# Exercício 1 - Aula 4
# EET-01

Igor Caldeira Magalhães
igorcmag@gmail.com

08 de maio de 2020

## 1 Enunciado

### 1.1 a)

Derivar (demonstrar) a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

### 1.2 b)

Derivar (demonstrar) a relação de Euler.

## 2 Solução

### 2.1 a)

Para todos $a_i, b_i$ e $x$ reais vale

$$(a_1x + b_1)^2 + (a_2x + b_2)^2 + ... + (a_nx + b_n)^2 \geqslant 0.$$

Reagrupando, temos

$$(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)x^2 + 2(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)x + (b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2) \geqslant 0$$

independentemente de $x$. Logo, o determinante da equação deve ser não positivo, ou seja,

$$4(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 - 4(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2) \leqslant 0$$
$$\therefore (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2) \geqslant (a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n).$$

Se $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ e $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$, então a desigualdade pode ser escrita como

$$\mid a \mid\mid b \mid \geqslant \mid ab \mid$$

### 2.2 b)

A expansão de $e^x$ em série de Taylor em torno de a $= 0$ é dada por

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

com raio de de convergência infinito. A fórmula é válida para $x$ real, mas vamos verificar o que obteríamos para $ix$, com $x$ real.

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

Observe que as parcelas do lado direito da equação são, respectivamente, as expansões de $cosx$ e $senx$. Motivados por isso, **definimos** a exponencial de um número complexo $z = x + y \cdot i$, com $x$ e $y$ reais, como

$$e^z = e^{x+y\cdot i} = e^x(cosy + i \cdot seny)$$