

Logaritmo e funções logarítmicas

Igor Cortes Junqueira

Definição

O logaritmo de b (logaritmando) na base a é um número x definido pelo inverso da exponenciação, seguindo a relação:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b \quad a > 0, a \neq 1, b > 0$$

Algumas consequências são imediatas da definição. Para todos a, b, c e m números reais:

i . $\log_a 1 = 0$

ii . $\log_a a = 1$

iii . $\log_a a^m = m$

iv . $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$

v . $a^{\log_a b} = b$

Propriedades

Além disso, logaritmos apresentam ainda algumas propriedades, definidas para a, b, c e m números reais:

i . $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

ii . $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

iii . $\log_a b^m = m \cdot \log_a b$

iv . $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$

Casos específicos

Existe o chamado cologaritmo, raramente utilizado ou comentado, definido:

$$\text{colog}_a b = -\log_a b = \log_a (1/b) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

Quando a base é omissa, por convenção, a base é 10. Ou seja:

$$\log a = \log_{10} a \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

Ainda, existe o logaritmo neperiano, ou logaritmo natural, cuja base é o número de Euler (2, 718281...), muito útil em cálculo no ensino superior, e denotado como:

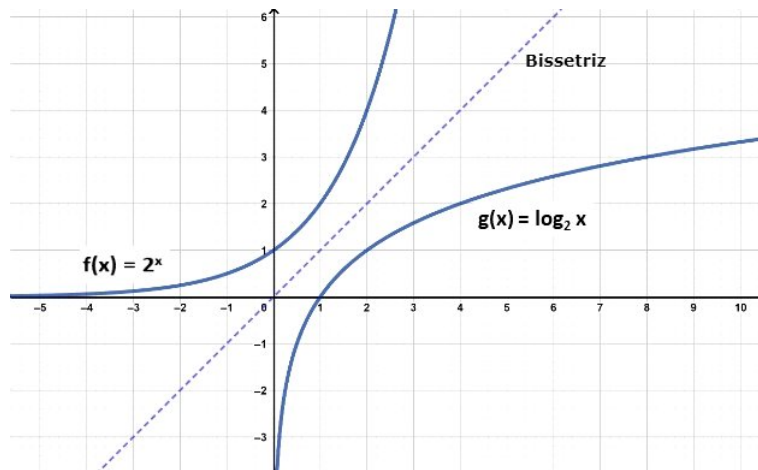
$$\ln a = \log_e a \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

Função logarítmica

A função logarítmica de base a , para a real positivo diferente de 1, é definida como:

$$f(x) = \log_a x$$

A função logarítmica é a inversa da função exponencial, e seus gráficos são espelhados pela bissetriz $y = x$. O gráfico da logarítmica, por consequência, está localizado no primeiro e quarto quadrantes, e nunca toca o eixo y , vide exemplo abaixo.



Para base $a > 1$, a função logarítmica é crescente. Caso contrário ($0 < a < 1$), será decrescente.

Exercícios

1. Mostre que $\log_2 \sqrt{8} = 1.5$
2. (Fuvest - SP) Se $x^5 = 1000$ e $b^3 = 100$, calcule logaritmo de x na base b .
3. Sabendo que $\log 2 \approx 0.3$ e $\log 3 \approx 0.48$, calcule $\log_9 64$.
4. (Enem 2016) Em 2011, um terremoto de magnitude 9,0 na escala Richter causou um devastador tsunami no Japão, provocando um alerta na usina nuclear de Fukushima. Em 2013, outro terremoto, de magnitude 7,0 na mesma escala, sacudiu Sichuan (sudoeste da China), deixando centenas de mortos e milhares de feridos. A magnitude de um terremoto na escala Richter pode ser calculada por:

$$M = \frac{2}{3} \log \left(\frac{E}{E_0} \right)$$

Sendo E a energia, em kWh, liberada pelo terremoto e E_0 uma constante real positiva. Considere que E_1 e E_2 representam as energias liberadas nos terremotos ocorridos no Japão e na China, respectivamente. Qual a relação entre E_1 e E_2 ?

5. (PUC - SP) As funções $f(x) = \frac{3}{2} + \log(x - 1)$ e $g(x) = k \cdot 2^{(-x+1)}$, com k um número real, se intersectam no ponto $(2, \frac{3}{2})$. Determine o valor de $g(f(11))$