Resolução do desafio da semana 04

Arthur Klemenchuk*, Igor Bragaia†
Instituto Tecnológico de Aeronáutica,
12228-900 São José dos Campos, São Paulo, Brasil

29 de agosto de 2017

Resumo

No presente trabalho, solucionamos o problema de Laplace-Buffon. Primeiramente, o resolvemos de modo analítico valendo-se do conceito de variáveis aleatórias. Em seguida, utilizando o software R, construímos uma simulação de Monte Carlo para o problema. A partir dela, determinamos uma aproximação para o valor de π.
Palavras-chave: Probabilidade, simulação, R, Problema de Buffon-Laplace.

1 Enunciado do problema

O problema de Buffon-Laplace é uma generalização do clássico problema da agulha de Buffon e baseia-se na seguinte situação: considere uma agulha reta de comprimento $L \leq 1$ que pode ser abandonada numa grade retangular com linhas horizontais e verticais distantes de uma unidade, como ilustrado na Figura 1. O problema consiste em determinar a probabilidade da agulha cruzar ao menos uma das linhas.

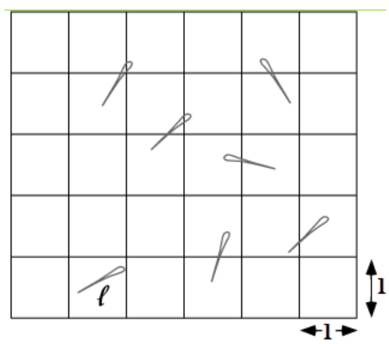

Figura 1: Ilustração do problema de Buffon-Laplace.

*a.klemenchuk98@gmail.com
†igor.bragaia@gmail.com

2 Método de solução

2.1 Solução analítica

A solução do problema de Buffon-Laplace é facilitada utilizando-se três variáveis aleatórias independentes:

- x_1: a distância do centro da agulha até a linha horizontal mais próxima
- x_2: a distância do centro da agulha até a linha vertical mais próxima
- θ: o ângulo entre a agulha e a horizontal.

Sendo $x_1, x_2 \in [0, 1/2]$ e, por simetria, $\theta \in [0, \pi/2]$. A Figura 2 ilustra geometricamente tais variáveis.

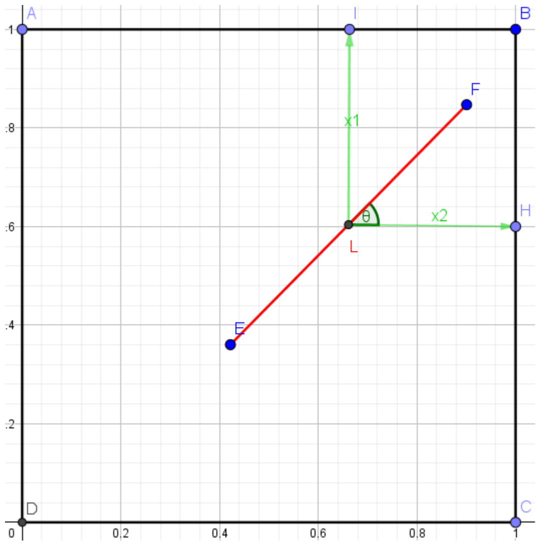

Figura 2: Variáveis utilizadas no problema.

A fim de calcular a probabilidade desejada podemos considerar somente um quadrado unitário e os três eventos a seguir

- A: a agulha intercepta a linha horizontal
- B: a agulha intercepta a linha vertical
- $A \cap B$: a agulha intercepta ambas as linhas.

Pela geometria do problema, temos que A ocorre quando

$$x_1 \leq \frac{L}{2} \sin \theta, \tag{1}$$

ou seja, a projeção horizontal de uma metade da agulha é menor que x_1. Analogamente, B ocorre quando

$$x_2 \leq \frac{L}{2} \cos \theta. \tag{2}$$

Por fim, $A \cap B$ se dá quando ambas as condições (1) e (2) são satisfeitas.

Representando as variáveis aleatórias num mesmo sistema de coordenadas em $\mathcal{R}^3$, temos que o espaço amostral para o experimento é o cubo

$$\Omega = [0, 1/2] \times [0, 1/2] \times [0, \pi/2], \tag{3}$$

o evento A é a região

$$A = \{(x_1, x_2, \theta) \in \Omega \mid x_1 \leq \frac{L}{2} \sin\theta, \tag{4}$$

analogamente, B será o conjunto

$$B = \{(x_1, x_2, \theta) \in \Omega \mid x_2 \leq \frac{L}{2} \cos\theta. \tag{5}$$

Para a intersecção:

$$A \cap B = \{(x_1, x_2, \theta) \in \Omega \mid x_1 \leq \frac{L}{2} \sin\theta \wedge x_2 \leq \frac{L}{2} \cos\theta. \tag{6}$$

Com isso, podemos calcular as probabilidades $P(A)$, $P(B)$ e $P(A \cap B)$ como razões entre os volumes das regiões que compõe tais eventos e o cubo referente ao espaço amostral. Utilizando integrais triplas para calcular os volumes, segue que:

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{1}{\mathrm{Vol}(\Omega)} \iiint_A d\sigma \\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}\right)^{-1} \int_0^{\pi/2} \int_0^{1/2} \int_0^{\frac{L}{2}\sin\theta} dx_1 dx_2 d\theta = \frac{2L}{\pi}, \end{aligned} \tag{7}$$

em que $d\sigma$ é o elemento de área em coordenadas cartesianas.
De modo semelhante,

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{1}{\mathrm{Vol}(\Omega)} \iiint_B d\sigma \\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}\right)^{-1} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\frac{L}{2}\cos\theta} \int_0^{1/2} dx_1 dx_2 d\theta = \frac{2L}{\pi}, \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= \frac{1}{\mathrm{Vol}(\Omega)} \iiint_{A \cap B} d\sigma \\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}\right)^{-1} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\frac{L}{2}\cos\theta} \int_0^{\frac{L}{2}\sin\theta} dx_1 dx_2 d\theta = \frac{L^2}{\pi}. \end{aligned} \tag{9}$$

Sendo $E = A \cup B$ o evento em que a agulha intersecta alguma das linhas do quadrado, temos, enfim, a probabilidade desejada:

$$P(E) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4L - L^2}{\pi}. \tag{10}$$

2.2 Solução computacional

O problema foi modelado computacionalmente através de uma simulação de Monte Carlo implementada em R. O programa construído constitui em sortear três números aleatórios, x_1, x_2, θ, sendo $x_1, x_2 \in [0, 1/2]$ e $\theta \in [0, \pi/2]$ e testar se as condições (1) e (2) são satisfeitas. Por simplicidade, adotou-se uma agulha de comprimento unitário ($L = 1$). Tal procedimento foi repetido várias vezes e, contabilizando a razão entre o número de vezes em que a agulha cruzou uma linha e o número de repetições, estimou-se a probabilidade calculada na seção anterior.

Sendo a o valor estimado para a probabilidade de cruzamento, podemos manipular a expressão (10) e obter a seguinte aproximação para π

$$\pi = \frac{3}{a}. \tag{11}$$

Utilizando (11), o software desenvolvido estima o valor de π e gera um gráfico do valor obtido em função do número de iterações.

O código em R utilizado é exposto abaixo

```r
# {
#   "authors": [
#     "Arthur Klemenchuk Sueiro",
#     "Igor Bragaia",
#     ],
#   "Week": 4,
#   "Challenge": 1,
#   "Date Created": "Ago 25 2017",
#   "Last Modified": "Ago 25 2017"
# }
#--------------------------------------------------------------

# experimento de buffon

buffon <- function(n, plot=TRUE){

#
# Input:
# n    = Maximum amount of meetup tries
#
# Output:
# Chart: ~pi vs. Amount of tries
#

montyhallTheoretical <- pi

has_crossed <- vector(length = n)
pi_measured <- vector(length = n)

L <- 1

for(i in 1:n){
teta <- runif(1,0,pi/2)
```

```
x1 <- runif(1,0,L/2)
x2 <- runif(1,0,L/2)

has_crossed[i] <- if(x1 <= (L/2)*sin(teta) | x2 <= (L/2)*cos(teta) )
    1 else 0

pi_measured[i] <- if(sum(has_crossed[1:n])/i>0) (4*L -
    L^2)/(sum(has_crossed[1:n])/i) else 0
}

if (plot == TRUE){
plot(pi_measured, main ="",
cex.lab = 2,
cex.axis = 2,
xlab = "amount of tries",
ylab = "~pi",
ylim = c(3,3.3),
type = "l", lwd = 2, col = "blue")

abline(h = pi, lty = "dashed", col = "blue")

# Legenda
leg.tex <- c(paste("pi =", round(pi, digits=4)))
legend("topright", leg.tex, col = c(2,4), lty = c(1,1), bty = "n",
    inset = 0.1)
mtext("what is pi value?!", line = 1, adj =0, cex = 1.8)
}

}

## EXAMPLES:

# 50000 tries
buffon(50000)

#----------------------------------------------------------------
# EOF
```

3 Resultados e discussões

O software apresentado foi utilizado para simular o lançamento de 50000 agulhas. O experimento foi repetido 3 vezes. O gráfico do valor estimado para π em função do número de repetições em cada um dos experimentos apresenta-se nas Figuras de 3 a 5.

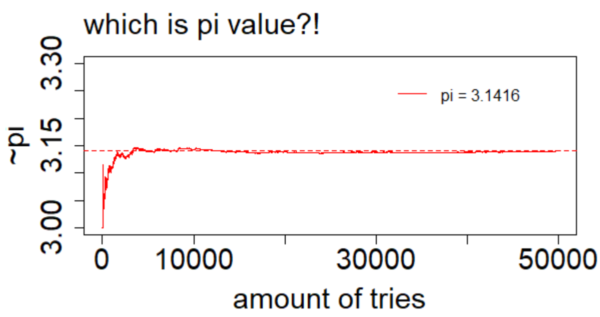

Figura 3: Resultado da primeira simulação de Monte Carlo.

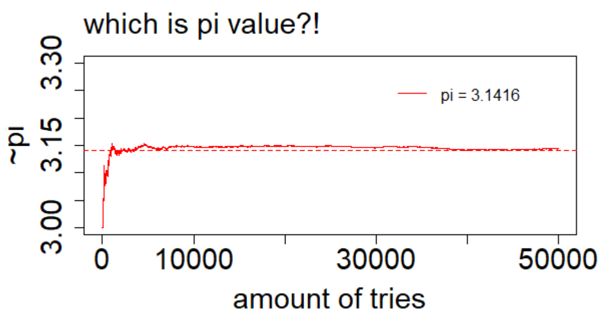

Figura 4: Resultado da segunda simulação de Monte Carlo.

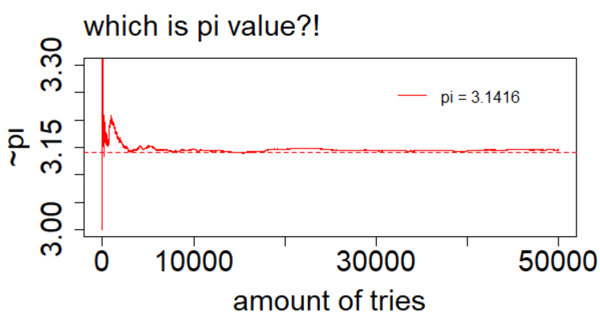

Figura 5: Resultado da terceira simulação de Monte Carlo.

Nota-se que, para um número pequeno de repetições, o valor estimado oscila muito e não apresenta resultados conclusivos. Entretanto, após 10000 repetições, o valor estimado praticamente não sofre alterações, sendo constante. Nota-se que não é possível distinguir visualmente o valor estimado da reta horizontal que indica o valor de π encontrado na literatura. A Tabela 1 exibe os valores numéricos encontrados e seus respectivos erros relativos.

Os baixíssimos erros obtidos (todos inferiores a 0.2%) e o comportamento gráfico observado comprovam o princípio da regularidade estatística e demonstram como a técnica de Simulação de Monte Carlo é poderosa para estimar parâmetros computacionalmente.

Tabela 1: Resultados numéricos das simulações de Monte Carlo

	Valor estimado	Erro
1ª simulação	3.140046	0.049%
2ª simulação	3.143468	0.059%
3ª simulação	3.145248	0.12%

4 Conclusões

O presente trabalho apresentou a resolução analítica do problema de Buffon-Laplace e o simulou através de um software em R. Os resultados dessa simulação foram empregados para estimar o valor de π. Após um número grande de repetições, o programa retornou um valor estimado constante e com erros inferiores a 0.2% em relação ao valor encontrado na literatura, comprovando a validade das técnicas empregadas.