

А. Г. Мерзляк  
В. Б. Полонський  
М. С. Якір

# ГЕОМЕТРІЯ

ДЛЯ ЗАГАЛЬНООСВІТНІХ НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДІВ  
З ПОГЛИБЛЕНИМ ВИВЧЕННЯМ МАТЕМАТИКИ

підручник для 8 класу  
загальноосвітніх навчальних закладів

Рекомендовано  
Міністерством освіти і науки України

Харків  
«Гімназія»  
2016

УДК 373.167.1:512

ББК 22.14я721

М52

*Рекомендовано*

*Міністерством освіти і науки України  
(наказ МОН України від 10.05.2016 № 491)*

**Видано за рахунок державних коштів.**

**Продаж заборонено**

*Експерти, які здійснили експертизу даного підручника під час проведення конкурсного відбору проектів підручників для учнів 8 класу загальноосвітніх навчальних закладів і зробили висновок про доцільність надання підручнику ерифа «Рекомендовано Міністерством освіти і науки України»:*

*С. В. Шегера, методист Кременецького районного методичного кабінету Тернопільської області, старший учитель*

*С. В. Приходько, учитель Запорізького багатопрофільного ліцею № 99, учитель-методист*

**Мерзляк А. Г.**

**М52** Геометрія для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2016. — 224 с. : іл.

ISBN 978-966-474-276-1.

УДК 373.167.1:512

ББК 22.14я721

© А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський,  
М. С. Якір, 2016

© ТОВ ТО «Гімназія», оригінал-макет,  
художнє оформлення, 2016

ISBN 978-966-474-276-1

## ВІД АВТОРІВ

### Любі восьмикласники!

Ви зробили серйозний життєвий крок: вирішили продовжити освіту в класі з поглибленим вивченням математики. Ми вітаємо вас із цим вибором і сподіваємося, що ви не розчаруєтесь у своєму рішенні.

Навчатися в математичному класі не просто. Треба бути наполегливим і завзятим, уважним і акуратним, і найголовніше — не бути байдужим до математики, а любити цю красиву науку.

У цьому навчальному році ви продовжуватиме вивчати геометрію. Сподіваємося, що ви встигли полюбити цю важливу науку, а отже, з інтересом будете опановувати нові знання. Ми маємо надію, що цьому сприятиме підручник, який ви тримаєте в руках. Ознайомтесь, будь ласка, з його структурою.

Підручник поділено на шість параграфів, кожний з яких складається з пунктів. У пунктах викладено теоретичний матеріал. Вивчаючи його, особливу увагу звертайте на текст, який надруковано **жирним шрифтом**, **жирним курсивом** і **курсивом**; так у книзі виділено означення, правила та найважливіші математичні твердження.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один із можливих зразків оформлення розв'язання.

До кожного пункту дібрано задачі для самостійного розв'язування, приступати до яких радимо лише після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю вправи, так і складні задачі (особливо ті, що позначено «зірочкою» (\*)).

Дерзайте! Бажаємо успіху!

### Шановні колеги!

Ми знаємо, що підготовка до уроку в класі з поглибленим вивченням математики — робота нелегка. Організація такого навчального процесу вимагає великих зусиль учителя, який формує навчальний матеріал по крихтам, збираючи його в багатьох посібниках. Ми сподіваємося, що цей підручник стане надійним помічником у вашій нелегкій та шляхетній праці, і будемо щиро раді, якщо він вам сподобається.

У книзі дібрано великий і різноманітний дидактичний матеріал. Проте за один навчальний рік усі задачі розв'язати неможливо, та в цьому й немає потреби. Разом з тим набагато зручніше працювати, коли є значний запас задач. Це дає можливість реалізувати принципи рівневої диференціації та індивідуального підходу в навчанні.

Звертаємо увагу на таке: до чинної програми з геометрії для 7 класу не включені вивчення теми «Задачі на побудову». Проте дидактичний матеріал цього підручника містить певну кількість задач, якими передбачено, що учні мають елементарні навички розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля та лінійки. Такий підхід пов'язаний з тим, що, на думку авторів (і ми впевнені, що колеги з нами погодяться), неможливо уявити собі учня математичного класу, який не має ніякого уявлення про задачі на побудову. Тема «Задачі на побудову» як матеріал, необов'язковий для вивчення, подана у всіх без винятку підручниках геометрії для 7 класу, які використовують у цей час у загальноосвітніх навчальних закладах. Ми рекомендуюмо колегам знайти можливість для вивчення цієї теми за рахунок резерву навчальних годин.

У підручнику зеленим кольором позначено номери задач, що рекомендуються для домашньої роботи, синім кольором — номери задач, які на розсуд учителя (з урахуванням індивідуальних особливостей учнів класу) можна розв'язувати усно.

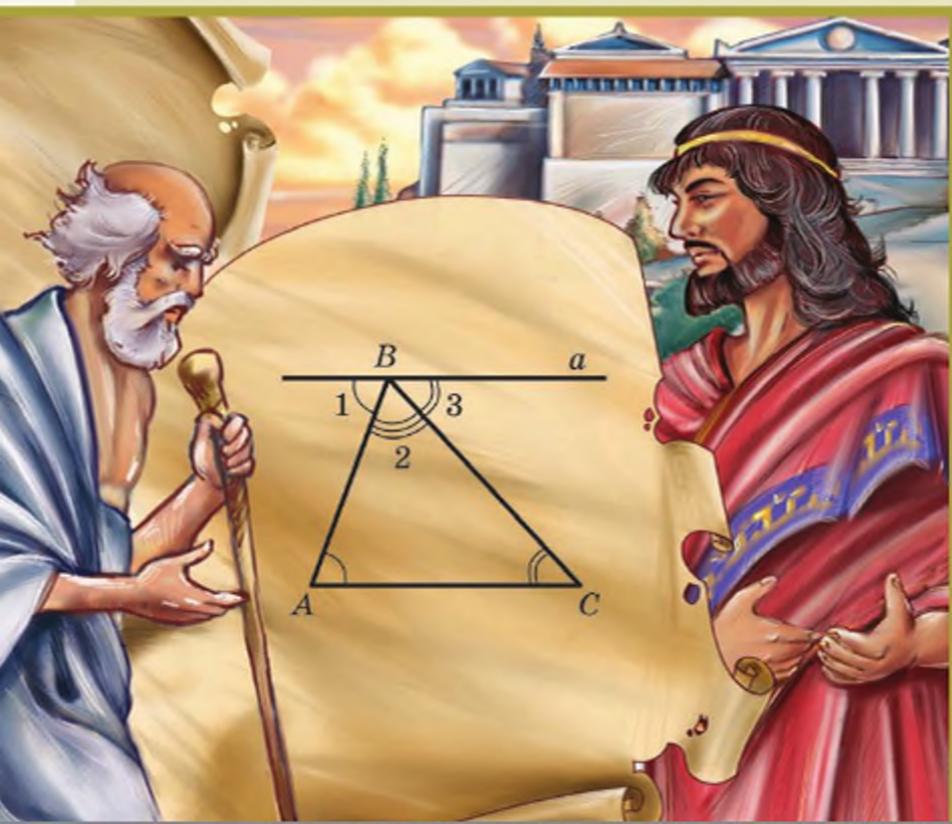
Бажаємо творчого натхнення та терпіння.

## УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

- n°* завдання, що відповідають початковому та середньому рівням навчальних досягнень;
- n•* завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;
- n\*\** завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;
- n\** задачі для математичних гуртків і факультативів;
-  ключові задачі, результат яких може бути використаний під час розв'язування інших задач;
- n (m)* задача, яка пропонується в різних пунктах для розв'язування різними способами (номер *m* вказує місцезнаходження цієї задачі в іншому пункті);
-  закінчення доведення теореми, розв'язання задачі;
-  рубрика «Коли зроблено уроки».

ПОВТОРЕННЯ ТА СИСТЕМАТИЗАЦІЯ  
НАВЧАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ  
З КУРСУ ГЕОМЕТРІЇ 7 КЛАСУ

§1





## 1. Ознаки рівності трикутників

Поновіть у пам'яті зміст пунктів 7–11 на с. 194–196.



### ВПРАВИ

- 1.1. На рисунку 1.1  $AB = KE$ ,  $BC = KM$ ,  $AM = EC$ . Доведіть, що  $\angle AMK = \angle BCE$ .
- 1.2. На медіані  $BM$  трикутника  $ABC$  позначили точку  $O$  так, що  $\angle OAC = \angle OCA$ . Доведіть, що трикутник  $ABC$  рівнобедрений.
- 1.3. На рисунку 1.2  $AB = BC$ ,  $AM = KC$ ,  $\angle AKE = \angle FMC$ . Доведіть, що трикутник  $FBE$  рівнобедрений.
- 1.4. У рівнобедреному трикутнику  $ABC$  з основою  $AC$  проведено бісектриси  $AD$  і  $CE$ . Доведіть, що  $AE = CD$ .
- 1.5. Відрізки  $AB$  і  $CD$  лежать на одній прямій і мають спільну середину. Точку  $M$  вибрано так, що трикутник  $AMB$  рівнобедрений з основою  $AB$ . Доведіть, що трикутник  $CMD$  також є рівнобедреним з основою  $CD$ .
- 1.6. Рівнобедрені трикутники  $ABC$  і  $ADC$  мають спільну основу  $AC$ . Доведіть, що пряма  $BD$  — серединний перпендикуляр відрізка  $AC$ .
- 1.7. На сторонах  $AC$  і  $BC$  трикутника  $ABC$  позначені точки  $F$  і  $K$  відповідно. Доведіть, що коли трикутники  $AFB$  і  $AKB$  рівні з відповідними сторонами  $BF$  і  $AK$ , то трикутник  $ABC$  рівнобедрений.
- 1.8. Серединний перпендикуляр сторони  $BC$  трикутника  $ABC$  перетинає його сторону  $AB$  у точці  $D$ . Знайдіть довжину відрізка  $AD$ , якщо  $CD = 4$  см,  $AB = 7$  см.

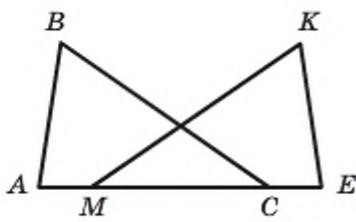


Рис. 1.1

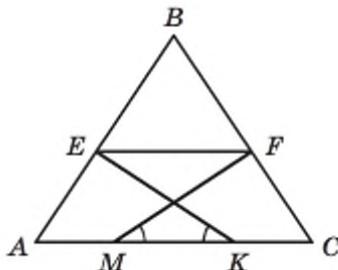


Рис. 1.2

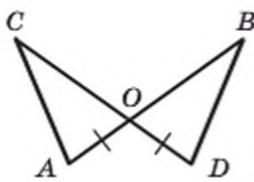


Рис. 1.3

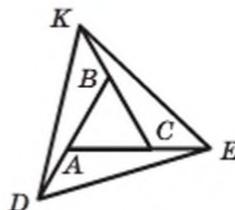


Рис. 1.4

- 1.9.** На рисунку 1.3  $OA = OD$ . Доповніть умову задачі однією вимогою так, щоб можна було стверджувати, що трикутники  $AOC$  і  $BOD$  рівні:
- 1) за першою ознакою рівності трикутників;
  - 2) за другою ознакою рівності трикутників.
- 1.10.** Відрізки  $AB$  і  $CD$  перетинаються в точці  $O$  та діляться цією точкою навпіл. На відрізку  $AC$  позначено точку  $M$ , а на відрізку  $BD$  — точку  $K$  так, що  $AM = BK$ . Доведіть, що: 1)  $OM = OK$ ; 2) точки  $M$ ,  $O$  і  $K$  лежать на одній прямій.
- 1.11.** На продовженнях сторін  $AB$ ,  $BC$ ,  $AC$  рівностороннього трикутника  $ABC$  за точки  $A$ ,  $B$  і  $C$  відповідно відкладали рівні відрізки  $AD$ ,  $BK$  і  $CE$  (рис. 1.4). Доведіть, що трикутник  $DEK$  рівносторонній.
- 1.12.** Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 20 см, а його медіана розбиває даний трикутник на два трикутники так, що периметр одного з них на 6 см менший від периметра другого. Знайдіть бічну сторону даного трикутника.
- 1.13.** Висоти  $AM$  і  $CK$  трикутника  $ABC$  перетинаються в точці  $H$ ,  $HK = HM$ . Доведіть, що трикутник  $ABC$  рівнобедрений.
- 1.14.** Чи можна стверджувати, що коли дві сторони та висота, проведена до третьої сторони, одного трикутника відповідно дорівнюють двом сторонам та висоті, проведенні до третьої сторони, другого трикутника, то ці трикутники рівні?
- 1.15.** У трикутнику  $ABC$  відомо, що  $AB = 3$  см,  $BC = 4$  см,  $AC = 6$  см. На стороні  $BC$  позначено точку  $M$  так, що  $CM = 1$  см. Пряма, яка проходить через точку  $M$  перпендикулярно до бісектриси кута  $ACB$ , перетинає сторону  $AC$  у точці  $K$ , а пряма, яка проходить через точку  $K$  перпендикулярно до бісектриси кута  $BAC$ , перетинає пряму  $AB$  у точці  $D$ . Знайдіть відрізок  $BD$ .
- 1.16.** Медіана  $AM$  трикутника  $ABC$  перпендикулярна до його бісектриси  $BK$ . Знайдіть сторону  $AB$ , якщо  $BC = 16$  см.



- 1.17.** У трикутнику одна з медіан перпендикулярна до однієї з бісектрис. Доведіть, що одна зі сторін трикутника вдвічі більша за другу.
- 1.18.** Довжини сторін трикутника, виражені в сантиметрах, дорівнюють трьом послідовним натуральним числам. Знайдіть сторони цього трикутника, якщо одна з його медіан перпендикулярна до однієї з його бісектрис.
- 1.19.** У «зірки»  $ACEBD$  (рис. 1.5) рівні кути при вершинах  $A$  і  $B$ , кути при вершинах  $E$  і  $C$ , а також рівні відрізки  $AC$  і  $BE$ . Доведіть, що  $AD = BD$ .

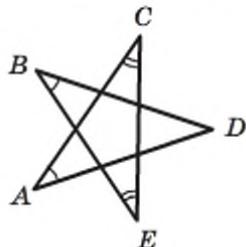


Рис. 1.5

## 2. Паралельні прямі. Сума кутів трикутника

Поновіть у пам'яті зміст пунктів 12–17 на с. 196–198.



### ВПРАВИ

- 2.1.** Відрізки  $AB$  і  $CD$  перетинаються в точці  $O$  та діляться цією точкою навпіл. Доведіть, що  $AC \parallel BD$ .
- 2.2.** Через вершину  $C$  трикутника  $ABC$  проведено пряму, яка паралельна бісектрисі  $AM$  трикутника та перетинає пряму  $AB$  у точці  $K$ . Знайдіть кути трикутника  $AKC$ , якщо  $\angle BAC = 70^\circ$ .
- 2.3.** Медіана  $CM$  трикутника  $ABC$  дорівнює половині сторони  $AB$ . Доведіть, що трикутник  $ABC$  прямокутний.
- 2.4.** У трикутнику  $ABC$  бісектриси кутів  $A$  і  $C$  перетинаються в точці  $O$ . Доведіть, що  $\angle AOC = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle ABC$ .
- 2.5.** Доведіть, що бісектриса зовнішнього кута при вершині рівнобедреного трикутника паралельна його основі.
- 2.6.** У трикутнику  $ABC$  відомо, що  $\angle A = \alpha$ , бісектриси зовнішніх кутів при вершинах  $B$  і  $C$  перетинаються в точці  $O$ . Знайдіть кут  $BOC$ .
- 2.7.** У рівнобедреному трикутнику  $ABC$  з основою  $BC$  проведено висоту  $BM$  завдовжки 7,5 см,  $\angle MBC = 15^\circ$ . Знайдіть бічну сторону трикутника.



- 2.8.** Висоти  $AM$  і  $CK$  трикутника  $ABC$  перетинаються в точці  $H$ . Доведіть, що  $\angle AHC = 180^\circ - \angle ABC$ .
- 2.9.** У трикутнику  $ABC$  кут  $ACB$  прямий,  $CH$  — висота даного трикутника,  $CD$  — бісектриса трикутника  $BCH$ . Доведіть, що  $AC = AD$ .
- 2.10.** На рисунку 2.1  $AB \parallel DE$ . Доведіть, що  $\angle BCD = \angle ABC + \angle CDE$ .
- 2.11.** Через точку  $O$  перетину бісектрис  $AE$  і  $CF$  трикутника  $ABC$  провели пряму, паралельну прямій  $AC$ . Ця пряма перетинає сторону  $AB$  у точці  $M$ , а сторону  $BC$  — у точці  $K$ . Доведіть, що  $MK = AM + CK$ .
- 2.12.** На гіпотенузі  $AB$  прямокутного трикутника  $ABC$  позначили точки  $D$  і  $E$  так, що  $AC = AE$  і  $BC = BD$ . Знайдіть кут  $DCE$ .
- 2.13.** На сторонах  $AC$  і  $BC$  трикутника  $ABC$  відповідно позначили точки  $M$  і  $N$  так, що  $AN = BM = AB$ . Відрізки  $AN$  і  $BM$  перетинаються в точці  $P$ . Доведіть, що  $\angle APM = 2 \angle ACB$ .
- 2.14.** Бісектриса кута  $B$  рівнобедреного трикутника  $ABC$  розбиває його на два рівнобедрені трикутники. Знайдіть кути трикутника  $ABC$ .
- 2.15.** У трикутнику  $ABC$  відомо, що  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\angle B = 30^\circ$ , точка  $M$  — середина сторони  $AB$ . Серединний перпендикуляр відрізка  $AB$  перетинає відрізок  $BC$  у точці  $K$ . Доведіть, що  $MK = \frac{1}{3} BC$ .
- 2.16.** У трикутнику  $MKE$  відомо, що  $\angle K = 90^\circ$ ,  $\angle E = 30^\circ$ ,  $KE = 12$  см. Знайдіть бісектрису  $MC$  трикутника.
- 2.17.** Висоти гострокутного трикутника  $ABC$  перетинаються в точці  $H$ . Відомо, що  $AB = CH$ . Знайдіть кут  $ACB$ .
- 2.18.** У трикутнику  $ABC$  проведено бісектрису  $CD$ . Відомо, що центр кола, вписаного в трикутник  $BCD$ , збігається із центром кола, описаного навколо трикутника  $ABC$ . Знайдіть кути трикутника  $ABC$ .
- 2.19.** У трикутнику  $ABC$  проведено бісектриси  $AA_1$  і  $CC_1$ . Доведіть, що коли довжини перпендикулярів, опущених з вершини  $B$  на прямі  $AA_1$  і  $CC_1$ , рівні, то трикутник  $ABC$  рівнобедрений.
- 2.20.** На продовженні найбільшої сторони  $AC$  трикутника  $ABC$  відкладено відрізок  $CM$ , рівний відрізку  $BC$ . Доведіть, що кут  $ABM$  тупий або прямий.

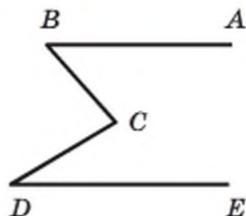
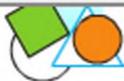


Рис. 2.1



- 2.21.** Кут між двома висотами гострокутного трикутника  $ABC$  дорівнює  $60^\circ$ . Точка перетину висот ділить одну з них у відношенні  $2 : 1$ , рахуючи від вершини трикутника. Доведіть, що трикутник  $ABC$  рівносторонній.
- 2.22.** У трикутнику  $ABC$  відомо, що  $AB = 2$  см,  $\angle A = 60^\circ$ ,  $\angle B = 70^\circ$ . На стороні  $AC$  позначили точку  $D$  так, що  $AD = 1$  см. Знайдіть кути трикутника  $BDC$ .
- 2.23.** У трикутнику  $ABC$  (  $AB = BC$  ) позначено точки  $M$  і  $N$  так, що точка  $N$  лежить між точками  $B$  і  $M$ ,  $NM = AM$  і  $\angle MAC = \angle BAN$ . Знайдіть кут  $CAN$ .
- 2.24.** Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, у 4 рази менша від гіпотенузи. Знайдіть кути трикутника.
- 2.25.** У прямокутному трикутнику  $ABC$  проведено бісектриси  $AP$  і  $BQ$  гострих кутів, а в трикутниках  $ACP$  і  $BCQ$  — відповідно медіани  $CM$  і  $CN$ . Доведіть, що  $\angle CMP + \angle CNQ = 90^\circ$ .
- 2.26.** У прямокутному трикутнику  $ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ) проведено висоту  $CH$ . На сторонах  $AB$  і  $AC$  відповідно позначили точки  $M$  і  $N$  так, що  $BM = BC$  і  $CN = CH$ . Доведіть, що  $MN \perp AC$ .
- 2.27.** У прямокутному трикутнику  $ABC$  відрізок  $CD$  — висота, проведена до гіпотенузи  $AB$ . Знайдіть гострі кути трикутника  $ABC$ , якщо відомо, що  $BD - DA = AC$ .
- 2.28.** У трикутнику  $ABC$  відомо, що  $\angle A = 40^\circ$ ,  $\angle B = 20^\circ$ ,  $AB - BC = 4$  см. Знайдіть бісектрису трикутника, проведену з вершини  $C$ .
- 2.29.** У рівнобедреному трикутнику  $ABC$  ( $AB = BC$ ) проведено бісектрису  $CD$ . Через точку  $D$  проведено пряму, яка перпендикулярна до прямої  $CD$  і перетинає пряму  $AC$  в точці  $E$ . Знайдіть відрізок  $EC$ , якщо  $AD = 1$  см.
- 2.30.** Кут при вершині  $A$  рівнобедреного трикутника  $ABC$  ( $AB = AC$ ) дорівнює  $30^\circ$ . На сторонах  $AB$  і  $AC$  позначено точки  $Q$  і  $P$  відповідно такі, що  $\angle QPC = 45^\circ$  і  $PQ = BC$ . Доведіть, що  $BC = CQ$ .
- 2.31.** У рівнобедреному трикутнику  $ABC$  ( $AB = BC$ ) відомо, що  $\angle ABC = 20^\circ$ . Доведіть, що: 1)  $2AC < AB$ ; 2)  $3AC > AB$ .
- 2.32.** У рівнобедреному трикутнику  $ABC$  кут  $B$ , протилежний основі, дорівнює  $20^\circ$ . На стороні  $AB$  позначено точку  $D$  так, що  $BD = AC$ . Знайдіть кут  $ACD$ .



- 2.33.\* Кут  $BAC$  трикутника  $ABC$  дорівнює  $120^\circ$ . На бісектрисі цього кута позначили точку  $D$  так, що  $AD = AB + AC$ . Знайдіть кути трикутника  $BDC$ .
- 2.34.\* У рівнобедреному трикутнику  $ABC$  ( $AB = AC$ ) кут  $A$  дорівнює  $100^\circ$ , відрізок  $BD$  — бісектриса трикутника. Доведіть, що  $BD + AD = BC$ .

### 3. Коло. Геометричні побудови

Поновіть у пам'яті зміст пунктів 18–23 на с. 198–201.

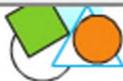


#### ВПРАВИ

- 3.1.° Доведіть, що коли через дану точку до кола проведено дві дотичні, то відрізки дотичних, які сполучають дану точку з точками дотику, рівні.
- 3.2.° У трикутник з кутами  $30^\circ$ ,  $70^\circ$  і  $80^\circ$  вписано коло. Знайдіть кути трикутника, вершини якого є точками дотику вписаного кола зі сторонами даного трикутника.
- 3.3.° Через точку  $C$  кола із центром  $O$  проведено дотичну до цього кола,  $AB$  — діаметр кола. Із точки  $A$  на дотичну опущено перпендикуляр  $AD$ . Доведіть, що промінь  $AC$  — бісектриса кута  $BAD$ .
- 3.4.° Центр кола, описаного навколо трикутника, належить його стороні. Доведіть, що цей трикутник прямокутний.
- 3.5.° Побудуйте трикутник за стороною, прилеглими до неї кутом і бісектрисою трикутника, проведеною з вершини цього кута.
- 3.6.° Побудуйте трикутник за двома сторонами та кутом, протилежним до однієї із цих сторін. Скільки розв'язків може мати задача?
- 3.7.\* Знайдіть геометричне місце центрів кіл даного радіуса, які проходять через дану точку.
- 3.8.\* Знайдіть ГМТ, рівновіддалених від двох даних прямих, які перетинаються.
- 3.9.\* Знайдіть ГМТ, віддалених від даної прямої на задану відстань.



- 3.10.** Знайдіть геометричне місце центрів кіл, які дотикаються до даної прямої.
- 3.11.** Прямі, які дотикаються до кола із центром  $O$  в точках  $A$  і  $B$ , перетинаються в точці  $K$ ,  $\angle AKB = 120^\circ$ . Доведіть, що  $AK + BK = OK$ .
- 3.12.** Коло дотикається до сторони  $AB$  трикутника  $ABC$  у точці  $M$  і до продовження двох інших сторін. Доведіть, що сума  $BC + BM$  дорівнює півпериметру трикутника  $ABC$ .
- 3.13.** У трикутник  $ABC$  вписано коло, яке дотикається до сторони  $AB$  у точці  $M$ ,  $BC = a$ . Доведіть, що  $AM = p - a$ , де  $p$  — півпериметр трикутника  $ABC$ .
- 3.14.** Доведіть, що радіус кола, вписаного в прямокутний трикутник, визначається за формулою  $r = \frac{a+b-c}{2}$ , де  $r$  — радіус вписаного кола,  $a$  і  $b$  — катети,  $c$  — гіпотенуза.
- 3.15.** У прямокутному трикутнику  $ABC$  відрізок  $CD$  — висота, проведена до гіпотенузи  $AB$ . Радіуси кіл, вписаних у трикутники  $ACD$ ,  $BCD$  і  $ABC$ , дорівнюють відповідно  $r_1$ ,  $r_2$  і  $r$ . Доведіть, що  $r_1 + r_2 + r = CD$ .
- 3.16.** Радіус кола, вписаного в прямокутний трикутник, дорівнює половині різниці катетів. Знайдіть гострі кути трикутника.
- 3.17.** Сума радіусів вписаного й описаного кіл прямокутного трикутника дорівнює одному з катетів. Знайдіть гострі кути трикутника.
- 3.18.** Побудуйте трикутник за двома висотами та кутом, з вершини якого проведено одну з даних висот. Скільки розв'язків може мати задача?
- 3.19.** Побудуйте трикутник за стороною та висотами, проведеними до двох інших сторін.
- 3.20.** Побудуйте трикутник за стороною та висотами, одну з яких проведено до даної сторони.
- 3.21.** Побудуйте трикутник за кутом і висотами, проведеними з вершин двох інших кутів.
- 3.22.** Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і радіусом вписаного кола.
- 3.23.** Побудуйте трикутник за радіусом вписаного кола та відрізками, на які точка дотику вписаного кола ділить одну зі сторін.
- 3.24.** Побудуйте трикутник, якщо дано три точки, у яких вписане коло дотикається до його сторін.



- 3.25.** Побудуйте коло, яке проходить через дану точку  $A$  та дотикається до даної прямої  $m$  у даній точці  $B$ .
- 3.26.** Побудуйте трикутник за стороною, висотою, проведеною до цієї сторони, і радіусом описаного кола. Скільки розв'язків може мати задача?
- 3.27.** На стороні  $AC$  трикутника  $ABC$  позначено точку  $M$ . Кола, які вписано в трикутники  $ABM$  і  $MBC$ , дотикаються. Доведіть, що  $AB + MC = AM + BC$ .
- 3.28.** На стороні  $AC$  трикутника  $ABC$  позначено точку  $M$  так, що  $AB + MC = AM + BC$ . Доведіть, що кола, вписані в трикутники  $ABM$  і  $MBC$ , дотикаються.
- 3.29.** Дано точки  $A$  і  $B$ . Знайдіть геометричне місце точок  $X$  таких, що  $AX > BX$ .
- 3.30.** Кожний із кутів  $BAC$  і  $ACB$  трикутника  $ABC$  поділено на три рівні частини (рис. 3.1). Доведіть, що  $\angle AMN = \angle CMN$ .

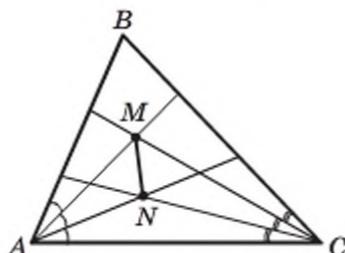


Рис. 3.1

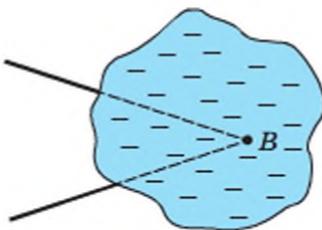


Рис. 3.2

- 3.31.** Вершина кута  $B$  недоступна (рис. 3.2). Побудуйте пряму, яка містить бісектрису кута  $B$ .
- 3.32.** Точки  $F$  і  $O$  — центри вписаного й описаного колів рівнобедреного трикутника  $ABC$  відповідно (рис. 3.3). Вони знаходяться на однаковій відстані від його основи  $AC$ . Знайдіть кути трикутника  $ABC$ .
- 3.33.** Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і сумою гіпотенузи та другого катета.
- 3.34.** Побудуйте прямокутний трикутник за гіпотенузою та різницею катетів.
- 3.35.** Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим до неї кутом і сумою двох інших сторін.

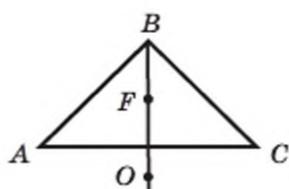


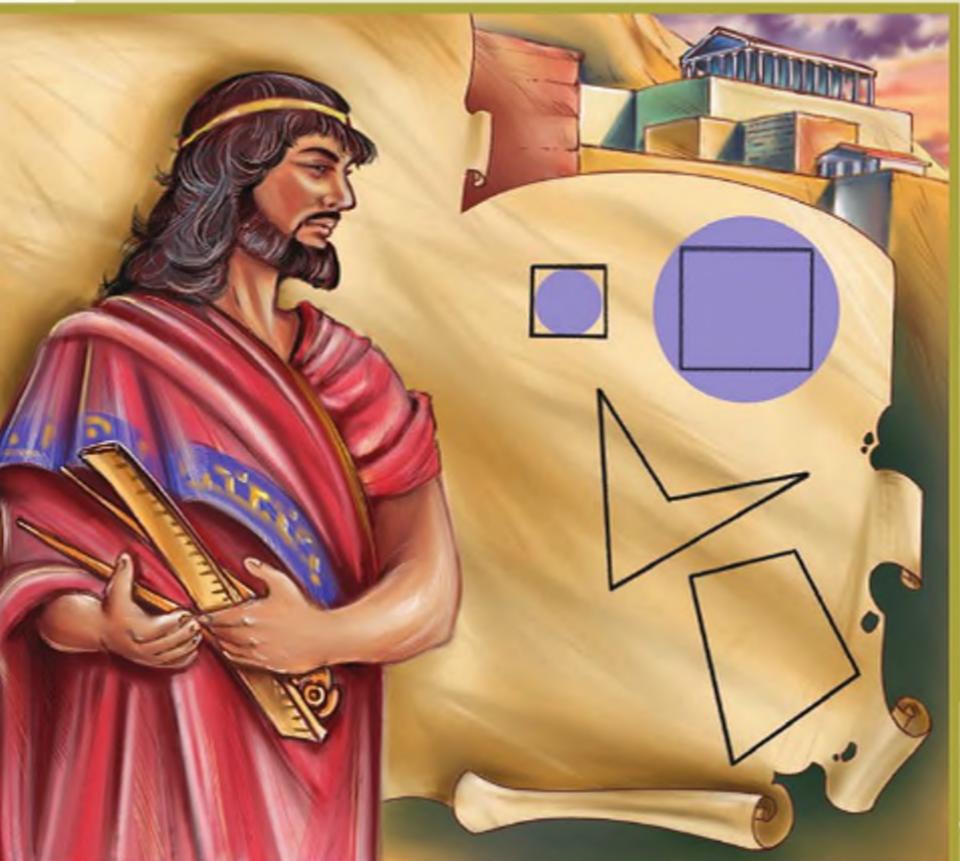
Рис. 3.3



- 3.36.\* Побудуйте трикутник за стороною, протилежним до неї кутом і різницею двох інших сторін.
- 3.37.\* Побудуйте трикутник за периметром і двома кутами.
- 3.38.\* Побудуйте трикутник за радіусом описаного кола та висотою і медіаною, проведеними з однієї вершини.
- 3.39.\* Побудуйте трикутник за двома сторонами та **медіаною**, проведеною до третьої сторони.
- 3.40.\* До гіпотенузи  $AB$  прямокутного трикутника  $ABC$  проведено висоту  $CD$ . Відрізки  $CK$  і  $CM$  — бісектриси трикутників  $ACD$  і  $DCB$  відповідно. Доведіть, що центр кола, описаного навколо трикутника  $KCM$ , є центром кола, вписаного в трикутник  $ABC$ .
- 3.41.\* Дві вершини трикутника зафіксовано в точках  $A$  і  $B$ , а третя вершина  $X$  пересувається так, що різниця  $XA - XB$  є величиною сталою. Доведіть, що центри кіл, вписаних у трикутники  $ABX$ , лежать на одній прямій.

У цьому параграфі розглядається знайома вам геометрична фігура **многокутник**. Ви ознайомитеся з окремими видами чотирикутника: паралелограмом, прямокутником, ромбом, квадратом, трапецією, вивчите властивості цих фігур і дізнаєтесь про ознаки, за допомогою яких серед чотирикутників можна розпізнати зазначені фігури.

Ви вивчите властивості відрізка, який сполучає середини сторін трикутника, і переконаєтесь в тому, що ці властивості можуть слугувати ключем до розв'язування цілого ряду задач.





#### 4. Многокутник та його елементи

На рисунку 4.1 відрізки  $AB$  і  $BC$  мають тільки одну спільну точку  $B$ , яка є кінцем кожного з них. Такі відрізки називають **сусідніми**. На рисунку 4.2 кожні два відрізки є сусідніми.

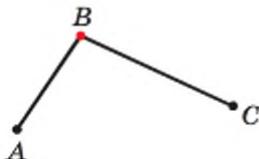


Рис. 4.1

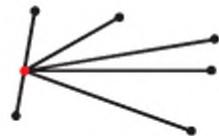
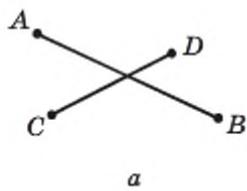
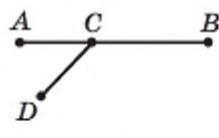


Рис. 4.2

Відрізки  $AB$  і  $CD$  на рисунку 4.3 не є сусідніми.



а



б

Рис. 4.3

Розглянемо фігуру, яка складається із точок  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  і відрізків  $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$  таких, що ніякі два сусідніх відрізки не лежать на одній прямій і ніякі два несусідніх відрізки не мають спільних точок (рис. 4.4).

Фігура, утворена цими відрізками, обмежує частину площини, виділену на рисунку 4.5 зеленим кольором. Цю частину площини разом з відрізками  $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$  називають **многокутником**. Точки  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  називають **вершинами** многокутника, а вказані вище відрізки — **сторонами** многокутника.

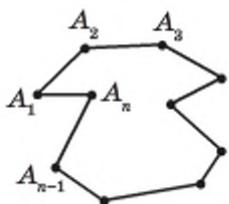


Рис. 4.4

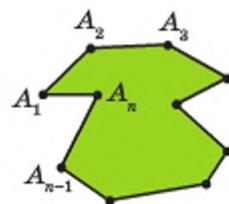


Рис. 4.5

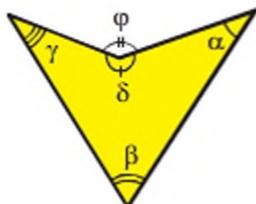


Рис. 4.6

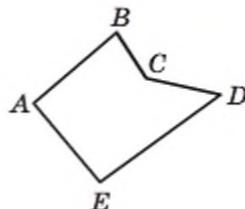


Рис. 4.7

Сторони, які є сусідніми відрізками, називають **сусідніми сторонами** многокутника. Вершини, які є кінцями однієї сторони, називають **сусідніми вершинами** многокутника.

Дві сусідні сторони многокутника задають **кут** многокутника. Наприклад,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  — кути многокутника (рис. 4.6), а кут  $\phi$  не є кутом многокутника.

Многокутник називають за кількістю його кутів: трикутник, чотирикутник, п'ятикутник тощо.

Многокутник позначають за його вершинами. Наприклад, на рисунку 4.7 зображено п'ятикутник  $ABCDE$ . У позначенні многокутника букви, які стоять поруч, відповідають сусіднім вершинам. Наприклад, п'ятикутник, зображений на рисунку 4.7, можна позначити інакше:  $CDEAB$ ,  $EABCD$  тощо.

**Периметром** многокутника називають суму довжин усіх його сторін.

Відрізок, який сполучає несусідні вершини многокутника, називають **діагоналлю**. Наприклад, на рисунку 4.8 відрізок  $AE$  — діагональ.

На рисунку 4.9 зображене многокутник, усі кути якого менші від розгорнутого. Такий многокутник називають **опуклим**. Зауважимо, що многокутники, зображені на рисунках 4.6, 4.7, 4.8, не є опуклими.

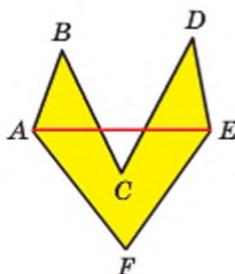


Рис. 4.8

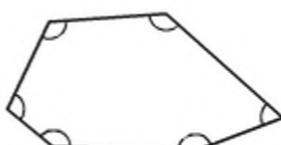


Рис. 4.9

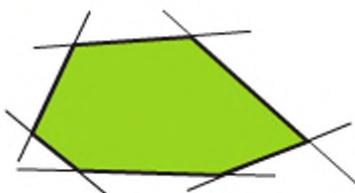


Рис. 4.10

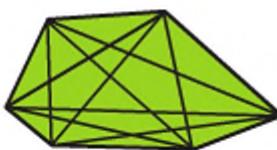


Рис. 4.11

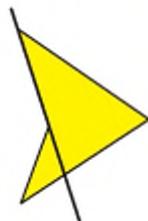


Рис. 4.12

Опуклий многокутник має такі властивості:

- 1) опуклий многокутник розташований в одній півплощині відносно будь-якої прямої, що містить його сторону (рис. 4.10);
- 2) опуклий многокутник містить будь-яку свою діагональ (рис. 4.11).

Оскільки жодний неопуклий многокутник таких властивостей не має (рис. 4.8, 4.12), то кожну з них можна розглядати як ознаку опукlosti многокутника.

**Теорема 4.1.** *Сума кутів опуклого  $n$ -кутника дорівнює  $180^\circ(n - 2)$ .*

**Доведення.** На рисунку 4.13 зображенено опуклий  $n$ -кутник  $A_1A_2A_3\dots A_{n-1}A_n$ . Усі його діагоналі, що виходять з вершини  $A_1$ , розбивають даний многокутник на  $n - 2$  трикутники. Сума всіх кутів цих трикутників дорівнює сумі кутів  $n$ -кутника. Оскільки сума кутів кожного трикутника дорівнює  $180^\circ$ , то шукана сума дорівнює  $180^\circ(n - 2)$ .  $\blacktriangleleft$

Зазначимо, що наведена теорема є справедливою також для неопуклого многокутника.

На рисунку 4.14 зображенено опуклий  $n$ -кутник  $A_1A_2\dots A_{n-1}A_n$ . Кут 1 є суміжним з кутом 2 многокутника. Кут 1 називають зовнішнім кутом при вершині  $A_1$  опуклого многокутника  $A_1A_2\dots A_n$ .

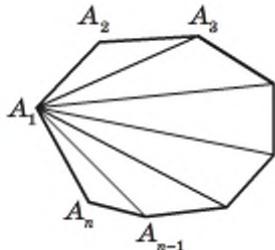


Рис. 4.13

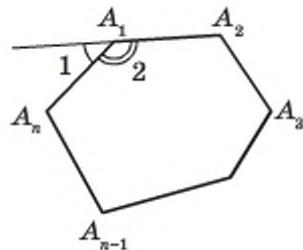


Рис. 4.14



**Теорема 4.2.** Сума зовнішніх кутів опуклого  $n$ -кутника, узятих по одному при кожній вершині, дорівнює  $360^\circ$ .

**Доведення.** Сума кута многокутника і кута, суміжного з ним, дорівнює  $180^\circ$ . Тому сума всіх кутів многокутника і зовнішніх кутів многокутника, узятих по одному при кожній вершині, дорівнює  $180^\circ n$ . За теоремою 4.1 сума кутів многокутника дорівнює  $180^\circ (n - 2)$ . Тому сума зовнішніх кутів дорівнює  $180^\circ n - 180^\circ \times (n - 2) = 360^\circ$ .  $\blacktriangle$

У 7 класі ви вивчали властивості трикутників. У цьому парамафі ми вивчатимемо властивості іншого окремого виду многокутника — чотирикутника (рис. 4.15, 4.16).

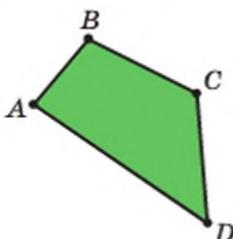


Рис. 4.15

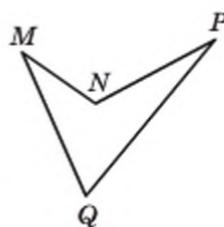


Рис. 4.16

Зрозуміло, що всі поняття, які було введено для  $n$ -кутника, стосуються й чотирикутника.

У чотирикутнику несусідні сторони та несусідні вершини називають відповідно протилежними сторонами й протилежними вершинами. На рисунку 4.16 зображене чотирикутник, у якому, наприклад, сторони  $NP$  і  $MQ$  протилежні, вершини  $M$  і  $P$  протилежні.

Кути  $ABC$  і  $ADC$  називають протилежними кутами чотирикутника  $ABCD$  (рис. 4.15). Також протилежними є кути  $BAD$  і  $BCD$ .

**Задача 1.** Доведіть, що будь-який опуклий  $n$ -кутник має не більше трьох гострих кутів.

**Розв'язання.** Нехай опуклий  $n$ -кутник має 4 гострих кути. Тоді сума зовнішніх кутів, які відповідають цим гострим кутам, більша за  $360^\circ$ , що суперечить теоремі 4.2.  $\blacktriangle$

**Задача 2.** Доведіть, що кількість діагоналей  $n$ -кутника дорівнює  $\frac{n(n-3)}{2}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 3$ .

**Розв'язання.** З однієї вершини  $n$ -кутника можна провести  $(n - 3)$  діагоналі (не можна провести діагоналі в саму вибрану



вершину і дві сусідні вершини). Оскільки маемо  $n$  вершин, то здавалося б, що загальна кількість діагоналей дорівнює  $n(n - 3)$ . Але в такий спосіб кожну діагональ урахували двічі. Отже, кількість діагоналей дорівнює  $\frac{n(n - 3)}{2}$ . ▲

**Задача 3.** Доведіть, що довжина будь-якої сторони чотирикутника менша від суми довжин трьох інших його сторін.

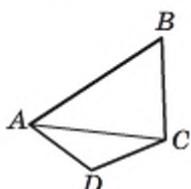


Рис. 4.17

**Розв'язання.** Розглянемо довільний чотирикутник  $ABCD$  (рис. 4.17). Покажемо, наприклад, що  $AB < AD + DC + CB$ .

Проведемо діагональ  $AC$ . Застосовуючи нерівність трикутника для сторін  $AB$  і  $AC$  відповідно трикутників  $ABC$  і  $ADC$ , отримуємо нерівності:  $AB < AC + CB$ ,  $AC < AD + DC$ .

Звідси  $AB < AC + CB < AD + DC + CB$ .  
Отже,  $AB < AD + DC + CB$ . ▲

**Задача 4.** Чи можна опуклий 32-кутник розрізати на 20 трикутників, три опуклих чотирикутники та один опуклий п'ятикутник?

**Розв'язання.** Очевидно, що сума кутів даного 32-кутника не більша за суму кутів усіх многокутників, на які його розрізано. Тоді маемо:

$$180^\circ \cdot (32 - 2) \leqslant 20 \cdot 180^\circ + 3 \cdot 180^\circ \cdot (4 - 2) + 180^\circ \cdot (5 - 2); \\ 30 \leqslant 29.$$

Отримали суперечність. Отже, таким чином розрізати опуклий 32-кутник неможливо. ▲



- Поясніть, які відрізки називають сусідніми.
- Поясніть, яку фігуру називають многокутником.
- Що називають діагоналлю многокутника?
- Що називають периметром многокутника?
- Який многокутник називають опуклим?
- Як розташований опуклий многокутник відносно будь-якої прямої, що містить його сторону?
- Сформулуйте теорему про суму кутів опуклого  $n$ -кутника.
- Який кут називають зовнішнім кутом опуклого  $n$ -кутника?
- Чому дорівнює сума зовнішніх кутів опуклого  $n$ -кутника, узятих по одному при кожній вершині?
- Які вершини й кути чотирикутника називають протилежними?

**ВПРАВИ**

- 4.1.° Знайдіть суму кутів опуклого: 1) п'ятикутника; 2) восьмикутника; 3) двадцятичотирикутника.
- 4.2.° Знайдіть суму кутів опуклого: 1) дев'ятикутника; 2) шістнадцятикутника.
- 4.3.° Чи існує опуклий многокутник, сума кутів якого дорівнює: 1)  $1800^\circ$ ; 2)  $720^\circ$ ; 3)  $1600^\circ$ ?
- 4.4.° Чи існує многокутник, кожний кут якого дорівнює: 1)  $150^\circ$ ; 2)  $100^\circ$ ?
- 4.5.° Один із кутів чотирикутника у 2 рази менший від другого кута, на  $20^\circ$  менший від третього та на  $40^\circ$  більший за четвертий. Знайдіть кути чотирикутника.
- 4.6.° Знайдіть кути чотирикутника, якщо вони пропорційні числам 2, 3, 10 і 21. Чи є цей чотирикутник опуклим?
- 4.7.° Знайдіть кути чотирикутника, якщо три його кути пропорційні числам 4, 5 і 7, а четвертий кут дорівнює їхній півсумі. Чи є цей чотирикутник опуклим?
- 4.8.° У чотирикутнику  $ABCD$  сторони  $AB$  і  $BC$  рівні, а діагональ  $BD$  утворює із цими сторонами рівні кути. Доведіть, що сторони  $CD$  і  $AD$  теж рівні.
- 4.9.° Скільки діагоналей можна провести: 1) у дев'ятикутнику; 2) у двадцятикутнику?
- 4.10.° У трикутнику  $ABC$  відомо, що  $\angle A = 44^\circ$ ,  $\angle B = 56^\circ$ . Бісектриси  $AK$  і  $BM$  трикутника перетинаються в точці  $O$ . Знайдіть кути чотирикутника: 1)  $MOKC$ ; 2)  $AOBC$ .
- 4.11.° У трикутнику  $ABC$  відомо, що  $\angle A = 36^\circ$ ,  $\angle B = 72^\circ$ . Висоти  $AE$  і  $BF$  трикутника перетинаються в точці  $H$ . Знайдіть кути чотирикутника: 1)  $CFHE$ ; 2)  $ACBH$ .
- 4.12.° Знайдіть діагональ чотирикутника, якщо його периметр дорівнює 80 см, а периметри трикутників, на які ця діагональ розбиває даний чотирикутник, дорівнюють 36 см і 64 см.
- 4.13.° Чи можуть сторони чотирикутника дорівнювати:  
1) 2 дм, 3 дм, 4 дм, 9 дм; 2) 2 дм, 3 дм, 4 дм, 10 дм?
- 4.14.° Три кути опуклого многокутника дорівнюють по  $100^\circ$ , а решта — по  $120^\circ$ . Визначте вид многокутника.
- 4.15.° Доведіть, що коли кути опуклого шестикутника рівні, то його сторони утворюють три пари паралельних сторін.



- 4.16.**\* У чотирикутнику  $ABCD$  відомо, що  $\angle A = \angle C = 90^\circ$ . Доведіть, що бісектриси двох інших кутів чотирикутника або паралельні, або лежать на одній прямій.
- 4.17.**\* Доведіть, що коли бісектриси двох протилежних кутів опуклого чотирикутника паралельні або лежать на одній прямій, то два інших кути чотирикутника рівні.
- 4.18.**\* Побудуйте чотирикутник за його сторонами та одним із кутів.
- 4.19.**\* Побудуйте чотирикутник за трьома сторонами та двома діагоналями.
- 4.20.**\* Побудуйте чотирикутник за його сторонами та однією з діагоналей.
- 4.21.**\* Сума кутів опуклого  $n$ -кутника й одного з його зовнішніх кутів дорівнює  $990^\circ$ . Знайдіть  $n$ .
- 4.22.**\* Чи можна опуклий 17-кутник розрізати на 14 трикутників?
- 4.23.**\*\* Доведіть, що в опуклому чотирикутнику  $ABCD$  виконується нерівність  $AC + BD > AB + CD$ .
- 4.24.**\*\* Доведіть, що в опуклому чотирикутнику сума діагоналей менша від периметра, але більша за півпериметр чотирикутника.
- 4.25.**\*\* Побудуйте чотирикутник  $ABCD$  за кутами  $A$  і  $B$ , сторонами  $AB$  і  $BC$  та сумою сторін  $AD$  і  $CD$ .
- 4.26.**\*\* Серединні перпендикуляри сторін  $AB$  і  $CD$  чотирикутника  $ABCD$  перетинаються в точці  $K$ , яка належить стороні  $AD$ . Доведіть, що коли  $\angle A = \angle D$ , то діагоналі чотирикутника  $ABCD$  рівні.
- 4.27.**\*\* Вершини опуклого п'ятикутника сполучили через одну (рис. 4.18). Знайдіть суму кутів при вершинах отриманої «зірки».
- 4.28.**\* Бісектриси кутів  $A$  і  $B$  опуклого чотирикутника  $ABCD$  перетинаються в точці  $M$ , а бісектриси кутів  $C$  і  $D$  — у точці  $N$ . Відомо, що  $MN \perp AB$ . Доведіть, що кути  $A$  і  $B$  рівні.
- 4.29.**\* Градусна міра кожного з кутів опуклого 19-кутника кратна  $10^\circ$ . Доведіть, що у цього 19-кутника є пара паралельних сторін.
- 4.30.**\* Опуклий  $n$ -кутник можна розрізати на кілька рівносторонніх трикутників. Знайдіть найбільше значення  $n$ .

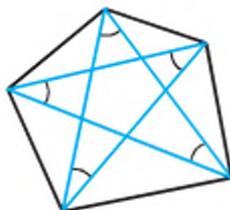


Рис. 4.18



**4.31.\*** Доведіть, що будь-який опуклий многокутник можна розрізати на рівнобедрені трикутники.

**4.32.\*** У чотирикутнику  $ABCD$  сума кутів  $ABD$  і  $BDC$  дорівнює  $180^\circ$ , а сторони  $AD$  і  $BC$  рівні (рис. 4.19). Доведіть, що  $\angle BAD = \angle BCD$ .

**4.33.\*** Скільки в опуклому многокутнику може бути сторін, які дорівнюють найбільшій діагоналі?

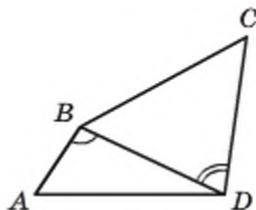


Рис. 4.19



## ДЕРЗАЙТЕ!

Задачі 4.28–4.33 позначено «зірочкою» (\*). Це означає, що вони належать до задач підвищеної складності. Хоча таких задач не буде на самостійних і контрольних роботах, їх у підручнику чимало. У вас може виникнути запитання: «Навіщо ж витрачати час і сили на складні задачі, якщо вони не є обов'язковими для розв'язування, а високу оцінку можна заробити й значно меншими зусиллями?» На нашу думку, найкращу відповідь на це запитання можна знайти в книзі «Математика й романтика» відомого українського геометра та педагога Миколи Івановича Кованцова. Він писав: «Любі друзі! Беріться за розв'язування складних математичних задач! І тих, які щойно поставлені, і тих, які вже багато десятиліть або столітів не піддаються розв'язуванню. Вас спіткають страждання й розчарування, коли здаватиметься, що ви марно витратили роки на пошуки примарії, яка від вас ухиляється. Усе може бути. Але ви будете сторицею винагороджені, коли одного чудового дня опинитеся перед тією завітною ціллю, до якої так довго й складно йшли. Не будьте байдужими, інакше на вас чекає духовна смерть».

М. І. Кованцов майже 30 років очолював кафедру геометрії Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Його перу належить понад 200 наукових і науково-популярних праць.

Микола Іванович виховав десятки вчених, які сьогодні працюють як в Україні, так і в багатьох країнах світу.



М. І. Кованцов  
(1924–1988)

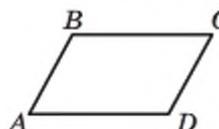


## 5. Паралелограм. Властивості паралелограма

**Означення.** Паралелограмом називають чотирикутник, у якого кожні дві протилежні сторони паралельні.

На рисунку 5.1 зображено паралелограм  $ABCD$ . За означенням паралелограма маємо:  $AB \parallel CD$ ,  $BC \parallel AD$ .

Розглянемо деякі властивості паралелограма.



**Теорема 5.1.** Протилежні сторони паралелограма рівні.

**Доведення.** На рисунку 5.1 зображено паралелограм  $ABCD$ . Доведемо, що  $AB = CD$  і  $BC = AD$ .

Проведемо діагональ  $AC$ . Доведемо, що трикутники  $ABC$  і  $CDA$  рівні (рис. 5.2).

У цих трикутниках сторона  $AC$  — спільна, кути 1 і 2 рівні як різносторонні при паралельних прямих  $BC$  і  $AD$  та січній  $AC$ , кути 3 і 4 рівні як різносторонні при паралельних прямих  $AB$  і  $CD$  та січній  $AC$ . Отже, трикутники  $ABC$  і  $CDA$  рівні за другою ознакою рівності трикутників. Звідси  $AB = CD$  і  $BC = AD$ .  $\blacktriangleleft$

**Теорема 5.2.** Протилежні кути паралелограма рівні.

**Доведення.** На рисунку 5.1 зображено паралелограм  $ABCD$ . Доведемо, що  $\angle A = \angle C$  і  $\angle B = \angle D$ .

Під час доведення попередньої теореми було встановлено, що  $\Delta ABC = \Delta CDA$  (рис. 5.2). Звідси  $\angle B = \angle D$ . З рівності кутів 1 і 2 та рівності кутів 3 і 4 випливає, що  $\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4$ . Отже,  $\angle BAD = \angle BCD$ .  $\blacktriangleleft$

**Теорема 5.3.** Діагоналі паралелограма точкою перетину діляться наспіл.

**Доведення.** На рисунку 5.3 зображено паралелограм  $ABCD$ , діагоналі якого перетинаються в точці  $O$ . Доведемо, що  $AO = OC$  і  $BO = OD$ .

Розглянемо трикутники  $AOD$  і  $COB$ . Маємо:  $\angle 1$  і  $\angle 2$ ,  $\angle 3$  і  $\angle 4$  рівні як різносторонні при паралельних прямих  $AD$  і  $BC$  та січніх  $AC$  і  $BD$  відповідно. З теореми 5.1 отримуємо:  $AD = BC$ . Отже,

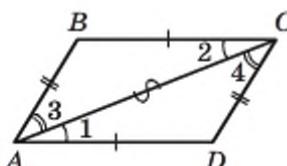


Рис. 5.2

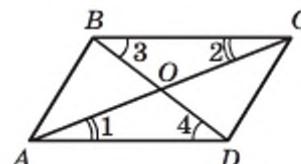


Рис. 5.3



трикутники  $AOD$  і  $COB$  рівні за другою ознакою рівності трикутників. Звідси  $AO = OC$ ,  $BO = OD$ . ▲

**Означення.** **Висотою паралелограма** називають перпендикуляр, опущений з будь-якої точки прямої, яка містить сторону паралелограма, на пряму, що містить протилежну сторону.

На рисунку 5.4 кожний із відрізків  $AF$ ,  $QE$ ,  $BM$ ,  $PN$ ,  $CK$  є висотою паралелограма  $ABCD$ .

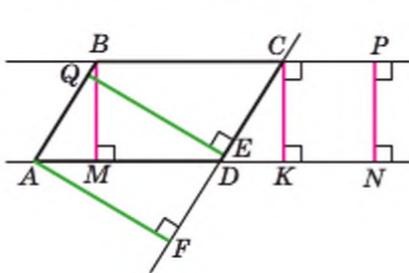


Рис. 5.4

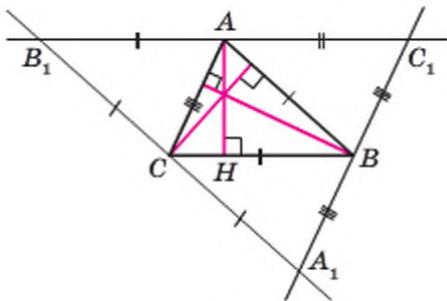


Рис. 5.5

Із курсу геометрії 7 класу ви знаєте, що всі точки однієї з двох паралельних прямих рівновіддалені від другої прямої. Тому  $AF = QE$  і  $BM = PN = CK$ .

Говорять, що висоти  $BM$ ,  $CK$ ,  $PN$  проведено до сторін  $BC$  і  $AD$ , а висоти  $AF$ ,  $QE$  — до сторін  $AB$  і  $CD$ .

**Теорема 5.4.** *Прямі, які містять висоти трикутника, перетинаються в одній точці.*

**Доведення.** Через кожну вершину даного трикутника  $ABC$  проведемо пряму, паралельну протилежній стороні. Отримаємо трикутник  $A_1B_1C_1$  (рис. 5.5).

Із побудови випливає, що чотирикутники  $AC_1BC$  і  $ABC_1$  — паралелограми. Звідси  $AC_1 = BC = AB_1$ . Отже, точка  $A$  є серединою відрізка  $B_1C_1$ .

Оскільки прямі  $B_1C_1$  і  $BC$  паралельні, то висота  $AH$  трикутника  $ABC$  перпендикулярна до відрізка  $B_1C_1$ . Таким чином, пряма  $AH$  — серединний перпендикуляр сторони  $B_1C_1$  трикутника  $A_1B_1C_1$ . Аналогічно можна довести, що прямі, які містять дві інші висоти трикутника  $ABC$ , є серединними перпендикулярами сторін  $C_1A_1$  і  $A_1B_1$  трикутника  $A_1B_1C_1$ .

Оскільки серединні перпендикуляри сторін трикутника перетинаються в одній точці, то твердження теореми доведено. ▲



Точку, у якій перетинаються прямі, що містять висоти трикутника, називають ортоцентром трикутника.

**Задача 1.** Бісектриса тупого кута паралелограма ділить сторону у відношенні  $2 : 1$ , рахуючи від вершини гострого кута. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 60 см.

*Розв'язання.* Нехай бісектриса тупого кута  $B$  паралелограма  $ABCD$  (рис. 5.6) перетинає сторону  $AD$  у точці  $M$ . За умовою  $AM : MD = 2 : 1$ .

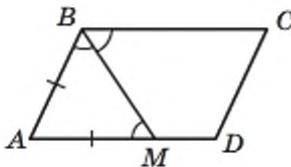


Рис. 5.6

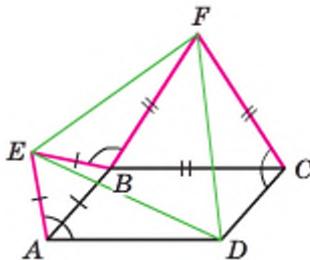


Рис. 5.7

Кути  $ABM$  і  $CBM$  рівні за умовою.

Кути  $CBM$  і  $AMB$  рівні як різносторонні при паралельних прямих  $BC$  і  $AD$  та січній  $BM$ .

Тоді  $\angle ABM = \angle AMB$ . Отже, трикутник  $BAM$  рівнобедрений, звідси  $AB = AM$ .

Нехай  $MD = x$  см, тоді  $AB = AM = 2x$  см,  $AD = 3x$  см. Оскільки протилежні сторони паралелограма рівні, то його периметр дорівнює  $2(AB + AD)$ . Ураховуючи, що за умовою периметр паралелограма дорівнює 60 см, отримуємо:

$$\begin{aligned} 2(2x + 3x) &= 60; \\ x &= 6. \end{aligned}$$

Отже,  $AB = 12$  см,  $AD = 18$  см.

*Відповідь:* 12 см, 18 см.  $\blacktriangle$

**Задача 2.** На сторонах  $AB$  і  $BC$  паралелограма  $ABCD$  поза ним побудовано рівносторонні трикутники  $ABE$  і  $BCF$  (рис. 5.7). Доведіть, що трикутник  $EDF$  рівносторонній.

*Розв'язання.* Нехай  $\angle BAD = \alpha$ . Тоді  $\angle EAD = \angle FCD = 60^\circ + \alpha$ .

Маємо:  $\angle EBA = \angle FBC = 60^\circ$ ,  $\angle ABC = 180^\circ - \alpha$ . Тоді  $\angle EBF = 360^\circ - (60^\circ + 60^\circ + 180^\circ - \alpha) = 60^\circ + \alpha$ .

Запишемо:  $EB = EA = AB = DC$ ,  $BF = FC = BC = AD$ . Отже, у трикутниках  $AED$ ,  $CDF$  і  $BEF$  є рівними дві сторони та кут між ними. З рівності цих трикутників випливає, що  $ED = FD = EF$ .

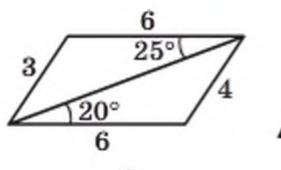


1. Який чотирикутник називають паралелограмом?
2. Яку властивість мають протилежні сторони паралелограма?
3. Яку властивість мають протилежні кути паралелограма?
4. Яку властивість мають діагоналі паралелограма?
5. Що називають висотою паралелограма?
6. Сформулюйте теорему про висоти трикутника

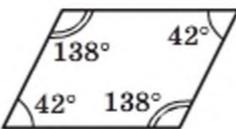


## ВПРАВИ

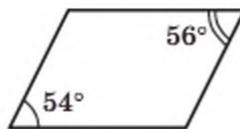
**5.1.** На рисунку 5.8 зображені паралелограми. Визначте, не виконуючи вимірювань, на яких рисунках величини кутів або довжини відрізків позначені неправильно (довжини відрізків наведено в сантиметрах).



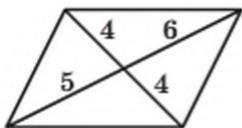
а



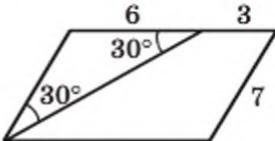
б



в



г



р

Рис. 5.8

**5.2.** Периметр паралелограма дорівнює 112 см. Знайдіть його сторони, якщо: 1) одна з них на 12 см менша від другої; 2) дві його сторони відносяться як 5 : 9.

**5.3.** Знайдіть сторони паралелограма, якщо одна з них у 5 разів більша за другу, а периметр паралелограма дорівнює 96 см.

**5.4.** У паралелограмі  $ABCD$  відомо, що  $AB = 6$  см,  $AC = 10$  см,  $BD = 8$  см,  $O$  — точка перетину його діагоналей. Знайдіть периметр трикутника  $COD$ .

**5.5.** Доведіть, що сума будь-яких двох сусідніх кутів паралелограма дорівнює  $180^\circ$ .



- 5.6.** Знайдіть кути паралелограма, якщо:
- 1) один із них дорівнює  $70^\circ$ ;
  - 1) сума двох його кутів дорівнює  $100^\circ$ ;
  - 2) різниця двох його кутів дорівнює  $20^\circ$ ;
  - 3) два його кути відносяться як  $3 : 7$ .
- 5.7.** Знайдіть кути паралелограма, якщо один із них:
- 1) у 2 рази більший за другий;
  - 2) на  $24^\circ$  менший від другого.
- 5.8.** Знайдіть кути паралелограма  $ABCD$  (рис. 5.9), якщо  $\angle ABD = 68^\circ$ ,  $\angle ADB = 47^\circ$ .
- 5.9.** У паралелограмі  $ABCD$  діагональ  $AC$  утворює зі стороною  $AB$  кут, який дорівнює  $32^\circ$ ,  $\angle BCD = 56^\circ$ . Знайдіть кути  $CAD$  і  $D$ .
- 5.10.** Бісектриси кутів  $A$  і  $B$  паралелограма  $ABCD$  перетинаються в точці  $M$ . Визначте величину кута  $M$  трикутника  $ABM$ .
- 5.11.** Знайдіть кути паралелограма  $ABCD$ , якщо  $BD \perp AB$  і  $BD = AB$ .
- 5.12.** Кут між висотою  $BH$  паралелограма  $ABCD$  і бісектрисою  $BM$  кута  $ABC$  дорівнює  $24^\circ$ . Знайдіть кути паралелограма.
- 5.13.** Діагональ паралелограма утворює з його сторонами кути  $30^\circ$  і  $90^\circ$ . Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює  $36$  см.
- 5.14.** Один із кутів паралелограма дорівнює  $45^\circ$ . Висота паралелограма, проведена з вершини тупого кута, дорівнює  $3$  см і ділить сторону паралелограма навпіл. Знайдіть цю сторону паралелограма та кути, які утворює діагональ, що сполучає вершини тупих кутів, зі сторонами паралелограма.
- 5.15.** У паралелограмі  $ABCD$  відомо, що  $\angle C = 30^\circ$ , висота  $BH$ , проведена до сторони  $CD$ , дорівнює  $7$  см, а периметр паралелограма —  $46$  см. Знайдіть сторони паралелограма.
- 5.16.** Доведіть, що будь-який відрізок, який проходить через точку перетину діагоналей паралелограма та кінці якого належать протилежним сторонам паралелограма, ділиться цією точкою навпіл.
- 5.17.** Периметр паралелограма  $ABCD$  дорівнює  $24$  см,  $\angle ABC = 160^\circ$ , діагональ  $AC$  утворює зі стороною  $AD$  кут  $10^\circ$ . Знайдіть сторони паралелограма.
- 5.18.** Діагональ  $BD$  паралелограма  $ABCD$  утворює зі стороною  $AB$  кут  $65^\circ$ ,  $\angle C = 50^\circ$ ,  $AB = 8$  см. Знайдіть периметр паралелограма.

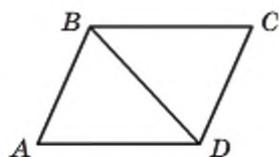


Рис. 5.9



- 5.19.° Поза паралелограмом  $ABCD$  проведено пряму, паралельну його діагоналі  $BD$ . Ця пряма перетинає прямі  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  і  $AD$  у точках  $E$ ,  $M$ ,  $F$  і  $K$  відповідно. Доведіть, що  $MK = EF$ .
- 5.20.° Паралельно діагоналі  $AC$  паралелограма  $ABCD$  проведено пряму, яка перетинає відрізки  $AB$  і  $BC$  у точках  $M$  і  $N$ , а прямі  $AD$  і  $CD$  у точках  $P$  і  $K$  відповідно. Доведіть, що  $PM = NK$ .
- 5.21.° Бісектриса кута  $A$  паралелограма  $ABCD$  перетинає сторону  $BC$  у точці  $M$ . Знайдіть периметр даного паралелограма, якщо  $AB = 12$  см,  $MC = 16$  см.
- 5.22.° Бісектриса гострого кута паралелограма ділить його сторону у відношенні 3 : 5, рахуючи від вершини тупого кута. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 66 см.
- 5.23.° У паралелограмі  $ABCD$  відомо, що  $AD = 12$  см,  $AB = 3$  см, бісектриси кутів  $B$  і  $C$  перетинають сторону  $AD$  у точках  $E$  і  $F$  відповідно. Знайдіть відрізок  $EF$ .
- 5.24.° Доведіть, що кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини тупого кута, дорівнює гострому куту паралелограма.
- 5.25.° Доведіть, що кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини гострого кута, дорівнює тупому куту паралелограма.
- 5.26.° Кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини гострого кута, у 4 рази більший за цей кут. Знайдіть кути паралелограма.
- 5.27.° Кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини тупого кута, дорівнює  $30^\circ$ . Знайдіть периметр паралелограма, якщо його висоти дорівнюють 4 см і 6 см.
- 5.28.° Висоти паралелограма, проведені з вершини гострого кута, утворюють кут  $150^\circ$ , сторони паралелограма дорівнюють 10 см і 18 см. Знайдіть висоти паралелограма.
- 5.29.° Через довільну точку основи рівнобедреного трикутника проведено прямі, паралельні його бічним сторонам. Доведіть, що периметр утвореного чотирикутника дорівнює сумі бічних сторін даного трикутника.
- 5.30.° Через кожну вершину трикутника  $ABC$  проведено пряму, паралельну протилежній стороні. Сума периметрів усіх утворених паралелограмів дорівнює 100 см. Знайдіть периметр трикутника  $ABC$ .
- 5.31.° Дано три точки, які не лежать на одній прямій. Побудуйте паралелограм, вершинами якого є дані точки. Скільки розв'язків має задача?



- 5.32.\* Точка перетину бісектрис двох сусідніх кутів паралелограма належить його стороні. Знайдіть відношення сусідніх сторін паралелограма.
- 5.33.\* На стороні  $BC$  паралелограма  $ABCD$  існує така точка  $M$ , що  $BM = MD = CD$ . Знайдіть кути паралелограма, якщо  $AD = BD$ .
- 5.34.\* У паралелограмі  $ABCD$  бісектриси кутів  $A$  і  $D$  ділять сторону  $BC$  на три рівних відрізки. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 40 см.
- 5.35.\* Побудуйте паралелограм:
- 1) за стороною, проведеною до неї висотою та діагональлю;
  - 2) за гострим кутом і двома висотами, проведеними до двох сусідніх сторін.
- 5.36.\* Побудуйте паралелограм:
- 1) за двома сторонами та висотою;
  - 2) за діагональлю та двома висотами, проведеними до двох сусідніх сторін.
- 5.37.\* Бісектриса кута  $A$  паралелограма  $ABCD$  перетинає сторону  $BC$  у точці  $M$ , а бісектриса кута  $AMC$  проходить через точку  $D$ . Знайдіть кути паралелограма, якщо  $\angle MDC = 45^\circ$ .
- 5.38.\* Через вершини  $A$ ,  $B$  і  $D$  паралелограма  $ABCD$  проведено прямі, перпендикулярні до прямих  $BD$ ,  $BC$  і  $CD$  відповідно. Доведіть, що проведені прямі перетинаються в одній точці.
- 5.39.\* Із вершини  $B$  паралелограма  $ABCD$  опустили перпендикуляр  $BE$  на діагональ  $AC$ . Через точку  $A$  проведено пряму  $m$ , перпендикулярну до прямої  $AD$ , а через точку  $C$  — пряму  $n$ , перпендикулярну до правої  $CD$ . Доведіть, що точка перетину прямих  $m$  і  $n$  належить прямій  $BE$ .
- 5.40.\* Коло, вписане в трикутник, дотикається до його сторін  $AB$ ,  $BC$  і  $AC$  відповідно в точках  $C_1$ ,  $A_1$  і  $B_1$ . Через точки  $A_1$ ,  $B_1$  і  $C_1$  проведено прямі, паралельні бісектрисам кутів  $A$ ,  $B$  і  $C$  відповідно. Доведіть, що проведені прямі перетинаються в одній точці.
- 5.41.\* У трикутнику  $ABC$  сторона  $AC$  найменша. На сторонах  $AB$  і  $CB$  позначено точки  $K$  і  $L$  відповідно так, що  $KA = AC = CL$ . Відрізки  $AL$  і  $KC$  перетинаються в точці  $M$ . Доведіть, що  $MJ \perp AC$ , де  $J$  — центр вписаного кола трикутника  $ABC$ .
- 5.42.\* Побудуйте паралелограм за стороною, сумою діагоналей та кутом між діагоналями.



- 5.43.**\* Через точку, яка належить куту, проведіть пряму так, щоб відрізок цієї прямої, що міститься всередині кута, даною точкою ділився б навпіл.
- 5.44.**\* Точки  $A$  і  $C$  належать куту, але не належать його сторонам. Побудуйте паралелограм  $ABCD$  так, щоб вершини  $B$  і  $D$  належали сторонам даного кута.
- 5.45.**\* На сторонах  $AB$  і  $BC$  трикутника  $ABC$  побудуйте відповідно такі точки  $M$  і  $K$ , щоб  $AM = BK$  і  $MK \parallel AC$ .
- 5.46.**\* Відрізки  $AB$  і  $CD$  завдовжки 1 перетинаються в точці  $O$  так, що  $\angle AOC = 60^\circ$ . Доведіть, що  $AC + BD \geq 1$ .
- 5.47.**\* Точки  $M$ ,  $N$  і  $K$  — відповідно середини рівних сторін  $AB$ ,  $BC$  і  $CD$  чотирикутника  $ABCD$ . Побудуйте за цими точками чотирикутник  $ABCD$ .
- 5.48.**\* Через кожну вершину паралелограма проведено пряму, перпендикулярну до діагоналі, яка не проходить через цю вершину (рис. 5.10). Доведіть, що діагоналі чотирикутника, утвореного перетинами чотирьох проведених прямих, перпендикулярні до сторін паралелограма.
- 5.49.**\* На лінійці нанесено шкалу із ціною поділки 1 см. За допомогою цієї лінійки проведіть пряму, яка перпендикулярна до даної прямої.

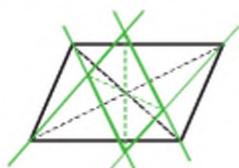


Рис. 5.10

## 6. Ознаки паралелограма

Означення паралелограма дає змогу серед чотирикутників розпізнавати паралелограми. Цій самій меті слугують такі три теореми, які називають ознаками паралелограма.

**Теорема 6.1 (обернена до теореми 5.1).** Якщо в чотирикутнику кожні дві протилежні сторони рівні, то цей чотирикутник — паралелограм.

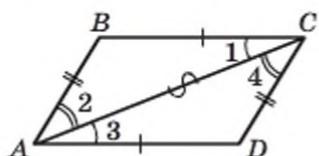


Рис. 5.10

**Доведення.** На рисунку 6.1 зображеного чотирикутника  $ABCD$ , у якому  $AB = CD$  і  $BC = AD$ . Доведемо, що чотирикутник  $ABCD$  — паралелограм.

Проведемо діагональ  $AC$ . Трикутники  $ABC$  і  $CDA$  рівні за третьою ознакою рівності трикутників. Звідси  $\angle 1 = \angle 3$ .



$\angle 2 = \angle 4$ . Кути 1 і 3 є різносторонніми при прямих  $BC$  і  $AD$  та січній  $AC$ . Отже,  $BC \parallel AD$ . Аналогічно з рівності  $\angle 2 = \angle 4$  випливає, що  $AB \parallel CD$ .

Отже, у чотирикутнику  $ABCD$  кожні дві протилежні сторони паралельні, а тому цей чотирикутник — паралелограм. ▲

**Теорема 6.2.** Якщо в чотирикутнику дві протилежні сторони рівні та паралельні, то цей чотирикутник — паралелограм.

**Доведення.** На рисунку 6.2 зображене чотирикутник  $ABCD$ , у якому  $BC = AD$  і  $BC \parallel AD$ . Доведемо, що чотирикутник  $ABCD$  — паралелограм.

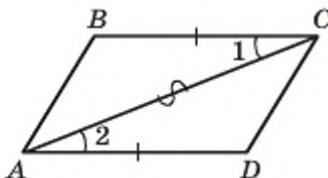


Рис. 6.2

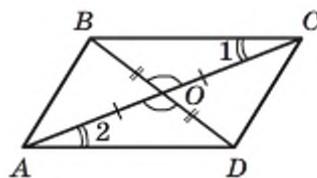


Рис. 6.3

Проведемо діагональ  $AC$ . У трикутниках  $ABC$  і  $CDA$  маемо:  $BC = AD$  за умовою, кути 1 і 2 рівні як різносторонні при паралельних прямих  $BC$  і  $AD$  та січній  $AC$ , а сторона  $AC$  — спільна. Отже, трикутники  $ABC$  і  $CDA$  рівні за першою ознакою рівності трикутників. Звідси  $AB = CD$ . Таким чином, у чотирикутнику  $ABCD$  кожні дві протилежні сторони рівні. Тому за теоремою 6.1 чотирикутник  $ABCD$  — паралелограм. ▲

**Теорема 6.3 (обернена до теореми 5.3).** Якщо в чотирикутнику діагоналі точкою перетину діляться на пів, то цей чотирикутник — паралелограм.

**Доведення.** На рисунку 6.3 зображене чотирикутник  $ABCD$ , у якому діагоналі  $AC$  і  $BD$  перетинаються в точці  $O$ , причому  $AO = OC$  і  $BO = OD$ . Доведемо, що чотирикутник  $ABCD$  — паралелограм.

Оскільки кути  $BOC$  і  $DOA$  рівні як вертикальні,  $AO = OC$  і  $BO = OD$ , то трикутники  $BOC$  і  $DOA$  рівні за першою ознакою рівності трикутників. Звідси  $BC = AD$  і  $\angle 1 = \angle 2$ . Кути 1 і 2 є різносторонніми при прямих  $BC$  і  $AD$  та січній  $AC$ . Отже,  $BC \parallel AD$ .

Таким чином, у чотирикутнику  $ABCD$  дві протилежні сторони рівні й паралельні. За теоремою 6.2 чотирикутник  $ABCD$  — паралелограм. ▲



Ви знаєте, що трикутник можна однозначно задати його сторонами, тобто задача побудови трикутника за трьома сторонами має єдиний розв'язок. Інша річ — паралелограм. На рисунку 6.4 зображені паралелограми  $ABCD$ ,  $A_1B_1C_1D_1$ ,  $A_2B_2C_2D_2$ , сторони яких рівні, тобто  $AB = A_1B_1 = A_2B_2$  і  $BC = B_1C_1 = B_2C_2$ . Проте очевидно, що самі паралелограми не є рівними.

Сказане означає, що коли чотири рейки скріпiti так, щоб утворився паралелограм, то отримана конструкція не буде жорсткою.

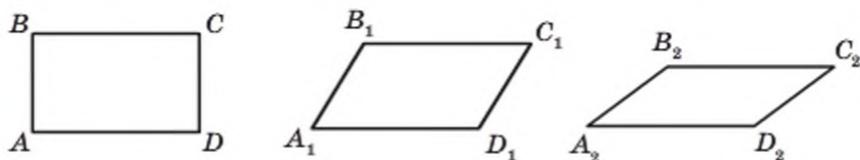


Рис. 6.4

Цю властивість паралелограма широко використовують на практиці. Завдяки його рухомості лампу можна встановлювати в зручне для роботи положення, а розсувну решітку — відсувати на потрібну відстань у дверному прорізі (рис. 6.5).



Рис. 6.5



Нерухома вершина

Куля

Заслінка

Вісь обертання

Рис. 6.6

На рисунку 6.6 зображене схему механізму, який є складовою парової машини. Зі збільшенням швидкості обертання осі кулі віддаляються від неї під дією відцентрової сили, тим самим піднімаючи заслінку, яка регулює кількість пари. Механізм названо паралелограмом Уатта на честь винахідника першої універсальної парової машини.



**Задача 1.** Доведіть, що коли в чотирикутнику кожні два протилежні кути рівні, то цей чотирикутник — паралелограм.

**Розв'язання.** На рисунку 6.7 зображене чотирикутник  $ABCD$ , у якому  $\angle A = \angle C$ ,  $\angle B = \angle D$ . Доведемо, що чотирикутник  $ABCD$  — паралелограм.

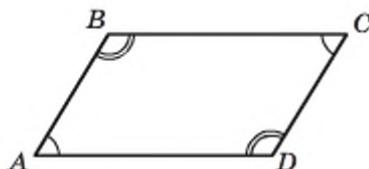


Рис. 6.7

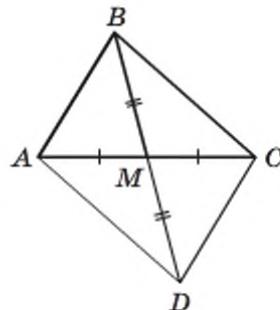


Рис. 6.8

За теоремою про суму кутів опуклого  $n$ -кутника (теорема 4.1) маємо:  $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$ . Ураховуючи, що  $\angle A = \angle C$ ,  $\angle B = \angle D$ , отримаємо:  $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = 180^\circ$ .

Оскільки кути  $A$  і  $B$  — односторонні кути при прямих  $AD$  і  $BC$  та січній  $AB$ , а їхня сума дорівнює  $180^\circ$ , то  $BC \parallel AD$ .

Аналогічно доводимо, що  $AB \parallel CD$ .

Отже, чотирикутник  $ABCD$  — паралелограм. ▲

**Задача 2.** Доведіть, що медіана  $BM$  трикутника  $ABC$  менша від половини суми сторін  $BA$  і  $BC$ .

**Розв'язання.** На продовженні медіани  $BM$  за точку  $M$  позначимо таку точку  $D$ , що  $BM = MD$  (рис. 6.8). Тоді в чотирикутнику  $ABCD$  діагоналі  $AC$  і  $DB$  точкою їхнього перетину діляться навпіл. Отже, чотирикутник  $ABCD$  — паралелограм. Звідси  $AB = DC$ . Для сторін трикутника  $BDC$  можна записати:  $BD < DC + BC$ . Тоді  $2BM < AB + BC$ ;  $BM < \frac{AB + BC}{2}$ . ▲

1. Які ознаки паралелограма ви знаєте? Сформулюйте їх.
2. Серед властивостей та ознак паралелограма вкажіть взаємно обернені теореми.
3. Яку властивість паралелограма широко використовують на практиці?

**ВПРАВИ**

- 6.1.** Доведіть, що коли сума кутів, прилеглих до будь-якої із сусідніх сторін чотирикутника, дорівнює  $180^\circ$ , то цей чотирикутник — паралелограм.
- 6.2.** Чотирикутники  $ABCD$  і  $AMKD$  — паралелограмами (рис. 6.9). Доведіть, що чотирикутник  $BMKC$  — паралелограм.

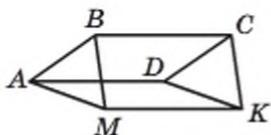


Рис. 6.9

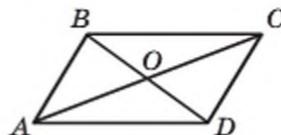


Рис. 6.10

- 6.3.** Відрізок  $AO$  — медіана трикутника  $ABD$ , відрізок  $BO$  — медіана трикутника  $ABC$  (рис. 6.10). Доведіть, що чотирикутник  $ABCD$  — паралелограм.
- 6.4.** На діагоналі  $AC$  паралелограма  $ABCD$  позначили точки  $M$  і  $K$  так, що  $AM = CK$ . Доведіть, що чотирикутник  $MBKD$  — паралелограм.
- 6.5.** Два кола мають спільний центр  $O$  (рис. 6.11). В одному з кіл проведено діаметр  $AB$ , у другому — діаметр  $CD$ . Доведіть, що чотирикутник  $ACBD$  — паралелограм.
- 6.6.** Точки  $E$  і  $F$  — відповідно середини сторін  $BC$  і  $AD$  паралелограма  $ABCD$ . Доведіть, що чотирикутник  $AECF$  — паралелограм.
- 6.7.** На сторонах  $AB$  і  $CD$  паралелограма  $ABCD$  відкладено рівні відрізки  $AM$  і  $CK$ . Доведіть, що чотирикутник  $MBKD$  — паралелограм.
- 6.8.** На сторонах паралелограма  $ABCD$  (рис. 6.12) відкладали рівні відрізки  $AM$ ,  $BK$ ,  $CE$  і  $DF$ . Доведіть, що чотирикутник  $MKEF$  — паралелограм.

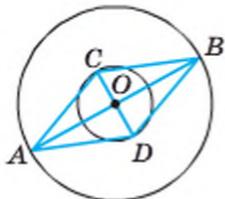


Рис. 6.11

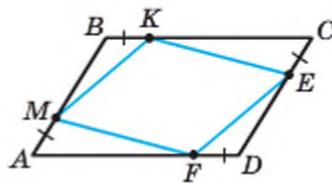


Рис. 6.12



- 6.9.** У трикутнику  $ABC$  на продовженні медіані  $AM$  за точку  $M$  відкладали відрізок  $MK$ , який дорівнює відрізку  $AM$ . Визначте вид чотирикутника  $ABKC$ .
- 6.10.** У чотирикутнику  $ABCD$  відомо, що  $AB \parallel CD$ ,  $\angle A = \angle C$ . Визначте вид чотирикутника  $ABCD$ .
- 6.11.** Бісектриса кута  $A$  паралелограма  $ABCD$  перетинає сторону  $BC$  у точці  $M$ , а бісектриса кута  $C$  — сторону  $AD$  у точці  $K$ . Доведіть, що чотирикутник  $AMCK$  — паралелограм.
- 6.12.** На рисунку 6.13 чотирикутник  $ABCD$  — паралелограм,  $\angle BCP = \angle DAE$ . Доведіть, що чотирикутник  $APCE$  — паралелограм.

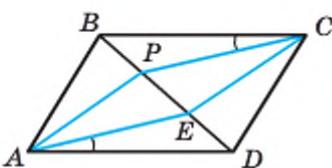


Рис. 6.13

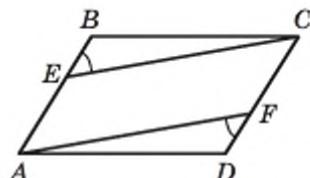


Рис. 6.14

- 6.13.** На рисунку 6.14 чотирикутник  $ABCD$  — паралелограм,  $\angle BEC = \angle DFA$ . Доведіть, що чотирикутник  $AECF$  — паралелограм.
- 6.14.** Із вершин  $B$  і  $D$  паралелограма  $ABCD$  провели перпендикуляри  $BM$  і  $DK$  до діагоналі  $AC$ . Доведіть, що чотирикутник  $BKDM$  — паралелограм.
- 6.15.** Бісектриси кутів  $A$  і  $C$  паралелограма  $ABCD$  перетинають його діагональ  $BD$  у точках  $E$  і  $F$  відповідно. Доведіть, що чотирикутник  $AECF$  — паралелограм.
- 6.16.** Побудуйте паралелограм:
- 1) за двома діагоналями та стороною;
  - 2) за двома діагоналями та кутом між ними;
  - 3) за двома діагоналями та висотою.
- 6.17.** Доведіть, що коли  $m_1, m_2, m_3$  — довжини медіан трикутника,  $p$  — його півпериметр, то  $m_1 + m_2 + m_3 < 2p$ .
- 6.18.** У трикутнику  $ABC$  медіана  $BM$  перпендикулярна до сторони  $BC$ ,  $AB : BC = 2 : 1$ . Знайдіть кут  $ABC$ .
- 6.19.** Доведіть ознаку рівності трикутників за медіаною та кутами, на які вона розбиває кут трикутника.



- 6.20. Доведіть ознаку рівності трикутників за двома сторонами та медіаною, проведеною до третьої сторони.
- 6.21. Відрізок  $AM$  — медіана трикутника  $ABC$ ,  $\angle CAM > \angle BAM$ . Доведіть, що  $AB > AC$ .
- 6.22. Через середину  $O$  діагоналі  $NP$  паралелограма  $MNKP$  проведено пряму, яка перетинає сторони  $MN$  і  $KP$  у точках  $A$  і  $B$  відповідно. Доведіть, що чотирикутник  $ANBP$  — паралелограм.
- 6.23. Через точку перетину діагоналей паралелограма  $CDEF$  проведено дві прямі, одна з яких перетинає сторони  $CD$  і  $EF$  у точках  $A$  і  $B$  відповідно, а друга — сторони  $DE$  і  $CF$  у точках  $M$  і  $K$  відповідно. Доведіть, що чотирикутник  $AMBK$  — паралелограм.
- 6.24. Точки  $M$ ,  $N$ ,  $K$  і  $P$  — середини сторін  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  і  $AD$  паралелограма  $ABCD$  відповідно. Доведіть, що чотирикутник, вершинами якого є точки перетину прямих  $AN$ ,  $BK$ ,  $CP$  і  $DM$ , — паралелограм.
- 6.25. Побудуйте трикутник за стороною, висотою, проведеною до цієї сторони, і медіаною, проведеною до іншої сторони.
- 6.26. Побудуйте трикутник  $ABC$  за медіаною  $AM$ , висотами  $BB_1$  і  $CC_1$ .
- 6.27. У шестикутнику  $ABCDEF$  сторони в парах  $AB$  і  $DE$ ,  $BC$  і  $EF$ ,  $AF$  і  $CD$  рівні й паралельні. Доведіть, що діагоналі  $AD$ ,  $BE$  і  $CF$  перетинаються в одній точці.
- 6.28. На стороні  $BC$  трикутника  $ABC$  позначили точку  $F$ . Виявилося, що відрізок  $AF$  перетинає медіану  $BD$  у точці  $E$  так, що  $AE = BC$ . Доведіть, що  $BF = FE$ .

## 7. Необхідні і достатні умови

Із курсу геометрії 7 класу ви дізналися, що більшість теорем складається з двох частин: умови (те, що дано) і висновку (те, що треба довести).

Якщо твердження, що виражає умову, позначити буквою  $A$ , а твердження, що виражає висновок, — буквою  $B$ , то формулювання теореми можна зобразити такою схемою:

якщо  $A$ , то  $B$ .



Наприклад, теорему 5.3 можна сформулювати так:

<i>A</i>	<i>B</i>
якщо      чотирикутник є паралелограмом,	то      діагоналі чотирикутника точкою перетину діляться навпіл

Тоді теорему 6.3, обернену до теореми 5.3, можна сформулювати так:

<i>A</i>	<i>B</i>
якщо      діагоналі чотирикутника точкою перетину діляться навпіл,	то      чотирикутник є паралелограмом

Часто в повсякденному житті у своїх висловлюваннях ми користуємося словами «необхідно», «достатньо». Наведемо кілька прикладів.

- Для того щоб уміти розв'язувати задачі, *необхідно* знати теореми.
- Якщо ви на математичній олімпіаді правильно розв'язали всі запропоновані задачі, то цього *достатньо* для того, щоби посісти перше місце.

Уживання слів «необхідно» і «достатньо» тісно пов'язане з теоремами.

Розглянемо теорему:

<i>A</i>	<i>B</i>
якщо      натуральне число кратне 10,	то      це число кратне 5

Умова *A* є достатньою для висновку *B*. Разом з тим подільність числа націло на 5 (твірдження *B*) необхідна для подільності числа націло на 10 (твірдження *A*).

Наведемо ще один приклад:

<i>A</i>	<i>B</i>
якщо      два кути є вертикальними,	то      ці кути рівні

У цій теоремі твірдження *A* є достатньою умовою для твірдження *B*, тобто для того, щоб два кути були рівними, *достатньо*, щоб вони були вертикальними. У цій самій теоремі твірдження *B* є необхідною умовою для твірдження *A*, тобто для того, щоб два кути були вертикальними, *необхідно*, щоб вони були рівними.



Зазначимо, що твердження  $B$  не є достатньою умовою для твердження  $A$ . Справді, якщо два кути рівні, то це зовсім не означає, що вони вертикальні.

Отже, у будь-якій теоремі виду якщо  $A$ , то  $B$  твердження  $A$  є достатнім для твердження  $B$ , а твердження  $B$  — необхідним для твердження  $A$ .

Якщо справедлива не тільки теорема

якщо  $A$ , то  $B$ ,

але й обернена теорема

якщо  $B$ , то  $A$ ,

то  $A$  є **необхідною і достатньою** умовою для  $B$ , а  $B$  — **необхідною і достатньою** умовою для  $A$ .

Наприклад, теореми 6.3 і 5.3 є взаємно оберненими. Мовою «необхідно — достатньо» цей факт можна сформулювати одним із двох способів:

- **для того щоб чотирикутник був паралелограмом, необхідно і достатньо, щоб його діагоналі точкою перетину ділилися навпіл;**
- **для того щоб діагоналі чотирикутника точкою перетину ділилися навпіл, необхідно і достатньо, щоб цей чотирикутник був паралелограмом.**

Наголосимо, що коли в теоремі є слова «необхідно і достатньо», то вона об'єднує дві теореми: пряму й обернену (прямою теоремою може бути будь-яка з двох теорем, тоді друга буде оберненою). Отже, доведення такої теореми має складатися з двох частин: доведень прямої та оберненої теорем. Теорему, яка об'єднує пряму та обернену теореми, називають **критерієм**.

Іноді замість «необхідно і достатньо» говорять «тоді й тільки тоді». Наприклад, взаємно обернені теореми 5.1 і 6.1 можна об'єднати в такий критерій:

**чотирикутник є паралелограмом тоді й тільки тоді, коли кожні дві його протилежні сторони рівні.**



1. З яких двох частин складається більшість теорем?
2. Наведіть приклади з повсякденного життя, коли ми у своїх висловлюваннях користуємося словами «необхідно» і «достатньо».
3. Формулювання теореми подано у вигляді схеми «якщо  $A$ , то  $B$ ». Як називають твердження  $A$  і  $B$ ?
4. Що означає, коли у формулуванні теореми є слова «необхідно і достатньо»?



## ВПРАВИ

- 7.1.** У формуллюванні теореми вкажіть необхідну умову й достатню умову:
- 1) якщо кути суміжні, то їхня сума дорівнює  $180^\circ$ ;
  - 2) якщо трикутник є рівностороннім, то він є рівнобедреним;
  - 3) якщо прямі  $a$  і  $b$  перпендикулярні до прямої  $c$ , то  $a \parallel b$ ;
  - 4) якщо два трикутники рівні, то рівні їхні відповідні кути;
  - 5) якщо діаметр перпендикулярний до хорди, то він ділить її навпіл.
- 7.2.** Сформулюйте теорему, обернену до даної. Отриману пару взаємно обернених теорем замініть однією теоремою, використовуючи мову «необхідно — достатньо».
- 1) Якщо точка належить серединному перпендикуляру відрізка, то вона рівновіддалена від кінців відрізка.
  - 2) Якщо трикутник є рівнобедреним, то два його кути рівні.
  - 3) Якщо медіана трикутника збігається з його висотою, то трикутник є рівнобедреним.
  - 4) Якщо висота трикутника збігається з його бісектрисою, то трикутник є рівнобедреним.
  - 5) Якщо різносторонні кути, утворені при перетині двох прямих січною, рівні, то прямі паралельні.
  - 6) Якщо сума односторонніх кутів, утворених при перетині двох прямих січною, дорівнює  $180^\circ$ , то прямі паралельні.
  - 7) Якщо відповідні кути, утворені при перетині двох прямих січною, рівні, то прямі паралельні.
  - 8) Катет, що лежить проти кута трикутника, величина якого дорівнює  $30^\circ$ , дорівнює половині гіпотенузи.
  - 9) Якщо пряма є дотичною до кола, то вона перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.
  - 10) Якщо відстань від центра кола до деякої прямої дорівнює радіусу кола, то ця пряма є дотичною до даного кола.
  - 11) Якщо трикутник є рівностороннім, то центри його вписаного та описаного кіл збігаються.
  - 12) Якщо хорди одного кола рівновіддалені від його центра, то вони рівні.
  - 13) Якщо бісектриса зовнішнього кута трикутника паралельна його стороні, то трикутник є рівнобедреним.
  - 14) Якщо дві висоти трикутника рівні, то трикутник є рівнобедреним.



- 15) Якщо в чотирикутнику кожні дві протилежні сторони рівні, то цей чотирикутник — паралелограм.
- 16) Якщо в чотирикутнику дві протилежні сторони рівні та паралельні, то цей чотирикутник — паралелограм.

## 8. Прямоугольник. Ромб. Квадрат

Паралелограм — це чотирикутник, проте очевидно, що не кожний чотирикутник є паралелограмом. У цьому разі говорять, що паралелограм — це окремий вид чотирикутника. Рисунок 8.1 ілюструє цей факт.

Існують також окремі види паралелограмів.



Рис. 8.1

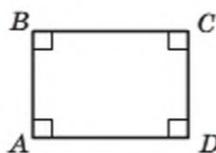


Рис. 8.2

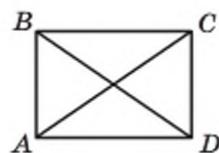


Рис. 8.3

**Означення.** Прямоугольником називають паралелограм, у якого всі кути прямі.

На рисунку 8.2 зображене прямоугольник  $ABCD$ .

З означення випливає, що прямоугольник має всі властивості паралелограма. У прямоугольнику:

- протилежні сторони рівні;
- діагоналі точкою перетину діляться наспіл.

Проте прямоугольник має свої особливі властивості, яких не має паралелограм, відмінний від прямоугольника. Так, з означення випливає, що всі кути прямоугольника рівні. Ще одну властивість прямоугольника встановлює така теорема.

**Теорема 8.1.** Діагоналі прямоугольника рівні.

**Доведення.** На рисунку 8.3 зображене прямоугольник  $ABCD$ . Доведемо, що його діагоналі  $AC$  і  $BD$  рівні.

У прямоугольних трикутниках  $ABD$  і  $DCA$  катети  $AB$  і  $DC$  рівні, а катет  $AD$  спільний. Тому трикутники  $ABD$  і  $DCA$  рівні за двома катетами. Звідси  $BD = AC$ .  $\blacktriangleleft$

Означення прямоугольника дає змогу серед паралелограмів розпізнавати прямоугольники. Цій самій меті слугують такі дві теореми, які називають ознаками прямоугольника.



**Теорема 8.2.** Якщо один із кутів паралелограма прямий, то цей паралелограм — прямокутник.

Доведіть цю теорему самостійно.

**Теорема 8.3.** Якщо діагоналі паралелограма рівні, то цей паралелограм — прямокутник.

**Доведення.** На рисунку 8.4 зображеного паралелограм  $ABCD$ , діагоналі  $AC$  і  $BD$  якого рівні. Доведемо, що паралелограм  $ABCD$  — прямокутник.

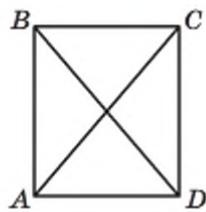


Рис. 8.4

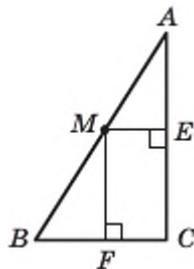


Рис. 8.5

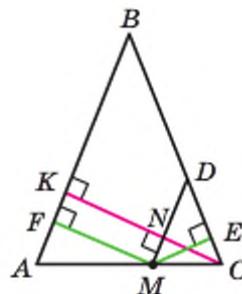


Рис. 8.6

Розглянемо трикутники  $ABD$  і  $DCA$ . У них  $AB = CD$ ,  $BD = AC$ ,  $AD$  — спільна сторона. Отже, ці трикутники рівні за третьою ознакою рівності трикутників. Звідси  $\angle BAD = \angle CDA$ . Ці кути є односторонніми при паралельних прямих  $AB$  і  $DC$  та січній  $AD$ . Таким чином,  $\angle BAD + \angle CDA = 180^\circ$ . Тоді  $\angle BAD = \angle CDA = 90^\circ$ . Тому за теоремою 8.2 паралелограм  $ABCD$  — прямокутник. ▲

**Задача 1.** Із точки  $M$  гіпотенузи  $AB$  прямокутного трикутника  $ABC$  опущено перпендикуляри  $ME$  і  $MF$  на катети (рис. 8.5). Знайдіть положення точки  $M$  на гіпотенузі  $AB$ , при якому довжина відрізка  $EF$  буде найменшою.

**Розв'язання.** Очевидно, що чотирикутник  $FMEC$  — прямокутник. Тоді  $EF = MC$ . Отже, задачу зведено до знаходження положення точки  $M$  на гіпотенузі  $AB$ , при якому довжина відрізка  $CM$  буде найменшою. Зрозуміло, що такому положенню відповідає основа висоти трикутника  $ABC$ , проведеної з вершини  $C$ . ▲

**Задача 2.** Доведіть, що сума відстаней від довільної точки основи рівнобедреного трикутника до його бічних сторін є сталою та дорівнює висоті трикутника, проведений до бічної сторони.



**Розв'язання.** Нехай  $M$  — довільна точка основи  $AC$  рівнобедреного трикутника  $ABC$ . Проведемо  $MF \perp AB$ ,  $ME \perp BC$ ,  $CK \perp AB$  (рис. 8.6). Доведемо, що  $ME + MF = CK$ .

Проведемо  $MD \parallel AB$ . Оскільки  $\angle DMC = \angle BAC = \angle BCA$ , то трикутник  $MDC$  рівнобедрений. Нехай  $N$  — точка перетину відрізків  $CK$  і  $MD$ . Оскільки  $CK \perp AB$  і  $MD \parallel AB$ , то  $CN$  — висота трикутника  $MDC$ . Відрізки  $CN$  і  $ME$  рівні як висоти рівнобедреного трикутника, проведені до бічних сторін. Очевидно, що чотирикутник  $MFKN$  — прямоокутник. Звідси  $MF = KN$ .

Маємо:  $MF + ME = NK + CN = CK$ .  $\triangle$

У п. 28 ви ознайомитеся з методом, за допомогою якого можна розв'язати цю задачу в інший спосіб.

**Означення.** Ромбом називають паралелограм, у якого всі сторони рівні.

На рисунку 8.7 зображено ромб  $ABCD$ .

З означення випливає, що ромб має всі властивості паралелограма. У ромбі:

- протилежні кути рівні;
- діагоналі точкою перетину діляться наспіл.

Проте ромб має і свої особливі властивості.

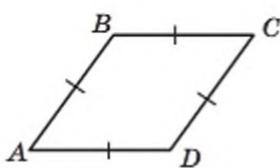


Рис. 8.7

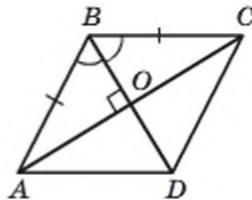


Рис. 8.8

**Теорема 8.4.** Діагоналі ромба перпендикулярні та є бісектрисами його кутів.

**Доведення.** На рисунку 8.8 зображено ромб  $ABCD$ , діагоналі якого перетинаються в точці  $O$ . Доведемо, що  $BD \perp AC$  і  $\angle ABO = \angle CBO$ .

Оскільки за означенням ромба всі його сторони рівні, то трикутник  $ABC$  рівнобедрений ( $AB = BC$ ). За властивістю діагоналей паралелограма  $AO = OC$ . Тоді відрізок  $BO$  є медіаною трикутника  $ABC$ , а отже, і висотою та бісектрисою цього трикутника. Таким чином,  $BD \perp AC$  і  $\angle ABO = \angle CBO$ .  $\triangle$



Розпізнавати ромби серед паралелограмів дають змогу не лише означення ромба, а й такі дві теореми, які називають ознаками ромба.

**Теорема 8.5.** Якщо діагоналі паралелограма перпендикулярні, то цей паралелограм — ромб.

**Теорема 8.6.** Якщо діагональ паралелограма є бісектрисою його кута, то цей паралелограм — ромб.

Доведіть ці теореми самостійно.

**Задача 3.** У ромбі  $ABCD$  позначено точку  $M$  так, що трикутник  $BCM$  є рівностороннім (рис. 8.9). Бісектриса кута  $ABM$  перетинає діагональ  $AC$  у точці  $F$ . Доведіть, що точки  $F, M$  і  $D$  лежать на одній прямій.

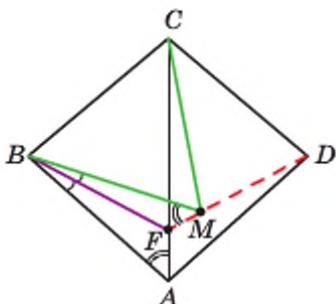


Рис. 8.9

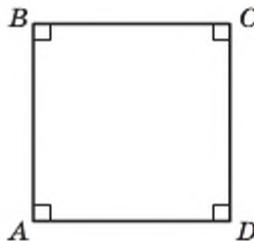


Рис. 8.10

**Розв'язання.** Нехай  $\angle BAC = \alpha$ . Маємо:  $AB = BC = BM$ ,  $\angle ABF = \angle MBF$ . Отже, трикутники  $ABF$  і  $MBF$  рівні за двома сторонами та кутом між ними. Звідси  $\angle FMB = \alpha$ .

Маємо:  $\angle BAD = \angle BCD = 2\alpha$ . Тоді  $\angle MCD = 2\alpha - 60^\circ$ . Оскільки  $CM = BC$ , то  $CM = CD$  і трикутник  $MCD$  рівнобедрений. Звідси  $\angle CMD = \frac{1}{2}(180^\circ - (2\alpha - 60^\circ)) = 120^\circ - \alpha$ . Маємо:  $\angle FMD = \angle FMB + \angle BMC + \angle CMD = \alpha + 60^\circ + 120^\circ - \alpha = 180^\circ$ . Отже, кут  $FMD$  — розгорнутий, тобто точки  $F, M$  і  $D$  лежать на одній прямій. ▲

**Означення.** Квадратом називають прямокутник, у якого всі сторони рівні.

На рисунку 8.10 зображеного квадрат  $ABCD$ .

З наведеної означення випливає, що квадрат — це ромб, у якого всі кути рівні. Отже, квадрат є окремим видом і прямокутника,



і ромба. Це ілюструє рисунок 8.11. Тому квадрат має всі властивості прямокутника та ромба. Звідси випливає, що:

- усі кути квадрата прямі;
- діагоналі квадрата рівні, перпендикулярні та є бісектрисами його кутів.



Рис. 8.11

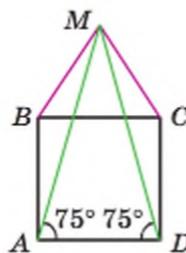


Рис. 8.12

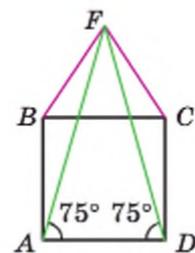


Рис. 8.13

**Задача 4.** На стороні  $BC$  квадрата  $ABCD$  поза ним побудовано рівнобедрений трикутник  $BMC$  з основою  $BC$  так, що  $\angle MAD = 75^\circ$  (рис. 8.12). Знайдіть кут  $BMC$ .

**Розв'язання.** Маємо:  $\angle MBC = \angle MCB$ . Тоді  $\angle MBA = \angle MCD$ . Отже, трикутники  $ABM$  і  $DCM$  рівні за першою ознакою рівності трикутників. Звідси  $\angle MDA = 75^\circ$ .

Побудуємо на стороні  $BC$  квадрата  $ABCD$  поза ним рівносторонній трикутник  $BFC$  (рис. 8.13). Маємо:  $\angle ABF = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$ . Оскільки  $AB = BF$ , то  $\angle BAF = \angle BFA = 15^\circ$ . Звідси  $\angle FAD = 75^\circ$ . Analogічно доводимо, що  $\angle FDA = 75^\circ$ .

У заданій півплощині відносно прямої  $AD$  існує лише один рівнобедрений трикутник з основою  $AD$  і кутами при основі, що дорівнюють  $75^\circ$ . Отже, точки  $F$  і  $M$  збігаються та  $\angle BMC = 60^\circ$ . ▲



1. Яку фігуру називають прямокутником?
2. Які властивості має прямокутник?
3. Яку особливу властивість мають діагоналі прямокутника?
4. За якими ознаками можна встановити, що паралелограм є прямокутником?
5. Яку фігуру називають ромбом?
6. Які властивості має ромб?
7. Які особливі властивості мають діагоналі ромба?



8. За якими ознаками можна встановити, що паралелограм є ромбом?
9. Яку фігуру називають квадратом?
10. Який ромб є квадратом?
11. Які властивості має квадрат?



## ВПРАВИ

- 8.1.° Діагоналі прямокутника  $ABCD$  (рис. 8.14) перетинаються в точці  $O$ ,  $\angle ADB = 30^\circ$ ,  $BD = 10$  см. Знайдіть периметр трикутника  $AOB$ .
- 8.2.° Кут між діагоналями прямокутника дорівнює  $60^\circ$ , а менша сторона прямокутника дорівнює 8 см. Знайдіть діагональ прямокутника.
- 8.3.° Точка  $M$  — середина сторони  $BC$  прямокутника  $ABCD$ ,  $MA \perp MD$ , периметр прямокутника дорівнює 36 см. Знайдіть сторони прямокутника.
- 8.4.° Гіпотенуза рівнобедреного прямокутного трикутника дорівнює 55 см. Прямокутник  $ABCD$  побудовано так, що дві його вершини  $A$  і  $D$  належать гіпотенузі, а дві інші — катетам даного трикутника. Знайдіть сторони прямокутника, якщо  $AB : BC = 3 : 5$ .
- 8.5.° У трикутнику  $ABC$  відомо, що  $\angle C = 90^\circ$ ,  $AC = BC = 6$  см. Прямокутник  $CMKN$  побудовано так, що точка  $M$  належить катету  $AC$ , точка  $N$  — катету  $BC$ , а точка  $K$  — гіпотенузі  $AB$ . Знайдіть периметр прямокутника  $CMKN$ .
- 8.6.° Доведіть, що коли діагоналі паралелограма утворюють рівні кути з однією з його сторін, то цей паралелограм є прямокутником.
- 8.7.° Побудуйте прямокутник за діагоналлю та кутом між діагоналлю та стороною.
- 8.8.° Побудуйте прямокутник за діагоналлю та кутом між діагоналями.
- 8.9.° Побудуйте прямокутник за стороною та кутом між діагоналями, який протилежний даній стороні.
- 8.10.° Одна з діагоналей ромба дорівнює його стороні. Знайдіть кути ромба.

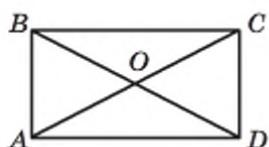


Рис. 8.14



- 8.11.° Знайдіть кути ромба, якщо його периметр дорівнює 24 см, а висота — 3 см.
- 8.12.° Знайдіть периметр ромба  $ABCD$ , якщо  $\angle A = 60^\circ$ ,  $BD = 9$  см.
- 8.13.° Точки  $M$  і  $K$  — відповідно середини сторін  $AB$  і  $BC$  ромба  $ABCD$ . Доведіть, що  $MD = KD$ .
- 8.14.° На сторонах  $AB$  і  $AD$  ромба  $ABCD$  відкладено рівні відрізки  $AE$  і  $AF$  відповідно. Доведіть, що  $\angle CEF = \angle CFE$ .
- 8.15.° Доведіть, що висоти ромба рівні.
- 8.16.° Висота ромба, проведена з вершини його тупого кута, ділить сторону ромба навпіл. Менша діагональ ромба дорівнює 4 см. Знайдіть кути та периметр ромба.
- 8.17.° Доведіть, що діагональ ромба ділить навпіл кут між висотами ромба, проведеними з тієї самої вершини, що й діагональ.
- 8.18.° Відрізок  $AM$  — бісектриса трикутника  $ABC$ . Через точку  $M$  проведено пряму, яка паралельна стороні  $AC$  і перетинає сторону  $AB$  у точці  $K$ , та пряму, яка паралельна стороні  $AB$  і перетинає сторону  $AC$  у точці  $D$ . Доведіть, що  $AM \perp DK$ .
- 8.19.° Бісектриси кутів  $A$  і  $B$  паралелограма  $ABCD$  перетинають його сторони  $BC$  і  $AD$  у точках  $F$  і  $E$  відповідно. Визначте вид чотирикутника  $ABFE$ .
- 8.20.° У трикутнику  $ABC$  проведено серединний перпендикуляр його бісектриси  $BD$ , який перетинає сторони  $AB$  і  $BC$  у точках  $K$  і  $P$  відповідно. Визначте вид чотирикутника  $BKDP$ .
- 8.21.° Побудуйте ромб за висотою та кутом.
- 8.22.° Побудуйте ромб за висотою та діагоналлю.
- 8.23.° Побудуйте ромб за діагоналлю та кутом, вершина якого належить цій діагоналі.
- 8.24.° Побудуйте ромб за діагоналлю та протилежним їй кутом ромба.
- 8.25.° На стороні  $BC$  квадрата  $ABCD$  (рис. 8.15) позначили точку  $K$  так, що  $\angle AKB = 74^\circ$ . Знайдіть кут  $CAK$ .
- 8.26.° На стороні  $BC$  квадрата  $ABCD$  позначили точку  $K$  так, що  $AK = 2BK$ . Знайдіть кут  $KAD$ .
- 8.27.° Через вершини квадрата проведено прямі, паралельні його діагоналям. Доведіть, що точки перетину цих прямих є вершинами квадрата.

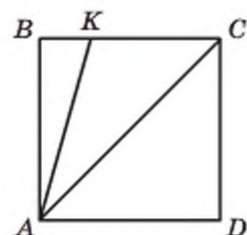


Рис. 8.15



- 8.28.° У прямокутному трикутнику через точку перетину бісектриси прямого кута та гіпотенузи проведено прямі, паралельні катетам. Доведіть, що чотирикутник, який утворився, є квадратом.
- 8.29.° Точки  $M, K, N, P$  є відповідно серединами сторін  $AB, BC, CD$  і  $AD$  квадрата  $ABCD$ . Доведіть, що чотирикутник  $MKNP$  — квадрат.
- 8.30.° У трикутнику  $ABC$  відомо, що  $\angle C = 90^\circ$ ,  $AC = BC = 14$  см. Дві сторони квадрата  $CDEF$  лежать на катетах трикутника  $ABC$ , а вершина  $E$  належить гіпотенузі  $AB$ . Знайдіть периметр квадрата  $CDEF$ .
- 8.31.° У квадраті  $ABCD$  позначено точку  $M$  так, що трикутник  $AMB$  рівносторонній. Доведіть, що трикутник  $CMD$  рівнобедрений.
- 8.32.° Доведіть, що коли діагоналі паралелограма рівні та перпендикулярні, то цей паралелограм є квадратом.
- 8.33.° Чотирикутники  $ABCD, DEF M, MNKL, LPOS, SQTV$  — квадрати (рис. 8.16). Знайдіть суму довжин тих сторін квадратів, які не лежать на прямій  $AV$ , якщо довжина відрізка  $AV$  дорівнює 16 см.

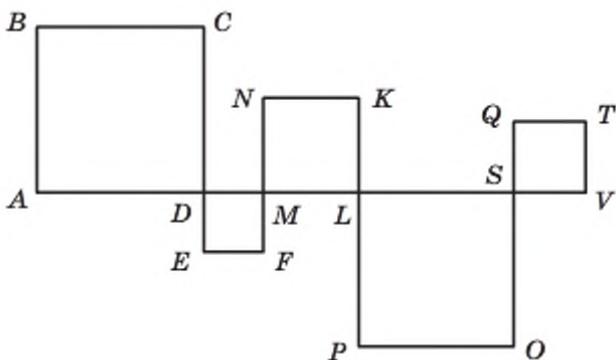


Рис. 8.16

- 8.34.° Доведіть, що медіана прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, дорівнює її половині.
- 8.35.° Доведіть, що точки перетину бісектрис кутів паралелограма, який не є ромбом, є вершинами прямокутника.
- 8.36.° У прямокутнику  $ABCD$  відомо, що  $AD = 9$  см,  $\angle BDA = 30^\circ$ . На сторонах  $BC$  і  $AD$  позначено відповідно точки  $M$  і  $K$  так, що утворився ромб  $AMCK$ . Знайдіть сторону цього ромба.



- 8.37. У прямокутнику  $ABCD$  відомо, що  $\angle BCA : \angle DCA = 1 : 5$ ,  $AC = 18$  см. Знайдіть відстань від точки  $C$  до діагоналі  $BD$ .
- 8.38. Доведіть, що точки перетину бісектрис кутів прямокутника, який не є квадратом, є вершинами квадрата.
- 8.39. Вершини  $M$  і  $K$  рівностороннього трикутника  $AMK$  належать сторонам  $BC$  і  $CD$  квадрата  $ABCD$ . Доведіть, що  $MK \parallel BD$ .
- 8.40. Дано точки  $M$  і  $K$ . Побудуйте квадрат  $ABCD$  так, щоб точка  $M$  була серединою сторони  $AB$ , а точка  $K$  — серединою сторони  $BC$ .
- 8.41. У прямокутнику  $ABCD$  відомо, що  $AD = 2AB$ . На стороні  $BC$  позначено точку  $M$  так, що  $\angle AMB = \angle AMD$ . Знайдіть ці кути.
- 8.42. Дано точки  $A$ ,  $B$  і  $M$ . Побудуйте ромб  $ABCD$ , якщо відомо відстань від точки  $M$  до точки  $K$  — середини сторони  $CD$ .
- 8.43. На сторонах  $AB$  і  $BC$  паралелограма  $ABCD$  поза ним побудовано квадрати  $APQB$  і  $BMNC$ . Доведіть, що відрізки  $DP$  і  $DN$  рівні та перпендикулярні.
- 8.44. Серединний перпендикуляр діагоналі  $AC$  прямокутника  $ABCD$  перетинає сторону  $BC$  у точці  $M$  так, що  $BM : MC = 1 : 2$ . Знайдіть кути, на які діагональ прямокутника ділить його кут.
- 8.45. Серединний перпендикуляр діагоналі  $AC$  прямокутника  $ABCD$  перетинає сторону  $BC$  і утворює з нею кут, який дорівнює куту між діагоналями. Знайдіть цей кут.
- 8.46. Побудуйте прямокутник:
- 1) за діагоналлю та різницею двох сторін;
  - 2) за периметром і діагоналлю;
  - 3) за периметром і кутом між діагоналями.
- 8.47. Побудуйте ромб:
- 1) за гострим кутом і різницею діагоналей;
  - 2) за гострим кутом і сумою сторони та висоти.
- 8.48. Через довільну точку, яка належить квадрату, проведено дві перпендикулярні прямі, кожна з яких перетинає дві протилежні сторони квадрата. Доведіть, що відрізки цих прямих, які належать квадрату, рівні.
- 8.49. На сторонах квадрата  $ABCD$  вибрано точки  $M$ ,  $N$ ,  $P$  і  $Q$  так, що  $MP = NQ$  (рис. 8.17). Доведіть, що  $MP \perp NQ$ .
- 8.50. Побудуйте квадрат:
- 1) за сумою діагоналі та сторони;
  - 2) за різницю діагоналі та сторони.

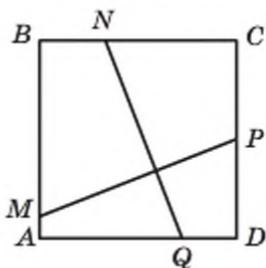


Рис. 8.17



- 8.51.\* У квадраті  $ABCD$  вибрано точку  $M$  так, що трикутник  $AMD$  рівносторонній. Поза квадратом вибрано точку  $K$  так, що трикутник  $AKB$  рівносторонній. Доведіть, що точки  $K, M$  і  $C$  лежать на одній прямій.
- 8.52.\* У паралелограмі  $ABCD$  відомо, що  $\angle ABD = 3 \angle DBC$ ,  $BC = 2AB$ . Знайдіть кути паралелограма.
- 8.53.\* Точки  $M$  і  $N$  — відповідно середини сторін  $BC$  і  $CD$  прямокутника  $ABCD$ . Відрізки  $BN$  і  $DM$  перетинаються в точці  $P$ . Доведіть, що  $\angle MAN = \angle BPM$ .
- 8.54.\* Дано паралелограм  $ABCD$ . Бісектриси кутів  $BAC$  і  $BDC$  перетинаються в точці  $M$  так, що  $\angle AMD = 45^\circ$ . Доведіть, що чотирикутник  $ABCD$  — ромб.
- 8.55.\* Дано точки  $A, C$  і  $M$ . Побудуйте ромб  $ABCD$ , якщо відомо відстань від точки  $M$  до точки  $N$  — середини сторони  $BC$ .
- 8.56.\* У квадраті  $ABCD$  позначено точку  $O$  так, що  $\angle OAD = \angle ODA = 15^\circ$ . Доведіть, що трикутник  $BOC$  рівносторонній.
- 8.57.\* У прямокутнику  $ABCD$  відомо, що  $AD = 3AB$ . На стороні  $AD$  позначено точку  $N$  так, що  $AN = 2ND$ . Доведіть, що  $\angle ANB + \angle ADB = 45^\circ$ .
- 8.58.\* На стороні  $AB$  і діагоналі  $AC$  квадрата  $ABCD$  позначили відповідно точки  $P$  і  $Q$  так, що  $AP : PB = 3 : 2$ ,  $AQ : QC = 4 : 1$ . Знайдіть кути трикутника  $PQD$ .

## 9. Середня лінія трикутника

**Означення.** Середньою лінією трикутника називають відрізок, який сполучає середини двох його сторін.

На рисунку 9.1 відрізки  $MN$ ,  $NE$ ,  $EM$  — середні лінії трикутника  $ABC$ .

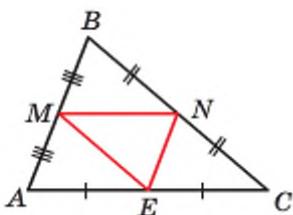


Рис. 9.1

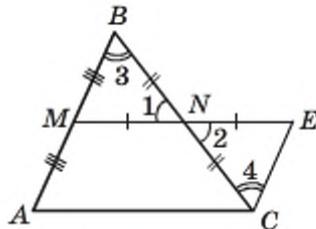


Рис. 9.2



**Теорема 9.1.** Середня лінія трикутника, яка сполучає середини двох його сторін, паралельна третьій стороні та дорівнює її половині.

**Доведення.** Нехай  $MN$  — середня лінія трикутника  $ABC$  (рис. 9.2). Доведемо, що  $MN \parallel AC$  і  $MN = \frac{1}{2}AC$ .

На прямій  $MN$  позначимо точку  $E$  так, що  $MN = NE$  (рис. 9.2). Сполучимо відрізком точки  $E$  і  $C$ . Оскільки точка  $N$  є серединою відрізу  $BC$ , то  $BN = NC$ . Кути 1 і 2 рівні як вертикальні. Отже, трикутники  $MBN$  і  $ECN$  рівні за першою ознакою рівності трикутників. Звідси  $MB = EC$  і  $\angle 3 = \angle 4$ . Ураховуючи, що  $AM = BM$ , отримаємо:  $EC = AM$ . Кути 3 і 4 є різносторонніми при прямих  $AB$  і  $EC$  та січній  $BC$ . Тоді  $AB \parallel EC$ .

Таким чином, у чотирикутнику  $AMEC$  сторони  $AM$  і  $EC$  паралельні та рівні. Отже, за теоремою 6.2 чотирикутник  $AMEC$  є паралелограмом. Звідси  $ME \parallel AC$ , тобто  $MN \parallel AC$ .

Також  $ME = AC$ . Оскільки  $MN = \frac{1}{2}ME$ , то  $MN = \frac{1}{2}AC$ .  $\blacktriangleleft$

**Задача 1.** Доведіть, що середини сторін чотирикутника є вершинами паралелограма.

**Розв'язання.** У чотирикутнику  $ABCD$  точки  $M$ ,  $N$ ,  $K$  і  $P$  — середини сторін  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  і  $AD$  відповідно (рис. 9.3).

Відрізок  $MN$  — середня лінія трикутника  $ABC$ . За властивістю середньої лінії трикутника  $MN \parallel AC$  і  $MN = \frac{1}{2}AC$ .

Відрізок  $PK$  — середня лінія трикутника  $ADC$ . За властивістю середньої лінії трикутника  $PK \parallel AC$ ,  $PK = \frac{1}{2}AC$ .

Оскільки  $MN \parallel AC$  і  $PK \parallel AC$ , то  $MN \parallel PK$ .

З рівностей  $MN = \frac{1}{2}AC$  і  $PK = \frac{1}{2}AC$  отримуємо:  $MN = PK = \frac{1}{2}AC$ .

Отже, у чотирикутнику  $MNKP$  сторони  $MN$  і  $PK$  рівні та паралельні, тому чотирикутник  $MNKP$  — паралелограм.  $\blacktriangleleft$

**Задача 2.** У чотирикутнику  $ABCD$  відомо, що  $\angle ACD = \angle ABD = 90^\circ$ . Точки  $M$  і  $N$  — середини діагоналей  $AC$  і  $BD$  відповідно. Доведіть, що пряма, яка перпендикулярна до відрізу  $MN$  і проходить через точку перетину діагоналей, перетинає сторону  $BC$  у її середині.

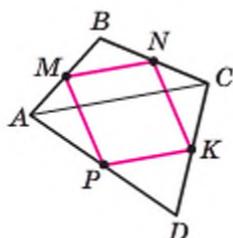


Рис. 9.3

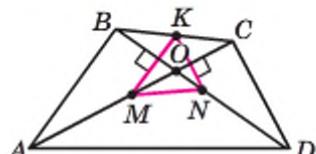


Рис. 9.4

*Розв'язання.* Нехай точка  $K$  — середина сторони  $BC$ . Тоді відрізки  $MK$  і  $NK$  — середні лінії трикутників  $ABC$  і  $DBC$  відповідно (рис. 9.4). Маємо:  $KM \parallel AB$ ,  $AB \perp BD$ , тоді  $KM \perp BD$ . Аналогічно отримуємо, що  $KN \perp AC$ . Отже, точка  $O$  — точка перетину діагоналей  $AC$  і  $BD$  — є ортоцентром трикутника  $MKN$ . Звідси  $KO \perp MN$ . Оскільки через точку  $O$  можна провести єдину пряму, перпендикулярну до відрізка  $MN$ , то твердження задачі доведено.  $\triangle$



- Що називають середньою лінією трикутника?
- Скільки середніх ліній можна провести в трикутнику?
- Які властивості має середня лінія трикутника?



### ВПРАВИ

- Доведіть, що середні лінії трикутника розбивають його на чотири рівних трикутники.
- Точки  $E$  і  $F$  — відповідно середини сторін  $AB$  і  $BC$  трикутника  $ABC$ . Знайдіть сторону  $AC$ , якщо вона на 7 см більша за відрізок  $EF$ .
- Доведіть, що середня лінія  $DE$  трикутника  $ABC$  (точки  $D$  і  $E$  належать сторонам  $AB$  і  $BC$  відповідно) та його медіана  $BM$  точкою перетину діляться навпіл.
- Знайдіть кути трикутника, дві середні лінії якого рівні та перпендикулярні.
- Середня лінія рівнобедреного трикутника, паралельна основі, дорівнює 6 см. Знайдіть сторони даного трикутника, якщо його периметр дорівнює 46 см.
- Доведіть, що відрізки, які сполучають середини протилежних сторін чотирикутника, точкою перетину діляться навпіл.
- Сума діагоналей чотирикутника дорівнює 28 см. Знайдіть периметр чотирикутника, вершини якого є серединами сторін даного чотирикутника.



- 9.8.° Вершинами чотирикутника є середини сторін ромба з діагоналями 8 см і 14 см. Визначте вид чотирикутника та знайдіть його сторони.
- 9.9.° Вершинами чотирикутника є середини сторін прямокутника з діагоналлю 12 см. Визначте вид чотирикутника та знайдіть його сторони.
- 9.10.° Доведіть, що вершини трикутника рівновіддалені від прямої, на якій лежить його середня лінія.
- 9.11.° Доведіть, що середини всіх відрізків, які сполучають дану точку з точками даної прямої, лежать на одній прямій.
- 9.12.° Відрізки, які сполучають середини протилежних сторін опуклого чотирикутника, рівні. Доведіть, що діагоналі цього чотирикутника перпендикулярні.
- 9.13.° Діагоналі опуклого чотирикутника рівні. Доведіть, що відрізки, які сполучають середини його протилежних сторін, перпендикулярні.
- 9.14.° На сторонах  $AB$  і  $BC$  трикутника позначено відповідно точки  $M$  і  $K$  так, що  $AM = 3BM$ ,  $CK = 3BK$ . Доведіть, що  $MK \parallel AC$ , і знайдіть відрізок  $MK$ , якщо  $AC = 16$  см.
- 9.15.° Кути  $BAD$  і  $BCE$  — зовнішні кути трикутника  $ABC$ . Із вершини  $B$  проведено перпендикуляри  $BM$  і  $BK$  до бісектрис кутів  $BAD$  і  $BCE$  відповідно. Знайдіть відрізок  $MK$ , якщо периметр трикутника  $ABC$  дорівнює 18 см.
- 9.16.° Побудуйте трикутник за серединами трьох його сторін.
- 9.17.° Побудуйте паралелограм за серединами трьох його сторін.
- 9.18.° Доведіть, що відрізки, які сполучають середини протилежних сторін опуклого чотирикутника, і відрізок, який сполучає середини діагоналей, перетинаються в одній точці.
- 9.19.° У чотирикутнику  $ABCD$  сума кутів, прилеглих до сторони  $AD$ , дорівнює  $90^\circ$ . Точки  $K$  і  $L$  — середини сторін  $BC$  і  $AD$  відповідно, точки  $M$  і  $N$  — середини діагоналей. Доведіть, що  $MN = KL$ .
- 9.20.° Кут  $ABC$  трикутника  $ABC$  дорівнює  $60^\circ$ . Медіана  $BM$  трикутника дорівнює його висоті  $CH$ . Доведіть, що трикутник  $ABC$  рівносторонній.
- 9.21.° Кут  $ABC$  трикутника  $ABC$  дорівнює  $30^\circ$ . Медіана  $CM$  трикутника дорівнює його висоті, проведений з вершини  $A$ . Знайдіть кути  $BAC$  і  $BCA$ .



- 9.22.\* Відрізки, які сполучають середини протилежних сторін опуклого чотирикутника  $ABCD$ , ділять його на чотири чотирикутники з рівними периметрами. Доведіть, що чотирикутник  $ABCD$  — паралелограм.

- 9.23.\* Дано трикутник  $ABC$  і точки  $D$  і  $E$  такі, що  $\angle ADB = \angle BEC = 90^\circ$  (рис. 9.5). Доведіть, що довжина відрізка  $DE$  не більша за півпериметр трикутника  $ABC$ .

- 9.24.\* Точки  $B_1$  і  $C_1$  — основи перпендикулярів, опущених з вершини  $A$  трикутника  $ABC$  на бісектриси кутів  $B$  і  $C$  відповідно. Точки  $B_2$  і  $C_2$  — основи перпендикулярів, опущених з вершини  $A$  на бісектриси зовнішніх кутів при вершинах  $B$  і  $C$  відповідно. Доведіть, що точки  $B_1, C_1, B_2, C_2$  лежать на одній прямій.

- 9.25.\* У прямокутному трикутнику  $ABC$  ( $\angle ACB = 90^\circ$ ) проведено висоту  $CD$ . Бісектриси кутів  $BAC$  і  $DCB$  перетинаються в точці  $M$ , а бісектриси кутів  $ABC$  і  $DCA$  — у точці  $N$ . Доведіть, що  $MN \parallel AB$ .

- 9.26.\* Точки  $M$  і  $N$  — середини відповідно сторін  $AB$  і  $CD$  опуклого чотирикутника  $ABCD$ . Доведіть, що коли  $MN = \frac{1}{2}(BC + AD)$ , то  $BC \parallel AD$ .

- 9.27.\* В опуклому чотирикутнику  $ABCD$  відомо, що  $AD > BC$ , точки  $M$  і  $N$  — середини діагоналей  $AC$  і  $BD$  відповідно,  $MN = \frac{1}{2}(AD - BC)$ . Доведіть, що  $AD \parallel BC$ .

- 9.28.\* Дано рівносторонній трикутник  $ABC$ . Описано дугу  $BC$  із центром у точці  $A$  та радіусом  $AB$ , точка  $M$  — довільна точка дуги  $BC$ , яка відрізняється від точок  $B$  і  $C$ . Середини хорд  $MC$  і  $MB$  сполучено відрізками із серединами сторін  $AB$  і  $AC$  відповідно. Доведіть, що одержані відрізки перпендикулярні.

- 9.29.\* Продовження медіані  $AM$  трикутника  $ABC$  перетинає його описане коло в точці  $D$ . Побудуйте трикутник  $ABC$  за заданими точками  $A, B$  і  $D$ .

- 9.30.\* Діагоналі опуклого чотирикутника  $ABCD$  перпендикулярні. Через середини сторін  $AB$  і  $AD$  проведено прямі, перпендикулярні відповідно до сторін  $DC$  і  $BC$ . Доведіть, що точка перетину проведених прямих належить прямій  $AC$ .

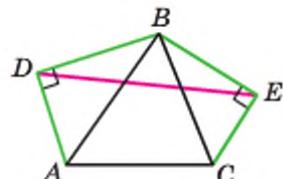


Рис. 9.5



- 9.31.\*** Сторони  $AB$  і  $CD$  опуклого чотирикутника  $ABCD$  рівні. Через середини діагоналей  $AC$  і  $BD$  проведено пряму, яка перетинає сторони  $AB$  і  $CD$  у точках  $M$  і  $N$  відповідно. Доведіть, що  $\angle BMN = \angle CNM$ .
- 9.32.\*** В опуклому чотирикутнику пряма, яка проходить через середини двох протилежних сторін, утворює рівні кути з діагоналями чотирикутника. Доведіть, що діагоналі рівні.
- 9.33.\*** У трикутнику  $ABC$  відомо, що  $AC > AB$ , а кут при вершині  $A$  дорівнює  $\alpha$ . На стороні  $AC$  позначено точку  $M$  так, що  $AB = MC$ . Точка  $E$  — середина відрізка  $AM$ , точка  $D$  — середина відрізка  $BC$ . Знайдіть кут  $CED$ .

## 10. Трапеція

**Означення.** Трапецією називають чотирикутник, у якого дві сторони паралельні, а дві інші не паралельні.

Кожний із чотирикутників, зображеніх на рисунку 10.1, є трапецією.

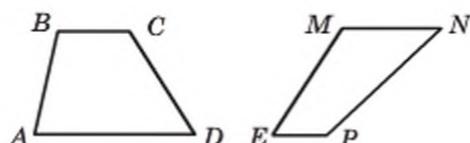


Рис. 10.1



Рис. 10.2

Паралельні сторони трапеції називають **основами**, а непаралельні — **бічними сторонами** (рис. 10.2).

У трапеції  $ABCD$  ( $BC \parallel AD$ ) кути  $A$  і  $D$  називають **кутами при основі  $AD$** , а кути  $B$  і  $C$  — **кутами при основі  $BC$** .

**Означення.** **Висотою трапеції** називають перпендикуляр, опущений з будь-якої точки прямої, яка містить одну з основ, на пряму, що містить другу основу.

На рисунку 10.3 кожний із відрізків  $BM$ ,  $EF$ ,  $DK$ ,  $PQ$  є висотою трапеції  $ABCD$ . Довжини цих відрізків дорівнюють відстані між паралельними прямими  $BC$  і  $AD$ . Тому  $BM = EF = DK = PQ$ .

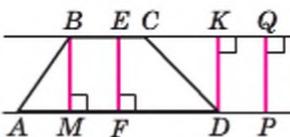


Рис. 10.3

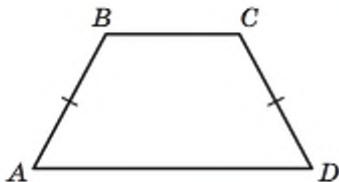


Рис. 10.4

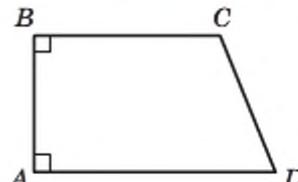


Рис. 10.5

На рисунку 10.4 зображене трапецію  $ABCD$ , у якої бічні сторони  $AB$  і  $CD$  рівні. Таку трапецію називають **рівнобічною** або **рівнобедрененою**.

Якщо бічна сторона трапеції є її висотою, то таку трапецію називають **прямокутникою** (рис. 10.5).

Трапеція — це окремий вид чотирикутника. Зв'язок між чотирикутниками та їхніми окремими видами показано на рисунку 10.6.

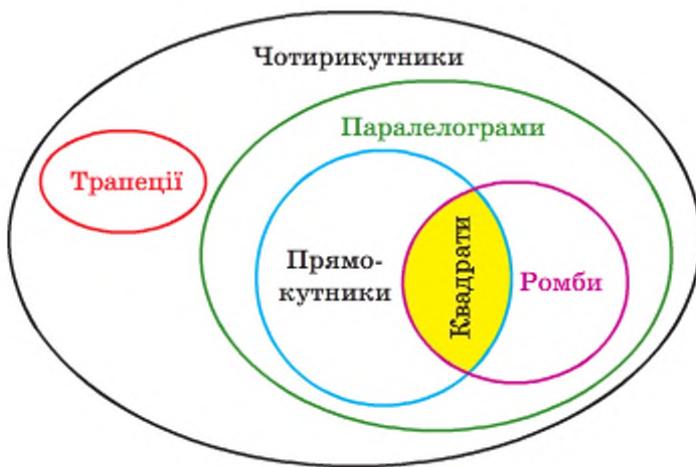


Рис. 10.6

**Означення.** Середньою лінією трапеції називають відрізок, який сполучає середини її бічних сторін.

На рисунку 10.7 відрізок  $MN$  — середня лінія трапеції  $ABCD$ .

**Теорема 10.1.** Середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює половині їхньої суми.

**Доведення.** Нехай  $MN$  — середня лінія трапеції  $ABCD$  (рис. 10.8). Доведемо, що  $MN \parallel AD$  і  $MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$ .

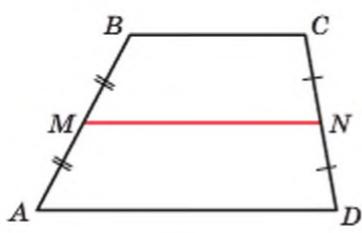


Рис. 10.7

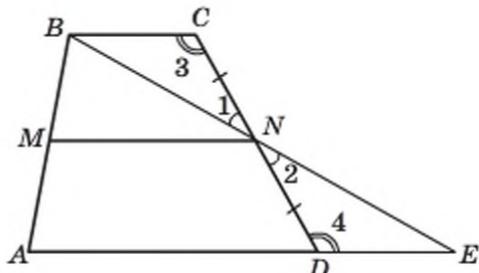


Рис. 10.8

Проведемо пряму  $BN$  і точку її перетину з прямою  $AD$  позначимо буквою  $E$ .

Оскільки точка  $N$  — середина відрізка  $CD$ , то  $CN = ND$ . Кути 1 і 2 рівні як вертикальні, а кути 3 і 4 рівні як різносторонні при паралельних прямих  $BC$  і  $AE$  та січній  $CD$ . Отже, трикутники  $BCN$  і  $EDN$  рівні за другою ознакою рівності трикутників. Звідси  $BC = DE$  і  $BN = NE$ . Тоді відрізок  $MN$  — середня лінія трикутника  $ABE$ . Із цього випливає, що  $MN \parallel AE$ , тобто  $MN \parallel AD$ , і  $MN = \frac{1}{2}AE$ . Маємо:

$$MN = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2}(AD + DE) = \frac{1}{2}(AD + BC). \blacktriangle$$

**Задача 1 (властивості рівнобічної трапеції).** Доведіть, що в рівнобічній трапеції:

- 1) кути при кожній основі рівні;
- 2) діагоналі рівні;

3) висота трапеції, проведена з вершини тупого кута, ділить основу трапеції на два відрізки, менший з яких дорівнює половині різниці основ, а більший — половині суми основ (середній лінії трапеції).

**Розв'язання.** Розглянемо рівнобічну трапецію  $ABCD$  ( $AB = CD$ ).

1) Проведемо висоти  $BM$  і  $CK$  (рис. 10.9). Оскільки  $AB = CD$  і  $BM = CK$ , то прямокутні трикутники  $AMB$  і  $DKC$  рівні за катетом і гіпотенузою. Тоді  $\angle A = \angle D$ .

Маємо:  $\angle A = \angle D$ ,  $\angle A + \angle ABC = 180^\circ$ ,  $\angle D + \angle DCB = 180^\circ$ . Отже,  $\angle ABC = \angle DCB$ .

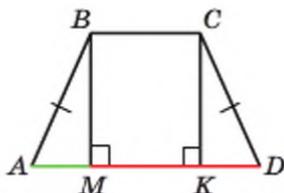


Рис. 10.9

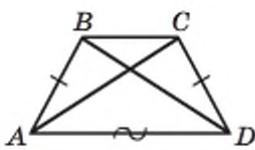


Рис. 10.10

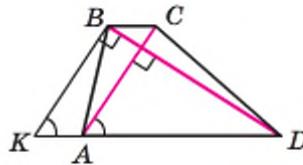


Рис. 10.11

2) Розглянемо трикутники  $ACD$  і  $DBA$  (рис. 10.10).

Маємо:  $AB = CD$ ,  $AD$  — спільна сторона, кути  $BAD$  і  $CDA$  рівні як кути при основі рівнобічної трапеції. Отже, трикутники  $ACD$  і  $DBA$  рівні за двома сторонами та кутом між ними. Тоді  $AC = BD$ .

3) У чотирикутнику  $BMKC$  (рис. 10.9)  $BM \parallel CK$ ,  $BC \parallel MK$ , кут  $BMK$  прямий. Отже, цей чотирикутник є прямокутником. Звідси  $MK = BC$ .

З рівності трикутників  $AMB$  і  $DKC$  випливає, що  $AM = KD$ . Тоді

$$AM = \frac{AD - MK}{2} = \frac{AD - BC}{2};$$

$$MD = AD - AM = AD - \frac{AD - BC}{2} = \frac{2AD - AD + BC}{2} = \frac{AD + BC}{2}. \triangle$$

**Задача 2.** У трапеції  $ABCD$  діагоналі перпендикулярні, а діагональ  $AC$  дорівнює середній лінії трапеції. Знайдіть кути, які утворюють діагоналі трапеції з основами.

*Розв'язання.* Через точку  $B$  проведемо  $BK \parallel AC$ , точка  $K$  належить прямій  $AD$  (рис. 10.11). Очевидно, що чотирикутник  $KBCA$  — паралелограм. Тоді  $KA = BC$  і в трикутнику  $KBD$  сторона  $KD$  дорівнює подвоєній середній лінії трапеції.

Оскільки  $AC \perp BD$  і  $KB \parallel AC$ , то  $\angle KBD = 90^\circ$ . У прямокутному трикутнику  $KBD$  катет  $KB$  дорівнює половині гіпотенузи  $KD$ . Тоді  $\angle BDK = 30^\circ$ ,  $\angle BKD = 60^\circ$ . Оскільки  $KB \parallel AC$ , то  $\angle CAD = \angle BKD = 60^\circ$ .  $\triangle$



- Який чотирикутник називають трапецією?
- Які сторони трапеції називають основами? бічними сторонами?
- Що називають висотою трапеції?
- Які існують види трапецій?
- Яку трапецію називають рівнобічною?
- Яку трапецію називають прямокутною?
- Що називають середньою лінією трапеції?
- Сформулюйте теорему про властивості середньої лінії трапеції.
- Сформулюйте властивості рівнобічної трапеції.



## ВПРАВИ

- 10.1.** Чи можуть два протилежних кути трапеції бути:
- тупими;
  - прямими;
  - рівними?
- 10.2.** Доведіть, що коли кути при одній з основ трапеції рівні, то дана трапеція є рівнобічною.
- 10.3.** Доведіть, що сума протилежних кутів рівнобічної трапеції дорівнює  $180^\circ$ . Чи є правильним обернене твердження: якщо сума протилежних кутів трапеції дорівнює  $180^\circ$ , то дана трапеція є рівнобічною?
- 10.4.** Середня лінія рівностороннього трикутника зі стороною 6 см розбиває його на трикутник і чотирикутник. Визначте вид чотирикутника та знайдіть його периметр.
- 10.5.** Висота рівнобічної трапеції, проведена з кінця меншої основи, ділить більшу основу на відрізки завдовжки 6 см і 10 см. Знайдіть основи трапеції.
- 10.6.** Один із кутів рівнобічної трапеції дорівнює  $60^\circ$ , бічна сторона — 18 см, а сума основ — 50 см. Знайдіть основи трапеції.
- 10.7.** Основи прямокутної трапеції дорівнюють 10 см і 24 см, а один із кутів —  $45^\circ$ . Знайдіть меншу бічну сторону трапеції.
- 10.8.** Основи прямокутної трапеції дорівнюють 7 см і 15 см, а один із кутів —  $60^\circ$ . Знайдіть більшу бічну сторону трапеції.
- 10.9.** У трапеції  $ABCD$  відомо, що  $AB = CD$ ,  $\angle BAC = 20^\circ$ ,  $\angle CAD = 50^\circ$ . Знайдіть кути  $ACB$  і  $ACD$ .
- 10.10.** У трапеції  $ABCD$  відомо, що  $BC \parallel AD$ ,  $AB \perp AD$ ,  $BC = CD$ ,  $\angle ABD = 80^\circ$ . Знайдіть кути трапеції.
- 10.11.** Одна з основ трапеції на 8 см більша за другу, а середня лінія дорівнює 17 см. Знайдіть основи трапеції.
- 10.12.** Основи трапеції відносяться як  $3 : 4$ , а середня лінія дорівнює 14 см. Знайдіть основи трапеції.
- 10.13.** Кожну з бічних сторін трапеції  $ABCD$  (рис. 10.12) поділено на чотири рівні частини:  $AE = EF = FK = KB$ ,  $DN = NM = MP = PC$ . Знайдіть відрізки  $EN$ ,  $FM$  і  $KP$ , якщо  $AD = 19$  см,  $BC = 11$  см.

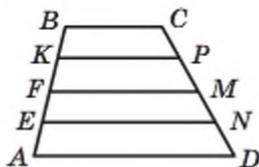


Рис. 10.12



- 10.14.** Висота прямокутної трапеції, проведена з вершини тупого кута, ділить більшу основу на відрізки завдовжки 7 см і 5 см, рахуючи від вершини прямого кута. Знайдіть середню лінію трапеції.
- 10.15.** Середня лінія прямокутної трапеції дорівнює 9 см, а висота, проведена з вершини тупого кута, ділить більшу основу на відрізки, один з яких у 2 рази більший за другий, рахуючи від вершини прямого кута. Знайдіть основи трапеції.
- 10.16.** Діагоналі рівнобічної трапеції  $ABCD$  ( $AB = CD$ ) перетинаються в точці  $O$ . Доведіть, що  $AO = OD$  і  $BO = OC$ .
- 10.17.** Висота рівнобічної трапеції дорівнює  $h$ , а бічну сторону видно з точки перетину діагоналей під кутом<sup>1</sup>  $60^\circ$ . Знайдіть діагональ трапеції.
- 10.18.** Основи рівнобічної трапеції відносяться як  $2 : 5$ , а діагональ ділить тупий кут трапеції навпіл. Знайдіть сторони трапеції, якщо її периметр дорівнює 68 см.
- 10.19.** У трапеції  $ABCD$  відомо, що  $AB = CD$ ,  $AD = 24$  см,  $\angle ADB = \angle CDB$ , а периметр дорівнює 60 см. Знайдіть невідомі сторони трапеції.
- 10.20.** Сторони трапеції дорівнюють  $a$ ,  $a$ ,  $a$  і  $2a$ . Знайдіть кути трапеції.
- 10.21.** У трапеції  $ABCD$  діагональ  $AC$  перпендикулярна до бічної сторони  $CD$  і є бісектрисою кута  $BAD$ ,  $\angle D = 60^\circ$ , периметр трапеції дорівнює 40 см. Знайдіть основи трапеції.
- 10.22.** Діагональ рівнобічної трапеції перпендикулярна до бічної сторони, а менша основа дорівнює бічній стороні. Знайдіть кути трапеції.
- 10.23.** За якої умови висота рівнобічної трапеції дорівнює половині різниці основ?
- 10.24.** Побудуйте прямокутну трапецію за основами та меншою бічною стороною.
- 10.25.** Побудуйте рівнобічну трапецію за основою, бічною стороною та діагоналлю.
- 10.26.** У трапеції  $ABCD$  ( $AD \parallel BC$ ) бісектриса кута  $ABC$  перетинає середню лінію в точці  $P$ . Доведіть, що  $\angle APB = 90^\circ$ .

<sup>1</sup> Нехай дано відрізок  $AB$  і точку  $M$  поза прямою  $AB$  таку, що  $\angle AMB = \alpha$ . У такому випадку говорять, що відрізок  $AB$  видно з точки  $M$  під кутом  $\alpha$ .



- 10.27.\* Доведіть, що коли діагоналі рівнобічної трапеції перпендикулярні, то її висота дорівнює середній лінії трапеції.
- 10.28.\* Доведіть, що коли висота рівнобічної трапеції дорівнює її середній лінії, то діагоналі трапеції перпендикулярні.
- 10.29.\* Діагональ прямокутної трапеції розбиває її на два трикутники, один з яких є рівностороннім зі стороною  $a$ . Знайдіть середню лінію трапеції.
- 10.30.\* Діагональ рівнобічної трапеції розбиває її на два рівнобедрених трикутники. Знайдіть кути трапеції.
- 10.31.\* У трапеції  $ABCD$  ( $BC \parallel AD$ ) відомо, що  $AC \perp BD$ ,  $\angle CAD = 30^\circ$ ,  $BD = 8$  см. Знайдіть середню лінію трапеції.
- 10.32.\* Доведіть, що в трапеції різниця бічних сторін менша від різниці основ.
- 10.33.\* Довжина висоти  $AB$  прямокутної трапеції  $ABCD$  дорівнює сумі довжин основ  $AD$  і  $BC$ . Доведіть, що бісектриса кута  $ABC$  ділить сторону  $CD$  навпіл.
- 10.34.\* Середня лінія трапеції дорівнює відрізку, який сполучає середини основ. Доведіть, що діагоналі цієї трапеції перпендикулярні.
- 10.35.\* Діагоналі трапеції перпендикулярні. Доведіть, що середня лінія трапеції дорівнює відрізку, який сполучає середини основ.
- 10.36.\* Побудуйте трапецію:
- 1) за основами та бічними сторонами;
  - 2) за основою, прилеглим до неї кутом і бічними сторонами;
  - 3) за різницею основ, бічними сторонами та діагоналлю.
- 10.37.\* Побудуйте трапецію:
- 1) за основами та діагоналями;
  - 2) за бічними сторонами, середньою лінією та висотою;
  - 3) за бічними сторонами, висотою та однією з діагоналей.
- 10.38.\* Сума кутів при більшій основі трапеції дорівнює  $90^\circ$ . Доведіть, що відрізок, який сполучає середини основ, дорівнює половині їхньої різниці.
- 10.39.\* Довжина середньої лінії трапеції дорівнює 5 см, а довжина відрізка, який сполучає середини основ, — 3 см. Кути при більшій основі дорівнюють  $30^\circ$  і  $60^\circ$ . Знайдіть основи трапеції.
- 10.40.\* У трапеції  $ABCD$  ( $AD \parallel BC$ ) відомо, що  $AB = BC = \frac{1}{2}AD$ . Знайдіть кут  $ACD$ .



- 10.41.\*** У трапеції  $ABCD$  діагоналі перпендикулярні. На більшій основі  $AD$  позначено точку  $M$  так, що  $BM = MD = 3$  см. Знайдіть середню лінію трапеції.
- 10.42.\*** У трапеції  $ABCD$  діагональ  $AC$  дорівнює сумі основ  $BC$  і  $AD$ . Кут між діагоналями дорівнює  $60^\circ$ . Доведіть, що трапеція  $ABCD$  рівнобічна.
- 10.43.\*** Нехай  $M$  — внутрішня точка рівностороннього трикутника  $ABC$ . Чи існує трикутник, сторони якого дорівнюють відрізкам  $MA$ ,  $MB$  і  $MC$ , а вершини лежать на сторонах даного рівностороннього трикутника?
- 10.44.\*** Через точки  $A$  і  $B$ , які лежать на різних сторонах кута, проведено прямі, які перпендикулярні до сторін кута й перетинають його бісектрису відповідно в точках  $C$  і  $D$ . Доведіть, що середина відрізка  $CD$  рівновіддалена від точок  $A$  і  $B$ .

## ВПИСАНІ ТА ОПИСАНІ ЧОТИРИКУТНИКИ

§3

Як вимірюти дугу кола?

Навколо якого чотирикутника можна описати коло?

У який чотирикутник можна вписати коло?

Опанувавши матеріал цього параграфа, ви отримаєте відповіді на ці запитання.





## 11. Центральні та вписані кути

**Означення.** Центральним кутом кола називають кут з вершиною в центрі кола.

На рисунку 11.1 кут  $\angle AOB$  — центральний. Сторони цього кута перетинають коло в точках  $A$  і  $B$ . Ці точки ділять коло на дві дуги, які виділено на рисунку 11.1 різним кольором. Точки  $A$  і  $B$  називають кінцями дуги, вони належать кожній з виділених дуг. Кожну із цих дуг можна позначити так:  $\overset{\frown}{AB}$  (читають: «дуга  $AB$ »).

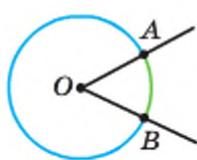


Рис. 11.1

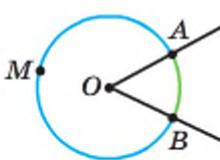


Рис. 11.2

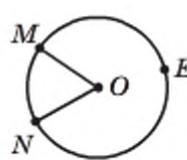


Рис. 11.3

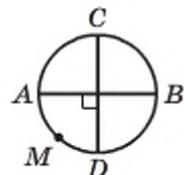


Рис. 11.4

Але за записом  $\overset{\frown}{AB}$  не можна розрізняти дуги на рисунку 11.1. Якщо на якісь із двох дуг позначити точку (на рисунку 11.2 це точка  $M$ ), то зрозуміло, що позначення  $\overset{\frown}{AMB}$  відноситься до «синьої» дуги. Якщо на одній із двох дуг  $AB$  відмічено точку, то докладно, що позначення  $\overset{\frown}{AB}$  відноситься до дуги, якій ця точка не належить (на рисунку 11.2 це «зелена» дуга).

Дуга  $AB$  належить центральному куту  $\angle AOB$  (рис. 11.1). У цьому випадку говорять, що центральний кут  $\angle AOB$  спирається на дугу  $AB$ .

Кожна дуга кола, як і все коло, має градусну міру. Градусну міру всього кола вважають рівною  $360^\circ$ . Якщо центральний кут  $MON$  спирається на дугу  $MN$  (рис. 11.3), то градусну міру дуги  $MN$  вважають рівною градусній мірі кута  $MON$  і записують:  $\overset{\frown}{MN} = \angle MON$  (читають: «градусна міра дуги  $MN$  дорівнює градусній мірі кута  $MON$ »). Градусну міру дуги  $MEN$  (рис. 11.3) вважають рівною  $360^\circ - \angle MON$ .

На рисунку 11.4 зображене коло, у якому проведено два перпендикулярних діаметри  $AB$  і  $CD$ . Тоді  $\overset{\frown}{AMD} = 90^\circ$ ,  $\overset{\frown}{ACD} = 360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$ ,  $\overset{\frown}{ACB} = \overset{\frown}{ADB} = 180^\circ$ . Кожну з дуг  $ACB$  і  $ADB$  називають півколом. На рисунку 11.4 півколами є також дуги  $CAD$  і  $CBD$ .

Про хорду, яка сполучає кінці дуги, говорять, що хорда стягує дугу. На рисунку 11.5 хорда  $AB$  стягує кожну з дуг  $AB$  і  $AKB$ .

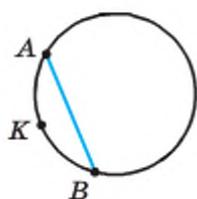


Рис. 11.5



Будь-яка хорда стягує дві дуги, сума градусних мір яких дорівнює  $360^\circ$ .

**Означення.** Вписаним кутом кола називають кут, вершина якого лежить на колі, а сторони перетинають коло.

На рисунку 11.6 кут  $ABC$  — вписаний. Дуга  $AC$  належить цьому куту, а дуга  $ABC$  — не належить. У такому випадку говорять, що вписаний кут  $ABC$  спирається на дугу  $AC$ . Також можна сказати, що вписаний кут  $ABC$  спирається на хорду  $AC$ .

**Теорема 11.1.** Градусна міра вписаного кута дорівнює половині градусної міри дуги, на яку він спирається.

**Доведення.** На рисунку 11.6 кут  $ABC$  вписаний. Доведемо, що  $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$ .

Розглянемо три випадки розташування центра  $O$  кола відносно вписаного кута  $ABC$ .

**Випадок 1.** Центр  $O$  належить одній зі сторін кута, наприклад стороні  $BC$  (рис. 11.7).

Проведемо радіус  $OA$ . Центральний кут  $AOC$  — зовнішній кут рівнобедреного трикутника  $ABO$  (сторони  $OA$  та  $OB$  рівні як радіуси). Тоді  $\angle AOC = \angle A + \angle B$ . Проте  $\angle A = \angle B$ . Звідси  $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{1}{2} \cup AC$ .

**Випадок 2.** Центр  $O$  належить куту, проте не належить жодній із його сторін (рис. 11.8).

Проведемо діаметр  $BK$ . Згідно з доведеним  $\angle ABK = \frac{1}{2} \cup AK$ ,  $\angle KBC = \frac{1}{2} \cup KC$ . Маємо:  $\angle ABC = \angle ABK + \angle KBC = \frac{1}{2} \cup AK + \frac{1}{2} \cup KC = \frac{1}{2} \cup AKC$ .

**Випадок 3.** Центр  $O$  не належить куту (рис. 11.9).

Для третього випадку проведіть доведення самостійно. ▲

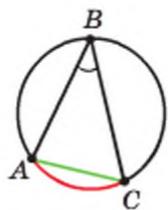


Рис. 11.6

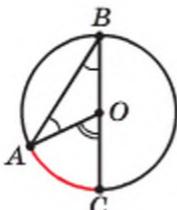


Рис. 11.7

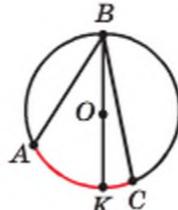


Рис. 11.8

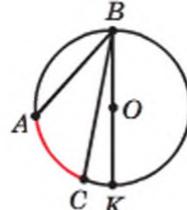


Рис. 11.9

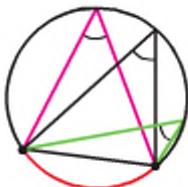


Рис. 11.10

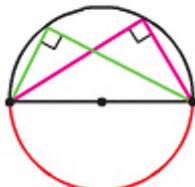


Рис. 11.11

**Наслідок 1.** Вписані кути, які спираються на одну й ту саму дугу, рівні (рис. 11.10).

**Наслідок 2.** Вписаний кут, який спирається на діаметр (півколо), — прямий (рис. 11.11).

Доведіть ці властивості самостійно.

**Задача 1.** Дано відрізок  $AB$  і кут  $\alpha$ . Знайдіть геометричне місце точок  $X$  таких, що  $\angle AXB = \alpha$ .

**Розв'язання.** Проведемо два промені  $AF$  і  $BE$  так, щоб  $\angle BAF = \angle ABE = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ . Нехай ці промені перетинаються в точці  $C$  (рис. 11.12). Очевидно, що  $\angle ACB = \alpha$ . Опишемо коло навколо трикутника  $ABC$ . Усі кути  $AXB$ , вершини яких належать дузі  $ACB$ , дорівнюють куту  $\alpha$ . Виконавши аналогічну побудову в іншій півплощині відносно прямої  $AB$ , отримаємо трикутник  $ABC_1$ , навколо якого теж опишемо коло. Дуги  $ACB$  і  $AC_1B$ , за винятком точок  $A$  і  $B$ , належать шуканому ГМТ.

Також треба довести обернене твердження: якщо точка  $X$  має зазначену властивість, то вона лежить на дузі  $ACB$  або на дузі  $AC_1B$ . Користуючись методом від супротивного, зробіть це самостійно.

Тепер можна стверджувати, що шуканим ГМТ є дуги  $ACB$  і  $AC_1B$ , зображені на рисунку 11.12, за винятком точок  $A$  і  $B$ . ▲

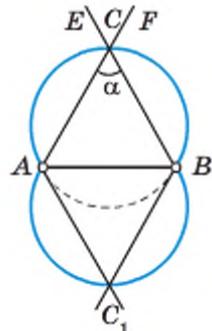


Рис. 11.12

**Задача 2.** Побудуйте дотичну до даного кола, яка проходить через дану точку, що лежить поза колом.

**Розв'язання.** На рисунку 11.13 зображено коло із центром  $O$  і точкою  $M$ , яка лежить поза цим колом.

Нехай  $X$  — така точка кола, що пряма  $MX$  є дотичною (рис. 11.13). Тоді кут  $MXO$  прямий. Отже, його можна розглядати як вписаний у коло з діаметром  $MO$ .

Проведений аналіз показує, як провести побудову.

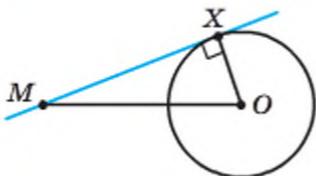


Рис. 11.13

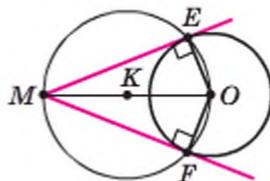


Рис. 11.14

Побудуємо відрізок  $MO$  та розділимо його навпіл (рис. 11.14). Нехай точка  $K$  — його середина. Побудуємо коло радіуса  $KO$  із центром  $K$ . Позначимо точки перетину побудованого та даного кіл буквами  $E$  і  $F$ . Тоді кожна з прямих  $ME$  і  $MF$  є шуканою дотичною.

Справді, кут  $MEO$  дорівнює  $90^\circ$  як вписаний кут, що спирається на діаметр  $MO$ . Відрізок  $OE$  — радіус даного кола. Тоді за ознакою дотичної прямая  $ME$  — шукана дотична. ▲



1. Який кут називають центральним кутом кола?
2. Як називають частини кола, на які ділять його дві точки?
3. Яким символом позначають дугу кола?
4. У якому випадку позначення дуги двома буквами визначає її однозначно?
5. У якому випадку говорять, що центральний кут спирається на дугу?
6. Чому вважають рівною градусну міру кола?
7. Як пов'язані градусні міри центрального кута кола та дуги, на яку цей кут спирається?
8. Скільки дуг стягує кожна хорда? Чому дорівнює сума їхніх градусних мір?
9. Який кут називають вписаним кутом кола?
10. У якому випадку говорять, що вписаний кут спирається на дугу?
11. Чому дорівнює градусна міра вписаного кута?
12. Яку властивість мають вписані кути, що спираються на одну й ту саму дугу?
13. Яким є вписаний кут, що спирається на діаметр?



## ВПРАВИ

- 11.1.** Чому дорівнює градусна міра центрального кута кола, який спирається на дугу, що становить: 1)  $\frac{1}{6}$  кола; 2)  $\frac{1}{10}$  кола; 3)  $\frac{1}{2}$  кола; 4)  $\frac{2}{9}$  кола?

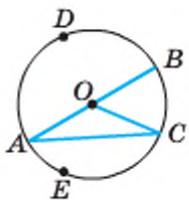


Рис. 11.15

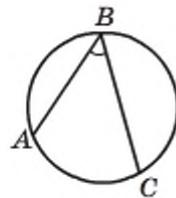


Рис. 11.16

- 11.2.**° Знайдіть градусні міри двох дуг кола, на які його ділять дві точки, якщо градусна міра однієї з дуг на  $80^\circ$  більша за градусну міру другої.
- 11.3.**° Знайдіть градусні міри двох дуг кола, на які його ділять дві точки, якщо градусні міри цих дуг відносяться як  $7 : 11$ .
- 11.4.**° На рисунку 11.15 зображене коло із центром  $O$ . Знайдіть:
- 1) кут  $BDC$ , якщо  $\angle BAC = 40^\circ$ ;
  - 2) кут  $BEC$ , якщо  $\angle BOC = 70^\circ$ ;
  - 3) дугу  $CE$ , якщо  $\angle CDE = 80^\circ$ ;
  - 4) кут  $DAB$ , якщо  $\angle DBA = 300^\circ$ .
- 11.5.**° На рисунку 11.16  $\angle ADB = 74^\circ$ ,  $\angle ABC = 68^\circ$ . Знайдіть дугу  $BC$ .
- 11.6.**° Центральний кут  $AOC$  на  $25^\circ$  більший за вписаний кут  $ABC$ , що спирається на дугу  $AC$  (рис. 11.17). Знайдіть кути  $AOC$  і  $ABC$ .
- 11.7.**° На рисунку 11.18 хорди  $AB$  і  $CD$  рівні. Доведіть, що  $\angle AMB = \angle CND$ .
- 11.8.**° Доведіть, що коли дві дуги кола рівні, то рівні й хорди, які їх стягують.
- 11.9.**° Вершини квадрата  $ABCD$  лежать на колі. На дузі  $AB$  позначено довільну точку  $M$ . Доведіть, що  $\angle AMD = \angle CMD = \angle CMB$ .
- 11.10.**° Вершини рівнобедреного трикутника  $ABC$  ( $AB = BC$ ) ділять описане навколо нього коло на три дуги, причому  $\angle ADB = 70^\circ$ . Знайдіть кути трикутника  $ABC$ .

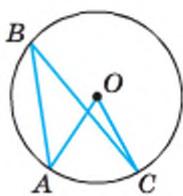


Рис. 11.17

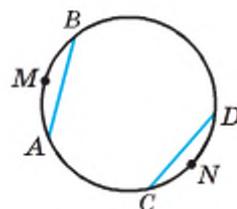


Рис. 11.18



- 11.11.** Гострий кут прямокутного трикутника дорівнює  $32^\circ$ . Знайдіть градусні міри дуг, на які вершини трикутника ділять коло, описане навколо нього, та радіус цього кола, якщо гіпотенуза даного трикутника дорівнює 12 см.
- 11.12.** Доведіть, що коли вписаний кут є прямим, то він спирається на діаметр.
- 11.13.** Як, користуючись лише косинцем, знайти центр даного кола?
- 11.14.** Коло, побудоване на стороні  $AB$  трикутника  $ABC$  як на діаметрі, перетинає прямі  $AC$  і  $BC$  у точках  $M$  і  $K$  відповідно. Доведіть, що відрізки  $AK$  і  $BM$  — висоти трикутника  $ABC$ .
- 11.15.** Коло, побудоване на стороні  $AC$  трикутника  $ABC$  як на діаметрі, перетинає сторону  $AB$  у точці  $K$  так, що  $\angle ACK = \angle BCK$ . Доведіть, що трикутник  $ABC$  рівнобедрений.
- 11.16.** Доведіть, що сторона трикутника, яка лежить проти кута  $30^\circ$ , дорівнює радіусу кола, описаного навколо трикутника.
- 11.17.** Точка  $O$  — центр кола. Хорда  $AB$  перпендикулярна до радіуса  $OM$  і ділить його навпіл. Знайдіть кути  $AOB$  і  $BAM$ .
- 11.18.** Через точку  $A$ , яка лежить поза колом із центром  $O$ , проведено дві прямі, одна з яких дотикається до кола в точці  $B$ , а друга проходить через його центр (рис. 11.19). Відомо, що  $\angle BMC = 100^\circ$ . Знайдіть кут  $BAC$ .
- 11.19.** Бісектриса кута  $B$  трикутника  $ABC$  перетинає коло, описане навколо цього трикутника, у точці  $D$ . Знайдіть кути трикутника  $ADC$ , якщо  $\angle ABC = 80^\circ$ .
- 11.20.** На дузі  $AC$  кола, описаного навколо рівностороннього трикутника  $ABC$ , позначено точку  $M$  так, що  $\angle CAM = 2\angle CMA$ . Знайдіть кути трикутника  $AMC$ .
- 11.21.** Доведіть, що градусні міри дуг кола, які містяться між двома паралельними хордами, рівні.
- 11.22.** Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює  $56^\circ$ . На бічній стороні трикутника як на діаметрі побудовано півколо, яке інші сторони трикутника ділять на три дуги. Знайдіть градусні міри утворених дуг.

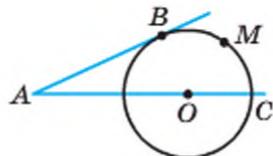


Рис. 11.19



- 11.23.** Два кола перетинаються в точках  $A$  і  $B$ . Через точку  $A$  проведено діаметри  $AD$  і  $AC$ . Доведіть, що точки  $B$ ,  $C$  і  $D$  лежать на одній прямій.
- 11.24.** Два кола перетинаються в точках  $A$  і  $B$ . Через точку  $B$  проведено січну, яка перетинає кола в точках  $C$  і  $D$ . Доведіть, що величина кута  $CAD$  є сталою для всіх січних, що проходять через точку  $B$ .
- 11.25.** Бісектриса кута  $A$  трикутника  $ABC$  перетинає описане навколо нього коло в точці  $D$ . Точка  $O$  — центр вписаного кола трикутника  $ABC$ . Доведіть, що  $DO = DB = DC$ .
- 11.26.** Бісектриса кута  $A$  трикутника  $ABC$  перетинає описане навколо нього коло в точці  $D$ . Точки  $O$  і  $J$  — центри описаного та вписаного кіл трикутника  $ABC$  відповідно. Побудуйте трикутник  $ABC$  за точками  $O$ ,  $J$ ,  $D$ .
- 11.27.** Коло, побудоване на стороні паралелограма як на діаметрі, проходить через середину сусідньої сторони та точку перетину діагоналей. Знайдіть кути паралелограма.
- 11.28.** У колі проведено дві перпендикулярні хорди  $AB$  і  $CD$ , які перетинаються в точці  $M$ . Доведіть, що пряма, яка містить медіану трикутника  $DMB$ , містить також висоту трикутника  $CMA$ .
- 11.29.** У колі проведено дві перпендикулярні хорди  $AB$  і  $CD$ , які перетинаються в точці  $M$ . Доведіть, що пряма, яка містить висоту трикутника  $DMB$ , містить також медіану трикутника  $CMA$ .
- 11.30.** Точка  $H$  — ортоцентр трикутника  $ABC$ . Пряма  $AH$  перетинає описане коло трикутника  $ABC$  у точці  $A_1$ . Доведіть, що пряма  $BC$  ділить відрізок  $HA_1$  навпіл.
- 11.31.** Відрізок  $AH$  — висота трикутника  $ABC$ . Доведіть, що  $\angle BAH = \angle OAC$ , де точка  $O$  — центр описаного кола трикутника  $ABC$ .
- 11.32.** Прямі, які містять висоти гострокутного трикутника  $ABC$ , перетинають його описане коло в точках  $A_1$ ,  $B_1$  і  $C_1$ . Доведіть, що ортоцентр трикутника  $ABC$  є центром вписаного кола трикутника  $A_1B_1C_1$ .
- 11.33.** Прямі, які містять висоти гострокутного трикутника  $ABC$ , перетинають його описане коло в точках  $A_1$ ,  $B_1$  і  $C_1$ . Побудуйте за цими точками трикутник  $ABC$ .
- 11.34.** Прямі, які містять бісектриси трикутника  $ABC$ , перетинають його описане коло в точках  $A_1$ ,  $B_1$  і  $C_1$ . Доведіть,



що центр вписаного кола трикутника  $ABC$  є ортоцентром трикутника  $A_1B_1C_1$ .

- 11.35.** Прямі, які містять бісектриси трикутника  $ABC$ , перетинають його описане коло в точках  $A_1$ ,  $B_1$  і  $C_1$ . Побудуйте за цими точками трикутник  $ABC$ .

**11.36.**\* Доведіть, що описане коло трикутника  $ABC$ , бісектриса кута  $B$  і серединний перпендикуляр сторони  $AC$  проходять через одну точку.

- 11.37.** У трикутнику  $ABC$  проведено висоту  $BD$ , медіану  $BM$  і бісектрису  $BK$ . Відомо, що  $\angle DBK = \angle KBM$ . Доведіть, що  $\angle ABC = 90^\circ$ .

- 11.38.** У трикутнику  $ABC$  висота  $BD$ , медіана  $BM$  і бісектриса  $BK$  ділять кут  $ABC$  на чотири рівних кути. Знайдіть кути трикутника  $ABC$ .

- 11.39.** У трикутнику  $ABC$  проведено висоту  $BD$ , медіану  $BM$  і бісектрису  $BK$ . Доведіть, що точка  $K$  належить відрізку  $DM$ .

- 11.40.** Побудуйте трикутник  $ABC$  за точкою  $A$ , центром описаного кола та точкою перетину бісектриси кута  $A$  зі стороною  $BC$ .

- 11.41.** Побудуйте прямокутний трикутник  $ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ) за точками  $A$  і  $B$  та точкою  $M$ , яка лежить на бісектрисі кута  $C$ .

- 11.42.** Побудуйте трикутник за медіаною, бісектрисою та висотою, які виходять з однієї вершини.

- 11.43.** Прямі, які містять висоту, бісектрису та медіану, що виходять з вершини  $B$  трикутника  $ABC$ , перетинають його описане коло в точках  $M$ ,  $N$ ,  $K$  відповідно. Побудуйте трикутник  $ABC$  за точками  $M$ ,  $N$  і  $K$ .

- 11.44.** Дано коло, у якому проведено діаметр  $AB$ , і позначено точку  $C$  поза колом (рис. 11.20). Як, користуючись лише лінійкою, провести через точку  $C$  пряму, що перпендикулярна до прямої  $AB$ ?

- 11.45.** Побудуйте трикутник за стороною, протилежним їй кутом і висотою, проведеною до даної сторони.

- 11.46.** Побудуйте трикутник за стороною, протилежним їй кутом і медіаною, проведеною до даної сторони.

- 11.47.** Побудуйте паралелограм за двома сторонами та кутом між діагоналями.

- 11.48.** Побудуйте паралелограм за кутом і двома діагоналями.

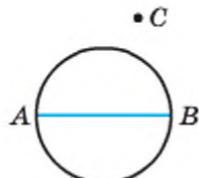


Рис. 11.20



- 11.49.** Дано відрізок  $AB$ . Знайдіть геометричне місце точок  $X$  таких, що трикутник  $AXB$  прямокутний.
- 11.50.** Центри вписаного й описаного кіл трикутника  $ABC$  лежать по різні сторони від прямої  $AB$ . Сторона  $AB$  дорівнює радіусу описаного кола. Чому дорівнює кут  $AOB$ , де точка  $O$  — центр вписаного кола?
- 11.51.** Прямі, які містять висоти гострокутного трикутника  $ABC$ , проведені з вершин  $B$  і  $C$ , перетинають описане коло в точках  $B_1$  і  $C_1$  відповідно. Знайдіть кут  $A$  трикутника  $ABC$ , якщо пряма  $B_1C_1$  проходить через центр описаного кола.
- 11.52.** У гострокутному трикутнику  $ABC$  точки  $B, H, O, C$ , де  $H$  — ортоцентр,  $O$  — центр описаного кола, лежать на одному колі. Знайдіть кут  $BAC$ .
- 11.53.** У гострокутному трикутнику  $ABC$  точка  $H$  — ортоцентр, точка  $O$  — центр описаного кола, точка  $J$  — центр вписаного кола,  $\angle BAC = 60^\circ$ . Доведіть, що точки  $B, H, O, J, C$  лежать на одному колі.
- 11.54.** Многокутник, усі вершини якого належать одному колу, поділено діагоналями, які не перетинаються, на трикутники. Доведіть, що серед указаних трикутників тільки один може бути гострокутним.
- 11.55.** У коло вписано прямокутний трикутник  $ABC$  з гіпотенузою  $AB$ . На більшому катеті  $BC$  позначено точку  $D$  так, що  $AC = BD$ . Точка  $E$  — середина дуги  $ACB$ . Знайдіть кут  $DEC$ .
- 11.56.** На рисунку 11.21 зображені два кола із центрами  $O_1$  і  $O_2$ . Побудуйте пряму  $l$ , яка дотикається до цих кіл так, що точки дотику лежать в одній півплощині відносно прямої  $O_1O_2$  (таку пряму називають зовнішньою спільною дотичною до двох даних кіл).
- 11.57.** Побудуйте трикутник за стороною, протилежним їй кутом і радіусом вписаного кола.
- 11.58.** Побудуйте трикутник за стороною, протилежним їй кутом і медіаною, проведеною до другої сторони.
- 11.59.** На хорді  $AB$  кола із центром  $O$  позначено точку  $C$ . Описане коло трикутника  $AOC$  перетинає дане коло в точці  $D$ . Доведіть, що  $BC = CD$ .
- 11.60.** Побудуйте квадрат за чотирма точками, які лежать по одній на кожній із чотирьох його сторін.

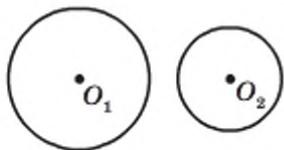


Рис. 11.21



## 12. Застосування властивостей центральних і вписаних кутів під час розв'язування задач

**Ключ** Задача 1 (властивість кута між дотичною та хордою). Відрізок  $AB$  — хорда кола із центром  $O$  (рис. 12.1). Через точку  $A$  проведено дотичну  $MN$ . Доведіть, що  $\angle MAB = \frac{1}{2} \cup AB$  і  $\angle NAB = \frac{1}{2} \cup ADB$ .

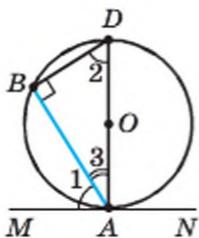


Рис. 12.1

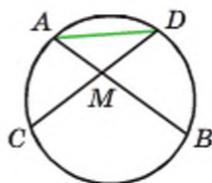


Рис. 12.2

*Розв'язання.* Проведемо діаметр  $AD$  (рис. 12.1).

Тоді кут  $B$  дорівнює  $90^\circ$  як вписаний, що спирається на діаметр  $AD$ . У прямокутному трикутнику  $ABD$   $\angle 2 + \angle 3 = 90^\circ$ . Оскільки  $MN$  — дотична, то  $\angle DAM = 90^\circ$ . Тоді  $\angle 1 + \angle 3 = 90^\circ$ . Отримуємо, що  $\angle 1 = \angle 2$ .

Отже,  $\angle MAB = \angle BDA = \frac{1}{2} \cup AB$ .

Маємо:  $\angle NAB = 180^\circ - \angle MAB = 180^\circ - \frac{1}{2} \cup AB = 180^\circ - \frac{1}{2} (360^\circ - \cup ADB) = 180^\circ - 180^\circ + \frac{1}{2} \cup ADB = \frac{1}{2} \cup ADB$ . ▲

Справедливе й обернене твердження. Нехай  $AB$  — хорда кола із центром  $O$  і через точку  $A$  проведено пряму  $MN$  так, що  $\angle MAB = \frac{1}{2} \cup AB$  (рис. 12.1). Тоді пряма  $MN$  — дотична до кола.

Використовуючи метод доведення від супротивного, доведіть це твердження самостійно.

**Ключ** Задача 2. Хорди  $AB$  і  $CD$  кола перетинаються в точці  $M$  (рис. 12.2). Доведіть, що  $\angle AMC = \frac{1}{2} (\cup AC + \cup BD)$ .

*Розв'язання.* Кут  $AMC$  є зовнішнім для трикутника  $AMD$ . Тоді  $\angle AMC = \angle DAB + \angle ADC = \frac{1}{2} \cup DB + \frac{1}{2} \cup AC = \frac{1}{2} (\cup AC + \cup BD)$ . ▲

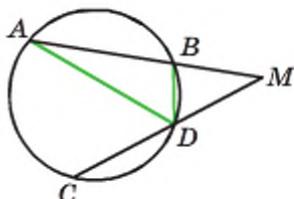


Рис. 12.3

**Задача 3.** Хорди  $AB$  і  $CD$  кола не перетинаються, а прямі  $AB$  і  $CD$  перетинаються в точці  $M$  (рис. 12.3). Доведіть, що  $\angle AMC = \frac{1}{2}(\angle AC - \angle BD)$ .

**Розв'язання.** Кут  $ADC$  є зовнішнім для трикутника  $ADM$ . Тоді  $\angle ADC = \angle DAM + \angle AMD$ . Звідси  $\angle AMD = \angle ADC - \angle DAM = \frac{1}{2}\angle AC - \frac{1}{2}\angle BD = \frac{1}{2}(\angle AC - \angle BD)$ . ▲

**Задача 4.** Точки  $O$  і  $C$  розміщені в одній півплощині відносно прямої  $AB$ . Відомо, що  $OA = OB$  і  $\angle AOB = 2\angle ACB$ . Доведіть, що точки  $A$ ,  $B$  і  $C$  лежать на колі із центром  $O$ .

**Розв'язання.** Проведемо коло радіуса  $OB$  з центром у точці  $O$ . Тоді дуга  $AXB$  є геометричним місцем точок, які лежать в одній півплощині відносно прямої  $AB$  і з яких відрізок  $AB$  видно під кутом  $\frac{1}{2}\angle AOB$  (рис. 12.4).

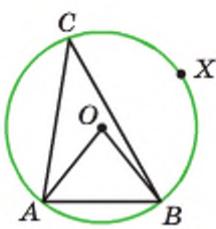


Рис. 12.4

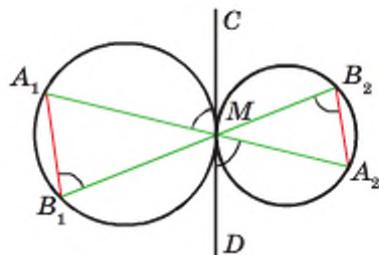


Рис. 12.5

Оскільки точка  $C$  лежить у тій самій півплощині та  $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB$ , то точка  $C$  належить зазначеному ГМТ. ▲

**Задача 5.** Точки  $O$  і  $C$  розміщені в різних півплощинах відносно прямої  $AB$ . Відомо, що  $AO = OB$  і  $\angle AOB = 2(180^\circ - \angle ACB)$ . Доведіть, що точки  $A$ ,  $B$  і  $C$  лежать на колі із центром  $O$ .

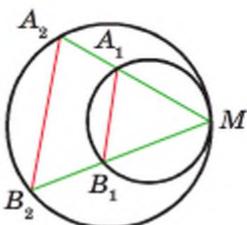
Це твердження доведіть самостійно.

**Задача 6.** Два кола дотикаються в точці  $M$ . Через точку  $M$  проведено прямі, які перетинають одне коло в точках  $A_1$  і  $B_1$ , а друге — у точках  $A_2$  і  $B_2$  (рис. 12.5). Доведіть, що  $A_1B_1 \parallel A_2B_2$ .

**Розв'язання.** Через точку  $M$  проведемо дотичну  $CD$  до одного з кіл (рис. 12.5). Ця пряма буде також дотичною до другого кола

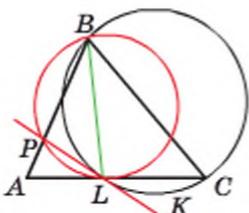
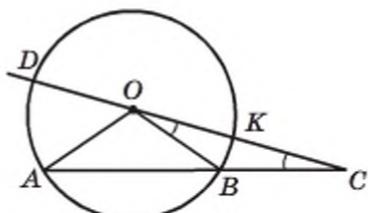
(доведіть цей факт самостійно). Використовуючи ключову задачу 1, можна записати:

$\angle A_1MC = \frac{1}{2} \cup A_1M$ . Оскільки кут  $A_1B_1M$  вписаний, то  $\angle A_1B_1M = \frac{1}{2} \cup A_1M$ . Звідси  $\angle A_1B_1M = \angle A_1MC$ . Аналогічно доводимо, що  $\angle MB_2A_2 = \angle A_2MD$ . Але кути  $A_1MC$  і  $A_2MD$  рівні як вертикальні, отже,  $\angle A_1B_1M = \angle A_2B_2M$  і  $A_1B_1 \parallel A_2B_2$ .


**Рис. 12.6**

Зауважимо, що доведене твердження залишається справедливим і у випадку внутрішнього дотику кіл (рис. 12.6). Доведіть це самостійно. ▲

**Задача 7.** У трикутнику  $ABC$  проведено бісектрису  $BL$ . Через точку  $L$  до кола, описаного навколо трикутника  $BCL$ , проведено дотичну, яка перетинає сторону  $AB$  у точці  $P$  (рис. 12.7). Доведіть, що пряма  $AC$  — дотична до кола, описаного навколо трикутника  $BPL$ .


**Рис. 12.7**

**Рис. 12.8**

**Розв'язання.** За властивістю кута між дотичною та хордою (див. ключову задачу 1) маємо:  $\angle CLK = \frac{1}{2} \cup LC = \angle LBC = \angle LBP$ .

Кути  $ALP$  і  $KLC$  рівні як вертикальні. Звідси  $\angle ALP = \angle LBP = \frac{1}{2} \cup LP$ .

З урахуванням твердження, оберненого до доведеного в ключовій задачі 1, отримуємо, що пряма  $AC$  — дотична до кола, яке проходить через точки  $L$ ,  $P$  і  $B$ . ▲

**Задача 8.** У колі із центром  $O$  проведено хорду  $AB$ . На продовженні відрізка  $AB$  за точку  $B$  вибрано точку  $C$  так, що відрізок  $BC$  дорівнює радіусу кола. Пряма  $CO$  перетинає коло в точці  $D$  (точка  $O$  лежить між точками  $D$  і  $C$ ). Доведіть, що  $\angle AOD = 3\angle ACD$  (рис. 12.8).

**Розв'язання.** Нехай  $\angle ACD = \alpha$ ,  $K$  — точка перетину прямої  $CD$  з колом. Проведемо радіус  $OB$  (рис. 12.8). Оскільки  $OB = BC$ , то  $\angle BOK = \alpha$ . Тоді  $\cup KB = \alpha$ . Використовуючи ключову задачу 3,



можна записати:  $\angle DCA = \frac{1}{2}(\angle DA - \angle KB)$ . Тоді  $\alpha = \frac{1}{2}\angle DA - \frac{\alpha}{2}$ . Звідси  $\angle DA = 3\alpha$ , тобто  $\angle DOA = 3\alpha$ .  $\blacktriangleleft$

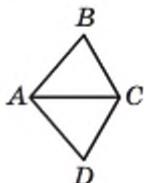


Рис. 12.9

**Задача 9.** В опуклому чотирикутнику  $ABCD$  відомо, що  $\angle BAD = 100^\circ$ ,  $\angle BCD = 130^\circ$ ,  $AB = AD$  (рис. 12.9). Доведіть, що  $AB = AC$ .

**Розв'язання.** Оскільки  $\angle BAD = 2(180^\circ - \angle BCD)$  і  $AB = AD$ , то з урахуванням доведеного в ключовій задачі 5 можна стверджувати, що точки  $B$ ,  $C$  і  $D$  лежать на колі радіуса  $AB$  із центром  $A$ . Отже, відрізок  $AC$  — радіус цього кола. Звідси  $AB = AC$ .  $\blacktriangleleft$



### ВПРАВИ

- 12.1.° Кінці хорди ділять коло на дві дуги, градусні міри яких відносяться як  $3 : 1$ . Через один із кінців хорди проведено дотичну до даного кола. Знайдіть гострий кут між цією дотичною та даною хордою.
- 12.2.° Вписане коло трикутника  $ABC$  дотикається до його сторін  $AB$ ,  $BC$  і  $CA$  відповідно в точках  $C_1$ ,  $A_1$ ,  $B_1$ . Знайдіть кути трикутника  $A_1B_1C_1$ , якщо  $\angle A = 38^\circ$ ,  $\angle B = 86^\circ$ .
- 12.3.° Хорди  $AB$  і  $CD$  кола перетинаються в точці  $M$  (рис. 12.10),  $\angle AC = 50^\circ$ ,  $\angle BD = 70^\circ$ . Знайдіть кут  $AMC$ .
- 12.4.° Хорди  $AB$  і  $CD$  кола не перетинаються, а прямі  $AB$  і  $CD$  перетинаються в точці  $M$  (рис. 12.11),  $\angle AC = 100^\circ$ ,  $\angle BD = 30^\circ$ . Знайдіть кут  $AMC$ .
- 12.5.° Хорди  $AB$  і  $CD$  кола перетинаються в точці  $M$  так, що  $\angle AMC = 40^\circ$ . Градусна міра дуги  $AD$  на  $20^\circ$  більша за градусну міру дуги  $BC$ . Знайдіть градусну міру дуги  $AD$ .
- 12.6.° Діаметр  $AB$  і хорда  $CD$  кола перетинаються в точці  $M$ . Відомо, що  $\angle CMB = 73^\circ$  і  $\angle BC = 110^\circ$ . Знайдіть градусну міру дуги  $BD$ .

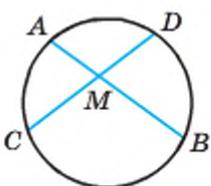


Рис. 12.10

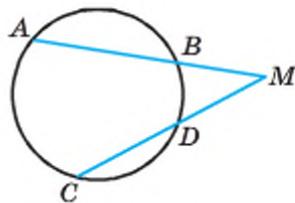


Рис. 12.11

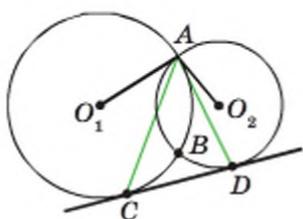


Рис. 12.12

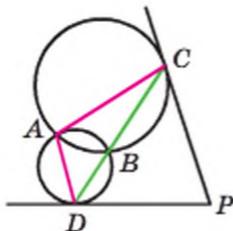


Рис. 12.13

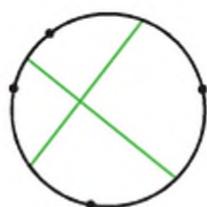


Рис. 12.14

- 12.7.\* Доведіть, що коло, яке дотикається до бічних сторін  $AB$  і  $BC$  рівнобедреного трикутника  $ABC$  у точках  $A$  і  $C$  відповідно, проходить через центр вписаного кола цього трикутника.
- 12.8.\* У прямокутному трикутнику  $ABC$  на катеті  $AC$  як на діаметр побудовано коло, що перетинає гіпотенузу  $AB$  у точці  $E$ . Через точку  $E$  проведено дотичну, яка перетинає катет  $CB$  у точці  $D$ . Доведіть, що трикутник  $BDE$  рівнобедрений.
- 12.9.\* До кола, описаного навколо трикутника  $ABC$ , проведено в точці  $B$  дотичну, яка перетинає пряму  $AC$  у точці  $D$ . Відрізок  $BM$  — бісектриса трикутника  $ABC$ . Доведіть, що  $BD = MD$ .
- 12.10.\* Пряма дотикається до двох кіл із центрами  $O_1$  і  $O_2$  у точках  $C$  і  $D$  відповідно (рис. 12.12),  $A$  і  $B$  — точки перетину кіл. Знайдіть кут  $O_1AO_2$ , якщо  $\angle CAD = \alpha$ .
- 12.11.\* До двох кіл, які перетинаються в точках  $M$  і  $K$ , проведено спільну дотичну,  $A$  і  $B$  — точки дотику. Доведіть, що  $\angle AMB + \angle AKB = 180^\circ$ .
- 12.12.\* Два кола перетинаються в точках  $A$  і  $B$ . Через точку  $B$  проведено пряму, яка перетинає кола в точках  $C$  і  $D$ . Дотичні до цих кіл, проведені через точки  $C$  і  $D$ , перетинаються в точці  $P$  (рис. 12.13). Знайдіть кут  $P$ , якщо  $\angle DAC = \alpha$ .
- 12.13.\* На колі позначили чотири точки. Середини утворених дуг сполучили відрізками, як показано на рисунку 12.14. Доведіть, що проведені відрізки перпендикулярні.
- 12.14.\* У колі проведено хорди  $CD$  і  $CE$ , де точка  $C$  — середина дуги  $AB$  (рис. 12.15). Знайдіть кут  $DEC$ , якщо  $\angle AMD = \alpha$ .
- 12.15.\* Доведіть, що бісектриса зовнішнього кута при вершині  $A$  трикутника  $ABC$ , вписаного в коло, паралельна хорді, яка сполучає середини дуг  $AB$  і  $AC$ .

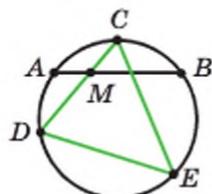


Рис. 12.15

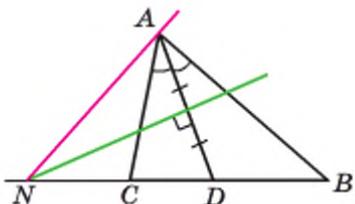


Рис. 12.16

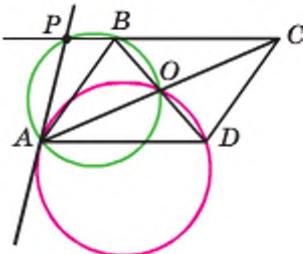


Рис. 12.17

- 12.16.** У колі проведено хорду. На меншій з утворених дуг узято точку  $й$  через неї проведено дотичну до кола. Знайдіть на дотичній точку, з якої хорду видно під найбільшим кутом.
- 12.17.** У рівнобедреному трикутнику  $ABC$  ( $AB = BC$ ) на бічній стороні  $AB$  вибрано точку  $D$ . Навколо трикутника  $ADC$  описано коло. Дотична, проведена до цього кола в точці  $D$ , перетинає описане коло трикутника  $BDC$  у точці  $M$ . Доведіть, що  $BM \parallel AC$ .
- 12.18.** Навколо трикутника  $ABC$  описано коло із центром  $O$ . Коло, яке проходить через точки  $A$ ,  $B$  і  $O$ , дотикається до прямої  $AC$  у точці  $A$ . Доведіть, що  $AB = AC$ .
- 12.19.** Серединний перпендикуляр бісектриси  $AD$  трикутника  $ABC$  перетинає промінь  $BC$  у точці  $N$  (рис. 12.16). Доведіть, що пряма  $NA$  — дотична до кола, описаного навколо трикутника  $ABC$ .
- 12.20.** У трикутнику  $ABC$  проведено бісектрису  $AM$ . Через точки  $A$  і  $M$  проведено коло, яке перетинає сторони  $AC$  і  $AB$  у точках  $K$  і  $L$  відповідно. Доведіть, що коли  $KL \parallel CB$ , то пряма  $BC$  — дотична до кола.
- 12.21.** Нехай  $O$  — точка перетину діагоналей паралелограма  $ABCD$ ,  $P$  — друга точка перетину кола, яке проходить через точки  $A$ ,  $O$ ,  $B$ , з прямою  $BC$  (рис. 12.17). Доведіть, що пряма  $AP$  дотикається до кола, яке проходить через точки  $A$ ,  $O$ ,  $D$ .
- 12.22.** Дано квадрат  $ABCD$ . Поза квадратом позначено точку  $E$  так, що  $\angle BAE = 30^\circ$ ,  $\angle BCE = 75^\circ$ . Знайдіть кут  $CBE$ .
- 12.23.** У трикутнику  $ABC$  відомо, що  $\angle C = 10^\circ$ ,  $\angle B = 20^\circ$ . Поза трикутником взято точку  $M$  так, що трикутник  $CMB$  рівносторонній, точки  $M$  і  $A$  лежать у різних півплощинах відносно прямої  $BC$ . Знайдіть кути  $MAB$  і  $MAC$ .
- 12.24.** Дано рівнобедрений трикутник  $ABC$  ( $AB = AC$ ) і точку  $M$ , яка йому не належить, але належить куту  $ABC$ . Знайдіть кут  $BAM$ , якщо  $\angle ABC = 50^\circ$ ,  $\angle BMC = 40^\circ$ ,  $\angle BMA = 10^\circ$ .



- 12.25.\*** У трикутнику  $ABC$  відомо, що  $\angle BAC = 30^\circ$ ,  $\angle ABC = 80^\circ$ . У трикутнику взято таку точку  $K$ , що трикутник  $BCK$  рівносторонній. Знайдіть кут  $KAB$ .
- 12.26.\*** У трапеції  $ABCD$  ( $AD \parallel BC$ ) кут  $ADB$  у 2 рази менший від кута  $ACB$ ,  $BC = AC = 5$  см. Знайдіть сторону  $CD$ .
- 12.27.\*** Точки  $H$  і  $O$  — відповідно ортоцентр і центр описаного кола трикутника  $ABC$ . Нехай точка  $M$  — середина дуги  $ACB$ . Доведіть, що коли  $\angle C = 120^\circ$ , то  $MH = MO$ .
- 12.28.\*** Коло, яке проходить через вершини  $B$  і  $C$  прямокутного трикутника  $ABC$ , перетинає гіпотенузу  $AB$  у точці  $D$ . Дотичні до цього кола, проведені в точках  $C$  і  $D$ , перетинаються в точці  $O$ . Доведіть, що  $OA = OC$ .
- 12.29.\*** Точка  $M$  належить квадрату  $ABCD$ ,  $\angle MAC = \angle MCD = \alpha$ . Знайдіть кут  $ABM$ .
- 12.30.\*** У чотирикутнику три тупих кути. Доведіть, що більшою з двох його діагоналей є та, яку проведено з вершини гострого кута.
- 12.31.\*** Два кола мають зовнішній дотик у точці  $D$ . Провели пряму, яка дотикається до одного кола в точці  $A$ , а друге перетинає в точках  $B$  і  $C$  (рис. 12.18). Доведіть, що точка  $A$  рівновіддалена від прямих  $DB$  і  $DC$ .

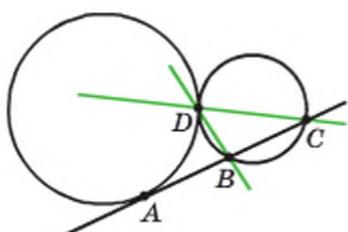


Рис. 12.18

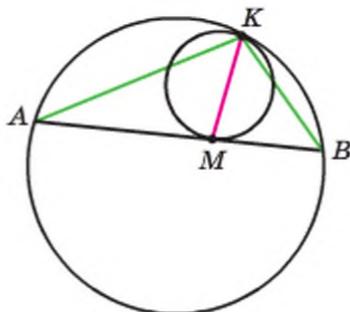


Рис. 12.19

- 12.32 (2.32).\*** У рівнобедреному трикутнику  $ABC$  кут  $B$ , протилежний основі, дорівнює  $20^\circ$ . На стороні  $AB$  позначено точку  $D$  так, що  $BD = AC$ . Знайдіть кут  $ACD$ .
- 12.33.\*** У колі проведено хорду  $AB$ . Інше коло дотикається до цієї хорди в точці  $M$  і до заданого кола в точці  $K$  (рис. 12.19). Доведіть, що  $KM$  — бісектриса кута  $AKB$ .



### 13. Вписані чотирикутники. Метод допоміжного кола

**Означення.** Чотирикутник називають **вписаним**, якщо існує коло, якому належать усі його вершини.

На рисунку 13.1 зображене вписаній чотирикутник  $ABCD$ . У цьому разі також говорять, що коло **описане навколо** чотирикутника.

**Теорема 13.1.** Якщо чотирикутник є вписаним, то сума його протилежних кутів дорівнює  $180^\circ$ .

**Доведення.** Нехай чотирикутник  $ABCD$  вписано в коло (рис. 13.1). Доведемо, що  $\angle A + \angle C = 180^\circ$  і  $\angle B + \angle D = 180^\circ$ .

Оскільки кути  $A$  і  $C$  є вписаними, то  $\angle A = \frac{1}{2} \cup BCD$  і  $\angle C = \frac{1}{2} \cup DAB$ .

Маємо:  $\cup BCD + \cup DAB = 360^\circ$ . Тоді  $\angle A + \angle C = 180^\circ$ .

Аналогічно можна показати, що  $\angle B + \angle D = 180^\circ$ . ▲

Ви знаєте, що навколо будь-якого трикутника можна описати коло. Проте не будь-який чотирикутник має таку властивість. Наприклад, неможливо описати коло навколо паралелограма, відмінного від прямокутника. Розпізнавати чотирикутники, навколо яких можна описати коло, дає змогу така теорема.

**Теорема 13.2 (обернена до теореми 13.1).** Якщо в чотирикутнику сума протилежних кутів дорівнює  $180^\circ$ , то він є **вписаним**.

**Доведення.** Розглянемо чотирикутник  $ABCD$ , у якому  $\angle A + \angle C = 180^\circ$ . Доведемо, що навколо нього можна описати коло.

Припустимо, що навколо цього чотирикутника не можна описати коло. Опишемо коло навколо трикутника  $ABD$ . За припущенням точка  $C$  не належить цьому колу. Тому можливі два випадки.

Випадок 1. Точка  $C$  лежить поза описаним колом трикутника  $ABD$  (рис. 13.2).

Нехай сторона  $BC$  перетинає коло в точці  $C_1$ . Чотирикутник  $ABC_1D$  вписано в коло. Тоді за теоремою 13.1 отримуємо, що  $\angle A + \angle BC_1D = 180^\circ$ . Але за умовою  $\angle A + \angle C = 180^\circ$ . Звідси  $\angle BC_1D = \angle C$ .

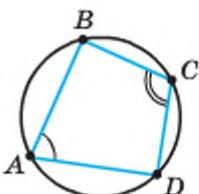


Рис. 13.1

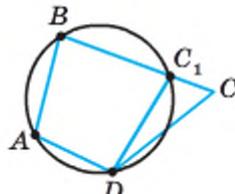


Рис. 13.2



Проте ця рівність виконуватися не може, оскільки за властивістю зовнішнього кута трикутника  $\angle BC_1D = \angle C + \angle CDC_1$ .

Отже, точка  $C$  не може лежати поза колом, описаним навколо трикутника  $ABD$ .

**Випадок 2.** Точка  $C$  лежить усередині описаного кола трикутника  $ABD$  (рис. 13.3).

Міркуючи аналогічно, можна показати, що точка  $C$  не може лежати всередині розглядуваного кола. Переконайтесь в цьому самостійно.

Таким чином, припустивши, що точка  $C$  не належить колу, описаному навколо трикутника  $ABD$ , ми отримали суперечність.  $\blacktriangleleft$

Теорему 13.2 можна розглядати як ознаку належності чотирьох точок одному колу.

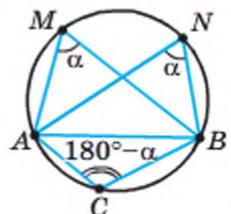
Теореми 13.1 і 13.2 можна сформулювати як одну теорему:  
*для того щоб чотирикутник був вписаним, необхідно і достатньо, щоб сума його протилежних кутів дорівнювала  $180^\circ$ .*

Якщо чотирикутник є вписаним, то існує точка, рівновіддалена від усіх його вершин (центр описаного кола). Щоб знайти цю точку, достатньо знайти точку перетину серединних перпендикулярів двох сусідніх сторін чотирикутника.

**Задача 1** (ознака належності чотирьох точок одному колу). Точки  $A, M, N, B$  такі, що  $\angle AMB = \angle ANB$ , причому точки  $M$  і  $N$  лежать в одній півплощині відносно прямої  $AB$ . Доведіть, що точки  $A, M, N, B$  лежать на одному колі.

**Розв'язання.** Нехай  $\angle AMB = \angle ANB = \alpha$ . Навколо трикутника  $AMB$  опишемо коло (рис. 13.4). Нехай  $C$  — довільна точка кола, яка не належить дузі  $AMB$ . Тоді чотирикутник  $ACBM$  вписаний. Звідси  $\angle C = 180^\circ - \alpha$ . Маємо:  $\angle C + \angle N = 180^\circ$ . Отже, за теоремою 13.2 чотирикутник  $ACBN$  також вписаний. Оскільки навколо трикутника  $ABC$  можна описати тільки одне коло, то цьому колу належать

як точка  $M$ , так і точка  $N$ .  $\blacktriangleleft$



Якщо під час розв'язування задачі вдалося довести, що деякі чотири точки лежать на одному колі, то завдяки цьому ми отримуємо можливість використати властивості кола та його елементів. Тому пошук такого допоміжного кола є красивим і ефективним прийомом для розв'язування цілої низки задач. Продемонструємо це на прикладах.

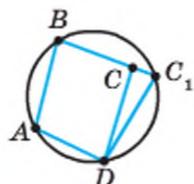


Рис. 13.3

Рис. 13.4



**Задача 2.** З довільної точки  $M$  катета  $AC$  прямокутного трикутника  $ABC$  опущено перпендикуляр  $MK$  на гіпотенузу  $AB$ . Доведіть, що  $\angle MKC = \angle MBC$ .

**Розв'язання.** Маємо:  $\angle BCA = 90^\circ$ ,  $\angle MKB = 90^\circ$  (рис. 13.5), тоді  $\angle BCA + \angle MKB = 180^\circ$ . Отже, навколо чотирикутника  $CBKM$  можна описати коло. Кути  $MKC$  і  $MBC$  є вписаними, які спираються на одну й ту саму дугу  $CM$ . Звідси  $\angle MKC = \angle MBC$ .  $\blacktriangleleft$

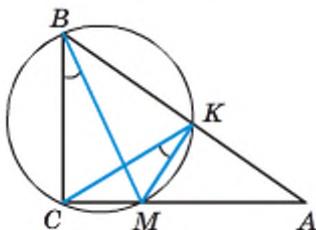


Рис. 13.5

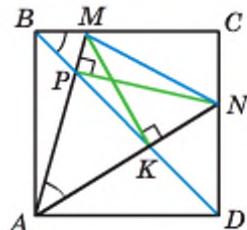


Рис. 13.6

**Задача 3.** На сторонах  $BC$  і  $CD$  квадрата  $ABCD$  узято точки  $M$  і  $N$  так, що  $\angle MAN = 45^\circ$ . За допомогою лише лінійки опустіть перпендикуляр із точки  $A$  на пряму  $MN$ .

**Розв'язання.** Проведемо діагональ  $BD$ . Вона перетинає відрізки  $AN$  і  $AM$  у точках  $K$  і  $P$  відповідно (рис. 13.6).

Маємо:  $\angle MBK = \angle MAK = 45^\circ$ . Отже, точки  $A$ ,  $B$ ,  $M$  і  $K$  лежать на одному колі. Звідси  $\angle ABM + \angle AKM = 180^\circ$ .

Оскільки  $\angle ABM = 90^\circ$ , то  $\angle AKM = 90^\circ$ . Таким чином, відрізок  $MK$  — висота трикутника  $AMN$ . Analogічно доводимо, що відрізок  $NP$  — висота трикутника  $AMN$ .

Отже, пряма, яка проходить через точку  $A$  і точку перетину відрізків  $MK$  і  $NP$  (ортocентр трикутника  $AMN$ ), перпендикулярна до прямої  $MN$ .  $\blacktriangleleft$

**Теорема 13.3.** Основи перпендикулярів, проведених до сторін трикутника (або їхніх продовжень) з довільної точки описаного кола, лежать на одній прямій.

Цю пряму називають **прямою Симсона**<sup>1</sup>.

**Доведення.** Нехай  $P$  — довільна точка описаного кола трикутника  $ABC$ . Із точки  $P$  опустимо перпендикуляри на прямі, які містять сторони трикутника.

<sup>1</sup> Роберт Симсон (1687–1768) — шотландський математик, професор. Працював в університеті м. Глазго.

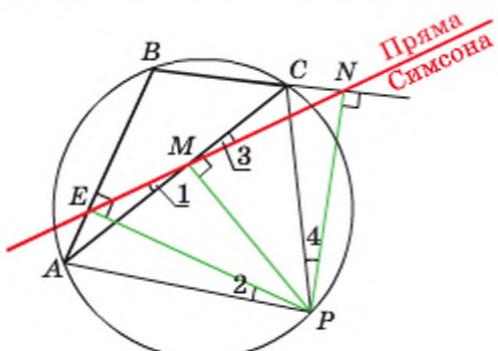


Рис. 13.7

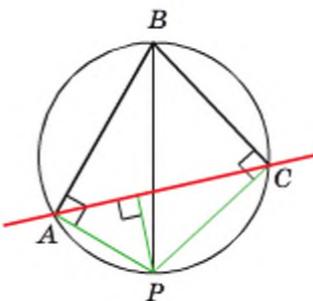


Рис. 13.8

На рисунку 13.7 зображене випадок, коли основи двох перпендикулярів (точки  $E$  і  $M$ ) належать сторонам трикутника, а основа третього перпендикуляра (точка  $N$ ) належить продовженню сторони трикутника.

Оскільки  $\angle AEP = \angle AMP = 90^\circ$ , то навколо чотирикутника  $AEMP$  можна описати коло (див. ключову задачу 1 цього пункту). Звідси кути 1 і 2 рівні як вписані, що спираються на одну й ту саму дугу.

Оскільки  $\angle PMC + \angle PNC = 180^\circ$ , то навколо чотирикутника  $PMCN$  можна описати коло. Звідси кути 3 і 4 рівні як вписані, що спираються на одну й ту саму дугу.

Оскільки  $\angle PEB + \angle BNP = 180^\circ$ , то навколо чотирикутника  $PEBN$  можна описати коло. Звідси  $\angle 4 + \angle EPC + \angle B = 180^\circ$ .

Оскільки чотирикутник  $ABCP$  вписаний, то  $\angle 2 + \angle EPC + \angle B = 180^\circ$ . Отимуємо, що  $\angle 2 = \angle 4$ , а отже,  $\angle 1 = \angle 3$ .

Оскільки кут  $AMC$  розгорнутий, то  $\angle 1 + \angle EMC = 180^\circ$ . Тоді  $\angle 3 + \angle EMC = 180^\circ$ . А це означає, що кут  $EMN$  також розгорнутий, тобто точки  $E$ ,  $M$  і  $N$  лежать на одній прямій.

Зауважимо, що коли точка  $P$  і, наприклад, вершина  $B$  — кінці діаметра, то прямою Симсона є пряма  $AC$  (рис. 13.8).

Рисунок 13.9 ілюструє випадок, коли основи всіх трьох перпендикулярів, опущених із точки  $P$  на прямі, що містять сторони трикутника, не належать сторонам. Для цього випадку проведіть доведення самостійно. ▲

Точки, які належать одній прямій, називають **колінеарними**. Дві точки колінеарні завжди.

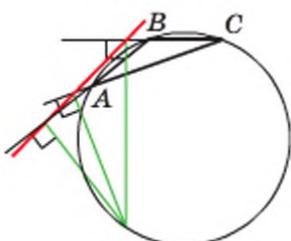


Рис. 13.9



Доведена теорема вказує красивий критерій колінеарності трьох точок.

Справедлива й теорема, обернена до теореми 13.3: якщо основи перпендикулярів, опущених із точки  $P$  на прямі, що містять сторони трикутника, лежать на одній прямій, то точка  $P$  належить описаному колу даного трикутника.



1. Який чотирикутник називають вписаним?
2. У якому випадку говорять, що коло описане навколо чотирикутника?
3. Яку властивість мають кути вписаного чотирикутника?
4. За якої умови чотирикутник є вписаним?
5. Яку пряму називають прямою Симсона?
6. Які точки називають колінеарними?



## ВПРАВИ

- 13.1.** Доведіть, що можна описати коло навколо:
- 1) будь-якого прямокутника;
  - 2) будь-якої рівнобічної трапеції.
- 13.2.** Поясніть, чому навколо паралелограма, який не є прямокутником, не можна описати коло.
- 13.3.** У прямокутнику  $ABCD$  відомо, що  $AB = 12$  см,  $\angle CAD = 30^\circ$ . Знайдіть радіус кола, описаного навколо даного прямокутника.
- 13.4.** Доведіть, що коли навколо ромба можна описати коло, то цей ромб є квадратом.
- 13.5.** Сторона  $AD$  чотирикутника  $ABCD$  є діаметром кола, описаного навколо нього,  $\angle ABC = 108^\circ$ ,  $\angle BCD = 132^\circ$ . Знайдіть кути  $BAD$ ,  $ADC$ ,  $CAD$ ,  $BDA$ .
- 13.6.** Знайдіть кути чотирикутника  $MNKP$ , вписаного в коло, якщо  $\angle MKP = 58^\circ$ ,  $\angle MPN = 34^\circ$ ,  $\angle KMP = 16^\circ$ .
- 13.7.** Рівнобічну трапецію вписано в коло, центр якого належить одній з основ. Кут між діагоналями трапеції, протилежний її бічній стороні, дорівнює  $56^\circ$ . Знайдіть кути трапеції.
- 13.8.** Висоти  $AA_1$  і  $CC_1$  гострокутного трикутника  $ABC$  перетинаються в точці  $H$ . Доведіть, що: 1) точки  $H$ ,  $C_1$ ,  $B$ ,  $A_1$  лежать на одному колі; 2) точки  $A$ ,  $C_1$ ,  $A_1$ ,  $C$  лежать на одному колі.



- 13.9.\* З довільної точки  $O$ , яка належить гострому куту  $A$ , але не належить його сторонам, опущено перпендикуляри  $OB$  і  $OC$  на його сторони. Доведіть, що  $\angle OAB = \angle OCB$ .
- 13.10.\* Центр кола, описаного навколо трапеції, належить більшій основі, а бічна сторона дорівнює меншій основі. Знайдіть кути трапеції.
- 13.11.\* Із точки  $M$ , яка належить куту  $AOB$ , але не належить його сторонам, опущено перпендикуляри  $MM_1$  і  $MM_2$  на прямі  $OA$  і  $OB$ . Доведіть, що  $M_1M_2 \leq OM$ .
- 13.12.\* У трикутнику  $ABC$  проведено медіани  $AA_1$  і  $CC_1$ . Відомо, що  $\angle AA_1C = \angle CC_1A$ . Доведіть, що трикутник  $ABC$  рівнобедрений.
- 13.13.\* Із точки  $O$ , яка належить гострокутному трикутнику  $ABC$ , на сторони  $AB$ ,  $BC$  і  $CA$  опущено перпендикуляри  $OO_1$ ,  $OO_2$ ,  $OO_3$ . Доведіть, що  $\angle AOC = \angle O_3O_1A + \angle O_3O_2C$ .
- 13.14.\* Знайдіть геометричне місце основ перпендикулярів, опущених з даної точки  $A$  на прямі, що проходять через дану точку  $B$ .
- 13.15.\* У гострокутному трикутнику  $ABC$  кут  $B$  дорівнює  $60^\circ$ , відрізки  $AM$  і  $CN$  — його висоти, точка  $Q$  — середина сторони  $AC$ . Доведіть, що трикутник  $MNQ$  рівносторонній.
- 13.16.\* У прямокутному трикутнику  $ABC$  кут  $A$  дорівнює  $30^\circ$ . Точка  $M$  — середина гіпотенузи  $AB$ , точка  $J$  — центр вписаного кола трикутника  $ABC$ . Знайдіть кут  $JMC$ .
- 13.17.\* Вписане коло із центром  $O$  трикутника  $ABC$  дотикається до сторін  $AB$  і  $AC$  у точках  $M$  і  $N$  відповідно. Пряма  $MN$  перетинає бісектрису кута  $B$  у точці  $P$  (рис. 13.10). Доведіть, що точки  $N$ ,  $O$ ,  $C$  і  $P$  лежать на одному колі.
- 13.18.\* Опуклий чотирикутник розрізано прямими на 25 вписаних чотирикутників (рис. 13.11). Доведіть, що даний чотирикутник також вписаний.

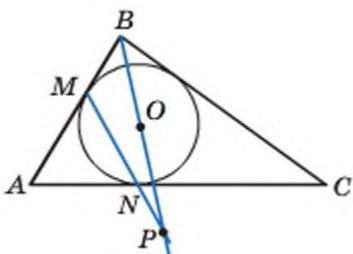


Рис. 13.10

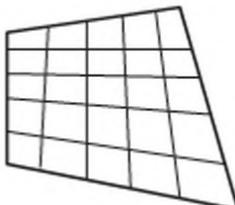


Рис. 13.11



- 13.19.** Два кола перетинаються в точках  $P$  і  $Q$ . Через точку  $A$  першого кола проведено прямі  $AP$  і  $AQ$ , які перетинають друге коло в точках  $B$  і  $C$  відповідно. Доведіть, що дотична в точці  $A$  до першого кола паралельна прямій  $BC$ .
- 13.20.** У прямокутник  $ABCD$  вписано рівносторонній трикутник  $APK$  так, що вершина  $K$  лежить на стороні  $BC$ , а вершина  $P$  — на стороні  $CD$ . Відрізок  $KH$  — висота цього трикутника. Доведіть, що трикутник  $BHC$  рівносторонній.
- 13.21.** У гострокутному трикутнику  $ABC$  відрізки  $CC_1$  і  $AA_1$  — висоти. Доведіть, що серединний перпендикуляр відрізка  $C_1A_1$  проходить через середину сторони  $AC$ .
- 13.22.** У трикутнику  $ABC$  відрізки  $AA_1$  і  $CC_1$  — висоти. Побудуйте трикутник  $ABC$  за точками  $A_1$ ,  $C_1$  і прямую, яка містить сторону  $AC$ .
- 13.23.** Діагональ трапеції, вписаної в коло, дорівнює  $d$ . Бічну сторону видно із центра описаного кола під кутом  $120^\circ$ . Знайдіть середню лінію трапеції.
- 13.24.** Доведіть, що висоти  $AH_1$ ,  $BH_2$ ,  $CH_3$  гострокутного трикутника  $ABC$  ділять навпіл кути трикутника  $H_1H_2H_3$ .
- 13.25.** Рівносторонні трикутники  $ABC$  і  $MNP$  розміщено так, що вершина  $B$  лежить на стороні  $MN$ , а вершина  $P$  — на стороні  $AC$  (рис. 13.12). Доведіть, що  $AM \parallel NC$ .

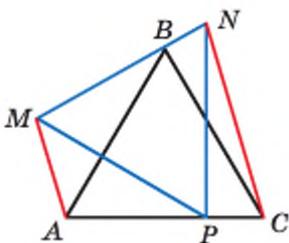


Рис. 13.12

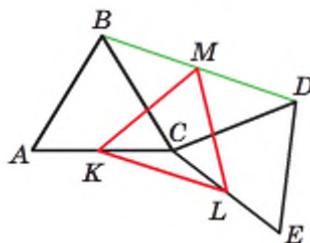


Рис. 13.13

- 13.26.** Рівні рівносторонні трикутники  $ABC$  і  $CDE$  розміщено так, як показано на рисунку 13.13. Точки  $K$ ,  $M$  і  $L$  — середини відрізків  $AC$ ,  $BD$  і  $CE$  відповідно. Доведіть, що трикутник  $KML$  рівносторонній.
- 13.27.** З довільної точки  $M$ , яка належить гострому куту з вершиною  $A$ , але не належить його сторонам, проведено перпендикуляри  $MP$  і  $MQ$  до сторін кута. Із точки  $A$  про-



ведено перпендикуляр  $AK$  до відрізка  $PQ$ . Доведіть, що  $\angle PAK = \angle MAQ$ .

13.28.\* У трикутнику  $ABC$  ( $AC < BC$ ) проведено медіану  $CD$ . Відомо, що  $\angle DCA + \angle DBC = 90^\circ$ . Доведіть, що  $\angle ACB = 90^\circ$ .

13.29.\* Коло із центром у точці  $O$ , яка належить стороні  $AC$  гострокутного трикутника  $ABC$ , дотикається до сторін  $AB$  і  $BC$  у точках  $M$  і  $N$  відповідно. Відрізок  $BH$  — висота трикутника  $ABC$ . Доведіть, що  $\angle MHB = \angle BHN$ .

13.30.\* Висоти  $AA_1$  і  $BB_1$  гострокутного трикутника  $ABC$  перетинаються в точці  $H$ . Точки  $X$  і  $Y$  — середини відрізків  $AB$  і  $CH$  відповідно. Доведіть, що  $XY \perp A_1B_1$ .

13.31.\* У трикутнику  $ABC$  відомо, що  $\angle BAC = 50^\circ$ ,  $\angle BCA = 70^\circ$ . На сторонах  $AB$  і  $BC$  відповідно позначили точки  $D$  і  $F$  так, що  $\angle DCA = \angle FAC = 30^\circ$ . Знайдіть кут  $CDF$ .

13.32.\* Бісектриси  $BK$  і  $CM$  трикутника  $ABC$  перетинаються в точці  $O$ ,  $\angle A = 60^\circ$ . Доведіть, що  $OK = OM$ .

13.33.\* Бісектриси  $MA$  і  $KB$  трикутника  $MNK$  перетинаються в точці  $O$ , точки  $A$ ,  $N$ ,  $B$  і  $O$  лежать на одному колі. Знайдіть кут  $N$ .

13.34.\* Поза прямокутним трикутником  $ABC$  на його гіпотенузі  $AB$  побудовано квадрат  $ABFD$ . Доведіть, що  $\angle ACO = \angle OCB$ , де  $O$  — точка перетину діагоналей квадрата.

13.35.\* Вершини  $A$  і  $B$  трикутника  $ABC$  із прямим кутом  $C$  коззають по сторонах прямого кута з вершиною  $P$  (рис. 13.14). Доведіть, що точка  $C$  при цьому переміщується по відрізку.

13.36.\* (2.34) У рівнобедреному трикутнику  $ABC$  кут  $A$  дорівнює  $100^\circ$ . Відрізок  $BD$  — бісектриса трикутника. Доведіть, що  $BD + AD = BC$ .

13.37.\* Діагоналі квадрата  $ABCD$  перетинаються в точці  $O$ . Точки  $K$  і  $M$  — середини відповідно відрізків  $BC$  і  $OD$ . Знайдіть кут  $AMK$ .

13.38.\* Дано квадрат  $ABCD$ . Точки  $P$  і  $Q$  лежать відповідно на сторонах  $AB$  і  $BC$ , причому  $BP = BQ$ . Нехай точка  $H$  — основа перпендикуляра, опущеного з точки  $B$  на відрізок  $PC$ . Знайдіть кут  $DHQ$ .

13.39.\* На медіані  $BM$  трикутника  $ABC$  позначено точку  $K$  так, що  $\angle MKC = \angle BCM$ . Доведіть, що  $\angle AKM = \angle BAM$ .

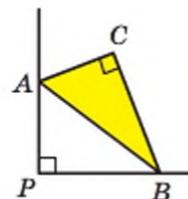


Рис. 13.14



## 14. Описані чотирикутники

**Означення.** Чотирикутник називають **описаним**, якщо існує коло, яке дотикається до всіх його сторін.

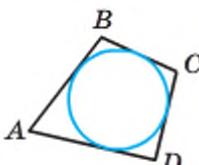


Рис. 14.1

На рисунку 14.1 зображене описаній чотирикутник  $ABCD$ . У цьому випадку також говорять, що коло вписане в чотирикутник.

**Теорема 14.1.** Якщо чотирикутник є описаним, то суми його протилежних сторін рівні.

**Доведення.** Нехай чотирикутник  $ABCD$  описано навколо кола (рис. 14.2). Доведемо, що  $AB + CD = BC + AD$ .

Точки  $M, N, P, K$  — точки дотику кола до сторін чотирикутника.

Оскільки відрізки дотичних, проведених до кола через одну точку, рівні, то  $AK = AM, BM = BN, CN = CP, DP = DK$ . Нехай  $AK = a, BM = b, CN = c, DP = d$ .

Тоді  $AB + CD = a + b + c + d$ ,

$BC + AD = b + c + a + d$ .

Отже,  $AB + CD = BC + AD$ . ▲

Ви знаєте, що в будь-який трикутник можна вписати коло. Проте не будь-який чотирикутник має цю властивість. Наприклад, неможливо вписати коло в прямокутник, відмінний від квадрата. Розпізнавати чотирикутники, у які можна вписати коло, дає змогу така теорема.

**Теорема 14.2 (обернена до теореми 14.1).** Якщо в опуклому чотирикутнику суми протилежних сторін рівні, то цей чотирикутник є описаним.

**Доведення.** Розглянемо опуклий чотирикутник  $ABCD$ , у якому  $AB + CD = BC + AD$ . Доведемо, що в нього можна вписати коло.

Нехай бісектриси кутів  $A$  і  $B$  перетинаються в точці  $O$  (рис. 14.3). Тоді точка  $O$  рівновіддалена від сторін  $AB, BC$  і  $AD$ . Отже, існує коло із центром у точці  $O$ , яке дотикається до трьох цих сторін.

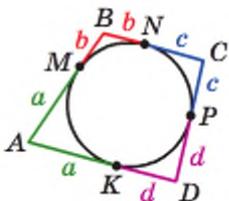


Рис. 14.2

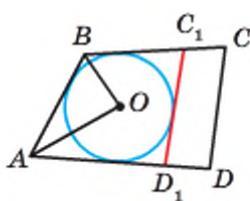


Рис. 14.3



Припустимо, що це коло не дотикається до сторони  $CD$ . Тоді можливі два випадки.

**Випадок 1.** Сторона  $CD$  не має спільних точок з побудованим колом.

Проведемо дотичну  $C_1D_1$  паралельно стороні  $CD$  (рис. 14.3). Чотирикутник  $ABC_1D_1$  описаний. Тоді за теоремою 14.1 отримуємо, що

$$AB + C_1D_1 = BC_1 + AD_1. \quad (1)$$

Проте за умовою

$$AB + CD = BC + AD. \quad (2)$$

Віднімемо від рівності (2) рівність (1):

$$CD - C_1D_1 = BC - BC_1 + AD - AD_1.$$

Звідси маємо:  $CD - C_1D_1 = C_1C + D_1D$ ;  $CD = C_1C + D_1D + C_1D_1$ .

Ця рівність суперечить твердженням, доведеному в ключовій задачі 3 п. 4.

Отже, сторона  $CD$  повинна мати спільні точки з розглядуваним колом.

**Випадок 2.** Сторона  $CD$  має дві спільні точки з побудованим колом.

Міркуючи аналогічно, можна показати, що сторона  $CD$  не може мати дві спільні точки з побудованим колом. Переконайтесь в цьому самостійно.

Таким чином, припустивши, що побудоване коло не дотикається до сторони  $CD$ , ми отримали суперечність.  $\blacktriangleleft$

Теореми 14.1 і 14.2 можна сформулювати як одну теорему:

*для того щоб чотирикутник був описаним, необхідно і достатньо, щоб суми його протилежних сторін були рівними.*

Якщо чотирикутник є описаним, то існує точка, рівновіддалена від усіх його сторін (центр вписаного кола). Щоб знайти цю точку, достатньо знайти точку перетину бісектрис двох сусідніх кутів цього чотирикутника.

**Задача 1.** На бічних сторонах трапеції, у яку можна вписати коло, як на діаметрах побудовано два кола. Доведіть, що ці кола дотикаються.

**Розв'язання.** Нехай  $O_1$  і  $O_2$  — середини бічних сторін  $AB$  і  $CD$  трапеції  $ABCD$  (рис. 14.4). Вони є центрами кіл, про які йдееться в умові задачі. Тоді сума радіусів  $r_1$  і  $r_2$  кіл дорівнює  $\frac{AB+CD}{2}$ . Оскільки в трапецію можна вписати

коло, то  $\frac{AB+CD}{2} = \frac{BC+AD}{2} = O_1O_2$ . Отримали, що

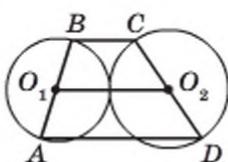


Рис. 14.4



$r_1 + r_2 = O_1O_2$ , тобто сума радіусів кіл дорівнює відстані між їхніми центрами. А це означає, що кола дотикаються. ▲

**Задача 2.** Із точки перетину діагоналей вписаного чотирикутника опущено перпендикуляри на його сторони. Доведіть, що основи цих перпендикулярів є вершинами описаного чотирикутника.

**Розв'язання.** Нехай  $O$  — точка перетину діагоналей вписаного чотирикутника  $ABCD$  (рис. 14.5),  $OM \perp AB$ ,  $ON \perp BC$ ,  $OP \perp CD$ ,  $OQ \perp DA$ . Оскільки  $\angle AMO + \angle ADO = 180^\circ$ , то навколо чотирикутника  $AMOQ$  можна описати коло. Звідси

$$\angle MAO = \angle MQO. \quad (3)$$

Аналогічно доводимо, що

$$\angle PDO = \angle PQO. \quad (4)$$

Але чотирикутник  $ABCD$  є вписаним. Тому  $\angle BAC = \angle CDB$ .

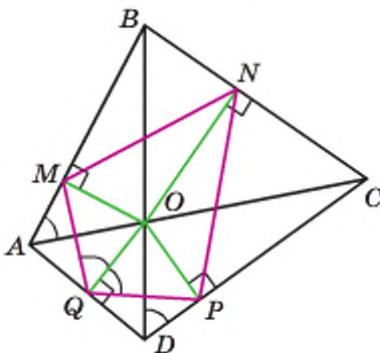


Рис. 14.5

З урахуванням рівностей (3) і (4) отримуємо, що  $\angle MQO = \angle PQO$ , тобто  $QO$  — бісектриса кута  $MQP$ .

Аналогічно доводимо, що промені  $MO$ ,  $NO$  і  $PO$  є бісектрисами відповідно кутів  $QMN$ ,  $MNP$  і  $NPQ$ .

Отже, бісектриси кутів чотирикутника  $MNPQ$  перетинаються в одній точці, а це означає, що в чотирикутник можна вписати коло. ▲

1. Який чотирикутник називають описаним?  
 2. У якому випадку говорять, що коло вписане в чотирикутник?  
 3. Яку властивість мають сторони описаного чотирикутника?  
 4. За якої умови чотирикутник є описаним?



## ВПРАВИ

- 14.1.** Сума двох протилежних сторін чотирикутника, описаного навколо кола, дорівнює 18 см. Знайдіть периметр даного чотирикутника.
- 14.2.** Бічна сторона рівнобічної трапеції дорівнює 7 см. Чому дорівнює периметр даної трапеції, якщо в неї можна вписати коло?
- 14.3.** У чотирикутнику  $CDEF$ , у який можна вписати коло,  $CD = 6$  см,  $DE = 8$  см,  $EF = 12$  см. Знайдіть сторону  $CF$ .
- 14.4.** Доведіть, що в будь-який ромб можна вписати коло. Яка точка є центром кола, вписаного в ромб?
- 14.5.** Чи можна вписати коло в паралелограм, який не є ромбом?
- 14.6.** Під яким кутом видно бічну сторону трапеції із центра вписаного кола?
- 14.7.** Один із кутів ромба дорівнює  $60^\circ$ , а більша діагональ — 24 см. Знайдіть радіус кола, вписаного в даний ромб.
- 14.8.** Доведіть, що коли в прямокутник можна вписати коло, то цей прямокутник є квадратом.
- 14.9.** У прямокутну трапецію вписано коло. Точка дотику ділить більшу бічну сторону на відрізки завдовжки 8 см і 50 см. Знайдіть периметр даної трапеції, якщо радіус вписаного кола дорівнює 20 см.
- 14.10.** У прямокутну трапецію вписано коло. Точка дотику ділить більшу бічну сторону на відрізки завдовжки 3 см і 12 см. Знайдіть радіус вписаного кола, якщо периметр трапеції дорівнює 54 см.
- 14.11.** Два кола мають зовнішній дотик, прямі  $AB$  і  $CD$  — їхні спільні дотичні, точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  і  $D$  — точки дотику (рис. 14.6). Доведіть, що в чотирикутник  $ABCD$  можна вписати коло.
- 14.12.** Центр кола, вписаного в чотирикутник, збігається з точкою перетину його діагоналей. Доведіть, що цей чотирикутник — ромб.
- 14.13.** Чотирикутник  $ABCD$  описано навколо кола із центром  $O$ . Доведіть, що  $\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$ .

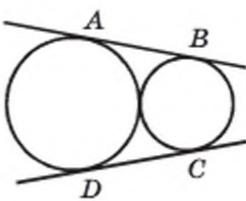


Рис. 14.6

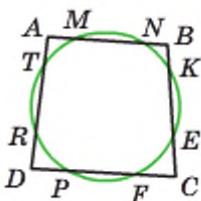


Рис. 14.7

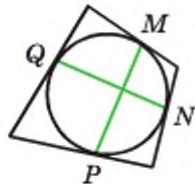


Рис. 14.8

- 14.14.\*** Коло перетинає всі сторони чотирикутника  $ABCD$  так, що  $MN = KE = FP = RT$  (рис. 14.7). Доведіть, що в цей чотирикутник можна вписати коло.
- 14.15.\*** Кола, побудовані на бічних сторонах трапеції як на діаметрах, мають зовнішній дотик. Доведіть, що в цю трапецію можна вписати коло.
- 14.16.\*\*** Чотирикутник є одночасно вписаним і описаним. Нехай  $M, N, P$  і  $Q$  — точки дотику вписаного кола зі сторонами чотирикутника (рис. 14.8). Доведіть, що  $MP \perp NQ$ .
- 14.17.\*\*** Дано чотирикутник  $ABCD$ . Відомо, що кола, вписані в трикутники  $ABC$  і  $ACD$ , дотикаються. Доведіть, що чотирикутник  $ABCD$  — описаний.
- 14.18.\*\*** Відомо, що чотирикутник  $ABCD$  описаний. Доведіть, що кола, вписані в трикутники  $ABC$  і  $ACD$ , дотикаються.
- 14.19.\*** Доведіть, що відрізки, які сполучають точки дотику з вписаним колом протилежних сторін описаного чотирикутника, є рівними тоді і тільки тоді, коли чотирикутник має пару рівних протилежних кутів.
- 14.20.\*** Точка  $O$  — центр вписаного кола трикутника  $ABC$ , точка  $D$  — середина сторони  $AB$  (рис. 14.9). Відомо, що  $\angle AOD = 90^\circ$ . Доведіть, що  $AB + BC = 3AC$ .
- 14.21.\*** Дано точки  $A, B$  і  $C$ , які не лежать на одній прямій. Знайдіть точку  $D$  таку, щоб чотирикутник  $ABCD$  був як вписаним, так і описаним.

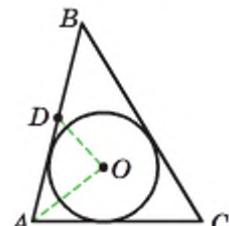


Рис. 14.9

## ПОДІБНІСТЬ ТРИКУТНИКІВ

Опанувавши матеріал цього параграфа, ви дізнаєтесь про властивості відрізків, які паралельні прямі відтинають на сторонах кута.

Ви навчитеся серед трикутників знаходити такі, що мають однакову форму, але різні розміри.

Ви дізнаєтесь, які трикутники називають подібними, і навчитеся застосовувати їхні властивості.

Ви ознайомитеся з властивістю хорд, які перетинаються, і властивістю дотичної і січної, проведених до кола через одну точку.





## 15. Теорема Фалеса. Теорема про пропорційні відрізки

**Теорема 15.1 (теорема Фалеса).** Якщо паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають на одній його стороні рівні відрізки, то вони відтинають рівні відрізки й на другій його стороні.

**Доведення.** Нехай маємо кут  $AOB$  (рис. 15.1). Відомо, що  $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = \dots$ ,  $A_1B_1 \parallel A_2B_2$ ,  $A_2B_2 \parallel A_3B_3$ ,  $A_3B_3 \parallel A_4B_4$ ,  $\dots$ . Доведемо, що  $OB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = \dots$ .

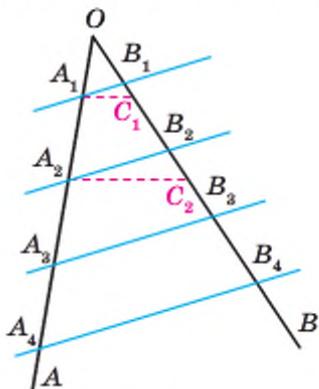


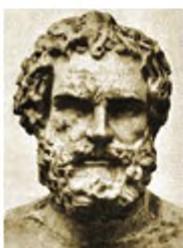
Рис. 15.1

Таким чином, через точку  $A_2$  проходять дві прямі, паралельні прямі  $A_3B_3$ . Ми отримали суперечність. Отже,  $B_1B_2 = B_2B_3$ .

Аналогічно можна довести, що  $B_2B_3 = B_3B_4$  і т. д.  $\blacktriangle$

**Означення.** Відношенням двох відрізків називають відношення їхніх довжин, виражених в одних і тих самих одиницях виміру.

Якщо, наприклад,  $AB = 8$  см,  $CD = 6$  см, то відношення відрізка  $AB$  до відрізка  $CD$  дорівнює  $\frac{8}{6}$ . Записують:  $\frac{AB}{CD} = \frac{8}{6}$ , тобто  $\frac{AB}{CD} = \frac{4}{3}$ .



Фалес Мілетський

(бл. 625 — бл. 547 до н. е.)

Давньогрецький філософ, учений, купець і державний діяч. Походив з Мілета — порту в Малій Азії на узбережжі Егейського моря.



Якщо  $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$ , то говорять, що відрізки  $AB$  і  $CD$  пропорційні відповідно відрізкам  $A_1B_1$  і  $C_1D_1$ .

Аналогічно можна говорити про пропорційність більшої кількості відрізків. Наприклад, якщо  $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{MN}{M_1N_1}$ , то говорять, що відрізки  $AB$ ,  $CD$ ,  $MN$  пропорційні відповідно відрізкам  $A_1B_1$ ,  $C_1D_1$ ,  $M_1N_1$ .

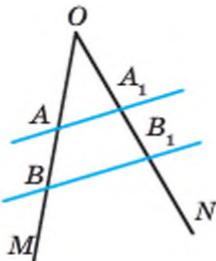


Рис. 15.2

**Теорема 15.2 (теорема про пропорційні відрізки).** Якщо паралельні прямі перетинають сторони кута, то відрізки, що утворилися на одній стороні кута, пропорційні відповідним відрізкам, що утворилися на другій стороні кута.

**Доведення.** Нехай сторони кута  $MON$  перетнуто паралельними прямими  $AA_1$  і  $BB_1$  (рис. 15.2). Доведемо, що:

$$1) \frac{OA}{OA_1} = \frac{AB}{A_1B_1}; \quad 2) \frac{OA}{OA_1} = \frac{OB}{OB_1}; \quad 3) \frac{OB}{OB_1} = \frac{AB}{A_1B_1}.$$

Доведемо першу з наведених рівностей (інші дві доводять аналогічно).

Нехай для відрізків  $OA$  і  $AB$  існує такий відрізок завдовжки  $l$ , який укладається ціле число разів у кожному з них. Маємо:  $OA = ml$ ,  $AB = nl$ , де  $m$  і  $n$  — деякі натуральні числа.

Тоді відрізки  $OA$  і  $AB$  можна поділити відповідно на  $m$  і  $n$  рівних відрізків, кожний з яких дорівнює  $l$ .

Через кінці отриманих відрізків проведемо прямі, паралельні прямій  $BB_1$  (рис. 15.3). За теоремою Фалеса ці прямі ділять відрізки  $OA_1$  і  $A_1B_1$  відповідно на  $m$  і  $n$  рівних відрізків. Нехай кожний із цих відрізків дорівнює  $l_1$ . Звідси  $OA_1 = ml_1$ ,  $A_1B_1 = nl_1$ .

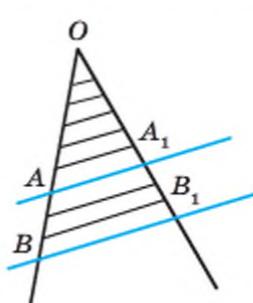


Рис. 15.3

Маємо:  $\frac{OA}{AB} = \frac{ml}{nl} = \frac{m}{n}$ ,  $\frac{OA_1}{A_1B_1} = \frac{ml_1}{nl_1} = \frac{m}{n}$ . Звідси

$$\frac{OA}{AB} = \frac{OA_1}{A_1B_1}. \text{ Тоді } \frac{OA}{OA_1} = \frac{AB}{A_1B_1}.$$

Зауважимо, що наведене доведення цієї теореми не є повним. Річ у тім, що не для будь-яких двох відрізків існує відрізок, що вміщається в кожному з них ціле число разів. Зокрема, для відрізків  $OA$  і  $AB$  такий відрізок може й не існувати. Проведемо доведення для цього випадку.

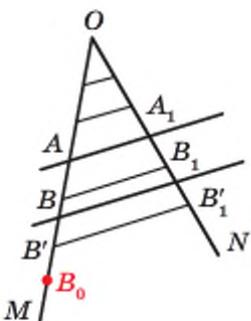


Рис. 15.4

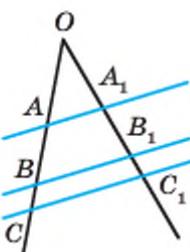


Рис. 15.5

Доведемо, що  $\frac{AB}{OA} = \frac{A_1B_1}{OA_1}$  (рис. 15.4).

Припустимо, що ця рівність неправильна. Нехай, наприклад,  $\frac{AB}{OA} < \frac{A_1B_1}{OA_1}$ .

Тоді існує відрізок  $AB_0$  такий, що  $AB_0 > AB$  і

$$\frac{AB_0}{OA} = \frac{A_1B_1}{OA_1}. \quad (*)$$

На промені  $AB$  відкладемо відрізок  $AB_0$  (рис. 15.4).

Поділимо відрізок  $OA$  на рівні відрізки такої довжини  $m$ , що  $m < BB_0$ . Будемо послідовно відкладати відрізки довжиною  $m$  від точки  $A$  доти, доки кінець одного з відрізків, точка  $B'$ , стане внутрішньою точкою відрізка  $BB_0$ . Така точка обов'язково знайдеться, оскільки довжина відрізка, який відкладаємо, менша від  $BB_0$ .

Через кінці отриманих відрізків проведемо прямі, паралельні прямій  $AA_1$ . Нехай пряма, яка проходить через точку  $B'$ , перетинає промінь  $ON$  у точці  $B'_1$  (рис. 15.4).

Отримали, що для відрізків  $OA_1$  і  $A_1B'_1$  існує відрізок, який уміщається в кожному з них ціле число разів. Тому виконується рівність  $\frac{AB'}{OA} = \frac{A_1B'_1}{OA_1}$ .

Оскільки  $AB_0 > AB'$  і  $A_1B'_1 > A_1B_1$ , то  $\frac{AB_0}{OA} > \frac{AB'}{OA} = \frac{A_1B'_1}{OA_1} > \frac{A_1B_1}{OA_1}$ , тобто  $\frac{AB_0}{OA} > \frac{A_1B_1}{OA_1}$ , що суперечить рівності (\*). ▲

Якщо рисунок 15.2 доповнити прямую  $CC_1$ , паралельною прямій  $BB_1$  (рис. 15.5), то, міркуючи аналогічно, отримаємо, наприклад, що  $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$ .



Теорема 15.2 залишається справедливою, якщо замість сторін кута взяти дві будь-які прямі.

**Задача 1.** Поділіть даний відрізок на три рівних відрізки.

**Розв'язання.** Через кінець  $A$  даного відрізка  $AB$  проведемо промінь  $AC$ , який не належить прямій  $AB$  (рис. 15.6). Позначимо на промені  $AC$  довільну точку  $A_1$ . Потім позначимо точки  $A_2$  і  $A_3$  так, щоб  $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$ . Проведемо відрізок  $A_3B$ . Через точки  $A_1$  і  $A_2$  проведемо прямі, паралельні прямій  $A_3B$ . Вони перетинають відрізок  $AB$  у точках  $B_1$  і  $B_2$  відповідно. За теоремою Фалеса  $AB_1 = B_1B_2 = B_2B$ .  $\blacktriangle$

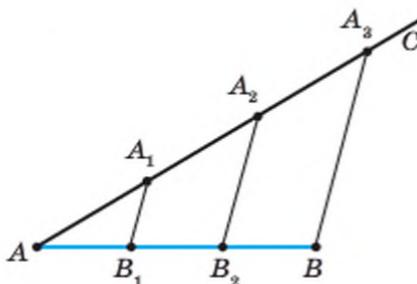


Рис. 15.6

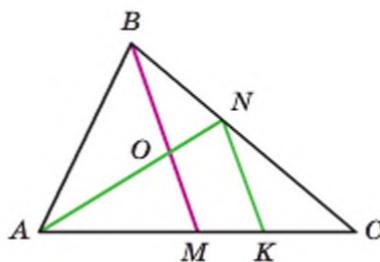


Рис. 15.7

**Задача 2.** На стороні  $BC$  трикутника  $ABC$  обрано точку  $N$  так, що  $BN : NC = 2 : 3$ . У якому відношенні медіана  $BM$  ділить відрізок  $AN$ ?

**Розв'язання.** Через точку  $N$  проведемо пряму  $NK$ , паралельну медіані  $BM$ , точка  $K$  належить стороні  $AC$  (рис. 15.7). Маємо:  $\frac{MK}{KC} = \frac{BN}{NC} = \frac{2}{3}$ ;  $MK = \frac{2}{3} KC$ . Звідси  $MK = \frac{2}{5} MC$ . Оскільки  $MC = MA$ , то  $MK = \frac{2}{5} AM$ , тобто  $\frac{AM}{MK} = \frac{5}{2}$ . Отримуємо:  $\frac{AO}{ON} = \frac{AM}{MK} = \frac{5}{2}$ .  $\blacktriangle$



- Сформулюйте теорему Фалеса.
- Що називають відношенням двох відрізків?
- У якому випадку говорять, що відрізки  $AB$  і  $CD$  пропорційні відрізкам  $A_1B_1$  і  $C_1D_1$ ?
- Сформулюйте теорему про пропорційні відрізки.



## ВПРАВИ

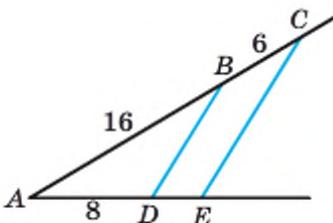


Рис. 15.8

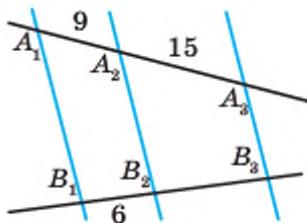


Рис. 15.9

- 15.1.** На рисунку 15.8  $BD \parallel CE$ ,  $AB = 16$  см,  $BC = 6$  см,  $AD = 8$  см. Знайдіть відрізок  $DE$ .
- 15.2.** На рисунку 15.9  $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$ ,  $A_1A_2 = 9$  см,  $A_2A_3 = 15$  см,  $B_1B_2 = 6$  см. Знайдіть відрізок  $B_2B_3$ .
- 15.3.** На рисунку 15.10  $DE \parallel AC$ ,  $BE = 10$  см, відрізок  $BD$  у два рази більший за відрізок  $AD$ . Знайдіть відрізок  $BC$ .
- 15.4.** Пряма, паралельна стороні  $BC$  трикутника  $ABC$ , перетинає його сторону  $AB$  у точці  $M$ , а сторону  $AC$  — у точці  $K$ ,  $AM = 9$  см,  $BM = 6$  см,  $KC = 8$  см. Знайдіть відрізок  $AK$ .
- 15.5.** Доведіть, що середня лінія трикутника  $ABC$ , паралельна стороні  $AC$ , ділить навпіл будь-який відрізок, який сполучає вершину  $B$  з довільною точкою сторони  $AC$ .
- 15.6.** Відстань від середини хорди  $BC$  до діаметра  $AC$  дорівнює 3 см,  $\angle BAC = 30^\circ$ . Знайдіть хорду  $AB$ .
- 15.7.** Відрізок  $BM$  — висота ромба  $ABCD$ , проведена до сторони  $AD$ ,  $\angle A = 45^\circ$ ,  $AM = 8$  см. Знайдіть відстань від точки перетину діагоналей ромба до сторони  $AD$ .
- 15.8.** У трикутнику  $ABC$  відомо, що  $AB = BC$ ,  $AC = 8$  см,  $AD$  — медіана,  $BE$  — висота,  $BE = 12$  см. Із точки  $D$  опущено перпендикуляр  $DF$  на сторону  $AC$ . Знайдіть відрізок  $DF$  і кут  $ADF$ .
- 15.9.** Сторона  $AC$  трикутника  $ABC$  дорівнює 24 см. Сторону  $AB$  поділили на чотири рівних відрізки та через точки поділу провели прямі, паралельні стороні  $AC$ . Знайдіть відрізки цих прямих, які належать трикутнику.
- 15.10.** Основи трапеції дорівнюють 16 см і 28 см. Одну з бічних сторін поділили на три рівних відрізки та через точки поділу

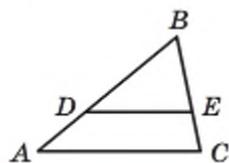


Рис. 15.10



провели прямі, паралельні основам. Знайдіть відрізки цих прямих, які належать трапеції.

- 15.11.** Доведіть, що середня лінія трапеції ділить її діагоналі навпіл.
- 15.12.** Середня лінія  $MK$  трапеції  $ABCD$  перетинає діагональ  $AC$  у точці  $E$ ,  $ME = 4$  см,  $EK = 6$  см. Знайдіть основи трапеції.
- 15.13.** Діагоналі трапеції перетинають її середню лінію  $MK$  у точках  $E$  і  $F$ . Доведіть, що  $ME = KF$ .
- 15.14.** Доведіть, що відрізок, який сполучає середини діагоналей трапеції, паралельний її основам і дорівнює половині їхньої різниці.
- 15.15.** Основи трапеції дорівнюють 12 см і 22 см. Знайдіть відрізки, на які діагоналі трапеції ділять її середню лінію.
- 15.16.** Доведіть, що точка перетину бісектрис кутів, прилеглих до бічної сторони трапеції, належить прямій, яка містить її середню лінію.
- 15.17.** Точка  $D$  — середина основи  $AC$  рівнобедреного трикутника  $ABC$ . На стороні  $AB$  позначили точку  $M$  так, що  $AM : MB = 2 : 7$ . У якому відношенні пряма  $BD$  ділить відрізок  $CM$ ?
- 15.18.** У рівнобедреному трикутнику  $DEF$  провели висоту  $EC$  до його основи та на бічній стороні  $EF$  позначили точку  $A$ . Відрізки  $EC$  і  $DA$  перетинаються в точці  $O$ , причому  $AO : OD = 3 : 8$ . Знайдіть відношення  $EA : AF$ .
- 15.19.** На стороні  $BC$  трикутника  $ABC$  позначено точку  $M$  так, що  $BM : MC = 3 : 10$ . У якому відношенні відрізок  $AM$  ділить медіану  $BK$  трикутника  $ABC$ ?
- 15.20.** На стороні  $AB$  трикутника  $ABC$  позначено точку  $M$  так, що  $AM : MB = 4 : 3$ . У якому відношенні медіана  $BK$ : 1) ділить відрізок  $CM$ ; 2) ділиться відрізком  $CM$ ?
- 15.21.** У трикутнику  $ABC$  відрізок  $AK$  (точка  $K$  належить стороні  $BC$ ) ділить медіану  $BM$  у відношенні  $3 : 4$ , рахуючи від вершини  $B$ . У якому відношенні точка  $K$  ділить сторону  $BC$ ?
- 15.22.** Дано відрізки  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Побудуйте відрізок  $x$  такий, що  $a : x = b : c$ .
- 15.23.** Через точку  $O$ , яка належить даному куту, проведіть відрізок, кінці якого належать сторонам даного кута та який ділиться точкою  $O$ : 1) навпіл; 2) у відношенні  $2 : 3$ .
- 15.24.** Точки  $A$  і  $B$  лежать у різних півплощинах відносно прямої  $l$  і віддалені від неї на 6 см і 8 см відповідно. Знайдіть відстань від середини відрізка  $AB$  до прямої  $l$ .



- 15.25. На сторонах кута  $A$  позначені точки  $B_1, B_2, C_1, C_2$  так, що  $\frac{AB_1}{B_1B_2} = \frac{AC_1}{C_1C_2}$  (рис. 15.11). Доведіть, що  $B_1C_1 \parallel B_2C_2$ .

- 15.26. Висота  $BK$  ромба  $ABCD$ , проведена до сторони  $AD$ , перетинає діагональ  $AC$  у точці  $M$ . Знайдіть відрізок  $MD$ , якщо відомо, що  $BK = 4$  см,  $AK : KD = 1 : 2$ .

- 15.27. У рівнобедреному трикутнику  $ABC$  ( $AC = CB$ ) проведено медіану  $CC_1$  і бісектрису  $AA_1$ . Знайдіть кут  $ACB$ , якщо  $AA_1 = 2CC_1$ .

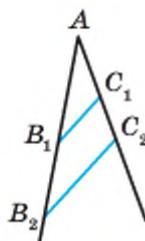
- 15.28. Точки  $M$  і  $P$  — середини відповідно сторін  $AD$  і  $DC$  паралелограма  $ABCD$ . Відрізки  $MC$  і  $BP$  перетинаються в точці  $K$ . Знайдіть відношення  $BK : KP$ .

- 15.29. Через вершину  $B$  паралелограма  $ABCD$  проведено пряму, яка не має з паралелограмом інших спільних точок. Вершини  $A$  і  $C$  віддалені від цієї прямої на відстані  $a$  і  $b$  відповідно. Знайдіть відстань від точки  $D$  до цієї прямої.

- 15.30.\* У гострокутному трикутнику  $ABC$  відрізки  $CC_1$  і  $AA_1$  — висоти. Із точок  $A$  і  $C$  на пряму  $A_1C_1$  опущено перпендикуляри  $AF$  і  $CK$ . Доведіть, що  $FC_1 = KA_1$ .

- 15.31.\* В опуклому чотирикутнику  $ABCD$  протилежні кути  $A$  і  $C$  — прямі. На діагональ  $AC$  опущено перпендикуляри  $BE$  і  $DF$ . Доведіть, що  $CE = FA$ .

Рис. 15.11



## 16. Теорема про медіани трикутника.

### Теорема про бісектрису трикутника

**Теорема 16.1.** Усі три медіани трикутника перетинаються в одній точці, яка ділить кожну з них у відношенні  $2 : 1$ , рахуючи від вершини трикутника.

- Доведення.** На рисунку 16.1 медіани  $AA_1$  і  $BB_1$  трикутника  $ABC$  перетинаються в точці  $M$ . Доведемо, що медіана  $CC_1$  також проходить через точку  $M$  і  $\frac{BM}{MB_1} = \frac{AM}{MA_1} = \frac{CM}{MC_1} = \frac{2}{1}$ .
- Проведемо  $B_1K \parallel AA_1$ . Оскільки  $AB_1 = B_1C$ , то за теоремою Фалеса  $A_1K = KC$ , тобто  $\frac{A_1C}{A_1K} = \frac{2}{1}$ .

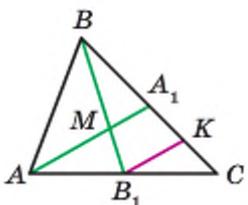


Рис. 16.1



Оскільки  $BA_1 = A_1C$ , то  $\frac{BA_1}{A_1K} = \frac{2}{1}$ . За теоремою про пропорційні відрізки  $\frac{BM}{MB_1} = \frac{BA_1}{A_1K} = \frac{2}{1}$ .

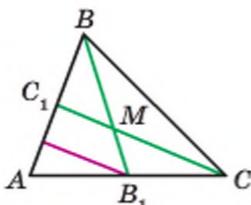


Рис. 16.2

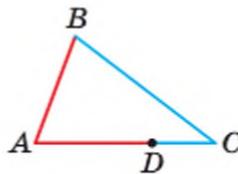


Рис. 16.3

Таким чином, медіана  $AA_1$ , перетинаючи медіану  $BB_1$ , ділить її у відношенні  $2 : 1$ , рахуючи від вершини  $B$ .

Аналогічно можна довести (зробіть це самостійно), що медіана  $CC_1$  також ділить медіану  $BB_1$  у відношенні  $2 : 1$ , рахуючи від вершини  $B$  (рис. 16.2).

А це означає, що всі три медіани трикутника  $ABC$  проходять через одну точку. Ми довели, що ця точка ділить медіану  $BB_1$  у відношенні  $2 : 1$ . Аналогічно можна довести, що ця точка ділить у відношенні  $2 : 1$  також медіани  $AA_1$  і  $CC_1$ . ▲

На рисунку 16.3 зображеного трикутник  $ABC$ . Точка  $D$  належить стороні  $AC$ . У цьому разі говорять, що сторони  $AB$  і  $BC$  прилеглі відповідно до відрізків  $AD$  і  $DC$ .

**Теорема 16.2 (властивість бісектриси трикутника).**  
Бісектриса трикутника ділить сторону, до якої вона проведена, на відрізки, пропорційні прилеглим до них сторонам.

**Доведення.** На рисунку 16.4 відрізок  $BD$  — бісектриса трикутника  $ABC$ . Доведемо, що  $\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC}$ .

Через точку  $C$  проведемо пряму  $CE$ , паралельну прямій  $BD$ . Нехай проведена пряма перетинає пряму  $AB$  у точці  $E$ . Кути  $1$  і  $2$  рівні як різносторонні при паралельних прямих  $BD$  і  $CE$  та січній  $BC$ ; кути  $3$  і  $4$  рівні як відповідні при паралельних прямих  $BD$  і  $CE$  та січній  $AE$ . Оскільки  $BD$  — бісектриса трикутника  $ABC$ , то  $\angle 4 = \angle 1$ . Звідси  $\angle 2 = \angle 3$ . Тоді

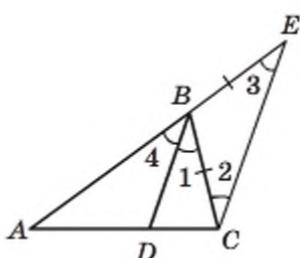


Рис. 16.4



трикутник  $CBE$  — рівнобедрений з рівними сторонами  $BC$  і  $BE$ . За теоремою про пропорційні відрізки  $\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BE}$ . Оскільки  $BE = BC$ , то  $\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC}$ .  $\blacktriangleleft$

Справедлива теорема, обернена до теореми 16.2.

**Теорема 16.3.** Якщо на стороні  $AC$  трикутника  $ABC$  обрано точку  $D$  так, що  $\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC}$ , то відрізок  $BD$  — бісектриса трикутника  $ABC$ .

Скориставшися методом доведення від супротивного, доведіть цю теорему самостійно.

**Задача 1** (властивість бісектриси зовнішнього кута трикутника). Бісектриса зовнішнього кута при вершині  $B$  трикутника  $ABC$  перетинає промінь  $AC$  у точці  $D$ . Доведіть, що  $\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC}$ .

*Вказівка.* Проведемо через точку  $C$  пряму  $CE$ , паралельну прямій  $BD$  (рис. 16.5). Завершіть доведення самостійно.

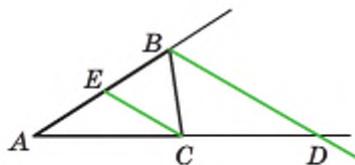


Рис. 16.5

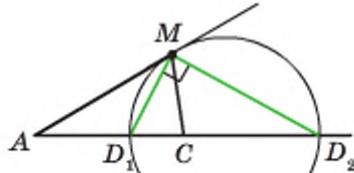


Рис. 16.6

Зауважимо, що справедлива властивість, обернена до властивості бісектриси зовнішнього кута трикутника:

якщо на продовженнях сторони  $AC$  трикутника  $ABC$  обрано точку  $D$  так, що  $\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC}$ , то промінь  $BD$  — бісектриса зовнішнього кута трикутника при вершині  $B$ .

Доведіть цю властивість самостійно.  $\blacktriangleleft$

**Задача 2.** Нехай дано точки  $A$  і  $C$ . Доведіть, що множина точок  $X$  таких, що  $\frac{AX}{XC} = k$ , де  $k$  — дане додатне число, відмінне від 1, належить одному колу.

*Розв'язання.* Для кожного  $k > 0$  і  $k \neq 1$  на прямій  $AC$  існують дві точки  $D_1$  і  $D_2$  такі, що  $\frac{AD_1}{D_1C} = \frac{AD_2}{D_2C} = k$ , причому точка  $D_1$  належить

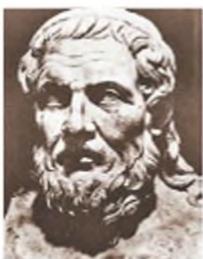


відрізу  $AC$ , а точка  $D_2$  не належить цьому відрізку (цей факт ви можете довести на заняттях математичного гуртка).

Нехай точка  $M$  не належить прямій  $AC$  і  $\frac{AM}{MC} = k$  (рис. 16.6).

Тоді  $MD_1$  — бісектриса трикутника  $AMC$ ,  $MD_2$  — бісектриса зовнішнього кута при вершині  $M$  трикутника  $AMC$ . Оскільки  $\angle D_1MD_2$  — кут між бісектрисами суміжних кутів, то  $\angle D_1MD_2 = 90^\circ$ . Отже, точка  $M$  належить колу з діаметром  $D_1D_2$ . ▲

У п. 18 буде доведено, що кожна точка  $X$  зазначеного кола має таку властивість:  $\frac{AX}{XC} = k$ . Це коло називають колом Аполлонія.



**Аполлоній Пергський**

(III ст. до н. е.)

Давньогрецький математик. Його праці справили значний вплив на розвиток астрономії, механіки, оптики.

**Задача 3.** Побудуйте трикутник за його медіанами.

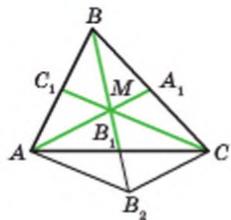
**Розв'язання.** На рисунку 16.7 відрізки  $AA_1$ ,  $BB_1$  і  $CC_1$  — медіани трикутника  $ABC$ , які перетинаються в точці  $M$ .

На промені  $MB_1$  позначимо точку  $B_2$  таку, що  $MB_1 = B_1B_2$ .

У чотирикутнику  $AMCB_2$  діагоналі точкою перетину діляться навпіл, а отже, цей чотирикутник є паралелограмом. Звідси  $CB_2 = AM$ .

Оскільки  $MB_1 = \frac{1}{2}BM$ , то  $MB_2 = BM$ . Для трикутника  $MCB_2$  отримуємо:  $CB_2 = AM = \frac{2}{3}AA_1$ ,  $B_2M = \frac{2}{3}BB_1$ ,  $MC = \frac{2}{3}CC_1$ . Отже, трикутник  $MCB_2$  можна побудувати за трьома сторонами.

Завершіть розв'язання самостійно. ▲



**Рис. 16.7**



- Сформулюйте теорему про медіані трикутника.
- Сформулюйте властивість бісектриси трикутника.
- Сформулюйте властивість бісектриси зовнішнього кута трикутника.



## ВПРАВИ

- 16.1.** Висота рівностороннього трикутника дорівнює 12 см. На якій відстані від сторін трикутника розташована точка перетину його бісектрис?
- 16.2.** Медіана  $CD$  трикутника  $ABC$  дорівнює 9 см. Знайдіть відрізки  $CO$  і  $OD$ , де  $O$  — точка перетину медіан трикутника  $ABC$ .
- 16.3.** Відрізок  $BD$  є бісектрисою трикутника  $ABC$ ,  $AB = 40$  см,  $AD = 30$  см,  $CD = 12$  см. Знайдіть сторону  $BC$ .
- 16.4.** Відрізок  $AM$  — бісектриса трикутника  $ABC$ ,  $AB = 48$  см,  $AC = 32$  см,  $BM = 18$  см. Знайдіть сторону  $BC$ .
- 16.5.** Відрізок  $BD$  — бісектриса трикутника  $ABC$ ,  $AB = 28$  см,  $BC = 20$  см,  $AC = 36$  см. Знайдіть відрізки  $AD$  і  $CD$ .
- 16.6.** У трикутник  $ABC$  вписано ромб  $CDEF$  так, що кут  $C$  у них спільний, а вершини  $D$ ,  $E$  і  $F$  ромба належать відповідно сторонам  $AC$ ,  $AB$  і  $BC$  трикутника. Знайдіть сторони  $AC$  і  $BC$ , якщо  $AE = 30$  см,  $BE = 12$  см, а периметр трикутника дорівнює 105 см.
- 16.7.** Сторони трикутника дорівнюють 39 см, 65 см і 80 см. Коло, центр якого належить більшій стороні трикутника, дотикається до двох інших його сторін. На які відрізки центр цього кола ділить сторону трикутника?
- 16.8.** Точки  $M$  і  $K$  — середини сторін  $AB$  і  $AD$  паралелограма  $ABCD$  відповідно. Доведіть, що точка перетину прямих  $BK$  і  $DM$  належить діагоналі  $AC$ .
- 16.9.** Точки  $M$  і  $N$  — середини сторін  $BC$  і  $CD$  паралелограма  $ABCD$  відповідно. Доведіть, що відрізки  $AM$  і  $AN$  ділять діагональ  $BD$  на три рівні частини.
- 16.10.** Доведіть, що коли дві медіани трикутника рівні, то цей трикутник рівнобедрений.
- 16.11.** У трикутнику  $ABC$  ( $AB = BC$ ) проведено медіану  $AM$  і висоту  $BH$ . Знайдіть висоту  $BH$ , якщо  $AM = 45$  см,  $\angle CAM = 30^\circ$ .
- 16.12.** Дано відрізок  $AB$  і точку  $O$ , яка не належить прямій  $AB$ . Побудуйте трикутник, для якого відрізок  $AB$  є стороною, а точка  $O$  — точкою перетину медіан.
- 16.13.** У рівнобедреному трикутнику висота, проведена до основи, дорівнює 42 см, а основа відноситься до бічної сторони як  $6 : 11$ . Знайдіть радіус кола, вписаного в даний трикутник.



- 16.14.**\* Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 60 см, а центр вписаного кола ділить медіану, проведено до основи, у відношенні 12 : 5. Знайдіть основу трикутника.
- 16.15.**\* У трикутнику  $ABC$  медіани, які проведено з вершин  $A$  і  $C$ , перпендикулярні. Знайдіть відношення медіані  $BM$  до сторони  $AC$ .
- 16.16.**\* Точки  $M$  і  $N$  — середини сторін  $BC$  і  $CD$  паралелограма  $ABCD$ . Доведіть, що коли  $DM \perp AC$ , то  $BN : CD = 3 : 2$ .
- 16.17.**\* Точка  $D$  — середина сторони  $AC$  трикутника  $ABC$ , відрізки  $DE$  і  $DF$  — бісектриси трикутників  $ABD$  і  $CBD$  відповідно. Доведіть, що  $EF \parallel AC$ .
- 16.18.**\* Побудуйте трикутник:
- 1) за стороною та кутами, які ця сторона утворює з медіанами, проведеними до двох інших сторін;
  - 2) за двома медіанами та кутом між ними;
  - 3) за висотою та медіаною, проведеними до однієї сторони, і кутом між цією стороною та медіаною, проведеною до іншої сторони.
- 16.19.**\* Побудуйте трикутник:
- 1) за стороною та медіанами, проведеними до двох інших сторін;
  - 2) за висотою, проведеною до однієї зі сторін, і медіанами, проведеними до двох інших сторін.
- 16.20.**\*\* Точки  $K$ ,  $L$ ,  $M$  і  $N$  — відповідно середини сторін  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  і  $DA$  чотирикутника  $ABCD$ . Прямі  $AL$  і  $CK$  перетинаються в точці  $P$ , прямі  $AM$  і  $CN$  перетинаються в точці  $Q$ . Доведіть, що коли чотирикутник  $APCQ$  — паралелограм, то чотирикутник  $ABCD$  також є паралелограмом.
- 16.21.**\*\* У коло вписано квадрат  $ABCD$ . Хорда  $AE$  перетинає сторону  $CD$  у точці  $M$ , а хорда  $BE$  — у точці  $K$ . Доведіть, що  $DM : MK = DE : EK$ .
- 16.22.**\*\* У коло вписано рівносторонній трикутник  $ABC$ . Хорда  $AP$  перетинає медіану  $BD$  у точці  $K$  так, що  $BK : KD = 1 : 6$ . Знайдіть відношення  $BP : PC$ .
- 16.23.**\*\* Доведіть, що коли  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  — довжини медіан трикутника,  $p$  — його півпериметр, то  $m_1 + m_2 + m_3 > \frac{3}{2} p$ .
- 16.24.**\* Побудуйте трикутник за кутом, медіаною, проведеною з вершини цього кута, та іншою медіаною.



## 17. Подібні трикутники

На рисунку 17.1 ви бачите зменшене зображення обкладинки підручника з геометрії. Узагалі, у повсякденному житті ви часто стикаєтесь з об'єктами, які мають однакову форму, але різні розміри (рис. 17.2).

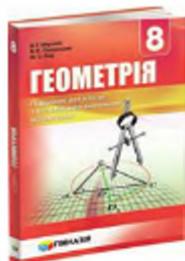


Рис. 17.1



Рис. 17.2

Геометричні фігури, які мають однакову форму, називають **подібними**. Наприклад, подібними є будь-які два кола, два квадрати, два рівносторонніх трикутники (рис. 17.3).

На рисунку 17.4 зображені трикутники  $ABC$  і  $A_1B_1C_1$ , у яких рівні кути:  $\angle A = \angle A_1$ ,  $\angle B = \angle B_1$ ,  $\angle C = \angle C_1$ .

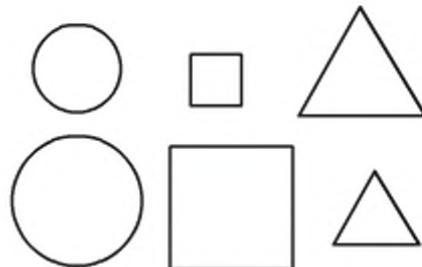


Рис. 17.3

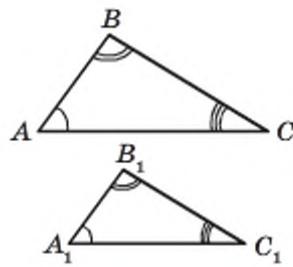


Рис. 17.4

Сторони  $AB$  і  $A_1B_1$  лежать проти рівних кутів  $C$  і  $C_1$ . Такі сторони називають **відповідними**. Відповідними також є сторони  $BC$  і  $B_1C_1$ ,  $CA$  і  $C_1A_1$ .

**Означення.** Два трикутники називають **подібними**, якщо їхні кути відповідно рівні та сторони одного трикутника пропорційні відповідним сторонам другого трикутника.

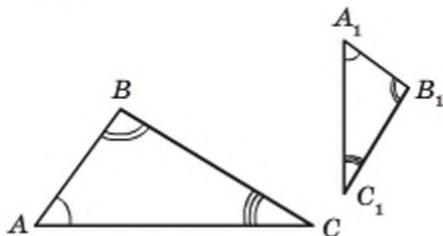


Рис. 17.5

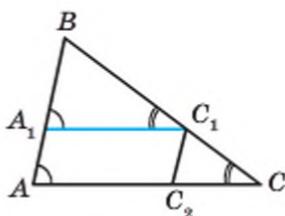


Рис. 17.6

Наприклад, на рисунку 17.5 зображені трикутники  $ABC$  і  $A_1B_1C_1$ , у яких  $\angle A = \angle A_1$ ,  $\angle B = \angle B_1$ ,  $\angle C = \angle C_1$  і  $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = 2$ . За означенням ці трикутники подібні. Пишуть:  $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$  (читають: «трикутник  $ABC$  подібний трикутнику  $A_1B_1C_1$ »).

Число 2, якому дорівнює відношення відповідних сторін, називають **коєфіцієнтом подібності**. Говорять, що трикутник  $ABC$  подібний трикутнику  $A_1B_1C_1$  із коефіцієнтом подібності, який дорівнює 2. Пишуть:  $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ .

Оскільки  $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA} = \frac{1}{2}$ , то можна також сказати, що трикутник  $A_1B_1C_1$  подібний трикутнику  $ABC$  із коефіцієнтом подібності  $\frac{1}{2}$ . Пишуть:  $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$ .

З означення рівних трикутників випливає, що будь-які два рівні трикутники подібні з коефіцієнтом подібності, який дорівнює 1.

Якщо  $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$  і  $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_2B_2C_2$ , то  $\Delta ABC \sim \Delta A_2B_2C_2$ . Доведіть цю властивість самостійно.

**Лема<sup>1</sup> про подібні трикутники.** *Пряма, яка паралельна стороні трикутника та перетинає дві інших його сторони, відтинає від даного трикутника йому подібний.*

**Доведення.** На рисунку 17.6 зображені трикутник  $ABC$ , відрізок  $A_1C_1$  паралельний стороні  $AC$ . Доведемо, що  $\Delta A_1BC_1 \sim \Delta ABC$ .

Кути  $A$  і  $A_1$ ,  $C$  і  $C_1$  рівні як відповідні при паралельних прямих  $A_1C_1$  і  $AC$  та січних  $AB$  і  $CB$  відповідно. Отже, кути трикутників, що розглядаються, відповідно рівні.

Покажемо, що сторони  $BA$  і  $BC$  пропорційні відповідно сторонам  $BA_1$  і  $BC_1$ .

<sup>1</sup> Лемою називають допоміжну теорему, яку використовують для доведення інших теорем.



Із теореми про пропорційні відрізки (теорема 15.2) випливає, що  $\frac{BA}{BC} = \frac{BA_1}{BC_1}$ . Звідси  $\frac{BA}{BA_1} = \frac{BC}{BC_1}$ .

Проведемо  $C_1C_2 \parallel AB$ . Отримуємо:  $\frac{BC}{BC_1} = \frac{AC}{AC_2}$ . За означенням чотирікутник  $AA_1C_1C_2$  — паралелограм. Тоді  $AC_2 = A_1C_1$ . Звідси  $\frac{BC}{BC_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ .

Таким чином, ми довели, що  $\frac{BA}{BA_1} = \frac{BC}{BC_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ .

Отже, у трикутниках  $A_1BC_1$  і  $ABC$  кути відповідно рівні та відповідні сторони пропорційні. Тому за означенням ці трикутники подібні. ▲

**Задача.** Доведіть, що відношення периметрів подібних трикутників дорівнює коефіцієнту подібності.

**Розв'язання.** Нехай трикутник  $A_1B_1C_1$  подібний трикутнику  $ABC$  із коефіцієнтом подібності  $k$ . Тоді  $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC} = k$ , звідки  $A_1B_1 = k \cdot AB$ ,  $B_1C_1 = k \cdot BC$ ,  $A_1C_1 = k \cdot AC$ .

Нехай  $P_1$  — периметр трикутника  $A_1B_1C_1$ ,  $P$  — периметр трикутника  $ABC$ . Маємо:

$$P_1 = A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1 = k \cdot AB + k \cdot BC + k \cdot AC = k(AB + BC + AC) = kP,$$

$$\text{тобто } \frac{P_1}{P} = k. \quad \blacktriangle$$



1. Які два трикутники називають подібними?
2. Чому дорівнює коефіцієнт подібності двох подібних трикутників?
3. Сформулюйте лему про подібні трикутники.



### ВПРАВИ

- 17.1.** На рисунку 17.7 зображені подібні трикутники  $ABC$  і  $DEF$ , рівні кути яких позначено однаковою кількістю дуг. Які сторони цих трикутників пропорційні? Запишіть відповідні рівності.

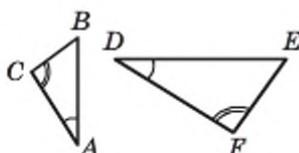


Рис. 17.7



- 17.2.** Відомо, що  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ , причому  $\angle A = \angle A_1$ ,  $\angle B = \angle B_1$ ,  $AB = 6$  см,  $BC = 7$  см,  $AC = 10$  см,  $A_1B_1 = 9$  см. Знайдіть сторони  $B_1C_1$  і  $A_1C_1$ .

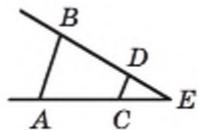


Рис. 17.8

- 17.3.** Сторони  $MK$  і  $DE$  та  $KT$  і  $EF$  — відповідні сторони подібних трикутників  $MKT$  і  $DEF$ ,  $MK = 18$  см,  $KT = 16$  см,  $MT = 28$  см,  $MK : DE = 4 : 5$ . Знайдіть сторони трикутника  $DEF$ .

- 17.4.** На рисунку 17.8  $AB \parallel CD$ . Знайдіть на цьому рисунку подібні трикутники. Запишіть пропорції, які починаються з відношення: 1)  $\frac{AE}{CE}$ ; 2)  $\frac{CD}{AB}$ ; 3)  $\frac{AB}{AE}$ .

- 17.5.** Пряма, паралельна стороні  $AC$  трикутника  $ABC$ , перетинає сторону  $AB$  у точці  $D$ , а сторону  $BC$  — у точці  $E$ . Знайдіть:  
1) відрізок  $BD$ , якщо  $AB = 16$  см,  $AC = 20$  см,  $DE = 15$  см;  
2) відрізок  $AD$ , якщо  $AB = 28$  см,  $BC = 63$  см,  $BE = 27$  см.

- 17.6.** У трикутнику  $ABC$  відомо, що  $AB = 6$  см. Через точку  $M$  сторони  $AB$  проведено пряму, яка паралельна стороні  $BC$  і перетинає сторону  $AC$  у точці  $K$ . Знайдіть невідомі сторони трикутника  $ABC$ , якщо  $AM = 4$  см,  $MK = 8$  см,  $AK = 9$  см.

- 17.7.** Знайдіть висоту вежі (рис. 17.9), якщо відстані від спостерігача до жердини та до вежі відповідно дорівнюють 1,5 м і 39 м, висота жердини — 3 м, а зріст спостерігача — 1,8 м.

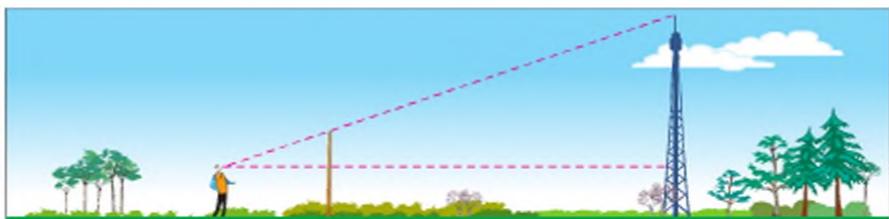


Рис. 17.9

- 17.8.** Продовження бічних сторін  $AB$  і  $CD$  трапеції  $ABCD$  перетинаються в точці  $E$ . Знайдіть відрізок  $CE$ , якщо  $DE = 40$  см,  $BC : AD = 4 : 5$ .

- 17.9.** Продовження бічних сторін  $AB$  і  $CD$  трапеції  $ABCD$  перетинаються в точці  $M$ . Знайдіть меншу основу трапеції, якщо більша основа  $AD$  дорівнює 42 см,  $AB = 9$  см,  $BM = 54$  см.

- 17.10.** Користуючись означенням подібних трикутників, доведіть, що будь-які два рівносторонніх трикутники подібні.



- 17.11.** Точки  $M$  і  $K$  — середини сторін  $CD$  і  $AD$  квадрата  $ABCD$  відповідно. Користуючись означенням подібних трикутників, доведіть, що  $\triangle MDK \sim \triangle ABC$ .
- 17.12.** Сторони трикутника відносяться як  $5 : 4 : 7$ . Знайдіть сторони подібного йому трикутника, у якого: 1) периметр дорівнює  $64$  см; 2) менша сторона дорівнює  $24$  см.
- 17.13.** Сторони даного трикутника дорівнюють  $15$  см,  $25$  см і  $35$  см. Знайдіть сторони подібного йому трикутника, у якого: 1) периметр дорівнює  $45$  см; 2) різниця найбільшої і найменшої сторін становить  $16$  см.
- 17.14.** На рисунку 17.10 зображені трикутник  $ABC$  і вписаний у нього ромб  $BDEK$ . Знайдіть сторону ромба, якщо  $AB = 10$  см,  $BC = 15$  см.

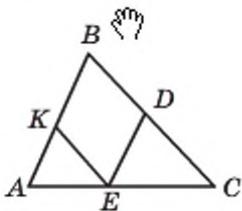


Рис. 17.10

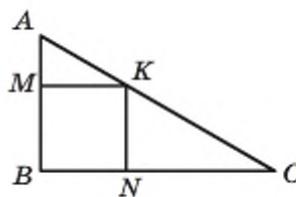


Рис. 17.11

- 17.15.** На рисунку 17.11 зображені прямокутний трикутник  $ABC$  ( $\angle B = 90^\circ$ ) і вписаний у нього квадрат  $BMKN$ . Знайдіть відрізок  $CN$ , якщо  $BM = 6$  см,  $AB = 10$  см.
- 17.16.** Два кола із центрами  $O_1$  і  $O_2$  та радіусами  $8$  см і  $12$  см відповідно мають зовнішній дотик у точці  $A$ . Їхня спільна зовнішня дотична перетинає пряму  $O_1O_2$  у точці  $B$ . Знайдіть відстані від точки  $B$  до центрів даних кіл.
- 17.17.** Точка  $D$  належить стороні  $AC$  трикутника  $ABC$ . Точки  $M$  і  $N$  належать сторонам  $AB$  і  $BC$  відповідно,  $F$  — точка перетину відрізків  $MN$  і  $BD$ . Доведіть, що коли  $MN \parallel AC$ , то  $\frac{MF}{FN} = \frac{AD}{DC}$ .
- 17.18.** Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює  $48$  см. Через середину висоти трикутника, опущеної на його основу, проведено пряму, паралельну бічній стороні. Знайдіть периметр трикутника, який ця пряма відтинає від даного.
- 17.19.** У рівнобедреному трикутнику, основа якого дорівнює  $12$  см, а бічна сторона —  $18$  см, вписано коло. Знайдіть відстань між точками дотику цього кола до бічних сторін трикутника.



- 17.20." У трикутнику  $ABC$  відомо, що  $AB = 8$  см,  $BC = 12$  см,  $\angle ABC = 120^\circ$ ,  $BD$  — бісектриса. Знайдіть відрізок  $BD$ .
- 17.21." Через точку перетину діагоналей трапеції проведено пряму, яка паралельна основам і перетинає бічні сторони трапеції в точках  $M$  і  $K$ . Знайдіть відрізок  $MK$ , якщо основи трапеції дорівнюють  $a$  і  $b$ .
- 17.22.\* Побудуйте трикутник за двома сторонами та бісектрисою, проведеною до третьої сторони.

## 18. Перша ознака подібності трикутників

Якщо для трикутників  $ABC$  і  $A_1B_1C_1$  виконуються умови  $\angle A = \angle A_1$ ,  $\angle B = \angle B_1$ ,  $\angle C = \angle C_1$ ,  $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$ , то за означенням ці трикутники подібні.

Чи можна за меншою кількістю умов визначати подібність трикутників? На це питання відповідають ознаки подібності трикутників.

**Теорема 18.1 (перша ознака подібності трикутників: за двома кутами).** Якщо два кути одного трикутника дорівнюють двом кутам другого трикутника, то такі трикутники подібні.

**Доведення.** Розглянемо трикутники  $ABC$  і  $A_1B_1C_1$ , у яких  $\angle A = \angle A_1$ ,  $\angle B = \angle B_1$ . Доведемо, що  $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ .

Якщо  $AB = A_1B_1$ , то трикутники  $ABC$  і  $A_1B_1C_1$  рівні за другою ознакою рівності трикутників, а отже, ці трикутники подібні.

Нехай, наприклад,  $AB > A_1B_1$ . Відкладемо на стороні  $BA$  відрізок  $BA_2$ , який дорівнює стороні  $B_1A_1$ . Через точку  $A_2$  проведемо пряму  $A_2C_2$ , паралельну стороні  $AC$  (рис. 18.1).

Кути  $A$  і  $BA_2C_2$  є відповідними при паралельних прямих  $A_2C_2$  і  $AC$  та січній  $AA_2$ . Звідси  $\angle A = \angle BA_2C_2$ . Але  $\angle A = \angle A_1$ . Отримуємо, що  $\angle A_1 = \angle BA_2C_2$ . Таким чином, трикутники  $A_2B_1C_2$  і  $A_1B_1C_1$  рівні за другою ознакою рівності трикутників. За лемою про подібні трикутники  $\Delta A_2B_1C_2 \sim \Delta ABC$ . Отже,  $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ . ▲

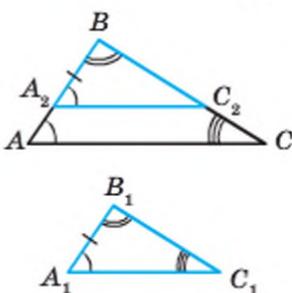


Рис. 18.1



**Задача 1.** Середня лінія трапеції  $ABCD$  ( $BC \parallel AD$ ) дорівнює 24 см, а її діагоналі перетинаються в точці  $O$ . Знайдіть основи трапеції, якщо  $AO : OC = 5 : 3$ .

**Розв'язання.** Розглянемо трикутники  $AOD$  і  $COB$  (рис. 18.2). Кути  $AOD$  і  $BOC$  рівні як вертикальні, кути  $CAD$  і  $ACB$  рівні як різносторонні при паралельних прямих  $BC$  і  $AD$  та січній  $AC$ . Отже, трикутники  $AOD$  і  $COB$  подібні за двома кутами.

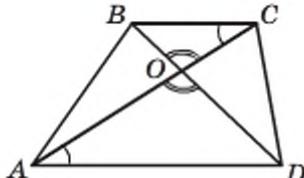


Рис. 18.2

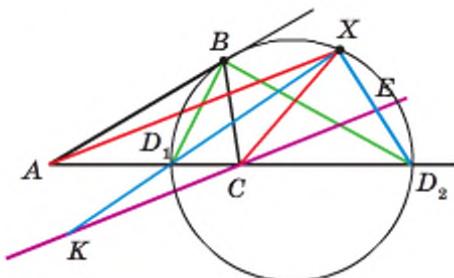


Рис. 18.3

$$\text{Тоді } \frac{AD}{BC} = \frac{AO}{CO} = \frac{5}{3}.$$

Нехай  $BC = 3x$  см, тоді  $AD = 5x$  см.

Оскільки середня лінія трапеції дорівнює 24 см, то  $BC + AD = 48$  см.

Маємо:  $3x + 5x = 48$ . Звідси  $x = 6$ .

Отже,  $BC = 18$  см,  $AD = 30$  см.

*Відповідь:* 18 см, 30 см. ▲

**Задача 2.** У трикутнику  $ABC$  ( $AB \neq BC$ )  $BD_1$  — бісектриса,  $BD_2$  — бісектриса зовнішнього кута при вершині  $B$ . На відрізку  $D_1D_2$  як на діаметрі побудовано коло (рис. 18.3). Доведіть, що для будь-якої точки  $X$  цього кола виконується рівність  $\frac{AX}{XC} = \frac{AB}{BC}$ .

**Розв'язання.** Якщо точка  $X$  збігається з точкою  $D_1$  або з точкою  $D_2$ , то твердження задачі випливає з властивостей бісектриси кута трикутника та бісектриси зовнішнього кута трикутника.

Нехай  $X$  — довільна точка кола, відмінна від точок  $D_1$  і  $D_2$ . Через точку  $C$  проведемо пряму, паралельну прямій  $AX$ . Нехай ця пряма перетинає пряму  $XD_1$  у точці  $K$ , а пряму  $XD_2$  — у точці  $E$ .

$$\Delta A D_1 X \sim \Delta C D_1 K. \text{ Звідси } \frac{AX}{CK} = \frac{AD_1}{D_1 C}. \quad (1)$$

$$\Delta A D_2 X \sim \Delta C D_2 E. \text{ Звідси } \frac{AX}{CE} = \frac{AD_2}{D_2 C}. \quad (2)$$



Але за властивостями бісектриси кута трикутника та бісектриси зовнішнього кута трикутника  $\frac{AD_1}{D_1C} = \frac{AD_2}{D_2C} = \frac{AB}{BC}$ . Тоді з рівностей (1) і (2) отримуємо:

$$\frac{AX}{CK} = \frac{AX}{CE}.$$

Звідси  $CK = CE$ .

Оскільки  $D_1D_2$  — діаметр, то  $\angle KXE = 90^\circ$ . У прямокутному трикутнику  $KXE$  відрізок  $XC$  — медіана, проведена до гіпотенузи  $KE$ . Звідси  $XC = KC$ . З урахуванням рівності (1) запишемо:  $\frac{AX}{XC} = \frac{AX}{CK} = \frac{AD_1}{D_1C} = \frac{AB}{BC}$ . ▲

Цей приклад і ключова задача 2 п. 16 дають змогу зробити такий висновок:

*геометричне місце точок, відношення відстаней від яких до двох даних точок є заданим додатним числом, відмінним від 1, — це коло (коло Аполлонія).*

**Задача 3** (властивість хорд, які перетинаються).

Доведіть, що коли хорди  $AB$  і  $CD$  кола перетинаються в точці  $M$ , то  $AM \cdot MB = DM \cdot MC$  (рис. 18.4).

**Розв'язання.** Розглянемо трикутники  $ACM$  і  $DBM$ . Кути 3 і 4 рівні як вертикальні, кути 1 і 2 рівні як вписані кути, що спираються на одну й ту саму дугу. Отже, трикутники  $ACM$  і  $DBM$  подібні за першою ознакою подібності трикутників. Тоді  $\frac{AM}{DM} = \frac{MC}{MB}$ . Звідси  $AM \cdot MB = DM \cdot MC$ . ▲

**Задача 4** (властивість дотичної та січної).

Доведіть, що коли через точку  $A$  до кола проведено дотичну  $AM$  ( $M$  — точка дотику) і пряму (січну), яка перетинає коло в точках  $B$  і  $C$  (рис. 18.5), то  $AM^2 = AC \cdot AB$ .

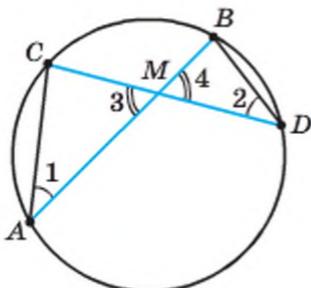


Рис. 18.4

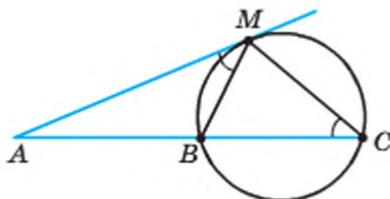


Рис. 18.5

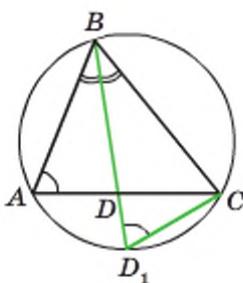


Рис. 18.6

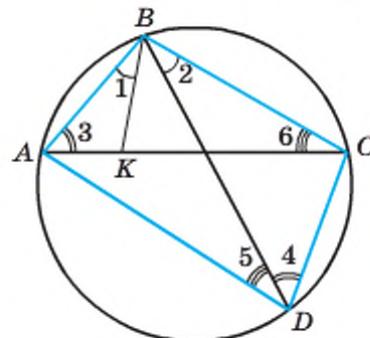


Рис. 18.7

**Розв'язання.** Розглянемо трикутники  $AMB$  і  $ACM$ . У них кут  $A$  спільний. За властивістю кута між дотичною та хордою (див. ключову задачу 1 п. 12)  $\angle AMB = \frac{1}{2} \cup MB$ . Кут  $MCB$  — вписаний кут, який спирається на дугу  $MB$ , тому  $\angle MCB = \frac{1}{2} \cup MB$ . Звідси  $\angle AMB = \angle MCB$ . Отже, трикутники  $AMB$  і  $ACM$  подібні за першою ознакою подібності трикутників. Тоді  $\frac{AM}{AC} = \frac{AB}{AM}$ . Звідси  $AM^2 = AC \cdot AB$ . ▲

**Задача 5.** У трикутнику  $ABC$  проведено бісектрису  $BD$ . Доведіть, що  $BD^2 = AB \cdot BC - AD \cdot DC$ .

**Розв'язання.** Нехай промінь  $BD$  перетинає описане коло трикутника  $ABC$  у точці  $D_1$  (рис. 18.6). Маємо: кути  $BAC$  і  $BD_1C$  є рівними як вписані, що спираються на одну й ту саму дугу;  $\angle ABD = \angle D_1BC$ . Тоді  $\Delta ABD \sim \Delta D_1BC$ . Звідси  $\frac{AB}{BD_1} = \frac{BD}{BC}$ , тобто  $AB \cdot BC = BD_1 \cdot BD$ . Оскільки  $BD_1 = BD + DD_1$ , то можна записати:  $AB \cdot BC = BD^2 + BD \cdot DD_1$ . Застосовуючи ключову задачу 3, отримаємо:  $BD \cdot DD_1 = AD \cdot DC$ . Тоді  $AB \cdot BC = BD^2 + AD \cdot DC$ . Звідси  $BD^2 = AB \cdot BC - AD \cdot DC$ . ▲

**Теорема 18.2 (Теорема Птолемея).** Добуток діагоналей вписаного чотирикутника дорівнює сумі добутків його протилежних сторін.

**Доведення.** На рисунку 18.7 зображені вписаній у коло чотирикутник  $ABCD$ . Доведемо, що  $AB \cdot DC + BC \cdot AD = BD \cdot AC$ .

На діагоналі  $AC$  позначимо точку  $K$  так, що  $\angle 1 = \angle 2$ . Кути 3 і 4 рівні як вписані кути, що спираються на одну й ту саму дугу.



Отже, трикутники  $ABK$  і  $DBC$  подібні за першою ознакою подібності трикутників. Звідси  $\frac{AB}{BD} = \frac{AK}{DC}$ , тобто

$$AB \cdot DC = BD \cdot AK. \quad (3)$$

Оскільки  $\angle 1 = \angle 2$ , то  $\angle ABD = \angle KBC$ . Кути 5 і 6 рівні як вписані кути, що спираються на одну й ту саму дугу. Тому  $\triangle KBC \sim \triangle ABD$ .

Звідси  $\frac{BC}{BD} = \frac{KC}{AD}$ , тобто

$$BC \cdot AD = BD \cdot KC. \quad (4)$$

Додавши рівності (3) і (4), отримуємо:

$$AB \cdot DC + BC \cdot AD = BD \cdot AK + BD \cdot KC, \text{ тобто}$$

$$AB \cdot DC + BC \cdot AD = BD(AK + KC) = BD \cdot AC. \blacktriangle$$



**Клавдій Птолемей**  
(бл. 100 — бл. 178)

Давньогрецький математик і астроном. Автор геоцентричної моделі Всесвіту. Розробив математичну теорію руху планет, яка дає змогу обчислювати їхнє положення. Створив прообраз сучасної системи координат.

**Задача 6.** Нехай  $M$  — довільна точка описаного кола рівностороннього трикутника  $ABC$ . Доведіть, що один із відрізків  $MA$ ,  $MB$ ,  $MC$  дорівнює сумі двох інших.

**Розв'язання.** Якщо точка  $M$  збігається з однією з вершин трикутника  $ABC$ , то твердження задачі є очевидним.

Нехай, наприклад, точка  $M$  належить дузі  $AC$ , причому відмінна від її кінців (рис. 18.8). Чотирикутник  $MABC$  є вписаним. Тоді за теоремою Птолемея  $AC \cdot MB = AB \cdot MC + BC \cdot MA$ . Оскільки  $AB = BC = AC$ , то  $MB = MC + MA$ .  $\blacktriangle$

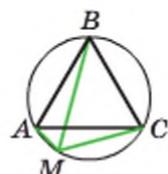


Рис. 18.8



- Сформулюйте першу ознакою подібності трикутників.
- Сформулюйте властивість хорд, які перетинаються.
- Сформулюйте властивість дотичної та січної, проведених до кола через одну точку.



## ВПРАВИ

- 18.1.** На рисунку 18.9  $\angle BAC = \angle BED$ . Чи подібні трикутники  $ABC$  і  $EDB$ ? У разі ствердної відповіді вкажіть пари відповідних сторін.

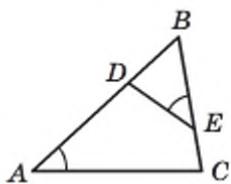


Рис. 18.9

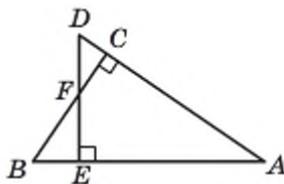


Рис. 18.10

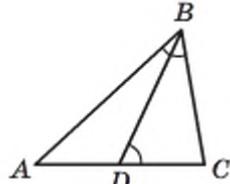
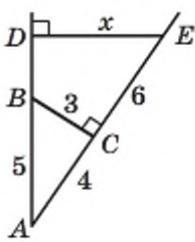


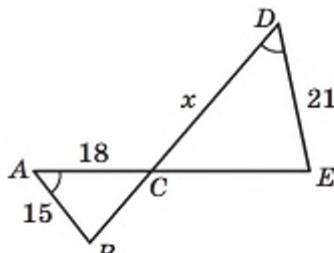
Рис. 18.11

- 18.2.** На рисунку 18.10  $DE \perp AB$ ,  $BC \perp AD$ . Укажіть усі пари подібних трикутників, які зображені на цьому рисунку.

- 18.3.** На рисунку 18.11  $\angle ABC = \angle BDC$ . Які трикутники на цьому рисунку подібні? Запишіть рівність відношень їхніх відповідних сторін.



а



б

Рис. 18.12

- 18.4.** Укажіть пари подібних трикутників, зображеніх на рисунку 18.12, знайдіть довжину відрізка  $x$  (розміри дано в сантиметрах).

- 18.5.** На стороні  $CD$  паралелограма  $ABCD$  (рис. 18.13) позначено точку  $E$ , прямі  $BE$  і  $AD$  перетинаються в точці  $F$ ,  $CE = 8$  см,  $DE = 4$  см,  $BE = 10$  см,  $AD = 9$  см. Знайдіть відрізки  $EF$  і  $FD$ .

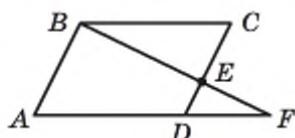


Рис. 18.13



- 18.6.° У трапеції  $ABCD$  ( $BC \parallel AD$ ) відомо, що  $AD = 20$  см,  $BC = 15$  см,  $O$  — точка перетину діагоналей,  $AO = 16$  см. Знайдіть відрізок  $OC$ .
- 18.7.° Діагоналі трапеції  $ABCD$  з основами  $BC$  і  $AD$  перетинаються в точці  $O$ . Знайдіть основу  $AD$ , якщо  $BO : OD = 3 : 7$ ,  $BC = 18$  см.
- 18.8.° У трапеції  $ABCD$  з основами  $BC$  і  $AD$  діагоналі перетинаються в точці  $O$ ,  $BO = 4$  см,  $OD = 20$  см,  $AC = 36$  см. Знайдіть відрізки  $AO$  і  $OC$ .
- 18.9.° У трапеції  $ABCD$  ( $BC \parallel AD$ ) відомо, що  $AD = 18$  см,  $BC = 14$  см,  $AC = 24$  см. Знайдіть відрізки, на які точка перетину діагоналей ділить діагональ  $AC$ .
- 18.10.° Чи можна стверджувати, що два рівнобедрених трикутники подібні, якщо в них є: 1) по рівному гострому куту; 2) по прямому куту; 3) по рівному тупому куту?
- 18.11.° Із вершини прямого кута трикутника опущено висоту на гіпотенузу. Скільки подібних трикутників утворилося при цьому?
- 18.12.° Сторони паралелограма дорівнюють 20 см і 14 см, висота, проведена до більшої сторони, дорівнює 7 см. Знайдіть висоту паралелограма, проведену до меншої сторони.
- 18.13.° Доведіть, що в подібних трикутниках бісектриси, проведені з вершин відповідних кутів, відносяться як відповідні сторони.
- 18.14.° Доведіть, що в подібних трикутниках висоти, проведені з вершин відповідних кутів, відносяться як відповідні сторони.
- 18.15.° Основи  $BC$  і  $AD$  трапеції  $ABCD$  дорівнюють відповідно 28 см і 63 см,  $\angle ABC = \angle ACD$ . Знайдіть діагональ  $AC$ .
- 18.16.° На стороні  $AC$  трикутника  $ABC$  позначено точку  $D$  таку, що  $\angle ABD = \angle C$ ,  $AB = 20$  см,  $BC = 28$  см,  $AC = 40$  см. Знайдіть невідомі сторони трикутника  $ABD$ .
- 18.17.° Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 20 см, а більший катет — 16 см. Знайдіть відрізки, на які серединний перпендикуляр гіпотенузи ділить більший катет.
- 18.18.° Поясніть за допомогою рисунка 18.14, як можна знайти ширину  $BM$  річки, використовуючи подібність трикутників.

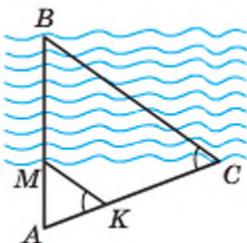


Рис. 18.14



- 18.19.° Зображення дерева, віддаленого на 60 м від об'єктива фотоапарата, має на плівці висоту 8 мм (рис. 18.15). Відстань від об'єктива до зображення дорівнює 40 мм. Яка висота дерева?

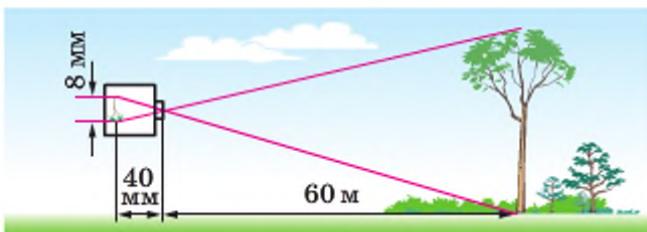


Рис. 18.15

- 18.20.° Знайдіть висоту дерева, якщо довжина його тіні дорівнює 8,4 м, а довжина тіні від вертикального стовпа заввишки 2 м у той самий час доби дорівнює 2,4 м (рис. 18.16).

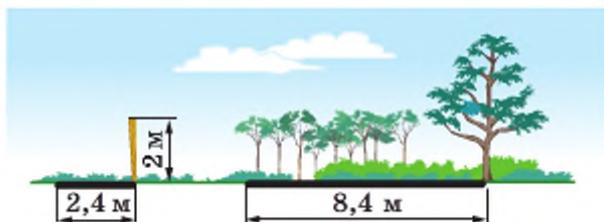


Рис. 18.16

- 18.21.° Чи може пряма перетинати дві сторони рівнобедреного трикутника, відтинаючи від нього трикутник, яому подібний, і не бути паралельною третьій стороні?

18.22.° Хорди  $AB$  і  $CD$  кола перетинаються в точці  $M$ ,  $AM = 6$  см,  $BM = 14$  см,  $CM = 12$  см. Знайдіть відрізок  $DM$ .

18.23.° Хорди  $MK$  і  $NP$  кола перетинаються в точці  $F$ ,  $MF = 9$  см,  $KF = 12$  см, а відрізок  $NF$  у 3 рази довший за відрізок  $PF$ . Знайдіть довжину хорди  $NP$ .

18.24.° Точка  $K$  ділить хорду  $AC$  кола навпіл, а хорду  $DE$  — на відрізки завдовжки 2 см і 32 см. Знайдіть довжину хорди  $AC$ .



18.25.\* На хорді  $AB$  позначено точку  $M$ . Доведіть, що  $MA \cdot MB = R^2 - d^2$ , де  $R$  — радіус кола,  $d$  — відстань від точки  $M$  до центра кола.



- 18.26.\* Точка  $E$  ділить хорду  $CD$  кола на відрізки завдовжки 15 см і 16 см. Знайдіть радіус кола, якщо відстань від точки  $E$  до центра кола дорівнює 4 см.
- 18.27.\* Точка  $P$  ділить хорду  $MK$  кола на два відрізки завдовжки 8 см і 12 см. Знайдіть відстань від точки  $P$  до центра кола, якщо його радіус дорівнює 11 см.
- 18.28.\* Через точку  $A$  проведено до кола дотичну  $AM$  ( $M$  — точка дотику) і січну, яка перетинає коло в точках  $K$  і  $P$  (точка  $K$  лежить між точками  $A$  і  $P$ ). Знайдіть відрізок  $KP$ , якщо  $AM = 12$  см,  $AP = 18$  см.
- 18.29.\* Через точку  $A$ , яка лежить поза колом, проведено дві прямі, одна з яких дотикається до кола в точці  $B$ , а друга перетинає коло в точках  $C$  і  $D$  (точка  $C$  лежить між точками  $A$  і  $D$ ),  $AB = 18$  см,  $AC : CD = 4 : 5$ . Знайдіть відрізок  $AD$ .
- 18.30.\* Через точку  $A$ , що лежить поза колом (рис. 18.17), проведено дві прямі, одна з яких перетинає коло в точках  $B$  і  $C$  (точка  $B$  лежить між точками  $A$  і  $C$ ), а друга — у точках  $D$  і  $E$  (точка  $D$  лежить між точками  $A$  і  $E$ ).
- 
- 1) Доведіть, що  $AB \cdot AC = AD \cdot AE$ .
- 2) Знайдіть відрізок  $AE$ , якщо  $AB = 18$  см,  $BC = 12$  см і  $AD : DE = 5 : 7$ .
- 18.31.\* Через точку  $M$  поза колом проведено пряму, яка перетинає дане коло в точках  $A$  і  $B$ . Доведіть, що  $MA \cdot MB = d^2 - R^2$ , де  $R$  — радіус кола,  $d$  — відстань від точки  $M$  до центра кола.
- 18.32.\* У колі, радіус якого дорівнює 8 см, проведено хорду  $AB$ . На прямій  $AB$  поза відрізком  $AB$  позначили точку  $C$  таку, що  $AC : BC = 1 : 4$ . Знайдіть відстань від точки  $C$  до центра кола, якщо  $AB = 9$  см.
- 18.33.\* У рівнобедреному трикутнику основа та бічна сторона відповідно дорівнюють 5 см і 20 см. Знайдіть бісектрису трикутника, проведену до бічної сторони.
- 18.34.\* У трикутнику  $ABC$  відомо, що  $BC = 18$  см,  $AC = 15$  см,  $AB = 12$  см. Знайдіть бісектрису трикутника, проведену до сторони  $BC$ .
- 18.35.\* У трикутнику  $ABC$  вписано квадрат так, що дві його сусідні вершини належать стороні  $AC$ , а дві інші — сторонам  $AB$  і  $BC$  відповідно. Знайдіть сторону квадрата, якщо  $AC = a$ , а висота, проведена до сторони  $AC$ , дорівнює  $h$ .



- 18.36.**\* У трикутнику  $ABC$  відомо, що  $BC = 72$  см,  $AD$  — висота,  $AD = 24$  см. У даний трикутник вписано прямокутник  $MNKP$  так, що вершини  $M$  і  $P$  належать стороні  $BC$ , а вершини  $N$  і  $K$  — сторонам  $AB$  і  $AC$  відповідно. Знайдіть сторони прямокутника, якщо  $MP : MN = 9 : 5$ .
- 18.37.**\* Через вершини  $B$  і  $C$  трикутника  $ABC$  проходить коло, яке перетинає сторони  $AB$  і  $AC$  у точках  $K$  і  $M$  відповідно. Знайдіть відрізки  $MK$  і  $AM$ , якщо  $AB = 2$  см,  $BC = 4$  см,  $AC = 5$  см,  $AK = 1$  см.
- 18.38.**\*\* На продовженні бісектриси  $CF$  трикутника  $ABC$  за точку  $C$  позначили точку  $D$  так, що  $\angle ADB = \frac{1}{2} \angle ACB$ . Доведіть, що  $CD^2 = AC \cdot CB$ .
- 18.39.**\*\* Продовження медіані  $AM$  трикутника  $ABC$  перетинає його описане коло в точці  $D$ . Відомо, що  $AC = DC = 1$  см. Знайдіть сторону  $BC$ .
- 18.40.**\*\* У коло вписано трикутник, одна зі сторін якого дорівнює 21 см. Паралельно цій стороні через точку перетину медіан проведено хорду. Відрізки хорди, розміщені поза трикутником, дорівнюють 8 см і 11 см. Знайдіть невідомі сторони трикутника.
- 18.41.**\*\* У коло вписано трикутник  $ABC$ , у якому проведено медіани  $AF$  і  $BK$ . Медіану  $AF$  продовжено до перетину з колом у точці  $D$ . Знайдіть сторони  $AC$  і  $BC$ , якщо  $BK = 63$  см,  $AF = 45$  см,  $FD = 24,2$  см.
- 18.42.**\*\* Висоти  $AA_1$ ,  $BB_1$  і  $CC_1$  гострокутного трикутника  $ABC$  перетинаються в точці  $H$ . Доведіть, що  $AH \cdot HA_1 = BH \cdot HB_1 = CH \cdot HC_1$ .
- 18.43.**\*\* Відрізок  $AD$  — бісектриса трикутника  $ABC$ . Відомо, що  $AB - BD = 4$  см,  $AC + CD = 9$  см. Знайдіть відрізок  $AD$ .
- 18.44.**\*\* У кут вписано два кола. Точки  $A$  і  $B$  — точки дотику першого кола до сторін кута, точки  $A_1$  і  $B_1$  — точки дотику другого кола до сторін кута (рис. 18.18). Відрізок  $AB_1$  перетинає ці кола в точках  $C$  і  $C_1$ . Доведіть, що  $AC = B_1C_1$ .
- 18.45.**\*\* В опуклому чотирикутнику  $ABCD$  відомо, що  $\angle BAC = \angle CBD$  і  $\angle BCA = \angle CDB$ . Через точки  $A$ ,  $D$  і точку перетину діагоналей чотирикутника проведено коло. Через точки  $B$  і  $C$  до кола провели дотичні  $BK$  і  $CF$  ( $K$  і  $F$  — точки дотику). Доведіть, що  $BK = CF$ .

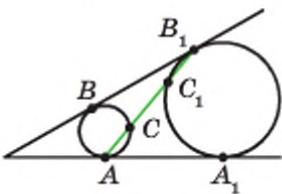


Рис. 18.18



- 18.46.\*** Доведіть, що середини основ трапеції, точка перетину діагоналей і точка перетину бічних сторін лежать на одній прямій.
- 18.47.\*** Дано опуклий чотирикутник  $ABCD$ . Промені  $AB$  і  $DC$  перетинаються в точці  $F$ , а промені  $BC$  і  $AD$  — у точці  $E$ . Точки  $E$  і  $F$  рівновіддалені від прямої  $BD$ . Доведіть, що діагональ  $AC$  ділить діагональ  $BD$  навпіл.
- 18.48.\*** Дано відрізок  $AB$  і пряму  $l$ , яка паралельна цьому відрізку. За допомогою тільки лінійки поділіть відрізок  $AB$  навпіл.
- 18.49.\*** Навколо гострокутного трикутника  $ABC$  описано коло із центром у точці  $O$ . Через точки  $B$  і  $C$  перпендикулярно до прямої  $AO$  проведено прямі, які перетинають прямі  $AC$  і  $AB$  у точках  $M$  і  $N$  відповідно. Доведіть, що  $BC^2 = BM \cdot CN$ .
- 18.50.\*** На колі позначено точку  $K$ . Із центром у точці  $K$  проведено коло, яке дотикається до діаметра першого кола в точці  $E$  та перетинає перше коло в точках  $P$  і  $M$  (рис. 18.19). Доведіть, що пряма  $PM$  ділить відрізок  $KE$  навпіл.
- 18.51.\*** Бісектриса кута  $A$  трикутника  $ABC$  перетинає описане коло в точці  $D$ . Доведіть, що  $AB + AC < 2AD$ .
- 18.52.\*** На колі позначено точки  $A, B, C, D$  такі, що  $\cup AB = \cup BC = \cup CD$ . Доведіть, що  $AC^2 = AB \cdot (BC + AD)$ .
- 18.53.\*** На рисунку 18.20 зображені вписаний у коло семикутник  $ABCDEFG$ , у якого всі сторони рівні. Доведіть, що  $\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = \frac{1}{AB}$ .

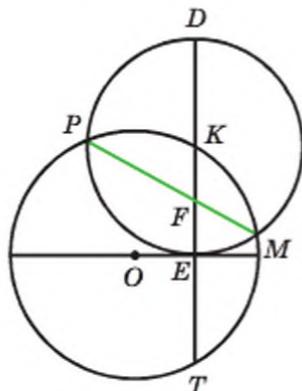


Рис. 18.19

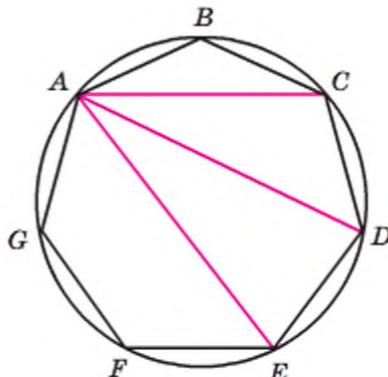


Рис. 18.20



## 19. Теорема Менелая. Теорема Чеви

Нагадаємо, що точки, які належать одній прямій, називають **колінеарними**.

У цьому пункті ви дізнаєтесь про одну знамениту теорему, яка слугує критерієм колінеарності трьох точок. Ця теорема носить ім'я давньогрецького математика й астронома Менелая Александрийського (І–ІІ ст. н. е.).

**Теорема 19.1 (теорема Менелая).** *На сторонах  $AB$  і  $BC$  трикутника  $ABC$  позначено відповідно точки  $C_1$  і  $A_1$ , а на продовженнях сторони  $AC$  — точку  $B_1$ . Для того щоб точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  лежали на одній прямій, необхідно і достатньо, щоб виконувалася рівність*

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1. \quad (*)$$

**Доведення.** Спочатку доведемо необхідну умову колінеарності: якщо точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  лежать на одній прямій, то виконується рівність  $(*)$ .

Із вершин трикутника  $ABC$  опустимо перпендикуляри  $AM$ ,  $BN$  і  $CP$  на пряму  $C_1B_1$  (рис. 19.1). Оскільки  $\angle MC_1A = \angle NC_1B$ , то трикутники  $AMC_1$  і  $BNC_1$  подібні за першою ознакою подібності трикутників. Звідси  $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AM}{BN}$ . Із подібності трикутників  $BNA_1$  і  $CPA_1$

отримуємо:  $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BN}{CP}$ . Із подібності трикутників  $B_1CP$  і  $B_1AM$  випливає рівність  $\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{CP}{AM}$ . Перемноживши почленно ліві та праві

частини пропорції  $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AM}{BN}$ ,  $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BN}{CP}$ ,  $\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{CP}{AM}$ , отримуємо рівність  $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{AM}{BN} \cdot \frac{BN}{CP} \cdot \frac{CP}{AM} = 1$ .

Тепер доведемо достатню умову колінеарності: якщо виконується рівність  $(*)$ , то точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  лежать на одній прямій.

Нехай пряма  $C_1B_1$  перетинає сторону  $BC$  трикутника  $ABC$  у деякій точці  $A_2$  (рис. 19.2). Оскільки точки  $C_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$  лежать на одній прямій, то з доведеного вище можна записати:  $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_2}{A_2C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$ .

Зіставляючи цю рівність з рівністю  $(*)$ , доходимо висновку, що



$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BA_2}{A_2C}$ , тобто точки  $A_2$  і  $A_1$  ділять відрізок  $BC$  в одному й тому самому відношенні, а отже, ці точки збігаються. Звідси випливає, що пряма  $C_1B_1$  перетинає сторону  $BC$  у точці  $A_1$ .  $\blacktriangleleft$

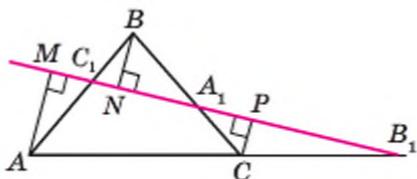


Рис. 19.1

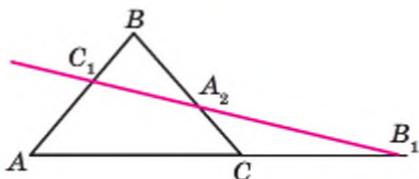


Рис. 19.2

Зауважимо, що теорема залишається справедливою і тоді, коли точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  лежать не на сторонах трикутника  $ABC$ , а на їхніх продовженнях (рис. 19.3). Для цього випадку проведіть доведення самостійно.

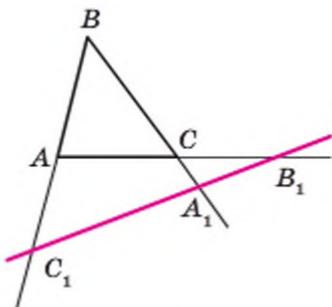


Рис. 19.3

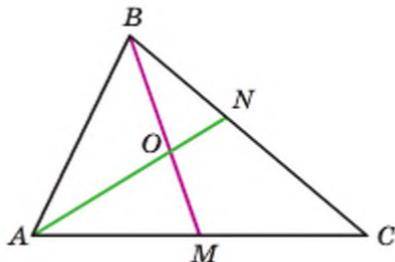


Рис. 19.4

**Задача 1.** На стороні  $BC$  трикутника  $ABC$  обрано точку  $N$  так, що  $BN : NC = 2 : 3$ . У якому відношенні медіана  $BM$  ділить відрізок  $AN$ ?

*Розв'язання.* Зауважимо, що ми розв'язували цю задачу за допомогою теореми про пропорційні відрізки в п. 15. Тепер розв'яжемо її за допомогою теореми Менелая.

Нехай відрізки  $AN$  і  $BM$  перетинаються в точці  $O$  (рис. 19.4). Пряма  $BN$  перетинає дві сторони трикутника  $ANC$ . Тоді за теоремою Менелая можна записати:  $\frac{CM}{MA} \cdot \frac{AO}{ON} \cdot \frac{NB}{BC} = 1$ . Ураховуючи, що  $\frac{CM}{MA} = 1$  і  $\frac{NB}{BC} = \frac{2}{5}$ , отримуємо:  $\frac{AO}{ON} \cdot \frac{2}{5} = 1$ . Звідси  $\frac{AO}{ON} = \frac{5}{2}$ .  $\blacktriangleleft$



**Задача 2.** Спільні зовнішні дотичні до трьох кіл перетинаються в точках  $A$ ,  $B$  і  $C$  (рис. 19.5). Доведіть, що ці точки колінеарні.

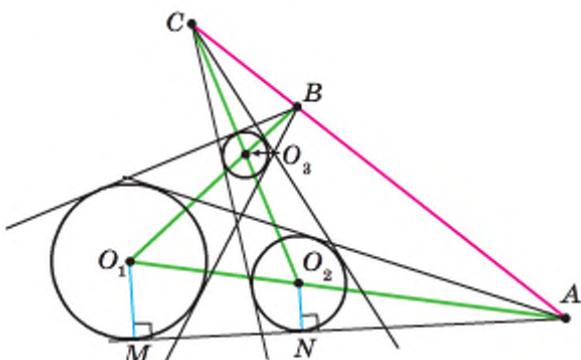


Рис. 19.5

**Розв'язання.** Позначимо радіуси кіл із центрами  $O_1$ ,  $O_2$  і  $O_3$  відповідно  $r_1$ ,  $r_2$  і  $r_3$ . Відрізки  $O_1M$  і  $O_2N$  — радіуси, проведені в точки дотику (рис. 19.5).

Легко показати, що точки  $O_1$ ,  $O_2$  і  $A$  лежать на одній прямій. Звідси  $\Delta AO_1M \sim \Delta AO_2N$ . Отримуємо:  $\frac{AO_1}{AO_2} = \frac{O_1M}{O_2N} = \frac{r_1}{r_2}$ . Аналогічно доводимо, що  $\frac{BO_1}{BO_3} = \frac{r_1}{r_3}$ ,  $\frac{CO_2}{CO_3} = \frac{r_2}{r_3}$ .

Для точок  $A$ ,  $B$  і  $C$ , які лежать на продовженнях сторін трикутника  $O_1O_2O_3$ , розглянемо добуток трьох відношень  $\frac{O_2A}{AO_1} \cdot \frac{O_1B}{BO_3} \cdot \frac{O_3C}{CO_2}$ . Цей добуток дорівнює  $\frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{r_1}{r_3} \cdot \frac{r_3}{r_2} = 1$ . Отже, точки  $A$ ,  $B$  і  $C$  лежать на одній прямій.  $\blacktriangleleft$

На сторонах  $BC$ ,  $CA$  і  $AB$  трикутника  $ABC$  візьмемо довільні точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  (рис. 19.6). Кожен із відрізків  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  називається чевіаною трикутника  $ABC$ . Така назва пов'язана з ім'ям італійського інженера й математика Джованні Чеві (1648–1734), який відкрив дивовижну теорему.

Якщо точки  $A_1$ ,  $B_1$  і  $C_1$  узято так, що чевіані є бісектрисами, або медіанами, або висотами гострокутного трикутника, то ці чевіані перетинаються в одній точці.

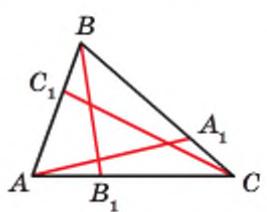


Рис. 19.6



Якщо три прямі перетинаються в одній точці, то їх називають конкурентними.

Теорема Чеви дає загальний критерій конкурентності трьох довільних чевіан.

**Теорема 19.2 (теорема Чеви).** Для того щоб чевіани  $AA_1$ ,  $BB_1$  і  $CC_1$  трикутника  $ABC$  перетиналися в одній точці, необхідно і достатньо, щоб виконувалася рівність

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1. \quad (**)$$

**Доведення.** Доведемо спочатку необхідну умову конкурентності: якщо чевіани  $AA_1$ ,  $BB_1$  і  $CC_1$  перетинаються в одній точці (рис. 19.7), то виконується рівність (\*\*).

Застосуємо теорему Менелая до трикутників  $ABB_1$ ,  $CBB_1$  і прямих  $CC_1$  і  $AA_1$  відповідно:

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BD}{DB_1} \cdot \frac{B_1C}{CA} = 1 \quad (1)$$

$$\frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BD}{DB_1} \cdot \frac{B_1A}{AC} = 1 \quad (2)$$

З рівностей (1) і (2) отримуємо:  $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BD}{DB_1} \cdot \frac{B_1C}{CA} = \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BD}{DB_1} \cdot \frac{B_1A}{AC}$ .

Звідси  $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{B_1C}{1} = \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{B_1A}{1}$  або  $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{A_1B}{CA_1} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} = 1$ .

Доведемо тепер достатню умову конкурентності: якщо виконується рівність (\*\*), то чевіани  $AA_1$ ,  $BB_1$  і  $CC_1$  перетинаються в одній точці.

Нехай чевіани  $AA_1$  і  $BB_1$  перетинаються в точці  $D$ , а чевіана, яка проходить через вершину  $C$  і точку  $D$ , перетинає сторону  $AB$  у деякій точці  $C_2$  (рис. 19.8). З доведеного вище можна записати:

$$\frac{AC_2}{C_2B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

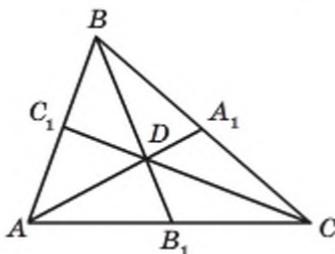


Рис. 19.7

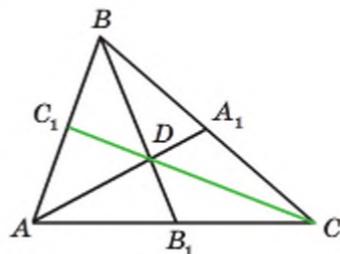


Рис. 19.8



Зіставляючи цю рівність з рівністю (\*\*), доходимо висновку, що  $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AC_2}{C_2B}$ , тобто точки  $C_1$  і  $C_2$  ділять відрізок  $AB$  в одному й тому самому відношенні, а отже, ці точки збігаються. Таким чином, пряма  $CD$  перетинає сторону  $AB$  у точці  $C_1$ . ▲

**Задача 3.** Вписане коло дотикається до сторін  $BC$ ,  $AC$ ,  $AB$  трикутника  $ABC$  у точках  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  відповідно (рис. 19.9). Доведіть, що чевіані  $AA_1$ ,  $BB_1$  і  $CC_1$  конкурентні.

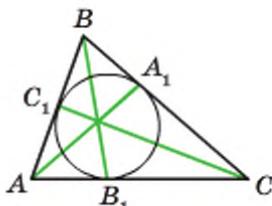


Рис. 19.9

*Розв'язання.* За властивістю дотичних маємо:

$$AC_1 = AB_1, BC_1 = BA_1, CA_1 = CB_1.$$

Для точок  $C_1$ ,  $A_1$  і  $B_1$  розглянемо добуток трьох відношень  $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A}$ . З урахуванням записаних вище рівностей цей добуток дорівнює 1. Отже, чевіані  $AA_1$ ,  $BB_1$  і  $CC_1$  конкурентні. ▲



1. Які точки називають колінеарними?
2. Сформулюйте теорему Менелая.
3. Які прямі називають конкурентними?
4. Сформулюйте теорему Чеви.



### ВПРАВИ

- 19.1.\* На сторонах  $AB$  і  $BC$  трикутника  $ABC$  позначено відповідно точки  $C_1$  і  $A_1$  так, що  $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{1}{2}$ ,  $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{3}{4}$ . Відрізки  $AA_1$  і  $CC_1$  перетинаються в точці  $F$ . У якому відношенні точка  $F$  ділить кожний із відрізків  $AA_1$  і  $CC_1$ ?
- 19.2.\* На сторонах  $CB$  і  $CA$  трикутника  $ABC$  позначили точки  $A_1$  і  $B_1$  відповідно. Відрізки  $AA_1$  і  $BB_1$  перетинаються в точці  $K$ . Відомо, що  $\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{2}{3}$ ,  $\frac{BK}{KB_1} = 4$ . Знайдіть, у якому відношенні точка  $K$  ділить відрізок  $AA_1$ .
- 19.3.\* На стороні  $AC$  трикутника  $ABC$  позначили точку  $M$  так, що  $AM = \frac{1}{3}AC$ , а на промені  $CB$  позначили точку  $N$  так, що



$BN = BC$ . У якому відношенні точка  $P$  перетину відрізків  $AB$  і  $MN$  ділить кожний із цих відрізків?

- 19.4.\* Використовуючи теорему Чеви, доведіть, що:
- 1) медіани трикутника перетинаються в одній точці;
  - 2) бісектриси трикутника перетинаються в одній точці.
- 19.5.\* На сторонах  $BC$  і  $AC$  трикутника  $ABC$  відповідно позначили точки  $A_1$  і  $B_1$  так, що відрізки  $AA_1$ ,  $BB_1$  і медіана  $CD$  трикутника перетинаються в одній точці. Доведіть, що  $A_1B_1 \parallel AB$ .
- 19.6.\* У трикутнику  $ABC$  проведено бісектриси  $AA_1$  і  $BB_1$ . Бісектриса зовнішнього кута при вершині  $C$  перетинає пряму  $AB$  у точці  $C_1$ . Доведіть, що точки  $A_1$ ,  $B_1$  і  $C_1$  колінеарні.
- 19.7.\* Бісектриси зовнішніх кутів при вершинах  $A$ ,  $B$  і  $C$  трикутника  $ABC$  перетинають прямі  $BC$ ,  $AC$  і  $AB$  у точках  $A_1$ ,  $B_1$  і  $C_1$  відповідно. Доведіть, що ці точки колінеарні.
- 19.8.\* Вписане коло трикутника  $ABC$  дотикається до сторін  $AB$ ,  $BC$  і  $AC$  у точках  $M$ ,  $N$  і  $K$  відповідно. Пряма  $MN$  перетинає пряму  $AC$  у точці  $P$  такій, що  $PC = AC$ . У якому відношенні точка  $K$  ділить сторону  $AC$ ?
- 19.9.\* Розв'яжіть за допомогою теореми Чеви задачу 18.46.
- 19.10.\* Точки  $P$ ,  $M$ ,  $Q$  і  $N$  — середини відповідно сторін  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  і  $DA$  трапеції  $ABCD$  ( $BC \parallel AD$ ). Доведіть, що прямі  $MN$ ,  $AQ$  і  $DP$  перетинаються в одній точці.
- 19.11.\* На сторонах  $AB$  і  $AD$  паралелограма  $ABCD$  позначено відповідно точки  $E$  і  $F$  такі, що  $\frac{AE}{AB} = \frac{2}{3}$ ,  $AF = FD$ . У якому відношенні діагональ  $AC$  ділиться точкою  $H$  перетину з прямою  $EF$ ?
- 19.12.\* На стороні  $AD$  і діагоналі  $AC$  паралелограма  $ABCD$  позначено відповідно точки  $N$  і  $M$  такі, що  $AN = \frac{1}{5}AD$ ,  $AM = \frac{1}{6}AC$ . Доведіть, що точки  $N$ ,  $M$  і  $B$  лежать на одній прямій.
- 19.13.\* У чотирикутник  $ABCD$  вписано коло, яке дотикається до сторін  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  і  $DA$  у точках  $M$ ,  $N$ ,  $K$  і  $P$  відповідно. Прямі  $MN$  і  $PK$  перетинаються в точці  $F$ . Доведіть, що точка  $F$  належить прямій  $AC$ .
- 19.14.\* Коло із центром  $O_1$  дотикається до двох кіл із центрами  $O_2$  і  $O_3$  у точках  $B$  і  $A$  відповідно (рис. 19.10). Доведіть, що точка  $C$  — точка перетину спільніх дотичних до кіл із центрами  $O_2$  і  $O_3$  — належить прямій  $AB$ .

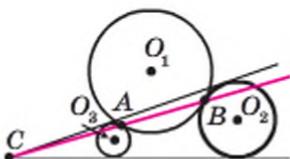


Рис. 19.10



- 19.15.\*** Коло перетинає сторону  $AB$  трикутника  $ABC$  у точках  $C_1$  і  $C_2$ , сторону  $CA$  — у точках  $B_1$  і  $B_2$ , сторону  $BC$  — у точках  $A_1$  і  $A_2$ . Доведіть, що коли прямі  $AA_1$ ,  $BB_1$  і  $CC_1$  перетинаються в одній точці, то й прямі  $AA_2$ ,  $BB_2$  і  $CC_2$  перетинаються в одній точці.
- 19.16.\*** Пряма перетинає сторони  $AB$ ,  $BC$  і продовження сторони  $AC$  трикутника  $ABC$  відповідно в точках  $D$ ,  $E$ ,  $F$ . Доведіть, що середини відрізків  $DC$ ,  $AE$ ,  $BF$  лежать на одній прямій (цю пряму називають *прямою Гаусса*).



**Карл Фрідріх Гаусс**  
(1777–1855)

Видатний німецький математик, астроном, фізик, геодезист. У його творчості органічно поєднувалися дослідження з теоретичної та прикладної математики. Праці Гаусса справили значний вплив на подальший розвиток алгебри, теорії чисел, геометрії, теорії електрики та магнетизму.

- 19.17.\*** Чевіані  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  трикутника  $ABC$  перетинаються в точці  $P$ . Доведіть, що прямі, які проходять через середини сторін  $BC$ ,  $CA$  і  $AB$  паралельно прямим  $AP$ ,  $BP$  і  $CP$  відповідно, конкурентні.
- 19.18.\*** На сторонах  $AB$ ,  $BC$  і  $CA$  трикутника  $ABC$  позначено точки  $C_1$ ,  $A_1$ ,  $B_1$  відповідно так, що прямі  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  перетинаються в точці  $O$ . Пряма, яка проходить через точку  $O$  паралельно стороні  $AC$ , перетинає відрізки  $A_1B_1$  і  $B_1C_1$  у точках  $K$  і  $M$  відповідно. Доведіть, що  $OK = OM$ .
- 19.19.\*** Чевіані  $AA_1$  і  $CC_1$  і висота  $BH$  трикутника  $ABC$  конкурентні. Доведіть, що  $\angle BHA_1 = \angle BHC_1$ .

## 20. Пряма Ейлера. Коло дев'яти точок

Точка перетину серединних перпендикулярів сторін трикутника — це центр кола, описаного навколо трикутника. Позначимо цю точку буквою  $O$ .

Точка перетину бісектрис трикутника — це центр вписаного кола. Позначимо цю точку буквою  $J$ .



Точку перетину прямих, які містять висоти трикутника, називають **ортоценцом** трикутника. Позначимо цю точку буквою  $H$ .

Точку перетину медіан трикутника називають **центроїдом** трикутника. Позначимо цю точку буквою  $M$ .

Точки  $O, J, H, M$  називають **чудовими точками** трикутника. Використання такого емоційного ешпета цілком обґрунтовано. Адже цим точкам притаманна ціла низка красивих властивостей. Хіба не чудово вже те, що вони є в будь-якому трикутнику?

Розглянемо одну з багатьох теорем про чудові точки трикутника.

**Теорема 20.1.** У будь-якому трикутнику центр описаного кола, центроїд і ортоцентр лежать на одній прямій.

Цю пряму називають **прямою Ейлера**.



Леонард Ейлер  
(1707–1783)

Видатний математик, фізик, механік, астроном.

**Доведення.** Для рівнобедреного трикутника твердження, що доводиться, є очевидним.

Якщо даний трикутник  $ABC$  прямокутний ( $\angle C = 90^\circ$ ), то його ортоцентр — це точка  $C$ , центр описаного кола — середина гіпотенузи  $AB$ . Тоді зрозуміло, що всі три точки, про які йдеться в теоремі, належать медіані, проведений до гіпотенузи.

Доведемо теорему для гострокутного різностороннього трикутника.

**Лема.** Якщо  $H$  — ортоцентр трикутника  $ABC$ ,  $OM_1$  — перпендикуляр, опущений із центра  $O$  описаного кола на сторону  $BC$ , то  $AH = 2OM_1$  (рис. 20.1).

**Доведення.** Виконаемо додаткову побудову, уже знайому вам з доведення теореми 5.4: через кожну вершину трикутника  $ABC$  проведемо пряму, паралельну протилежній стороні. Отримаємо трикутник  $A_1B_1C_1$  (рис. 20.1). У зазначеній теоремі було показано, що ортоцентр  $H$  трикутника  $ABC$  є центром описаного кола

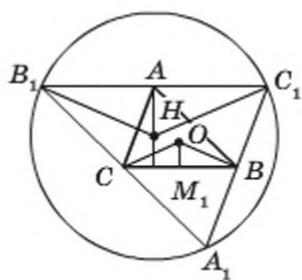


Рис. 20.1



трикутника  $A_1B_1C_1$ . Для цього кола кут  $B_1HC_1$  є центральним, а кут  $B_1A_1C_1$  — вписаним. Оскільки обидва кути спираються на одну й ту саму дугу, то  $\angle B_1HC_1 = 2\angle B_1A_1C_1$ . Кути  $BAC$  і  $B_1A_1C_1$  рівні як протилежні кути паралелограма  $ABA_1C$ , тому  $\angle BOC = 2\angle BAC = 2\angle B_1A_1C_1 = \angle B_1HC_1$ . Оскільки  $B_1C_1 = 2BC$ , то рівнобедрені трикутники  $B_1HC_1$  і  $COB$  подібні з коефіцієнтом подібності 2. Оскільки відрізки  $AH$  і  $OM_1$  — відповідні висоти подібних трикутників, то  $AH = 2OM_1$ .

Доведемо тепер основну теорему.

Оскільки точка  $M_1$  — середина сторони  $BC$ , то відрізок  $AM_1$  — медіана трикутника  $ABC$  (рис. 20.2). Нехай  $M$  — точка перетину відрізків  $AM_1$  і  $HO$ . Оскільки  $AH \parallel OM_1$ , то  $\angle HAM = \angle OM_1M$ . Кути  $AMH$  і  $M_1MO$  рівні як вертикальні. Отже, трикутники  $HAM$  і  $OM_1M$  подібні за першою ознакою подібності трикутників. Звідси  $\frac{AM}{MM_1} = \frac{AH}{OM_1} = 2$ . Отже, точка  $M$  ділить медіану  $AM_1$  у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини  $A$ . Звідси точка  $M$  — центроїд трикутника  $ABC$ .

Доведення для випадку тупокутного трикутника аналогічне. ▲

Звернемо увагу на те, що ми не лише встановили факт належності точок  $O$ ,  $M$ ,  $H$  одній прямій, а й довели рівність

$$HM = 2MO,$$

яка є ще однією властивістю чудових точок трикутника.

**Теорема 20.2.** Середини сторін трикутника, основи його висот і середини відрізків, які сполучають вершини трикутника з його ортоцентром, лежать на одному колі, радіус якого дорівнює  $\frac{1}{2}R$ , де  $R$  — радіус описаного кола даного трикутника.

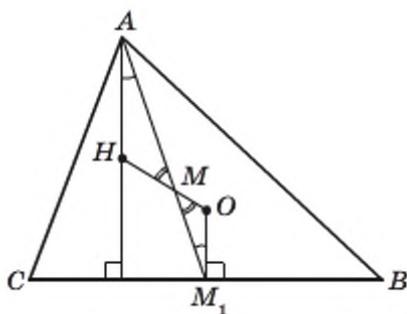


Рис. 20.2

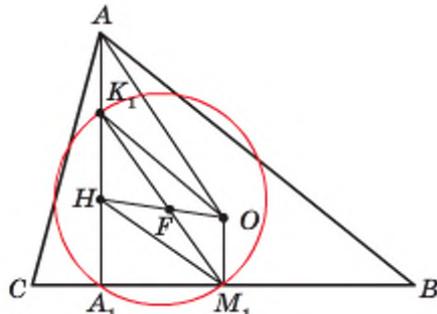


Рис. 20.3



Це коло називають **колом дев'яти точок**.

**Доведення.** У трикутнику  $ABC$  точка  $H$  — ортоцентр, точка  $O$  — центр описаного кола, точка  $A_1$  — основа висоти, проведеної з вершини  $A$ , точка  $M_1$  — середина сторони  $CB$ , точка  $K_1$  — середина відрізка  $AH$  (рис. 20.3).

За лемою  $OM_1 = \frac{1}{2}AH = K_1H$ . Оскільки  $HK_1 \parallel OM_1$ , то чотирикутник  $HK_1OM_1$  — паралелограм. Нехай діагоналі цього паралелограма перетинаються в точці  $F$ .

Зауважимо, що точка  $F$  — середина гіпотенузи  $K_1M_1$  прямокутного трикутника  $A_1K_1M_1$ . Отже, точки  $K_1$ ,  $A_1$  і  $M_1$  лежать на колі радіуса  $FK_1$  із центром у точці  $F$ .

Очевидно, що чотирикутник  $K_1AOM_1$  — паралелограм. Звідси  $K_1M_1 = OA$ . Тоді  $FK_1 = \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2}R$ .

Отже, ми довели, що трійка точок — середина  $M_1$  сторони  $CB$ , основа  $A_1$  висоти  $AA_1$  і середина  $K_1$  відрізка  $HA$  — лежить на колі із центром у середині  $F$  відрізка  $HO$  та радіусом, який дорівнює  $\frac{1}{2}R$ .

Аналогічно доводять, що інші дві трійки точок —  $B_1, M_2, K_2$  і  $C_1, M_3, K_3$ , де  $B_1$  і  $C_1$  — основи висот  $BB_1$  і  $CC_1$ ,  $M_2$  і  $M_3$  — середини сторін  $AC$  і  $AB$  відповідно,  $K_2$  і  $K_3$  — середини відрізків  $HB$  і  $HC$  відповідно, — лежать на колі радіуса  $\frac{1}{2}R$  із центром  $F$ .

Доведення теореми для випадку тупокутного трикутника аналогічне. ▲



- Які точки називають чудовими точками трикутника?
- Які чудові точки належать одній прямій? Як називають цю пряму?
- Сформулюйте теорему про коло дев'яти точок.



### ВПРАВИ

- 20.1.\* Дано дві точки, які лежать в одній півплощині відносно даної прямої. Побудуйте трикутник, одна зі сторін якого лежить на даній прямій, а центр описаного кола та ортоцентр є двома даними точками.



- 20.2.**\* На площині задано пряму  $l$ , якій належать вершини  $B$  і  $C$  трикутника  $ABC$ , точку  $O$ , яка є центром описаного кола, і точку  $M$ , яка є точкою перетину медіан цього трикутника. Побудуйте трикутник  $ABC$ .
- 20.3.**\* Побудуйте трикутник  $ABC$  за трьома даними точками: вершиною  $A$ , ортоцентром  $H$  і центром  $O$  описаного кола.
- 20.4.**\* Побудуйте трикутник  $ABC$  за центром описаного кола, ортоцентром і серединою сторони  $BC$ .
- 20.5.**\* На площині задано точки  $O$ ,  $M$  і  $B_1$ , які є відповідно центром описаного кола, точкою перетину медіан і основою висоти  $BB_1$  трикутника  $ABC$ . Побудуйте трикутник  $ABC$ .
- 20.6.**\* Побудуйте трикутник  $ABC$  за його ортоцентром, вершиною  $A$  та серединою сторони  $BC$ .
- 20.7.**\*\* На площині задано точки  $O$ ,  $M$  і  $A_1$ , які є відповідно центром описаного кола, точкою перетину медіан і точкою перетину бісектриси кута  $A$  трикутника  $ABC$  з описаним колом. Побудуйте трикутник  $ABC$ .
- 20.8.**\*\* Побудуйте трикутник  $ABC$  за прямою, яка містить сторону  $BC$ , центроїдом і точкою перетину описаного кола з прямою, яка містить висоту, проведену з вершини  $A$ .
- 20.9.**\*\* Пряма, яка містить висоту  $AA_1$  трикутника  $ABC$ , перетинає описане коло цього трикутника в точці  $D$ . Знайдіть відстань від центра кола дев'яти точок трикутника  $ABC$  до сторони  $BC$ , якщо  $AD = a$ .
- 20.10.**\*\* Точки  $O$  і  $J$  — відповідно центри описаного та вписаного кіл трикутника  $ABC$ . Бісектриси кутів  $A$ ,  $B$  і  $C$  перетинають описане коло в точках  $A_1$ ,  $B_1$  і  $C_1$  відповідно. Доведіть, що пряма  $OJ$  містить точку перетину медіан трикутника  $A_1B_1C_1$ .
- 20.11.**\*\* Точка  $H$  — ортоцентр трикутника  $ABC$ . Доведіть, що трикутники  $ABC$ ,  $ABH$ ,  $BCH$ ,  $CAH$  мають одне й те саме коло дев'яти точок.
- 20.12.**\*\* Точка  $H$  — ортоцентр трикутника  $ABC$ . Доведіть, що прямі Ейлера трикутників  $ABC$ ,  $ABH$ ,  $BCH$ ,  $CAH$  перетинаються в одній точці.
- 20.13.**\* Бісектриса кута  $A$  гострокутного трикутника  $ABC$  перпендикулярна до прямої Ейлера цього трикутника. Доведіть, що  $\angle A = 60^\circ$ .
- 20.14.**\* Бісектриса кута  $A$  тупокутного трикутника  $ABC$  паралельна прямій Ейлера цього трикутника. Доведіть, що  $\angle A = 120^\circ$ .



- 20.15.\*** Дано два кола. Перше з них проходить через центр  $O$  другого кола й перетинає це коло в точках  $M$  і  $N$  (рис. 20.4). Відрізок  $AB$  — діаметр другого кола. Прямі  $AM$  і  $BN$  перетинають перше коло в точках  $A_1$  і  $B_1$  відповідно. Доведіть, що  $A_1B_1 = \frac{1}{2}AB$ .

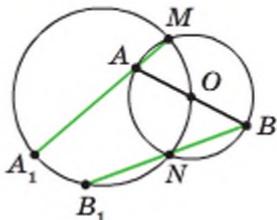


Рис. 20.4

## 21. Друга та третя ознаки подібності трикутників

**Теорема 21.1 (друга ознака подібності трикутників: за двома сторонами та кутом між ними).** Якщо дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам другого трикутника та кути, утворені цими сторонами, рівні, то такі трикутники подібні.

**Доведення.** Розглянемо трикутники  $ABC$  і  $A_1B_1C_1$ , у яких  $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = k$  і  $\angle B = \angle B_1$ . Доведемо, що  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ .

Якщо  $k = 1$ , то  $AB = A_1B_1$  і  $BC = B_1C_1$ , а отже, трикутники  $ABC$  і  $A_1B_1C_1$  рівні за першою ознакою рівності трикутників, тому ці трикутники подібні.

Нехай, наприклад,  $k > 1$ , тобто  $AB > A_1B_1$  і  $BC > B_1C_1$ . На сторонах  $BA$  і  $BC$  позначимо відповідно точки  $A_2$  і  $C_2$  так, що  $BA_2 = A_1B_1$  і  $BC_2 = B_1C_1$  (рис. 21.1). Тоді  $\frac{AB}{BA_2} = \frac{BC}{BC_2}$ .

Покажемо, що  $A_2C_2 \parallel AC$ . Припустимо, що це не так. Тоді на стороні  $BC$  позначимо точку  $M$  таку, що  $A_2M \parallel AC$ . Маємо:  $\frac{AB}{BA_2} = \frac{BC}{BM}$ .

Але  $\frac{AB}{BA_2} = \frac{BC}{BC_2}$ , тоді  $\frac{BC}{BC_2} = \frac{BC}{BM}$ , тобто  $BC_2 = BM$ .

Отже, буквами  $M$  і  $C_2$  позначено одну й ту саму точку. Тоді  $A_2C_2 \parallel AC$ .

За лемою про подібні трикутники отримуємо, що  $\triangle ABC \sim \triangle A_2B_1C_2$ . Трикутники  $A_2B_1C_2$  і  $A_1B_1C_1$  рівні за першою ознакою рівності трикутників. Звідси  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ . ▲

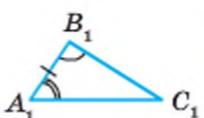
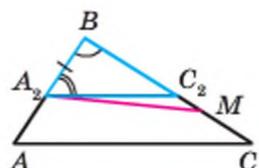


Рис. 21.1



**Теорема 21.2 (третя ознака подібності трикутників: за трьома сторонами).** Якщо три сторони одного трикутника пропорційні трем сторонам другого трикутника, то такі трикутники подібні.

**Доведення.** Розглянемо трикутники  $ABC$  і  $A_1B_1C_1$ , у яких  $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k$ . Доведемо, що  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ .

Якщо  $k = 1$ , то трикутники  $ABC$  і  $A_1B_1C_1$  рівні за третьою ознакою рівності трикутників, а отже, ці трикутники подібні.

Нехай, наприклад,  $k > 1$ . На сторонах  $BA$  і  $BC$  позначимо відповідно точки  $A_2$  і  $C_2$  такі, що  $BA_2 = A_1B_1$ ,  $BC_2 = B_1C_1$  (рис. 21.2).

Тоді  $\frac{AB}{BA_2} = \frac{BC}{BC_2} = k$ . У трикутниках  $ABC$  і  $A_2BC_2$  кут  $B$  спільний, прилеглі до нього сторони пропорційні. Отже, за другою ознакою подібності трикутників ці трикутники подібні, причому коефіцієнт подібності дорівнює  $k$ . Тоді  $\frac{CA}{C_2A_2} = k$ . Ураховуючи, що за умовою

$\frac{CA}{C_1A_1} = k$ , отримуємо:  $A_1C_1 = A_2C_2$ . Отже, трикутники  $A_2BC_2$  і  $A_1B_1C_1$  рівні за третьою ознакою рівності трикутників. З урахуванням того, що  $\triangle ABC \sim \triangle A_2BC_2$ , отримуємо:  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ .  $\blacktriangleleft$

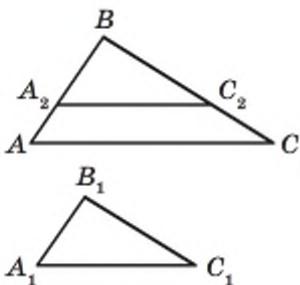


Рис. 21.2

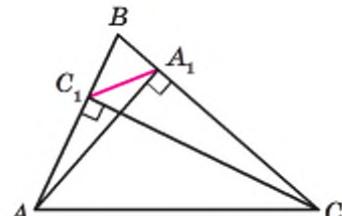


Рис. 21.3

**Задача 1.** Доведіть, що відрізок, який сполучає основи двох висот гострокутного трикутника, відтинає від даного трикутника йому подібний.

**Розв'язання.** На рисунку 21.3 відрізки  $AA_1$  і  $CC_1$  — висоти трикутника  $ABC$ . Доведемо, що  $\triangle A_1BC_1 \sim \triangle ABC$ .

У прямокутних трикутниках  $ABA_1$  і  $CBC_1$  гострий кут  $B$  спільний. Отже, трикутники  $ABA_1$  і  $CBC_1$  подібні за першою ознакою



подібності трикутників. Звідси  $\frac{AB}{BC} = \frac{BA_1}{BC_1}$ . Тоді  $\frac{AB}{BA_1} = \frac{BC}{BC_1}$ . Кут  $B$  — спільний для трикутників  $ABC$  і  $A_1BC_1$ . Отже, трикутники  $ABC$  і  $A_1BC_1$  подібні за другою ознакою подібності трикутників.  $\blacktriangleleft$

**Задача 2.** Відрізки  $AB$  і  $CD$  перетинаються в точці  $M$ . Відомо, що  $AM \cdot MB = CM \cdot MD$ . Доведіть, що точки  $A, B, C$  і  $D$  лежать на одному колі.

**Розв'язання.** Розглянемо трикутники  $ACM$  і  $DMB$  (рис. 21.4). У них кути  $AMC$  і  $BMD$  рівні як вертикальні. З умови випливає, що  $\frac{AM}{MD} = \frac{CM}{MB}$ . Отже, трикутники  $ACM$  і  $DMB$  подібні за другою ознакою подібності трикутників. Звідси  $\angle ACM = \angle DBM$ . Тоді з урахуванням доведеного в ключовій задачі 1 п. 13 точки  $A, B, C$  і  $D$  лежать на одному колі.  $\blacktriangleleft$

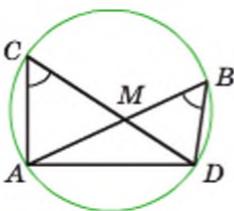


Рис. 21.4

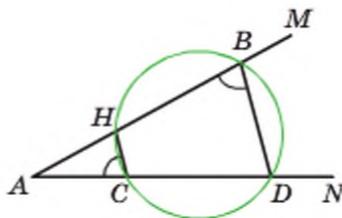


Рис. 21.5

**Задача 3.** Із точки  $A$  проведено два промені  $AM$  і  $AN$ , які не лежать на одній прямій. На промені  $AM$  позначено точки  $H$  і  $B$ , а на промені  $AN$  — точки  $C$  і  $D$  так, що  $AH \cdot AB = AC \cdot AD$ . Доведіть, що точки  $H, B, D$  і  $C$  лежать на одному колі.

**Розв'язання.** Розглянемо трикутники  $AHC$  і  $ADB$  (рис. 21.5). Кут  $A$  у них спільний. З умови випливає, що  $\frac{AH}{AD} = \frac{AC}{AB}$ . Отже, трикутники  $AHC$  і  $ADB$  подібні за другою ознакою подібності трикутників. Тоді  $\angle ACH = \angle ABD$ . Але  $\angle ACH + \angle HCD = 180^\circ$ . Звідси  $\angle ABD + \angle HCD = 180^\circ$ , тобто навколо чотирикутника  $HCDB$  можна описати коло.  $\blacktriangleleft$



- Сформулюйте другу ознакою подібності трикутників.
- Сформулюйте третю ознакою подібності трикутників.



## ВПРАВИ

- 21.1.° На сторонах  $AB$  і  $AC$  трикутника  $ABC$  (рис. 21.6) позначили відповідно точки  $D$  і  $E$  так, що  $AD = \frac{4}{7} AC$ ,  $AE = \frac{4}{7} AB$ . Знайдіть відрізок  $DE$ , якщо  $BC = 21$  см.

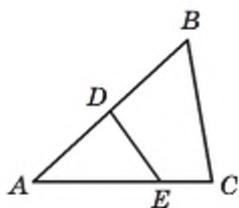


Рис. 21.6

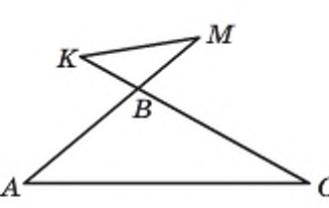


Рис. 21.7

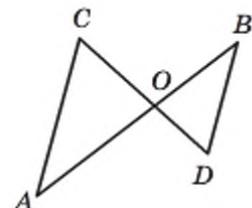


Рис. 21.8

- 21.2.° У трикутнику  $ABC$  відомо, що  $AB = 21$  см,  $AC = 42$  см,  $BC = 28$  см. На продовженнях відрізків  $AB$  і  $BC$  за точку  $B$  відкладено відповідно відрізки  $BM$  і  $BK$ ,  $BM = 8$  см,  $BK = 6$  см (рис. 21.7). Знайдіть відрізок  $KM$ .

- 21.3.° Відрізки  $AB$  і  $CD$  перетинаються в точці  $O$  (рис. 21.8),  $AO = 24$  см,  $BO = 16$  см,  $CO = 15$  см,  $OD = 10$  см,  $\angle ACO = 72^\circ$ . Знайдіть кут  $BDO$ .

- 21.4.° На сторонах  $AC$  і  $BC$  трикутника  $ABC$  позначили відповідно точки  $M$  і  $K$  так, що  $CM = 15$  см,  $CK = 12$  см. Знайдіть відрізок  $MK$ , якщо  $AC = 20$  см,  $BC = 25$  см,  $AB = 30$  см.

- 21.5.° Чи подібні трикутники  $ABC$  і  $A_1B_1C_1$ , якщо:

- 1)  $AB = 6$  см,  $BC = 10$  см,  $AC = 14$  см,  $A_1B_1 = 9$  см,  $B_1C_1 = 15$  см,  $A_1C_1 = 21$  см;
- 2)  $AB = 1,3$  см,  $BC = 2,5$  см,  $AC = 3,2$  см,  $A_1B_1 = 26$  см,  $B_1C_1 = 50$  см,  $A_1C_1 = 60$  см?

- 21.6.° Чи подібні два трикутники, якщо сторони одного відносяться як  $3 : 8 : 9$ , а сторони другого дорівнюють 24 см, 9 см, 27 см?

- 21.7.° У трикутниках  $ABC$  і  $A_1B_1C_1$  відомо, що  $\angle A = \angle A_1$ , кожна зі сторін  $AB$  і  $AC$  становить 0,6 сторін  $A_1B_1$  і  $A_1C_1$  відповідно. Знайдіть сторони  $BC$  і  $B_1C_1$ , якщо їхня сума дорівнює 48 см.

- 21.8.° У трикутниках  $DEF$  і  $MKN$  відомо, що  $\angle E = \angle K$ , а кожна зі сторін  $DE$  і  $EF$  у 2,5 раза більша за сторони  $MK$  і  $KN$  відповідно. Знайдіть сторони  $DF$  і  $MN$ , якщо їхня різниця дорівнює 30 см.



- 21.9.** Доведіть, що в подібних трикутниках медіани, проведені з вершин відповідних кутів, відносяться як відповідні сторони.
- 21.10.** На сторонах  $AB$  і  $AC$  трикутника  $ABC$  позначили відповідно точки  $D$  і  $E$  так, що  $AD : DB = AE : EC = 3 : 5$ . Знайдіть відрізок  $DE$ , якщо  $BC = 16$  см.
- 21.11.** З дерев'яних паличок виготовили три подібні різносторонні трикутники. У кожному з них більшу сторону пофарбували в блакитний колір, а меншу — у жовтий. З блакитних паличок склали один трикутник, а з жовтих — другий. Чи будуть ці трикутники подібні?
- 21.12.** Два відрізки  $AB$  і  $CD$  перетинаються в точці  $M$  так, що  $MA = 6$  см,  $MB = 8$  см,  $MC = 3$  см,  $MD = 16$  см. Чи лежать точки  $A, B, C, D$  на одному колі?
- 21.13.** У трикутнику  $ABC$  відомо, що  $AC = a$ ,  $AB = BC = b$ ,  $AM$  і  $CK$  — бісектриси трикутника. Знайдіть відрізок  $MK$ .
- 21.14.** У трикутнику  $ABC$  проведено висоту  $CD$  (точка  $D$  належить стороні  $AB$ ). Відомо, що  $CD^2 = AD \cdot DB$ . Доведіть, що  $\angle ACB = 90^\circ$ .
- 21.15.** На стороні  $BC$  трикутника  $ABC$  позначено точку  $M$ . Точка  $E$  — середина відрізка  $AM$ . Пряма  $CE$  перетинає сторону  $AB$  у точці  $D$ . Відомо, що  $AE^2 = EC \cdot ED$ . Доведіть, що точки  $A, D, M$  і  $C$  лежать на одному колі.
- 21.16.** Коло, побудоване на стороні  $AC$  трикутника  $ABC$  як на діаметрі, проходить через середину  $M$  сторони  $AB$  і перетинає сторону  $BC$  у точці  $N$  так, що  $BN : NC = 2 : 7$ . Знайдіть відрізок  $MN$ , якщо  $AC = 6$  см.
- 21.17.** У трикутнику  $ABC$  відомо, що  $AB = 8$  см,  $BC = 12$  см,  $AC = 16$  см. На стороні  $AC$  позначено точку  $D$  так, що  $CD = 9$  см. Знайдіть відрізок  $BD$ .
- 21.18.** На спільній хорді двох кол, що перетинаються, позначили точку  $M$  і через неї провели хорди  $AB$  і  $CD$  (рис. 21.9). Доведіть, що  $\angle DAB = \angle BCD$ .
- 21.19.** Точка  $M$  лежить поза колом. На колі позначили точки  $A$ ,  $B$  і  $C$  такі, що  $MC^2 = MA \cdot MB$ . Доведіть, що пряма  $MC$  — дотична до кола.

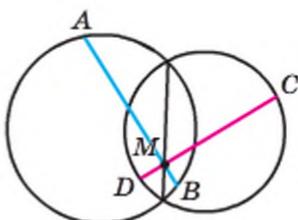


Рис. 21.9



- 21.20.\*** У паралелограмі  $ABCD$  діагональ  $AC$  більша за діагональ  $BD$ . На діагоналі  $AC$  позначено точку  $M$  так, що чотирикутник  $BCDM$  вписаний. Доведіть, що пряма  $BD$  є дотичною до описаних кіл трикутників  $ABM$  і  $ADM$ .
- 21.21.\*** У гострокутному трикутнику  $ABC$  проведено висоти  $AA_1$  і  $CC_1$ . Точка  $O$  — центр кола, описаного навколо трикутника  $ABC$ . Доведіть, що відрізки  $BO$  і  $A_1C_1$  перпендикулярні.
- 21.22.\*** Точка  $O$  — центр вписаного кола трикутника  $ABC$ . На сторонах  $AC$  і  $BC$  позначено відповідно точки  $M$  і  $K$  так, що  $BK \cdot AB = BO^2$  і  $AM \cdot AB = AO^2$ . Доведіть, що точки  $M$ ,  $O$  і  $K$  лежать на одній прямій.
- 21.23\* (13.39).** На медіані  $BM$  трикутника  $ABC$  позначили точку  $K$  так, що  $\angle MKC = \angle BCM$ . Доведіть, що  $\angle AKM = \angle BAM$ .
- 21.24.\*** У рівнобедреному трикутнику  $ABC$  ( $AB = BC$ ) провели бісектрису  $AM$ . На промені  $CA$  відклали відрізок  $CN$ , рівний відрізку  $BM$ . Доведіть, що точки  $A$ ,  $B$ ,  $M$  і  $N$  лежать на одному колі.
- 21.25.\*** Для сторін трикутника  $ABC$  виконується рівність  $BC^2 = AC^2 + AC \cdot AB$ . Доведіть, що  $\angle A = 2 \angle B$ .

## РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ

§5

У цьому параграфі ви ознайомитеся зі знаменитою теоремою Піфагора. Ви навчитеся за відомими сторонами та кутами прямокутного трикутника знаходити його невідомі сторони та кути.





## 22. Метричні спiввiдношення в прямокутному трикутнику

На рисунку 22.1 відрізок  $CD$  — висота прямокутного трикутника  $ABC$  ( $\angle ACB = 90^\circ$ ).

Відрізки  $AD$  і  $DB$  називають проекціями катетів  $AC$  і  $CB$  відповідно на гіпотенузу.

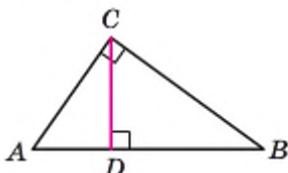


Рис. 22.1

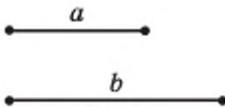


Рис. 22.2

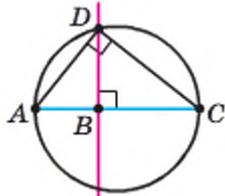


Рис. 22.3

**Лема.** Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, ділить трикутник на два подібних прямокутних трикутники, кожен з яких подібний даному трикутнику.

Доведіть лему самостійно.

**Теорема 22.1.** Квадрат висоти прямокутного трикутника, проведеної до гіпотенузи, дорівнює добутку проекцій катетів на гіпотенузу. Квадрат катета дорівнює добутку гіпотенузи та проекції цього катета на гіпотенузу.

**Доведення.** На рисунку 22.1 відрізок  $CD$  — висота прямокутного трикутника  $ABC$  ( $\angle ACB = 90^\circ$ ). Доведемо, що:

$$CD^2 = AD \cdot DB, \quad AC^2 = AB \cdot AD, \quad BC^2 = AB \cdot DB.$$

Оскільки  $\Delta CBD \sim \Delta ACD$ , то  $\frac{CD}{AD} = \frac{BD}{CD}$ . Звідси  $CD^2 = AD \cdot DB$ .

Оскільки  $\Delta ABC \sim \Delta ACD$ , то  $\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AC}$ . Звідси  $AC^2 = AB \cdot AD$ .

Оскільки  $\Delta ABC \sim \Delta CBD$ , то  $\frac{BC}{BD} = \frac{AB}{BC}$ . Звідси  $BC^2 = AB \cdot DB$ . ▲

**Задача 1.** Дано два відрізки, довжини яких дорівнюють  $a$  і  $b$  (рис. 22.2). Побудуйте третій відрізок, довжина якого дорівнює  $\sqrt{ab}$ .

**Розв'язання.** Розглянемо трикутник  $ADC$  ( $\angle ADC = 90^\circ$ ), у якому відрізок  $DB$  є висотою (рис. 22.3). Маємо:  $DB = \sqrt{AB \cdot BC}$ . Якщо позначити  $AB = a$ ,  $BC = b$ , то  $DB = \sqrt{ab}$ .

Проведений аналіз показує, як провести побудову.

На довільній прямій позначимо точку  $A$  та відкладемо послідовно відрізки  $AB$  і  $BC$  так, щоб  $AB = a$ ,  $BC = b$ . Побудуємо коло



з діаметром  $AC$ . Через точку  $B$  проведемо пряму, перпендикулярну до прямої  $AC$  (рис. 22.3). Нехай  $D$  — одна з точок перетину прямої та кола.

Доведемо, що відрізок  $DB$  — шуканий. Справді,  $\angle ADC = 90^\circ$  як вписаний кут, що спирається на діаметр  $AC$ . Тоді за теоремою 22.1  $DB^2 = AB \cdot BC$ , тобто  $DB = \sqrt{ab}$ .  $\blacktriangle$

**Задача 2.** На катеті  $AC$  прямокутного трикутника  $ABC$  як на діаметрі побудовано півколо, яке перетинає гіпотенузу  $AB$  у точці  $M$  так, що  $AM : MB = 1 : 3$  (рис. 22.4). Знайдіть кути трикутника  $ABC$ .

**Розв'язання.** Оскільки кут  $CMA$  вписаний, що спирається на діаметр, то  $CMA \perp MA$ .

Нехай  $AM = x$ , тоді  $MB = 3x$ . За теоремою 22.1  $AC^2 = AM \cdot AB$ , тобто  $AC^2 = x \cdot 4x$ . Звідси  $AC = 2x$ . Отримали, що в прямокутному трикутнику  $ABC$  катет  $AC$  удвічі менший від гіпотенузи. Звідси  $\angle ABC = 30^\circ$ ,  $\angle BAC = 60^\circ$ .  $\blacktriangle$

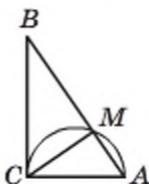


Рис. 22.4



- Якою формулою пов'язані висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, і проекції катетів на гіпотенузу?
- Якою формулою пов'язані катет, гіпотенуза та проекція цього катета на гіпотенузу?



## ВПРАВИ

- 22.1.** Знайдіть висоту прямокутного трикутника, проведену з вершини прямого кута, якщо вона ділить гіпотенузу на відрізки завдовжки 2 см і 18 см.
- 22.2.** Катет прямокутного трикутника дорівнює 6 см, а його проекція на гіпотенузу — 4 см. Знайдіть гіпотенузу.
- 22.3.** Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, ділить її на відрізки завдовжки 5 см і 20 см. Знайдіть катети трикутника.
- 22.4.** Висота прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута, дорівнює 48 см, а проекція одного з катетів на гіпотенузу — 36 см. Знайдіть сторони даного трикутника.
- 22.5.** Знайдіть катети прямокутного трикутника, висота якого ділить гіпотенузу на відрізки, один з яких на 3 см менший від цієї висоти, а другий — на 4 см більший за висоту.



- 22.6.** Знайдіть менший катет прямокутного трикутника та його висоту, проведену до гіпотенузи, якщо більший катет менший від гіпотенузи на 10 см і більший за свою проекцію на гіпотенузу на 8 см.
- 22.7.** Перпендикуляр, опущений із точки перетину діагоналей ромба на його сторону, дорівнює 2 см і ділить цю сторону на відрізки, які відносяться як  $1 : 4$ . Знайдіть діагоналі ромба.
- 22.8.** Перпендикуляр, опущений із точки кола на діаметр, ділить його на два відрізки, один з яких дорівнює 4 см. Знайдіть радіус кола, якщо довжина перпендикуляра дорівнює 10 см.
- 22.9.** Прямі, які дотикаються до кола із центром  $O$  в точках  $A$  і  $B$ , перетинаються в точці  $M$ . Знайдіть хорду  $AB$ , якщо вона ділить відрізок  $MO$  на відрізки завдовжки 2 см і 18 см.
- 22.10.** Знайдіть периметр рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 7 см і 25 см, а діагоналі перпендикулярні до бічних сторін.
- 22.11.** Центр кола, описаного навколо рівнобічної трапеції, належить її більшій основі. Знайдіть радіус цього кола, якщо діагональ трапеції дорівнює 20 см, а проекція діагоналі на більшу основу — 16 см.
- 22.12.** Діагональ рівнобічної трапеції перпендикулярна до бічної сторони, яка дорівнює 12 см. Знайдіть середню лінію трапеції, якщо радіус кола, описаного навколо трапеції, дорівнює 10 см.
- 22.13.** Знайдіть висоту рівнобічної трапеції, якщо її діагональ перпендикулярна до бічної сторони, а різниця квадратів основ дорівнює 25.
- 22.14.** У прямокутному трикутнику  $ABC$  проведено висоту з вершини  $C$  прямого кута. На цій висоті як на діаметрі побудовано коло. Коло відтинає на катетах відрізки завдовжки 12 см і 18 см. Знайдіть катети трикутника  $ABC$ .
- 22.15.** Один із катетів прямокутного трикутника дорівнює 15 см, а проекція другого катета на гіпотенузу — 16 см. Знайдіть радіус кола, вписаного в трикутник.
- 22.16.** Діагоналі прямокутної трапеції перпендикулярні, точка перетину ділить більшу з них на відрізки завдовжки 4 см і 9 см. Знайдіть меншу діагональ трапеції.
- 22.17.** Дано два відрізки, довжини яких дорівнюють  $a$  і  $b$ . Побудуйте відрізок завдовжки  $\sqrt{\frac{ab}{2}}$ .
- 22.18.** Побудуйте прямокутний трикутник за гіпотенузою та проекцією одного з катетів на гіпотенузу.



- 22.19.** Коло, вписане в трапецію  $ABCD$ , дотикається до бічних сторін  $AB$  і  $CD$  трапеції відповідно в точках  $K$  і  $M$ . Доведіть, що  $AK \cdot KB = CM \cdot MD$ .
- 22.20.** У трапецію вписано коло радіуса 6 см. Точка дотику ділить одну з основ на відрізки завдовжки 9 см і 12 см. Знайдіть сторони трапеції.
- 22.21.** У рівнобічну трапецію можна вписати коло. Доведіть, що квадрат висоти цієї трапеції дорівнює добутку її основ.
- 22.22.** У прямокутну трапецію вписано коло. Точка дотику ділить більшу бічну сторону на відрізки завдовжки 8 см і 50 см. Знайдіть периметр трапеції.
- 22.23.** У рівнобічну трапецію вписано коло. Точка дотику ділить бічну сторону на відрізки завдовжки 3 см і 27 см. Знайдіть висоту трапеції.
- 22.24.** Висота ромба, проведена з вершини тупого кута, ділить його більшу діагональ на відрізки завдовжки 3,5 см і 12,5 см. Знайдіть меншу діагональ ромба.
- 22.25.** На висотах  $BB_1$  і  $CC_1$  гострокутного трикутника  $ABC$  по-значено відповідно точки  $B_2$  і  $C_2$  так, що  $\angle AB_2C = \angle AC_2B = 90^\circ$ . Доведіть, що  $AB_2 = AC_2$ .

### 23. Теорема Піфагора

**Теорема 23.1 (теорема Піфагора).** У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів.

*Доведення.* На рисунку 23.1 зображено прямокутний трикутник  $ABC$  ( $\angle ACB = 90^\circ$ ). Доведемо, що  $AB^2 = AC^2 + BC^2$ .

Проведемо висоту  $CD$ . Застосувавши теорему 22.1 для катетів  $AC$  і  $BC$ , отримуємо:  $AC^2 = AB \cdot AD$  і  $BC^2 = AB \cdot DB$ . Додавши почленно ці рівності, отримаємо:  $AC^2 + BC^2 = AB \cdot AD + AB \cdot DB$ .

Далі маємо:  $AC^2 + BC^2 = AB \cdot (AD + DB) = AB^2$ . ▲

Якщо в прямокутному трикутнику довжини катетів дорівнюють  $a$  і  $b$ , а довжина гіпотенузи дорівнює  $c$ , то теорему Піфагора можна виразити такою рівністю:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Теорема Піфагора дає змогу за двома сторонами прямокутного трикутника знайти його третю сторону:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad a = \sqrt{c^2 - b^2}; \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

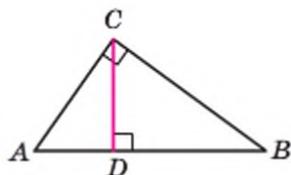


Рис. 23.1



З рівності  $c^2 = a^2 + b^2$  також випливає, що  $c^2 > a^2$  і  $c^2 > b^2$ , звідси  $c > a$  і  $c > b$ , тобто *гіпотенуза більша за будь-який із катетів*<sup>1</sup>.

**Задача.** У колі радіуса  $R$  проведено дві перпендикулярні хорди  $AB$  і  $CD$ , які перетинаються (рис. 23.2). Доведіть, що  $AC^2 + BD^2 = 4R^2$ .

**Розв'язання.** Позначимо на колі таку точку  $K$ , що  $\angle BK = \angle AC$  (рис. 23.2). Тоді  $AC = KB$  і  $\angle ADC = \angle KDB$ . Зауважимо, що кути  $DAB$  і  $DKB$  рівні як вписані, що спираються на одну і ту саму дугу  $BD$ . Оскільки  $AB \perp CD$ , то  $\angle ADC + \angle DAB = 90^\circ$ . Тоді  $\angle KDB + \angle DKB = 90^\circ$ . Отже,  $\angle KBD = 90^\circ$  і  $KD$  — діаметр кола.

За теоремою Піфагора  $KB^2 + BD^2 = KD^2$  або  $AC^2 + BD^2 = 4R^2$ .  $\blacktriangleleft$

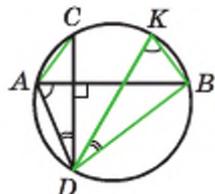


Рис. 23.2



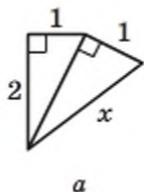
- Сформулюйте теорему Піфагора.
- Запишіть теорему Піфагора, якщо катети прямокутного трикутника дорівнюють  $a$  і  $b$ , а гіпотенуза дорівнює  $c$ .
- Як за двома сторонами прямокутного трикутника знайти його третю сторону?
- Яка зі сторін прямокутного трикутника є найбільшою?



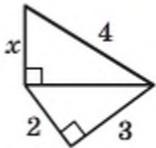
### ВПРАВИ

- 23.1.° Знайдіть гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо його катети дорівнюють: 1) 3 см і 4 см; 2) 6 см і 9 см.
- 23.2.° Знайдіть катет прямокутного трикутника, якщо його гіпотенуза та другий катет відповідно дорівнюють: 1) 15 см і 12 см; 2) 7 см і  $\sqrt{13}$  см.
- 23.3.° Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 29 см, а висота, проведена до основи, — 21 см. Чому дорівнює основа трикутника?
- 23.4.° Висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, дорівнює 35 см, а його основа — 24 см. Чому дорівнює бічна сторона трикутника?
- 23.5.° У колі, радіус якого дорівнює 10 см, проведено хорду завдовжки 16 см. Знайдіть відстань від центра кола до даної хорди.
- 23.6.° Знайдіть периметр ромба, діагоналі якого дорівнюють 24 см і 32 см.

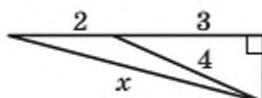
<sup>1</sup> Іншим способом цей факт було встановлено в курсі геометрії 7 класу.



a



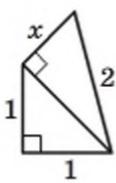
б



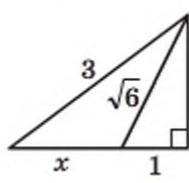
в

Рис. 23.3

- 23.7.** Сторона ромба дорівнює 26 см, а одна з діагоналей — 48 см. Знайдіть другу діагональ ромба.
- 23.8.** Один із катетів прямокутного трикутника дорівнює 21 см, а другий катет на 7 см менший від гіпотенузи. Знайдіть периметр трикутника.
- 23.9.** Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 26 см, а катети відносяться як 5 : 12. Знайдіть катети цього трикутника.
- 23.10.** Катет прямокутного трикутника дорівнює 6 см, а медіана, проведена до нього, — 5 см. Знайдіть гіпотенузу трикутника.
- 23.11.** У трикутнику  $ABC$  відомо, що  $BC = 20$  см, висота  $BD$  ділить сторону  $AC$  на відрізки  $AD = 5$  см і  $CD = 16$  см. Знайдіть сторону  $AB$ .
- 23.12.** У трикутнику  $ABC$  відомо, що  $AB = 17$  см,  $BC = 9$  см, кут  $C$  тупий, висота  $AD$  дорівнює 8 см. Знайдіть сторону  $AC$ .
- 23.13.** Знайдіть висоту рівностороннього трикутника зі стороною  $a$ .
- 23.14.** Знайдіть діагональ квадрата зі стороною  $a$ .
- 23.15.** Знайдіть довжину невідомого відрізка  $x$  на рисунку 23.3 (розміри дано в сантиметрах).
- 23.16.** Знайдіть довжину невідомого відрізка  $x$  на рисунку 23.4 (розміри дано в сантиметрах).
- 23.17.** У рівнобедреному трикутнику висота, проведена до бічної сторони, дорівнює 8 см. Вона ділить бічу сторону на два відрізки, один з яких, прилеглий до вершини рівнобедреного трикутника, дорівнює 6 см. Знайдіть основу трикутника.



а



б

Рис. 23.4



- 23.18.** Висота рівнобедреного трикутника, опущена на бічну сторону, ділить її на відрізки завдовжки 4 см і 16 см, рахуючи від вершини кута при основі. Знайдіть основу рівнобедреного трикутника.
- 23.19.** Основа рівнобедреного тупокутного трикутника дорівнює 24 см, а радіус кола, описаного навколо нього, — 13 см. Знайдіть бічну сторону трикутника.
- 23.20.** Висота рівнобедреного гострокутного трикутника, проведена до його основи, дорівнює 8 см, а радіус кола, описаного навколо нього, — 5 см. Знайдіть бічну сторону трикутника.
- 23.21.** Із точки, віддаленої від прямої на 5 см, проведено до цієї прямої дві похилі завдовжки  $5\sqrt{5}$  см і  $\sqrt{89}$  см. Знайдіть відстань між основами похилих.
- 23.22.** Із точки до прямої проведено дві похилі, довжини яких відносяться як 5 : 6, а проекції цих похилих на пряму дорівнюють 7 см і 18 см. Знайдіть відстань від даної точки до цієї прямої.
- 23.23.** Із точки до прямої проведено дві похилі завдовжки 15 см і 27 см. Сума довжин проекцій цих похилих на пряму дорівнює 24 см. Знайдіть проекцію кожної похилої.
- 23.24.** Сторони трикутника дорівнюють 29 см, 25 см і 6 см. Знайдіть висоту трикутника, проведену до меншої сторони.
- 23.25.** Сторони трикутника дорівнюють 36 см, 29 см і 25 см. Знайдіть висоту трикутника, проведену до більшої сторони.
- 23.26.** Точка дотику кола, вписаного в прямокутний трикутник, ділить один із його катетів на відрізки 2 см і 6 см. Знайдіть сторони трикутника.
- 23.27.** Знайдіть сторони паралелограма, діагоналі якого дорівнюють 16 см і 20 см, якщо одна з діагоналей перпендикулярна до його сторони.
- 23.28.** Знайдіть периметр прямокутного трикутника, якщо бісектриса прямого кута ділить гіпотенузу на відрізки завдовжки 30 см і 40 см.
- 23.29.** Знайдіть периметр прямокутного трикутника, якщо бісектриса гострого кута ділить протилежний катет на відрізки завдовжки 24 см і 51 см.
- 23.30.** Дано відрізок завдовжки 1. Побудуйте відрізок, який дорівнює: 1)  $\sqrt{2}$ ; 2)  $\sqrt{5}$ ; 3)  $\sqrt{7}$ .
- 23.31.** Дано відрізок завдовжки 1. Побудуйте відрізок, який дорівнює: 1)  $\sqrt{3}$ ; 2)  $\sqrt{6}$ .



- 23.32.\* Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 12 см і 20 см, а діагональ є бісектрисою тупого кута трапеції. Знайдіть цю діагональ.
- 23.33.\* Основи прямокутної трапеції дорівнюють 18 см і 12 см, а діагональ є бісектрисою гострого кута трапеції. Знайдіть цю діагональ.
- 23.34.\* У колі по різні боки від його центра проведено дві паралельні хорди завдовжки 16 см і 32 см. Відстань між хордами дорівнює 16 см. Знайдіть радіус кола.
- 23.35.\* У колі по один бік від його центра проведено дві паралельні хорди завдовжки 48 см і 24 см. Відстань між хордами дорівнює 12 см. Знайдіть радіус кола.
- 23.36.\* Радіус кола, вписаного в рівнобедрений трикутник, дорівнює 12 см, а відстань від вершини рівнобедреного трикутника до центра кола — 20 см. Знайдіть периметр даного трикутника.
- 23.37.\* Точка дотику кола, вписаного в прямокутну трапецію, ділить її більшу основу на відрізки завдовжки 20 см і 25 см. Обчисліть периметр трапеції.
- 23.38.\* Точка дотику кола, вписаного в прямокутну трапецію, ділить її меншу основу на відрізки завдовжки 6 см і 3 см. Обчисліть периметр трапеції.
- 23.39.\* Катети прямокутного трикутника дорівнюють 18 см і 24 см. Знайдіть бісектрису трикутника, проведену з вершини меншого гострого кута.
- 23.40.\* Медіани  $AM$  і  $CK$  трикутника  $ABC$  перпендикулярні. Знайдіть сторони трикутника, якщо  $AM = 9$  см і  $CK = 12$  см.
- 23.41.\* У трикутнику  $ABC$  медіани  $BM$  і  $CK$  перпендикулярні та перетинаються в точці  $O$ . Знайдіть відрізок  $AO$ , якщо  $BM = 36$  см і  $CK = 15$  см.
- 23.42.\* Доведіть, що для будь-якої точки  $X$  кола, описаного навколо прямокутника  $ABCD$ , сума  $XA^2 + XB^2 + XC^2 + XD^2$  є величиною сталою.
- 23.43.\* Через точку  $A$ , яка лежить поза колом, проведено до нього дотичну та січну. Відстань від точки  $A$  до точки дотику дорівнює 16 см, а до однієї з точок перетину січної з колом — 32 см. Знайдіть радіус кола, якщо січна віддалена від його центра на 5 см.
- 23.44.\* Доведіть, що коли в трапеції діагоналі перпендикулярні, то сума квадратів діагоналей дорівнює квадрату суми основ.
- 23.45.\* Навколо трикутника  $ABC$  описано коло. Дотична до цього кола, проведена в точці  $B$ , перпендикулярна до сторони  $AC$ . Знайдіть сторону  $AC$ , якщо  $AB = 20$  см,  $BC = 15$  см.



- 23.46.\*** Точка  $H$  — ортоцентр трикутника  $ABC$ ,  $R$  — радіус його описаного кола. Доведіть, що  $AH^2 = 4R^2 - BC^2$ .
- 23.47.\*** У прямокутному трикутнику  $ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ) відомо, що  $AC = 1$  см,  $BC = 3$  см. На сторонах  $BC$  і  $AB$  як на гіпотенузах поза трикутником  $ABC$  побудовано рівнобедрені прямокутні трикутники  $BKC$  і  $BDA$ . Знайдіть відрізок  $KD$ .
- 23.48.\*** На гіпотенузі  $AB$  рівнобедреного прямокутного трикутника  $ABC$  позначено точки  $M$  і  $N$  так, що  $\angle MCN = 45^\circ$  ( $AM < AN$ ). Доведіть, що  $AM^2 + BN^2 = MN^2$ .



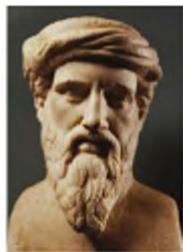
## ПІФАГОР

Ви вивчили знамениту теорему, яка носить ім'я видатного давньогрецького вченого Піфагора.

Дослідження стародавніх текстів свідчать, що твердження цієї теореми було відоме задовго до Піфагора. Чому ж її приписують Піфагорові? Скоріш за все тому, що саме Піфагор винайшов доказання цього твердження.

Про життя Піфагора мало що відомо достовірно. Він народився на грецькому острові Самос. За легендами, він багато подорожував, набуваючи знань і мудрощів.

Після того як Піфагор оселився в грецькій колонії Кротон (на півдні Італії), навколо нього сформувалося численне коло відданих учнів та однодумців. Так виник піфагорійський союз (або кротонське братство). Вплив цього союзу був настільки значним, що навіть кілька століть по смерті Піфагора багато великих математиків Стародавнього світу називали себе піфагорійцями.



Піфагор  
(VI ст. до н. е.)

## 24. Тригонометричні функції гострого кута прямокутного трикутника

На рисунку 24.1 зображене прямокутний трикутник  $ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ). Нагадаємо, що катет  $BC$  називають протилежним куту  $A$ , а катет  $AC$  — прилеглим до цього кута.

**Означення.** **Синусом** гострого кута прямокутного трикутника називають відношення протилежного катета до гіпотенузи.

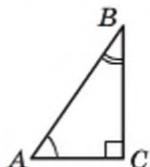


Рис. 24.1

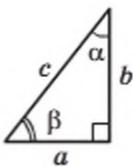


Рис. 24.2

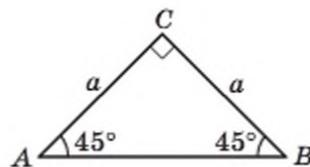


Рис. 24.3

Синус кута  $A$  позначають так:  $\sin A$  (читають: «синус  $A$ »). Для гострих кутів  $A$  і  $B$  прямокутного трикутника  $ABC$  маємо:

$$\sin A = \frac{BC}{AB}, \quad \sin B = \frac{AC}{AB}.$$

Для прямокутного трикутника, зображеного на рисунку 24.2, можна записати:  $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ ,  $\sin \beta = \frac{b}{c}$ .

Розглянемо прямокутний рівнобедрений трикутник  $ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ), у якому  $AC = BC = a$  (рис. 24.3).

Маємо:  $AB = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$ .

За означенням  $\sin A = \frac{BC}{AB}$ , звідси  $\sin A = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Бачимо,

що синус гострого кута прямокутного рівнобедреного трикутника не залежить від розмірів трикутника, бо отримане значення синуса однакове для всіх значень  $a$ . Оскільки  $\angle A = 45^\circ$ , то  $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Цей запис не пов'язують із конкретним прямокутним рівнобедреним трикутником.

У загалі, якщо гострий кут одного прямокутного трикутника дорівнює гострому куту другого прямокутного трикутника, то синуси цих кутів рівні.

Справді, ці прямокутні трикутники є подібними за першою ознакою подібності трикутників. Тому відношення катета до гіпотенузи одного трикутника дорівнює відношенню відповідного катета до гіпотенузи другого трикутника.

Наприклад, запис  $\sin 17^\circ$  можна віднести до всіх кутів, градусні міри яких дорівнюють  $17^\circ$ . Значення цього синуса можна обчислити один раз, вибравши довільний прямокутний трикутник з гострим кутом  $17^\circ$ .

Отже, синус гострого кута залежить тільки від величини цього кута.

**Означення.** Косинусом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення прилеглого катета до гіпотенузи.

Косинус кута  $A$  позначають так:  $\cos A$  (читають: «косинус  $A$ »).



Для гострих кутів  $A$  і  $B$  прямокутного трикутника  $ABC$  (рис. 24.1) можна записати:

$$\cos A = \frac{AC}{AB}, \quad \cos B = \frac{BC}{AB}.$$

Зазначимо, що катет прямокутного трикутника менший від його гіпотенузи, а тому *синус і косинус гострого кута менші від 1*.

**Означення.** **Тангенсом** гострого кута прямокутного трикутника називають відношення протилежного катета до прилеглого.

Тангенс кута  $A$  позначають так:  $\operatorname{tg} A$  (читають: «тангенс  $A$ »).

Для гострих кутів  $A$  і  $B$  прямокутного трикутника  $ABC$  (рис. 24.1) можна записати:

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}, \quad \operatorname{tg} B = \frac{AC}{BC}.$$

**Означення.** **Котангенсом** гострого кута прямокутного трикутника називають відношення прилеглого катета до протилежного.

Котангенс кута  $A$  позначають так:  $\operatorname{ctg} A$  (читають: «котангенс  $A$ »).

Для гострих кутів  $A$  і  $B$  прямокутного трикутника  $ABC$  (рис. 24.1) можна записати:

$$\operatorname{ctg} A = \frac{AC}{BC}, \quad \operatorname{ctg} B = \frac{BC}{AC}.$$

Для прямокутного трикутника, зображеного на рисунку 24.2, записують:  $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ ,  $\cos \beta = \frac{a}{c}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$ ,  $\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$ ,  $\operatorname{ctg} \beta = \frac{a}{b}$ .

Як було встановлено, синус кута залежить тільки від величини кута. Міркуючи аналогічно, можна дійти такого висновку:

*косинус, тангенс і котангенс гострого кута залежать тільки від величини цього кута.*

Узагалі, кожному гострому куту  $\alpha$  відповідає єдине число — значення синуса (косинуса, тангенса, котангенса) цього кута. Тому залежність значення синуса (косинуса, тангенса, котангенса) гострого кута від величини цього кута є функціональною. Функцію, яка відповідає цій залежності, називають **тригонометричною**. Так,  $y = \sin \alpha$ ,  $y = \cos \alpha$ ,  $y = \operatorname{tg} \alpha$ ,  $y = \operatorname{ctg} \alpha$  — тригонометричні функції, аргументами яких є гострі кути.

З давніх часів люди складали таблиці наближених значень тригонометричних функцій з деяким кроком, один раз обчислюючи значення тригонометричних функцій для конкретного аргументу. Потім ці таблиці широко використовували в багатьох галузях науки й техніки.

У наш час значення тригонометричних функцій гострих кутів зручно знаходити за допомогою мікрокалькулятора.



Тангенс і котангенс гострого кута можна виразити через синус і косинус цього самого кута. Розглянемо прямокутний трикутник

(рис. 24.2). Запишемо:  $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{c}{b} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha$ ,  $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{c}{a} = \frac{b}{a} = \operatorname{ctg} \alpha$ . Отже, одержуємо такі формули:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

Зауважимо, що тангенс і котангенс одного й того самого гострого кута є взаємно оберненими числами, тобто має місце рівність:

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

За теоремою Піфагора  $a^2 + b^2 = c^2$ . Обидві частини цієї рівності поділимо на  $c^2$ . Маємо:  $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$ . Ураховуючи, що  $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ ,  $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ , отримаємо:

$$(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1.$$

Прийнято записувати:  $(\sin \alpha)^2 = \sin^2 \alpha$ ,  $(\cos \alpha)^2 = \cos^2 \alpha$ . Звідси маємо:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Цю формулу називають **основною тригонометричною тотожністю**.

Зазначимо, що  $\cos \beta = \sin \alpha = \frac{a}{c}$ ,  $\sin \beta = \cos \alpha = \frac{b}{c}$ ,  $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$ ,  $\operatorname{ctg} \beta = \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$ . Оскільки  $\beta = 90^\circ - \alpha$ , то одержуємо такі формули:

$$\begin{aligned} \cos(90^\circ - \alpha) &= \sin \alpha \\ \sin(90^\circ - \alpha) &= \cos \alpha \\ \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) &= \operatorname{ctg} \alpha \\ \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) &= \operatorname{tg} \alpha \end{aligned}$$

Ми вже знаємо, що  $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Знайдемо тепер  $\cos 45^\circ$ ,  $\operatorname{tg} 45^\circ$  і  $\operatorname{ctg} 45^\circ$ . Маємо:

$$\cos 45^\circ = \sin(90^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1, \quad \operatorname{ctg} 45^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 45^\circ} = 1.$$

Знайдемо синус, косинус, тангенс і котангенс кутів  $30^\circ$  і  $60^\circ$ .

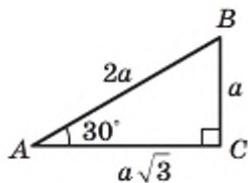


Рис. 24.4

Розглянемо прямокутний трикутник  $ABC$ , у якому  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\angle A = 30^\circ$  (рис. 24.4).

Нехай  $BC = a$ . Тоді за властивістю катета, який лежить проти кута  $30^\circ$ , отримуємо, що  $AB = 2a$ . Із теореми Піфагора випливає, що  $AC^2 = AB^2 - BC^2$ . Маємо:  $AC^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2$ ;  $AC = a\sqrt{3}$ . Звідси знаходимо:

$$\sin 30^\circ = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 30^\circ} = \sqrt{3}.$$

Оскільки  $60^\circ = 90^\circ - 30^\circ$ , то отримуємо:

$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}, \quad \operatorname{ctg} 60^\circ = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Значення синуса, косинуса, тангенса й котангенса для кутів  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  і  $60^\circ$  корисно запам'ятати.

$\alpha$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

**Задача.** Доведіть, що у всіх трапецій зі спільною бічною стороною, вписаних в одне й те саме коло, відношення висоти до середньої лінії є величиною сталою.

**Розв'язання.** Чотирикутник  $ABCD$  — одна з трапецій, про які йдеться в задачі (рис. 24.5). Її бічна сторона  $AB$  є спільною для всіх трапецій.

Нехай  $\angle ADB = \alpha$ . Тоді в усіх трапеціях кут між діагоналлю та більшою основою дорівнює  $\alpha$ . Проведемо висоту  $BM$  трапеції. Відрізок  $MD$  дорівнює середній лінії трапеції (див. ключову задачу 1 п. 10).

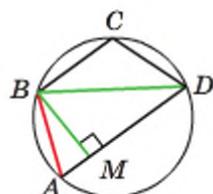


Рис. 24.5



Маємо:  $\frac{BM}{MD} = \operatorname{tg} \alpha$ . Отже, для всіх трапецій, що розглядаються, відношення висоти до середньої лінії дорівнює  $\operatorname{tg} \alpha$ . ▲



1. Що називають синусом гострого кута прямокутного трикутника?
2. Що називають косинусом гострого кута прямокутного трикутника?
3. Що називають тангенсом гострого кута прямокутного трикутника?
4. Що називають котангенсом гострого кута прямокутного трикутника?
5. Від чого залежать синус, косинус, тангенс і котангенс кута?
6. Як пов'язані між собою  $\operatorname{tg} \alpha$ ,  $\sin \alpha$  і  $\cos \alpha$ ?
7. Як пов'язані між собою  $\operatorname{ctg} \alpha$ ,  $\sin \alpha$  і  $\cos \alpha$ ?
8. Як пов'язані між собою  $\operatorname{tg} \alpha$  і  $\operatorname{ctg} \alpha$ ?
9. Як пов'язані між собою  $\sin \alpha$  і  $\cos \alpha$ ?
10. Чому дорівнює  $\sin(90^\circ - \alpha)$ ?  $\cos(90^\circ - \alpha)$ ?  $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$ ?  $\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha)$ ?
11. Чому дорівнює  $\sin 45^\circ$ ?  $\cos 45^\circ$ ?  $\operatorname{tg} 45^\circ$ ?  $\operatorname{ctg} 45^\circ$ ?
12. Чому дорівнює  $\sin 30^\circ$ ?  $\cos 30^\circ$ ?  $\operatorname{tg} 30^\circ$ ?  $\operatorname{ctg} 30^\circ$ ?
13. Чому дорівнює  $\sin 60^\circ$ ?  $\cos 60^\circ$ ?  $\operatorname{tg} 60^\circ$ ?  $\operatorname{ctg} 60^\circ$ ?



## ВПРАВИ

- 24.1.** Катет і гіпотенуза прямокутного трикутника відповідно дорівнюють 8 см і 10 см. Знайдіть:
- 1) синус кута, який лежить проти меншого катета;
  - 2) косинус кута, який прилягає до більшого катета;
  - 3) тангенс кута, протилежного меншому катету;
  - 4) котангенс кута, прилеглого до більшого катета.
- 24.2.** Катети прямокутного трикутника дорівнюють 3 см і 2 см. Знайдіть:
- 1) тангенс кута, прилеглого до більшого катета;
  - 2) синус кута, протилежного меншому катету;
  - 3) косинус кута, прилеглого до більшого катета;
  - 4) котангенс кута, протилежного більшому катету.
- 24.3.** Знайдіть значення виразу:
- 1)  $\cos^2 45^\circ + \operatorname{tg}^2 60^\circ$ ; 2)  $2 \cos^2 60^\circ - \sin^2 30^\circ + \sin 60^\circ \operatorname{ctg} 60^\circ$ .
- 24.4.** Знайдіть значення виразу:
- 1)  $\cos^2 30^\circ - \sin^2 45^\circ$ ; 2)  $3 \operatorname{tg}^2 30^\circ + 4 \operatorname{tg} 45^\circ + \cos 30^\circ \operatorname{ctg} 30^\circ$ .
- 24.5.** У трикутнику  $ABC$  відомо, що  $\angle C = 90^\circ$ ,  $BC = 77$  см,  $AB = 125$  см. Знайдіть синуси гострих кутів трикутника.
- 24.6.** У трикутнику  $ABC$  відомо, що  $\angle C = 90^\circ$ ,  $BC = 41$  см,  $AC = 20$  см. Знайдіть косинуси гострих кутів трикутника.



- 24.7.** Знайдіть  $\sin \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha$  і  $\operatorname{ctg} \alpha$ , якщо  $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ .
- 24.8.** Знайдіть  $\cos \beta$ ,  $\operatorname{tg} \beta$  і  $\operatorname{ctg} \beta$ , якщо  $\sin \beta = \frac{4}{5}$ .
- 24.9.** Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 24 см, а бічна сторона — 13 см. Знайдіть синус, косинус, тангенс і котангенс кута між бічною стороною трикутника та висотою, проведеною до його основи.
- 24.10.** Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 17 см, а висота, проведена до основи, — 8 см. Знайдіть синус, косинус, тангенс і котангенс кута при основі трикутника.
- 24.11.** Знайдіть кути ромба, діагоналі якого дорівнюють 4 см і  $4\sqrt{3}$  см.
- 24.12.** Знайдіть кути між діагоналлю прямокутника та його сторонами, довжини яких дорівнюють  $\sqrt{3}$  см і 3 см.
- 24.13.** У рівнобічній трапеції  $ABCD$  відомо, що  $AB = CD = 9$  см,  $BC = 10$  см,  $AD = 14$  см. Знайдіть синус, косинус, тангенс і котангенс кута  $A$  трапеції.
- 24.14.** У прямокутній трапеції  $ABCD$  відомо, що  $BC \parallel AD$ ,  $\angle A = 90^\circ$ ,  $AB = 4$  см,  $BC = 8$  см,  $AD = 12$  см. Знайдіть кути трапеції, що прилягають до її більшої бічної сторони.
- 24.15.** Чи може синус кута дорівнювати: 1)  $\sqrt{2}$ ; 2)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ?
- 24.16.** Доведіть, що тангенси гострих кутів прямокутного трикутника є взаємно оберненими числами.
- 24.17.** Доведіть тотожність:
- $$1) 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \quad 2) 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$
- 24.18.** Знайдіть значення виразу:
- $$1) \sin^2 18^\circ + \sin^2 72^\circ; \quad 2) \cos^2 36^\circ - \sin^2 54^\circ.$$
- 24.19.** Катети прямокутного трикутника дорівнюють 30 см і 40 см. Знайдіть синус, косинус, тангенс і котангенс кута між медіаною та висотою, проведеними до гіпотенузи.
- 24.20.** У трикутнику  $ABC$  відомо, що  $AB = BC$ ,  $BD$  і  $AM$  — висоти трикутника,  $BD : AM = 3 : 1$ . Знайдіть  $\cos C$ .
- 24.21.** У трикутнику  $ABC$  відомо, що  $AB = BC$ ,  $BD$  і  $CK$  — висоти трикутника,  $\cos A = \frac{3}{7}$ . Знайдіть відношення  $CK : BD$ .
- 24.22.** Доведіть, що радіус вписаного кола трикутника  $ABC$  можна обчислити за формулою  $r = (p - BC) \operatorname{tg} \frac{A}{2}$ , де  $p$  — півпериметр трикутника  $ABC$ .



- 24.23.** Доведіть, що кути  $ABC$  і  $DEF$ , зображені на рисунку 24.6, рівні.

- 24.24.** У рівнобедреному трикутнику  $ABC$  відношення висоти  $BD$  до основи  $AC$  дорівнює  $\sqrt{3}$ . На стороні  $BC$  позначено точку  $M$  так, що  $BM : MC = 1 : 2$ . Знайдіть кут  $MAC$ .

**24.25.** Доведіть, що відстань від вершини  $A$  гострокутного трикутника  $ABC$  до ортоцентра  $H$  можна обчислити за формулою: 1)  $AH = 2R \cos A$ ; 2)  $AH = BC \operatorname{ctg} A$ .

- 24.26.** Знайдіть кут  $C$  гострокутного трикутника  $ABC$ , якщо відстань від вершини  $C$  до ортоцентра трикутника дорівнює радіусу описаного кола.

- 24.27.** Висоти гострокутного трикутника  $ABC$  перетинаються в точці  $H$ . Відомо, що  $CH = AB$ . Знайдіть кут  $C$  трикутника  $ABC$ .

- 24.28.** Використовуючи теорему Чеви, доведіть, що висоти гострокутного трикутника перетинаються в одній точці.

- 24.29.** Коло, центр якого належить стороні  $AC$  трикутника  $ABC$ , дотикається до сторін  $AB$  і  $BC$  у точках  $M$  і  $N$  відповідно. Доведіть, що відрізки  $CM$ ,  $AN$  і висота  $BF$  перетинаються в одній точці.

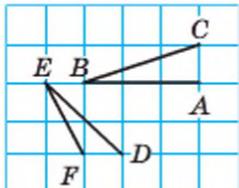


Рис. 24.6

## 25. Розв'язування прямокутних трикутників

На рисунку 25.1 зображено прямокутний трикутник з гострими кутами  $\alpha$  і  $\beta$ , катети якого дорівнюють  $a$  і  $b$ , а гіпотенуза дорівнює  $c$ .

За означенням синуса гострого кута прямокутного трикутника  $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ ,  $\sin \beta = \frac{b}{c}$ . Звідси  $a = c \sin \alpha$ ,  $b = c \sin \beta$ .

Отже, *катет прямокутного трикутника дорівнює добутку гіпотенузи на синус кута, протилежного цьому катету*.

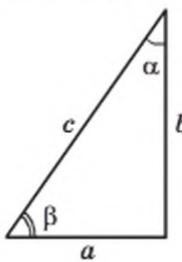


Рис. 25.1

За означенням косинуса гострого кута прямокутного трикутника  $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ ,  $\cos \beta = \frac{a}{c}$ . Звідси  $b = c \cos \alpha$ ,  $a = c \cos \beta$ .

Отже, *катет прямокутного трикутника дорівнює добутку гіпотенузи на косинус кута, прилеглого до цього катета*.

За означенням тангенса гострого кута прямокутного трикутника  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$ ,  $\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}$ . Звідси  $a = b \operatorname{tg} \alpha$ ,  $b = a \operatorname{tg} \beta$ .



Отже, катет прямокутного трикутника дорівнює добутку другого катета на тангенс кута, протилежного першому катету.

Оскільки  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$ , то  $b = \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha}$ .

Отже, катет прямокутного трикутника дорівнює частці від ділення другого катета на тангенс кута, прилеглого до першого катета.

За означенням котангенса гострого кута прямокутного трикутника  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$ ,  $\operatorname{ctg} \beta = \frac{a}{b}$ . Звідси  $b = a \operatorname{ctg} \alpha$ ,  $a = b \operatorname{ctg} \beta$ .

Отже, катет прямокутного трикутника дорівнює добутку другого катета на котангенс кута, прилеглого до першого катета.

З рівностей  $\sin \alpha = \frac{a}{c}$  і  $\cos \alpha = \frac{b}{c}$  отримуємо:  $c = \frac{a}{\sin \alpha}$  і  $c = \frac{b}{\cos \alpha}$ .

Отже, гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює частці від ділення катета на синус протилежного йому кута;

гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює частці від ділення катета на косинус прилеглого до нього кута.

**Розв'язати прямокутний трикутник** означає знайти його сторони і кути за відомими сторонами та кутами.

Наведені вище правила дають змогу розв'язувати прямокутний трикутник за однією стороною та одним гострим кутом.

У задачах на розв'язування прямокутних трикутників, якщо не обумовлено інше, прийнято такі позначення (див. рис. 25.1):  $c$  — гіпотенуза,  $a$  і  $b$  — катети,  $\alpha$  і  $\beta$  — кути, протилежні катетам  $a$  і  $b$  відповідно.

**Задача 1.** Розв'яжіть прямокутний трикутник за катетом і гострим кутом:  $a = 14$  см,  $\alpha = 38^\circ$ . (Значення тригонометричних функцій знайдіть за допомогою мікрокалькулятора та округліть їх до сотих. Значення довжин сторін округліть до десятих.)

**Розв'язання.** Маємо:

$$\beta = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 38^\circ = 52^\circ;$$

$$b = a \operatorname{tg} \beta = 14 \operatorname{tg} 52^\circ \approx 14 \cdot 1,28 \approx 17,9 \text{ (см);}$$

$$c = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{14}{\sin 38^\circ} \approx \frac{14}{0,62} \approx 22,6 \text{ (см).}$$

**Відповідь:**  $c \approx 22,6$  см,  $b \approx 17,9$  см,  $\beta = 52^\circ$ . ▲

Зазначимо, що цю задачу можна було розв'язати і в інший спосіб: наприклад, знайти гіпотенузу, використовуючи теорему Піфагора.



**Задача 2.** Розв'яжіть прямокутний трикутник за катетом і гіпотенузою:  $a = 26$  см,  $c = 34$  см.

*Розв'язання.* Маємо:  $\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{26}{34} = 0,7647\dots$

Обчислюємо кут  $\alpha$  за допомогою мікрокалькулятора:  $\alpha \approx 50^\circ$ .  
Тоді  $\beta \approx 40^\circ$ .

$$b = c \sin \beta \approx 34 \sin 40^\circ \approx 34 \cdot 0,643 \approx 21,862 \approx 21,9 \text{ (см).}$$

*Відповідь:*  $b \approx 21,9$  см,  $\alpha \approx 50^\circ$ ,  $\beta \approx 40^\circ$ . ▲

**Задача 3.** Висота  $AD$  трикутника  $ABC$  (рис. 25.2) ділить його сторону  $BC$  на відрізки  $BD$  і  $CD$  такі, що  $BD = 2\sqrt{3}$  см,  $CD = 8$  см. Знайдіть сторони  $AB$  і  $AC$ , якщо  $\angle B = 60^\circ$ .

*Розв'язання.* Із трикутника  $ADB$  ( $\angle ADB = 90^\circ$ ) отримуємо:

$$AD = BD \operatorname{tg} B = 2\sqrt{3} \operatorname{tg} 60^\circ = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 6 \text{ (см);}$$

$$AB = \frac{BD}{\cos B} = \frac{2\sqrt{3}}{\cos 60^\circ} = 2\sqrt{3} : \frac{1}{2} = 4\sqrt{3} \text{ (см).}$$

Із трикутника  $ADC$  ( $\angle ADC = 90^\circ$ ) отримуємо:

$$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ (см).}$$

*Відповідь:*  $4\sqrt{3}$  см, 10 см. ▲

**Задача 4.** Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює  $b$ , кут при основі дорівнює  $\alpha$ . Знайдіть радіус кола, вписаного в трикутник.

*Розв'язання.* У трикутнику  $ABC$  (рис. 25.3)  $AB = BC = b$ ,  $\angle BAC = \alpha$ . Проведемо висоту  $BD$ .

Із трикутника  $ADB$  ( $\angle ADB = 90^\circ$ ) отримуємо:  $AD = AB \cos \angle BAD = b \cos \alpha$ .

Точка  $O$  — центр кола, вписаного в трикутник  $ABC$ . Отже, точка  $O$  належить висоті  $BD$  і бісектрисі  $AO$  кута  $BAC$ . Оскільки  $OD \perp AC$ , то вписане коло дотикається до сторони  $AC$  у точці  $D$ . Таким чином,  $OD$  — радіус вписаного кола. Відрізок  $AO$  — бісектриса кута  $BAD$ , тому  $\angle OAD = \frac{1}{2} \angle BAD = \frac{\alpha}{2}$ .

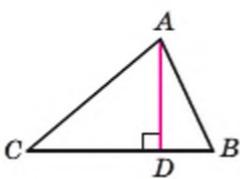


Рис. 25.2

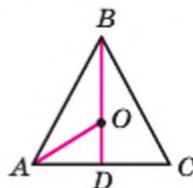


Рис. 25.3



Із трикутника  $ADO$  ( $\angle ADO = 90^\circ$ ) отримуємо:

$$OD = AD \operatorname{tg} \angle OAD = b \cos \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

*Відповідь:*  $b \cos \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ . ▲



- Як можна знайти катет прямокутного трикутника, якщо відомо гіпотенузу та кут, протилежний цьому катету?
- Як можна знайти катет прямокутного трикутника, якщо відомо гіпотенузу та кут, прилеглий до цього катета?
- Як можна знайти катет прямокутного трикутника, якщо відомо другий катет і кут, протилежний шуканому катету?
- Як можна знайти катет прямокутного трикутника, якщо відомо другий катет і кут, прилеглий до шуканого катета?
- Як можна знайти гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо відомо катет і протилежний цьому катету кут?
- Як можна знайти гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо відомо катет і прилеглий до цього катета кут?



### ВПРАВИ

25.1.° У трикутнику  $ABC$  відомо, що  $\angle C = 90^\circ$ . Знайдіть сторону:

- $BC$ , якщо  $AB = 12$  см,  $\sin A = \frac{3}{4}$ ;
- $AC$ , якщо  $AB = 21$  см,  $\cos A = 0,4$ ;
- $AC$ , якщо  $BC = 4$  см,  $\operatorname{tg} A = 1,6$ ;
- $AB$ , якщо  $BC = 14$  см,  $\cos B = \frac{7}{9}$ ;
- $AB$ , якщо  $AC = 3,2$  см,  $\sin B = 0,16$ ;
- $BC$ , якщо  $AC = 2,3$  см,  $\operatorname{tg} B = \frac{1}{2}$ .

25.2.° У трикутнику  $DEF$  відомо, що  $\angle E = 90^\circ$ . Знайдіть сторону:

- $DE$ , якщо  $DF = 18$  см,  $\cos D = \frac{2}{9}$ ;
- $DF$ , якщо  $EF = 3,5$  см,  $\cos F = 0,7$ ;
- $EF$ , якщо  $DE = 2,4$  см,  $\operatorname{tg} D = \frac{11}{12}$ .

25.3.° У прямокутному трикутнику гіпотенузу дорівнює 17 см, а синус одного з гострих кутів —  $\frac{8}{17}$ . Знайдіть катети трикутника.



- 25.4.° Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 10 см, а косинус одного з гострих кутів — 0,8. Знайдіть катети трикутника.
- 25.5.° Катет прямокутного трикутника дорівнює 48 см, а тангенс протилежного кута —  $3\frac{3}{7}$ . Знайдіть другий катет і гіпотенузу трикутника.
- 25.6.° У прямокутному трикутнику один із катетів дорівнює 12 см, а тангенс прилеглого кута — 0,75. Знайдіть другий катет і гіпотенузу трикутника.
- 25.7.° Розв'яжіть прямокутний трикутник:
- 1) за гіпотенузою та гострим кутом:  $c = 28$  см,  $\alpha = 48^\circ$ ;
  - 2) за катетом і гострим кутом:  $a = 56$  см,  $\beta = 74^\circ$ ;
  - 3) за катетом і гіпотенузою:  $a = 5$  см,  $c = 9$  см;
  - 4) за двома катетами:  $a = 3$  см,  $b = 7$  см.
- 25.8.° Розв'яжіть прямокутний трикутник за відомими елементами:
- 1)  $a = 34$  см,  $\alpha = 55^\circ$ ;
  - 2)  $c = 16$  см,  $\beta = 18^\circ$ ;
  - 3)  $b = 12$  см,  $c = 13$  см;
  - 4)  $a = 4$  см,  $b = 14$  см.
- 25.9.° Використовуючи дані рисунка 25.4, знайдіть висоту ялинки.
- 25.10.° Якої довжини має бути пожежна драбина, щоб нею можна було піднятися на дах будинку заввишки 9 м, якщо ставити її під кутом  $70^\circ$  до поверхні землі?
- 25.11.° Проїхавши від старту прямолінійною ділянкою шосе 300 м, велосипедист опинився в точці, розташованій на 11 м вище, ніж точка старту. Знайдіть тангенс кута підйому шосе на цій ділянці.
- 25.12.° Під яким кутом падає на землю сонячний промінь, якщо довжина тіні від вертикальної жердини дорівнює довжині самої жердини?
- 25.13.° Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює  $120^\circ$ , а висота, проведена до основи, —  $3\sqrt{3}$  см. Знайдіть сторони трикутника.
- 25.14.° Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 8 см і 12 см, а кут при основі —  $45^\circ$ . Знайдіть висоту та бічну сторону трапеції.
- 25.15.° Діагональ паралелограма перпендикулярна до його сторони й дорівнює  $a$ . Знайдіть сторони паралелограма, якщо один із його кутів дорівнює  $30^\circ$ .

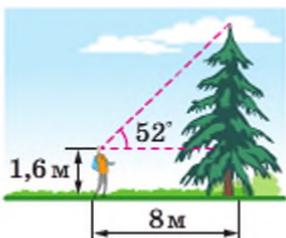


Рис. 25.4



- 25.16.** Сторона ромба дорівнює  $a$ , а один із його кутів —  $60^\circ$ . Знайдіть діагоналі ромба.
- 25.17.** Висота  $BD$  трикутника  $ABC$  ділить сторону  $AC$  на відрізки  $AD = 12$  см,  $CD = 4$  см. Знайдіть сторону  $BC$ , якщо  $\angle A = 30^\circ$ .
- 25.18.** Висота  $AF$  ділить сторону  $BC$  трикутника  $ABC$  на відрізки  $BF = \sqrt{13}$  см,  $CF = 4$  см. Знайдіть сторону  $AC$ , якщо  $\angle B = 60^\circ$ , а сторона  $AB$  дорівнює 18 см.
- 25.19.** Із точки  $D$ , що лежить поза прямою  $n$ , проведено до цієї прямої похилі  $DK$  і  $DB$ , які утворюють з нею кути  $45^\circ$  і  $60^\circ$  відповідно. Знайдіть довжину проекції похилої  $DK$  на пряму  $n$ , якщо  $DB = 10\sqrt{3}$  см.
- 25.20.** Із точки  $M$ , що лежить поза прямою  $l$ , проведено до цієї прямої похилі  $MN$  і  $MK$ , які утворюють з нею кути  $30^\circ$  і  $45^\circ$  відповідно. Знайдіть похилу  $MK$ , якщо проекція похилої  $MN$  на пряму  $l$  дорівнює  $4\sqrt{3}$  см.
- 25.21.** Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює  $\beta$ , висота, проведена до бічної сторони, —  $h$ . Знайдіть основу трикутника.
- 25.22.** Висота, проведена з вершини прямого кута трикутника, дорівнює  $h$ , гострий кут —  $\alpha$ . Знайдіть сторони трикутника.
- 25.23.** Один із катетів прямокутного трикутника дорівнює  $a$ . Кут між другим катетом і висотою, проведеною з вершини прямого кута, дорівнює  $\phi$ . Знайдіть невідомі сторони трикутника та проведену висоту.
- 25.24.** Більша діагональ ромба дорівнює  $d$ , а гострий кут —  $\alpha$ . Знайдіть сторону та меншу діагональ ромба.
- 25.25.** Гострий кут ромба дорівнює  $\alpha$ , радіус вписаного кола —  $r$ . Знайдіть сторону та діагоналі ромба.
- 25.26.** Діагональ рівнобічної трапеції перпендикулярна до бічної сторони та утворює з основою трапеції кут  $30^\circ$ . Знайдіть висоту трапеції, якщо радіус кола, описаного навколо трапеції, дорівнює  $R$ .
- 25.27.** Одна зі сторін трикутника дорівнює  $a$ , прилеглі до неї кути дорівнюють  $45^\circ$  і  $60^\circ$ . Знайдіть висоту трикутника, проведенню до даної сторони.
- 25.28.** Основи трапеції дорівнюють 7 см і 15 см, а кути при більшій основі —  $30^\circ$  і  $60^\circ$ . Знайдіть висоту та діагоналі трапеції.

Вивчивши матеріал цього параграфа, ви розширите свої уявлення про таку знайому вам величину, як площа.

Навчитеся знаходити площу паралелограма, трикутника, трапеції.





## 26. Поняття площині многокутника. Площа прямокутника

З такою величиною, як площа, ви часто стикаєтесь в повсякденному житті: площа квартири, площа дачної ділянки, площа поля тощо.

Досвід підказує вам, що рівні земельні ділянки мають рівні площині; що площа квартири дорівнює сумі площ усіх її приміщень (кімнат, кухні, коридору тощо).

Ви знаєте, що площині земельних ділянок вимірюють у сотках (арах) і гектарах; площині регіонів і держав — у квадратних кілометрах; площину квартири — у квадратних метрах.

На цих практичних знаннях про площину будеться означення площині многокутника.

**Означення.** Площею многокутника називають додатну величину, яка має такі властивості:

- 1) рівні многокутники мають рівні площині;
- 2) якщо многокутник складено з кількох многокутників, то його площа дорівнює сумі площ цих многокутників;
- 3) за одиницю виміру площині беруть одиничний квадрат, тобто квадрат зі стороною, яка дорівнює одиниці виміру довжини.

Виміряти площину многокутника — це означає порівняти його площину з площею одиничного квадрата. У результаті отримують **числове значення площині** даного многокутника. Це число показує, у скільки разів площа даного многокутника відрізняється від площині одиничного квадрата.

Наприклад, якщо клітинку вашого зошита прийняти за одиничний квадрат, то площа многокутника, зображеного на рисунку 26.1, дорівнюватиме 11 квадратним одиницям (коротко записують: 11 од.<sup>2</sup>).

Зазвичай для знаходження площині використовують формули, тобто обчислюють площину многокутника за певними його відомими елементами (сторонами, діагоналями, висотами тощо). Деякі з них ви вже знаєте. Наприклад, ви неодноразово застосовували формулу  $S = ab$ , де  $S$  — площа прямокутника,  $a$  і  $b$  — довжини його сусідніх сторін.

Для доведення цієї формули буде потрібною така лема.

**Лема.** Площа квадрата зі стороною  $\frac{1}{n}$  од. ( $n$  — натуральне число) дорівнює  $\frac{1}{n^2}$  од.<sup>2</sup>.

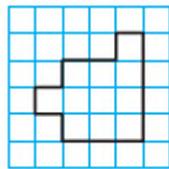


Рис. 26.1

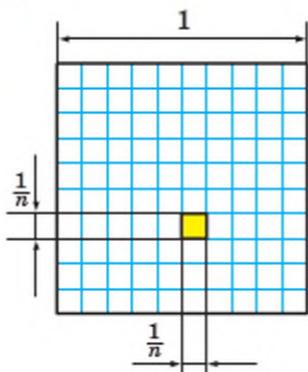


Рис. 26.2

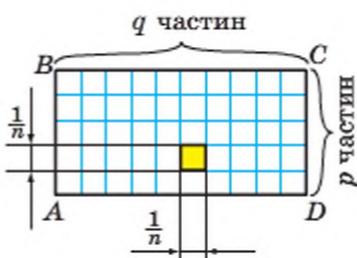


Рис. 26.3

**Доведення.** Розглянемо одиничний квадрат і поділимо його на  $n^2$  рівних квадратів зі стороною  $\frac{1}{n}$  (рис. 26.2).

З означення площині многокутника (властивість 1) випливає, що всі ці квадрати мають рівні площині. За властивістю 2 сума площин цих квадратів дорівнює площині одиничного квадрата, тобто  $1 \text{ од.}^2$ . Тому площа кожного маленького квадрата дорівнює  $\frac{1}{n^2} \text{ од.}^2$ . ▲

**Теорема 26.1.** Площа прямокутника дорівнює добутку довжин його сусідніх сторін.

**Доведення.** На рисунку 26.3 зображені прямокутник  $ABCD$ , довжини сусідніх сторін якого дорівнюють  $a$  і  $b$ :  $AB = a$ ,  $BC = b$ . Доведемо, що площа  $S$  прямокутника обчислюють за формулою  $S = ab$ .

Нехай  $a$  і  $b$  — раціональні числа. Подамо їх у вигляді звичайних дробів з одинаковими знаменниками:

$$a = \frac{p}{n}, \quad b = \frac{q}{n}, \quad \text{де } p, q, n \text{ — натуральні числа.}$$

Поділимо сторону  $AB$  на  $p$  рівних частин, а сторону  $BC$  — на  $q$  рівних частин. Через точки поділу проведемо прямі, паралельні сторонам прямокутника. Тоді прямокутник буде поділено на  $pq$  рівних квадратів зі стороною  $\frac{1}{n}$ .

Згідно з лемою площа кожного квадрата дорівнює  $\frac{1}{n^2}$ . З означення площині (властивість 2) випливає, що площа прямокутника дорівнює сумі площин усіх квадратів, тобто

$$S = \underbrace{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^2}}_{pq \text{ доданків}} = pq \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{p}{n} \cdot \frac{q}{n} = ab.$$



Тепер розглянемо випадок, коли  $a$  — ірраціональне число,  $b$  — раціональне число (випадок, коли  $a$  і  $b$  — ірраціональні числа, розглядають аналогічно).

Розглянемо довільне натуральне число  $n$  і позначимо на координатній прямій числа  $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{k}{n}, \dots, k \in \mathbb{N}$ . Оскільки  $a$  — ірраціональне число, то знайдеться таке натуральне число  $k$ , що  $a \in \left(\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right)$  (рис. 26.4).

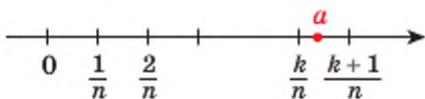


Рис. 26.4

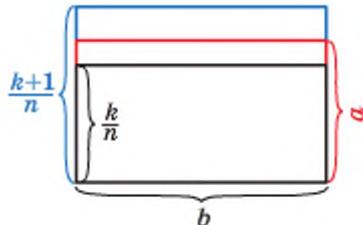


Рис. 26.5

Розглянемо три прямокутники зі сторонами  $\frac{k}{n}$  і  $b$ ,  $a$  і  $b$ ,  $\frac{k+1}{n}$  і  $b$ . Оскільки  $\frac{k}{n} < a < \frac{k+1}{n}$ , то ці прямокутники можна розташувати так, як показано на рисунку 26.5.

Площа першого прямокутника дорівнює  $\frac{kb}{n}$ , третього —  $\frac{(k+1)b}{n}$ .

Тоді площа  $S$  другого прямокутника задовільняє нерівність  $\frac{kb}{n} < S < \frac{(k+1)b}{n}$ .

З нерівності  $\frac{k}{n} < a < \frac{k+1}{n}$  отримуємо:

$$\begin{aligned} k &< an < k + 1; \\ -an &< -k < 1 - an; \\ an - 1 &< k < an. \end{aligned}$$

Маємо:

$$\frac{(an-1)b}{n} < \frac{kb}{n} < S < \frac{(k+1)b}{n} < \frac{(an+1)b}{n}.$$

Звідси

$$\begin{aligned} ab - \frac{b}{n} &< S < ab + \frac{b}{n}; \\ -\frac{b}{n} &< S - ab < \frac{b}{n}; \\ |S - ab| &< \frac{b}{n}. \end{aligned}$$



Нехай  $S \neq ab$ . Тоді  $|S - ab| > 0$ . Дріб  $\frac{b}{n}$  при достатньо великих  $n$  може стати меншим від будь-якого наперед заданого числа, а отже, і меншим від  $|S - ab|$ . Але ми показали, що при будь-якому натуральному  $n$  має місце нерівність  $\frac{b}{n} > |S - ab|$ . Отримали суперечність. Отже,  $S = ab$ . ▲

**Означення.** Многокутники, які мають рівні площині, називають **рівновеликими**.

З означення площині (властивість 1) випливає, що всі рівні фігури рівновеликі. Проте не всі фігури, які мають рівні площині, є рівними. Наприклад, на рисунку 26.6 зображені два многокутники, кожний з яких складається із семи одиничних квадратів. Ці многокутники рівновеликі, але не рівні.

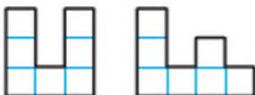


Рис. 26.6



- Що називають площею многокутника?
- Що означає вимірюти площину многокутника?
- Що показує числове значення площині?
- Чому дорівнює площа квадрата зі стороною  $\frac{1}{n}$  од., де  $n$  – натуральне число?
- Чому дорівнює площа прямокутника?
- Які многокутники називають рівновеликими?
- Чи можна стверджувати, що коли дві фігури рівні, то вони рівновеликі?
- Чи можна стверджувати, що коли дві фігури рівновеликі, то вони рівні?



## ВПРАВИ

- 26.1.° Діагональ прямокутника дорівнює  $d$  і утворює з однією зі сторін кут  $\alpha$ . Знайдіть площину прямокутника.
- 26.2.° Сторона прямокутника дорівнює 15 см і утворює з діагоналлю кут  $30^\circ$ . Знайдіть площину прямокутника.
- 26.3.° На продовженні сторони  $AD$  паралелограма  $ABCD$  за точку  $D$  позначено точку  $M$  так, що  $AD = MD$ . Доведіть, що паралелограм  $ABCD$  і трикутник  $ABM$  рівновеликі.

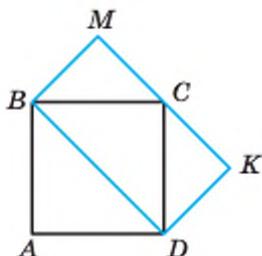


Рис. 26.7

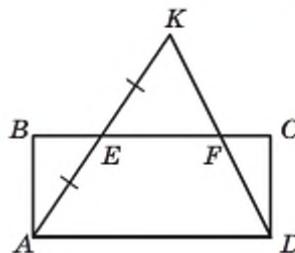


Рис. 26.8

- 26.4.**° Площа квадрата  $ABCD$  дорівнює  $10 \text{ см}^2$  (рис. 26.7). Чому дорівнює площа прямокутника  $BMKD$ ?
- 26.5.**° Доведіть, що коли точка  $E$  — середина відрізка  $AK$  (рис. 26.8), то трикутник  $AKD$  і прямокутник  $ABCD$  рівновеликі.
- 26.6.**° У скільки разів площа квадрата, описаного навколо кола, більша за площу квадрата, вписаного в це коло?
- 26.7.**° Площа прямокутного аркуша паперу, довжини сторін якого виражено цілими числами сантиметрів, дорівнює  $12 \text{ см}^2$ . Скільки квадратів площею  $4 \text{ см}^2$  можна вирізати із цього аркуша?
- 26.8.**° Площа прямокутного аркуша паперу, довжини сторін якого виражено цілими числами сантиметрів, дорівнює  $18 \text{ см}^2$ . Скільки квадратів зі стороною  $3 \text{ см}$  можна вирізати із цього аркуша?
- 26.9.**° Бісектриса кута прямокутника ділить його діагональ у відношенні  $2 : 7$ . Знайдіть площу прямокутника, якщо його периметр дорівнює  $108 \text{ см}$ .
- 26.10.**° Бісектриса кута прямокутника ділить його діагональ у відношенні  $1 : 4$ . Знайдіть периметр прямокутника, якщо його площа дорівнює  $36 \text{ см}^2$ .
- 26.11.**° Із прямокутника  $ABCD$  вирізали прямокутник  $MNKF$  (рис. 26.9). Проведіть пряму, яка поділить заштриховану фігуру на дві рівновеликі фігури.
- 26.12.**° Побудуйте квадрат, площа якого дорівнює сумі площ двох даних квадратів.
- 26.13.**° Сторони прямокутника дорівнюють  $a$  і  $b$ . Побудуйте квадрат, площа якого дорівнює площі даного прямокутника.
- 26.14.**° Прямокутник  $ABCD$  поділено паралельними лініями на 9 прямокутників (рис. 26.10). Площа заштрихованого прямокутника дорівнює  $S$ , а площа прямокутника  $ABCD$  дорівнює  $Q$ . Знайдіть площу чотирикутника  $KLMN$ .

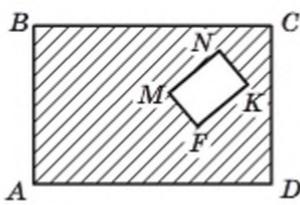


Рис. 26.9

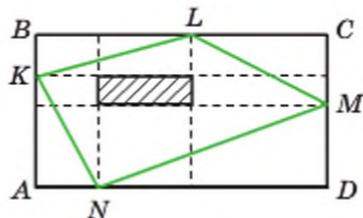


Рис. 26.10

## 27. Площа паралелограма

**Теорема 27.1.** Площа паралелограма дорівнює добутку його сторони та висоти, яка проведена до цієї сторони.

**Доведення.** На рисунку 27.1 зображене паралелограм  $ABCD$ , площа якого дорівнює  $S$ , і його висоту  $BM$ . Доведемо, що  $S = BC \cdot BM$ .

Проведемо висоту  $CN$ . Легко показати (зробіть це самостійно), що чотирикутник  $MBCN$  — прямокутник. Покажемо, що він рівновеликий даному паралелограму.

Площа паралелограма дорівнює сумі площ трикутника  $ABM$  і трапеції  $MBCD$ . Площа прямокутника дорівнює сумі площ зачлененої трапеції та трикутника  $DCN$ . Проте трикутники  $ABM$  і  $DCN$  рівні за гіпотенузою та гострим кутом (відрізки  $AB$  і  $CD$  рівні як протилежні сторони паралелограма, кути 1 і 2 рівні як відповідні при паралельних прямих  $AB$  і  $DC$  та січній  $AD$ ). Отже, ці трикутники рівновеликі. Звідси випливає, що паралелограм  $ABCD$  і прямокутник  $MBCN$  рівновеликі.

За теоремою 26.1 площа прямокутника  $MBCN$  дорівнює добутку довжин сторін  $BC$  і  $BM$ . Тоді  $S = BC \cdot BM$ , де  $S$  — площа паралелограма  $ABCD$ .

Щоб завершити доведення, потрібно розглянути випадки, коли основа  $M$  висоти  $BM$  не належатиме стороні  $AD$  (рис. 27.2) або

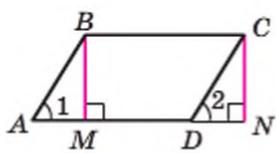


Рис. 27.1

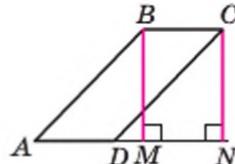


Рис. 27.2

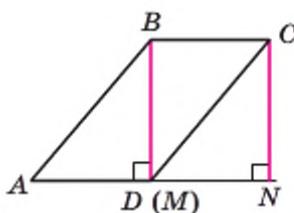


Рис. 27.3

збігатиметься з вершиною  $D$  (рис. 27.3). І в цьому разі паралелограм  $ABCD$  і прямокутник  $MBCN$  будуть рівновеликими. Доведіть цей факт самостійно. ▲

Якщо позначити довжини сторони паралелограма та проведеної до неї висоти відповідно буквами  $a$  і  $h$ , то площеу  $S$  паралелограма обчислюють за формулою

$$S = ah$$



- Чому дорівнює площа паралелограма?
- За якою формuloю обчислюють площу паралелограма?



### ВПРАВИ

**27.1.** Які з паралелограмів, зображеніх на рисунку 27.4, рівновеликі?

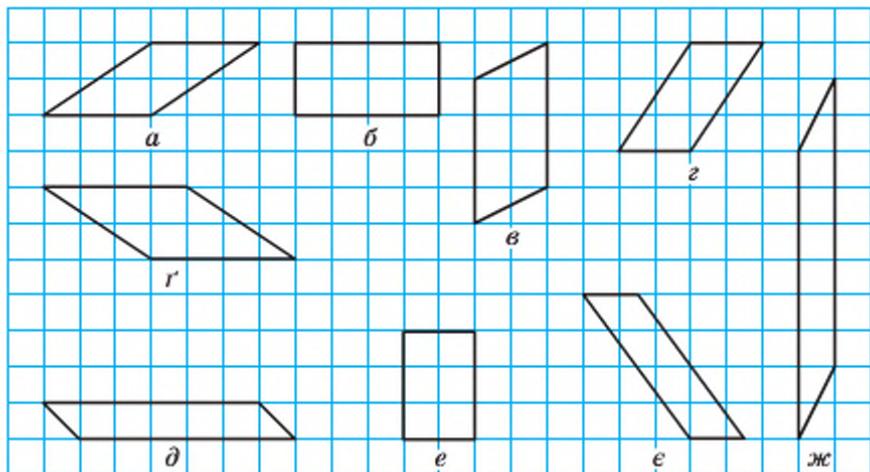


Рис. 27.4

**27.2.** Площа паралелограма  $ABCD$  (рис. 27.5) дорівнює  $S$ . Чому дорівнює площа зафарбованої фігури?

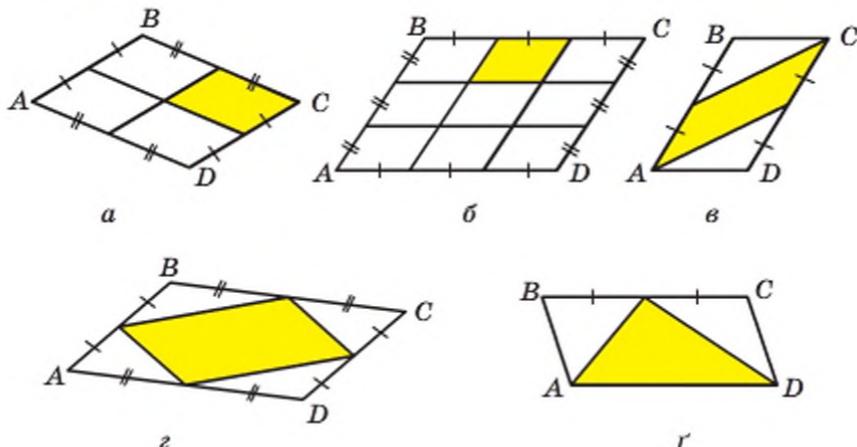


Рис. 27.5

- 27.3.<sup>◦</sup> Сторони паралелограма дорівнюють 10 см і 15 см, а одна з висот дорівнює: 1) 6 см; 2) 12 см. Знайдіть другу висоту паралелограма. Скільки розв'язків у кожному випадку має задача?
- 27.4.<sup>◦</sup> Знайдіть площу паралелограма, сторони якого дорівнюють 15 см і 25 см, а одна з діагоналей перпендикулярна до меншої сторони.
- 27.5.<sup>◦</sup> Знайдіть площу паралелограма, діагоналі якого дорівнюють 26 см і 24 см, а одна з них перпендикулярна до сторони паралелограма.
- 27.6.<sup>◦</sup> Діагональ паралелограма, яка дорівнює 18 см, перпендикулярна до однієї зі сторін і утворює кут  $30^{\circ}$  із другою стороною. Знайдіть площу паралелограма.
- 27.7.<sup>◦</sup> Сторони паралелограма дорівнюють  $a$  і  $b$ , його гострий кут дорівнює  $\alpha$ . Знайдіть площу паралелограма.
- 27.8.<sup>◦</sup> Кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини тупого кута, дорівнює  $60^{\circ}$ . Знайдіть площу паралелограма, якщо його висоти дорівнюють 8 см і 12 см.
- 27.9.<sup>◦</sup> Сторони паралелограма дорівнюють 14 см і 20 см, а кут між його висотами, проведеними з вершини тупого кута, —  $45^{\circ}$ . Знайдіть площу паралелограма.
- 27.10.<sup>◦</sup> Знайдіть площу ромба, якщо його висота дорівнює 6 см, а більша діагональ — 10 см.
- 27.11.<sup>◦</sup> Менша діагональ ромба дорівнює  $a$ , а один із кутів —  $60^{\circ}$ . Знайдіть площу ромба.



- 27.12.° Доведіть, що висоти паралелограма обернено пропорційні сторонам, до яких вони проведені.
- 27.13.° Сторони паралелограма дорівнюють 9 см і 12 см, а сума двох його нерівних висот дорівнює 14 см. Знайдіть площу паралелограма.
- 27.14.° Різниця двох сторін паралелограма дорівнює 12 см, а проведені до них висоти дорівнюють 15 см і 10 см. Знайдіть площу паралелограма.
- 27.15.\* Доведіть, що з усіх паралелограмів зі сторонами  $a$  і  $b$  найбільшу площину має прямокутник.

## 28. Площа трикутника

**Теорема 28.1.** Площа трикутника дорівнює половині добутку його сторони та проведеної до неї висоти.

**Доведення.** На рисунку 28.1 зображено трикутник  $ABC$ , площа якого дорівнює  $S$ , і його висоту  $BM$ . Доведемо, що  $S = \frac{1}{2} AC \cdot BM$ .

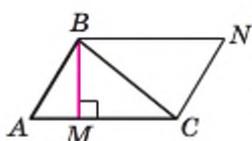


Рис. 28.1

Через вершини  $B$  і  $C$  трикутника проведено прямі, паралельні сторонам  $AC$  і  $AB$  відповідно (рис. 28.1). Нехай ці прямі перетинаються в точці  $N$ . Чотирикутник  $ABNC$  — паралелограм за означенням. Трикутники  $ABC$  і  $NCB$  рівні (доведіть це самостійно). Отже, їхні площини також рівні. Тоді площа трикутника  $ABC$  дорівнює половині площини паралелограма  $ABNC$ .

Висота  $BM$  трикутника  $ABC$  є також висотою паралелограма  $ABNC$ . Звідси  $S = \frac{1}{2} AC \cdot BM$ . ▲

Якщо скористатися позначеннями для висот і сторін трикутника  $ABC$ , то згідно з доведеною теоремою маємо:

$$S = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} bh_b = \frac{1}{2} ch_c,$$

де  $S$  — площа трикутника.

**Наслідок.** Площа прямокутного трикутника дорівнює половині добутку його катетів.

Доведіть цю теорему самостійно.

Площу многокутника  $A_1A_2\ldots A_n$  позначатимемо так:  $S_{A_1A_2\ldots A_n}$ .

**Задача 1.** Діагоналі  $AC$  і  $BD$  чотирикутника  $ABCD$  перетинаються в точці  $M$ . Доведіть, що для паралельності сторін  $BC$  і  $AD$  необхідно і достатньо виконання рівності  $S_{ABM} = S_{DCM}$ .



**Розв'язання.** Доведемо необхідну умову. Нехай у чотирикутнику  $ABCD$  сторони  $BC$  і  $AD$  паралельні. Тоді в трикутниках  $ABD$  і  $ACD$  висоти  $BE$  і  $CF$  рівні, а сторона  $AD$  — спільна (рис. 28.2). Звідси  $S_{ABD} = S_{DCA}$ . Маємо:

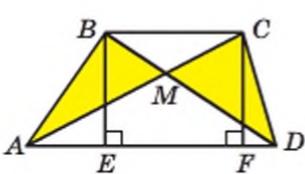


Рис. 28.2

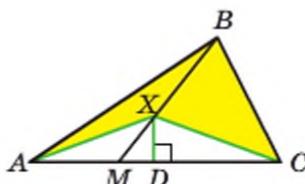


Рис. 28.3

$$\begin{aligned}S_{ABM} &= S_{ABD} - S_{AMD}; \\S_{DCM} &= S_{DCA} - S_{AMD}.\end{aligned}$$

Тоді  $S_{ABM} = S_{DCM}$ .

Доведемо достатню умову. Нехай  $S_{ABM} = S_{DCM}$ .  
Маємо:

$$\begin{aligned}S_{ABD} &= S_{ABM} + S_{AMD}; \\S_{DCA} &= S_{DCM} + S_{AMD}.\end{aligned}$$

Тоді  $S_{ABD} = S_{DCA}$ .

У рівновеликих трикутниках  $ABD$  і  $DCA$  сторона  $AD$  спільна. Отже, висоти трикутників, проведені до цієї сторони, рівні. Це означає, що точки  $B$  і  $C$  віддалені на однакову відстань від прямої  $AD$ . Звідси  $BC \parallel AD$ . ▲

**Задача 2.** На стороні  $AC$  трикутника  $ABC$  позначено точку  $M$  так, що  $\frac{AM}{MC} = \frac{m}{n}$ .

1) Нехай  $X$  — довільна точка відрізка  $BM$ , відмінна від точки  $M$ .

Доведіть, що  $\frac{S_{AXM}}{S_{MXC}} = \frac{m}{n}$ .

2) Нехай  $X$  — довільна внутрішня точка відрізка  $BM$ . Доведіть, що  $\frac{S_{ABX}}{S_{CBX}} = \frac{m}{n}$ .

**Розв'язання.** У трикутниках  $AXM$  і  $MXC$  (рис. 28.3) висота  $XD$  спільна. Маємо:

$$\frac{S_{AXM}}{S_{MXC}} = \frac{\frac{1}{2} AM \cdot XD}{\frac{1}{2} MC \cdot XD} = \frac{AM}{MC} = \frac{m}{n}.$$

Аналогічно доводимо, що  $\frac{S_{ABX}}{S_{CBX}} = \frac{m}{n}$ .



Запишемо:

$$S_{ABM} = \frac{m}{n} S_{MBC}; \quad (1)$$

$$S_{AXM} = \frac{m}{n} S_{MXC}. \quad (2)$$

Віднімемо почленно від рівності (1) рівність (2):

$$S_{ABM} - S_{AXM} = \frac{m}{n} (S_{MBC} - S_{MXC}).$$

Звідси  $S_{ABX} = \frac{m}{n} S_{CBX}$ , тобто  $\frac{S_{ABX}}{S_{CBX}} = \frac{m}{n}$ .  $\blacktriangle$

**Задача 3.** Діагоналі  $AC$  і  $BD$  чотирикутника  $ABCD$  перетинаються в точці  $M$ . Доведіть, що  $S_{ABM} \cdot S_{DCM} = S_{BCM} \cdot S_{ADM}$ .

**Розв'язання.** Трикутники  $ABM$  і  $ADM$  мають спільну висоту  $AK$  (рис. 28.4). Тоді  $\frac{S_{ABM}}{S_{ADM}} = \frac{BM}{MD}$ .

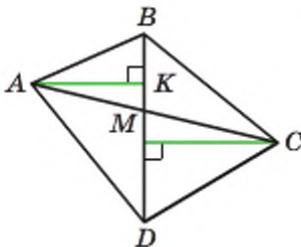


Рис. 28.4

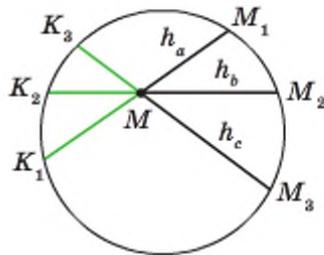


Рис. 28.5

Аналогічно  $\frac{S_{BCM}}{S_{DCM}} = \frac{BM}{MD}$ .

Звідси  $\frac{S_{ABM}}{S_{ADM}} = \frac{S_{BCM}}{S_{DCM}}$ , тобто  $S_{ABM} \cdot S_{DCM} = S_{BCM} \cdot S_{ADM}$ .  $\blacktriangle$

**Задача 4.** Побудуйте трикутник за трьома його висотами.

**Розв'язання.** Нехай  $a, b, c$  — сторони, а  $h_a, h_b, h_c$  — відповідні висоти шуканого трикутника  $ABC$ . Від довільної точки  $M$  відкладемо відрізки  $MM_1, MM_2, MM_3$ , які відповідно дорівнюють  $h_a, h_b, h_c$ , так, щоб точки  $M_1, M_2, M_3$  не лежали на одній прямій (рис. 28.5). Навколо трикутника  $M_1M_2M_3$  опишемо коло.

Нехай промені  $M_1M, M_2M, M_3M$  перетинають коло в точках  $K_1, K_2, K_3$  відповідно. Маємо:  $MM_1 \cdot MK_1 = MM_2 \cdot MK_2 = MM_3 \cdot MK_3$ , тобто

$$h_a \cdot MK_1 = h_b \cdot MK_2 = h_c \cdot MK_3. \quad (1)$$

Також можемо записати:

$$h_a \cdot a = h_b \cdot b = h_c \cdot c. \quad (2)$$



З рівностей (1) і (2) отримуємо:

$$\frac{MK_1}{a} = \frac{MK_2}{b} = \frac{MK_3}{c}.$$

Це означає, що трикутник зі сторонами, які дорівнюють  $MK_1$ ,  $MK_2$ ,  $MK_3$ , подібний трикутнику  $ABC$ . Побудувавши трикутник, подібний трикутнику  $ABC$ , знайдемо кути шуканого трикутника  $ABC$ .

Тепер залишилося побудувати трикутник за його кутами та висотами. Завершіть розв'язання самостійно. ▲



1. Як знайти площу трикутника, якщо відомо його сторону та висоту, проведену до неї?
2. Як знайти площу прямокутного трикутника, якщо відомо його катети?



### ВПРАВИ

- 28.1.° Знайдіть площу рівнобедреного трикутника, основа якого дорівнює 24 см, а бічна сторона — 13 см.
- 28.2.° Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 61 см, а висота, проведена до основи, — 60 см. Знайдіть площу трикутника.
- 28.3.° Один із катетів прямокутного трикутника дорівнює 12 см, а медіана, проведена до гіпотенузи, — 18,5 см. Знайдіть площу трикутника.
- 28.4.° Знайдіть площу прямокутного трикутника, якщо висота, проведена до гіпотенузи, ділить її на відрізки завдовжки 3 см і 27 см.
- 28.5.° Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, дорівнює 8 см, а проекція одного з катетів на гіпотенузу — 6 см. Знайдіть площу трикутника.
- 28.6.° Висота  $BD$  трикутника  $ABC$  ділить його сторону  $AC$  на відрізки  $AD$  і  $CD$ . Знайдіть площу трикутника  $ABC$ , якщо  $BC = \sqrt{37}$  см,  $\angle A = 30^\circ$ ,  $CD = 5$  см.
- 28.7.° Висота  $AM$  трикутника  $ABC$  ділить його сторону  $BC$  на відрізки  $BM$  і  $MC$ . Знайдіть площу трикутника  $ABC$ , якщо  $AB = 10\sqrt{2}$  см,  $AC = 26$  см,  $\angle B = 45^\circ$ .
- 28.8.° Знайдіть площу рівнобедреного трикутника, бічна сторона якого дорівнює  $b$ , а кут при основі дорівнює  $\alpha$ .



- 28.9.** Висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, дорівнює  $h$ , а кут при вершині дорівнює  $\beta$ . Знайдіть площу трикутника.
- 28.10.** Знайдіть площу рівностороннього трикутника, сторона якого дорівнює  $a$ .
- 28.11.** Знайдіть площу рівнобедреного прямокутного трикутника, гіпотенуза якого дорівнює  $c$ .
- 28.12.** Знайдіть висоту прямокутного трикутника, проведену до гіпотенузи, якщо його катети дорівнюють 10 см і 24 см.
- 28.13.** Точка дотику кола, вписаного в прямокутний трикутник, ділить його гіпотенузу на відрізки завдовжки 8 см і 12 см. Знайдіть площу трикутника.
- 28.14.** Доведіть, що площа опуклого чотирикутника, діагоналі якого перпендикулярні, дорівнює половині їхнього добутку.
- 28.15.** Знайдіть площу ромба, сторона якого дорівнює 25 см, а сума діагоналей — 62 см.
- 28.16.** Знайдіть площу ромба, сторона якого дорівнює 39 см, а різниця діагоналей — 42 см.
- 28.17.** Дано пряму  $l$  і паралельний їй відрізок  $AB$ . Доведіть, що всі трикутники  $AXB$ , де  $X$  — довільна точка прямої  $l$ , рівновеликі.
- 28.18.** Доведіть, що медіана трикутника розбиває його на два рівновеликі трикутники.
- 28.19.** Середину однієї з діагоналей опуклого чотирикутника сполучено з кінцями другої. Доведіть, що одержана ламана (або одержаний відрізок) ділить чотирикутник на дві рівновеликі частини.
- 28.20.** У трикутнику провели всі три медіани. Доведіть, що вони розбивають трикутник на шість рівновеликих трикутників.
- 28.21.** Через вершину  $B$  трикутника  $ABC$  проведіть дві прямі так, щоб вони розбили даний трикутник на три рівновеликі трикутники.
- 28.22.** Через вершину паралелограма проведіть прямі так, щоб вони розбили даний паралелограм: 1) на чотири рівновеликі многокутники; 2) на п'ять рівновеликих многокутників.
- 28.23.** Через вершину ромба проведіть дві прямі так, щоб вони розбили даний ромб на три рівновеликі многокутники.
- 28.24.** Побудуйте трикутник, рівновеликий даному паралелограму.
- 28.25.** У трикутнику проведено три висоти. Доведіть, що до найбільшої сторони трикутника проведено найменшу висоту.



- 28.26.\* Точка дотику кола, вписаного в прямокутний трикутник, ділить його гіпотенузу на відрізки, один з яких на 14 см більший за другий. Знайдіть площину трикутника, якщо радіус вписаного кола дорівнює 4 см.
- 28.27.\* У прямокутному трикутнику  $ABC$  до гіпотенузи  $AB$  проведено висоту  $CM$ . Площа трикутника  $ACM$  дорівнює  $6 \text{ см}^2$ , а площа трикутника  $BCM$  —  $54 \text{ см}^2$ . Знайдіть сторони трикутника  $ABC$ .
- 28.28.\* Знайдіть площину прямокутного трикутника, якщо бісектриса його гострого кута ділить протилежний катет на відрізки завдовжки 21 см і 35 см.
- 28.29.\* Знайдіть площину прямокутного трикутника, якщо бісектриса прямого кута ділить гіпотенузу на відрізки завдовжки 2 см і 6 см.
- 28.30.\* Центр кола, вписаного в рівнобедрений трикутник, ділить його висоту, проведенню до основи, на відрізки, довжини яких дорівнюють 34 см і 16 см. Знайдіть площину даного трикутника.
- 28.31.\* У рівнобедрений трикутник вписано коло. Точка дотику ділить бічну сторону трикутника у відношенні  $9 : 8$ , рахуючи від вершини рівнобедреного трикутника. Знайдіть площину трикутника, якщо радіус вписаного кола дорівнює 16 см.
- 28.32.\* У трапеції  $ABCD$  на бічній стороні  $AB$  позначено точку  $M$  так, що  $AM : MB = 3 : 1$ . Знайдіть відношення площ трикутників  $BCD$  і  $MBD$ , якщо  $BC : AD = 1 : 2$ .
- 28.33.\* Доведіть, що площа прямокутного трикутника дорівнює добутку відрізків, на які точка дотику вписаного кола ділить гіпотенузу.
- 28.34.\* Площи трикутників, утворених відрізками діагоналей трапеції та її основами, дорівнюють  $4 \text{ см}^2$  і  $9 \text{ см}^2$ . Знайдіть площину трапеції.
- 28.35.\* Площа трапеції дорівнює  $16 \text{ см}^2$ . Площа трикутника, утвореного відрізками діагоналей та однією з бічних сторін, дорівнює  $3 \text{ см}^2$ . Знайдіть площи трикутників, утворених відрізками діагоналей та основами трапеції.
- 28.36.\* Доведіть, що сума відстаней від будь-якої точки основи рівнобедреного трикутника до бічних сторін не залежить від положення точки на основі.
- 28.37.\* Доведіть, що сума відстаней від довільної точки рівностороннього трикутника до його сторін є сталою для даного трикутника.



- 28.38.** Відрізок, що сполучає середини двох протилежних сторін опуклого чотирикутника, ділить його на два рівновеликих чотирикутники. Доведіть, що ці сторони паралельні.
- 28.39.** Кожна діагональ чотирикутника ділить його на два рівновеликих трикутники. Доведіть, що цей чотирикутник — паралелограм.
- 28.40.** На продовженнях сторін  $AB$ ,  $BC$ ,  $AC$  рівностороннього трикутника  $ABC$  за точки  $B$ ,  $C$  і  $A$  відповідно позначено точки  $D$ ,  $E$  і  $F$  так, що  $BD = CE = AF = 2AB$ . Знайдіть площину трикутника  $DEF$ , якщо площа трикутника  $ABC$  дорівнює  $1 \text{ см}^2$ .
- 28.41.** У трикутнику  $ABC$  позначено точку  $M$  так, що площи трикутників  $AMB$ ,  $BMC$  і  $AMC$  рівні. Доведіть, що  $M$  — точка перетину медіан трикутника  $ABC$ .
- 28.42.** Діагоналі опуклого чотирикутника  $ABCD$  перетинаються в точці  $O$ . Доведіть, що коли  $S_{ABCD} = (\sqrt{S_{AOD}} + \sqrt{S_{COB}})^2$ , то  $AD \parallel BC$ .
- 28.43.** Діагональ опуклого чотирикутника ділить навпіл відрізок, який сполучає середини двох протилежних сторін чотирикутника. Доведіть, що ця діагональ розбиває чотирикутник на два рівновеликих трикутники.
- 28.44.** На сторонах  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  і  $DA$  паралелограма  $ABCD$  познали відповідно точки  $M$ ,  $N$ ,  $K$ ,  $F$  так, що  $MK \parallel BC$ ,  $NF \parallel AB$ . Відрізки  $MK$  і  $NF$  перетинаються в точці  $Q$ . Площи паралелограмів  $MBNQ$ ,  $NCKQ$ ,  $KDFQ$  дорівнюють відповідно  $3 \text{ см}^2$ ,  $4 \text{ см}^2$  і  $5 \text{ см}^2$ . Знайдіть площину паралелограма  $FAMQ$ .
- 28.45.** Два паралелограми розміщено так, що вони мають спільну вершину, а ще одна вершина кожного з паралелограмів лежить на стороні іншого паралелограма (рис. 28.6). Доведіть, що площи цих паралелограмів рівні.
- 28.46.** На стороні  $AC$  трикутника  $ABC$  позначено точку  $D$ . Проведіть через цю точку пряму так, щоб вона розбила даний трикутник на два рівновеликих многокутники.
- 28.47.** Дано опуклий  $n$ -кутник. Побудуйте рівновеликий йому  $(n - 1)$ -кутник.
- 28.48.** Дано квадрат  $ABCD$ . Знайдіть геометричне місце точок  $X$  таких, що  $S_{ABX} + S_{CDX} = S_{BCX} + S_{ADX}$ .

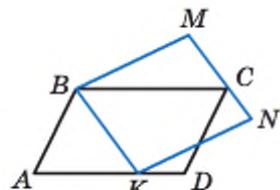
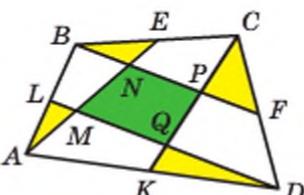


Рис. 28.6



**28.49.\*** Точки  $E, F, K, L$  — середини сторін чотирикутника  $ABCD$  (рис. 28.7).

Доведіть, що сума площ трикутників  $ALM, BNE, CPF, KQD$  дорівнює площі чотирикутника  $MNPQ$ .



**28.50.\*** Діагоналі опуклого чотирикутника  $ABCD$  перетинаються в точці  $E$ .

Відомо, що  $S_{ABE} = S_{DCE} = 1 \text{ см}^2$ ,  $S_{ABCD} \leq 4 \text{ см}^2$ ,  $AD = 3 \text{ см}$ . Знайдіть сторону  $BC$ .

**28.51.\*** Дано опуклий чотирикутник  $ABCD$ . Промені  $AB$  і  $DC$  перетинаються в точці  $M$ , а промені  $BC$  і  $AD$  — у точці  $N$ . Відомо, що  $S_{BMC} = S_{DNC}$ . Доведіть, що діагональ  $AC$  ділить діагональ  $BD$  навпіл.

Рис. 28.7

## 29. Площа трапеції. Рівноскладені многокутники

**Теорема 29.1.** Площа трапеції дорівнює добутку півсуми її основ і висоти.

**Доведення.** На рисунку 29.1 зображено трапецію  $ABCD$  ( $AD \parallel BC$ ), площа якої дорівнює  $S$ . Відрізок  $CN$  — висота цієї трапеції. Доведемо, що  $S = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot CN$ .

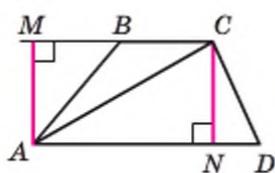


Рис. 29.1

Проведемо діагональ  $AC$  і висоту  $AM$  трапеції. Відрізки  $AM$  і  $CN$  є висотами трикутників  $ABC$  і  $ACD$  відповідно.

Маємо:

$$\begin{aligned} S &= S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{1}{2}BC \cdot AM + \frac{1}{2}AD \cdot CN = \\ &= \frac{1}{2}BC \cdot CN + \frac{1}{2}AD \cdot CN = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot CN. \end{aligned} \quad \blacktriangle$$

Якщо позначити довжини основ трапеції та її висоти відповідно буквами  $a, b$  і  $h$ , то площеу  $S$  трапеції обчислюють за формулою

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

**Наслідок.** Площа трапеції дорівнює добутку її середньої лінії та висоти.



Якщо деякий многокутник можна розрізати на частини та скласти з них інший многокутник, то такі многокутники називають **рівноскладеними**.

Наприклад, якщо прямокутник розрізати вздовж його діагоналі (рис. 29.2), то отримаємо два рівних прямокутних трикутники, з яких можна скласти рівнобедрений трикутник (рис. 29.3). Фігури на рисунках 29.2 і 29.3 — **рівноскладені**.



Рис. 29.2

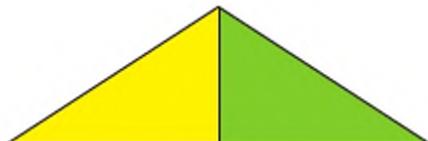


Рис. 29.3

Очевидно, що рівноскладені многокутники є рівновеликими. Цей факт застосовують під час доведення теорем і розв'язування задач. Наприклад, доводячи теорему 27.1, ми фактично розрізали паралелограм на трикутник  $ABM$  і трапецію  $MBCD$ , з яких склали прямокутник  $MBCN$  (див. рис. 27.1).

Якщо трикутник розрізати вздовж середньої лінії, то з отриманих трикутника та трапеції можна скласти паралелограм (рис. 29.4).

Легко встановити (зробіть це самостійно), що таке розрізання трикутника приводить до ще одного доведення теореми про площину трикутника (теорема 28.1). Цій самій меті слугує розрізання трикутника на частини, з яких можна скласти прямокутник (рис. 29.5).



Рис. 29.4

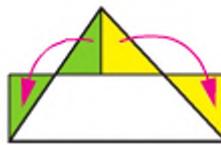


Рис. 29.5

Евклід у своїй знаменитій книзі «Начала» формулює теорему Піфагора так:

«Площа квадрата, побудованого на гіпотенузі, дорівнює сумі площ квадратів, побудованих на катетах».

Якщо показати, що можна розрізати квадрати, побудовані на катетах, на частини та скласти із цих частин квадрат зі стороною, яка дорівнює гіпотенузі, то тим самим буде доведено теорему Піфагора.



На рисунку 29.6 показано один із можливих способів такого розрізання. Квадрати, побудовані на катетах, розрізано на частини, площи яких дорівнюють  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ ,  $S_4$ . Із цих частин складено квадрат, побудований на гіпотенузі.

З означення площи многокутника випливає, що рівноскладені многокутники є рівновеликими. Проте зовсім неочевидною є така теорема.

**Теорема 29.2.** *Будь-які два рівновеликі многокутники є рівноскладеними.*

Уперше цей факт довів у 1832 році угорський математик Фаркаш Бойяї. Трохи згодом німецький математик Пауль Гервін знайшов інше доведення. Тому цю теорему називають теоремою Бойяї—Гервіна.



1. Сформулюйте теорему про площу трапеції.
2. За якою формулою обчислюють площу трапеції?
3. Які многокутники називають рівноскладеними?
4. Яку властивість мають площи рівноскладених многокутників?



### ВПРАВИ

- 29.1.° Знайдіть площу рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 14 см і 16 см, а діагональ — 17 см.
- 29.2.° Чому дорівнює площа прямокутної трапеції, основи якої дорівнюють 9 см і 16 см, а більша бічна сторона —  $\sqrt{65}$  см?
- 29.3.° Знайдіть площу рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 14 см і 32 см, а бічна сторона — 15 см.
- 29.4.° Знайдіть площу трапеції, зображену на рисунку 29.7 (розміри дано в сантиметрах).

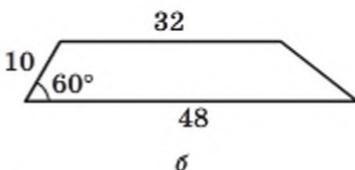
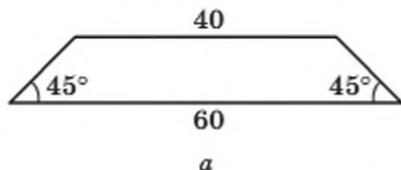


Рис. 29.7

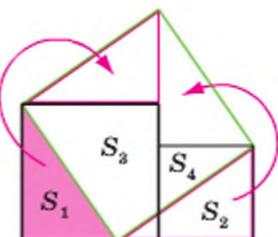


Рис. 29.6



- 29.5.** Знайдіть площину трапеції, зображену на рисунку 29.8 (розміри дано в сантиметрах).
- 29.6.** У рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою гострого кута й ділить середню лінію трапеції на відрізки завдовжки 6 см і 12 см. Знайдіть площину трапеції.
- 29.7.** Основи прямокутної трапеції дорівнюють 9 см і 17 см, а діагональ є бісектрисою її тупого кута. Обчисліть площину трапеції.
- 29.8.** Точка перетину бісектрис гострих кутів при основі трапеції належить другій основі. Знайдіть площину трапеції, якщо її бічні сторони дорівнюють 17 см і 25 см, а висота — 15 см.
- 29.9.** Точка перетину бісектрис тупих кутів при основі трапеції належить другій основі. Знайдіть площину трапеції, якщо її бічні сторони дорівнюють 10 см і 17 см, а висота — 8 см.
- 29.10.** Бічна сторона рівнобічної трапеції дорівнює  $20\sqrt{3}$  см і утворює з основою кут  $60^\circ$ . Знайдіть площину трапеції, якщо в ній можна вписати коло.
- 29.11.** Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 32 см і 50 см. Чому дорівнює площа трапеції, якщо в ній можна вписати коло?
- 29.12.** Менша бічна сторона прямокутної трапеції дорівнює 8 см, а гострий кут —  $45^\circ$ . Знайдіть площину трапеції, якщо в ній можна вписати коло.
- 29.13.** Більша бічна сторона прямокутної трапеції дорівнює 28 см, а гострий кут —  $30^\circ$ . Знайдіть площину трапеції, якщо в ній можна вписати коло.
- 29.14.** Доведіть, що пряма, яка проходить через середину середньої лінії трапеції та перетинає її основи, розбиває дану трапецію на два рівновеликих многокутники.
- 29.15.** Знайдіть площину рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 24 см і 40 см, а діагональ перпендикулярна до бічної сторони.
- 29.16.** Діагональ рівнобічної трапеції перпендикулярна до бічної сторони, яка дорівнює 15 см. Знайдіть площину трапеції, якщо радіус кола, описаного навколо неї, дорівнює 12,5 см.
- 29.17.** Діагональ трапеції розбиває її на трикутники, площи яких відносяться як 3 : 7. Як відносяться площи трапеції, на які розбиває дану трапецію її середня лінія?

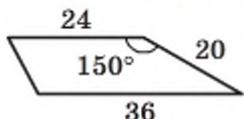


Рис. 29.8



- 29.18.\* На сторонах  $AB$  і  $CD$  паралелограма  $ABCD$  позначено відповідно точки  $K$  і  $M$  так, що  $AK : KB = 3 : 4$  і  $DM : MC = 5 : 3$ . Знайдіть відношення площ чотирикутників, на які відрізок  $KM$  розбиває даний паралелограм.
- 29.19.\* Доведіть, що площа прямокутної трапеції, у яку можна вписати коло, дорівнює добутку її основ.
- 29.20.\* У рівнобічну трапецію вписано коло. Одна з її бічних сторін точкою дотику ділиться на відрізки завдовжки 4 см і 9 см. Знайдіть площу трапеції.
- 29.21.\* У прямокутну трапецію  $ABCD$  ( $BC \parallel AD$ ,  $AB \perp AD$ ) вписано коло із центром у точці  $O$ . Знайдіть площу трапеції, якщо  $OC = 6$  см,  $OD = 8$  см.
- 29.22.\* У прямокутну трапецію вписано коло радіуса 12 см. Більша з бічних сторін точкою дотику ділиться на два відрізки, більший з яких дорівнює 16 см. Знайдіть площу трапеції.
- 29.23.\*\* Діагональ рівнобічної трапеції ділить висоту, проведенну з вершини тупого кута, на відрізки завдовжки 15 см і 12 см, а бічна сторона трапеції дорівнює її меншій основі. Знайдіть площу трапеції.
- 29.24.\*\* Більша діагональ прямокутної трапеції ділить висоту, проведенну з вершини тупого кута, на відрізки завдовжки 15 см і 9 см. Більша бічна сторона трапеції дорівнює її меншій основі. Знайдіть площу трапеції.
- 29.25.\*\* Діагональ рівнобічної трапеції є бісектрисою її гострого кута й перпендикулярна до бічної сторони. Знайдіть площу трапеції, якщо її менша основа дорівнює  $a$ .
- 29.26.\*\* Діагоналі трапеції перпендикулярні, одна з них дорівнює 48 см, а середня лінія трапеції — 25 см. Знайдіть площу трапеції.
- 29.27.\*\* У трапеції  $ABCD$  з основами  $BC$  і  $AD$  діагоналі перпендикулярні. Знайдіть площу трапеції, якщо діагональ  $AC$  дорівнює 20 см, а висота трапеції — 12 см.
- 29.28.\*\* Трапецію  $ABCD$  ( $BC \parallel AD$ ) вписано в коло. Точка  $O$  — центр цього кола. Знайдіть площу трапеції, якщо  $\angle BOA = 60^\circ$ , а висота трапеції дорівнює  $h$ .
- 29.29.\*\* У трапеції  $ABCD$  відомо, що  $BC \parallel AD$ , точка  $M$  — середина сторони  $AB$ . Знайдіть площу трикутника  $CMD$ , якщо площа даної трапеції дорівнює  $S$ .



- 29.30.** На відрізку, який сполучає середини основ трапеції, познали точку та сполучили її з усіма вершинами трапеції. Доведіть, що утворені трикутники, прилеглі до бічних сторін трапеції, є рівновеликими.
- 29.31.** Доведіть, що трапеція є рівноскладеною з паралелограмом, основа якого дорівнює середній лінії трапеції, а висота — висоті трапеції.
- 29.32.** Доведіть, що площа трапеції дорівнює добутку бічної сторони та перпендикуляра, опущеного на пряму, яка містить цю сторону, із середини другої бічної сторони.
- 29.33.** У чотирикутнику  $ABCD$  кути  $ABC$  і  $ADC$  прямі, а сторони  $AB$  і  $BC$  рівні (рис. 29.9). Відомо, що  $BH \perp AD$  і  $BH = 1$ . Знайдіть площу чотирикутника  $ABCD$ .

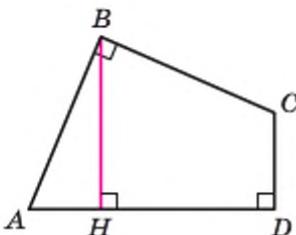


Рис. 29.9

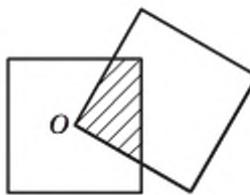


Рис. 29.10

- 29.34.** На рисунку 29.10 зображені два квадрати, сторони яких дорівнюють 1 см. Ці квадрати розміщені так, що вершина  $O$  одного квадрата є точкою перетину діагоналей другого. Чому дорівнює площа заштрихованого чотирикутника?
- 29.35.** В опуклому п'ятикутнику  $ABCDE$  відомо, що  $\angle ABC = \angle CDE = 90^\circ$ ,  $BC = CD = AE = 1$  см,  $AB + DE = 1$  см. Знайдіть площу п'ятикутника  $ABCDE$ .
- 29.36.** Кожна з п'яти прямих, які перетинають сторони  $BC$  і  $AD$  квадрата  $ABCD$ , ділить його на два чотирикутники, площи яких відносяться як  $2 : 3$ . Доведіть, що принаймні три із цих прямих проходять через одну точку.

### 30. Зовнівписане коло трикутника

Проведемо бісектриси двох зовнішніх кутів з вершинами  $A$  і  $C$  трикутника  $ABC$  (рис. 30.1). Нехай  $O$  — точка перетину цих бісектрис. Ця точка рівновіддалена від прямих  $AB$ ,  $BC$  і  $AC$ .

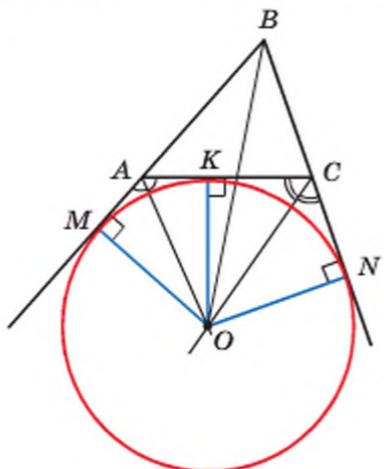


Рис. 30.1

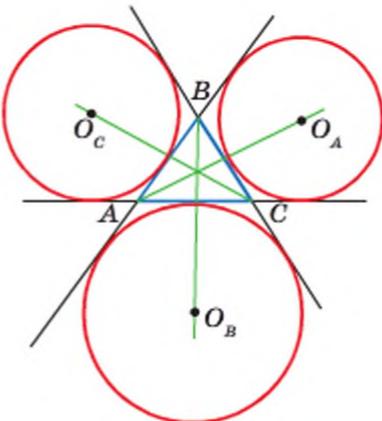


Рис. 30.2

Проведемо три перпендикуляри:  $OM \perp AB$ ,  $OK \perp AC$ ,  $ON \perp BC$ . Зрозуміло, що  $OM = OK = ON$ . Отже, існує коло із центром у точці  $O$ , яке дотикається до сторони трикутника та продовжень двох інших його сторін. Таке коло називають зовнівписаним колом трикутника  $ABC$  (рис. 30.1).

Оскільки  $OM = ON$ , то точка  $O$  належить бісектрисі кута  $ABC$ .

Очевидно, що будь-який трикутник має три зовнівписаних кола (рис. 30.2) із центрами  $O_A$ ,  $O_B$ ,  $O_C$ , які дотикаються до сторін  $a$ ,  $b$ ,  $c$  відповідно. Радіуси цих кіл позначимо відповідно  $R_A$ ,  $R_B$ ,  $R_C$ .

**Теорема 30.1.** Радіуси зовнівписаних кіл трикутника  $ABC$  можна обчислити за формулами

$$R_A = \frac{S}{p-a}, \quad R_B = \frac{S}{p-b}, \quad R_C = \frac{S}{p-c},$$

де  $S$  — площа трикутника  $ABC$ ,  $p$  — його півпериметр.

**Доведення.** Нехай зовнівписане коло із центром  $O$  трикутника  $ABC$  дотикається до його сторони  $AC$  у точці  $K$ , а до продовжень сторін  $AB$  і  $BC$  — у точках  $M$  і  $N$  відповідно (рис. 30.1). Маємо:

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{OAB} + S_{OCB} - S_{OAC} = \frac{1}{2} OM \cdot AB + \frac{1}{2} ON \cdot BC - \frac{1}{2} OK \cdot AC = \\ &= \frac{1}{2} R_B (c + a - b) = R_B \cdot \frac{a + b + c - 2b}{2} = R_B \cdot \frac{2p - 2b}{2} = R_B (p - b). \end{aligned}$$

Звідси  $R_B = \frac{S}{p-b}$ .

Аналогічно можна показати, що  $R_A = \frac{S}{p-a}$ ,  $R_C = \frac{S}{p-c}$ .  $\blacktriangle$



**Задача 1.** Зовніписане коло трикутника  $ABC$  дотикається до продовження сторони  $AB$  за точку  $A$  в точці  $M$ . Доведіть, що  $BM = p$ , де  $p$  — півпериметр трикутника  $ABC$ .

**Розв'язання.** Нехай дане зовніписане коло із центром  $O$  дотикається до сторони  $AC$  у точці  $K$ , а до продовження сторони  $BC$  — у точці  $N$  (рис. 30.1). За властивістю дотичних, проведених до кола через одну точку, маємо:  $CK = CN$ ,  $AK = AM$ . Тоді  $AC = CN + AM$ . Отже, периметр трикутника  $ABC$  дорівнює сумі  $BM + BN$ . Проте  $BM = BN$ . Тоді  $BM = BN = p$ , де  $p$  — півпериметр  $\triangle ABC$ . ▲

**Задача 2.** У трикутнику  $ABC$  з кутом  $B$ , який дорівнює  $120^\circ$ , проведено бісектриси  $AA_1$ ,  $BB_1$  і  $CC_1$ . Знайдіть кут  $A_1B_1C_1$ .

**Розв'язання.** Нехай  $\angle MBC$  — зовнішній кут трикутника  $ABC$  при вершині  $B$  (рис. 30.3). Очевидно, що  $\angle MBC = 60^\circ$ . Тоді промінь  $BA_1$  — бісектриса кута  $MBB_1$ . Отже, точка  $A_1$  — центр зовніписаного кола трикутника  $ABB_1$ . Тоді промінь  $B_1A_1$  — бісектриса кута  $BB_1C$ . Аналогічно промінь  $B_1C_1$  — бісектриса кута  $AB_1B$ .

Таким чином, кут  $A_1B_1C_1$  дорівнює половині розгорнутого кута, тобто  $\angle A_1B_1C_1 = 90^\circ$ . ▲

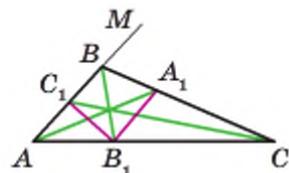


Рис. 30.3

1. Яке коло називають зовніписаним колом трикутника?  
 2. За якими формулами можна обчислити радіуси зовніписаних кіл трикутника?

**ВПРАВИ**

**30.1.** Зовніписане коло трикутника  $ABC$  дотикається до сторони  $AC$  у точці  $K$ . Доведіть, що  $KC = p - a$  і  $KA = p - c$ , де  $p$  — півпериметр трикутника  $ABC$ .

**30.2.** Дано трикутник  $ABC$ . Доведіть, що  $R_A = \frac{1}{2} (p - c) \operatorname{ctg} \frac{B}{2} = \frac{1}{2} (p - b) \times \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = p \operatorname{tg} \frac{A}{2}$ .

**30.3.** У трикутнику  $ABC$  точки  $K$  і  $L$  — точки дотику сторони  $AB$  до вписаного й зовніписаного кіл відповідно. Доведіть, що  $AL = BK$ .

- 30.4.** У трикутнику  $ABC$  радіус зовнівписаного кола, яке дотикається до сторони  $AC$ , дорівнює півпериметру даного трикутника. Доведіть, що кут  $ABC$  прямий.
- 30.5.** У трикутник зі сторонами 6 см, 10 см, 12 см вписано коло. До кола проведено дотичну так, що вона перетинає дві більші сторони трикутника. Знайдіть периметр трикутника, який дотична відтинає від даного трикутника.
- 30.6.** Позначимо через  $O_A$ ,  $O_B$  і  $O_C$  центри зовнівписаних кіл трикутника  $ABC$ , які дотикаються до сторін  $BC$ ,  $CA$  і  $AB$  відповідно. Виразіть кути трикутника  $O_AO_BO_C$  через кути трикутника  $ABC$ .
- 30.7.** У трикутник  $ABC$ , периметр якого дорівнює 20 см, вписано коло. Відрізок дотичної, проведеної до кола паралельно стороні  $AC$ , розміщений між сторонами трикутника, дорівнює 2,4 см. Знайдіть сторону  $AC$ .
- 30.8.** До кола, вписаного в трикутник, проведено три дотичні, паралельні сторонам трикутника. Ці дотичні відтинають від даного трикутника три трикутники, радіуси описаних кіл яких дорівнюють  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ . Знайдіть радіус описаного кола даного трикутника.
- 30.9.** У рівнобедрений трикутник з основою 12 см вписано коло, а до нього проведено три дотичні так, що вони відтинають від даного трикутника три трикутники по одному біля кожної вершини. Сума периметрів трьох утворених трикутників дорівнює 48 см. Знайдіть бічну сторону даного трикутника.
- 30.10.** Дано точку, яка належить куту з вершиною  $O$ , але не належить його сторонам. Проведіть через цю точку пряму так, щоби трикутник, який ця пряма відтинає від кута, мав даний периметр.
- 30.11.** Дотична до кола, вписаного в рівносторонній трикутник  $ABC$ , перетинає сторони  $AB$  і  $BC$  у точках  $M$  і  $N$  відповідно. Знайдіть площину трикутника  $MBN$ , якщо  $AB = a$ ,  $MN = b$ .
- 30.12.** Площа прямокутного трикутника дорівнює  $\frac{2}{3}r^2$ , де  $r$  — радіус зовнівписаного кола, яке дотикається до одного з катетів. Знайдіть сторони трикутника.
- 30.13.** Доведіть, що коло, яке дотикається до бічних сторін  $AB$  і  $BC$  рівнобедреного трикутника  $ABC$  у точках  $A$  і  $C$  відповідно, проходить через центр зовнівписаного кола трикутника  $ABC$ .

- 30.14.**\* Бісектриса кута  $A$  трикутника  $ABC$  перетинає його описане коло в точці  $A_1$ . Доведіть, що  $OA_1 = A_1O_A$ , де точки  $O$  і  $O_A$  — центри відповідно вписаного й зовнівписаного кіл трикутника  $ABC$ .
- 30.15.**\* На площині задано пряму, якій належать вершини  $B$  і  $C$  трикутника  $ABC$ . У різних півплощинах відносно цієї прямої позначили точки  $O$  і  $O_A$ , які є відповідно центрами вписаного кола трикутника  $ABC$  і його зовнівписаного кола, що дотикається до сторони  $BC$ . Побудуйте трикутник  $ABC$ .
- 30.16.**\* За точками  $O_A$ ,  $O_B$ ,  $O_C$ , які є центрами зовнівписаних кіл трикутника  $ABC$ , побудуйте трикутник  $ABC$ .
- 30.17.**\* Зовнівписані кола трикутника  $ABC$  дотикаються до сторін  $AB$ ,  $BC$  і  $CA$  у точках  $C_1$ ,  $A_1$  і  $B_1$  відповідно. Доведіть, що прямі  $AA_1$ ,  $BB_1$  і  $CC_1$  перетинаються в одній точці.
- 30.18.**\* Коло із центром у точці  $D$  проходить через точки  $A$ ,  $B$  і центр  $O_A$  зовнівписаного кола трикутника  $ABC$ . Доведіть, що точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  і  $D$  лежать на одному колі.
- 30.19.**\*\* У трикутнику  $ABC$  проведено бісектриси  $AK$  і  $BL$ . Знайдіть кут  $A$ , якщо промінь  $KL$  — бісектриса кута  $AKC$ .
- 30.20.**\*\* На сторонах  $BC$  і  $CD$  квадрата  $ABCD$  позначили відповідно точки  $M$  і  $N$  так, що  $\angle MNC = 2 \angle NAD$ . Знайдіть кут  $MAN$ .
- 30.21.**\*\* На сторонах  $BA$  і  $BC$  рівностороннього трикутника  $ABC$  позначили відповідно точки  $M$  і  $N$  так, що  $\angle NMA = 2 \angle NAC$ . Через точку  $B$  проведено пряму, яка паралельна стороні  $AC$  і перетинає пряму  $MN$  у точці  $K$ . Знайдіть кут  $NAK$ .
- 30.22.**\*\* У трикутнику  $ABC$  з кутом при вершині  $B$ , що дорівнює  $120^\circ$ , проведено бісектрису  $BD$ . Знайдіть відношення сторін  $AB$  і  $AC$  трикутника, якщо  $BD : DC = k$ .
- 30.23.**\* У квадраті  $ABCD$  зі стороною 1 см на сторонах  $AB$  і  $BC$  обрано відповідно точки  $P$  і  $Q$  так, що периметр трикутника  $PBQ$  дорівнює 2 см. Знайдіть кут  $PDQ$ .
- 30.24.**\* У трикутнику  $ABC$  відомо, що  $\angle B = 100^\circ$ , відрізок  $CE$  — бісектриса. На стороні  $AC$  обрано точку  $D$  так, що  $\angle DBC = 20^\circ$ . Знайдіть кут  $CED$ .
- 30.25.**\* У чотирикутнику  $ABCD$  відомо, що  $\angle A = \angle C = 60^\circ$ ,  $\angle D = 135^\circ$ ,  $\angle BDA = 90^\circ$ . У якому відношенні діагональ  $AC$  ділить діагональ  $BD$ ?

## ДРУЖИМО З КОМП'ЮТЕРОМ

У 7 класі ви вже користувалися комп'ютером під час вивчення геометрії. У 8 класі ви вивчатимете більш складні геометричні фігури, а отже, зможете вдосконалити свої вміння, опанувавши складніші інструменти графічних пакетів.

Нагадаємо, що, крім завдань, наведених у цьому розділі, ви зможете застосовувати різноманітні програми, призначені спеціально для засвоєння шкільного курсу геометрії. Ви можете звертатися до глобальної мережі Інтернет для пошуку цих програм та іншої потрібної вам інформації.

У цьому розділі наведено завдання, які ви зможете виконувати за допомогою комп'ютера в міру вивчення відповідних тем. Більшість із них — завдання на побудову геометричних фігур, для яких ви застосовуватимете певний графічний редактор. Крім цих завдань, ви можете робити рисунки до задач, зокрема розв'язувати задачі на побудову, не лише в зошиті, а й за допомогою комп'ютера. У 7 класі ви дізналися, що в геометрії побудови проводять за допомогою лінійки та циркуля. Тому для розв'язування задач на побудову вам потрібно знайти серед інструментів графічного редактора ті, що виконують функції лінійки та циркуля.

### **4. Многокутник та його елементи**

1. Побудуйте многокутники, що ілюструватимуть теоретичні відомості цього пункту.

### **5. Паралелограм. Властивості паралелограма**

2. Визначте, якими властивостями паралелограма треба скористатися, щоби правильно зобразити цю фігуру. Які інструменти графічного редактора треба для цього застосувати? Нарисуйте паралелограм і побудуйте дві його висоти, що виходять з однієї вершини. Який інструмент ви використаєте, щоб опустити висоту на задану сторону?

### **6. Ознаки паралелограма**

3. Уявіть собі, що зображено чотирикутник. У який спосіб ви можете перевірити, чи є він паралелограмом? Якими інструментами графічного редактора можна для цього скористатися?

### **8. Прямокутник. Ромб. Квадрат**

4. Знайдіть у графічному редакторі засіб, що дає змогу швидко будувати різні прямокутники; будувати квадрати. Яка властивість ромба дає змогу швидко й правильно побудувати ромб?

5. Побудуйте два перпендикулярних відрізки, що перетинаються. Уявіть собі, що вони є діагоналями чотирикутника, і побудуйте цей чотирикутник. Чи обов'язково ви отримаєте ромб? Якою умовою треба доповнити це завдання, щоб отриманий чотирикутник неодмінно виявився ромбом?

### 9. Середня лінія трикутника

6. Який інструмент графічного редактора ви використаєте, щоб знайти середину відрізка?
7. Нарисуйте довільний чотирикутник. Виконайте побудову, яка проілюструє ключову задачу 1 п. 9. Як ви перевірите, що відрізки, які сполучають середини сторін даного чотирикутника, утворили паралелограм?

### 10. Трапеція

8. Побудуйте трапецію. Якими інструментами графічного редактора ви скористаєтесь, щоб забезпечити паралельність сторін трапеції? щоби побудувати рівнобічну трапецію? щоби побудувати прямокутну трапецію?

### 11. Центральні та вписані кути

9. Нарисуйте коло та побудуйте кілька вписаних кутів, які спираються на одну й ту саму дугу. Користуючись інструментами графічного редактора, визначте їхні градусні міри.
10. Нарисуйте коло, побудуйте центральний і вписаний кути, які спираються на одну й ту саму дугу. Перевірте, як співвідносяться величини цих кутів.

### 14. Описані чотирикутники

11. Знайдіть оптимальний спосіб побудови рисунків, на яких мають бути зображені коло, вписані в коло та описані навколо кола чотирикутники. Яка властивість дотичної до кола дає змогу правильно зобразити описаний чотирикутник?

### 15. Теорема Фалеса. Теорема про пропорційні відрізки

12. Побудуйте рисунки, що ілюструють теорему Фалеса та теорему про пропорційні відрізки. Вимірте довжини потрібних відрізків і перевірте, чи виконуються для них твердження цих теорем. Наскільки точно можна виміряти відрізки засобами графічного редактора, яким ви користуєтесь?
13. Уявіть собі, що у вашому графічному редакторі немає інструмента, який дає змогу будувати паралельні прямі. Як ви можете побудувати паралельні прямі, спираючись на теорему Фалеса?

## 16. Теорема про медіані трикутника.

### Теорема про бісектрису трикутника

14. Придумайте та продемонструйте спосіб побудови бісектриси трикутника за відсутності засобів поділу кута навпіл і вимірювання його величини.

## 17. Подібні трикутники

15. Опануйте інструменти графічного редактора, які дають змогу зображати фігури, що мають однакову форму, але різні розміри. Побудуйте за допомогою цих інструментів подібні трикутники.
16. Побудуйте графічну ілюстрацію до леми про подібні трикутники. Користуючись зазначеними інструментами, покажіть, що зображені трикутники справді є подібними.

## 18. Перша ознака подібності трикутників

17. Побудуйте два відрізки різної довжини. Уявіть собі, що це відповідні сторони подібних трикутників. Узявші перший із цих відрізків як сторону, побудуйте довільний трикутник. Побудуйте подібний йому трикутник, узявші другий відрізок як його сторону; застосуйте для цього першу ознаку подібності трикутників.

## 19. Теорема Менелая. Теорема Чеві

18. Побудуйте довільний трикутник і проілюструйте твердження задачі 19.16.

## 21. Друга та третя ознаки подібності трикутників

19. Придумайте самостійно та виконайте завдання, яке дало б змогу за допомогою комп’ютера продемонструвати другу та третю ознаки подібності трикутників.

## 22. Метричні співвідношення в прямокутному трикутнику

20. Побудуйте прямокутний трикутник та опустіть висоту на гіпотенузу. Переконайтесь, що виконується лема п. 22.

## 23. Теорема Піфагора

21. Часто теорему Піфагора ілюструють, побудувавши квадрати на сторонах прямокутного трикутника. Багато поколінь школярів називають цей рисунок «Піфагорові штані» й формулюють теорему в жартівлівій формі: «Піфагорові штані на всі сторони рівні». Побудуйте цей рисунок.
22. Чи є в графічному редакторі інструмент для розрізання фігури на частини, якими надалі можна оперувати окремо?
23. Розрізавши на частини квадрати, побудовані на катетах, можна скласти із цих частин квадрат, побудований на гіпотенузі.

Для довільного трикутника пошук таких частин — задача непроста. А ось для рівнобедреного трикутника знайти такий спосіб розрізання досить легко. Які це частини? Побудуйте рівнобедрений прямокутний трикутник. Створіть такий набір фігур, щоб, переміщуючи їх, можна було скласти або квадрат, побудований на гіпотенузі, або два квадрати, побудовані на катетах.

#### **24. Тригонометричні функції гострого кута прямокутного трикутника**

24. Опануйте інструменти калькулятора, які дають змогу знаходити тригонометричні функції гострого кута трикутника.
25. Знайдіть інструменти для знаходження тригонометричних функцій у мові програмування, яку ви вивчаєте.

#### **25. Розв'язування прямокутних трикутників**

26. Під час розв'язування задач цього пункту користуйтесь калькулятором для обчислень.

#### **26. Поняття площини многокутника. Площа прямокутника**

27. Побудуйте квадрат і візьміть його за одиничний. Скопіюйте його кілька разів. З отриманих одиничних квадратів складіть кілька різних рівновеликих прямокутників.

#### **27. Площа паралелограма**

28. Створіть набір фігур, за допомогою яких можна проілюструвати доведення теореми про площину паралелограма. Якою властивістю площини многокутника ми при цьому користуємося?
29. Теорема 27.1 є справедливою незалежно від того, яку зі сторін паралелограма з опущеною на неї висотою вибрати для обчислення площини. Створіть набір фігур, за допомогою яких можна проілюструвати це твердження.

#### **28. Площа трикутника**

30. Створіть набори фігур, за допомогою яких можна проілюструвати доведення тверджень теоретичної частини цього пункту.

#### **29. Площа трапеції. Рівноскладені многокутники**

31. Побудуйте довільну трапецію. Розріжте її на частини так, щоби показати, що формула для обчислення площини трапеції є правильною.

#### **30. Зовнівписане коло трикутника**

32. Побудуйте прямокутний і гострокутний трикутники. Для кожного з них побудуйте всі його зовнівписані кола.

## ВІДОМОСТІ З КУРСУ ГЕОМЕТРІЇ 7 КЛАСУ

### Найпростіші геометричні фігури та їхні властивості

#### 1. Точки та прямі

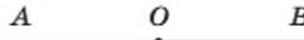
- ✓ *Основна властивість прямої.* Через будь-які дві точки можна провести пряму і до того ж тільки одну.
- ✓ Дві прямі, які мають спільну точку, називають такими, що перетинаються.
- ✓ Будь-які дві прямі, що перетинаються, мають тільки одну спільну точку.

#### 2. Відрізок і його довжина

- ✓ Точки  $A$  і  $B$  прямої  $a$  (рис. 1) обмежують частину прямої, яку разом з точками  $A$  і  $B$  називають відрізком, а точки  $A$  і  $B$  — кінцями цього відрізка.



**Рис. 1**



**Рис. 2**

- ✓ Два відрізки називають рівними, якщо їх можна сумістити накладанням.
- ✓ Рівні відрізки мають рівні довжини, і навпаки, якщо довжини відрізків рівні, то рівні й самі відрізки.
- ✓ *Основна властивість довжини відрізка.* Якщо точка  $C$  є внутрішньою точкою відрізка  $AB$ , то відрізок  $AB$  дорівнює сумі відрізків  $AC$  і  $CB$ , тобто  $AB = AC + CB$ .
- ✓ Відстанню між точками  $A$  і  $B$  називають довжину відрізка  $AB$ . Якщо точки  $A$  і  $B$  збігаються, то вважають, що відстань між ними дорівнює нулю.
- ✓ Якщо точка  $C$  не належить відрізку  $AB$ , то  $AB < AC + CB$ .
- ✓ Якщо три точки  $A$ ,  $B$  і  $C$  такі, що виконується рівність  $AB = AC + CB$ , то точка  $C$  є внутрішньою точкою відрізка  $AB$ .

### 3. Промінь. Кут

- ✓ Точка  $O$  прямої  $AB$  (рис. 2) розбиває пряму на дві частини, кожну з яких разом з точкою  $O$  називають променем або півпрямою. Точку  $O$  називають початком променя.
- ✓ Два промені, які мають спільний початок і лежать на одній прямій, називають доповняльними.
- ✓ Два промені  $OA$  та  $OB$ , що мають спільний початок (рис. 3), розбивають площину на дві частини, кожну з яких разом із променями  $OA$  та  $OB$  називають кутом. Промені  $OA$  та  $OB$  називають сторонами кута, а точку  $O$  — вершиною кута.

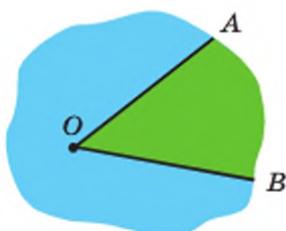


Рис. 3

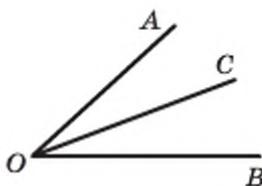


Рис. 4

- ✓ Кут, сторонами якого є доповняльні промені, називають розгорнутим.
- ✓ Два кути називають рівними, якщо їх можна сумістити накладанням.
- ✓ Бісектрисою кута називають промінь з початком у вершині кута, який ділить цей кут на два рівних кути.

### 4. Вимірювання кутів

- ✓ Кожний кут має певну величину (градусну міру).
- ✓ Кут, градусна міра якого дорівнює  $90^\circ$ , називають прямим. Кут, градусна міра якого менша від  $90^\circ$ , називають гострим. Кут, градусна міра якого більша за  $90^\circ$ , але менша від  $180^\circ$ , називають тупим.
- ✓ Рівні кути мають рівні величини, і навпаки, якщо величини кутів рівні, то рівні й самі кути.
- ✓ Основна властивість величини кута. Якщо промінь  $OC$  ділить кут  $AOB$  на два кути  $AOC$  і  $COB$  (рис. 4), то  $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$ .

## 5. Суміжні та вертикальні кути

- ✓ Два кути називають суміжними, якщо в них одна сторона спільна, а дві інші є доповнельними променями.
- ✓ Сума суміжних кутів дорівнює  $180^\circ$ .
- ✓ Два кути називають вертикальними, якщо сторони одного кута є доповнельними променями сторін другого.
- ✓ Вертикальні кути рівні.

## 6. Перпендикулярні прямі. Серединний перпендикуляр

- ✓ Дві прямі називають перпендикулярними, якщо при їхньому перетині утворився прямий кут.
- ✓ Неперпендикулярні прямі при перетині утворюють пару рівних гострих кутів і пару рівних тупих кутів. Величину гострого кута називають кутом між неперпендикулярними прямими.
- ✓ Якщо прямі перпендикулярні, то вважають, що кут між ними дорівнює  $90^\circ$ .
- ✓ Два відрізки називають перпендикулярними, якщо вони лежать на перпендикулярних прямих.
- ✓ На рисунку 5 зображено пряму  $a$  та перпендикулярний до неї відрізок  $AB$ , кінець  $B$  якого належить прямій  $a$ . У такому випадку говорять, що з точки  $A$  на пряму  $a$  опущено перпендикуляр  $AB$ . Точку  $B$  називають основою перпендикуляра  $AB$ .
- ✓ Довжину перпендикуляра  $AB$  називають відстанню від точки  $A$  до прямої  $a$ . Якщо точка  $A$  належить прямій  $a$ , то вважають, що відстань від точки  $A$  до прямої  $a$  дорівнює нулю.
- ✓ Опустимо з точки  $A$  на пряму  $a$  перпендикуляр  $AB$  (рис. 6). Нехай  $X$  — довільна точка прямої  $a$ , відмінна від точки  $B$ . Відрізок  $AX$  називають похилою, проведеною з точки  $A$  до прямої  $a$ .

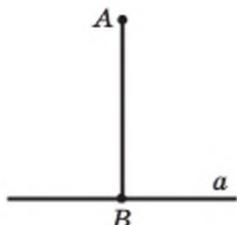


Рис. 5

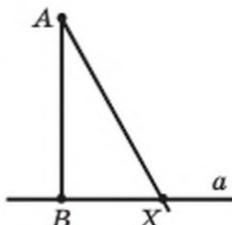


Рис. 6

- ✓ Через дану точку проходить тільки одна пряма, перпендикулярна до даної.
- ✓ Пряму, яка перпендикулярна до відрізка та проходить через його середину, називають серединним перпендикуляром відрізка.
- ✓ Кожна точка серединного перпендикуляра відрізка рівно-віддалена від кінців цього відрізка.
- ✓ Якщо точка рівновіддалена від кінців відрізка, то вона належить серединному перпендикуляру цього відрізка.

## Трикутники

### 7. Трикутник і його елементи. Рівні трикутники

- ✓ Три точки  $A$ ,  $B$  і  $C$ , які не лежать на одній прямій, сполучено відрізками (рис. 7). Утворена фігура обмежує частину площини, яку разом з відрізками  $AB$ ,  $BC$  і  $CA$  називають трикутником. Точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  називають вершинами, а відрізки  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  — сторонами трикутника. Трикутник називають і позначають за його вершинами.
- ✓ У трикутнику  $ABC$  кут  $B$  називають кутом, протилежним стороні  $AC$ , а кути  $A$  і  $C$  — кутами, прилеглими до сторони  $AC$ .
- ✓ Периметром трикутника називають суму довжин усіх його сторін.
- ✓ Трикутник називають гострокутним, якщо всі його кути гострі; прямокутним, якщо один із його кутів прямий; тупокутним, якщо один із його кутів тупий.
- ✓ Сторону прямокутного трикутника, протилежну прямому куту, називають гіпотенузою, а сторони, прилеглі до прямого кута, — катетами.
- ✓ *Нерівність трикутника.* Кожна сторона трикутника менша від суми двох інших його сторін.
- ✓ Два трикутники називають рівними, якщо їх можна сумістити накладанням. Ті пари сторін і кутів, які суміщаються при накладанні рівних трикутників, називають відповідними сторонами й відповідними кутами.
- ✓ У трикутнику проти рівних сторін лежать рівні кути.

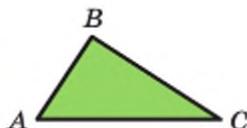


Рис. 7

- ✓ У трикутнику проти рівних кутів лежать рівні сторони.
- ✓ У трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, і навпаки, проти більшого кута лежить більша сторона.

## 8. Висота, медіана, бісектриса трикутника

- ✓ Перпендикуляр, опущений з вершини трикутника на пряму, яка містить протилежну сторону, називають висотою трикутника.
- ✓ Відрізок, який сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони, називають медіаною трикутника.
- ✓ Відрізок бісектриси кута трикутника, який сполучає вершину трикутника з точкою протилежної сторони, називають бісектрисою трикутника.

## 9. Ознаки рівності трикутників

- ✓ *Перша ознака рівності трикутників: за двома сторонами та кутом між ними.* Якщо дві сторони та кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам та куту між ними другого трикутника, то такі трикутники рівні.
- ✓ *Друга ознака рівності трикутників: за стороною та двома прилеглими до неї кутами.* Якщо сторона та два прилеглих до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні та двом прилеглим до неї кутам другого трикутника, то такі трикутники рівні.
- ✓ *Третя ознака рівності трикутників: за трьома сторонами.* Якщо три сторони одного трикутника дорівнюють відповідно трьом сторонам другого трикутника, то такі трикутники рівні.

## 10. Рівнобедрений трикутник та його властивості. Рівносторонній трикутник

- ✓ Трикутник, у якого дві сторони рівні, називають рівнобедреним.
- ✓ Рівні сторони рівнобедреного трикутника називають бічними сторонами, а третю сторону — основою рівнобедреного трикутника.

- ✓ Вершиною рівнобедреного трикутника називають спільну точку його бічних сторін.
- ✓ У рівнобедреному трикутнику:
  - 1) кути при основі рівні;
  - 2) бісектриса трикутника, проведена до його основи, є медіаною та висотою трикутника.
- ✓ Трикутник, у якого всі сторони рівні, називають рівностороннім.
- ✓ У рівносторонньому трикутнику:
  - 1) усі кути рівні;
  - 2) бісектриса, висота й медіана, проведені з однієї вершини, збігаються.

## 11. Ознаки рівнобедреного трикутника

- ✓ Якщо в трикутнику два кути рівні, то цей трикутник рівнобедрений.
- ✓ Якщо медіана трикутника є його висотою, то цей трикутник рівнобедрений.
- ✓ Якщо бісектриса трикутника є його висотою, то цей трикутник рівнобедрений.
- ✓ Якщо медіана трикутника є його бісектрисою, то цей трикутник рівнобедрений.

## Паралельні прямі. Сума кутів трикутника

## 12. Паралельні прямі

- ✓ Дві прямі називають паралельними, якщо вони не перетинаються.
- ✓ Основна властивість паралельних прямих (*аксіома паралельності прямих*). Через точку, яка не лежить на даній прямій, проходить тільки одна пряма, паралельна даній.
- ✓ Дві прямі, які перпендикулярні до третьої прямої, паралельні.
- ✓ Якщо дві прямі паралельні третій прямій, то вони паралельні.
- ✓ Відстанню між двома паралельними прямими називають відстань від будь-якої точки однієї з прямих до другої прямої.

### 13. Ознаки паралельності двох прямих

- ✓ Якщо дві прямі  $a$  і  $b$  перетнути третьою прямою  $c$ , то утвориться вісім кутів (рис. 8). Пряму  $c$  називають січною прямих  $a$  і  $b$ .

Кути 3 і 6, 4 і 5 називають односторонніми.

Кути 3 і 5, 4 і 6 називають різносторонніми.

Кути 6 і 2, 5 і 1, 3 і 7, 4 і 8 називають відповідними.

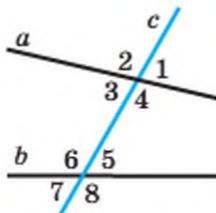


Рис. 8

- ✓ Якщо різносторонні кути, утворені при перетині двох прямих січною, рівні, то прямі паралельні.
- ✓ Якщо сума односторонніх кутів, утворених при перетині двох прямих січною, дорівнює  $180^\circ$ , то прямі паралельні.
- ✓ Якщо відповідні кути, утворені при перетині двох прямих січною, рівні, то прямі паралельні.

### 14. Властивості паралельних прямих

- ✓ Якщо дві паралельні прямі перетинаються січною, то:
- кути, які утворюють пару різносторонніх кутів, рівні;
  - кути, які утворюють пару відповідних кутів, рівні;
  - сума кутів, які утворюють пару односторонніх кутів, дорівнює  $180^\circ$ .
- ✓ Якщо пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна й до другої.

### 15. Сума кутів трикутника. Зовнішній кут трикутника

- ✓ Сума кутів трикутника дорівнює  $180^\circ$ .
- ✓ Серед кутів трикутника принаймні два кути гострі.
- ✓ Зовнішнім кутом трикутника називають кут, суміжний із кутом цього трикутника.
- ✓ Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох кутів трикутника, не суміжних з ним.
- ✓ Зовнішній кут трикутника більший за кожний із кутів трикутника, не суміжних з ним.

## 16. Ознаки рівності прямокутних трикутників

- ✓ *Ознака рівності прямокутних трикутників за гіпотенузою та катетом.* Якщо гіпотенуза та катет одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі та катету другого, то такі трикутники рівні.
- ✓ *Ознака рівності прямокутних трикутників за двома катетами.* Якщо катети одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катетам другого, то такі трикутники рівні.
- ✓ *Ознака рівності прямокутних трикутників за катетом і прилеглим гострим кутом.* Якщо катет і прилеглий до нього гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету й прилеглому до нього гострому куту другого, то такі трикутники рівні.
- ✓ *Ознака рівності прямокутних трикутників за катетом і протилежним гострим кутом.* Якщо катет і протилежний йому гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету й протилежному йому гострому куту другого, то такі трикутники рівні.
- ✓ *Ознака рівності прямокутних трикутників за гіпотенузою та гострим кутом.* Якщо гіпотенуза та гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі та гострому куту другого, то такі трикутники рівні.

## 17. Властивості прямокутного трикутника

- ✓ У прямокутному трикутнику гіпотенуза більша за катет.
- ✓ Катет, який лежить проти кута, величина якого дорівнює  $30^\circ$ , дорівнює половині гіпотенузи.
- ✓ Якщо катет дорівнює половині гіпотенузи, то кут, що лежить проти цього катета, дорівнює  $30^\circ$ .

## Коло та круг

## 18. Геометричне місце точок

- ✓ Геометричним місцем точок (ГМТ) називають множину всіх точок, які мають певну властивість.
- ✓ Серединний перпендикуляр відрізка є геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців цього відрізка.

- ✓ Бісектриса кута є геометричним місцем точок, які належать куту й рівновіддалені від його сторін.

## 19. Коло та круг, їхні елементи

- ✓ Колом називають геометричне місце точок, відстані від яких до заданої точки дорівнюють даному додатному числу. Задану точку називають центром кола.
- ✓ Будь-який відрізок, що сполучає точку кола з його центром, називають радіусом кола.
- ✓ Відрізок, який сполучає дві точки кола, називають хордою кола. Хорду, яка проходить через центр кола, називають діаметром.
- ✓ Діаметр кола вдвічі більший за його радіус.
- ✓ Кругом називають геометричне місце точок, відстані від яких до заданої точки не більші за дане додатне число. Задану точку називають центром круга. Радіус кола, яке обмежує круг, називають радіусом круга. Якщо  $X$  — довільна точка круга із центром  $O$  та радіусом  $R$ , то  $OX \leq R$ . Коло, яке обмежує круг, йому належить.
- ✓ Хорда й діаметр круга — це хорда й діаметр кола, яке обмежує круг.

## 20. Властивості кола

- ✓ Діаметр кола, перпендикулярний до хорди, ділить цю хорду навпіл.
- ✓ Діаметр кола, який ділить хорду, відмінну від діаметра, навпіл, перпендикулярний до цієї хорди.

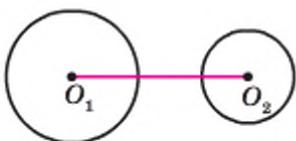
## 21. Взаємне розміщення прямої та кола. Дотична до кола

- ✓ Пряма та коло можуть не мати спільних точок, мати дві спільні точки або мати одну спільну точку.
- ✓ Пряму, яка має з колом тільки одну спільну точку, називають дотичною до кола.
- ✓ Дотична до кола перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.
- ✓ Якщо пряма, яка проходить через точку кола, перпендикулярна до радіуса, проведеного в цю точку, то ця пряма є дотичною до даного кола.

- ✓ Якщо відстань від центра кола до деякої прямої дорівнює радіусу кола, то ця пряма є дотичною до даного кола.
- ✓ Якщо через точку до кола проведено дві дотичні, то відрізки дотичних, які сполучають дану точку з точками дотику, рівні.

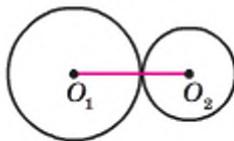
## 22. Взаємне розміщення двох кіл

- ✓ Два кола можуть не мати спільних точок, мати одну спільну точку або мати дві спільні точки.  
Нехай  $R_1$  і  $R_2$  — радіуси даних кіл,  $d$  — відстань між їхніми центрами.
- ✓ Якщо  $d > R_1 + R_2$ , то кола не мають спільних точок (рис. 9).
- ✓ Якщо  $d = R_1 + R_2$ , то кола мають одну спільну точку (рис. 10). У цьому випадку кажуть, що кола мають зовнішній дотик.



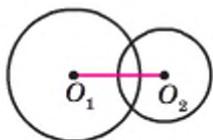
$$d > R_1 + R_2$$

Рис. 9



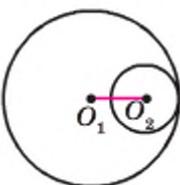
$$d = R_1 + R_2$$

Рис. 10



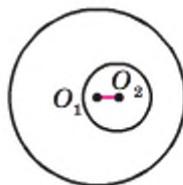
$$R_1 - R_2 < d < R_1 + R_2$$

Рис. 11



$$d = R_1 - R_2$$

Рис. 12



$$d < R_1 - R_2$$

Рис. 13

- ✓ Якщо  $R_1 - R_2 < d < R_1 + R_2$ , то кола мають дві спільні точки (рис. 11).
- ✓ Якщо  $d = R_1 - R_2$ , то кола мають одну спільну точку (рис. 12). У цьому випадку кажуть, що кола мають внутрішній дотик.
- ✓ Якщо  $d < R_1 - R_2$ , то кола не мають спільних точок (рис. 13).

### 23. Описане та вписане кола трикутника

- ✓ Коло називають описаним навколо трикутника, якщо воно проходить через усі його вершини.

На рисунку 14 зображене коло, описане навколо трикутника. У цьому разі також говорять, що трикутник вписаний у коло.

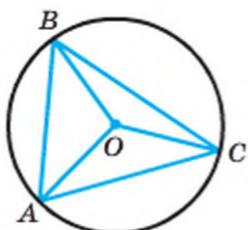


Рис. 14

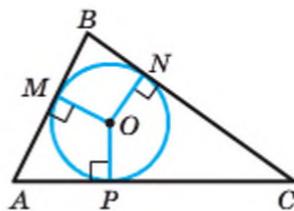


Рис. 15

- ✓ Центр описаного кола трикутника рівновіддалений від усіх його вершин.
- ✓ Навколо будь-якого трикутника можна описати коло. Центр кола, описаного навколо трикутника — це точка перетину серединних перпендикулярів сторін трикутника.
- ✓ Серединні перпендикуляри сторін трикутника перетинаються в одній точці.
- ✓ Коло називають вписаним у трикутник, якщо воно дотикається до всіх його сторін.

На рисунку 15 зображене коло, вписане в трикутник. У цьому разі також говорять, що трикутник описаний навколо кола.

- ✓ Центр вписаного кола трикутника рівновіддалений від усіх його сторін.
- ✓ У будь-який трикутник можна вписати коло. Центр кола, вписаного в трикутник, — це точка перетину бісектрис трикутника.
- ✓ Бісектриси трикутника перетинаються в одній точці.
- ✓ Радіус кола, вписаного в прямокутний трикутник, обчислюють за формулою  $r = \frac{a+b-c}{2}$ , де  $r$  — радіус вписаного кола,  $a$  і  $b$  — катети,  $c$  — гіпотенуза.

## ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ ДО ВПРАВ

**1.8.** 3 см. **1.10. 2)** *Вказівка.* Доведіть, що  $\angle AOM = \angle BOK$ .

Кут  $AOB$  — розгорнутий. Тоді  $\angle AOM + \angle MOB = 180^\circ$ . Звідси  $\angle MOB + \angle BOK = 180^\circ$ .

**1.12.** 26 см або 14 см. **1.13. Вказівка.**

Доведіть рівність трикутників  $AKH$  і  $CMH$ .

**1.14.** Ні. **1.15.** 2 см. *Вказівка.* Доведіть, що трикутники  $KMC$  і  $KDA$  рівнобедрені.

**1.16.** 8 см. **1.17. Вказівка.** Зауважимо, що вказані медіана та бісектриса не можуть виходити з однієї вершини, оскільки тоді кут при цій вершині був би більшим за  $180^\circ$ . Нехай у трикутнику  $ABC$  бісектриса  $AD$  і медіана  $CE$  перетинаються в точці  $F$ . Тоді  $AF$  — бісектриса та висота трикутника  $ACE$ , отже, цей трикутник рівнобедрений ( $AC = AE$ ), а оскільки  $CE$  — медіана, то  $AB = 2AE = 2AC$ .

**1.18.** 2 см, 3 см, 4 см. *Вказівка.* Відрізок  $BD$  — бісектриса трикутника  $ABC$  (див. рисунок), відрізок  $CE$  — його медіана,  $BD \perp CE$ .

Доведіть, що трикутник  $CBE$  рівнобедрений ( $BC = BE$ ).

Тоді  $AB = 2BC$  і можуть мати місце такі випадки:  $AB - BC = 1$  см або

$AB - BC = 2$  см, тобто  $BC = 1$  см або  $BC = 2$  см. **1.19. Вказівка.**

Трикутники  $ACG$  і  $BEG$  (див. рисунок) рівні за стороною та двома прилеглими кутами. Отже,  $\angle AGC = \angle BFE$  і  $AG = BF$ .

**2.2.**  $35^\circ, 35^\circ, 110^\circ$ .

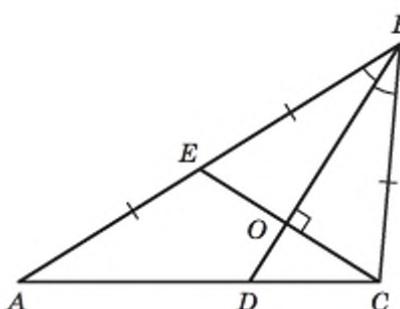


Рис. 1.18

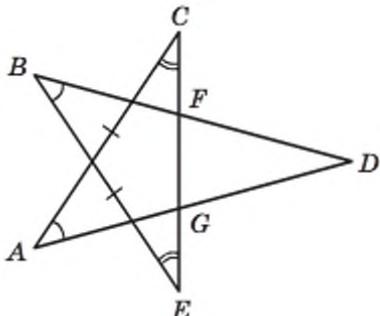


Рис. 1.19

**2.6.**  $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ . **2.7.** 15 см. **2.10. Вказівка.** Проведіть через точку  $C$  пряму, паралельну прямій  $AB$ .

**2.11. Вказівка.** Доведіть, що трикутники  $AMO$  і  $CKO$  рівнобедрені.

**2.12.**  $45^\circ$ . **2.14.**  $36^\circ, 72^\circ, 72^\circ$  або

$90^\circ, 45^\circ, 45^\circ$ . **2.16.** 8 см. **2.17.**  $45^\circ$ . *Вказівка.* Нехай точка  $D$  — основа висоти, опущеної з вершини  $A$  на сторону  $BC$ . Доведіть, що

$\angle HCB = \angle DAB$  і  $\Delta CHD = \Delta ABD$ . Звідси  $CD = AD$ .

**2.18.**  $72^\circ, 72^\circ, 36^\circ$ .

**2.20. Вказівка.** Відкладіть на стороні  $AC$  відрізок  $DC = CM$ . Маємо:  $DC = CM = BC$ .

**2.22.  $90^\circ, 40^\circ, 50^\circ$ . Вказівка.** Розгляньте трикутник  $DAK$ , де точка  $K$  — середина сторони  $AB$ .

**2.23.  $60^\circ$ .** **2.24.  $15^\circ, 75^\circ$ . Вказівка.** Із вершини прямого кута проведіть медіану.

**2.26. Вказівка.** Доведіть, що  $CM$  — бісектриса кута  $ACH$ .

**2.27.  $30^\circ$  і  $60^\circ$ . Вказівка.** На продовженні сторони  $AB$  за точку  $A$  відкладіть відрізок  $AF = AC$ .

Тоді  $\angle CFA = \angle ABC$ .

**2.28. 4 см. Вказівка.** На стороні  $AB$  позначте точку  $D$  таку, що  $BD = BC$ .

Нехай  $CE$  — бісектриса кута  $C$ . Доведіть, що трикутники  $ADC$  і  $DCE$  рівнобедрені.

**2.29. 2 см. Вказівка.** На стороні  $AC$  позначте точку  $F$  таку, що  $DF \parallel CB$ . Доведіть, що  $CF = DF = FE = 1$  см.

**2.30. Вказівка.** На сторонах  $AB$  і  $AC$  позначте відповідно точки  $M$  і  $N$  такі, щоб  $BC = MC = MN$ .

Покажіть, що точки  $M$  і  $Q$  збігаються.

**2.31. Вказівка.** 1) На стороні  $AB$  позначте точку  $E$  таку, що  $AE = AC$ . Доведіть, що  $BE > CE > AC$ . 2) Побудуйте трикутники  $ABA_1$  і  $CBC_1$ , рівні трикутнику  $ABC$ , як показано на рисунку.

Тоді  $A_1C_1 = AB$ .

**2.32.  $70^\circ$ . Вказівка.** Побудуйте рівносторонній трикутник  $AMC$  так, щоб точка  $M$  належала трикутнику  $ABC$ , і доведіть, що  $\Delta AMB = \Delta CDB$ .

**2.33.  $60^\circ, 60^\circ, 60^\circ$ . Вказівка.** На промені  $AD$  позначте точку  $K$  так, щоб  $AK = AB$ . Доведіть, що  $\Delta BKD = \Delta BAC$ .

**2.34. Вказівка.** На сторонах  $AB$  і  $CB$  відповідно позначте точки  $F$  і  $K$  так, щоб  $DF \parallel BC$  і  $CK = AD$ . Доведіть, що  $\Delta FAD = \Delta DKC$ . Далі покажіть, що трикутник  $BDK$  рівнобедрений.

**3.2.  $50^\circ, 55^\circ, 75^\circ$ . Вказівка.** Дві прямі, які складаються з бісектрис чотирьох кутів, утворених при перетині даних прямих.

**3.9. Пара паралельних прямих,** кожна з яких віддалена від даної прямої на дану відстань.

**3.10. Усі точки площини,** за винятком даної прямої.

**3.11. Вказівка.** Розглянувши трикутник  $OAK$ , доведіть, що  $OK = 2AK$ .

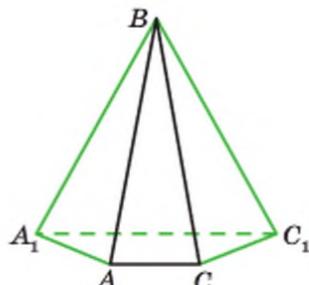
**3.12. Вказівка.** Скористайтеся властивістю відрізків дотичних, проведених до кола з однієї точки.

**3.16.  $30^\circ, 60^\circ$ .** **3.17.  $45^\circ, 45^\circ$ .** **3.22. Вказівка.** Побудуйте прямокутний трикутник, один із катетів якого дорівнює різниці даного катета й радіуса вписаного кола, а другий — радіусу.

Тоді протилежним другому катету буде кут, що дорівнює половині гострого кута шуканого трикутника.

**3.24. Вказівка.** Побудуйте коло, що проходить через три задані точки.

**3.25. Вказівка.** Геометричним місцем центрів кіл, що дотикаються до даної прямої в даній точці  $B$ ,



До задачі 2.31 (2)

є пряма, яка перпендикулярна до даної і проходить через цю точку (дана точка  $B$  не належить ГМТ). Геометричним місцем центрів кіл, що проходять через точки  $A$  і  $B$ , є серединний перпендикуляр відрізка  $AB$ .

**3.27. Вказівка.** Скористайтеся твердженням ключової задачі 3.13. **3.29.** Усі точки півплощини, якій належить точка  $B$  і межею якої є серединний перпендикуляр відрізка  $AB$ , за винятком межі цієї півплощини. **3.30. Вказівка.** Скористайтеся тим, що бісектриси трикутника, зокрема трикутника  $AMC$ , перетинаються в одній точці. **3.31. Вказівка.** Позначте на різних сторонах кута точки  $M$  і  $N$ . Проведіть бісектриси кутів  $BMN$  і  $BNM$ . Далі позначте на різних сторонах кута точки  $E$  і  $F$ . Проведіть бісектриси кутів  $BEF$  і  $BFE$ . **3.32.  $36^\circ, 36^\circ, 108^\circ$ .** **3.33. Вказівка.** Побудуйте прямокутний трикутник  $BCD$ , у якому катет  $BC$  дорівнює даному катету, а катет  $DC$  — сумі гіпотенузи та другого катета. Тоді вершина  $A$  шуканого трикутника  $ABC$  належить серединному перпендикуляру відрізка  $BD$ .

**3.34. Вказівка.** Побудуйте трикутник  $ADB$ , у якому  $\angle D = 135^\circ$ , сторона  $DB$  дорівнює різниці даних катетів, а сторона  $AB$  — даній гіпотенузі. **3.35. Вказівка.** Побудуйте трикутник  $ADC$ , у якому сторона  $AC$  дорівнює даній стороні, сторона  $DC$  — сумі двох інших сторін, кут  $DCA$  — даному куту.

**3.36. Вказівка.** Побудуйте трикутник  $ADC$ , у якому  $\angle D = 90^\circ + \frac{\beta}{2}$ , де  $\beta$  — даний кут, сторона  $AC$  дорівнює даній стороні, сторона  $AD$  — даній різниці двох інших сторін. Тоді шукана вершина  $D$  лежить на серединному перпендикулярі відрізка  $DC$ .

**3.38. Вказівка.** Побудуйте прямокутний трикутник  $BDM$ , у якому гіпотенуза  $BM$  дорівнює даній медіані, катет  $BD$  — даній висоті. Тоді центр описаного кола шуканого трикутника лежить на прямій, яка перпендикулярна до відрізка  $DM$  і проходить через точку  $M$ .

**3.39. Вказівка.** Побудуйте трикутник  $ABD$ , у якому сторони  $AB$  і  $AD$  дорівнюють двом даним сторонам, а сторона  $BD$  удвічі більша за дану медіану.

**3.40. Вказівка.** Доведіть, що трикутники  $ACM$  і  $BCK$  рівнобедрені.

**3.41. Вказівка.** Скористайтеся твердженням ключової задачі 3.13.

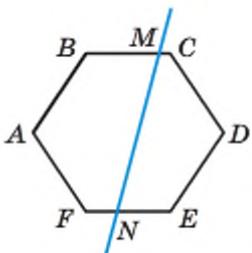
**4.10. 1)  $72^\circ, 130^\circ, 78^\circ, 80^\circ$ ; 2)  $22^\circ, 230^\circ, 28^\circ, 80^\circ$ .**

**4.12. 10 см.** **4.14. П'ятикутник.**

**4.15. Вказівка.** Нехай  $ABCDEF$  — шестикутник, кожний кут якого дорівнює  $120^\circ$ . Якщо провести січну  $MN$  (див. рисунок), то сума кутів п'ятикутника  $ABMNF$  дорівнюватиме  $540^\circ$ .

Тоді сума кутів  $BMN$  і  $FNM$  дорівнює  $180^\circ$ .

**До задачі 4.15**



**4.18. Вказівка.** Побудуйте трикутник за двома сусідніми сторонами чотирикутника та відомим кутом між ними. Третя сторона цього трикутника є діагональю шуканого чотирикутника. **4.21. 7. Вказівка.** Доведіть, що даний зовнішній кут дорівнює  $90^\circ$ .

**4.22. Ні.** **Вказівка.**  $180^\circ (17 - 2) > 14 \cdot 180^\circ$ .

**4.25. Вказівка.** Побудуйте трикутник  $ABC$

за двома сторонами  $AB$  і  $BC$  та кутом  $B$  між ними. У трикутнику  $ACD$  відомо сторону  $AC$ , прилеглий кут  $CAD$  ( $\angle CAD = \angle BAD - \angle BAC$ ) і суму сторін  $AD$  і  $CD$ . Побудуйте трикутник  $ADC$  за стороною, прилеглим кутом і сумою двох інших його сторін. **4.26. Вказівка.**

Доведіть, що  $\Delta AKC = \Delta BKD$ . **4.27. 180°.** **4.28. Вказівка.** Нехай  $K$  — точка перетину прямих  $BC$  і  $AD$ . Доведіть, що відрізок  $MN$  належить бісектрисі кута  $AKB$ . окремо розгляньте випадок, коли  $BC \parallel AD$ . **4.29. Вказівка.** Через довільну точку площини проведіть 19 прямих, кожна з яких паралельна одній із сторін 19-кутника. Доведіть, що знайдуться дві прямі, які збігаються. **4.30. 6. Вказівка.** Кожний зовнішній кут многокутника дорівнює  $60^\circ$  або  $120^\circ$ .

**4.31. Вказівка.** Будь-який трикутник можна розрізати на 6 рівнобедрених трикутників (див. рисунок). **4.32. Вказівка.** Якщо розрізати чотирикутник по діагоналі  $BD$  і, перегорнувши трикутник  $BCD$ , знов «приклести» його до діагоналі  $BD$ , то отримаємо рівнобедрений трикутник. **4.33. Не більше двох.** **Вказівка.** Якщо дві несусідні сторони  $AB$  і  $CD$  дорівнюють найбільшій діагоналі, то  $AB + CD \geq AC + BD$ , що суперечить твердженням задачі 4.23. **5.10. 90°.**

**5.11. 45°, 135°.** **5.12. 48°, 132°.** **5.13. 6 см, 12 см.** **5.15. 9 см, 14 см.**

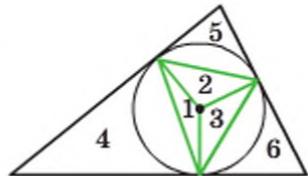
**5.17. 6 см.** **5.18. 32 см.** **5.21. 80 см.** **5.22. 9 см, 24 см.** **5.23. 6 см.**

**5.26. 36°, 144°.** **5.27. 40 см.** **5.28. 5 см, 9 см.** **5.30. 25 см.** **5.31. 3.**

**5.32. 2 : 1.** **5.33. 72°, 108°.** **5.34. 8 см, 12 см або 5 см, 15 см.** **5.37. 60°, 120°.** **5.38. Вказівка.** Доведіть, що проведені прямі містять висоти трикутника  $ABD$ . **5.40. Вказівка.** Доведіть, що проведені прямі містять висоти трикутника  $A_1B_1C_1$ .

**5.41. Вказівка.** Доведіть, що точка  $J$  — ортоцентр трикутника  $AMC$ . **5.43. Вказівка.** Побудуйте паралелограм, одна вершина якого збігається з вершиною даного кута, дві інші вершини лежать на сторонах кута, а точка перетину діагоналей паралелограма збігається з даною точкою. **5.45. Вказівка.**

Проведіть бісектрису  $BD$  трикутника  $ABC$ . Через точку  $D$  проведіть пряму, паралельну стороні  $AB$ . **5.46. Вказівка.** Побудуйте паралелограм, сусідніми сторонами якого будуть відрізки  $AC$  і  $AB$ .



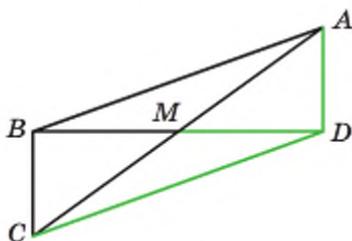
До задачі 4.31

**5.47. Вказівка.** Вершини  $B$  і  $C$  лежать на серединних перпендикулярах відрізків  $MN$  і  $NK$  відповідно. Далі скористайтеся результатом задачі 5.43.

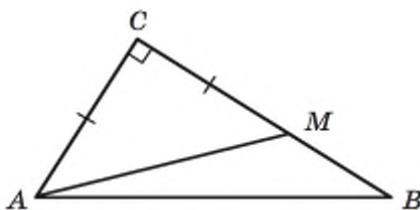
**5.48. Вказівка.** Доведіть, що діагоналі чотиривідмінника містять висоти трикутників, вершинами яких є дві сусідні вершини паралелограма та точка перетину його діагоналей.

**5.49. Вказівка.** Скористайтеся твердженням ключової задачі 2.3 і теоремою 5.4.

**6.18. 120°. Вказівка.** На продовженні медіані  $BM$  за точку  $M$  позначте точку  $D$  таку, що  $BM = MD$  (див. рисунок). У трикутнику  $BDC$   $\angle BDC = 30^\circ$ .



До задачі 6.18



До задачі 8.46 (1)

**6.19. Вказівка.** Скористайтеся твердженням ключової задачі 6.9.

**6.21. Вказівка.** На продовженні медіані  $AM$  за точку  $M$  відкладіть відрізок  $MD$ , який дорівнює цій медіані, і розгляньте трикутник  $ABD$ .

**6.25. Вказівка.** Побудуйте прямокутний трикутник, гіпотенуза якого дорівнює подвоєній даній медіані, а катет — даній висоті.

8.3. 6 см, 12 см. 8.4. 15 см, 25 см. 8.5. 12 см. 8.30. 28 см. 8.33. 48 см. 8.36. 6 см. 8.37. 4,5 см.

**8.39. Вказівка.** Доведіть, що  $AC \perp MK$ .

**8.40. Вказівка.** Побудуйте рівнобедрений прямокутний трикутник з гіпотенузою  $MK$ .

**8.41. 75°. 8.42. Вказівка.** Нехай точка  $F$  — середина сторони  $AB$ . Побудуйте трикутник  $FMK$ .

**8.44. 30°, 60°. Вказівка.** Покажіть, що в прямокутному трикутнику  $ABM$  гіпотенуза  $AM$  удвічі більша за катет  $BM$ .

**8.45. 60°. 8.46. 1) Вказівка.** Задача зводиться до побудови прямокутного трикутника за гіпотенузою та різницю катетів.

На рисунку зображено прямокутний трикутник  $ACB$ , у якому відомо гіпотенузу  $AB$  і різницю катетів. На катеті  $BC$  позначено точку  $M$  так, щоб  $CM = AC$ . Тоді  $BM = BC - AC$ .

Звідси  $\angle AMB = 135^\circ$ . Отже, можна побудувати трикутник  $AMB$  за сторонами  $AB$  і  $MB$  та кутом  $AMB$ .

**8.48. Вказівка.** Побудуйте два прямокутних трикутники, у кожному з яких один катет дорівнює стороні квадрата, а гіпотенузи є даними відрізками.

Доведіть рівність цих трикутників.

**8.52. 60°, 120°. Вказівка.** Нехай точки  $M$  і  $N$  — середини сторін  $BC$  і  $AD$

відповідно. Доведіть, що чотирикутник  $ABMN$  — ромб.

**8.53. Вказівка.** Сполучіть середину сторони  $AB$  з точкою  $D$ .

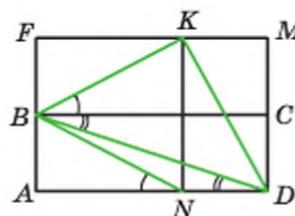
**8.54. Вказівка.** Доведіть, що бісектриса кута  $ABD$  паралельна бісектрисі  $DM$ . Далі скористайтеся твердженням ключової задачі 2.4.

**8.55. Вказівка.** Доведіть, що точка  $N$  належить серединному перпендикуляру відрізка  $OC$ , де точка  $O$  — середина  $AC$ .

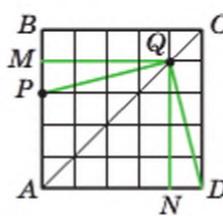
**8.56. Вказівка.** Побудуйте рівносторонній трикутник  $BO_1C$  так, щоб точка  $O_1$  належала квадрату. Покажіть, що  $\angle O_1AD = \angle O_1DA = 15^\circ$ . Звідси випливає, що точки  $O$  і  $O_1$  збігаються.

**8.57. Вказівка.** Побудуйте прямокутник  $BFMC$ , який дорівнює прямокутнику  $ABCD$  (див. рисунок). Нехай точка  $K$  належить стороні  $FM$  і  $FK = AN$ . Тоді  $\angle DBK = \angle ANB + \angle ADB$ . Доведіть, що  $BK = KD$  і  $BK \perp KD$ .

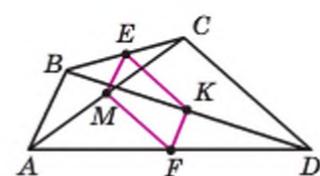
**8.58. 45°, 45°, 90°. Вказівка.** Розбийте квадрат  $ABCD$  на 25 квадратів, як показано на рисунку. Скористайтеся тим, що  $\Delta PMQ = \Delta DNQ$ .



До задачі 8.57



До задачі 8.58



До задачі 9.18

**9.7. 28 см.** **9.14. Вказівка.** Проведіть середню лінію трикутника  $ABC$ .

**9.15. 9 см. Вказівка.** Розгляньте трикутник, для якого відрізок  $MK$  є середньою лінією.

**9.18. Вказівка.** Доведіть, що чотирикутник  $EKFM$  — паралелограм (див. рисунок).

**9.20. Вказівка.** Сполучіть точку  $M$  із серединою відрізка  $AH$ .

**9.21.  $\angle BAC = 60^\circ$ ,  $\angle BCA = 90^\circ$ .** **9.23. Вказівка.** Розгляньте ламану  $DMKE$ , де точки  $M$  і  $K$  — відповідно середини сторін  $AB$  і  $BC$ .

**9.24. Вказівка.** Скористайтеся тим, що бісектриса кута, перпендикулярна до відрізка, кінці якого лежать на сторонах кута, ділить цей відрізок навпіл. Усі зазначені точки лежать на прямій, яка містить середню лінію трикутника  $ABC$ , паралельну стороні  $BC$ .

**9.26. Вказівка.** Доведіть, що відрізок  $MN$  перетинає діагональ  $AC$  в її середині.

**9.28. Вказівка.** Доведіть, що середини сторін чотирикутника  $ABMC$  є вершинами ромба.

**9.29. Вказівка.** На промені  $BD$  позначте точку  $F$  так, щоб  $DF = DB$ . Точка  $C$  лежить на прямій, яка проходить через точку  $F$  паралельно хорді  $AD$ .

**9.30. Вказівка.** Нехай точки  $M$ ,  $K$  і  $F$  — середини відрізків  $AB$ ,  $AD$  і  $AC$  відповідно. Визначте, яким прямим належать висоти трикутника  $MKF$ .

**9.31. Вказівка.** Нехай

$E, F$  і  $K$  — середини відрізків  $AC$ ,  $BC$  і  $BD$  відповідно. Доведіть, що трикутник  $EFK$  рівнобедрений.

**9.32. Вказівка.** Доведіть, що середини сторін чотирикутника  $ABMC$  є вершинами ромба.

**9.33.**  $\frac{a}{2}$ .

**Вказівка.** Проведіть середню лінію  $DK$  трикутника  $ABC$ . Доведіть, що трикутник  $EDK$  рівнобедрений.

**10.6.** 16 см, 34 см. **10.8.** 16 см. **10.9.**  $50^\circ, 60^\circ$ . **10.15.** 7,2 см, 10,8 см. **10.17.** 2h. **10.18.** 8 см, 20 см, 20 см, 20 см. **10.19.** 12 см, 12 см, 12 см. **10.20.**  $60^\circ, 120^\circ$ . **10.21.** 8 см, 16 см. **10.22.**  $60^\circ, 120^\circ$ . **10.23.** Якщо гострий кут трапеції дорівнює  $45^\circ$ .

**10.29.**  $\frac{3a}{4}$ . **10.30.**  $72^\circ, 108^\circ$ . **10.31.** 8 см. **10.32. Вказівка.** Через одну з вершин меншої основи проведіть пряму, паралельну бічній стороні трапеції.

**10.36. 1) Вказівка.** Через одну з вершин меншої основи проведіть пряму, паралельну бічній стороні трапеції. Задачу зведенено до побудови трикутника за трьома сторонами.

**10.38. Вказівка.** Через середину меншої основи трапеції проведіть відрізки, паралельні бічним сторонам.

**10.39.** 8 см, 2 см. **10.40.**  $90^\circ$ .

**Вказівка.** Позначте на основі  $AD$  точку  $M$  таку, що  $CM \parallel AB$ .

**10.41.** 3 см. **Вказівка.** Через вершину  $B$  проведіть пряму, паралельну діагоналі  $AC$ .

**10.42. Вказівка.** На продовженні відрізка  $AD$  за точку  $D$  відкладіть відрізок  $DE$ , який дорівнює основі  $BC$ .

**10.43. Так. Вказівка.** Проведіть через точку  $M$  прямі, паралельні сторонам трикутника, і розгляньте діагоналі рівнобічних трапецій, які утворилися.

**10.44. Вказівка.** Із точки  $C$  опустіть перпендикуляр  $CB_1$  на сторону кута, яка містить точку  $B$ . Проведіть середню лінію трапеції  $BDCB_1$ .

**11.17.**  $120^\circ, 30^\circ$ . **11.18.**  $10^\circ$ . **11.19.**  $40^\circ, 40^\circ, 100^\circ$ . **11.20.**  $120^\circ, 20^\circ, 40^\circ$ .

**11.22.**  $56^\circ, 56^\circ, 68^\circ$ . **11.27.**  $60^\circ, 120^\circ$ .

**Вказівка.** Доведіть, що даний паралелограм є ромбом.

**11.37. Вказівка.** Продовжте бісектрису  $BK$  до перетину з описаним колом трикутника  $ABC$ . Далі скористайтеся твердженням ключової задачі 11.36.

**11.38.**  $22,5^\circ, 67,5^\circ, 90^\circ$ .

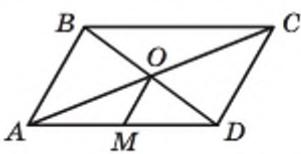
**11.40. Вказівка.** Скористайтеся твердженням ключової задачі 11.36.

**11.42. Вказівка.** Скористайтеся твердженням ключової задачі 11.36.

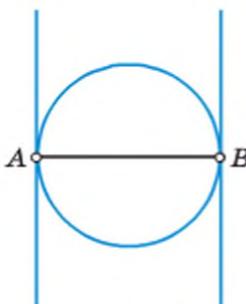
**11.44. Вказівка.** Опустіть із вершин  $A$  і  $B$  висоти трикутника  $ABC$ .

**11.45. Вказівка.** Скористайтеся результатом ключової задачі 1 п.

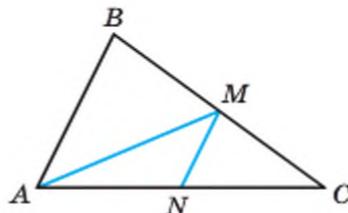
**11.47. Вказівка.** Нехай  $O$  — точка перетину діагоналей паралелограма  $ABCD$ , точка  $M$  — середина сторони  $AD$  (див. рисунок). Тоді  $OM = \frac{1}{2}AB$ . Трикутник  $AOD$  можна побудувати (див. задачу 11.46).



До задачі 11.47



До задачі 11.49



До задачі 11.58

**11.49.** Шукане ГМТ складається з двох півкіл і чотирьох променів (див. рисунок), точки  $A$  і  $B$  яому не належать. **11.50.**  $165^\circ$ . Вказівка. Доведіть, що  $\angle ACB = 150^\circ$ . Далі скористайтеся твердженням ключової задачі 2.4.

**11.51.**  $45^\circ$ . Вказівка. Доведіть, що  $\angle C_1AB + \angle B_1AC = \angle BAC$ . **11.52.**  $60^\circ$ . **11.53.** Вказівка. Доведіть, що точки  $H$ ,  $O$ ,  $J$  належать ГМТ, з яких відрізок  $BC$  видно під кутом  $120^\circ$ .

**11.54.** Вказівка. Одне й те саме коло є описаним для всіх указаних трикутників. Центр цього кола може бути внутрішньою точкою лише одного із цих трикутників. **11.55.**  $90^\circ$ . Вказівка. Доведіть, що  $\triangle ACE = \triangle BDE$ .

**11.56.** Вказівка. Побудуйте коло із центром  $O_1$  і радіусом, який дорівнює різниці радіусів даних кіл. Проведіть через точку  $O_2$  дотичну до побудованого кола. **11.57.** Вказівка. Нехай точка  $O$  — центр вписаного кола трикутника  $ABC$ , у якому

відомо кут  $B$  і сторону  $AC$ . Доведіть, що  $\angle AOC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle B$ . У трикутнику  $AOC$  відомо сторону  $AC$ , кут  $AOC$  і висоту, проведену з вершини  $O$  (радіус вписаного кола). Далі див. задачу 11.45.

**11.58.** Вказівка. На рисунку зображено трикутник  $ABC$ , у якому відомо сторону  $AC$ , кут  $B$  і медіану, проведену до сторони  $BC$ . Проведіть середню лінію  $MN$  трикутника  $ABC$ . Тоді  $\angle NMC = \angle B$ . Побудуйте геометричне місце точок  $X$  таких, що  $\angle NXC = \angle B$ .

**11.59.** Вказівка. Доведіть, що  $\angle AOD = \angle ACD = 2\angle ABD$ . **11.60.** Вказівка. Нехай  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ ,  $M_4$  — дані точки. На відрізках  $M_1M_2$  і  $M_3M_4$  як на діаметрах побудуйте кола. Діагональ квадрата ділить дуги цих кіл навпіл.

**12.3.**  $60^\circ$ . **12.4.**  $35^\circ$ . **12.10.** 2а. **12.12.**  $180^\circ - a$ . **12.14.** а.

**12.16.** Точка дотику. Вказівка. Скористайтеся твердженням ключової задачі 3 п. 12.

**12.19.** Вказівка. Доведіть, що  $\angle NAC = \angle ABC$ . Далі скористайтеся твердженням, оберненим до ключової задачі 1 п. 12.

**12.20. Вказівка.** Доведіть, що  $\angle KMC = \frac{1}{2} \angle CAB$ .

**12.21. Вказівка.** Доведіть, що  $\angle PAO = \angle ADB$ .

**12.22.  $30^\circ$ . Вказівка.** Знайдіть кут  $AEC$ , а далі скористайтеся твердженням ключової задачі 4 п. 12.

**12.23.  $80^\circ, 70^\circ$ . Вказівка.** Скористайтеся твердженням ключової задачі 5 п. 12.

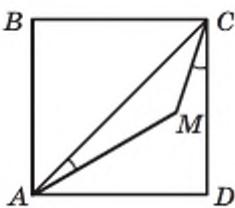
**12.24.  $160^\circ$ .** **12.25.  $20^\circ$ . Вказівка.** Точки  $A, B, C$  лежать на колі із центром у точці  $K$ .

**12.26. 5 см.** **12.27. Вказівка.** Доведіть, що точка  $M$  — центр кола, якому належать точки  $A, B, O$  і  $H$ .

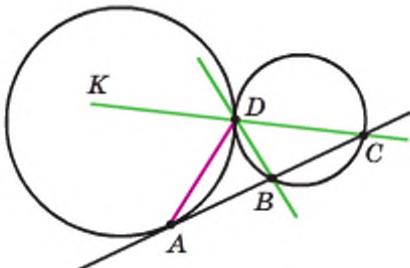
**12.28. Вказівка.** Доведіть, що точка  $A$  лежить на колі з центром  $O$  та радіусом  $OC$ . Для цього покажіть, що  $\angle COD = 2 \angle BAC$ .

**12.29.  $90^\circ - 2\alpha$ . Вказівка.** Покажіть, що  $\angle AMC = 135^\circ$  (див. рисунок).

Тоді точки  $A, M, C$  лежать на колі із центром  $B$ .



До задачі 12.29



До задачі 12.31

**12.31. Вказівка.** Доведіть, що  $DA$  — бісектриса кута  $BDK$  (див. рисунок). Для цього проведіть через точку  $D$  дотичну до даних кіл.

**12.32.  $70^\circ$ . Вказівка.** На стороні  $BC$  поза трикутником  $ABC$  побудуйте рівносторонній трикутник  $BKC$ . Доведіть, що точки  $B, D$  і  $C$  належать колу із центром  $K$  і радіусом, який дорівнює стороні  $KB$ .

**12.33. Вказівка.** Нехай відрізки  $AK$  і  $BK$  перетинають коло меншого радіуса в точках  $F$  і  $E$  відповідно. Доведіть, що  $FE \parallel AB$ . Для цього проведіть через точку  $K$  спільну дотичну до двох даних кіл.

**13.6.  $88^\circ, 74^\circ, 92^\circ, 106^\circ$ .** **13.7.  $62^\circ, 118^\circ$ .** **13.10.  $60^\circ, 120^\circ$ .** **13.14.** Коло з діаметром  $AB$ , за винятком точки  $A$ .

**13.15. Вказівка.** Скористайтеся твердженням ключової задачі 13.8 (2).

**13.16.  $15^\circ$ . Вказівка.** Доведіть, що точки  $A, M, J, C$  лежать на одному колі.

**13.17. Вказівка.** Виразіть кути  $PNC$  і  $POC$  через кут  $A$ .

**13.20. Вказівка.** Навколо чотирикутників  $ABKH$  і  $HKCP$  можна описати кола.

**13.21. Вказівка.** Скористайтеся результатом задачі 13.8.

**13.23.  $\frac{d}{2}$ .**

**Вказівка.** Доведіть, що кут між діагоналлю та основою трапеції дорівнює  $60^\circ$ . Далі скористайтеся твердженням ключової задачі п. 10.

- 13.24. Вказівка.** Скористайтеся твердженням задачі 13.8. **13.25. Вказівка.** Скористайтеся тим, що навколо чотирикутників  $AMBP$  і  $PBNC$  можна описати кола. **13.26. Вказівка.** Чотирикутники  $KBMC$  і  $LDMC$  вписані. **13.27. Вказівка.**  $\angle APQ = \angle AMQ$ . **13.28. Вказівка.** На стороні  $CB$  позначте точку  $C_1$  таку, що  $C_1A = C_1B$ . Доведіть, що чотирикутник  $ACC_1D$  вписаний. **13.29. Вказівка.** Доведіть, що точка  $H$  належить колу, описаному навколо чотирикутника  $OMBV$ . **13.30. Вказівка.** На відрізках  $AB$  і  $CH$  як на діаметрах побудуйте кола. Покажіть, що ці кола перетинаються в точках  $A_1$  і  $B_1$ . **13.31.  $40^\circ$ . Вказівка.** Доведіть, що точка перетину відрізків  $AF$  і  $CD$  — центр описаного кола трикутника  $ABC$ . **13.32. Вказівка.** Доведіть, що навколо чотирикутника  $AMOK$  можна описати коло, і скористайтеся тим, що бісектриси трикутника перетинаються в одній точці. **13.33.  $60^\circ$ . Вказівка.** Позначивши  $\angle N = \alpha$ , виразіть через  $\alpha$  кут  $AOB$ . **13.34. Вказівка.** Доведіть, що навколо чотирикутника  $ACBO$  можна описати коло. **13.35. Вказівка.** Доведіть, що кут  $CPB$  не змінює своєї величини. **13.36. Вказівка.** На основі  $BC$  позначте таку точку  $K$ , що  $BK = BD$ . Доведіть, що навколо чотирикутника  $ABKD$  можна описати коло. **13.37.  $90^\circ$ . Вказівка.** Нехай точка  $N$  — середина відрізка  $AD$ . Доведіть, що точка  $M$  лежить на колі, описаному навколо прямокутника  $ABKN$ . Цю задачу можна розв'язати також способом, описаним у розв'язанні задачі 8.58. **13.38.  $90^\circ$ . Вказівка.** Нехай перпендикуляр  $BH$  перетинає сторону  $AD$  у точці  $N$ . Доведіть, що чотирикутник  $NQCD$  — прямокутник. Покажіть, що точка  $H$  лежить на колі, описаному навколо цього прямокутника. **13.39. Вказівка.** На промені  $BM$  позначте точку  $D$  так, щоби  $BM = MD$ . Доведіть, що точки  $C, K, A$  і  $D$  лежать на одному колі. **14.6.  $90^\circ$ .** **14.7. 6 см.** **14.9. 196 см.** **14.10. 6 см.** **14.11. Вказівка.** Нехай спільна дотична, яка проходить через точку дотику кіл, перетинає відрізки  $AB$  і  $CD$  у точках  $M$  і  $N$  відповідно. Доведіть, що  $MN$  — середня лінія трапеції  $ABCD$ . **14.16. Вказівка.** Доведіть, що  $\angle MN + \angle QP = 180^\circ$ . **14.19. Вказівка.** Доведіть, що умова рівносильна такому твердження: точки дотику є вершинами прямокутника або рівнобічної трапеції. **14.20. Вказівка.** Приведіть середню лінію  $DE$  трикутника  $ABC$ . Доведіть, що  $DE$  дотикається до кола, вписаного в трикутник  $ABC$ . **14.21. Вказівка.** Скориставшися твердженням задачі 14.17, знайдіть точку  $F$ , у якій коло, вписане в трикутник  $ADC$ , дотикається до сторони  $AC$ . Центр вписаного кола трикутника  $ADC$  лежить на прямій, яка перпендикулярна до сторони  $AC$  і проходить через точку  $F$ , і одночасно

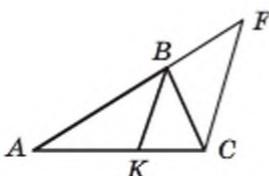
належить ГМТ, з яких відрізок  $AC$  видно під кутом, що дорівнює  $180^\circ - \frac{1}{2}\angle B$ . **15.6.** 12 см. **15.7.** 4 см. **15.8.** 6 см,  $45^\circ$ . **15.10.** 20 см, 24 см. **15.12.** 8 см, 12 см. **15.15.** 6 см, 5 см, 6 см. **15.16.** Вказівка. Точка перетину бісектрис — це вершина прямокутного трикутника, гіпотенузою якого є бічна сторона трапеції. Розгляніть медіану цього трикутника, проведену до гіпотенузи, і доведіть, що вона паралельна основам трапеції. **15.17.** 7 : 9. **15.18.** 3 : 5. **15.19.** 3 : 5.

**Вказівка.** Проведіть через точку  $K$  пряму, паралельну прямій  $AM$ . **15.20.** 1) 3 : 7. **Вказівка.** Проведіть через точку  $M$  пряму, паралельну прямій  $BK$ ; 2) 2 : 3. **Вказівка.** Проведіть через точку  $K$  пряму, паралельну прямій  $CM$ . **15.21.** 3 : 8. **15.23.** 2) **Вказівка.** Нехай дано кут  $ABC$ . Проведіть пряму  $OK$ , паралельну променю  $BC$  (точка  $K$  належить стороні  $AB$ ). На промені  $KA$  позначте точку  $M$  таку, що  $MK : KB = 2 : 3$ . **15.24.** 1 см. **15.26.** 3 см. **15.27.**  $108^\circ$ .

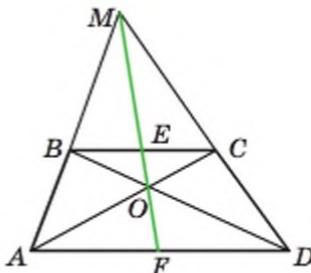
**Вказівка.** Через точку  $C_1$  проведіть пряму  $C_1D$ , паралельну бісектрісі  $AA_1$  (точка  $D$  лежить на стороні  $CB$ ). Доведіть, що трикутник  $C_1CD$  рівнобедрений. **15.28.** 4 : 1. **15.29.**  $a + b$ . **Вказівка.** Нехай  $O$  — точка перетину діагоналей паралелограма. Проведіть перпендикуляри  $AM$ ,  $OK$  і  $CE$  до прямої, яка проходить через точку  $B$ , і покажіть, що  $OK = \frac{a+b}{2}$ . **15.30.** **Вказівка.** Проведіть серединний перпендикуляр хорди  $C_1A_1$  кола, описаного навколо чотирикутника  $AC_1A_1C$ .

**15.31.** **Вказівка.** Із центра  $O$  кола, описаного навколо чотирикутника  $ABCD$ , опустіть перпендикуляр на діагональ  $AC$ . **16.5.** 21 см, 15 см. **16.6.** 45 см, 18 см. **16.7.** 30 см, 50 см. **16.11.** 45 см. **16.13.** 9 см. **16.14.** 50 см. **16.15.** 3 : 2. **16.18.** 3) **Вказівка.** Побудуйте прямокутний трикутник  $BDK$ , у якого катет  $BD$  дорівнює даній висоті, а гіпотенуза  $BK$  — даній медіані. За заданим кутом і кутом  $BKD$  знайдіть кут між двома медіанами трикутника. **16.19.** 2) **Вказівка.** Нехай  $ABC$  — шуканий трикутник, медіані  $AA_1$  і  $CC_1$  якого перетинаються в точці  $M$ . Трикутник  $AMC$  можна побудувати за двома сторонами та висотою, проведеною до третьої сторони. **16.20.** **Вказівка.** Точки  $P$  і  $Q$  — точки перетину медіан трикутників  $ABC$  і  $ACD$  відповідно. Нехай точка  $O$  — середина діагоналі  $AC$ . Доведіть, що точки  $B$ ,  $P$ ,  $O$ ,  $Q$  і  $D$  лежать на одній прямій. **16.22.** 1 : 12. **Вказівка.** Нехай хорда  $AP$  перетинає сторону  $BC$  у точці  $F$ . Знайдіть відношення  $BF : FC$ . **16.24.** **Вказівка.** Вершина трикутника належить ГМТ, з яких одну з медіан видно під даним кутом. **17.14.** 6 см. **17.15.** 9 см. **17.16.** 40 см, 60 см. **17.18.** 36 см. **17.19.** 8 см.

**17.20.** 4,8 см. *Вказівка.* Через вершину  $A$  проведіть пряму, паралельну бісектрисі  $BD$ . **17.21.**  $\frac{2ab}{a+b}$ . **17.22.** *Вказівка.* Нехай  $ABC$  — шуканий трикутник (див. рисунок),  $AB$  і  $BC$  — дані сторони,  $BK$  — дана бісектриса. На продовженні сторони  $AB$  за точку  $B$  відкладемо відрізок  $BF$ , який дорівнює відрізку  $BC$ . Доведіть, що  $BK \parallel FC$ . З подібності трикутників  $ABK$  і  $AFC$  випливає, що  $\frac{FC}{BK} = \frac{AF}{AB}$ . Побудуйте відрізок  $FC$  (див. задачу 15.22). Трикутник  $FBC$  можна побудувати за трьома сторонами.



До задачі 17.22



До задачі 18.46

**18.8.** 30 см, 6 см. **18.9.** 10,5 см, 13,5 см. **18.15.** 42 см. **18.16.** 10 см, 14 см. **18.17.** 12,5 см, 3,5 см. **18.19.** 12 м. **18.20.** 33 м. **18.23.** 24 см. **18.24.** 16 см. **18.26.** 16 см. **18.27.** 5 см. **18.28.** 10 см. **18.29.** 27 см. **18.30.** 2) 36 см. **18.32.** 10 см. **18.33.** 6 см. **18.34.** 10 см. **18.35.**  $\frac{ah}{a+h}$ .

**18.36.** 27 см, 15 см. **18.37.**  $MK = \frac{4}{5}$  см,  $AM = \frac{2}{5}$  см. *Вказівка.* Доведіть, що  $\angle AKM = \angle MCB$ .

**18.38.** *Вказівка.* Доведіть, що  $\angle CDA = \angle CBD$  і  $\angle CDB = \angle CAD$ .

**18.39.**  $\sqrt{2}$  см. *Вказівка.* Доведіть, що  $\triangle ABC \sim \triangle MAC$ .

**18.40.** 30 см, 33 см. **18.41.** 42 см, 66 см. **18.42.** *Вказівка.* Продовжте висоти до перетину з описаним колом. Скористайтеся твердженням ключової задачі 11.30.

**18.43.** 6 см. *Вказівка.* Перемножте рівності, задані в умові задачі. **18.45.** *Вказівка.* Скориставшися тим, що  $\triangle CBO \sim \triangle CAB$  і  $\triangle CBO \sim \triangle DBC$ , доведіть, що  $CO \cdot CA = BO \cdot BD$ .

**18.46.** *Вказівка.* Нехай пряма  $MO$  перетинає основи трапеції в точках  $E$  і  $F$  (див. рисунок). Доведіть, що  $\frac{BE}{AF} = \frac{EC}{FD}$  і  $\frac{BE}{FD} = \frac{EC}{AF}$ .

**18.47.** *Вказівка.* Скористайтеся твердженням задачі 18.46.

**18.49.** *Вказівка.* Доведіть, що  $\triangle CBM \sim \triangle NBC$ .

**18.50.** *Вказівка.* Можна записати, що  $KF \cdot FT = PF \cdot FM$ ,  $FE \cdot DF = PF \cdot FM$ . Скористайтеся тим, що  $DK = KE = ET$ .

**18.51.** *Вказівка.* Застосуйте

теорему Птолемея до чотирикутника  $ACDB$ . Скористайтеся тим, що  $DC = DB > \frac{1}{2} BC$ .

**18.53. Вказівка.** Застосуйте теорему Птолемея до чотирикутника  $ACDE$ .

$$19.1. \frac{CF}{FC_1} = 4, \quad \frac{AF}{FA_1} = \frac{7}{8}. \quad 19.2. \frac{13}{12}.$$

**Вказівка.** Застосувавши теорему Менелая до трикутника  $CBB_1$ , знайдіть відношення  $BA_1 : A_1C$ . Далі застосуйте теорему Менелая до трикутника  $AA_1C$ .

**19.3. Вказівка.**  $\frac{AP}{PB} = 1, \quad \frac{NP}{PM} = 3.$

**19.8. 2 : 1.** **19.9. Вказівка.** Нехай продовження бічних сторін  $AB$  і  $DC$  трапеції  $ABCD$  перетинаються в точці  $M$ , а точка  $F$  — середина основи  $AD$ . До трикутника  $AMD$  і чевіан  $AC, DB$  і  $MF$  застосуйте теорему Чеви.

**19.10. Вказівка.** Нехай прямі  $AB$  і  $CD$  перетинаються в точці  $E$ . Точки  $E, M$  і  $N$  лежать на одній прямій. Застосуйте теорему Чеви до трикутника  $AED$ .

**19.11.  $\frac{2}{5}$ .** **Вказівка.** Нехай прямі  $BC$  і  $FE$  перетинаються в точці  $K$ . Доведіть, що  $BK = \frac{1}{2} AF$ .

Застосуйте теорему Менелая до трикутника  $ABC$ .

**19.12. Вказівка.** Нехай  $O$  — точка перетину діагоналей паралелограма. Для трикутника  $AOD$  і точок  $N, M, B$  застосуйте теорему Менелая.

**19.13. Вказівка.** До трикутників  $ABC$  і  $ADC$  та прямих відповідно  $MN$  і  $KP$  застосуйте теорему Менелая.

**19.14. Вказівка.** Застосуйте теорему Менелая до трикутника  $O_1O_2O_3$ .

**19.15. Вказівка.** Скористайтеся твердженням ключової задачі 18.30.1.

**19.16. Вказівка.** Застосуйте теорему Менелая до трикутника, вершини якого є серединами сторін трикутника  $ABC$ .

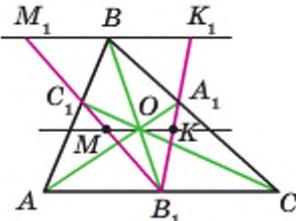
**19.17. Вказівка.** Застосуйте теорему Чеви до трикутника, вершини якого є серединами сторін трикутника  $ABC$ .

**19.18. Вказівка.** Проведемо через точку  $B$  пряму, паралельну стороні  $AC$ , і позначимо через  $M_1$  і  $K_1$  точки перетину цієї прямої з прямими  $B_1C_1$  і  $B_1A_1$  відповідно (див. рисунок). Для розв'язання достатньо довести, що  $BM_1 = BK_1$ .

З подібності трикутників  $AB_1C_1$  і  $BM_1C_1$  маємо:  $\frac{BM_1}{AB_1} = \frac{BC_1}{AC_1}$ , звідси  $BM_1 = \frac{AB_1 \cdot BC_1}{AC_1}$ . Аналогічно з подібності трикутників  $CB_1A_1$  і  $BK_1A_1$  можна отримати:  $BK_1 = \frac{CB_1 \cdot BA_1}{CA_1}$ . Маємо:

$$\frac{BM_1}{BK_1} = \frac{\frac{AB_1 \cdot BC_1}{AC_1} \cdot CA_1}{\frac{CB_1 \cdot BA_1}{CA_1} \cdot AC_1} = 1.$$

**19.19. Вказівка.** Проведіть через точку  $B$  пряму, паралельну стороні  $AC$ , і позначте через  $K$  і  $F$  точки



До задачі 19.18

перетину цієї прямої з прямими  $HA_1$  і  $HC_1$  відповідно. Скористайтеся подібністю трикутників  $HA_1C$  і  $KA_1B$ , а також подібністю трикутників  $HC_1A$  і  $FC_1B$ .

**20.7. Вказівка.** Скористайтеся тим, що прямі  $OA_1$  і  $AH$ , де  $H$  — ортоцентр трикутника  $ABC$ , паралельні.

**20.9.  $\frac{a}{4}$ . Вказівка.** Нехай точка  $E$  — середина відрізка  $AH$ , де точка  $H$  — ортоцентр трикутника  $ABC$ , точка  $M$  — середина сторони  $BC$ , точка  $A_1$  — основа висоти, проведеної з вершини  $A$ . Доведіть, що шукана відстань — довжина середньої лінії трикутника  $EMA_1$ .

**20.10. Вказівка.** Скористайтеся твердженням задачі 11.34.

**20.11. Вказівка.** Скористайтеся тим, що коло діє'яти точок трикутника  $ABC$  містить середини сторін трикутників  $ABH$ ,  $BCH$ ,  $CAH$ .

**20.12. Вказівка.** Пряма Ейлера проходить через центр кола діє'яти точок трикутника. Також скористайтеся результатом задачі 20.11.

**20.13. Вказівка.** Скориставши твердженням ключової задачі 11.31, доведіть, що відрізок, який з'єднує вершину  $A$  з ортоцентром, дорівнює радіусу описаного кола.

**20.14. Вказівка.** Скориставши твердженням ключової задачі 11.31, доведіть, що відрізок, який з'єднує вершину  $A$  з ортоцентром, дорівнює радіусу описаного кола.

**20.15. Вказівка.** Доведіть, що перше коло є колом діє'яти точок трикутника  $ABK$ , де  $K$  — точка перетину прямих  $AM$  і  $BN$ .

**21.7. 18 см, 30 см.** **21.8. 50 см, 20 см.** **21.10. 6 см.** **21.12. Так.**

**21.13.  $\frac{ab}{a+b}$ . Вказівка.** Доведіть, що  $\Delta KBM \sim \Delta ABC$  із коефіцієнтом

подібності  $\frac{b}{a+b}$ .

**21.16. 2 см.** **21.17. 6 см.** **21.18. Вказівка.** Нехай кола перетинаються в точках  $E$  і  $F$ . Для двох пар хорд  $AB$  і  $EF$ ,  $CD$  і  $EF$  застосуйте твердження ключової задачі 3 п. 18.

**21.19. Вказівка.** Доведіть, що  $\Delta MAC \sim \Delta MCB$ . Далі скористайтеся твердженням, оберненим до твердження

ключової задачі 1 п. 12.

**21.20. Вказівка.** Нехай  $O$  — точка перетину діагоналей паралелограма. Тоді  $OM \cdot OC = OB \cdot OD$ . Звідси  $OM \cdot OA = OB^2 = OD^2$ .

**21.21. Вказівка.** Проведіть у точці  $B$  дотичну до описаного кола.

**21.22. Вказівка.** Доведіть, що  $\Delta BKO \sim \Delta BOA$  і  $\Delta OMA \sim \Delta BOA$ .

**21.23. Вказівка.** Доведіть, що з подібності трикутників  $BMC$  і  $CMK$  випливає подібність трикутників  $ABM$  і  $KAM$ .

**21.24. Вказівка.** Маємо:  $\frac{BM}{MC} = \frac{AB}{AC}$ . З урахуванням рівностей  $BM = CN$  і  $AB = BC$  скористайтеся твердженням ключової задачі 3 п. 21.

**21.25. Вказівка.** На продовженні сторони  $AC$  за точку  $A$  позначте точку  $D$  так, щоб  $AD = AB$ . Скориставши заданою в умові задачі

рівністю, доведіть, що  $\triangle DBC \sim \triangle BAC$ . 22.5. 15 см, 20 см. 22.6. 30 см, 24 см. 22.7.  $2\sqrt{5}$  см,  $4\sqrt{5}$  см. 22.8. 14,5 см. 22.9. 12 см. 22.10. 62 см.

22.11. 12,5 см. 22.12. 12,8 см. 22.13. 2,5. 22.14. 26 см, 39 см. 22.15. 5 см.

22.16.  $\frac{26}{3}$  см. 22.20. 7 см, 13 см, 15 см, 21 см. 22.22. 196 см. 22.23. 18 см. 22.24. 12 см. 22.25. Вказівка.  $AB_2^2 = AB_1 \cdot AC$ ,  $AC_2^2 = AC_1 \cdot AB$ . Скористайтеся твердженням ключової задачі 1 п. 21.

23.11. 13 см. 23.12. 10 см. 23.13.  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ . 23.14.  $a\sqrt{2}$ . 23.15. а)  $\sqrt{6}$  см; б)  $\sqrt{3}$  см; в)  $4\sqrt{2}$  см. 23.16. а)  $\sqrt{2}$  см; б) 1 см. 23.17.  $4\sqrt{5}$  см.

23.18.  $4\sqrt{10}$  см. 23.19.  $4\sqrt{13}$  см. 23.20.  $4\sqrt{5}$  см. 23.21. 2 см або 18 см.

23.22. 24 см. 23.23. 1,5 см, 22,5 см. 23.24. 20 см. 23.25. 20 см.

23.26. 8 см, 6 см, 10 см. 23.27. 6 см,  $2\sqrt{73}$  см. 23.28. 168 см.

23.29. 200 см. 23.32.  $8\sqrt{10}$  см. 23.33.  $12\sqrt{3}$  см. 23.34.  $2\sqrt{65}$  см.

23.35.  $12\sqrt{5}$  см. 23.36. 128 см. 23.37. 162 см. 23.38. 54 см.

23.39.  $8\sqrt{10}$  см. 23.40. 10 см,  $4\sqrt{13}$  см,  $2\sqrt{73}$  см. 23.41. 26 см.

23.43. 13 см. 23.44. Вказівка. Через вершину меншої основи трапеції проведіть пряму, паралельну діагоналі. 23.45. 7 см. Вказівка.

Проведіть діаметр  $BD$  і розгляньте трапецію  $ACBD$ . 23.46. Вказівка.

Скористайтеся лемою з п. 20. 23.47.  $\frac{5\sqrt{2}}{2}$  см. Вказівка. За допомогою теореми Птолемея знайдіть  $CD$ . Доведіть, що  $\angle KCD = 90^\circ$ .

23.48. Вказівка. Проведіть відрізок  $CD$  так, щоб  $CD = AC$  і  $\angle DCM = \angle MCA$  (див. рисунок). Доведіть, що  $\angle MDN = 90^\circ$  і  $MD = AM$ ,  $ND = BN$ . 24.14.  $45^\circ$ ,  $135^\circ$ . 24.18. 1) 1; 2) 0. 24.19. 0,28; 0,96;  $\frac{7}{24}$ ;  $\frac{24}{7}$ .

24.20.  $\frac{1}{6}$ . Вказівка. З подібності трикутників  $AMC$  і  $BDC$  випливає,

що  $\frac{AC}{BC} = \frac{AM}{BD} = \frac{1}{3}$ . 24.21.  $\frac{6}{7}$ . Вказівка. Скористайтеся тим, що

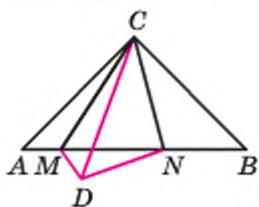
$\frac{KC}{AC} = \frac{BD}{AB}$ . 24.23. Вказівка. Із точки  $F$  опустіть перпендикуляр на

відрізок  $ED$ . Знайдіть тангенси кутів  $E$  і  $B$ .

24.24.  $60^\circ$ . Вказівка. Із точки  $M$  опустіть перпендикуляр на основу трикутника. 24.25. Вказівка.

Скористайтеся тим, що  $AH = 2OM$ , де точка  $M$  — середина сторони  $BC$ , точка  $O$  — центр описаного кола. 24.26.  $60^\circ$ . 24.27.  $45^\circ$ .

24.29. Вказівка. Скористайтеся теоремою Чеві.



До задачі 23.48

25.17. 8 см. 25.18. 16 см. 25.19. 15 см. 25.20.  $4\sqrt{2}$  см. 25.21.  $\frac{h}{\cos \frac{\beta}{2}}$ .

25.22.  $\frac{h}{\sin \alpha}$ ,  $\frac{h}{\cos \alpha}$ ,  $\frac{h}{\sin \alpha \cos \alpha}$ . 25.23.  $a \operatorname{tg} \varphi$ ,  $\frac{a}{\cos \varphi}$ ,  $a \sin \varphi$ .

25.24.  $\frac{d}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$ ,  $d \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ . 25.25.  $\frac{2r}{\sin \alpha}$ ,  $\frac{2r}{\sin \frac{\alpha}{2}}$ ,  $\frac{2r}{\cos \frac{\alpha}{2}}$ . 25.26.  $\frac{R\sqrt{3}}{2}$ .

25.27.  $\frac{a(3-\sqrt{3})}{2}$ . 25.28.  $2\sqrt{3}$  см,  $\sqrt{93}$  см,  $\sqrt{181}$  см. 26.1.  $d^2 \sin \alpha \cos \alpha$ .

26.2.  $75\sqrt{3}$  см<sup>2</sup>. 26.6. У 2 рази. 26.7. Жодного, або два, або три.

26.8. Жодного або два. 26.9. 504 см<sup>2</sup>. 26.10. 30 см. 26.11. Вказівка.

Проведіть пряму через точки перетину діагоналей прямокутників  $ABCD$  і  $MNKF$ . 26.12. Вказівка. Побудуйте прямокутний трикутник, катети якого дорівнюють сторонам даних квадратів.

26.13. Вказівка. Сторона шуканого квадрата  $x = \sqrt{ab}$ . 26.14.  $\frac{S+Q}{2}$ .

27.3. 1) Два розв'язки: 4 см або 9 см; 2) один розв'язок: 8 см.

27.4. 300 см<sup>2</sup>. 27.5. 120 см<sup>2</sup>. 27.6.  $108\sqrt{3}$  см<sup>2</sup>. 27.7.  $ab \sin \alpha$ .

27.8.  $64\sqrt{3}$  см<sup>2</sup>. 27.9.  $140\sqrt{2}$  см<sup>2</sup>. 27.10. 37,5 см<sup>2</sup>. 27.11.  $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ .

27.13. 72 см<sup>2</sup>. 27.14. 360 см<sup>2</sup>. 28.5.  $\frac{200}{3}$  см<sup>2</sup>. 28.6.  $11\sqrt{3}$  см<sup>2</sup>.

28.7. 170 см<sup>2</sup>. 28.8.  $b^2 \sin \alpha \cos \alpha$ . 28.9.  $h^2 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$ . 28.10.  $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ .

28.11.  $\frac{c^2}{4}$ . 28.12.  $\frac{120}{13}$  см. 28.13. 96 см<sup>2</sup>. 28.15. 336 см<sup>2</sup>. 28.16. 1080 см<sup>2</sup>.

28.26. 120 см<sup>2</sup>. 28.27. 20 см,  $6\sqrt{10}$  см,  $2\sqrt{10}$  см. 28.28. 1176 см<sup>2</sup>.

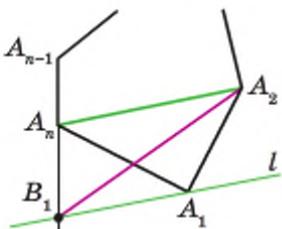
28.29. 9,6 см<sup>2</sup>. 28.30.  $\frac{4000}{3}$  см<sup>2</sup>. 28.31.  $\frac{4000}{3}$  см<sup>2</sup>. 28.32. 2 : 1.

28.33. Вказівка. Якщо  $K$  — точка дотику кола до гіпотенузи  $AB$ , то  $AK = p - BC$ ,  $BK = p - AC$ , де  $p$  — півпериметр трикутника  $ABC$ .

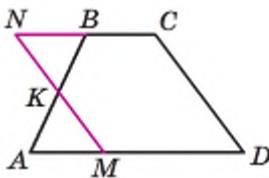
28.34. 25 см<sup>2</sup>. 28.35. 1 см<sup>2</sup>, 9 см<sup>2</sup>. 28.40. 19 см<sup>2</sup>. 28.41. Вказівка. Проведіть прямі  $AM$ ,  $BM$  і  $CM$  та скористайтеся твердженням ключової задачі 2 п. 28. 28.42. Вказівка. Скориставшися твердженням ключової задачі 3 п. 28, доведіть, що  $S_{ABO} = S_{DCO}$ . 28.44.  $\frac{15}{4}$  см<sup>2</sup>.

Вказівка. Для чотирикутника  $MNKF$  скористайтеся твердженням ключової задачі 3 п. 28. 28.45. Вказівка. Доведіть, що площа трикутника  $BCK$  дорівнює половині площи кожного з паралелограмів.

**28.46. Вказівка.** Проведіть медіану  $BM$ . Через точку  $M$  проведіть пряму, паралельну прямій  $BD$ . Нехай  $N$  — точка перетину проведеної прямої з однією з сторін  $BA$  або  $BC$ . Тоді  $DN$  — шукана пряма. **28.47. Вказівка.** Проведіть пряму  $l$  паралельно прямій  $A_2A_n$  (див. рисунок).  $B_1A_2\dots A_{n-1}$  — шуканий  $(n-1)$ -кутник.



До задачі 28.47



До задачі 29.32

**28.48.** Усі точки квадрата, які не належать його сторонам, і прямі, які містять діагоналі квадрата, за винятком точок  $A$ ,  $B$ ,  $C$  і  $D$ .

**28.49. Вказівка.** Проведіть діагоналі чотирикутника  $ABCD$ .

**28.50. 3 см. Вказівка.** Скориставшися твердженнями ключових задач 1 і 3 п. 28, доведіть, що чотирикутник  $ABCD$  — паралелограм.

**28.51. Вказівка.** Скористайтеся твердженням ключової задачі 18.46.

**29.6.**  $108\sqrt{3}$  см $^2$ . **29.7.** 195 см $^2$ . **29.8.** 840 см $^2$ . **29.9.** 132 см $^2$ .

**29.10.**  $600\sqrt{3}$  см $^2$ . **29.11.** 1640 см $^2$ . **29.12.**  $(32+32\sqrt{2})$  см $^2$ .

**29.13.** 294 см $^2$ . **29.15.** 512 см $^2$ . **29.16.** 192 см $^2$ . **29.17.** 2 : 3.

**29.18.** 59 : 53. **29.20.** 156 см $^2$ . **29.22.** 588 см $^2$ . **29.23.** 2187 см $^2$ .

**29.24.** 936 см $^2$ . **29.25.**  $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$ . **Вказівка.** Доведіть, що кут при більшій основі трапеції дорівнює  $60^\circ$ . **29.26.** 336 см $^2$ . **Вказівка.** У даній трапеції  $ABCD$  ( $BC \parallel AD$ ) через вершину  $C$  проведіть пряму  $CF$ , паралельну діагоналі  $BD$  (точка  $F$  належить прямій  $AD$ ), і розгляньте трикутник  $ACF$ . **29.27.** 150 см $^2$ . **29.28.**  $h^2\sqrt{3}$ . **29.29.**  $\frac{S}{2}$ .

**Вказівка.** Проведіть середину лінію  $MN$  трапеції. Доведіть, що висоти трикутників  $MCN$  і  $MND$ , проведені з вершин  $C$  і  $D$ , дорівнюють половині висоти трапеції. **29.32. Вказівка.** Нехай точка  $K$  — середина бічної сторони  $AB$  трапеції  $ABCD$  (див. рисунок). Доведіть, що трапеція  $ABCD$  і паралелограм  $MNCD$  рівноскладені.

**29.33.** 1 см $^2$ . **29.34.**  $\frac{1}{4}$  см $^2$ . **29.35.** 1 см $^2$ . **Вказівка.** Розріжте п'ятикутник  $ABCDE$  по діагоналях  $AC$  і  $CE$  та складіть із трикутни-

ків  $ABC$  і  $CDE$  трикутник, рівний трикутнику  $ACE$ . **29.36. Вказівка.**

Доведіть, що площа трапеції, на які пряма ділить квадрат, відносяться як їхні середні лінії. **30.5.** 16 см. **30.7.** 4 см або 6 см.

**Вказівка.** Скористайтеся тим, що периметри подібних трикутників відносяться як відповідні сторони. **30.8.**  $R_1 + R_2 + R_3$ . **30.9.** 18 см.

**30.10. Вказівка.** Побудуйте коло, яке дотикається до сторін кута в точках  $P_1$  і  $P_2$  так, що  $OP_1 = OP_2 = \frac{1}{2}P$ , де  $P$  — даний периметр.

**30.11.**  $\frac{a\sqrt{3}(a-2b)}{12}$ . **30.12.**  $r, \frac{4}{3}r, \frac{5}{3}r$ . **30.14. Вказівка.** Доведіть, що

трикутник  $OBO_A$  прямокутний. **30.15. Вказівка.** Скористайтеся твердженням задачі 30.14. **30.16. Вказівка.** Доведіть, що точки  $A, B, C$  є основами висот трикутника  $O_AO_BO_C$ .

**30.17. Вказівка.** Скористайтеся теоремою Чеви. **30.18. Вказівка.** Скористайтеся тим, що  $\angle BO_A A = \frac{1}{2} \angle ADB$ .

**30.19.**  $120^\circ$ . **30.20.**  $45^\circ$ . **30.21. Вказівка.** Доведіть, що точка  $A$  — центр зовніписаного кола трикутника  $MNC$ .

**30.22. Вказівка.** Доведіть, що точка  $A$  — центр зовніписаного кола трикутника  $KBN$ .

**30.22. k. Вказівка.** Проведіть бісектрису  $AF$  трикутника  $ABC$ . Подовжте сторону  $AB$  за точку  $B$ . Пере-

конайтесь, що точка  $F$  — центр зовніписаного кола трикутника  $ABD$ . Звідси  $DF$  — бісектриса кута  $BDC$ .

**30.23. Вказівка.** Проведіть коло із центром  $D$  і радіусом 1 см. Доведіть, що це коло є зовніписаним для трикутника  $PBQ$ .

**30.24. Вказівка.** Подовжте сторону  $CB$  за точку  $B$ . Доведіть, що точка  $E$  — центр зовніписаного кола трикутника  $BDC$ .

**30.25. Вказівка.** Доведіть, що точка  $C$  — центр зовніписаного кола трикутника  $ABD$ .

## ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

- Бічна сторона трапеції** 55
- Вершина многокутника** 16
- Вершини многокутника сусідні** 17
- чотирикутника протилежні 19
- Висота паралелограма** 25
- трапеції 55
- Відношення двох відрізків** 94
- Відрізки сусідні** 16
- Властивість бісектриси зовнішнього кута трикутника** 102
- — — трикутника 101
- діагоналей паралелограма 24
- дотичної та січної 113
- кута між дотичною та хордою 73
- середньої лінії трапеції 56
- — — трикутника 51
- хорд, які перетинаються 113
- Властивості квадрата** 45
- кутів, вписаних у коло 66
- опуклого многокутника 18
- паралелограма 24
- прямокутника 41
- рівнобічної трапеції 57
- ромба 43
- Градусна міра дуги кола** 64
- Діагональ многокутника** 17
- Дуга кола** 64
- Зовнішня спільна дотична** 71
- Катет, протилежний куту** 148
- , прилеглий до кута 148
- Квадрат** 44
- Кінець дуги** 64
- Коефіцієнт подібності** 107
- Колінеарні точки** 83
- Коло Аполлонія** 103, 113
- , вписане в чотирикутник 88
- дев'яти точок 131
- зовнівписане 183
- , описане навколо чотирикутника 80
- Конкурентні прямі** 125
- Косинус гострого кута прямокутного трикутника** 149
- Котангенс гострого кута прямокутного трикутника** 149
- Кут, вписаний у коло** 65
- зовнішній при вершині 18
- кола центральний 64
- многокутника 17
- при основі трапеції 55
- центральний 64
- Лема 107**
- Метричні співвідношення в прямокутному трикутнику** 140
- Многокутник** 16
- опуклий 17
- Многокутники рівновеликі** 165
- рівноскладені 178
- Ознаки паралелограма** 31
- подібності трикутників 111, 133, 134
- прямокутника 41
- ромба 43
- Ортоцентр** 129
- Основа трапеції** 55
- Основна тригонометрична тотожність** 151
- Паралелограм** 24
- Периметр многокутника** 17
- Півколо** 64
- Площа многокутника** 162
- паралелограма 167
- прямокутника 163
- прямокутного трикутника 170
- трапеції 177
- трикутника 170
- Подібні трикутники** 106

- Прилеглі сторони 101  
 Проекція катета на гіпотенузу 140  
 Пряма Гаусса 128  
 — Ейлера 129  
 — Симсона 82  
 Прямокутник 41
- Роз'язування прямокутних трикутників** 155  
 Ромб 43
- Середня лінія трапеції** 56  
 — — трикутника 50  
**Синус гострого кута прямокутного трикутника** 148  
 Сторони відповідні 106  
 — многокутника 16  
 — — сусідні 17  
 — чотирикутника протилежні 19
- Тангенс гострого кута прямокутного трикутника** 150  
 Теорема Менелая 122  
 — Піфагора 143
- про бісектрису трикутника 102  
 — про медіани трикутника 100  
 — про пропорційні відрізки 95  
 — Птолемея 114  
 — Фалеса 94  
 — Чеви 125  
**Трапеція** 55  
 — прямокутна 56  
 — рівнобедрена 56  
 — рівнобічна 56  
**Тригонометричні функції** 150
- Умова достатня** 38  
 — необхідна 38  
 — необхідна і достатня 39
- Центроїд** 129
- Чевіана** 124  
**Числове значення площі** 162  
**Чотирикутник** 19  
 — вписаний у коло 80  
 — описаний навколо кола 88  
**Чудові точки трикутника** 129

**ЗМІСТ**

<i>Від авторів</i> .....	3
<i>Умовні позначення</i> .....	4
<b>§ 1. Повторення та систематизація навчального матеріалу з курсу геометрії 7 класу</b> .....	5
1. Ознаки рівності трикутників .....	6
2. Паралельні прямі. Сума кутів трикутника .....	8
3. Коло. Геометричні побудови .....	11
<b>§ 2. Многокутники. Чотирикутники</b> .....	15
4. Многокутник та його елементи .....	16
● <b>Дерзайte!</b> .....	23
5. Паралелограм. Властивості паралелограма .....	24
6. Ознаки паралелограма .....	31
7. Необхідні і достатні умови .....	37
8. Прямокутник. Ромб. Квадрат .....	41
9. Середня лінія трикутника .....	50
10. Трапеція .....	55
<b>§ 3. Вписані та описані чотирикутники</b> .....	63
11. Центральні та вписані кути .....	64
12. Застосування властивостей центральних і вписаних кутів під час розв'язування задач .....	73
13. Вписані чотирикутники. Метод допоміжного кола .....	80
14. Описані чотирикутники .....	88
<b>§ 4. Подібність трикутників</b> .....	93
15. Теорема Фалеса. Теорема про пропорційні відрізки .....	94
16. Теорема про медіані трикутника. Теорема про бісектрису трикутника .....	100
17. Подібні трикутники .....	106
18. Перша ознака подібності трикутників .....	111
19. Теорема Менелая. Теорема Чеви .....	122
20. Пряма Ейлера. Коло дев'яти точок .....	128
21. Друга та третя ознаки подібності трикутників .....	133

---

<b>§ 5. Розв'язування прямокутних трикутників.....</b>	139
22. Метричні спiввiдношення в прямокутному трикутнику.....	140
23. Теорема Піфагора.....	143
● <b>Піфагор.....</b>	148
24. Тригонометричнi функцiї гострого кута прямокутного трикутника.....	148
25. Розв'язування прямокутних трикутникiв .....	155
<b>§ 6. Площа многокутника .....</b>	161
26. Поняття площи многокутника. Площа прямокутника .....	162
27. Площа паралелограма.....	167
28. Площа трикутника .....	170
29. Площа трапецiї. Рiвноскладенi многокутники .....	177
30. Зовнiвписане коло трикутника .....	182
● <b>Дружимо з комп'ютером .....</b>	187
<i>Вiдомостi з курсу гeометriї 7 класу.....</i>	191
<i>Вiдповiдi та вказiвки до вправ .....</i>	202
<i>Предметний покажчик .....</i>	220

**Видано за рахунок державних коштів.  
Продаж заборонено**

**Навчальне видання**

**МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович  
ПОЛООНСЬКИЙ Віталій Борисович  
ЯКІР Михайло Семенович**

**ГЕОМЕТРІЯ**  
для загальноосвітніх навчальних закладів  
з поглибленим вивченням математики  
підручник для 8 класу  
загальноосвітніх навчальних закладів

Головний редактор *Г. Ф. Висоцька*  
Відповідальний за випуск *Д. В. Москаленко*  
Літературний редактор *Т. Є. Цента*  
Художнє оформлення та дізайн *Д. В. Висоцький*  
Технічний редактор *О. В. Лісневська*  
Коректор *Т. Є. Цента*  
Комп'ютерне верстання *С. І. Северин*

Формат 60×90/16. Папір офсетний. Гарнітура шкільна.  
Друк офсетний. Ум. друк. арк. 14,00. Обл.-вид. арк. 13,22.  
Тираж 16 595 прим. Замовлення №

ТОВ ТО «Гімназія»,  
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052  
Тел.: (057) 719-17-26, (057) 719-46-80, факс: (057) 758-83-93  
*E-mail:* contact@gymnasia.com.ua  
[www.gymnasia.com.ua](http://www.gymnasia.com.ua)

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 644 від 25.10.2001

Надруковано з діапозитивів, виготовлених ТОВ ТО «Гімназія»,  
у друкарні ПП «Модем»,  
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052  
Тел. (057) 758-15-80

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ХК № 91 від 25.12.2003