Тетивен четириаголник и тангента

Текст на задачата

На полуправата PX, земени се точките A, B и C (по редослед P, A, B, C), така што $PA = AB = BC$. Во точката A е конструирана нормала на полуправата PX и на неа е избрана точка M така што $MA = AB$. Нека точката N е пресечната точка на правата MC и нормалата повлечена од точката B кон правата MC. Докажи дека: а) Четириаголникот $ABNM$ е тетивен; б) PM е тангента на опишаната кружница околу четириаголникот $ABNM$.

Скица / Конструкција

<Опис на цртежот. Кои се клучните точки? Дали има помошни линии?>

Анализа

За делот под а), барај прави агли кои ‘гледаат’ во иста отсечка. За делот под б), најелегантен начин е преку ‘Степен на точка’ (Power of a Point). Провери дали важи $PM^2 = PA \cdot PB$.

Решение (СИНТЕТИЧКО)

Нека должината на сегментите е a. Значи $PA = AB = BC = MA = a$.

Дел а) Доказ дека $ABNM$ е тетивен

1. Дадено е дека $MA \perp PX$, што значи $\angle MAB = 90^\circ$.
2. Дадено е дека $BN \perp MC$, што значи $\angle BNM = 90^\circ$.
3. Во четириаголникот $ABNM$, темињата A и N лежат на иста страна од дијагоналата BM и важи $\angle BAM = \angle BNM = 90^\circ$.
4. Ова е доволен услов четириаголникот да биде тетивен (точките лежат на кружница со дијаметар BM).

Дел б) Доказ за тангента (Метод на Степен на точка)

За правата PM да биде тангента на кружницата опишана околу $ABNM$, доволно е да важи равенството:

$$PM^2 = PA \cdot PB$$

Пресметка на левата страна: Во правоаголниот $\triangle PAM$ (бидејќи $MA \perp PA$): - $PA = a$ - $MA = a$ Според Питагорова теорема:

$$PM^2 = PA^2 + MA^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

Пресметка на десната страна: - $PA = a$ - $PB = PA + AB = a + a = 2a$ Производот е:

$$PA \cdot PB = a \cdot 2a = 2a^2$$

Заклучок: Бидејќи $PM^2 = PA \cdot PB$, според обратната теорема за степен на точка, PM е тангента на кружницата што минува низ A и B (кружницата на $ABNM$).

Аналитички пристап (само ако е неизбежен)

<Ако мора да се користат координати, објасни зошто синтетичкиот пат е претежок.>

Заклучок

<Краен резултат.>