



**Факультет нелинейных процессов  
Кафедра электроники, колебаний и волн**

**В.Н. Титов, А.Е. Храмов**

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА РАСПРЕДЕЛЕННЫХ  
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ  
(МЕТОДЫ ГАЛЕРКИНА И СЕТОЧНЫЕ МЕТОДЫ)**

Учебно-методическое пособие

Саратов – 2008



## Содержание

<b>Введение.</b>	<b>3</b>
<b>1. Методы Галеркина</b>	<b>4</b>
1.1. Примеры применения метода Галеркина	6
1.2. Задания для самостоятельного решения	13
<b>2. Решение дифференциальных уравнений в частных производных методом сеток</b>	<b>17</b>
2.1. Основы метода сеток	18
2.2. Метод Фурье анализа устойчивости	21
<b>3. Применение методов сеток для решения модельных уравнений</b>	<b>25</b>
3.1. Волновое уравнение и линейное уравнение переноса	25
3.2. Уравнение Бюргерса	32
3.3. Задания для самостоятельного решения	36
<b>Литература</b>	<b>38</b>



## Введение

Революционное развитие вычислительной техники привело к появлению многочисленных методов вычислений. В настоящее время в естественных науках выделилось отдельное научное направление, связанное с применением вычислительных методов. Важность этого направления и его самостоятельность подтверждается, в частности, появлением таких словосочетаний как "вычислительная физика", "вычислительная гидродинамика" и т.д. Данные словосочетания уже прочно вошли в обиход точных наук, они характеризуют подход к исследованиям, существенно отличный от классического и тесно связанный с приближенным анализом.

Численные методы широко применяются для решения целого ряда задач современной физики и нелинейной динамики. Читателю данного методического пособия уже читался курс "Численные методы физики" и "Математические методы естествознания", в котором подробно обсуждались методы численного интегрирования уравнений в обыкновенных производных, в частности, семейство методов Рунге-Кутты. Однако в большом числе нелинейной физики возникает необходимость рассмотрения задач, связанных с формулировкой распределенных моделей, например, в физике сплошных сред: теория теплопроводности, диффузии, гидродинамики, магнитной гидродинамики, акустики, электромагнетизма, волновой механики и т.д. Описываемые этими теориями процессы часто нестационарные и приводят к уравнениям в частных производных или интегро-дифференциальным уравнениям. Данное методическое пособие посвящено изучению методов численного решения подобных задач и включает в себя рассмотрение двух основных методов приближенного решения уравнений в частных производных: метода Галеркина и сеточных методов, также известных как методы конечных разностей.

## 1. Методы Галеркина

Методы Галеркина в настоящее время являются одними из самых универсальных вычислительных методов и широко применяются при решении многочисленных задач механики конструкций, динамики сооружений, гидромеханики, теории гидродинамических течений и турбулентности, магнитной гидродинамики, теории распространения волн, теории переноса нейтронов, глобального прогноза погоды и т.д. С помощью метода Галеркина возможно проведение исследований обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных и интегральных уравнений. Стационарные и нестационарные уравнения, а также задачи на собственные значения оказываются в равной степени поддающимися решению одной из разновидностей метода Галеркина. По существу, *любая задача, для которой можно выписать определяющее уравнение, может быть решена одной из разновидностей метода Галеркина.*

Важным достоинством метода Галеркина является то, что он обеспечивает, во-первых, достаточную точность при минимуме вычислений при недостатке вычислительных ресурсов, и, во-вторых, повышенную точность при одновременном выполнении условия минимума машинного времени при выполнении расчета.

Суть метода Галеркина можно сформулировать в следующей компактной форме. Согласно предположению некоторая двумерная задача описывается линейным дифференциальным уравнением

$$L(u) = 0 \quad (1.0.1)$$

в объеме  $D(\mathbf{r})$  при граничных условиях

$$S(u) = 0 \quad (1.0.2)$$

на поверхности  $\partial D$ , являющейся границей объема  $D$ . В методе Галеркина предполагается, что неизвестная функция  $u(\mathbf{r})$  может быть достаточно точно представлена приближенным (пробным) решением

$$\tilde{u} = u_0(\mathbf{r}) + \sum_{j=1}^N a_j \varphi_j(\mathbf{r}), \quad (1.0.3)$$

где  $\varphi_j$  есть известные аналитические функции (часто называемые пробными функциями), функция  $u_0(\mathbf{r})$  введена для того, чтобы удовлетворить граничному условию (1.0.2), когда как  $a_j$  — это коэффициенты, подлежащие определению. Подстановка выражения (1.0.3) в уравнение (1.0.1) приводит к отличной от нуля невязке  $R$ , выражаемой в виде

$$R(a_0, a_1, \dots, a_N, \mathbf{r}) = L(\tilde{u}) = L(u_0) + \sum_{j=1}^N a_j L(\varphi_j). \quad (1.0.4)$$

Введем понятие внутреннего произведения двух функций  $f$  и  $g$ , которое определим как

$$[f, g] = \int_D fg d\mathbf{r}. \quad (1.0.5)$$

В методе Галеркина неизвестные коэффициенты  $a_j$ , входящие в выражение (1.0.3), находятся из решения следующей системы уравнений:

$$[R, \varphi_k] = 0, \quad k = 1, \dots, N. \quad (1.0.6)$$

Здесь  $R$  — невязка исследуемого уравнения, а  $\varphi_k$  — те же самые аналитические функции, которые фигурируют в (1.0.3). Рассмотренный простейший пример приложения метода Галеркина связан с решением линейного обыкновенного дифференциального уравнения, поэтому уравнения (1.0.6) можно переписать в матричном виде, что более удобно для последующего численного анализа:

$$\sum_{j=1}^N a_j [L(\varphi_j), \varphi_k] = -[L(u_0), \varphi_k]. \quad (1.0.7)$$

После решения уравнения (1.0.7) найденные коэффициенты  $a_j$  необходимо подставить в уравнение (1.0.3) для нахождения искомого приближенного решения. Оценка точности решения может быть получена с помощью оценки  $L_2$  — погрешности, которая определяется как разность между точным  $u$  и приближенным  $\tilde{u}$  решением:

$$\|u - \tilde{u}\|_2 = \left( \int_D (u - \tilde{u})^2 d\mathbf{r} \right)^{0.5} \quad (1.0.8)$$

или в дискретном случае

$$\|u - \tilde{u}\|_{2d} = \left( \sum_{i=1}^L (u_i - \tilde{u}_i)^2 \right)^{0.5}. \quad (1.0.9)$$

Отметим, что дискретная  $L_2$  — погрешность связана со среднеквадратичной погрешностью  $\sigma$  соотношением  $\|u - \tilde{u}\|_{2d} = \sigma \sqrt{L_2}$ . Следует отметить, что на практике точное решение  $u$  неизвестно и величину  $L_2$  — погрешности вычислить невозможно. Однако, контроль точности можно вести, анализируя норму  $\|R\|_2$ , которую можно вычислить без труда.

## Вопросы:

- 1) В чем заключается приближенный метод Галеркина ?
- 2) Какие функции можно выбрать в качестве пробных функций метода Галеркина ?
- 3) Каким образом оценивается точность приближенного решения ?

## 1.1. Примеры применения метода Галеркина.

### Пример 1. Обыкновенное дифференциальное уравнение

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = y \quad (1.1.1)$$

с граничным условием:

$$y(x=0) = 1. \quad (1.1.2)$$

Будем искать приближенное решение в области  $x \in [0,1]$ . Точное решение данного уравнения хорошо известно и имеет вид  $y = e^x$ . В качестве пробных функций выберем степенные функции  $\varphi_j = x^j$ . Тогда приближенное решение запишется в следующем виде:

$$\tilde{y} = 1 + \sum_{j=1}^N a_j x^j, \quad (1.1.3)$$

где первое слагаемое введено для удовлетворения граничных условий. После этого пробные функции  $x^j$  позволяют удовлетворить однородным граничным условиям. Такое представление пробного решения в форме, обеспечивающей удовлетворение граничным условиям, является стандартным приемом в методе Галеркина, направленном на получение максимально точного решения при заданном числе  $N$  неизвестных коэффициентов  $a_j$ . Подстановка пробного решения (1.1.3) в исходное уравнение (1.1.1) дает выражение для невязки:

$$R = -1 + \sum_{j=1}^N a_j (jx^{j-1} - x^j). \quad (1.1.4)$$

Неизвестные коэффициенты находятся из следующего соотношения согласно уравнению :

$$[R, x^{k-1}] = 0, \quad k = 1, \dots, N. \quad (1.1.5)$$

Перепишем последнюю систему уравнений в матричном виде:

$$\mathbf{M}\mathbf{A} = \mathbf{D}, \quad (1.1.6)$$



где  $\mathbf{A}$  — вектор, составленный из неизвестных коэффициентов  $a_j$ . Элемент матрицы  $\mathbf{D}$  дается выражением

$$d_k = [1, x^{k-1}] = 1/k, \quad (1.1.7)$$

элемент матрицы  $\mathbf{M}$  —

$$m_{kj} = [jx^{j-1} - x^j, x^{k-1}] = \frac{1}{j+k-1} - \frac{1}{j+k}. \quad (1.1.8)$$

При  $N = 3$  решение (1.1.6) имеет вид:

$$A^T = \{1.0141, 0.4225, 0.2817\}, \quad (1.1.9)$$

и подстановка в пробное решение (1.1.3) дает:

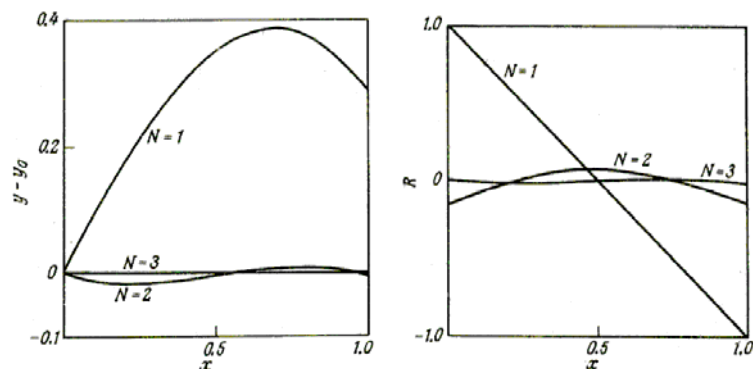
$$\tilde{y} = 1 + 1.0141x + 0.4225x^2 + 0.2817x^3. \quad (1.1.10)$$

В таблице 1 приведены данные по точности приближенного решения уравнения (1.1.1) с увеличением числа компонент пробного решения  $N$ . Из таблицы видно, что точность быстро возрастает с ростом числа  $N$ , что подтверждает уже отмеченную выше важную особенность метода Галеркина, заключающуюся в том, что высокая точность решения может быть достигнута за счет весьма умеренных алгебраических усилий.

**Таблица 1.** Точность приближенного решения уравнения  $dy/dx = y$  по методу Галеркина.

Мера	Линейное ( $N = 1$ )	Квадратичное ( $N = 2$ )	Кубичное ( $N = 3$ )
$\ y - \tilde{y}\ _2$	0.6997	0.0217	0.0013
$\ R\ _2$	1.2911	0.1429	0.0119

На рис. 1 показана погрешность решения в зависимости от координаты  $x$  при различных числах  $N$ . Можно видеть, что погрешность очень быстро уменьшается с ростом  $N$ . Кроме того, из таблицы и рисунка также хорошо видно, что норма невязки  $\|R\|_2$  также быстро уменьшается с ростом  $N$ .



**Рис. 1** Распределение погрешности для решения уравнения  $dy/dx = y$  для различных  $N$

## Пример 2. Распределенная система, описываемая нелинейным уравнением в частных производных

Рассмотрим теперь пример применения метода Галеркина к нелинейному уравнению в частных производных. В качестве такого уравнения выберем одномерное уравнение Бюргерса, которое часто встречается в теории нелинейных волновых процессов. Уравнение, предложенное Бюргерсом [Burgers, 1948] описывает нестационарную конвекцию в присутствии вязкости:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.1.11)$$

Первое и второе слагаемые в левой части этого уравнения описывают процесс нестационарной конвекции, а выражение в правой части отвечает за вязкость. Если выражение в правой части не равно нулю, то уравнение (1.1.11) параболическое; если же в правой части уравнения записан ноль, то уравнение является гиперболическим и имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (1.1.12)$$

Уравнения (1.1.11) и (1.1.12) описывают процессы нелинейной конвекции. К примеру, уравнение (1.1.12) можно интерпретировать как нелинейное волновое уравнение, при условии что скорость распространения волны в различных точках пространства может различаться. Так как скорость распространения возмущений изменяется, в решении могут возникать разрывы, аналогичные ударным волнам в газовой динамике. Рассматриваемые модельные уравнения (1.1.11) и (1.1.12) позволяет изучать свойства разрывных решений. Заметим, что при численном моделировании разрывных течений могут наблюдаться нефизические осцилляции решения в области вблизи разрыва.

Несмотря на то, что уравнение Бюргерса (1.1.11) нелинейно, для многих сочетаний



начальных и граничных условий оно допускает аналитическое точное решение. В силу этого уравнение Бюргера часто используется для выяснения точности и сравнения различных вычислительных методов. Рассмотрим приближенное решение уравнения (1.1.11) методом Галеркина чтобы показать как учитывается нелинейный член. Будем исследовать решение задачи о распространяющейся ударной волне. Будем искать решение в области  $x \in [-1, 1]$  при  $t \geq 0$ . Начальные и граничные решения принимаются следующими

$$u_0(x) = u(x, t = 0) = \begin{cases} 1, & \text{for } x \in [-1, 0] \\ 0, & \text{for } x \in (0, 1] \end{cases} \quad (1.1.13)$$

$$u(x = -1, t) = 1, \quad u(x = 1, t) = 0. \quad (1.1.14)$$

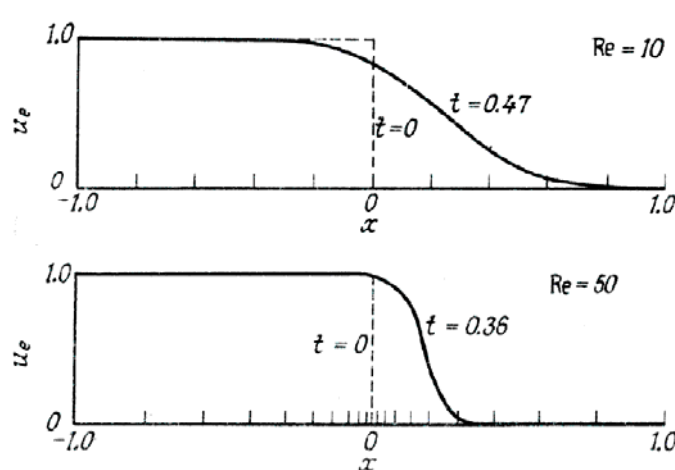
Тогда точное решение уравнения (1.1.11) с условиями (1.1.13) и (1.1.14) имеет вид:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x - x'}{t} \exp(-0.5 \operatorname{Re} F) dx' \left( \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-0.5 \operatorname{Re} F) dx' \right)^{-1}, \quad (1.1.15)$$

где

$$F(x, x', t) = \int_0^{x'} u_0(\bar{x}) d\bar{x} + \frac{0.5(x - x')^2}{t}. \quad (1.1.16)$$

Графики, соответствующие этому решению показаны на рис.2. Ударная волна в начале представляет собой разрыв, расположенный в плоскости  $x = 0$ . В дальнейшем волна распространяется вправо, однако ее профиль, бывший вначале разрывным, сглаживается за счет воздействия диссипативного вязкого члена  $(1/\operatorname{Re}) \partial^2 u / \partial x^2$ .



**Рис. 2** Точное решение уравнения Бюргера для различных величин числа Рейнольдса

Рассмотрим приближенное решение уравнения Бюргера методом Галеркина выбирая в качестве пробных функций полиномы Чебышева, которые, как известно, более пригодны для

аппроксимации кривых линий, чем обычные полиномы. Полиномы Чебышева ортогональны на интервале  $(-1,1)$  с весовым коэффициентом  $1/\sqrt{1-x^2}$ . Три полинома Чебышева низших порядков имеют вид

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1, \quad (1.1.17)$$

тогда как полиномы высоких порядков можно рассчитать с помощью рекуррентной формулы:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x). \quad (1.1.18)$$

Суть решения заключается в следующем. Начальные значения коэффициентов  $a_j$  в решении (1.0.3), которые теперь зависят от времени, выбираются путем аппроксимации кривой, характеризующей начальные данные (1.1.13). В дальнейшем эти коэффициенты должны изменяться в соответствии с уравнениями, полученными с помощью метода Галеркина, так чтобы приближенное решение служило разумной аппроксимацией точного решения. Итак, представим приближенное решение в следующей форме:

$$\tilde{u}(x, t) = \sum_{j=0}^N a_j(t) T_j(x). \quad (1.1.19)$$

После подстановки выражения (1.1.19) в уравнение (1.1.11) находим невязку:

$$R = \sum_j \ddot{a}_j T_j + \sum_j a_j \sum_i a_i T_j \frac{dT_i}{dx} - \frac{1}{\text{Re}} \sum_j a_j \frac{d^2 T_j}{dx^2}. \quad (1.1.20)$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $a_j(t)$  получается из стандартного условия метода Галеркина:

$$[R, T_k] = 0 \quad k = 0, \dots, N-2. \quad (1.1.21)$$

Два коэффициента, входящих в формулу (1.1.19) выражаются через другие алгебраические коэффициенты за счет требования об удовлетворении граничных условий (1.1.14). Выполнение условия (1.1.21) приводит к следующему матричному уравнению:

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{A}} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{A} = 0, \quad (1.1.22)$$

где элементом матрицы  $\mathbf{A}$  являются коэффициенты  $a_j$ , а элементы матрицы  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$  выражаются как (получите эти выражения самостоятельно)

$$m_{kj} = [T_j, T_k], \quad (1.1.23)$$

$$b_{kj} = \sum_i a_i \left[ T_j \frac{dT_i}{dx}, T_k \right], \quad (1.1.24)$$

$$c_{kj} = \frac{1}{Re} \left[ \frac{dT_j}{dx}, \frac{dT_k}{dx} \right]. \quad (1.1.25)$$

Нелинейность задачи проявляется в том, что  $b_{kj}$  зависит от суммы, содержащей неизвестные коэффициенты  $a_i$ . Начальные значения коэффициентов  $a_j$  находятся путем применения метода Галеркина к начальным данным:

$$[\tilde{u} - u_0, T_k] = 0, \quad k = 1, \dots, N, \quad (1.1.26)$$

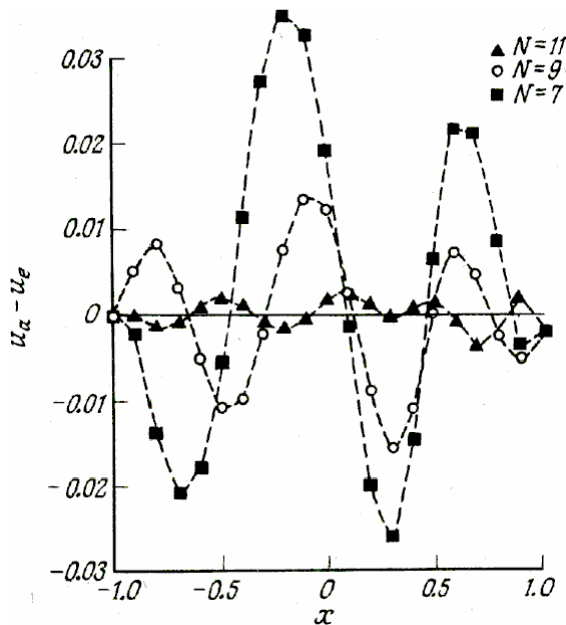
что дает систему алгебраических уравнений

$$\mathbf{MA} - \mathbf{D} = 0, \quad (1.1.27)$$

где элемент матрицы  $\mathbf{D}$  равен

$$d_k = [u_0, T_k] = \int_{-1}^0 T_k dx. \quad (1.1.28)$$

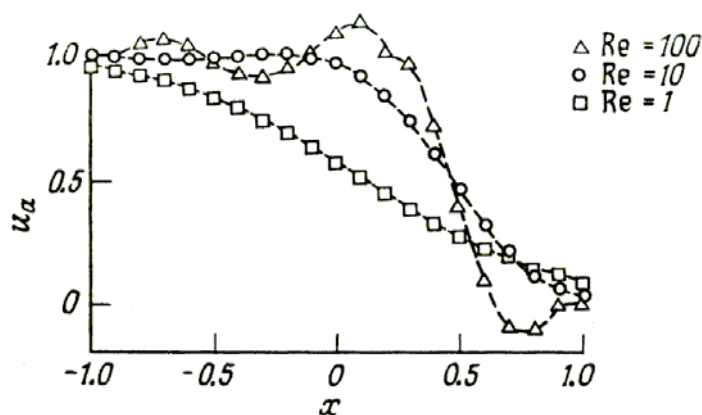
Система уравнений (1.1.22) может быть проинтегрирована методом Рунге—Кутта 4—го порядка, при этом шаг интегрирования необходимо поддерживать достаточно малым, чтобы погрешности связанные с численным интегрированием были пренебрежимо малы с погрешностью аппроксимации согласно (1.1.19)



**Рис. 3** Погрешность решения уравнения Бюргерса для числа Рейнольдса  $Re = 10$  и различных  $N$

На рис. 3 показана погрешность приближенного решения  $\tilde{u}(x) - u(x)$  при  $Re = 10$  и для различных  $N$  в момент времени  $t = 0.92$ . Из рисунка видно, что погрешность распределяется по всей области интегрирования, и быстро уменьшается с ростом числа  $N$ . В данной

конкретной задаче основной источник погрешности связан с тем, что приближенному решению сложно “уследить” за быстрыми изменениями, определяемыми точным решением на фронте ударной волны. Эта погрешность вносит свой вклад в значения  $a_j$ , которые оказывают влияние на всю область согласно (1.1.19)



**Рис. 4** Приближенные решения уравнения Бюргерса для различных чисел Рейнольдса  $Re$  и  $N = 9$

Интересно отметить, что сравнивая решения при различных числах Рейнольдса ( $Re = 1, 10, 100$ ), можно сделать вывод об увеличении погрешности с ростом  $Re$ . Это обстоятельство является непосредственным следствием увеличения крутизны профиля ударной волны при достаточно больших  $Re$  (см. рис. 2), а также затруднений с полнотой представления этого профиля при укороченном приближенном решении. Указанные тенденции хорошо видны на рис. 4. При  $Re = 1$  и  $10$  приближенное решение при  $N = 9$  способно достаточно точно моделировать точное решение. Однако при  $Re = 100$  неспособность этого приближенного решения выявить крутой профиль волны становится очевидной, т.к. в решении появляются нерегулярные колебания, которые не имеют физического обоснования. Простейшим способом борьбы с этим является увеличение числа членов  $N$  в приближенном решении, но это одновременно ведет и к увеличению машинного времени.

## Вопросы:

- 1) К численному решению какой задачи приводит приложение метода Галеркина к обыкновенному дифференциальному уравнению?
- 2) Дайте определение полиномов Чебышева и перечислите их основные свойства.
- 3) Дайте определение полиномов Лежандра и перечислите их основные свойства.
- 4) Какие преимущества имеет использование ортогональных пробных функций в методах

Галеркина ?

## 1.2. Задания для самостоятельного решения.

### Решение обыкновенных дифференциальных уравнений методом Галеркина.

Решите методом Галеркина, предварительно выбрав набор пробных функций, следующие ниже приведенные обыкновенные дифференциальные уравнения с соответствующим граничным условием и диапазоном  $x$ , в котором следует искать приближенное решение. Для отчета необходимо предоставить следующие результаты аналитического и численного исследования:

- 1) аналитическое решение исследуемого уравнения;
- 2) провести и предоставить все выкладки и окончательные приближенные уравнения метода Галеркина;
- 3) реализовать решение задачи методом Галеркина на ЭВМ;
- 4) сравнение приближенного решения методом Галеркина с точным решением при различном числе  $N$  пробных функций;
- 5) зависимости погрешности  $\|\tilde{u}(x) - u(x)\|$ ,  $\|\tilde{u} - u\|_2$ ,  $R(x)$  и  $\|R(x)\|_2$  от числа  $N$  пробных функций,
- 6) сравнение затрат машинного времени при анализе уравнения методом Галеркина и методом Рунге—Кутты 4—го порядка при одной и той же точности численного решения.

### Исследуемые уравнения:

$$1.1. \quad du/dx = u^2, \quad u(x=0) = 1, \quad x \in [0, 0.5];$$

$$1.2. \quad du/dx = u^3, \quad u(x=0) = 2, \quad x \in [0, 0.1];$$

$$1.3. \quad du/dx = \sqrt{u}, \quad u(x=0) = 2, \quad x \in [0, 2.5];$$

$$1.4. \quad du/dx = u\sqrt{u}, \quad u(x=0) = 1, \quad x \in [0, 1];$$

$$1.5. \quad du/dx = u^{2.5}, \quad u(x=0) = 2, \quad x \in [0, 0.2];$$

$$1.6. \quad du/dx = \sin(x), \quad u(x=0) = 0.2, \quad x \in [0, 0.4];$$

$$1.7. \quad du/dx = xu, \quad u(x=0) = 1, \quad x \in [0, 1.5];$$

$$1.8. \quad du/dx = x^2u, \quad u(x=0) = 2, \quad x \in [0, 1];$$

$$1.9. \quad du/dx = x^2u^2, \quad u(x=0) = 1, \quad x \in [0, 1];$$



$$1.10. \frac{du}{dx} = x^2 + u^2, \quad u(x=0) = 1, \quad x \in [0, 0.5];$$

## Решение дифференциальных уравнений в частных производных методом Галеркина

Решите методом Галеркина следующие ниже приведенные дифференциальные уравнения в частных производных. Для отчета необходимо предоставить следующие результаты аналитического и численного исследования:

- 1) аналитическое решение исследуемого уравнения;
- 2) провести и предоставить все выкладки и окончательные приближенные уравнения метода Галеркина;
- 3) реализовать решение задачи методом Галеркина на ЭВМ;
- 4) сравнение приближенного решения методом Галеркина с точным решением при различном числе  $N$  пробных функций;
- 5) зависимости погрешности  $\|\tilde{u}(x, t) - u(x, t)\|$ ,  $\|\tilde{u} - u\|_2$ ,  $R(x, t)$  и  $\|R\|_2$  от числа  $N$  пробных функций;

### Исследуемые уравнения:

2.1. Найдите приближенное решение линейного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

при начальном условии

$$u(x, t=0) = \sin(\pi x) + x$$

и граничных условиях

$$u(x=0, t) = 0, \quad u(x=1, t) = 1.$$

В качестве пробных функций выберите функции вида  $\varphi_j(x) = x^j - x^{j+1}$ .

2.2. Найдите приближенное решение линейного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

при начальном условии

$$u(x, t=0) = \sin(\pi x) + x$$

и граничных условиях

$$u(x=0, t) = 0, \quad u(x=1, t) = 1.$$

В качестве пробных функций выберите полиномы Чебышева.

**2.3.** Найдите приближенное решение линейного уравнения теплопроводности методом Галеркина с конечными элементами

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

при начальном условии

$$u(x, t=0) = \sin(\pi x) + x$$

и граничных условиях

$$u(x=0, t) = 0, \quad u(x=1, t) = 1.$$

В качестве пробных функций выберите линейные функции формы:

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} (x - x_{j+1})/(x_j - x_{j+1}), & x \in [x_j, x_{j+1}), \\ (x - x_{j-1})/(x_j - x_{j-1}), & x \in (x_{j-1}, x_j), \\ 0, & x \leq x_{j-1}, x \geq x_{j+1}. \end{cases}$$

**2.4.** Найдите приближенное решение линейного уравнения теплопроводности методом Галеркина с конечными элементами

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

при начальном условии

$$u(x, t=0) = \sin(\pi x) + x$$

и граничных условиях

$$u(x=0, t) = 0, \quad u(x=1, t) = 1.$$

В качестве пробных функций выберите квадратичные функции формы:

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \frac{(x - x_{j-2})(x - x_{j-1})}{(x_j - x_{j-2})(x_j - x_{j-1})}, & x \in (x_{j-2}, x_j], \\ \frac{(x - x_{j+1})(x - x_{j+2})}{(x_j - x_{j+1})(x_j - x_{j+2})}, & x \in (x_j, x_{j+2}), \\ 0, & x \leq x_{j-2}, x \geq x_{j+2}. \end{cases}$$

**2.5.** Найдите приближенное решение уравнения Бюргерса методом Галеркина с конечными элементами



$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

при начальном условии

$$u_0(x) = u(x, t = 0) = \begin{cases} 1, & \text{for } x \in [1, 0] \\ 0, & \text{for } x \in (0, 1] \end{cases}$$

и граничных условиях

$$u(x = -1, t) = 1, \quad u(x = 1, t) = 0.$$

В качестве пробных функций выберите линейные функции формы:

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} (x - x_{j+1})/(x_j - x_{j+1}), & x \in [x_j, x_{j+1}), \\ (x - x_{j-1})/(x_j - x_{j-1}), & x \in (x_{j-1}, x_j), \\ 0, & x \leq x_{j-1}, x \geq x_{j+1}. \end{cases}$$

**2.6.** Найдите приближенное решение уравнения Бюргерса методом Галеркина

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

при начальном условии

$$u_0(x) = u(x, t = 0) = \begin{cases} 1, & \text{for } x \in [1, 0] \\ 0, & \text{for } x \in (0, 1] \end{cases}$$

и граничных условиях

$$u(x = -1, t) = 1, \quad u(x = 1, t) = 0.$$

В качестве пробных функций выберите полиномы Лежандра  $P_j(x)$ , которые характеризуются свойством ортогональности на интервале  $x \in [-1, 1]$ .

## 2. Решение дифференциальных уравнений в частных производных методом сеток

Для корректного решения дифференциального уравнения частных производных необходимо уметь определять его тип и знать основные математические свойства соответствующего типа уравнений. В этом разделе кратко рассмотрены математические и физические свойства ряда модельных уравнений с частными производными, показаны наиболее важные особенности их решений.

### Стационарные и маршевые задачи

Задача называется *стационарной*, если решение уравнения в частных производных внутри некоторой области определяется лишь условиями на границе этой области. Физически стационарная задача описывает установившийся процесс, а математически сводится к решению задачи с граничными условиями (краевой задачи) для уравнения в частных производных. К стационарным относятся задачи на определение стационарного поля температур, расчет течения несжимаемой невязкой жидкости, нахождение упругих напряжений в твердом теле. Установившиеся процессы описываются уравнениями в частных производных эллиптического типа.

Маршевой или эволюционной называется задача, в которой требуется найти решение уравнения в частных производных в незамкнутой области при заданных граничных и начальных условиях. Решение подобных задач должно быть найдено последовательным движением в маршевом направлении. Такие задачи описываются уравнениями в частных производных гиперболического или параболического типа.

### Математическая классификация уравнений

Уравнение в частных производных второго порядка, записанное в общем виде, обычно используют для пояснения математической классификации уравнений в частных производных. Рассмотрим уравнение в частных производных

$$a\Phi_{xx} + b\Phi_{xy} + c\Phi_{yy} + d\Phi_x + e\Phi_y + f\Phi = g(x, y). \quad (2.0.1)$$

Здесь  $a, b, c, d, e, f$  — функции от  $x, y$ , т. е. рассматривается линейное уравнение.

Определим канонические формы записи уравнений в частных производных различных типов. Известно, что в виде (2.0.1) могут быть записаны уравнения трех различных типов — гиперболические, параболические и эллиптические. Тип уравнения в частных производных

определяется знаком соответствующего определителя. Уравнение называется *гиперболическим* в точке  $(x_0, y_0)$ , если

$$b^2 - 4ac > 0. \quad (2.0.2)$$

Его каноническая форма имеет вид

$$\Phi_{\xi\xi} - \Phi_{\eta\eta} = h_1(\Phi_\xi, \Phi_\eta, \Phi, \xi, \eta) \quad (2.0.3)$$

Уравнение называется *параболическим* в точке  $(x_0, y_0)$ , если

$$b^2 - 4ac = 0 \quad (2.0.4)$$

Его каноническая форма имеет вид

$$\Phi_{\xi\xi} = h_2(\Phi_\xi, \Phi_\eta, \Phi, \xi, \eta) \quad (2.0.5)$$

Уравнение называется *эллиптическим* в точке  $(x_0, y_0)$ , если

$$b^2 - 4ac < 0 \quad (2.0.6)$$

Его каноническая форма имеет вид

$$\Phi_{\xi\xi} + \Phi_{\eta\eta} = h_3(\Phi_\xi, \Phi_\eta, \Phi, \xi, \eta). \quad (2.0.7)$$

## Вопросы:

- 1) Как соотносится математическая классификация уравнений с “физическими характером” описываемых ими решений ?.
- 2) К каким типам уравнений относятся следующие уравнения: волновое уравнение, уравнение теплопроводности, уравнение Лапласа -?

## 2.1. Основы метода сеток

В этом разделе кратко изложены основные понятия и методы, используемые при решении уравнений в частных производных методом сеток. Основой метода конечных разностей является дискретизация — замена непрерывной области совокупностью изолированных точек (сеткой), причем решение уравнений ищется лишь в этих точках (узлах сетки). Производные аппроксимируются *конечными разностями* и решение уравнения в частных производных сводится к решению системы алгебраических уравнений. Основные особенности получающейся системы алгебраических уравнений определяются типом исходного уравнения в частных производных. Стационарные задачи обычно сводятся к системам алгебраических уравнений, которые приходится решать одновременно во всей расчетной области, учитывая





заданные граничные условия. Маршевые задачи часто сводятся к алгебраическим уравнениям, которые можно решать последовательно. В этом разделе кратко рассматривается также вопрос о том, сколь точно решение разностных уравнений приближается к решению исходной задачи. Для этого анализируется погрешность аппроксимации, устойчивость и согласованность разностных схем.

## Метод конечных разностей

При приложении метода конечных разностей к решению уравнений в частных производных прежде всего необходимо осуществить переход от дифференциальных операторов к их *конечно-разностным аналогам* на конечно-разностной сетке. Если определены система координат и расчетная область, то для задания конечно-разностной сетки, как правило, достаточно ввести фиксированные расстояния между узлами сетки по каждой координате и по времени. Построенная таким образом конечно-разностная сетка называется регулярной и характеризуется постоянными шагами  $\Delta x, \Delta y$  по пространственным координатам и  $\Delta t$  по времени. Расстояния между узлами по разным пространственным координатам, а также по времени, могут различаться. Сетка может быть и нерегулярной, то есть расстояние между соседними узлами в фиксированном направлении может изменяться с номером узла.

Как правило, можно записать конечно-разностные аппроксимации дифференциальных операторов для произвольного расположения узлов в пространстве. При этом от их расположения будет зависеть как “внешний вид” получаемых в результате уравнений, так и а также характеристики разностной схемы (порядок точности, устойчивость и пр.) При решении маршевых задач номер узла сетки по маршевой координате обычно обозначается верхним индексом (например, индекс  $n$  в  $u_j^n$ ).

Для каждого уравнения в частных производных существует *множество* его конечно-разностных аналогов, из которых обычно нельзя выбрать наилучший со всех точек зрения. В первую очередь при использовании метода конечных разностей надо стремиться к правильной аппроксимации уравнения поставленной задачи, а во вторую очередь оптимизировать схему по точности, экономичности, удобству программной реализации на ЭВМ и т. д.

Применяя численные методы, мы решаем лишь разностные уравнения и надеемся, что *погрешность аппроксимации* мала. Может быть, на первый взгляд такой подход не вызывает сомнений, но если задуматься, то сразу возникает ряд вопросов. Например, где гарантия, что, решая разностные уравнения маршевым методом, мы получим значения, достаточно близкие к решению исходного уравнения в частных производных? На этот вопрос можно ответить утвердительно, лишь если разностная схема удовлетворяет условиям *согласованности* и *устойчивости*.

### **Согласованность разностных схем**

*Согласованной* называется разностная схема, аппроксимирующая данное уравнение в частных производных. Погрешностью аппроксимации называется разность между дифференциальным уравнением и его конечно-разностным аналогом, поэтому условием согласованности разностной схемы является стремление к нулю погрешности аппроксимации при измельчении сетки. Это условие выполняется, если погрешность аппроксимации убывает при измельчении сетки, т. е. если погрешность аппроксимации имеет порядок  $O(\Delta t)$ ,  $O(\Delta x)$  и т.д. Однако если порядок погрешности аппроксимации равен, например,  $O(\Delta t/\Delta x)$ , то схема будет согласованной лишь в том случае, когда измельчение сетки проводится в соответствии с условием  $\Delta t/\Delta x \rightarrow 0$ .

### **Устойчивость разностных схем**

Понятие счетной устойчивости строго применимо лишь при решении маршевых задач. Разностная схема называется *устойчивой*, если на каждом шаге по маршевой координате любая ошибка (погрешность округления, погрешность аппроксимации, просто ошибка) не возрастает при переходе от одного шага к другому. Обычно для достижения устойчивости разностной схемы требуется намного больше усилий, чем для достижения ее согласованности. Проверить условие согласованности разностной схемы нетрудно, кроме того, для корректно построенной разностной схемы обычно оно выполняется автоматически. Устойчивость — свойство более тонкое, и для его доказательства обычно требуется аналитическое рассмотрение разностной схемы.

### **Сходимость решения маршевых задач**

*В случае линейных уравнений в частных производных выполнения условий устойчивости и согласованности достаточно для сходимости разностной схемы.*

Под *сходимостью* в данном случае понимается стремление решения конечно-разностного аналога уравнения в частных производных к решению исходного уравнения при измельчении сетки в соответствии с условием согласованности.

### Погрешность округления

Любое численно полученное решение, даже так называемое точное аналитическое решение уравнения в частных производных, зависит от ошибок округления, связанных с конечным числом знаков, используемых при арифметических операциях. Возникающая при этом погрешность называется *погрешностью округления*.

### Консервативность

*Консервативной* схемой называется разностная схема, обеспечивающая *точное* выполнение законов сохранения (исключая погрешности округления) на любой сетке в конечной области, содержащей произвольное число узлов разностной сетки. Для решения некоторых задач можно использовать только консервативные разностные схемы.

### Ошибки, вносимые разностной схемой. “Схемные” вязкость и дисперсия.

При построении разностной схемы в уравнение может неявно вводиться искусственная вязкость, которую часто называют *схемной*. Искусственная вязкость сглаживает решение уравнения, уменьшая градиенты всех параметров независимо от причины возникновения этих градиентов, физической или вычислительной.

Другое близкое к свойству разностных схем, допускающее физическую интерпретацию, называют *дисперсией*. Дисперсия приводит к искажению *соотношения фаз различных волн* при их распространении.

Обычно если главный член в выражении для погрешности аппроксимации содержит производную четного порядка, то схема обладает в основном диссипативными свойствами (вносится схемная вязкость), а если производную нечетного порядка — дисперсионными.

## 2.2. Метод Фурье анализа устойчивости

На примере одномерного *линейного* волнового уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.2.1)$$

проиллюстрируем данный метод анализа устойчивости разностной схемы. Рассмотрим конечно-разностную схему первого порядка, предложенную Лаксом для решения уравнений подобного типа

$$u_j^{n+1} = \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2} - c \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2} \right). \quad (2.2.2)$$

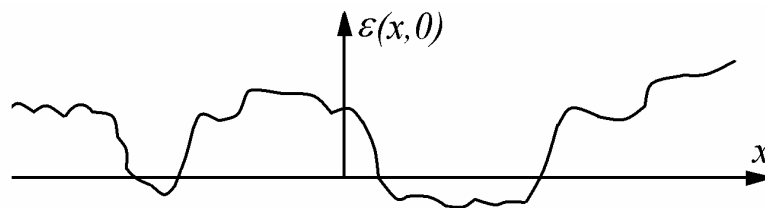
Численное решение разностного уравнения (2.2.2) можно представить в виде

$$N = D + \varepsilon. \quad (2.2.3)$$

Здесь  $D$  — точное решение разностного уравнения, а  $\varepsilon$  — погрешность, получаемая в ходе решения из-за *ошибок округления*. Вследствие линейности исходного уравнения (2.2.1) изменение погрешности  $\varepsilon$  будет определяться разностным уравнением (2.2.2), в котором  $u$  заменено на  $\varepsilon$ . Таким образом, для *линейного уравнения* эволюция во времени малых возмущений  $\varepsilon$  и точного решения  $D$  разностного уравнения описывается уравнениями в одной форме.

Уравнение (2.2.1) имеет точное аналитическое решение, соответствующее распространению в пространстве начального фронта волны без изменения ее формы. Таким образом, распределения величины  $u(x, t = 0)$  соответствующей начальным условиям задачи и погрешности, внесенной численным заданием начальных условий  $\varepsilon(x, t = 0)$ , в случае идеальной разностной схемы должны распространяться в пространстве со скоростью  $c$  без искажений. В общем случае это не так, и форма распределений искажается. Проанализируем эти искажения, раскладывая их в ряд Фурье *по координате*. Для определенности будем говорить о распределении погрешности  $\varepsilon(x, t)$ .

Будем анализировать изменение погрешности  $\varepsilon(x, t)$  с течением времени. Для этого рассмотрим распределение погрешности в узлах разностной сетки в момент времени  $t = 0$  (см. рис. 5).



**Рис. 5** Начальное распределение погрешности по координате

Предположим, что погрешность  $\varepsilon(x, t)$  можно представить в виде суммы ряда Фурье



$$\varepsilon(x, t) = \sum_m b_m(t) e^{ik_m x}, \quad (2.2.4)$$

причем период основной частоты ( $m = 1$ ) равен  $2L$ . Рассмотрим решение в интервале длины  $L$ , вследствие чего, ограничимся исследованием интервала волновых чисел  $k = m\pi/L$  соответствующих  $m = 0, 1, 2, \dots, M$ . Здесь  $M$  — число шагов разностной схемы  $\Delta x$  по координате, укладываемых в отрезке длины  $L$ .

Считая, что развитие погрешности во времени удовлетворяет *линейному* уравнению, можно рассмотреть развитие каждой гармоники в (2.2.4) *по отдельности*. Рассмотрим член ряда  $\varepsilon_m(x, t)$ . Будем искать решение в форме

$$\varepsilon_m(x, t) = e^{at} e^{ik_m t}, \quad (2.2.5)$$

При этом, отношения значений  $\varepsilon_m(x, t)$  на последовательных временных шагах по времени будут определяться *коэффициентом перехода*

$$G_m(x, t) \equiv \frac{\varepsilon_m(x, t + \Delta t)}{\varepsilon_m(x, t)} = \exp(a[k, x] \Delta t)$$

Подставляя (2.2.5) в разностное уравнение (2.2.2) получим выражение для  $G_m$

$$G_m = \cos(\beta_m) - i\nu \sin(\beta_m).$$

Здесь введены обозначения  $\beta_m = k_m \Delta x$ ,  $\nu = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$ . Схема Лакса устойчива при  $|G_m| \leq 1$  для всех  $m$ , что справедливо при выполнении неравенства, называемым условием устойчивости Куранта-Фридрихса-Леви (КФЛ)

$$|\nu| \leq 1. \quad (2.2.6)$$

Параметр  $\nu = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$  называется *числом Куранта*.

Важно отметить, что коэффициент перехода  $G_m$  зависит от величин шагов сетки по координате и времени, а также *от волнового числа*  $k_m = m\pi/L$ . Так как коэффициент перехода — комплексная величина, его можно переписать в форме

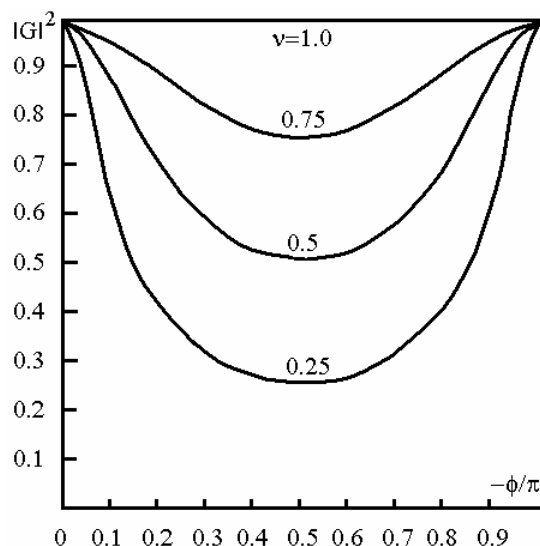
$$G_m \equiv |G_m| e^{i\varphi}. \quad (2.2.7)$$

Для конечно-разностной схемы Лакса коэффициент перехода имеет вид (см. рис. 6.)

$$G_m = \sqrt{\cos^2 \beta_m + \nu^2 \sin^2 \beta_m} \exp\left(i \arctan\left[-\nu \tan(\beta_m)\right]\right). \quad (2.2.8)$$



Фаза коэффициента перехода  $\varphi$  в схеме Лакса изменяется от 0 для малых волновых чисел, до  $-\pi$  для больших  $k$ . При числе Куранта равном 1 все гармоники распространяются без затухания. При числах Куранта меньших 1 низкочастотные и высокочастотные гармоники изменяются незначительно, в то время, как гармоники с конечными значениями  $k$  (обычно представляющие интерес) заметно затухают.



**Рис. 6** Коэффициент перехода для различных значений числа Куранта

Важно подчеркнуть, что выполнение условия КФЛ (2.2.6) обеспечивает устойчивость решения относительно малых возмущений (невозрастание возмущений), но это *не гарантирует* отсутствие искажений решения  $D$  разностного уравнения со временем. Спектральные компоненты с одинаковыми волновыми числами, независимо от амплитуды (составляют ли они малое возмущение  $\varepsilon$  или точное решение  $D$ ) затухают одинаково.

## Вопросы:

- 1) Что такое порядок погрешности аппроксимации разностной схемы (РС) ?
- 2) Как соотносятся согласованность, устойчивость и сходимость РС ?
- 3) Опишите методику анализа устойчивости разностных схем. Поясните, следующие понятия: “коэффициент перехода”, “число Куранта”.
- 4) Как влияет величина модуля и фазы коэффициента перехода на характер погрешности.
- 5) Почему важно знать зависимость коэффициента перехода от волнового числа.

### 3. Применение методов сеток для решения модельных уравнений

В этом разделе описаны различные конечно-разностные схемы, с помощью которых можно решать простейшие модельные уравнения. Мы ограничимся рассмотрением следующих модельных уравнений — волнового уравнения первого порядка и уравнения Бюргерса. Эти уравнения называются *модельными*, так как они используются для изучения свойств решений более сложных уравнений в частных производных. Для всех рассматриваемых модельных уравнений при некоторых граничных и начальных условиях известны аналитические решения. Зная эти решения, легко оценить и сопоставить различные конечно-разностные методы, используемые для решения более сложных уравнений в частных производных. Из множества существующих конечно-разностных методов решения уравнений в частных производных в этом разделе описаны в основном такие методы, которые обладают свойствами, характерными для *целого класса* аналогичных методов.

#### 3.1. Волновое уравнение и линейное уравнение переноса

Одномерным волновым уравнением называется следующее гиперболическое уравнение в частных производных второго порядка:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (3.1.1)$$

Это уравнение описывает распространение звуковых волн в однородной среде со скоростью  $c$ . Существует уравнение первого порядка, свойства решений которого близки к свойствам решения уравнения (3.1.1):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad c > 0. \quad (3.1.2)$$

Далее в качестве модельного уравнения будем использовать уравнение (3.1.2), которое носит название *одномерного линейного уравнения переноса*. Данное *линейное* уравнение является гиперболическим и описывает распространение волны со скоростью  $c$  вдоль оси  $x$ . Точное аналитическое решение уравнения (3.1.2) с начальными данными

$$u(x, 0) = F(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (3.1.3)$$

имеет вид

$$u(x, t) = F(x - ct). \quad (3.1.4)$$

## Конечно-разностные схемы для одномерного волнового уравнения первого порядка.

### Явный метод Эйлера

Этот метод приводит к двум простым явным одношаговым разностным схемам

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad (3.1.5)$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad (3.1.6)$$

с погрешностью аппроксимации  $O(\Delta t, \Delta x)$  и  $O(\Delta t, (\Delta x)^2)$  соответственно. Обе схемы имеют первый порядок точности, так как главный член в выражении для погрешности имеет первый порядок. Разностные схемы (3.1.5) и (3.1.6) *явные*, так как в каждое разностное уравнение входит лишь одно неизвестное  $u_j^{n+1}$ . В случае  $c > 0$  анализ устойчивости разностных схем (3.1.5) и (3.1.6) демонстрирует их *абсолютную неустойчивость*.

### Метод использования разностей против потока

Простую явную схему (3.1.5), построенную по методу Эйлера можно сделать устойчивой, если при аппроксимации производной по пространству использовать разности назад в случае, когда скорость волны  $c$  положительна. При этом разностные уравнения принимают следующий вид:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0. \quad (3.1.7)$$

Эта разностная схема имеет первый порядок точности с погрешностью аппроксимации  $O(\Delta t, \Delta x)$ . Анализ устойчивости показывает, что данная схема устойчива при

$$0 \leq \nu \leq 1, \quad (3.1.8)$$

где  $\nu = c \Delta t / \Delta x$ . Заметим, что при  $\nu \neq 1$  разностная схема вносит в решение *схемную вязкость*.

**Примечание:** схему (3.1.5) можно рассмотреть как вариант метода разностей против потока в приложении к волновому уравнению при  $c < 0$ .

## Схема Лакса

Данная схема была подробно рассмотрена в разделе 2.2, посвященном анализу устойчивости разностных схем. Напомним, что разностную схему (3.1.6) (метод Эйлера) можно сделать устойчивой, заменив  $u_j^n$  на пространственное среднее  $(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)/2$  и в результате придти к схеме Лакса:

$$\frac{u_j^{n+1} - (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)/2}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0. \quad (3.1.9)$$

Это явная одношаговая схема первого порядка точности с погрешностью аппроксимации  $O(\Delta t, (\Delta x)^2/\Delta t)$ . Она устойчива при  $\nu \leq 1$ . Схема Лакса отличается высоким уровнем схемной диссипации (см. раздел 2.2.).

## Схема Лакса—Вендроффа

Схему Лакса — Вендроффа можно построить, исходя из разложения в ряд Тейлора:

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t u_t + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 u_{tt} + O((\Delta t)^3) \quad (3.1.10)$$

Из волнового уравнения следует

$$u_t = -cu_x, u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

Перепишем уравнение (3.10) в виде

$$u_j^{n+1} = u_j^n - c\Delta t u_x + \frac{1}{2}c^2(\Delta t)^2 u_{xx} + O((\Delta t)^3) \quad (3.1.11)$$

и заменим производные  $u_x$  и  $u_{xx}$  используя центральные разности второго порядка. В результате получим широко известную схему Лакса — Вендроффа

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{c\Delta t}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{c^2(\Delta t)^2}{2(\Delta x)^2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n). \quad (3.1.12)$$

Это явная одношаговая схема второго порядка точности с погрешностью аппроксимации  $O((\Delta x)^2, (\Delta t)^2)$ , устойчивая при  $\nu \leq 1$ . Для схемы Лакса — Вендроффа характерно запаздывание по фазе, исключение составляют лишь гармоники с большими волновыми числами при  $\sqrt{0.5} \leq \nu \leq 1$ .

## Двухшаговый метод Лакса—Вендроффа

Для решения ряда нелинейных уравнений, например уравнений, описывающих движение невязкой жидкости, можно использовать двухшаговый вариант метода Лакса — Вендроффа. Применяя этот метод для решения волнового уравнения, получаем явную *двухшаговую* *трехслойную по времени* разностную схему:

$$\text{шаг 1:} \quad \frac{u_{j+1/2}^{n+1/2} - (u_{j+1}^n + u_j^n)/2}{\Delta t/2} + c \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = 0 \quad (3.1.13)$$

$$\text{шаг 2:} \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1/2}^{n+1/2} - u_{j-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} = 0 \quad (3.1.14)$$

Эта схема имеет второй порядок точности с погрешностью аппроксимации  $O((\Delta x)^2, (\Delta t)^2)$  и устойчива при  $\nu \leq 1$ . Поясним смысл величин с дробными индексами. Как следует из раздела 2.1., можно составить конечно-разностные аппроксимации дифференциальных операторов входящих в уравнение для произвольного расположения узлов в пространстве. Разобьем исходный временной шаг на два и введем “дополнительный” “ $j + 1/2$ ” слой по времени (см. рис. 7). Тогда шаг 1 схемы представляет собой метод Лакса, записанный на полушаге по времени, а шаг 2 — это метод с перешагиванием, примененный на оставшемся полушаге по времени (от “ $j + 1/2$ ” к “ $j + 1$ ”). В случае линейного волнового уравнения первого порядка двухшаговый метод Лакса-Вендроффа эквивалентен описанному в предыдущем разделе методу Лакса-Вендроффа.

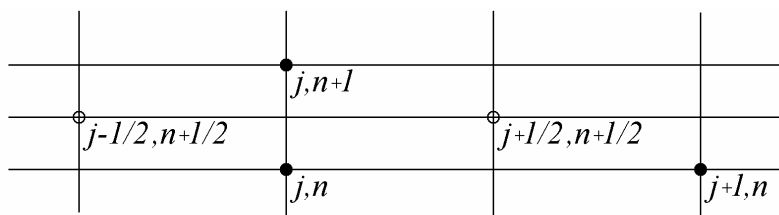


Рис. 7 Разностная сетка для метода Лакса-Вендроффа

## Метод Мак-Кормака

Метод Мак-Кормака широко применяется для решения уравнений газовой динамики. Фактически это один из вариантов двухшагового метода Лакса — Вендроффа, не требующий вычисления значений искомой функции в точках  $j + 1/2$  и  $j - 1/2$ . Применяя явный метод предиктор-корректор к линейному волновому уравнению, получаем следующую разностную схему:



предиктор: 
$$\tilde{u}_j^{n+1} = u_j^n - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{j+1}^n - u_j^n), \quad (3.1.15)$$

корректор: 
$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2} \left[ u_j^n + \tilde{u}_j^{n+1} - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{u}_j^{n+1} - \tilde{u}_{j-1}^{n+1}) \right] \quad (3.1.16)$$

Первоначально (предиктор) находится оценка  $\tilde{u}_j^{n+1}$  величины  $u$  на  $(n+1)$ -м шаге по времени, а потом (корректор) определяется ее окончательное значение. Отметим, что в предикторе производная  $du/dx$  аппроксимируется *разностями вперед*, а в корректоре — *разностями назад*. При решении ряда задач бывает полезным поступить и наоборот. К подобным задачам относятся, в частности, задачи с движущимися разрывами. Для линейного волнового уравнения схема Мак-Кормака эквивалентна схеме Лакса—Вендроффа (покажите что условия устойчивости и порядок точности для данных схем совпадают).

## Метод Бима и Уорминга

Бим и Уорминг предложили несколько изменить метод Мак-Кормака, используя как на шаге предиктор, так и на шаге корректор разности назад (разности против потока). При  $c > 0$  данный метод приводит к разностной схеме:

предиктор: 
$$\tilde{u}_j^{n+1} = u_j^n - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_j^n - u_{j-1}^n), \quad (3.1.17)$$

корректор: 
$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2} \left[ u_j^n + \tilde{u}_j^{n+1} - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{u}_j^{n+1} - \tilde{u}_{j-1}^{n+1}) - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_j^n - 2u_{j-1}^n + u_{j-2}^n) \right] \quad (3.1.18)$$

Благодаря тому, что в правую часть уравнения (3.1.18) включена односторонняя с разностями против потока аппроксимация второй производной, схема имеет второй порядок точности с погрешностью аппроксимации  $O((\Delta x)^2, \Delta x \Delta t, (\Delta t)^2)$ . Если подставить (3.1.17) в (3.1.18), то получится одношаговый алгоритм

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \nu (u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{1}{2} \nu (\nu - 1) (u_j^n - 2u_{j-1}^n + u_{j-2}^n) \quad (3.1.19)$$

Разностная схема устойчива при  $0 \leq \nu \leq 2$ , причем при  $\nu = 1$  и  $\nu = 2$  данная схема имеет *бесконечный порядок точности*. Для метода с разностями против потока при  $0 < \nu \leq 1$  характерно в основном опережение по фазе, а при  $1 < \nu \leq 2$  — отставание.

**Примечание:** при  $0 < \nu \leq 1$  метод Лакса — Вендроффа и метод Бима и Уорминга с разностями против потока имеют *противоположные ошибки по фазе*, поэтому дисперсионную ошибку можно существенно уменьшить, применив линейную комбинацию

двух этих методов. Метод Фромма с равной нулю средней ошибкой по фазе основан именно на этой идее.

## Неявный метод Эйлера

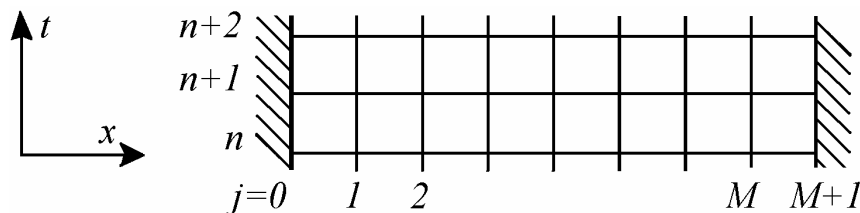
Для определенности, рассмотрим решение линейного уравнений переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, c > 0. \quad (3.1.20)$$

в области  $x \in [0, 1]$  с произвольными начальными условиями:

$$u(x, t = 0) = F(x). \quad (3.1.21)$$

Граничные условия зададим следующим образом: на левой границе постоянное значение, соответствующее начальному условию:  $u(x = 0, t) = F(x = 0)$ . На правой границе положим свободное граничное условие, т.е. пусть волна свободно покидает расчетную область.



**Рис. 8** Разностная сетка для неявного метода Эйлера

Используем неявную разностную схему

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{c}{2\Delta x} (u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) = 0. \quad (3.1.22)$$

Это схема первого порядка точности с погрешностью аппроксимации  $O(\Delta t, (\Delta x)^2)$ . Анализ устойчивости показывает, что *схема устойчива при любом шаге по времени, т.е. абсолютно устойчива*. Однако, при использовании данной схемы на каждом шаге по времени необходимо решать систему алгебраических уравнений. Перепишем уравнение (3.1.22) разделив неизвестные на последующих шагах по времени:

$$\frac{v}{2} u_{j+1}^{n+1} + u_j^{n+1} - \frac{v}{2} u_{j-1}^{n+1} = u_j^n. \quad (3.1.23)$$

Переобозначим коэффициенты в уравнении (3.1.23):

$$au_{j+1}^{n+1} + du_j^{n+1} + bu_{j-1}^{n+1} = C. \quad (3.1.24)$$

Здесь  $a = v/2$ ,  $b = -v/2$ ,  $d = 1$ ,  $C = u_j^n$ . Пусть расчет проводится на изображенной на рис. 8 сетке, состоящей из  $M + 2$  узлов по координате  $x$ . Начальные условия (3.1.21) заданы при

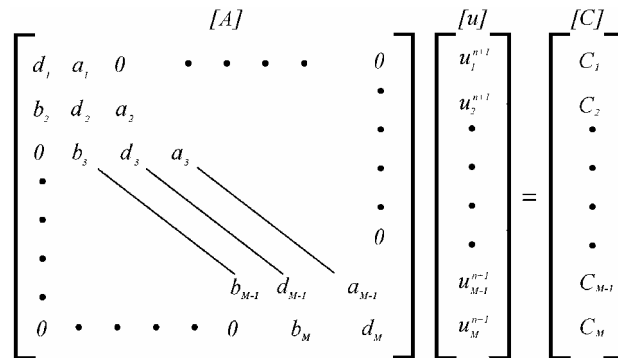
$n = 0$ . В соответствии с граничными условиями на левой границе расчетной области величина  $u_0^{n+1}$  задана и равна  $u_0$ . Волна распространяется вдоль оси  $x$  и, следовательно, значения непосредственно на правой границе можно рассчитать методом характеристик (если  $\nu = 1$ , то  $u_{M+1}^{n+1} = u_M^n$ ). На заданной сетке разностная схема (3.1.24) сводится к решению системы  $M$  линейных алгебраических уравнений на  $(n+1)$  шаге по времени (см. рис.9):

$$Au = C \quad (3.1.25)$$

В данной системе уравнений коэффициенты  $C_1$  и  $C_M$  определяются соотношениями

$$C_1 = u_1^n - bu_0^{n+1}, C_M = u_M^n - au_{M+1}^{n+1} \quad (3.1.26)$$

где  $u_0^{n+1}$  и  $u_{M+1}^{n+1}$  известны из граничных условий.



$$\begin{bmatrix} d_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & d_2 & a_2 & \dots & 0 \\ 0 & b_3 & d_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & b_{M-1} & d_{M-1} & a_{M-1} \\ 0 & \dots & 0 & b_M & d_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ u_{M-1}^{n+1} \\ u_M^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_{M-1} \\ C_M \end{bmatrix}$$

**Рис. 9** Матричная форма записи системы уравнений (3.1.25)

В уравнении (3.1.25) матрица  $A$  — трехдиагональная. Для уравнений с трехдиагональной матрицей имеется множество эффективных методов решения. Рассмотрим метод прогонки, предложенный Томасом [Thomas, 1949]. Вначале производится замена диагональных элементов  $d_i$  элементами

$$d_i - \frac{b_i}{d_{i-1}} a_{i-1}, \quad i = 2, 3, \dots, M \quad (3.1.27)$$

и коэффициентов  $C_i$  коэффициентами

$$C_i - \frac{b_i}{d_{i-1}} C_{i-1}, \quad i = 2, 3, \dots, M \quad (3.1.28)$$

После этого производится вычисление неизвестных величин, начиная со значения  $u$  на границе  $u_M^{n+1} = C_M / d_M$ , и далее, по рекуррентной формуле

$$u_j^{n+1} = \frac{C_j - a_j u_{j+1}^{n+1}}{d_j}, \quad i = M-1, M-2, \dots, 1. \quad (3.1.29)$$

Более подробно метод описывается в литературе. При использовании неявных схем на каждом шаге по времени приходится проводить больше вычислений, чем при использовании явных схем. При использовании схемы обладающей безусловной устойчивостью, формально можно проводить вычисления со сколь угодно большим шагом по времени. Однако, на практике величина шага по времени ограничивается двумя факторами: характерным временным масштабом изучаемых процессов, и ростом погрешности аппроксимации с увеличением шага по времени.

Как показывает анализ устойчивости, неявный метод Эйлера обладает сильной диссипацией в области конечных значений волновых чисел. Коэффициент перехода имеет вид

$$G = \frac{1 - i\nu \sin \beta}{1 + \nu^2 \sin^2 \beta}$$

где  $\nu = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$  — число Куранта,  $\beta = k_m \Delta x$  — волновое число.

## 3.2. Уравнение Бюргерса

На практике, как правило, представляет интерес численное решение нелинейных задач. При этом значения ряда величин таких, к примеру, как давление, плотность, температура и скорость определяются в ходе решения нелинейной системы уравнений в частных производных.

На примере линейного волнового уравнения мы рассмотрели ряд методов и подходов, применяемых при решении маршевых задач представленных в форме дифференциальных уравнений в частных производных. Большинство вышеизложенных схем имеют аналоги для решения нелинейных уравнений. Рассмотрим некоторые из них на примере уравнения Бюргерса, описывающего нестационарную конвекцию (см. пример 2 раздела 1.1). Для построения разностных будем использовать дивергентную форму уравнений (1.1.11), (1.1.12), записанных с учетом и без учета вязкости, соответственно:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.2.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (3.2.2)$$

где  $F = u^2/2$ . Прежде всего, рассмотрим гиперболическое уравнение (3.2.2), не учитывающее вязкость среды

## Методы решения уравнение Бюргерса (невязкое течение)

### Метод Лакса

Вследствие внесения схемной диссипации схемы первого порядка точности редко используются для решения гиперболических уравнений в частных производных. Как пример подобной схемы рассмотрим метод Лакса. Как и ранее, заменим  $u_j^n$  на пространственное среднее  $(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)/2$ , а для аппроксимации производной по координате используем центральные разности:

$$u_j^{n+1} = \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{F_{j+1}^n - F_{j-1}^n}{2}. \quad (3.2.3)$$

Условие устойчивости схемы Лакса имеет вид

$$\eta = \left| \frac{\Delta t}{\Delta x} u_{\max} \right| \leq 1, \quad (3.2.4)$$

где  $u_{\max}$  - максимальное значение функции  $u(x, t)$  в расчетной области (это — следствие нелинейности уравнения (3.2.2)). Важное достоинство метода Лакса — *его монотонность*, то есть отсутствие осцилляций решения. Схемы более высокого порядка, как правило, не являются монотонными. При моделировании движения ударной волны (разрыва решения), можно моделировать область разрыва, используя монотонную схему, а в остальной области использовать схемы более высокого порядка, не вносящие столь значительную численную диссипацию.

### Метод Лакса — Вендроффа

Метод Лакса — Вендроффа [Lax, Wendroff, 1960] — один из первых конечно-разностных методов второго порядка точности, созданных для решения гиперболических уравнений в частных производных. Как указывалось выше, разностную схему можно получить используя разложение функции в ряд Тейлора

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + \Delta t u_t + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 u_{tt} + O((\Delta t)^3) \quad (3.2.5)$$

Как и ранее, первую производную по времени выразим из исходного уравнения в частных производных. Для второй производной приходится использовать более сложные преобразования. Перепишем исходное уравнение в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial F}{\partial x}. \quad (3.2.6)$$



Дифференцируя его по времени, получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial t} \right), \quad (3.2.7)$$

При этом порядок дифференцирования функции  $F$  изменен. Так как  $F = F(u)$ , распишем производную

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = -u \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \frac{\partial F}{\partial t} &= \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = u \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

Следовательно, можно произвести следующую замену:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -u \frac{\partial F}{\partial x}. \quad (3.2.9)$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial F}{\partial x} \right). \quad (3.2.10)$$

Подставив выражения для производных в разложение функции в ряд Тейлора (3.2.6), получим

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) - \Delta t \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial F}{\partial x} \right) + \dots \quad (3.2.11)$$

Заменим производные, используя центральные разности второго порядка. В результате получим широко известную схему Лакса — Вендроффа

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{F_{j+1}^n - F_{j-1}^n}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \left[ u_{j+1/2}^n (F_{j+1}^n - F_j^n) - u_{j-1/2}^n (F_j^n - F_{j-1}^n) \right] \quad (3.2.12)$$

При этом значение функции между узлами  $u_{j+1/2}^n$  вычисляется как среднее значение

$$u_{j+1/2}^n = \frac{u_j^n + u_{j+1}^n}{2}, \quad u_{j-1/2}^n = \frac{u_j^n + u_{j-1}^n}{2}. \quad (3.2.13)$$

Условие устойчивости разностной схемы построенной по методу Лакса — Вендроффа: такое же, как в методе Лакса..

## Метод Мак-Кормака

Как указано выше, метод Мак-Кормака представляет собой модификацию метода Лакса — Вендроффа на основе метода предиктор-корректор. То, что не требуется вычислять значения искомой функции на полушагах по координате (в точках  $j + 1/2$  и  $j - 1/2$ ) делает метод Мак-

Кормака удобным для решения *нелинейных уравнений* в частных производных. Для уравнения Бюргера невязкого течения схема Мак-Кормака имеет вид

предиктор: 
$$\tilde{u}_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1}^n - F_j^n), \quad (3.2.14)$$

корректор: 
$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2} \left[ u_j^n + \tilde{u}_j^{n+1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{F}_j^{n+1} - \tilde{F}_{j-1}^{n+1}) \right]. \quad (3.2.15)$$

Условие устойчивости разностной: такое же, как в методе Лакса — Вендроффа..

## Методы решения уравнения Бюргера (вязкое течение)

Полное нелинейное уравнение Бюргера (1.1.11)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

является параболическим уравнением в частных производных. Оно используется как модельное для ряда уравнений гидромеханики. Для уравнения Бюргера известны точные аналитические решения при некоторых начальных и граничных условиях (см. пример 2 в разделе 1.1). В дальнейшем используем уравнение в форме (3.2.1).

## Двухшаговый метод Лакса— Вендроффа

Применяя данный метод для решения полного нелинейного уравнения Бюргера, можно получить явную *двухшаговую трехслойную по времени* разностную схему:

$$1) \quad u_j^{n+1/2} = \frac{1}{2} (u_{j+1/2}^n - u_{j-1/2}^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n) + r \left[ (u_{j-3/2}^n - 2u_{j-1/2}^n + u_{j+1/2}^n) + (u_{j+3/2}^n - 2u_{j+1/2}^n + u_{j-1/2}^n) \right] \quad (3.2.16)$$

$$2) \quad u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1/2}^{n+1/2} - F_{j-1/2}^{n+1/2}) + r (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n). \quad (3.2.17)$$

Здесь  $r = \mu \Delta t / (\Delta x)^2$ . Данная разностная схема имеет, первый порядок точности с погрешностью аппроксимации  $O(\Delta t, (\Delta x)^2)$ . Точное условие устойчивости этой схемы имеет вид

$$\eta = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \left( (u_{\max})^2 \Delta t + \frac{2}{\text{Re}} \right) \leq 1. \quad (3.2.18)$$

## Метод Мак-Кормака

Применяя метод Мак-Кормака к полному уравнению Бюргера, можно получить следующую двухшаговую разностную схему

предиктор: 
$$\tilde{u}_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1}^n - F_j^n) + r(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n), \quad (3.2.19)$$

корректор 
$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2} \left[ u_j^n + \tilde{u}_j^{n+1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{F}_j^{n+1} - \tilde{F}_{j-1}^{n+1}) + r(\tilde{u}_{j+1}^{n+1} - 2\tilde{u}_j^{n+1} + \tilde{u}_{j-1}^{n+1}) \right] \quad (3.2.20)$$

Эта схема имеет второй порядок точности, как по пространству, так и по времени. Эта разностная схема получена при аппроксимации производной  $\partial F / \partial x$  на шаге предиктор разностями вперед, а на шаге корректор — разностями назад. Найти точное условие устойчивости метода Мак-Кормака при решении уравнения Бюргерса не удастся, однако можно использовать эмпирическую формулу [Tannehill et al., 1975]

$$\eta = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \left[ |u_{\max}| \Delta x + \frac{2}{\text{Re}} \right] \leq 1 \quad (3.2.21)$$

### 3.3. Задания для самостоятельного решения

#### Решение дифференциальных уравнений в частных производных

Ниже приведены рекомендации к выполнению работ по решению линейного уравнения переноса и нелинейного уравнения Бюргерса методами сеток. При выполнении работ используйте сетку, состоящую из 100 ячеек, и проведите расчет до  $t=100$ . Решите задачи для значений параметра устойчивости  $\nu = 1.0, 0.6, 0.3$ . Аналитически найдите коэффициент перехода  $G$  для используемой разностной схемы. Продемонстрируйте и обоснуйте связь коэффициента перехода разностной схемы и характер решения. В пунктах **1-3** приведен набор начальных и граничных условий которые необходимо использовать при выполнении обеих работ. В каждой работе сформировано по 6 вариантов заданий в расчете на группу в 12 человек <sup>1</sup>.

**Пункт 1.** Используйте начальные

$$u_0(x) = u(x, t = 0) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \in [-1, 0] \\ 0, & \text{при } x \in (0, 1] \end{cases}$$

и граничные условия  $u(x = -1, t) = 1, u(x = 1, t) = 0$ .

**Пункт 2.** Используйте начальное условие  $u(x, 0) = \sin(\pi x / L), -L \leq x \leq L$ , при  $L=1$

и периодические граничные условия.

**Пункт 3.** Рассмотрите начальные условия

$$u_0(x) = u(x, t = 0) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \in [-1/2, 1/2] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

<sup>1</sup> Студентам рекомендуется выполнять задания попарно.

и периодические граничные условия при  $L = 1$ . Как эволюционирует решение на больших временах ?

### Работа 1. Решение линейного уравнений переноса.

Численно решите уравнение переноса (3.1.2) с начальными и граничными условиями указанными в пунктах 1-3. Положите  $c=1$ .

#### Варианты заданий к работе 1.

	Конечно-разностная схема.
1.	Разности против потока
2.	Схема Лакса
3.	Схема Лакса- Вендроффа.
4.	Схема Мак-Кормака
5.	Схема Бима и Уорминга
6.	Неявный метод Эйлера.

### Работа 2. Решение нелинейного уравнения Бюргерса.

Численно решите уравнение Бюргерса для случая вязкого и невязкого течений. Исследуйте как трансформируется решение уравнения с изменением числа Рейнольдса в от 1 до 100.

#### Варианты заданий к работе 2

	Вязкий поток, везде пункт 1	Невязкий поток, различные задачи
1	Схема Лакса—Вендроффа (2 ш.)	Схема Лакса, пункт 2.
	Схема Мак-Кормака	
2	Схема Лакса—Вендроффа (2 ш.)	Схема Лакса—Вендроффа, пункт 2.
	Схема Мак-Кормака	
3	Схема Лакса—Вендроффа (2 ш.)	Схема Мак-Кормака, пункт 2.
	Схема Мак-Кормака	
4	Схема Лакса—Вендроффа (2 ш.)	Схема Лакса, пункт 3.
	Схема Мак-Кормака	
5	Схема Лакса—Вендроффа (2 ш.)	Схема Лакса—Вендроффа, пункт 3.
	Схема Мак-Кормака	
6	Схема Лакса—Вендроффа (2 ш.)	Схема Мак-Кормака, пункт 3.
	Схема Мак-Кормака	



## Литература

- 1) Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. — М.: Мир, 1988. 352 с.
- 2) Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидродинамика и теплообмен. — М.: Мир, 1990. Т. 1. 382 с.
- 3) Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. — М.: Наука, 1973. 396 с.
- 4) Калиткин Н.Н. Численные методы. — М.: Наука, 1978. 508 с.