Instituto de Matemática - UFRJ

Cálculo Diferencial e Integral IV - 2023.1

29 de março de 2023

Lista de Exercícios 1: Sequências e Séries

Sequências

1. Liste os cinco primeiros termos da sequência.

1.1. $a_n = \dfrac{2n}{n^2+1}$

1.2. $a_n = \dfrac{3^n}{1+2^n}$

1.3. $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{5^n}$

1.4. $a_n = \cos\dfrac{n\pi}{2}$

1.5. $a_n = \dfrac{3(-1)^n}{n!}$

1.6. $\{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)\}$

1.7. $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 5a_n - 3$

1.8. $a_1 = 6, \quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n}$

1.9. $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1+a_n}$

1.10. $a_1 = 2,\ a_2 = 1, \quad a_{n+1} = a_n - a_{n-1}$

2. Determine se a sequência converge ou diverge. Se ela convergir, encontre o limite.

2.1. $a_n = 1 - (0,2)^n$

2.2. $a_n = \dfrac{n^3}{n^3+1}$

2.3. $a_n = \dfrac{3+5n^2}{n+n^2}$

2.4. $a_n = \dfrac{n^3}{n+1}$

2.5. $a_n = e^{1/n}$

2.6. $a_n = \dfrac{3^{n+2}}{5^n}$

2.7. $a_n = \tan\left(\dfrac{2n\pi}{1+8n}\right)$

2.8. $a_n = \sqrt{\dfrac{n+1}{9n+1}}$

2.9. $a_n = \dfrac{n^2}{\sqrt{n^3+4n}}$

2.10. $a_n = e^{2n/(n+2)}$

2.11. $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}n}{n^2+1}$

2.12. $a_n = \dfrac{(-1)^n n^3}{n^3+2n^2+1}$

2.13. $a_n = \cos(n/2)$

2.14. $a_n = \cos(2/n)$

2.15. $\left\{\dfrac{(2n-1)!}{(2n+1)!}\right\}$

2.16. $\left\{\dfrac{\ln n}{\ln 2n}\right\}$

2.17. $\left\{\dfrac{e^n + e^{-n}}{e^{2n}-1}\right\}$

2.18. $a_n = \dfrac{\tan^{-1} n}{n}$

2.19. $\{n^2 e^{-n}\}$

2.20. $a_n = \ln(n+1) - \ln n$

2.21. $a_n = \dfrac{\cos^2 n}{2^n}$

2.22. $a_n = \sqrt[n]{2^{1+3n}}$

2.23. $a_n = n\sin(1/n)$

2.24. $a_n = 2^{-n}\cos n\pi$

2.25. $a_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$

2.26. $a_n = \frac{\sin 2n}{1 + \sqrt{n}}$

2.27. $a_n = \ln(2n^2 + 1) - \ln(n^2 + 1)$

2.28. $a_n = \frac{(\ln n)^2}{n}$

2.29. $a_n = \arctan(\ln n)$

2.30. $a_n = n - \sqrt{n+1}\sqrt{n+3}$

2.31. $a_n = \frac{n!}{2^n}$

2.32. $a_n = \frac{(-3)^n}{n!}$

3. Determine se a sequência dada é crescente, decrescente ou não monótona. A sequência é limitada?

   3.1. $a_n = (-2)^{n+1}$

   3.2. $a_n = \frac{1}{n^2 + 3}$

   3.3. $a_n = \frac{2n - 3}{3n + 4}$

   3.4. $a_n = n(-1)^n$

   3.5. $a_n = ne^{-n}$

   3.6. $a_n = \frac{n}{n^2 + 1}$

   3.7. $a_n = n + \frac{1}{n}$

4. Mostre que a sequência definida por

$$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n}$$

   é crescente e $a_n < 3$ para todo n. Deduza que $\{a_n\}$ é convergente e encontre seu limite.

5. Mostre que a sequência definida por

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \frac{1}{3 - a_n}$$

   satisfaz $0 < a_n \leq 2$ e é decrescente. Deduza que a sequência é convergente e encontre seu limite.

Séries

6. Calcule os oito primeiros termos da sequência de somas parciais corretas para quatro casas decimais. Parece que a série é convergente ou divergente?

   6.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$

   6.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$

   6.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \sqrt{n}}$

   6.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$

7. Seja $a_n = \frac{2n}{3n + 1}$

   (a) Determine se $\{a_n\}$ é convergente.

   (b) Determine se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

8. Determine se a série geométrica é convergente ou divergente. Se for convergente, calcule sua soma.

8.1. $3+4+\frac{16}{3}-\frac{64}{9}+\dots$

8.2. $\frac{1}{8}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-1+\dots$

8.3. $10-2+0,4-0,08+\dots$

8.4. $1+0,4+0,16+0,064+\dots$

8.5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 6(0,9)^{n-1}$

8.6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(-9)^{n-1}}$

8.7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{4^n}$

8.8. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2})^n}$

8.9. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{3^{n+1}}$

8.10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{3^{n-1}}$

9. Determine se a série é convergente ou divergente. Se for convergente, calcule sua soma.

9.1. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^2}{k^2-1}$

9.2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+2)}{(k+3)^2}$

9.3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{3^n}$

9.4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^n}{2^n}$

9.5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{2}$

9.6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[(0,8)^{n-1}-(0,3)^n\right]$

9.7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)$

9.8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{1}{1+(\frac{2}{3})^n}$

9.9. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{3}\right)^k$

9.10. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (\cos 1)^k$

9.11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arctan n$

9.12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5^n}+\frac{2}{n}\right)$

9.13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^n}+\frac{1}{n(n+1)}\right)$

9.14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e^n}{n^2}\right)$

10. Determine se a série é convergente ou divergente expressando s_n como uma soma telescópica. Se for convergente, calcule sua soma.

10.1. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$

10.2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n}{n+1}$

10.3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+3)}$

10.4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\frac{1}{n^2}-\cos\frac{1}{(n+1)^2}\right)$

10.5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{1/n}-e^{1/(n+1)}\right)$

10.6. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3+n}$

11. Encontre os valores de x para os quais a série converge. Calcule a soma da série para esses valores de x.

11.1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-5)^n x^n$

11.2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(x+2)^n$

11.3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{3^n}$

11.4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-4)^n(x-5)^n$

11.5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{x^n}$

11.6. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin^n x}{3^n}$

11.7. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}e^{nx}$

12. Se a n-ésima soma parcial de uma série é $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é $s_n = 3 - n2^{-n}$, encontre a_n e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.