Задача 4397 — Пиратска карта (координати)

Текст на задачата

Еден пират — математичар закопал богатство во средината на едно мало квадраче од 6×6 квадратен остров, како на сликата. Колоните се нумерирани 1–6 од лево кон десно, а редовите 1–6 од долу кон горе. Пиратот ти го доверил богатството и оставил две траги што водат до истото квадратиче:

Трага 1: Застани на квадрачето кое е најдолу и најдесно. Оди на север точно две третини од висината на островот, па потоа на запад уште две квадрачиња. **Трага 2:** Кога ќе завршиш со трага А, пресметај колку квадрачиња имаш поминато; половина од таа бројка треба да одиш на југ и на крај оди за едно квадраче на запад.

Користејќи ја пиратската мапа, пронајди ги координатите на богатството.

Анализа (за ученици)

Имајќи мрежа 6×6, почетната позиција (најдолу и најдесно) е колона 6, ред 1 — т.е. координати $(6,1)$.

Трага 1: придвижувања: - „на север точно две третини од висината на островот“ — висината е 6 реда, две третини од 6 е $6 \cdot \frac{2}{3} = 4$ реда нагоре; - потоа запад 2 квадрачиња (2 колони лево).

Тргаме од $(6,1)$. Прво оди нагоре 4 реда → стигнуваме на $(6,5)$. Потоа 2 колони лево → $(4,5)$.

Потоа **Трага 2** нè води по дополнителни инструкции: - Пресметај колку квадратиња имаш поминато на Трага 1 (без да броиме повторно делови) — треба да сфатиме дали да се брои само поместувањето (степените) или и почетното поле. Вообичаено тука се мисли на број на поместувања (преминати полиња), односно број на чекори кои направивме. - На север поместивме 4 полиња, па на запад 2 полиња → вкупно **6** премини. - Половина од таа бројка е $6/2 = 3$; тоа значи да тргнеме 3 полиња на југ. - Оттаму оди уште 1 поле на запад.

Од $(4,5)$ се движиме 3 полиња на југ → $(4,2)$. Потоа 1 поле на запад → $(3,2)$.

Решение (чекор-по-чекор)

1. Почетна позиција: $(6,1)$.

2. Трага 1:
   - север 4 → $(6,5)$
   - запад 2 → $(4,5)$
3. Број премини на Трага 1: $4 + 2 = 6$. Половина = 3.

4. Трага 2:
    - југ 3 → (4,2)
    - запад 1 → (3,2)
5. Крајна координата (богатство): (3,2) (колона 3, ред 2).

Заклучок

Координати на богатството: $\boxed{(3,2)}$.

Кратка (олимписка) варијанта

Почни $(6,1)$. Север 4 $\rightarrow$ $(6,5)$. Запад 2 $\rightarrow$ $(4,5)$. Трага 1 имаш поминато 6 полиња $\rightarrow$ половина = 3; југ 3 $\rightarrow$ $(4,2)$. Потоа запад 1 $\rightarrow$ $(3,2)$.

За тутори

- Разјаснете дали „поминато“ значи број на премини (преместени полиња) — тоа е вообичаено толкување. Ако ученик брои и почетното поле, половина не би била цел број.
- Практична вежба: нека учениците означат на мапа старт, пат А, и финален резултат; нека пробаат и варијации („ако би рекол 1/2 од висината“).

Задача 4398 — Низа со растечки разлики

Текст на задачата

Во една низа се напишани броевите:

$$2,4,7,11,16,22,\ldots$$

Кој е 11-тиот член во низата?

Анализа

Гледаме дека разликите меѓу поединечните членови растат:

$$4-2=2,\quad 7-4=3,\quad 11-7=4,\quad 16-11=5,\quad 22-16=6,\ \ldots$$

Разликите се: $2,3,4,5,6,\ldots$ — т.е. секој нареден чекор се зголемува за 1. Ако означиме првиот член со $a_1 =$

2, тогаш за $n \geq 1$:

$$a_{n+1} = a_n + (n+1).$$

Постоји формула за a_n. Можеме да ја добиеме со собирање на разликите.

Решение (формула + пресметка)

Сумирање на разликите:

$$a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1}(k+1) = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} 1 = 2 + \frac{(n-1)n}{2} + (n-1).$$

Скратено:

$$a_n = 2 + \frac{(n-1)n}{2} + (n-1) = 2 + \frac{(n-1)(n+2)}{2} = \frac{n^2+n+2}{2}.$$

За $n = 11$:

$$a_{11} = \frac{11^2+11+2}{2} = \frac{121+11+2}{2} = \frac{134}{2} = 67.$$

Заклучок

11-ти член во низата е $\boxed{67}$.

Кратка варијанта

Разлики: 2,3,4,… → сумираме: $2 + 3 + \cdots + 11 =$ (се добива 65), но побрзо користиме формула → $a_{11} = 67$.

За тутори

- Покажете различни методи: (а) рекурзивно додавање, (б) затворена формула; (в) проверка со табела.
- Практична вежба: нацртајте график на a_n — забележете квадратична зависност.

Задача 4399 — Колку ќе порасне дрвото за 6 години?

Текст на задачата

Дрвото пауловнија првата година расте 4 метри на секои 6 месеци, а секоја наредна година по четвртина метар месечно. Колку метри ќе порасне дрвото за 6 години?

Анализа

Првата година: „4 метри на секои 6 месеци“ → за секои 6 месеци по 4 m. Година има две 6-месечни периоди → првата година расте $4 + 4 = 8$ m.

Секоја наредна година: „по четвртина метар месечно“ → 0.25 m/месечно → годишно $0.25 \times 12 = 3$ m.

Плато: бараме вкупниот пораст во првите 6 години: година 1 + години 2–6 (5 години).

Решение

- Раст во првата година: 8 m.
- Раст во наредните 5 години (2–6): $5 \times 3 = 15$ m.
- Вкупно за 6 години: $8 + 15 = 23$ m.

Заклучок

Дрвото ќе порасне $\boxed{23 \text{ м}}$ за 6 години.

Кратка (олимписка) варијанта

Прва година: 4 m на 6 месеци → 8 m/год. Потоа 3 m/год → за уште 5 години 15 m. Вкупно 8+15 = 23 m.

За тутори

- Објаснете единици: метри по 6 месеци → како се пресметуваат за цела година.
- Продолжение: колку ќе порасне за 10 години? (пресметка).

-

Задача 4400 — Четирицифрени броеви со дадени својства

Текст на задачата

Колку има четирицифрени броеви чиј збир на цифри е 9, а цифрата на десетките е 5?

Анализа

Нека цифрите на четирицифрениот број се $a\,b\,c\,d$ (a = илјадници, b = стотици, c = десетки, d = единици). Познато: - $a + b + c + d = 9$, - $a \in \{1, \dots, 9\}$, - $b, c, d \in \{0, \dots, 9\}$, - дополнително имаме $c = 5$.

Заместваме $c = 5$:

$$a + b + 5 + d = 9 \quad \Rightarrow \quad a + b + d = 4.$$

Понатака, $a \geq 1$. Да го земеме $a' = a - 1 \geq 0$. Тогаш:

$$a' + b + d = 3.$$

Бараме број на ненегативни цели решенија (a', b, d) за оваа равенка. Бројот е $\binom{3+3-1}{3-1} = \binom{5}{2} = 10$.

(Проверка: ограничувањата $b, d \leq 9$ и $a \leq 9$ се исполнети бидејќи сумата е мала.)

Решение

Бројот на такви четирицифрени броја е $\boxed{10}$.

(Ако сакаме, можеме да ги наброиме — но главната техника е составување на решенија за негативни цели броеви.)

За тутори

- Објаснете зошто ја пресметуваме со $a' = a - 1$.
- Вежба: набројте ги решенијата за да ја проверите формулата.
-

Задача 4401 — Лектирата на Ана

Текст на задачата

Ана читала лектира. Првиот ден прочитала **36** страници, вториот ден **една половина** од бројот на страници кои ги прочитала првиот ден, а третиот **една третина** од бројот на страници кои ги прочитала првиот ден. Четвртиот ден ги прочитала преостанатите **38** страници. Колку вкупно страници има лектирата?

Анализа (насока за ученици)

Првиот ден: 36.
Вториот: половина од 36 = 18.
Третиот: една третина од 36 = 12.
Четвртиот: рекордирано како „преостанати 38“. Значи целата книга е збир на сите овие броеви.

Решение (чекор-по-чекор)

6. Првиот ден: 36 страници.
7. Вториот ден: $\frac{1}{2} \cdot 36 = 18$ страници.
8. Третиот ден: $\frac{1}{3} \cdot 36 = 12$ страници.
9. Четвртиот ден: преостанати 38 страници.

Вкупно:

$$36 + 18 + 12 + 38 = 104.$$

Заклучок

Лектирата има $\boxed{104}$ страници.

Кратка (олимписка) варијанта

Собери го: 36 (ден1) + 18 (ден2) + 12 (ден3) + 38 (ден4) = 104.

За тутори

- Питајте: зошто е важно да разликуваме „половина/третина од првиот ден“ од „половина/третина од вкупниот број“?
- Продолжна вежба: ако вториот ден беше 1/3 од првиот ден, како ќе се смени вкупниот број?

Задача 4402 — Сумирај трицифрени броеви (производ на цифри = 8)

Текст на задачата

Пресметај го збирот на сите трицифрени броеви чиј производ на цифри е 8.

Анализа

Бараме сите трицифрени броеви abc (со $a \neq 0$) такви што $a \cdot b \cdot c = 8$. Разложувањата на 8 во фактори (цифри 0–9) се: - $8 = 8 \cdot 1 \cdot 1$ - $8 = 4 \cdot 2 \cdot 1$ - $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$

Нема да користиме 0 (бидејќи продуктот би бил 0). Сега земаме сите пермутации (поставувања) на секоја мултисет конфигурација, со оглед дека a (стотици) не може да биде 0.

Решение (детално)

1. Мултисет $\{8,1,1\}$: пермутации → 811, 181, 118.

2. Мултисет $\{4,2,1\}$: сите 6 пермутации → 421, 412, 241, 214, 142, 124.

3. Мултисет $\{2,2,2\}$: единствен број → 222.

Список на сите броеви:

$$811,\ 181,\ 118,\ 421,\ 412,\ 241,\ 214,\ 142,\ 124,\ 222.$$

Сумираме:

$$811 + 181 + 118 + 421 + 412 + 241 + 214 + 142 + 124 + 222 = 2886.$$

Заклучок

Збирот на сите такви трицифрени броеви е $\boxed{2886}$.

Кратка (олимписка) варијанта

Наместваме факторизации и ги пермутираме: (8,1,1), (4,2,1), (2,2,2) → наоѓаме 10 броја → сума 2886.

За тутори

- Підгответе табела и нека учениците контролно ја проверат сумата.
- Продолжна задача: преброј и сумирај броеви со продукт на цифри = 12 (проверка на техники).

Задача 4403 — Возрасти на тројца пријатели

Текст на задачата

Тројца пријатели Алекс, Борче и Мартин имаат вкупно 35 години. Алекс е 2 години постар од Борче, а Борче е 3 години помлад од Мартин. Колку години има секој од тројцата пријатели?

Анализа

Нека A = Алекс, B = Борче, M = Мартин. Дадено: - $A + B + M = 35$ - $A = B + 2$ - $B = M - 3 \Rightarrow M = B + 3$

Заменеме во збирот.

Решение

Збирот:

$$A + B + M = (B + 2) + B + (B + 3) = 3B + 5 = 35.$$

Решаваме:

$$3B = 30 \Rightarrow B = 10.$$

Тогаш:

$$A = B + 2 = 12, \quad M = B + 3 = 13.$$

Заклучок

Алекс = **12** години, Борче = **10** години, Мартин = **13** години.

За тутори

- Ова е класична задача за моделирање со едноставни равенки.
- Прашање: што ако збирот беше 38? (брза проверка)

Задача 4404 — Периметри на два квадрати

Текст на задачата

Збирот на периметрите на два квадрати е 52 cm. Ако страната на еден квадрат е подолга за 3 cm од страната на другиот, пресметај ги должините на страните на тие квадрати.

Анализа

Нека страните бидат x и $x + 3$ (cm). Периметарите: $4x$ и $4(x + 3)$. Збир:

$$4x + 4(x + 3) = 52.$$

Решивање за x.

Решение

$$4x + 4x + 12 = 52 \Rightarrow 8x = 40 \Rightarrow x = 5.$$

Тогаш другата страна е $x + 3 = 8$.

Заклучок

Страните се **5 cm** и **8 cm** (проверка: периметри 20 + 32 = 52).

За тутори

- Вежба: нацртај квадрат со страната 5 и друг со 8 и пресметајте периметри индивидуално.
- Продолжна варијанта: ако страната е подолга за k cm, даден е збир на периметрите P — напиши формула за x.