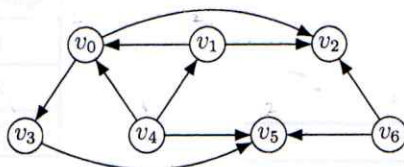


1. (1,2 ponto) Para cada uma das seguintes afirmações sobre o digrafo abaixo, preencha a lacuna com **V** para indicar que a afirmação é verdadeira ou com **F** para indicar que a afirmação é falsa.

- (a) F O grau de saída de  $v_6$  é 0.  
 (b) F A distância de  $v_4$  para  $v_3$  é igual à distância de  $v_3$  para  $v_4$ .  
 (c) V É possível adicionar uma aresta e formar um ciclo de comprimento 4 no digrafo.  
 (d) V Se  $v_i$  e  $v_j$  são vértices tais que a célula  $(j, i)$  da matriz de adjacências do digrafo tem valor 1, então  $v_j$  é vizinho de entrada de  $v_i$ .  
 (e) F O grafo subjacente (obtido ao se desconsiderar as direções das arestas) possui uma coloração própria com 2 cores.



2. (2,0 pontos) Faça o que é pedido a seguir:

- (a) Indique as componentes fortemente conexas do digrafo  $G$  da Figura 1 abaixo.

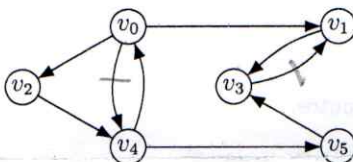


Figura 1: Digrafo  $G$

	0	1	2	3	4	5
0	0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	1	0
3	0	1	0	0	0	0
4	1	0	0	0	0	1
5	0	0	0	1	0	0

- (b) O Método 1 abaixo é um método de um objeto que representa um digrafo. O objeto contém um atributo `num_vertices_`, que armazena o número de vértices do digrafo, e um atributo `matriz_adj_`, que armazena a representação do digrafo como uma matriz de adjacências.

O Método 1 faz alterações no digrafo. Responda se estas alterações ocorrem nos vértices, nas arestas ou em ambos os elementos do digrafo. Além disso, descreva como os vértices ou as arestas são alterados.

#### Método 1

```
1: void Digrafo::faz_alteracoes() {
2:   for (int v = 0; v < (num_vertices_ - 1); v++)
3:     for (int u = (v + 1); u < num_vertices_; u++)
4:       if (matriz_adj_[v][u] == matriz_adj_[u][v])
5:         matriz_adj_[v][u] = 0;
6: }
```

- (c) Considere o Método 1 executado para o digrafo  $G$  da Figura 1. Após a execução do método, quais são os vértices e as arestas do digrafo? (Este item pode ser respondido com um desenho do digrafo.)

3. (2,0 pontos) Uma empresa aérea está planejando uma reformulação da sua malha de voos. Neste processo, os funcionários da empresa querem resolver o seguinte **problema**: A partir de uma cidade de origem, determinar quais cidades de destino são economicamente viáveis de serem mantidas em atividade. Neste contexto, economicamente viável significa existir da cidade de origem para a de destino uma sequência de voos tal que a soma dos custos destes voos seja menor ou igual a um valor máximo definido pela empresa.

Faça o que é pedido a seguir:

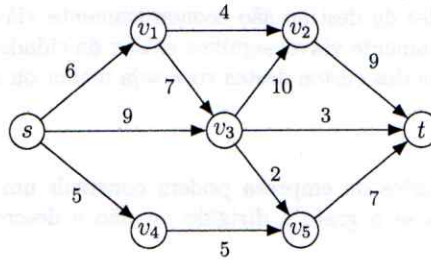
- (a) Explique como os funcionários da empresa podem construir um grafo para utilizar na resolução do problema acima. Diga se o grafo é dirigido ou não e descreva o que os elementos do grafo representam.
  - (b) Elabore um algoritmo para resolver o problema acima. Especifique o que o seu algoritmo recebe como entrada. Você pode descrever o seu algoritmo através de um pseudocódigo (como feito para alguns algoritmos vistos em aula), mas deve fazer isto de maneira clara. No seu algoritmo, você pode realizar chamadas a algoritmos vistos em aula (por exemplo, para utilizar um algoritmo *X*, você pode escrever uma linha no seguinte formato: ... **AlgoritmoX**(...) ...).
4. (2,4 pontos) Uma empresa criou um novo jogo, chamado *duetos pops*. Neste jogo, estão disponíveis pares de cantores famosos que são considerados duetos compatíveis (por exemplo, Chico Buarque e Mercedes Sosa; Ana Castela e Zé Felipe). Os jogadores devem ir escolhendo cantores, o que deve ser feito da seguinte maneira. O primeiro cantor pode ser escolhido livremente. O segundo cantor deve ser escolhido de modo que forme um dueto compatível com o cantor anterior (considerando o exemplo acima, se o primeiro cantor escolhido for Zé Felipe, o segundo pode ser Ana Castela). Cada um dos demais cantores devem ser escolhidos seguindo esta mesma regra. Além disso, o último cantor deve ser escolhido de modo que forme um dueto compatível com o primeiro cantor. Os jogadores ganham o jogo se conseguirem formar uma sequência que contenha cada um dos duetos compatíveis exatamente uma vez.

Os funcionários da empresa já produziram um grande número de unidades do jogo. Agora, eles perceberam que, para cada unidade produzida, deveriam ter analisado a seguinte **questão**: Dados os duetos compatíveis disponíveis no jogo, é possível os jogadores ganharem o jogo? Após constatar o descuido dos funcionários, a empresa decidiu contratar um consultor para resolver esta questão.

Faça o que é pedido a seguir:

- (a) Explique como o consultor pode construir um grafo para utilizar na resolução da questão acima. Diga se o grafo é dirigido ou não e descreva o que os elementos do grafo representam.
- (b) Responda: Entre os problemas estudados nesta disciplina, qual problema pode ser usado para modelar a questão acima? Explique por que de forma precisa e clara.
- (c) Dê um exemplo onde a resposta para a questão acima é sim. Faça isto indicando os duetos compatíveis disponíveis no jogo (você pode considerar cantores fictícios) e apresentando um grafo correspondente que tenha **pelo menos 5 vértices e pelo menos 6 arestas**.

5. (2,4 pontos) Considere a rede de fluxo  $G$  dada abaixo:



Faça o que é pedido a seguir:

- (a) Um fluxo em  $G$  é uma função  $f : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$  ( $f$  atribui um valor para cada aresta de  $G$ ) tal que  $f$  satisfaz a determinadas condições. Explique de forma precisa e clara que condições são estas.
- (b) Seja o fluxo  $f$  em  $G$  dado por

$$\begin{aligned} f(v_1v_2) &= 4, \\ f(sv_1) &= 4, \quad f(v_1v_3) = 0, \quad f(v_2t) = 4, \\ f(sv_3) &= 5, \quad f(v_3v_2) = 0, \quad f(v_3t) = 3, \\ f(sv_4) &= 5, \quad f(v_3v_5) = 2, \quad f(v_5t) = 7, \\ f(v_4v_5) &= 5 \end{aligned}$$

Apresente a rede residual  $G_f$  de  $G$  induzida por  $f$ .

- (c) Considere o Método de Ford-Fulkerson executado para  $G$  e suponha que o fluxo  $f$  do item (b) é o fluxo corrente do método. Na sequência, o método encontra um  $st$ -caminho na rede residual  $G_f$  e atualiza este fluxo. Indique um possível caminho encontrado pelo método e explique as alterações realizadas no fluxo.