EET-01
Laboratório 2 - Teorema da Amostragem

20 de abril de 2020

1 Leitura e Notação Usada

Para os seguintes exercícios, recomendamos ler o Capítulo 3 em [1]. A notação que é usada a seguir é a mesma usada no curso EET-1 e [1].

2 Introdução

Estes exercícios de laboratório são projetados para ilustrar os dois princípios básicos do processo de amostragem: aliasing (serrilhamento) e reconstrução. Quando um sinal de tempo contínuo é amostrado, seu espectro mostra o efeito de aliasing porque as regiões do domínio de freqüência são deslocadas por uma quantidade igual à frequência de amostragem. Este efeito pode ser estudado usando a representação do domínio da frequência da amostragem. Consequentemente, o teorema da amostragem de Nyquist afirma:
Seja $x(t)$ um sinal de banda limitada com sua transformada de Fourier em tempo discreto (DTFT)

$$X(\mathrm{j}\Omega) = 0, \quad \text{for } \ |\Omega| \geq \Omega_N. \tag{1}$$

Então $x(t)$ é determinado exclusivamente por suas amostras $x[n] = x(nT_s)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, e se

$$\Omega_s = \frac{2\pi}{T_s} \geq 2\Omega_N. \tag{2}$$

Assim, se nós provarmos um sinal com $\Omega_s < 2\Omega_N$, teremos um aliasing (serrilhamento) e, portanto, distorções e uma perda de informação.

Por outro lado, como há muitos sinais analógicos possíveis que podem passar por um determinado conjunto de amostras de tempo, a escolha do sinal analógico depende de suposições feitas sobre as propriedades da reconstrução. Ao escolher um método de reconstrução, podemos decidir encaixar um polinômio, ou ajustar uma onda senoidal, ou usar interpolação linear, ou usar um filtro passa-baixo, ou qualquer um de um bom número de outros métodos. Para estes exercícios, estaremos tentando encaixar os três pontos de dados com uma onda senoidal, um polinômio e, em seguida, vamos tentar um filtro passa-baixa ideal e não-ideal.

3 Exercícios

No primeiro par de exercícios, o aliasing é investigado por ondas senoidais e sinais de chirp. Nos exercícios subsequentes, vários métodos que podem ser usados para esta reconstrução serão explorados.

Exercício 2.1: Aliasing de um Senoidal

Considere a fórmula para um sinal sinoidal de tempo contínuo:

$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t + \phi). \tag{3}$$

Nós podemos amostrar $x(t)$ a uma taxa $f_s = 1/T_s$, para obter um sinal de tempo discreto

$$x[n] = x(t)|_{t=nT_s} = x(t)|_{t=n/f_s} = \sin\left(2\pi \frac{f_0}{f_s} n + \phi\right). \tag{4}$$

Se fizermos gráficos de $x[n]$ para diferentes combinações de f_0 e f_s, o problema de aliasing pode ser ilustrado. Para o seguinte, tome a frequência de amostragem como $f_s = 8$ kHz.

a. Primeiro de tudo, faça um único gráfico de uma onda senoidal amostrada. Deixe a frequência da onda senoidal seja $f_0 = 300$ Hz e recolha amostras durante um intervalo de 10 ms. A fase ϕ pode ser arbitrária. Plote o sinal de tempo discreto resultante usando `stem`. Deve ser fácil ver o contorno de uma sinusóide, porque seus olhos realizam uma reconstrução visualizando o envelope do sinal.

b. Se necessário, faça o gráfico usando `plot`. Neste caso, os pontos são conectados diretamente linhas, então o comportamento sinusoidal deve ser óbvio. Conectando as amostras de sinal com linhas retas é uma forma de "reconstrução de sinal"que faz um sinal de tempo contínuo das amostras de tempo discreto. Não é a reconstrução ideal especificada pela teorema da amostragem, mas é bom o suficiente para ser útil em muitas situações.

c. Agora faça uma série de gráficos, assim como a parte a. , mas variar a frequência sinusoidal f_0 de 100 a 475 Hz, em passos de 125 Hz. Note que a freqüência aparente da sinusóide está aumentando, como é esperado. Pode ser melhor usar `subplot` para colocar quatro gráficos em uma tela.

d. Faça outra série de gráficos, assim como na parte c. , mas varie a frequência sinusoidal f_0 de 7525 para 7900 Hz, em passos de 125 Hz. Note que a frequência aparente da sinusóide é agora *diminuido*. Explique esse fenômeno.

e. Novamente faça uma série similar de gráficos, mas varie a freqüência sinusoidal f_0 de 32100 para 32475 Hz, em passos de 125 Hz. Preveja antecipadamente se a frequência aparente será aumentado ou diminuido.

Exercício 2.2: Aliasing de um Chirp

Um sinal modulado de frequência linear faz um bom teste de aliasing, porque a freqüência move-se ao longo de um intervalo. Este sinal é frequentemente chamado de "chirp", devido ao som audível que faz quando jogado através de um alto-falante. A definição matemática de um sinal de chirp é

$$c(t) = \cos(\pi \mu t^2 + 2\pi f_l t + \psi). \tag{5}$$

A freqüência instantânea deste sinal pode ser encontrada tomando o tempo derivado do fase (o argumento do cosseno). O resultado é

$$f_i(t) = \mu t + f_l. \tag{6}$$

que exibe uma variação linear em relação ao tempo.

a. Considere os parâmetros do chirp como $f_l = 4$ kHz, $\mu = 600$ kHz / s e ψ arbitrários. Se o a duração total do tempo do chirp é de 50 ms, determine a faixa de freqüência coberta por a frequência varrida do chirp.

b. Deixe a frequência de amostragem ser $f_s = 8$ kHz. Plotar as amostras de tempo discreto do chirp usando `stem` e `plot`. Como a largura de banda varrida do chirp excede a amostragem freqüência, haverá aliasing.

c. Observe que o sinal de chirp exibe intervalos no tempo em que a frequência aparente muito baixo. De fato, a freqüência instantânea está passando por zero nesses pontos. Determine das parcelas as vezes em que isso acontece. Verifique se estes são os corretos vezes, verificando onde ocorre o aliasing da frequência varrida.

Exercício 2.3: Escutando o Aliasing

O efeito do aliasing também pode ser ouvido. Use a função `soundsc` para reproduzir os sinais gerados e escute usando fones de ouvido ou alto-falantes.

a. Gere três sinais sinusoidais seguindo a equação (3) com $f_0 = 2$ kHz e $\phi = 0$ (duração de 5 segundos cada); um sinal amostrado com frequência de amostragem de $f_s = 20$ kHz, um amostrado com $f_s = 4,5$ kHz e o terceiro amostrado com frequência de amostragem de $f_2 = 1,4$ kHz. Use `plot` para exibir os três sinais em uma figura versus t no intervalo $0 \leq t \leq 0,01$ s. Ouça os três sinais, um após o outro, usando a função `soundsc (x, fs)` e dê sua interpretação dessa escuta.

b. Gere três equações seguidoras do sinal chirp (5) com $f_l = 2$ kHz, $\mu = 0.5$ kHz/s e $\phi = 0$ (duração de 5 segundos cada); um sinal amostrado com frequência de amostragem de $f_s = 20$ kHz, um amostrado com $f_s = 8,5$ kHz e o terceiro amostrado com frequência de amostragem de $f_2 = 3,4$ kHz. Ouça os três sinais, um após o outro, usando a função `soundsc(x, fs)` e dê sua interpretação dessa escuta.

Exercício 2.4: Montagem de uma Onda Sinoidal

Suponha que três amostras

$$x(0) = 2, x(1) = 1, x(2) = -1 \tag{7}$$

correspondem a uma forma de onda sinusoidal da forma

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi). \tag{8}$$

Você tem $x(0)$, $x(1)$ e $x(2)$. Isso é informação suficiente para determinar A, ω e ϕ? pode você configura as equações relevantes? Você pode sempre resolver essas equações? Se não, dê valores numéricos onde o processo falha.

Exercício 2.5: Interpolação Polinomial Linear

Considere o caso em que você recebe três amostras de um sinal analógico

$$x(0) = 2, x(1) = 1, x(2) = -1. \tag{9}$$

a. Use o MATLAB para conectar as três amostras $x(0)$, $x(1)$ e $x(2)$ com linhas retas. Plote o resultado em uma grade fina com espaçamento, $\Delta t = 0,01$ s. Explique como `plot` fará isso automaticamente.

b. Execute a convolução das três amostras com uma resposta ao impulso que é triangular, mas primeiro insira quatro zeros entre cada um deles, e use uma resposta de impulso 0,2, 0,4 , 0,6 , 0,8 , 1,0 , 0,8 , 0,6 , 0,4, 0,2. Mostre que este resultado é idêntico à interpolação linear se assumirmos que as amostras em $t = -1$ e $t = +3$ são zero.

c. Usando o MATLAB, ajuste um polinômio de segundo grau aos três pontos de dados (consulte `polyfit` e `polyval`). Plote o polinômio em uma grade fina por $-5 \leq t \leq 5$. Esta curva é realista em um sentido prático? Faz um bom trabalho em estender os valores de sinal além do alcance $0 \leq t \leq 2$?

Exercício 2.6: Filtragem Passa-Baixo Ideal

Não há filtros passa-baixo ideais disponíveis na realidade. No entanto, podemos calcular a forma de onda que resultaria de um filtro passa-baixa ideal, como segue: Uma operação ideal de baixa passagem corresponde a uma multiplicação do espectro de um sinal por uma função retangular no domínio de freqüência. Isso corresponde a uma convolução com a transformada inversa de Fourier, que é uma função seno no domínio do tempo. Aplicado a amostras pontuais, isso equivale ao seno interpolação

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\sin(\pi(t - nT_s)/T_s)}{\pi(t - nT_s)/T_s}. \tag{10}$$

a. Escreva um interpolador seno baseado em (10). Suponha que apenas um número finito do sinal as amostras serão diferentes de zero e o sinal só precisa ser reconstruído ao longo de um intervalo de tempo finito.

b. Interpolar uma amostra de ponto único do valor 1 em $t = 0$. Plote o resultado de cerca de -5 a +5. Isso deve corresponder à forma da função senoidal.

c. Agora interpole o caso de três pontos dado acima com $x(0) = 2, x(1) = 1, x(2) = -1$. Compare o resultado com isso obtido a partir da montagem de onda senoidal.

Referências

[1] A. V. Oppenheim and R. W. Schafer with J. R. Buck, *Discrete-Time Signal Processing*, Prentice-Hall Inc., 1999.