Frações e Números Fracionários

Igor Cortes Junqueira

$$\frac{Numerador}{Denominador} = \frac{N}{D}$$

Tipos de fração

- Frações Próprias ($N < D$)
  Ex.: $\frac{3}{5}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{9}{10}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{27}{30}$; $\frac{11}{12}$;
- Frações Impróprias ($N > D$)
  Ex.: $\frac{7}{5}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{11}{10}$; $\frac{10}{9}$; $\frac{35}{6}$; $\frac{12}{7}$;
- Frações Aparentes ($N = kD, k \in \mathbb{Z}$)
  Ex.: $\frac{10}{5}$; $\frac{6}{2}$; $-\frac{20}{10}$; $\frac{27}{9}$; $\frac{27}{3}$; $-\frac{12}{4}$;
- Frações Equivalentes ($N1 = kN2, D1 = kD2, k \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{N1}{D1} = \frac{N2}{D2}$)
  Ex.: $\frac{3}{5}$ e $\frac{9}{15}$; $\frac{4}{7}$ e $\frac{16}{28}$; $\frac{27}{3}$ e $\frac{18}{2}$;
- Frações Mistas (Impróprias representadas como inteiro + própria)
  Ex.: $3\frac{3}{5}$; $2\frac{1}{2}$; $1\frac{9}{10}$; $2\frac{3}{4}$; $5\frac{1}{5}$; $7\frac{1}{3}$;

Operações

- Adição
  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{b*x}{b*a} + \frac{a*y}{a*b} = \frac{b*x + a*y}{a*b}$
  Ex.:
  1) $\frac{3}{2} + \frac{2}{5} = \frac{5*3}{5*2} + \frac{2*2}{2*5} = \frac{15}{10} + \frac{4}{10} = \frac{19}{10}$
  2) $\frac{3}{2} + \frac{10}{6} = \frac{6*3}{6*2} + \frac{2*10}{2*6} = \frac{18}{12} + \frac{20}{12} = \frac{38}{12}$, ainda, $\frac{38}{12} = \frac{2*19}{2*2*3} = \frac{19}{6}$
  3) $\frac{1}{3} + \frac{4}{6} = \frac{6*1}{6*3} + \frac{3*4}{3*6} = \frac{6}{18} + \frac{12}{18} = \frac{18}{18}$, ainda, $\frac{18}{18} = 1$
- Subtração
  $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{b*x}{b*a} - \frac{a*y}{a*b} = \frac{b*x - a*y}{a*b}$
  Ex.:
  1) $\frac{3}{2} - \frac{2}{5} = \frac{5*3}{5*2} - \frac{2*2}{2*5} = \frac{15}{10} - \frac{4}{10} = \frac{11}{10}$
  2) $\frac{3}{2} - \frac{10}{6} = \frac{6*3}{6*2} - \frac{2*10}{2*6} = \frac{18}{12} - \frac{20}{12} = \frac{-2}{12}$, ainda, $\frac{-1}{12} = -\frac{2}{2*2*3} = -\frac{1}{6}$
  3) $\frac{1}{3} - \frac{4}{6} = \frac{6*1}{6*3} - \frac{3*4}{3*6} = \frac{6}{18} - \frac{12}{18} = \frac{-6}{18}$, ainda, $\frac{-6}{18} = -\frac{2*3}{2*3*3} = -\frac{1}{3}$

- Multiplicação

  $\frac{x}{a} * \frac{y}{b} = \frac{x * y}{a * b}$

  Ex.:

  1) $\frac{3}{2} * \frac{2}{5} = \frac{3 * 2}{2 * 5} = \frac{6}{10}$, ainda, $\frac{6}{10} = \frac{2 * 3}{2 * 5} = \frac{3}{5}$

  2) $\frac{3}{2} * \frac{10}{6} = \frac{3 * 10}{2 * 6} = \frac{30}{12}$, ainda, $\frac{30}{12} = \frac{2 * 3 * 5}{2 * 2 * 3} = \frac{5}{2}$

  3) $\frac{1}{3} * \frac{4}{6} = \frac{1 * 4}{3 * 6} = \frac{4}{18}$, ainda, $\frac{4}{18} = \frac{2 * 2}{2 * 3 * 3} = \frac{2}{9}$

- Divisão

  $\frac{x}{a} \div \frac{y}{b} = \frac{x}{a} * \frac{b}{y} = \frac{b * x}{a * y}$

  Ex.:

  1) $\frac{3}{2} \div \frac{2}{5} = \frac{3}{2} * \frac{5}{2} = \frac{3 * 5}{2 * 2} = \frac{15}{4}$

  2) $\frac{3}{2} \div \frac{10}{6} = \frac{3}{2} * \frac{6}{10} = \frac{3 * 6}{2 * 10} = \frac{18}{20}$, ainda, $\frac{18}{20} = \frac{2 * 3 * 3}{2 * 2 * 5} = \frac{9}{10}$

  3) $\frac{1}{3} \div \frac{4}{6} = \frac{1}{3} * \frac{6}{4} = \frac{1 * 6}{3 * 4} = \frac{6}{12}$, ainda, $\frac{6}{12} = \frac{2 * 3}{2 * 2 * 3} = \frac{1}{2}$

- Potenciação

  $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a}{b} * \frac{a}{b} * \ldots = \frac{a^x}{b^x}$

  Ex.:

  1) $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$

  2) $\left(\frac{10}{6}\right)^3 = \frac{10^3}{6^3} = \frac{1000}{216}$, ainda, $\frac{1000}{216} = \frac{2 * 2 * 2 * 5 * 5 * 5}{2 * 2 * 2 * 3 * 3 * 3} = \frac{2^3 * 5^3}{2^3 * 3^3} = \frac{125}{27}$

  3) $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1^2}{3^2} = \frac{1}{9}$

- Radiciação

  $\sqrt[x]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[x]{a}}{\sqrt[x]{b}}$

  Ex.:

  1) $\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$

  2) $\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, ainda, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} * 1 = \frac{1}{\sqrt{3}} * \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{1 * \sqrt{3}}{\sqrt{3} * \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

  3) $\sqrt[3]{\frac{2}{8}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$, ainda, $\frac{\sqrt[3]{2}}{2} = \frac{2^{1\backslash 3}}{2} = 2^{1\backslash 3} * 2^{-1} = 2^{-2\backslash 3}$ (ou $\frac{1}{2^{2\backslash 3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}}$)

Denominador Comum

Para se operar com frações, em especial quando se lida com várias delas, é prático igualar os denominadores, permitindo assim realização de todas as operações de maneira imediata. A maneira mais simples de conseguir um denominador comum, é com o produto de todos os denominadores. Porém, em alguns casos, isso pode gerar um denominador muito grande, dificultando operações. Por isso, é de praxe realizar a fatoração em números primos dos denominadores para se obter o MMC (Mínimo Múltiplo Comum).

Para se obter o MMC entre n números, basta pegar todos os fatores primos que aparecem em suas decomposições, sempre com o maior expoente. Por exemplo:

- $MMC(60, 18, 45) = MMC(\mathbf{2^2} * 3 * 5, 2 * \mathbf{3^2}, 2 * \mathbf{5}) = 2^2 * 3^2 * 5 = 180$
- $MMC(98, 12) = MMC(2 * \mathbf{7^2}, \mathbf{2^2} * \mathbf{3}) = 2^2 * 3 * 7^2 = 588$

Redutibilidade

Frações podem ser reduzidas através da fatoração de seus componentes. Frações em estado reduzido são irredutíveis.

$$\frac{25}{15} = \frac{5 * 5}{3 * 5} = \frac{5}{3}, \text{ ou ainda, } \frac{5}{3} = \frac{3}{3} + \frac{2}{3} = 1\frac{2}{3}$$

Frações Geratrizes

Frações cuja divisão origina dízimas periódicas, onde um ou mais algarismos, chamados *período*, se repetem infinitamente.

$$\frac{4}{9} = 0,444444... = 0,\overline{4} \qquad \frac{144}{99} = 1,454545... = 1,\overline{45}$$

Para determinar a fração geratriz de uma dízima periódica, seguimos os seguintes passos:

1. Igualar a dízima a uma variável, escrevendo uma equação do primeiro grau;
2. Multiplicar os dermos da equação por um múltiplo de 10, de forma a igualar as partes decimais, 'trazendo' um período para a parte inteira;
3. Subtrair a equação inicial da obtida no passo anterior;
4. Isolar a incógnita;

Exemplo 1: $0,8888... = 0,\overline{8}$
I) $x = 0,8888...$
II) $10x = 8,8888...$
II - I) $9x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{9}$

Exemplo 2: $2,3616161... = 2,3\overline{61}$
I) $x = 2,3616161...$
II) $10X = 23,616161...$
III) $1000x = 2361,616161...$
III - II) $990x = 2338 \Rightarrow x = \frac{2338}{990}$

Equações Simples

Equações envolvendo frações são solucionáveis fazendo-se uso das propriedades e operações com frações. Um caso clássico, onde se comparam duas frações, pode-se fazer *multiplicação cruzada*, onde:

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} \Rightarrow \frac{y * a}{y * x} = \frac{x * b}{x * y} \Rightarrow \frac{ay}{xy} = \frac{bx}{xy} \Rightarrow ay = bx$$

Seguem alguns exemplos de equações.

- $\frac{x}{2} = 4$

  $x = 4 * 2$

  $x = 8$

- $\frac{3}{x} = \frac{4}{3}$

  $\frac{3*3}{3*x} = \frac{x*4}{x*3}$

  $\frac{9}{3x} = \frac{4x}{3x}$

  $9 = 4x$

  $x = \frac{9}{4}$

- $\frac{3}{2} = \frac{5}{x} + \frac{1}{5}$

  $\frac{5x*3}{5x*2} = \frac{10*5}{10*x} + \frac{2x*1}{2x*5}$

  $\frac{15x}{10x} = \frac{50}{10x} + \frac{2x}{10x}$

  $\frac{15x}{10x} = \frac{2x+50}{10x}$

  $15x = 2x + 50$

  $13x = 50$

  $x = \frac{50}{13}$

Razão e Proporção

A razão estabelece uma comparação entre duas grandezas, sendo o coeficiente entre dois números. Já a proporção é determinada pela igualdade entre duas razões, ou ainda, quando duas razões possuem o mesmo resultado. Razões são usual e convenientemente representadas por frações.