Igor Alves – AC1 Métodos numéricos

1.Interpretação numérica do método de Newton:

O objetivo do método de Newton é construir uma função cuja derivada é menor do que 1 e estimar a raiz.

Ele é aplicado usando a seguinte fórmula:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Exemplo 1:

$$x^2 + x = 2$$

$$f(x) = x^2 + x - 2$$

$$f'(x) = 2x + 1$$

A raiz de f(x) é 1.

$$f(0) = -2$$

$$f(2) = 4$$

$$f(0) \cdot f(2) < 0$$

$$\underline{x_c \in [0,2]}$$

Pois a função muda de sinal no intervalo [0,2].

Se fizermos a iteração iniciando com $x_0 = 2$ até o erro $|x_{i+1} - x_i| < 0.5$:

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$	$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert$
0	2	4	5	$2 - \frac{4}{5} = 1{,}2$	$\lvert 1{,}2 - 2 \rvert = 0{,}8$
1	1,2	0,64	2,4	$1{,}2 - \frac{0{,}64}{2{,}4} \approx 1{,}2 - 0{,}26 \approx 0{,}94$	$\lvert 0{,}94 - 1{,}2 \rvert = 0{,}26$

Depois de 2 iterações, percebemos que o valor inicial se aproxima da raiz. Então a função converge para a raiz sem chegar nela.

2.Interpretação geométrica:

O método de Newton também é conhecido como método das tangentes.

Vemos isso facilmente pelo triângulo retângulo dado pelos pontos $(x_i, 0)$ e $(x_{i+1}, 0)$ e $(x_i, f(x_i))$. A tangente calcula o cateto oposto dividido pelo cateto adjacente.

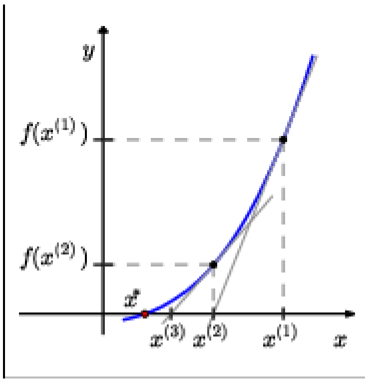
$tg(\alpha) = f(x_{i+1}) \div (x_i - x_{i+1})$

substituindo x_{i+1} pela fórmula do método de Newton:

$$tg(\alpha) = \frac{f(x_i)}{x_i - \left(x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}\right)}$$

$$tg(\alpha) = f'(x_i)$$

Logo, $f'(x_i)$ é a inclinação da reta tangente no ponto $(x_i, f(x_i))$ ou a taxa de variação instantânea da função no ponto atual em relação a xatual.



https://www.ufrgs.br/reamat/CalculoNumerico/livro-sci/main9x.png

Exemplo:

$$\frac{x^2}{2} = 0$$

$$f(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$f'(x) = x$$

i	xi	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$	$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert$
0	4	8	4	2	2
1	2	2	2	1	1

3.Aplicações em equações algébricas E transcendentes:

A convergência do método de Newton para a raiz é mais rápida que nos outros métodos. Se a função f e suas duas primeiras derivadas $f'(x)$ e $f''(x)$ são contínuas em um intervalo cujo centro x_c é solução de $f(x) = 0$ e se $f'(x) \neq 0$ em relação a

x_c, então existe um $d < 0$ tal que o método de Newton gera uma sequência convergente para p para qualquer aproximação inicial entre $[(p-d),(p+d)]$. Ou seja, se o método de Newton converge, sua convergência é quadrática.

Comparação com o método do ponto fixo:

O método do ponto fixo usa o seguinte passo-a-passo:

1.Encontrar o intervalo da raiz

2.Escolher uma função de iteração

3.Usar a função de iteração a partir de um valor inicial

Equação para a comparação:

$$\ln(x) = x^2 - 1$$

$$f(x) = \ln(x) - x^2 - 1$$

Tabela com o método de Newton:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 2x$$

$$x_0 = 8$$

I	Xi	f(xi)	f’(xi)	Xi+1
0	8	≈ 2,0794 – 64 + 1 ≈ -60,9205	0,125 – 16 = -15,875	≈ 8 – (-60,9205 ÷ -15,8750) ≈8 – 3,8375 ≈4,1624
1	≈ 4,1624	≈ 1,4260 – 17,3255 + 1 ≈ -14,8995	≈ 0,2402 – 8,3248 ≈ -8,0846	≈ 4,1624 – (-14,8995 ÷ -8,0846) ≈ 4,1624 – 1,8429 ≈ 2,3194
2	≈ 2,3194	≈ 0,8413 – 5,3796 + 1 ≈-5,5383	≈0,4311 – 4,6388 ≈-4,2077	≈2,3194 – (5,5383÷4,2077) ≈2,3194 – 1,3162 ≈1,003
3	≈1,003	≈0,0029 – 1,0060 + 1 ≈ -0,0031	≈0,9970 – 2,006 ≈-1,009	≈1,003 – (0,0031÷1,009) ≈1,003 – 0,0030≈1

Tabela com método do ponto fixo:

$$g(x) = -x^2$$

$$h(x) = \ln(x) + 1$$

$$f(x) = 0$$

$$\underline{x^2 = \ln(x) + 1}$$

$$x = \pm((ln(x) + 1)\ \hat{}\ ½)$$

$$sigma(x) = ((ln(x) + 1) \wedge 1/2)$$

$$x_0 = 8$$

i	x	$sigma(x)$
0	8	≈1,7548
1	≈1,7548	≈1,2499
2	≈1,2499	≈1,1059
3	≈1,1059	≈1,0491
4	≈1,0491	≈1,0236
5	≈1,0236	≈1,0115

Observando as tabelas, é possível ver que o método de Newton se aproxima da raiz 1 mais rápido que o método do <u>ponto</u> fixo.