

# Разложение чисел на множители

---

Игорь Старшинов

7 ноября, 2025, Москва, Россия

Российский Университет Дружбы Народов

# Цели и задачи

---

## Цель лабораторной работы

Изучение задачи разложения на множители, изучение  $p$ -алгоритма Поллрада.

# **Выполнение лабораторной работы**

---

# Задача разложения на простые множители

Разложение на множители — предмет непрерывного исследования в прошлом; и такие же исследования, вероятно, продолжатся в будущем. Разложение на множители играет очень важную роль в безопасности некоторых криптосистем с открытым ключом.

## р-алгоритм Поллрада

- Вход. Число  $n$ , начальное значение  $c$ , функция  $f$ , обладающая сжимающими свойствами.
  - Выход. Нетривиальный делитель числа  $n$ .
1. Положить  $a = c, b = c$
  2. Вычислить  $a = f(a)(\bmod n), b = f(b)(\bmod n)$
  3. Найти  $d = GCD(a - b, n)$
  4. Если  $1 < d < n$ , то положить  $p = d$  и результат:  $p$ . При  $d = n$  результат: ДЕЛИТЕЛЬ НЕ НАЙДЕН. При  $d = 1$  вернуться на шаг 2.

Сложность. Заметим, что этот метод требует сделать  $B-1$  операций возведения в степень  $a = a^e \bmod n$ . Есть быстрый алгоритм возведения в степень, который выполняет это за  $2 * \log_2 B$  операций. Метод также использует вычисления НОД, который требует  $n^3$  операций. Мы можем сказать, что сложность — так или иначе больше, чем  $O(B)$  или  $O(2^n)$ , где  $n_b$  — число битов в  $B$ . Другая проблема — этот алгоритм может заканчиваться сигналом об ошибке. Вероятность успеха очень мала, если  $B$  имеет значение, не очень близкое к величине  $\sqrt{n}$ .

# Пример работы алгоритма

```
In [1]: 1 from math import gcd
        2
        3 def f(x, n):
        4     return (x*x+5)%n
        5
        6 def fu(n, a, b, d):
        7     a = f(a, n)
        8     b = f(f(b, n), n)
        9     d = gcd(a-b, n)
       10     if 1<d<n:
       11         print(d)
       12         exit()
       13     if d == n:
       14         print("not found")
       15     if d == 1:
       16         fu(n, a, b, d)
       17
       18 def main():
       19     n = 1359331
       20     c = 1
       21     a = f(c, n)
       22     b = f(a, n)
       23     d = gcd(a-b, n)
       24     if 1< d < n:
       25         print(d)
       26         exit()
       27     if d == n:
       28         pass
       29     if d == 1:
       30         fu(n, a, b, d)
```

```
In [2]: 1 main()
```



## **Выводы**

---

Изучили задачу разложения на множители и р-алгоритм Поллрада.