Relatório do Laboratório 2 - Teorema da Amostragem
EET-01

Igor Magalhães
igorcmag@gmail.com

Rafael Gonçalves
rafael.goncalves@ga.ita.br

23 de maio de 2020

1 Aliasing de um Senoidal

1.1 a)

O gráfico solicitado se encontra na figura 1.

1.2 b)

O gráfico com plot se encontra na figura

1.3 c)

A sequência de gráficos se encontra na figura. Fica claro que a frequência aparente da senóide aumenta.

1.4 d)

A sequência de gráficos se encontra na figura. Fica claro que a frequência aparente da senóide diminui. Isto se deve ao fato de estarmos trabalhando com uma função 2π-periódica, ou seja, devemos olhar para o resto da divisão da frequência pelo maior múltiplo de 2π ainda menor que a frequência.

1.5 e)

A sequência de gráficos se encontra na figura. Pelo que foi explicado no item anterior, a frequência aparente deve aumentar no intervalo proposto, exatamente o que fora observado.

2 Aliasing de um Chirp

2.1 a)

$$f_i(t) = \mu t + f_l = 600t + 4 \therefore f_i(0) = 4kHz \therefore f_i(50ms) = 600 \cdot 0.05 + 4 = 34kHz$$

Assim, a faixa de frequência é de 0 a $34kHz$.

2.2 b)

$$c[n] = c(nT) = c(\frac{n}{f_s}) = cos(\frac{\pi\mu}{{f_s}^2}n^2 + \frac{2\pi f_l}{f_s}n + \psi)$$

Fazendo $f_s = 8kHz$ e $\psi = 0$:

$$c[n] = cos(\frac{3}{320}\pi n^2 + \pi n)$$

Perceba que a função é par. O sinal de amostragem foi gerado pelo **código** e seu gráfico está exposto na **figura**.

Listing 1: Código em MATLAB para gerar o sinal amostrado do item (b) do exercício 2, bem como seus gráficos 'plot' e 'stem'.

```
set(0, 'defaulttextinterpreter', 'Latex');

n = 0:100;
c = cos((3/320)*pi*(n.^2)' + pi*n');
subplot(1,2,1);plot(n, c);title('$c[n]$ plot');xlabel('$n$');ylabel('$c[n]$');
subplot(1,2,2);stem(n, c);title('$c[n]$ stem');xlabel('$n$');ylabel('$c[n]$');
```

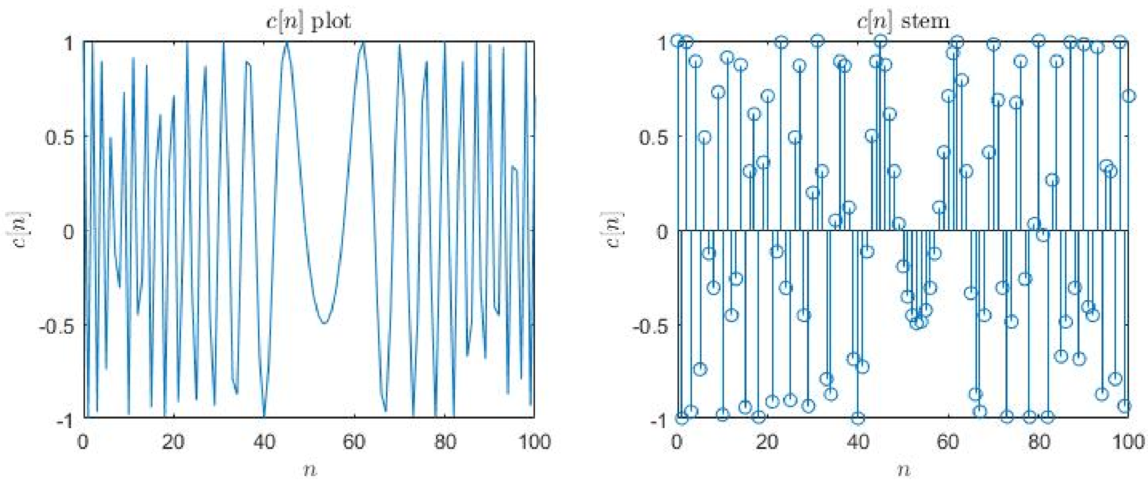

Figura 1: Gráficos 'plot' e 'stem', respectivamente, de $c[n]$

2.3 c)

$$f_i(t) = 0 \therefore \frac{\mu}{{f_s}^2}n + \frac{f_l}{f_s} = 0 \therefore n \approx -53$$

.

Isso é confirmado pelo gráfico, pois a função é par, isto é, $f(-n) = f(n)$, podemos olhar em $n = 53$. No tempo, isso equivale a $t = \frac{n}{f_s} = 6.67ms$. No **código**, plotamos $c[n]$ para n de 0 a 1000, como mostra a **figura**. Vemos que as regiões de baixa frequência estão regularmente espaçadas.

Listing 2: Código em MATLAB para gerar o sinal amostrado do item (b) do exercício 2, bem como seu gráfico 'plot' para n variando de 0 a 1000.

```
set(0, 'defaulttextinterpreter', 'Latex');

n = 0:1000;
c1 = cos((3/320)*pi*(n.^2)' + pi*n');
plot(n, c1);title('$c[n]$ plot');xlabel('$n$');ylabel('$c[n]$');
```

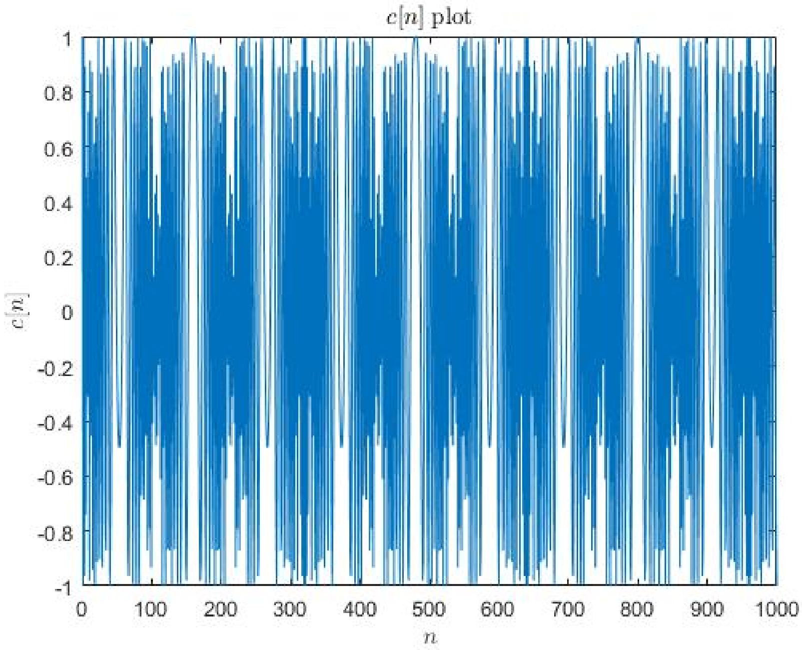

Figura 2: Gráfico 'plot' de $c[n]$ com n de 0 a 1000

.

3 Escutando o Aliasing

3.1 a)

O esboço dos 3 sinais em um subplot do MATLAB segue na figura.

Analisando os sons reproduzidos, é notável que quanto maior a frequência, mais agudo é seu som, além disso, o som parece ser o mesmo durante os 5 segundos.

3.2 b)

O esboço dos 3 sinais em um subplot do MATLAB segue na figura.

Analisando os sons reproduzidos, temos:

20kHz: A frequência parece aumentar gradativamente.

8.5kHz: A frequência, que parece menor do que o áudio anterior, aumenta gradativamente e no final dos 5 segundos diminui.

3.4kHz: A frequência começa diminuindo, o som pára momentaneamente e a frequência volta a aumentar.

4 Montagem de uma Onda Sinoidal

As equações são:

$$2 = Acos(\phi)$$

$$1 = Acos(\omega + \phi)$$

$$-1 = Acos(2\omega + \phi)$$

Somando a segunda com a terceira, tem-se:

$$Acos(\omega + \phi) + Acos(2\omega + \phi) = 0 \therefore cos(\frac{3\omega}{2} + \phi)cos(\frac{\omega}{2}) = 0$$

$$cos(\frac{\omega}{2}) = 0 \therefore \omega = (2k+1)\pi,$$

ou

$$cos(\frac{3\omega}{2} + \phi) = 0 \therefore \omega = \frac{(2k+1)\pi}{3} - \frac{2\phi}{3}.$$

Substituindo A da primeira equação na segunda, tem-se

$$\frac{1}{2}cos(\phi) = cos(\omega + \phi).$$

No primeiro caso, $cos(\omega + \phi) = cos((2k+1)\pi + \phi) = -cos(\phi)$, logo $\frac{1}{2} = -1$, absurdo. No segundo caso

$$\frac{1}{2}cos(\phi) = cos(\frac{2(k+1)\pi}{3} + \frac{\phi}{3})$$

A resolução analítica desta equação é complicada e depende do resto que k deixa na divisão por 3, isto é, é preciso separar em três casos. Para mostrar que não há uma única solução, é suficiente darmos um contra-exemplo.

Para $k = 1$, temos a solução $\phi = \pi$ no intervalo $[0, 2\pi)$. A solução final fica

$$x_1(t) = -2cos(\frac{\pi}{3}t + \pi) = 2cos(\frac{\pi}{3}t)$$

Para $k = 4$, temos a mesma equação em ϕ e portanto a mesma solução $\phi = \pi$. No entanto, dessa vez a solução final fica

$$x_2(t) = -2cos(\frac{7\pi}{3}t + \pi) = 2cos(\frac{7\pi}{3}t)$$

Portanto, a informação não é suficiente para determinar $x(t)$.

5 Interpolação Polinomial Linear

5.1 a)

5.2 b)

5.3 c)

6 Filtragem Passa-Baixo Ideal

6.1 a)

No **codigo**, implementamos a função *interpolador-seno*, que recebe o vetor x de amostras, o vetor n dos índices correspondentes, e o período de amostragem T_s. Ele então reconstrói o sinal contínuo x_r dado por

$$x_r(t) = \sum_{i=1}^{length(n)} x[i]\frac{sin(\pi(t - n[i]T_s)/T_s)}{\pi(t - n[i]T_s)/T_s}$$

Listing 3: Código em MATLAB que cria a função interpoladora senoidal.

```
function f = interpolador_seno(x, n, Ts)
syms t;
f(t) = 0*t;
for i=1:length(n);
    f(t) = f(t) + x(i)*sin(pi*(t - n(i)*Ts)/Ts)/(pi*(t - n(i)*Ts)/Ts);
end
```

6.2 b)

Usamos a função criada para interpolar uma amostra de um único ponto $x(0) = 1$, como descrito no **codigo** e exposto na **figura**.

Listing 4: Código em MATLAB interpolar a amostra de um único ponto x(0)=1, bem como plotar seu gráfico.

```
set(0, 'defaulttextinterpreter', 'Latex');

n = [0];
x = [1];
Ts = 1;
x_r = interpolador_seno(x, n, Ts);
fplot(x_r);title('x(0)=1');xlabel('$t$');ylabel('$x_r(t)$');
```

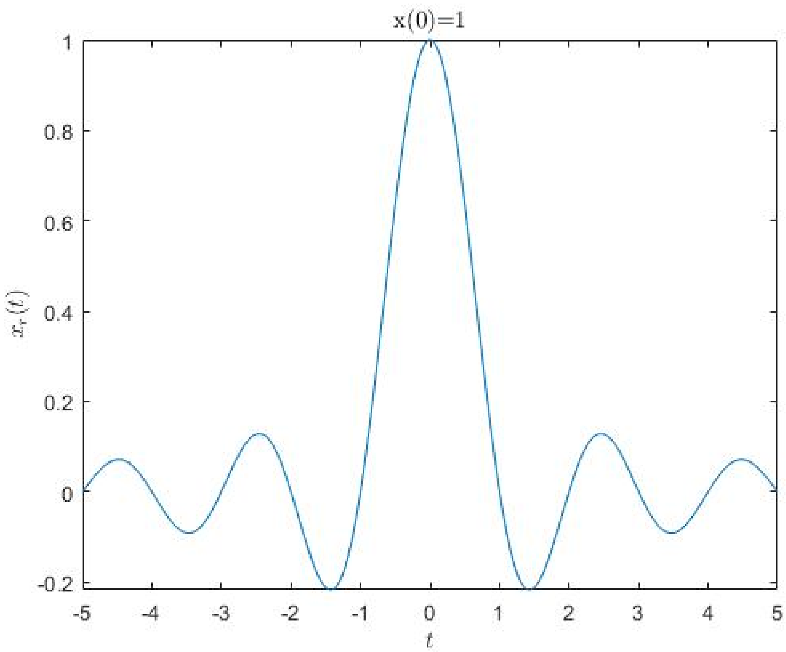

Figura 3: Gráfico da interpolação senoidal da amostra de um único ponto $x(0) = 1$

.

6.3 c)

Dessa vez usamos a função criada para interpolar uma amostra de três pontos $x(0) = 2$, $x(1) = 1$ e $x(2) = -1$ como descrito no **codigo** e exposto na **figura**.

Listing 5: Código em MATLAB interpolar a amostra de três pontos $x(0) = 2$, $x(1) = 1$ e $x(2) = -1$, bem como plotar seu gráfico.

```
set(0, 'defaulttextinterpreter', 'Latex');

n = [0, 1, 2];
x = [2, 1, -1];
```

```
Ts = 1;
x_r = interpolador_seno(x, n, Ts);
fplot(x_r);title('x(0)=2, x(1)=1 e x(2)=-1');xlabel('$t$');ylabel('$x_r(t)$');
```

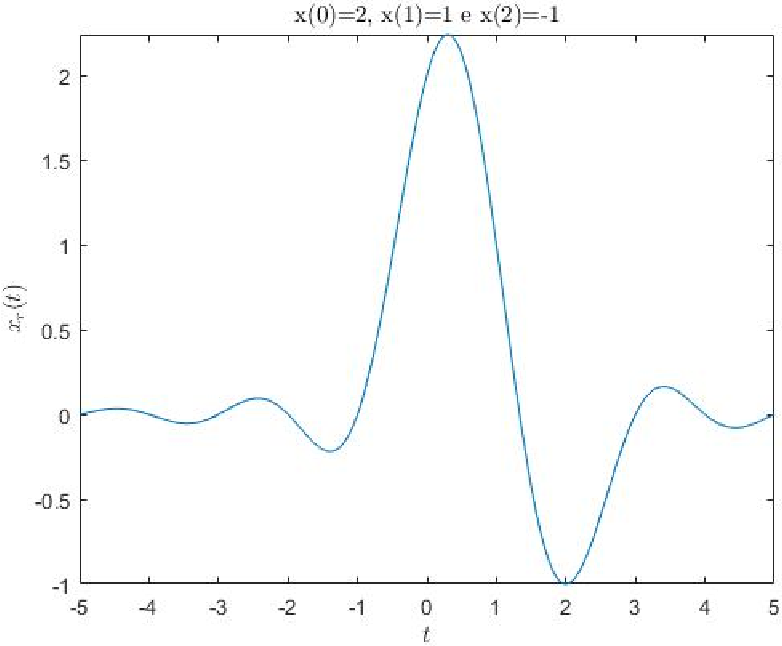

Figura 4: Gráfico da interpolação senoidal da amostra de três pontos $x(0) = 2$, $x(1) = 1$ e $x(2) = -1$

.

Perceba que o gráfico da **figura** é um ajuste do gráfico da **figura**, de modo que este passe pelos pontos amostrados.