ITA 1975 - MATEMÁTICA

Notações

$\mathbb{N}$ $= \{1, 2, 3, \dots\}$: o conjunto dos números naturais.
$\mathbb{R}$: o conjunto dos números reais.
$\mathbb{C}$: o conjunto dos números complexos.
i : unidade imaginária, $i^2 = -1$.

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são os cartesianos retangulares.

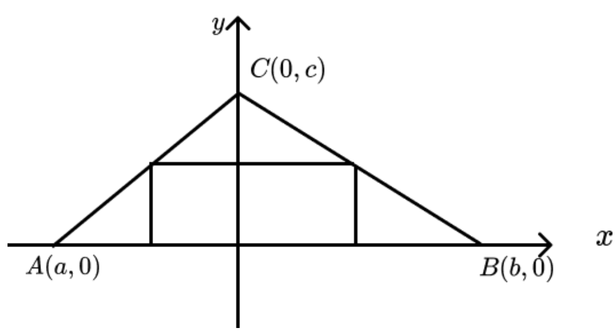
Questão 1. Qual é o valor de $\displaystyle\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}^2$

A ( ) $\binom{n}{n}$ **B** ( ) $\binom{2n}{n}$ **C** ( ) $\binom{n^2}{n}$ **D** ( ) 2^n **E** ( ) n.d.a.

Questão 2. Seja $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ definida em $\mathbb{R}$. Se g for a função inversa de f, o valor de $e^{g(7/25)}$ será:

A ( ) $\dfrac{1}{3}$ **B** ( ) $\dfrac{7e}{25}$ **C** ( ) $\log_e\left(\dfrac{25}{7}\right)$ **D** ( ) $e^{g(7/25)^2}$ **E** ( ) n.d.a.

Questão 3. Uma equação do lugar geométrico das intersecções das diagonais dos retângulos inscritos no triângulo ABC e com um lado em $\overline{AB}$ (figura abaixo) é:



A ( ) $x + \dfrac{2(a+b)}{c}y = a + b$

B ( ) $x - \dfrac{a+b}{c}y = \dfrac{a+b}{2}$

C ( ) $ax + 3(b+c)y = \dfrac{a+c}{2}$

D ( ) $x + cy + ab = 0$

E ( ) n.d.a.

Questão 4. A expressão $1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{5}{16} + \ldots$ vale

A ( ) 4 **B** ( ) $\frac{9}{2}$ **C** ( ) $\frac{7}{2}$ **D** ( ) $3,8$ **E** ( ) n.d.a.

Questão 5. Se dividirmos um polinômio $P(x)$ por $x-2$ o resto é 13 e se dividirmos $P(x)$ por $x+2$ o resto é 5. Supondo que $R(x)$ é o resto da divisão de $P(x)$ por x^2-4, podemos afirmar que o valor de $R(X)$, para $x=1$ é:

A ( ) 0 **B** ( ) 7 **C** ( ) 9 **D** ( ) 11 **E** ( ) n.d.a.

Questão 6. Seja A uma matriz quadrada de ordem n, tal que $A^{-1} = A^t$. Se $\det A = 1$, dizemos que A é uma matriz de rotação, e se $\det A = -1$, A é uma matriz de reflexão. Apoiados em tais definições, podemos afirmar que:

A ( ) se n é ímpar, o produto de duas matrizes de reflexão é de reflexão.

B ( ) a soma de duas matrizes de rotação é de rotação.

C ( ) o produto de duas matrizes de rotação é de rotação.

D ( ) a matriz inversa de toda matriz de rotação é de reflexão.

E ( ) n.d.a.

Questão 7. Sabendo-se que $\sin x = \frac{m-n}{m+n}$, $n > 0$ e $m > 0$, podemos afirmar que $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$ é igual a

A ( ) $\frac{n}{m}$ **B** ( ) $\frac{\sqrt{m}}{n}$ **C** ( ) $1 - \frac{n}{m}$ **D** ( ) $\sqrt{\frac{n}{m}}$ **E** ( ) n.d.a.

Questão 8. A respeito da equação $(x^2+3x+2)^2 - 8(x^2+2x) - 8x - 1$ podemos afirmar que

A ( ) todas as raízes são inteiras.

B ( ) uma raiz é nula e as outras são positivas.

C ( ) a soma dos módulos das raízes é 6.

D ( ) o módulo da maior raiz é 5.

E ( ) n.d.a.

Questão 9. Se Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 e Z_5 são as raízes da equação $(Z+1)^5 - Z^5 = 0$, e se $R(Z)$ indica a parte real de Z então podemos afirmar que:

A ( ) $R(Z_K) = 0$ para $K = 1,2,3$ e $R(Z_i) = 1$ para $i = 4,5$.

B ( ) $R(Z_K) = -\frac{1}{2}$ para $K = 1,2,3,4,5$.

C ( ) Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5 são números reais (não complexos).

D ( ) $R(Z_K) = 2$ para $K = 1,2,3$ e $R(Z_i) = 0$ para $i = 4,5$.

E ( ) n.d.a.

Questão 10. Os lados de dois octógonos regulares têm, respectivamente 5 cm e 12 cm. O comprimento do lado de um terceiro octógono regular de área igual à soma das áreas dos outros dois, é:

A ( ) 17 cm **B** ( ) 15 cm **C** ( ) 14 cm **D** ( ) 13 cm **E** ( ) n.d.a.

Questão 11. Admitindo-se que o polinômio $P(y) = y^5 - (\tan u)^2 y^3 + (\tan u)y + \sin^2 u - \tan^2 u$ é divisível pelo polinômio $Q(y) = y + \cot^2 u - \csc^2 u$, onde $\frac{\pi}{2} < u < \pi$, podemos assegurar que:

A ( ) $\tan u$ é um número irracional negativo.

B ( ) $\csc u = -\sec u$.

C ( ) $u = \frac{2\pi}{3}$.

D ( ) $\tan u$ é um núemro tal que $1 < \tan u < 0$.

E ( ) n.d.a.

Questão 12. Se Z_1 e Z_2 são números complexos, $Z_1 + Z_2$ e $Z_1.Z_2$ são ambos reais, então podemos afirmar que

A ( ) Z_1 e Z_2 são ambos reais ou $Z_1 = \overline{Z_2}$.

B ( ) Z_1 e Z_2 são números complexos não reais.

C ( ) Z_1 e Z_2 são números reais irracionais.

D ( ) Z_1 é um números complexo puro e Z_2 é número real.

E ( ) n.d.a.

Questão 13. Consideremos uma esfera de raio $r = 1$ cm e um ponto P fora desta esfera. Sabendo que a distância deste ponto P à superfície da esfera mede 2 cm. Qual é a razão K entre a área da superfície da esfera e a da calota visível do ponto P?

A ( ) $K = 1$. **B** ( ) $K = 2$. **C** ( ) $K = 3$. **D** ( ) $K = \frac{5}{2}$. **E** ( ) n.d.a.

Questão 14. Seja S o conjunto das soluções do sistema de desigualdades:

$$\begin{cases} 2x + y - 3 > 0 \\ x - 2y + 1 < 0 \\ y - 3 < 0 \\ x + my - 5 < 0 \end{cases}$$

onde m é real. A representação geométrica de S, em coordenadas cartesianas ortogonais (x, y), é:

A ( ) um quadrilátero para qualquer $m > 0$.

B ( ) um triângulo isósceles para qualquer $m < 0$.

C ( ) um triângulo retângulo pata $m < 0$ ou $\frac{5}{3} < m < 4$.

D ( ) S é o conjunto vazio para $m > \frac{5}{3}$.

E ( ) n.d.a.

Questão 15. Sendo a, b, c, d as raízes da equação $2x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 7x + 2 = 0$ podemos afirmar que:

A ( ) a, b, c, d são reais positivas.

B ( ) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ é igual a $\dfrac{13}{5}$.

C ( ) a, b, c, d não são reais.

D ( ) $\dfrac{1}{bcd} + \dfrac{1}{acd} + \dfrac{1}{abd} + \dfrac{1}{abc}$ é a soma das raízes.

E ( ) n.d.a.

Questão 16. As medidas dos catetos de um triângulo retângulo são $(\sin x)$ cm e $(\cos x)$ cm. Um estudante calculou o volume do sólido gerado pela rotação deste triângulo em torno da hipotenusa e obteve como resultado π cm^3. Considere este resultado como certo, podemos afirmar que:

A ( ) $x = \dfrac{\pi}{6}$ **B** ( ) $x = \dfrac{\pi}{3}$ **C** ( ) $x = \dfrac{\pi}{4}$ **D** ( ) $x = \dfrac{\pi}{5}$ **E** ( ) n.d.a.

Questão 17. Sejam as matrizes reais $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e m um número real. Seja: $AX = mX$, Então podemos afirmar que:

A ( ) Se $\det(A - mI) \neq 0$, então $x + y = 0$ e $x.y \neq 0$.

B ( ) Se $\det(A - mI) = 0$, então existem dois números reais x, y tais que $x + y \neq 0$ ou $x.y \neq 0$.

C ( ) Se $\det(A - mI) = 0$, então $\det A = 0$ e $m = 0$.

D ( ) Se $\det A = 0$, então não existem dois números reais x, y tais que $AX = mX$.

E ( ) n.d.a.

Questão 18. As dimissões de um paralelepípedo retângulo são proporcionais aos números $\log_e t$, $\log_e t^2$, $\log_e t^3$ e a área total é 792 cm^2. Sabendo-se que a soma das dimenssões vale 12 vezes a razão de proporcionalidade. Quais são os valores destas dimenssões?

A ( ) 6, 12 e 18. **B** ( ) 5, 10 e 15. **C** ( ) 2, 3 e 4. **D** ( ) 2, 4 e 8. **E** ( ) n.d.a.

Questão 19. O número de soluções inteiras e não negativas da equação $x + y + z + 1 = 7$ é:

A ( ) $\dbinom{7}{4}$ **B** ( ) $\dbinom{11}{4}$ **C** ( ) $\dbinom{10}{3}$ **D** ( ) $\dbinom{11}{3}$ **E** ( ) n.d.a.

Questão 20. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo inscrito em uma circunferência. Sabe-se que $\hat{A} = 2\hat{C}$, $\hat{B} > \hat{D}$ e $\tan \hat{B}. \tan \hat{D} + \sin \hat{A}. \sin \hat{C} = -\dfrac{9}{4}$. Neste caso, os valores de $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$ são respectivamente:

A ( ) 150°, 45°, 75°, 30°

B ( ) 90°, 120°, 45°, 60°

C ( ) 120°, 150°, 60°, 30°

D ( ) 120°, 120°, 60°, 60°

E ( ) n.d.a.

Questão 21. Num triângulo escaleno ABC, os lados opostos aos ângulos A, B, C medem, respectivamente, a, b, c. Então a expressão: $a\sin(\hat{B}-\hat{C})+b\sin(\hat{C}-\hat{A})+c\sin(\hat{A}-\hat{B})$

A ( ) $a\sin\hat{A}+b\sin\hat{B}+c\sin\hat{C}$.

B ( ) $\sin^2\hat{A}+\sin^2\hat{B}+\sin^2\hat{C}$.

C ( ) 0.

D ( ) 1.

E ( ) n.d.a.

Questão 22. Considere a circunferência C que pelos pontos $(0,0)$, $(2,0)$ e $(0,2)$ em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais. Uma das retas tangentes a esta circunferência, que passa pelo ponto $(3,5)$, tem por equação

A ( ) $x+y-3=0$.

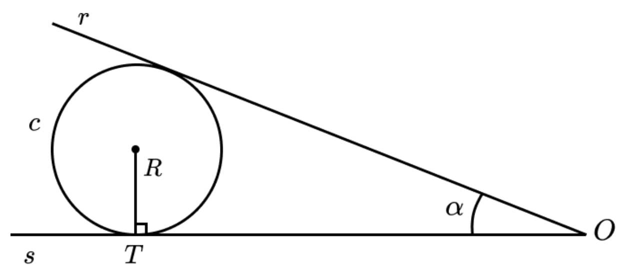
B ( ) $7x-y+8=0$.

C ( ) $x-y+2=0$.

D ( ) $6x-y-16=0$

E ( ) n.d.a.

Questão 23. Se, na figura abaixo, c é uma circunferência de raio R, r e s são retas tangentes à circunferência e $\overline{OT}=2R$ então o ângulo α das retas r e s deve verificar uma das alternativas seguintes:



A ( ) $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$ e $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$

B ( ) $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$ e $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$

C ( ) $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$

D ( ) $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$

E ( ) n.d.a.

Questão 24. A respeito da equação exponencial $4^x+6^x=9^x$ podemos afirmar que:

A ( ) $x=9\log_{10}\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$ é uma raiz.

B ( ) $x=\left[\log_{10}\left(\dfrac{3}{2}\right)\right]^{-1}.\log_{10}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ é uma raiz.

C ( ) $x=\left[\log_{10}\left(\dfrac{3}{2}\right)\right]^{-1}.\log_{10}\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$ é uma raiz.

D ( ) $x=\left[\log_{10}\left(\dfrac{3}{2}\right)\right]^{-1}.\log_{10}\left(\dfrac{1+\sqrt{6}}{2}\right)$ é uma raiz.

E ( ) n.d.a.

Questão 25. Seja $S = \log_3(\tan x_1) + \log_3(\tan x_2) + \log_3(\tan x_3) + \ldots$ onde $x_1 = \dfrac{\pi}{3}$ e $x_{n+1} = \arctan(\sqrt{\tan x_n})$, $n = 2, 3, \ldots$.

A ( ) $S = \log_3(\tan x_1 + \tan x_2 + \tan x_1 + \ldots)$.

B ( ) $S = -1$

C ( ) $S = 2$

D ( ) $S = 1$

E ( ) n.d.a.