MATEMÁTICA

Notações

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$: o conjunto dos números naturais.
$\mathbb{R}$: o conjunto dos números reais.
$\mathbb{C}$: o conjunto dos números complexos.
i : unidade imaginária, $i^2 = -1$.

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são os cartesianos retangulares.

Questão 1. Considere $g : \{a, b, c\} \to \{a, b, c\}$ uma função tal que $g(a) = b$ e $g(b) = a$. Então, temos:

A ( ) a equação $g(x) = x$ tem solução se, e somente se, g é injetora

B ( ) g é injetora, mas não é sobrejetora

C ( ) g é sobrejetora, mas não é injetora

D ( ) se g não é sobrejetora, então $g(g(x)) = x$ para todo x em $\{a, b, c\}$

E ( ) n.d.a.

Questão 2. Sejam A e B conjuntos infinitos de números naturais. Se $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são funções tais que $f(g(x)) = x$, para todo x em B e $g(f(x)) = x$, para todo x em A, então, temos:

A ( ) existe x_0 em B, tal que $f(y) = x_0$, para todo y em A

B ( ) existe a função inversa de f

C ( ) existem x_0 e x_1 em A, tais que $x_0 \neq x_1$ e $f(x_0) = f(x_1)$

D ( ) existem a em B, tal que $g(f(g(a))) \neq g(a)$

E ( ) n.d.a.

Questão 3. Suponhamos que $z_1 = a + xi$ e $z_2 = a + yi$, $a \neq 0$, $x \neq 0$ são dois números complexos, tais que $z_1.z_2 = 2$ Então temos: (Observação $\bar{z} indica conjugado de z$)

A ( ) $z_1 = \bar{z}_2$ e $|z_1| = |z_2| = 2$

B ( ) $z_1 = z_2$ e $|z_1| = |z_2| = \sqrt{2}$

C ( ) $z_1 = \bar{z}_2$ e $|z_1| = |z_2| = \sqrt{2}$

D ( ) $z_1 + z_2 = 2a$ e $a^2 + y^2 = 4$

E ( ) n.d.a.

Questão 4. As raízes de ordem 4 do número $e^{\pi i/2}$, onde i é a unidade imaginária, são:

A ( ) $z_k = \cos\theta_k + i\sin\theta_k$, onde $\theta_k = \dfrac{1+4k}{8}\pi$ com $k = 0, 1, 2, 3$

B ( ) $z_k = e^{i\theta_k}$, onde $\theta_k = \dfrac{1+3k}{8}\pi$ com $k = 0, 1, 2, 3$

C ( ) $z_k = e^{i\theta_k}$, onde $4k\pi$ com $k = 0, 1, 2, 3$

D ( ) $z_k = e^{i\theta_k}$, onde $\theta_k = \dfrac{1-4k}{8}\pi$ com $k = 0, 1, 2, 3$

E ( ) n.d.a.

Questão 5. Os valores reais a e b, tais que os polinômios $x^3 - 2ax^2 + (3a+b)x - 3b$ e $x^3 - (a+2b)x + 2a$ sejam divisíveis por $x+1$, são:

A ( ) dois números inteiros positivos

B ( ) dois números inteiros negativos

C ( ) números inteiros, sendo que um é positivo e o outro negativo

D ( ) dois números reais, sendo um racional e outro irracional.

E ( ) n.d.a.

Questão 6. Se designarmos por S_n a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de infinitos termos, de razão $q > 1$ e primeiro termo $a_1 > 0$, podemos afirmar que:

A ( ) $\dfrac{S_n}{S_{2n} - S_n} = \dfrac{S_{2n} - S_n}{S_{3n} - S_{2n}}$

C ( ) $\dfrac{S_n}{S_{2n} - S_n} = S_{3n} - S_{2n}$

E ( ) n.d.a.

B ( ) $\dfrac{S_n}{S_{2n} - S_n} = \dfrac{S_{2n}}{S_{3n} - S_{2n}}$

D ( ) $S_{3n} = S_{2n} + S_n$

Questão 7. Dado um paralelepípedo retângulo, de volume V, cujas arestas estão em progressão geométrica, de razão q, podemos garantir que sua área total é dada por:

A ( ) $\dfrac{2V^{2/3}}{q}(q^2 + q + 1)$

C ( ) $\dfrac{V^{2/3}}{q+1}(q^2 + q + 1)$

E ( ) n.d.a.

B ( ) $\dfrac{V^{2/3}}{q}(q^2 + q - 1)$

D ( ) $\dfrac{V^2}{q^3}(q + 1)$

Questão 8. Numa superfície esférica de área $A > 1$, considere inscrito um cone, tal que a área

A ( ) a equação tem uma e somente uma solução.

B ( ) a equação tem duas e somente duas soluções.

C ( ) a equação tem três e somente três soluções.

D ( ) a equação não tem solução.

E ( ) n.d.a.

Questão 9. O valor da expressão $x = \dfrac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$, quando $\cos\theta = -\dfrac{3}{7}$ e $\tan\theta < 0$, é:

A ( ) $4\sqrt{10}/31$

C ( ) $2\sqrt{10}/15$

E ( ) n.d.a.

B ( ) $-2\sqrt{10}/3$

D ( ) $3\sqrt{10}/7$

Questão 10. $\left[\dfrac{1 - \tan x}{1 + \tan x}\right]^2$ vale:

A ( ) $\dfrac{1-2\sin 2x}{1+\sin 2x}$

B ( ) $\dfrac{1+2\sin 2x}{1-\sin 2x}$

C ( ) $\dfrac{1+\sin 2x}{1+\sin 2x}$

D ( ) $\dfrac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x}$

E ( ) n.d.a.

Questão 11. Seja $BC = CD$ no quadrilátero $ABCD$, mostrado na figura abaixo. Então podemos garantir que:

A ( ) $\dfrac{\sin\gamma}{\sin\delta} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$

B ( ) $\delta\alpha = \beta\gamma$

C ( ) $\tan\alpha\tan\beta = \tan\delta\tan\gamma$

D ( ) $BC^2 = AB.AB$

E ( ) n.d.a.

Questão 12. A reta que passa pelas interseções das circunferências $x^2+y^2=1$ e $(x-1)^2+(y-1)^2=2$, é tal que:

A ( ) tem equação $\dfrac{3}{5}x - \dfrac{2}{3}y + \dfrac{1}{4} = 0$

B ( ) não passa pela origem.

C ( ) passa pela origem.

D ( ) não é perpendicular à reta que passa pelos centros das circunferências.

E ( ) n.d.a.

Questão 13. Os zeros da função $P(x) = 3x^6 - 8x^5 + 3x^4 + 2x^3$:

A ( ) todos inteiros.

B ( ) 2 imaginários puros e 4 reais

C ( ) todos racionais

D ( ) 4 racionais e 2 irracionais

E ( ) n.d.a.

Questão 14. A equação $x^n - 1$, onde n é um número natural maior do que 5, tem:

A ( ) 1 raiz positiva, 1 raiz negativa e $(n-2)$ raízes complexas quando n é par.

B ( ) 1 raiz positiva, $(n-1)$ raízes não reais quando n é par.

C ( ) 1 raiz negativa, $(n-1)$ raízes complexas quando n é ímpar.

D ( ) 1 raiz positiva, 1 raiz negativa e $(n-2)$ raízes complexas quando n é um número natural qualquer.

E ( ) n.d.a.

Questão 15. O valor absoluto da soma das duas menores raízes da equação $x^2 + 1/x^2 + x + 1/x = 4$ é:

A ( ) 2 **B** ( ) 3 **C** ( ) $\dfrac{4-\sqrt{3}}{2}$ **D** ( ) 4 **E** ( ) n.d.a.

Questão 16. Se a, b e c são raízes da equação $x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0$, então o valor de $1/a + 1/b + 1/c$ é:

A ( ) 1/4 **B** ( ) -1/4 **C** ( ) 3/4 **D** ( ) 3/2 **E** ( ) n.d.a.

Questão 17. O conjunto de todos os valores de x para os quais existe um y real de modo que

$$y = \log\left[\log\left(\frac{7-2x-x^2}{3-4x^2}\right)\right]$$

A ( ) intervalo aberto A, de extremos $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$

B ( ) intervalo aberto A, de extremos $-\sqrt{3}$ e $\sqrt{3}$

C ( ) intervalo aberto A, de extremos 0 e $\sqrt{3}/2$

D ( ) intervalo aberto A, de extremos $-\sqrt{3}/2$ e 1

E ( ) n.d.a.

Questão 18. Um lado de um triângulo ABC mede lcm. Os valores dos ângulos e dos lados do triângulo formam duas progressões aritméticas. A área S desse triângulo é:

A ( ) $l^2(\sqrt{3}+1)\,cm^2$

B ( ) $l^2(\sqrt{3}-1)\,cm^2$

C ( ) $l^2\sqrt{3}\,cm^2$

D ( ) $\dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}\,cm^2$

E ( ) n.d.a.

Questão 19. Sendo $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reais, o maior valor de n tal que as igualdades ao lado são verdadeiras é:

$$\begin{aligned}&\log 123478 = a_1\\ &\log a_1 = a_2\\ &\ldots\\ &\log a_{n-1} = a_n\end{aligned}$$

A ( ) $n = 3$ **B** ( ) $n = 4$ **C** ( ) $n = 5$ **D** ( ) $n = 6$ **E** ( ) n.d.a.

Questão 20. Seja $M = 1/a^2 + 1/b^2 + 1/c^2$, onde a, b e c são as raízes da equação $x^3 - \sqrt{3}x^2 + 54 = 0$. Então podemos afirmar que:

A ( ) $\log_3 M$ é um número irracional

B ( ) $\log_3 M$ é um número primo

C ( ) $\log_3 M = 5/3$

D ( ) $\log_3 M = -5/2$

E ( ) n.d.a.

Questão 21. Deseja-se construir uma ferrovia ligando o ponto A ao ponto B que está $40\sqrt{2}$ km a sudeste de A. Um lago, na planície onde estão A e B impede a construção em linha reta. Para contornar o lago, a estrada será construída e 2 trechos retos com o vértice no ponto C, que está 36 km a leste e 27 km ao sul de A. O comprimento do trecho CB é:

A ( ) 182

B ( ) 183

C ( ) 184

D ( ) 185

E ( ) n.d.a.

Questão 22. O conjunto dos valores de k, para os quais $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - k$ tem um ou três zeros reais entre 1 e 2, é:

A ( ) $k < 2$

B ( ) $1 < k < 2$

C ( ) $2 > k$ ou $k > 6$

D ( ) $k > 7$

E ( ) n.d.a.

Questão 23. Seja c um quarto de circunferência AB de raio R e centro O, e seja t a reta tangente a c em A. Traça-se pelo centro O de c uma reta que corta c num ponto M, e corta a reta tangente num ponto N, distintos de A. Se k a razão entre o volume gerado pelo setor OAM e o volume gerado pelo triângulo OAN, ambos obtidos girando-se de 2π em torno de AO. O comprimento do segmento AN é igual ao raio R se:

A ( ) $1 < k < 2,5$

B ( ) $2,5 \leq k \leq 3$

C ( ) $0 < k \leq 2$

D ( ) $0 < k < 1,5$

E ( ) n.d.a.

Questão 24. Um cone equilátero está inscrito em uma esfera de raio 4 cm. Cortam-se os sólidos (esfera e cone) por um plano paralelo à base, de modo que a diferença entre as áreas das secções seja igual à área da base do cone. O raio da secção do cone é:

A ( ) $2\sqrt{3}$ cm

B ( ) $\sqrt{3}$ cm

C ( ) $\sqrt{3}/3$ cm

D ( ) $4\sqrt{3}/3$ cm

E ( ) n.d.a.

Questão 25. Seja a_k um número complexo, solução da equação $(z+1)^5 + z^5 = 0$, $K = 0, 1, 2, 3, 4$. Podemos afirmar que:

A ( ) todos os z_k , $K = 0, 1, \ldots, 4$ estão sobre uma circunferência.

B ( ) todos os z_k , $K = 0, 1, \ldots, 4$ estão sobre uma reta paralela ao eixo real.

C ( ) todos os z_k , $K = 0, 1, \ldots, 4$ estão sobre uma reta paralela ao eixo imaginário.

D ( ) a equação não admite solução

E ( ) n.d.a.