MATEMÁTICA

Notações

$\mathbb{N}$ $= \{1, 2, 3, \dots\}$: o conjunto dos números naturais.
$\mathbb{R}$: o conjunto dos números reais.
$\mathbb{C}$: o conjunto dos números complexos.
i : unidade imaginária, $i^2 = -1$.

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são os cartesianos retangulares.

Questão 1. Sabe-se que a média harmónica entre o raio e a altura de um cilindro de revolução vale 4. Quanto valerá a relação do volume para a área total deste cilindro?

A ( ) 1 **B** ( ) 2 **C** ( ) 2,5 **D** ( ) 3 **E** ( ) n.d.a.

Questão 2. O crescimento de uma certa cultura de bactérias obedece à função $X(t) = Ce^{kt}$, onde $X(t)$ é o número de bactérias no tempo $t \geq 0$; C e k são constantes positivas, (e é a base do logaritmo neperiano). Verificando-se que o número inicial de bactérias $X(0)$, duplica em 4 horas, quantas bactérias se pode esperar no fim de 6 horas?

A ( ) 3 vezes o número inicial

B ( ) 2,5 vezes o número inicial

C ( ) $2\sqrt{2}$ vezes o número inicial

D ( ) $2\sqrt[3]{2}$ vezes o número inicial

E ( ) n.d.a.

Questão 3. Um navio, navegando em linha reta, passa sucessivamente pelos pontos A, B e C. O comandante quando o navio está em A, observa um farol em L, e calcula o ângulo $C\hat{A}L = 30°$. Após navegar 4 milhas até B, verifica o ângulo $C\hat{B}L = 75°$. Quantas milhas separam o farol do ponto B?

A ( ) 4 **B** ( ) $2\sqrt{2}$ **C** ( ) 8/3 **D** ( ) $\sqrt{3}/2$ **E** ( ) n.d.a.

Questão 4. Consideremos um cone de revolução de altura h, e um cilindro nele inscrito. Seja d a distância do vértice do cone à base superior do cilindro. A altura H de um segundo cilindro inscrito neste cone (diferente do primeiro) e de mesmo volume do primeiro é dada por:

A ( ) $H = \dfrac{h - \sqrt{h - d}}{3}$

B ( ) $H = \dfrac{h \pm \sqrt{h^2 - d^2}}{3}$

C ( ) $H = \dfrac{h - d + h\sqrt{h^2 - d^2}}{2}$

D ( ) $H = \dfrac{h + d - \sqrt{(h - d)(h + 3d)}}{2}$

E ( ) n.d.a.

Questão 5. O coeficiente de $a^{n-1-p}b^p$ no produto de:

$$a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \cdots + \binom{k}{p}a^{k-p}b^p + \cdots + b^k$$

por $(a+b)$, se $k=n$, vale:

A ( ) $\binom{n}{p}$

B ( ) $\binom{n+1}{p}$

C ( ) $\binom{n-1}{p}$

D ( ) $\binom{n+1}{p+1}$

E ( ) n.d.a.

Questão 6. A desigualdade $\sqrt[x-3]{x}\sqrt{x} \leq 1/x$ é válida para:

A ( ) qualquer x positivo

B ( ) $1 \leq x \leq 3$

C ( ) $0 < x \leq 1$ ou $2 \leq x \leq 3$

D ( ) $0 < x \leq 1$ ou $2 \leq x < 3$

E ( ) n.d.a.

Questão 7. Suponhamos que p e q são os catetos de um triângulo retângulo e h a altura relativa à hipotenusa do mesmo. Nestas condições, podemos afirmar que a equação:

$$\frac{2}{p}x^2 - \frac{2}{h}x + \frac{1}{q} = 0$$

A ( ) não admite soluções reais

B ( ) admite uma raiz da forma $m\sqrt{-1}$, onde $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$

C ( ) admite sempre raízes reais

D ( ) admite uma raiz da forma $-m\sqrt{-1}$, onde $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$

E ( ) n.d.a.

Questão 8. A respeito da equação:

$$3x^2 - 4x + \sqrt{3x^2 - 4x - 6} = 18$$

podemos dizer:

A ( ) $\dfrac{2 \pm \sqrt{10}}{3}$ são raízes

B ( ) a única raiz real é $x = 3$

C ( ) a única raiz real é $x = 2 + \sqrt{10}$

D ( ) tem duas raízes reais e imaginárias

E ( ) n.d.a.

Questão 9. A base AB, de uma folha de papel triangular que está sobre uma mesa, mede 12 cm. O papel é dobrado levantando-se sua base, de modo que a dobra fique paralela à mesma. A área da parte do triângulo que fica visível após o papel ter sido dobrado, vale 0,30 da área do triângulo ABC. O comprimento da dobra vale:

A ( ) 9,6 cm

B ( ) 9,4 cm

C ( ) 10 cm

D ( ) 8 cm

E ( ) n.d.a.

Questão 10. Os valores de x que verificam a desigualdade:

$$\frac{1}{\log_e x} + \frac{1}{\log_x e - 1} > 1$$

A ( ) $x > 1$

B ( ) $x > e2$

C ( ) $0 < x < e$

D ( ) $1 < x < e$

E ( ) n.d.a.

Questão 11. Sejam $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}$, onde $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ e $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$. Então

$$\sum_{p=0}^{n} (-1)^{p-n}(-1)^{p}(-1)^{n-p}\binom{n}{p}$$

vale:

A ( ) -1 **B** ( ) 0 **C** ( ) 1 **D** ( ) 2 **E** ( ) n.d.a.

Questão 12. A desigualdade $a^3 + 1/a^3 > a^2 + 1/a^2$ é verdadeira se:

A ( ) $|a| > 1$

B ( ) $a \neq 1$, $a \neq 0$

C ( ) $a > 0$ e $a \neq 1$

D ( ) $|a| < 1$, $a \neq 0$

E ( ) n.d.a.

Questão 13. Entre 4 e 5 horas o ponteiro das horas de um relógio fica duas vezes em ângulo reto com o ponteiro dos minutos. Os momentos destas ocorrências serão:

A ( ) $4\text{h}5\frac{2}{11}\text{min}$ e $4\text{h}38\frac{5}{11}\text{min}$

B ( ) $4\text{h}5\frac{5}{11}\text{min}$ e $4\text{h}38\frac{2}{11}\text{min}$

C ( ) $4\text{h}5\frac{5}{11}\text{min}$ e $4\text{h}38\frac{5}{12}\text{min}$

D ( ) $4\text{h}5\frac{3}{11}\text{min}$ e $4\text{h}38\frac{7}{11}\text{min}$

E ( ) n.d.a.

Questão 14. Seja a equação do 4° grau

$$x^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t = 0$$

onde q, r, s e t são números racionais não nulos tais que: L, M, N e P são raízes reais dessa equação. O valor de $\frac{L}{MNP} + \frac{M}{LNP} + \frac{N}{LMP} + \frac{P}{LMN}$ é:

A ( ) $\frac{(q^2 - 2r)}{t}$

B ( ) $\frac{(q^2 - r + s)}{t}$

C ( ) $\frac{(q^2 - r)}{t}$

D ( ) $\frac{q}{r} + \frac{r}{s} + \frac{s}{t} + \frac{t}{q}$

E ( ) n.d.a.

Questão 15. Um octaedro regular é inscrito num cubo, que está inscrito numa esfera, e que está inscrita num tetraedro regular. Se o comprimento da aresta do tetraedro é 1, qual é o comprimento da aresta do octaedro?

A ( ) $\sqrt{\frac{2}{27}}$ **B** ( ) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ **C** ( ) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ **D** ( ) $\frac{1}{6}$ **E** ( ) n.d.a.

Questão 16. Certa liga contém 20% de cobre e 5% de estanho. Quantos quilos de cobre e quantos quilos de estanho devem ser adicionados a 100 quilos dessa liga para a obtenção de uma outra com 30% de cobre e 10% de estanho? (Todas as percentagens em kg).

A ( ) 8 kg de cobre e 6 kg de estanho

B ( ) 17,50 kg de cobre e 7,5 kg e estanho

C ( ) 18 kg de cobre e 7,5 kg de estanho

D ( ) 17,50 kg de cobre e 7,8 kg de estanho.

E ( ) n.d.a.

Questão 17. A lei de decomposição do radium no tempo $t \geq 0$, é dada por $M(t) = Ce^{-kt}$, onde $M(t)$ é a quantidade de radium no tempo t, C e k são constantes positivas e e é a base do logaritmo neperiano. Se a metade da quantidade primitiva $M(0)$, desaparece em 1600 anos, qual a quantidade perdida em 100 anos?

A ( ) $1 - 100^{-1}$ da quantidade inicial

B ( ) $1 - 2^{-6}$ da quantidade inicial

C ( ) $1 - 2^{-16}$ da quantidade inicial

D ( ) $1 - 2^{-1/16}$ da quantidade inicial

E ( ) n.d.a.

Questão 18. Seja a equação:

$$(\log_e m)\sin x \pm \cos x = \log_e m$$

Quais as condições sobre m para que a equação dada admita solução?

A ( ) $m > 0$ se $x = (2k + \frac{1}{2})\pi$; $m > 0$ e $m \neq 1$ se $x \neq (2k + \frac{1}{2})\pi$

B ( ) $m \neq 0$ se $x = (2k + \frac{1}{2})\pi$; $m \geq e$ e $m \neq 1$ se $x \neq (2k + \frac{1}{2})\pi$

C ( ) $m > e$ se $x = (2k + \frac{1}{2})\pi$; $m \geq 1$ se $x \neq (2k + \frac{1}{2})\pi$

D ( ) $m > -1/e$ e $m \neq 0$ se $x = (2k + \frac{1}{2})\pi$; $m \neq 0$ se $x \neq (2k + \frac{1}{2})\pi$

E ( ) n.d.a.

Questão 19. Eliminando θ no sistema de equações ($a > 0$), temos:

$$\begin{cases} x\sin\theta + y\cos\theta = 2a\sin\theta \\ x\cos\theta - y\sin\theta = a\cos\theta \end{cases}$$

A ( ) $(x+y)^{\frac{2}{3}} - (x-y)^{\frac{2}{3}} = 2a(x+y)^2$

B ( ) $(x+y)^2 + (x-y)^2 = (x+y)a$

C ( ) $(x+y)^{\frac{2}{3}} + (x-y)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}$

D ( ) impossível eliminar θ

E ( ) n.d.a.

Questão 20. Um cliente deposita num fundo de investimento Cr$ 1.000,00 anualmente, durante 5 anos. Seu capital, no final de cada ano, é acrescido de 10%. No final de 5 anos seu capital acumulado será Cr$:

A ( ) 6.715,00

B ( ) 6.715,62

C ( ) 6.715,60

D ( ) 6.715,61

E ( ) n.d.a.

Questão 21. Durante o eclipse total do sol de 07 de março de 1970 a largura da faixa da escuridão total foi de 100 km. Em cada ponto do eixo central desta faixa, a duração do período de escuridão total foi de 3 minutos. Qual foi a duração deste período num ponto situado a 10 km do limite da faixa de escuridão total?

A ( ) 1 min 36 seg

B ( ) 1 min 48 seg

C ( ) 1 min 30 seg

D ( ) 0 min 36 seg

E ( ) n.d.a.

Questão 22. Seja a equação:

$$3\tan 3x = [3(\log_e t)^2 - 4\log_e t + 2]\tan x,\ x \neq n\pi$$

Quais as condições sobre t para que a equação acima admita solução?

A ( ) $0 < t < 1/e$ ou $e^{1/3} < t < e$ ou $t > e^{7/3}$

B ( ) $e^{1/3} \leq t \leq e^{3/2}$ ou $0 < t < e$

C ( ) $e^{1/3} < t \leq e^{2/3}$ ou $1/e > t$

D ( ) $t > 0$ e $t \neq 1$

E ( ) n.d.a.

Questão 23. Seja L o comprimento do eixo de uma caldeira cilíndrica terminada por duas semi-esferas. Sabe-se que a área da superfície total da caldeira é $4\pi k^2$, com $0 < k < L/2$. As dimensões da parte cilíndrica da caldeira valem:

A ( ) k^2/L e $L + 3k^2/L$

B ( ) k^2/L e $k + (3/4)L$

C ( ) $2k^2/L$ e $L - 4k^2/L$

D ( ) $k^2/2L$ e $L + (4/2)k^2$

E ( ) n.d.a.

Questão 24. Seja S uma semi-esfera de raio R dado. Sejam p e q dois planos paralelos e distantes entre si $R/2$ e tais que interceptem S paralelamente à sua base. Seja T o tronco de cone com bases b e c, onde b e são as interseções de p e q com S. Seja x o valor da menor das distâncias d e D, onde d é a distância entre p e a base de S, e D é a distância entre q e a base de S. Seja k

$$k = \left\{ \left(R^2 - x^2\right) \left[R^2 - \left(x + \frac{R}{2} \right)^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Então o volume de T, como função de x, $0 \leq x \leq R/2$ vale:

A ( ) $\frac{\pi R}{6} \left(\frac{7}{4} R^2 - 2x^2 - Rx + k \right)$

B ( ) $\frac{\pi R}{12} \left(\frac{7}{4} R^2 - 2x^2 - Rx + k \right)$

C ( ) $\frac{\pi R}{12} \left(\frac{7}{4} R^2 - 2x^2 - Rx - k \right)$

D ( ) $\frac{\pi R}{6} \left(\frac{7}{4} R^2 - 2x^2 - Rx - k \right)$

E ( ) n.d.a.

Questão 25. A solução da equação

$$\log_u \left[\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{2(k+1)!} \right) \right] .x = 1$$

com $u = 1/(n+2)!$, é

A ( ) $\frac{2}{[(n+1)! - 1]}$

B ( ) $\frac{2}{[n(n+1)! - 1]}$

C ( ) $\frac{2}{[(n+2)! - (n+2)]}$

D ( ) $\frac{[(n+1)! - 1]}{2n}$

E ( ) n.d.a.