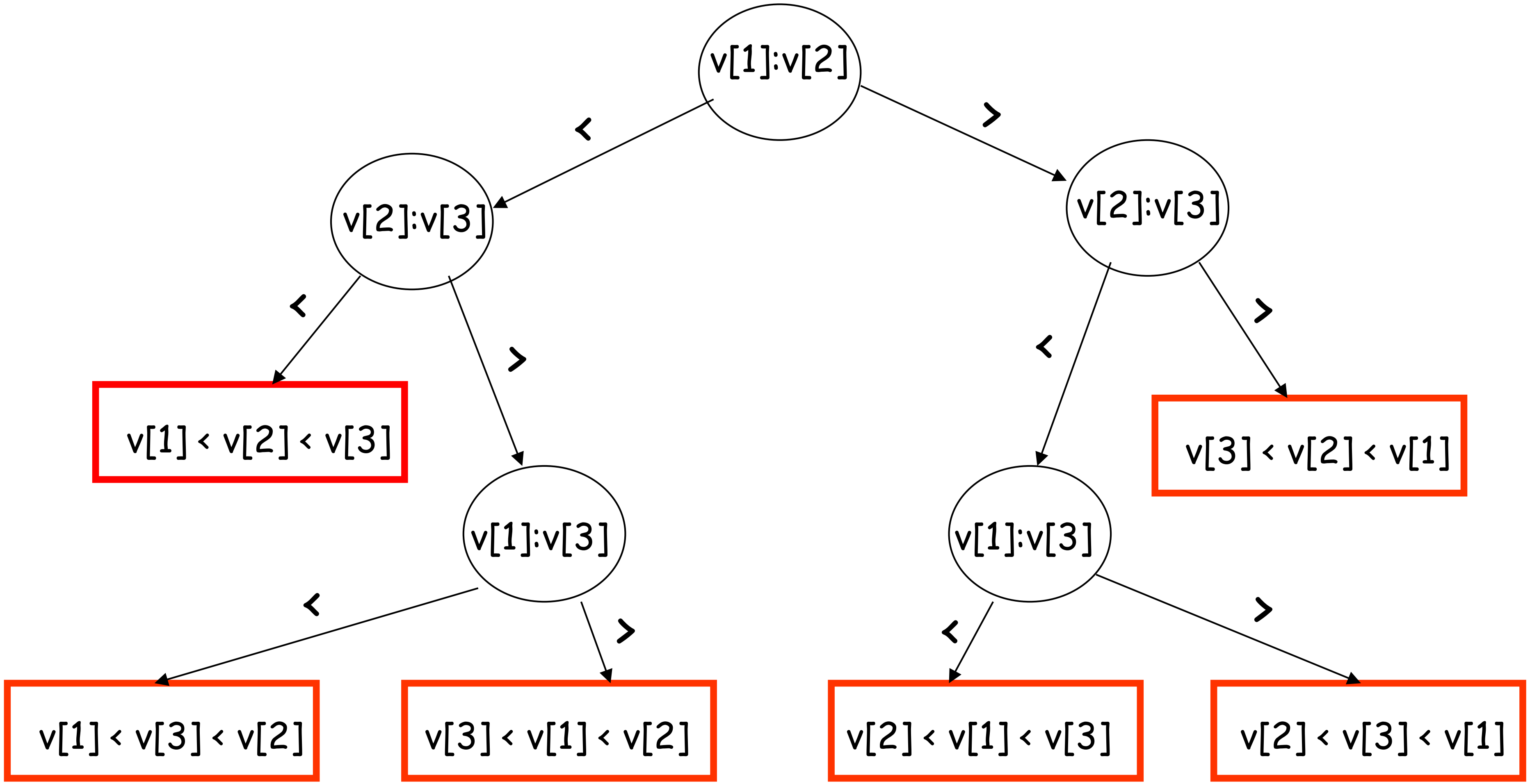
- Seria possível calcular um *lower bound* para esse problema?

- Em outras palavras, desejamos encontrar um <u>limite inferior teórico</u> para esse problema, isto é, a <u>mínima complexidade de tempo</u> de <u>quaisquer</u> de suas resoluções algorítmicas.

Árvore de comparações

- Qualquer algoritmo de ordenação *baseado em comparações* pode ser representado em uma árvore binária.
- Na raiz fica a primeira comparação realizada entre dois elementos do vetor; nos filhos, as comparações subsequentes. Deste modo, as folhas representam as possíveis soluções do problema.
- A altura dessa árvore é o número máximo de comparações que o algoritmo realiza, ou seja, o seu tempo de pior caso.

Exemplo: com 3 valores distintos



Como estamos ordenando 3 elementos, há 3! possíveis resultados

Generalização

- Na ordenação de n elementos distintos, há n! possíveis resultados, que correspondem às permutações desses elementos.
- Portanto, qualquer árvore binária de comparações terá *no mínimo* n! folhas.
- A árvore mínima de comparações tem exatamente n! folhas. Supondo que a altura dessa árvore seja h, então LB(n) = h, onde LB(n) é o *lower bound* de tempo para a ordenação de n elementos.
- Sabemos que o número máximo de folhas de uma árvore binária de altura h é 2^h.
- Portanto, $n! \le 2^h$, ou seja, $h \ge \lg n!$
  Logo, $LB(n) \ge \lg n!$

Cálculo do *lower bound*

- Pela aproximação de Stirling: $n! \approx (2\pi n)^{1/2} n^n e^{-n}$
- Portanto:
  - $\lg n! \approx \lg (2\pi)^{1/2} + \lg n^{1/2} + \lg n^n + \lg e^{-n}$
  - $\lg n! \approx \Theta(1) + \Theta(\log n) + \Theta(n.\log n) - \Theta(n)$
- Como $LB(n) \geq \lg n!$, então $LB(n) = \Omega(n.\log n)$
- Se encontrarmos um algoritmo baseado em comparações que resolva a ordenação em tempo de pior caso $\Theta(n.\log n)$, ele será ótimo em termos de complexidade de tempo, e este problema estará computacionalmente resolvido.

Outra maneira de calcular

- $\lg n! = \lg (n.(n-1).(n-2). \ldots .2.1)$
- $\lg n! = \lg n + \lg (n-1) + \lg (n-2) + \ldots + \lg 2 + \lg 1$
- $\lg n! \geq \lg n + \lg (n-1) + \ldots + \lg (n/2)$
- Todas essas $n/2$ parcelas são maiores que $\lg (n/2)$
- Portanto:
  - $\lg n! \geq (n/2).\lg (n/2)$
  - $\lg n! = \Omega(n.\log n)$
  - $LB(n) = \Omega(n.\log n)$
- Qual o problema desta demonstração?

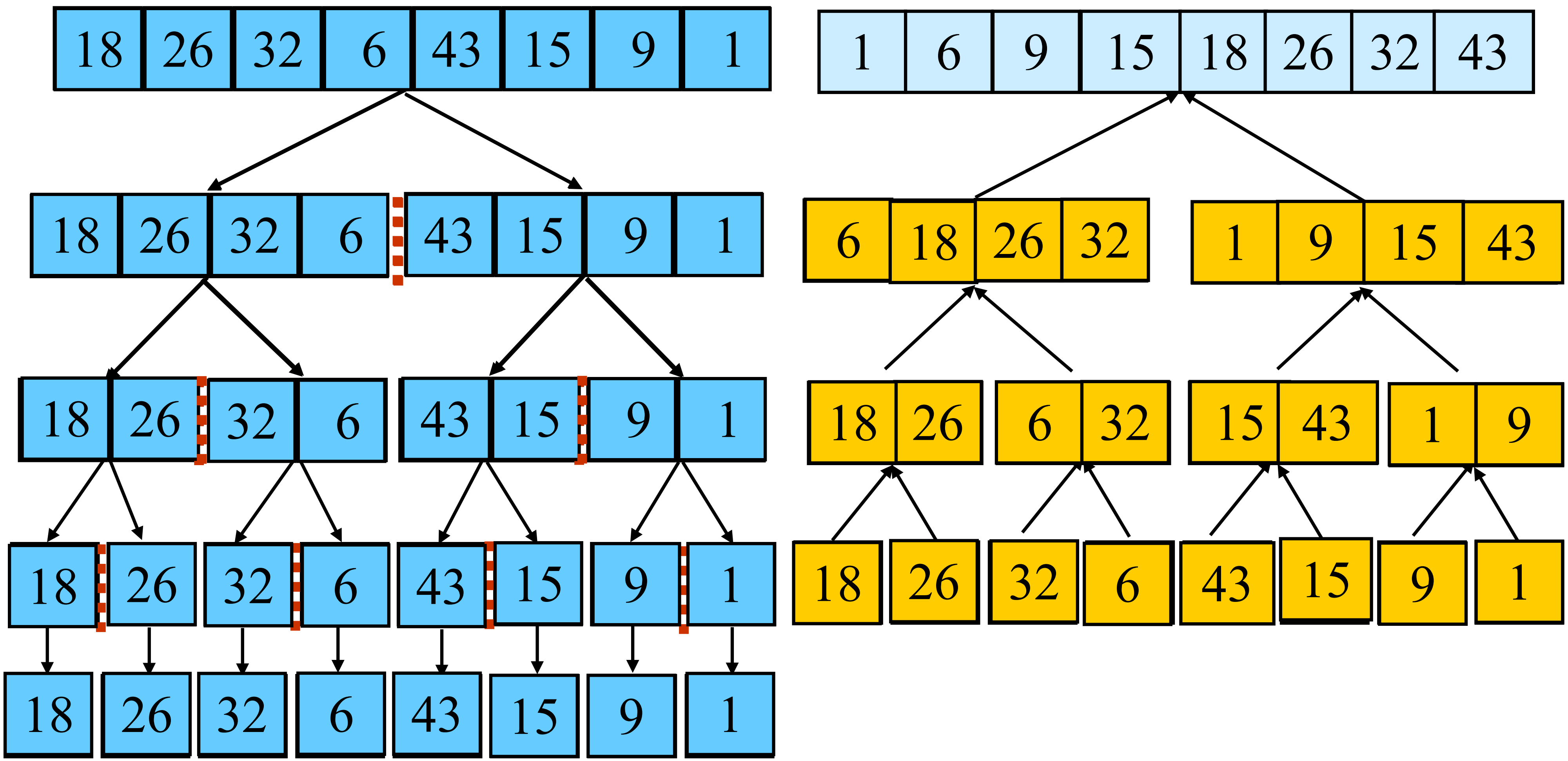
MergeSort (Von Neumann, 1945)

- Este algoritmo é um exemplo do paradigma *Divisão-e-Conquista*, e por isso tem 3 fases:
  - <u>Divisão</u>: o vetor é dividido em duas metades
  - <u>Conquista</u>: cada metade é ordenada recursivamente, dando origem a duas subsoluções
  - <u>Combinação</u>: essas subsoluções são combinadas, formando a solução final
- Condição de parada da recursão: quando for ordenar apenas um elemento. Este caso será a subsolução elementar.

Exemplo para n=8

Vetor original

Vetor ordenado



Algoritmo

```
MergeSort(i, f) {
  if (i < f) {
    m = ⌊(i+f)/2⌋;
    MergeSort(i, m);
    MergeSort(m+1, f);
    merge(i, m, f);
  }
}
```

Convém que o vetor **aux** tenha mesmo tamanho de **v** e seja alocado como global

```
merge(i, m, f) {
    i1 = i;
    i2 = i;
    i3 = m+1;
    while (i2 <= m && i3 <= f)
        if (v[i2] < v[i3])
            aux[i1++] = v[i2++];
        else
            aux[i1++] = v[i3++];
    while (i2 <= m)
        aux[i1++] = v[i2++];
    while (i3 <= f)
        aux[i1++] = v[i3++];
    for (j=i; j<=f; j++)
        v[j] = aux[j];
}
```

Chamada inicial:

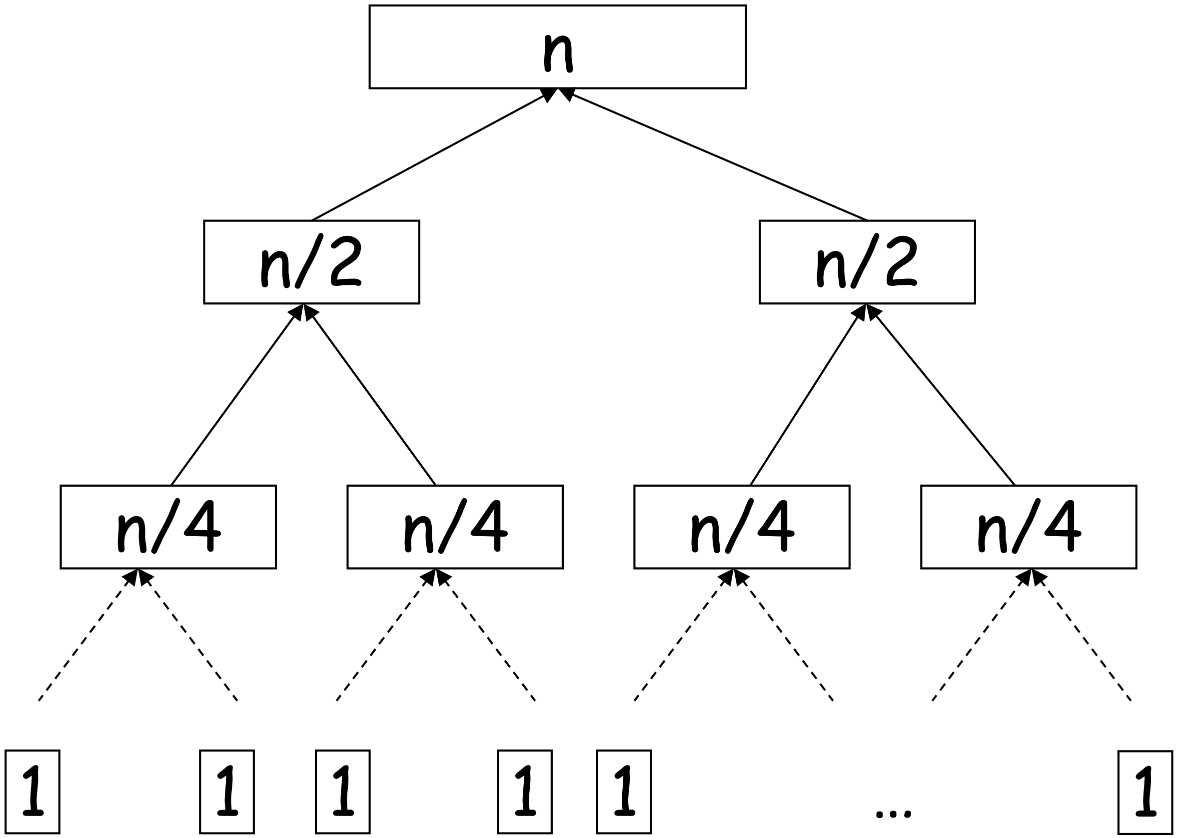
```
MergeSort(1, n)
```

Complexidade de tempo de `merge`: $\Theta($`f-i`$)$

Complexidade de tempo do *MergeSort*

- $T(1) = 1$ (tempo constante)
- $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n), n>1$
- Supondo $n = 2^k$:
  - $T(n) = 2(2T(n/2^2) + \Theta(n/2)) + \Theta(n) = 2^2T(n/2^2) + 2\Theta(n)$
  - $T(n) = 2^2(2T(n/2^3) + \Theta(n/2^2)) + 2\Theta(n) = 2^3T(n/2^3) + 3\Theta(n)$
  - Generalizando: $T(n) = 2^kT(n/2^k) + k\Theta(n)$
- Substituindo $n = 2^k$:
  - $T(n) = n + \Theta(n).\lg n$
  - $T(n) = \Theta(n.\log n)$
- A generalização para n qualquer não muda a ordem de $T(n)$

Outro modo de calcular o tempo



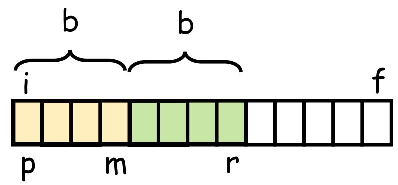
$$n$$
$$+$$
$$2.(n/2) = n$$
$$+$$
$$4.(n/4) = n$$
$$+$$
$$n.(1) = n$$

$$n.(1 + \lg n)$$

Tempo total: $\Theta(n.\log n)$

MergeSort iterativo

- É possível escrever uma variante do *MergeSort* não recursiva e sem pilha, cuja execução é mais rápida.




```
MergeSort(i, f) {
  b = 1;                          // b: tamanho de cada bloco
  while (b < f) {
      p = i;                      // p: posição inicial do 1° bloco
      while (p+b <= f) {
          r = min{f, p-1+2*b};    // r: posição final do 2° bloco
          m = p+b-1;              // m: posição final do 1° bloco
          merge(p, m, r);
          p += 2*b;
      }
      b *= 2;                     // tamanho dos blocos é duplicado
  }
}
```

- É uma simulação da versão recursiva, com menor uso da pilha de execução.
- No entanto, as complexidades de tempo e de espaço não são alteradas.

Conclusões

- Qualquer algoritmo que ordenar n números através de comparações em tempo de pior caso $\Theta(n.\log n)$ será ótimo em termos de complexidade de tempo.
- *MergeSort* faz isso: portanto, o *upper bound* de tempo para a ordenação através de comparações é $\Theta(n.\log n)$.
- Como o *upper* e o *lower bounds* de tempo da ordenação são iguais, podemos dizer que a ordenação através de comparações é um problema computacionalmente resolvido.
- No entanto, o *MergeSort* necessita de espaço extra $\Theta(n)$ para armazenar o vetor temporário (convém que seja alocado uma única vez pelo programa principal). Veremos que ele não é ótimo em termos de complexidade de espaço extra.

RadixSort

- Em determinadas condições, é possível ordenar em tempo de pior caso $\Theta(n)$.
- Por exemplo, isso ocorre quando:
  1) os valores têm um comprimento limitado;
  2) a ordenação baseia-se em cálculos com esses valores (e não em comparações).
- Como funciona o *RadixSort* :
  - Os valores de entrada, escritos em alguma base numérica, têm exatamente d dígitos.
  - A ordenação é realizada em d passos: um dígito por vez, começando a partir dos menos significativos.

Exemplo com d=3

Passo 1a: Separá-los de acordo com o dígito mais à direita

aba bac caa acb bab cca aac bba

3 filas, pois a base é 3

a	b	c
bba		
cca		
caa	bab	aac
aba	acb	bac

Passo 1b: Uni-los seguindo a ordem das filas

aba caa cca bba acb bab bac aac

Exemplo com d=3

Passo 2a: Separá-los de acordo com o segundo dígito

a b a	c a a	c c a	b b a	a c b	b a b	b a c	a a c

a	b	c
a a c		
b a c		
b a b	b b a	a c b
c a a	a b a	c c a

Passo 2b: Uni-los seguindo a ordem das filas

c a a	b a b	b a c	a a c	a b a	b b a	c c a	a c b

Exemplo com d=3

Passo 3a: Separá-los de acordo com o terceiro dígito

caa bab bac aac aba bba cca acb

a	b	c
acb	bba	
aba	bac	cca
aac	bab	caa

Passo 3b: Uni-los seguindo a ordem das filas

aac aba acb bab bac bba caa cca

Algoritmo

```
         RadixSort() {
              Queue q[0..base-1];
d iterações → for (i=0, factor=1; i<d; factor *= base, i++) {
                   for (j=1; j<=n; j++)                                 } Θ(n)
                        q[(v[j]/factor)%base].enqueue(v[j]);
                   for (j=0, k=1; j<base; j++)                   }
                        while (!q[j].isEmpty())                  } Θ(n+base)
                             v[k++] = q[j].dequeue();            }
              }
         }
```

- Tempo: $\Theta(d.(n+base)) = \Theta(n)$, pois d e base são constantes.
- Por que não é usado na prática?
  1) A constante d costuma ser grande.
  2) *Overhead* da manipulação das estruturas de dados.